KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

www.postis.pl

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały pomocnicze dla nauczyciela

Część 2.
Matematyka kl. I LO

Projekt ACE – aktywna, kreatywna
i przedsiębiorcza młodzież. Innowacyjne
programy kształcenia w obrębie
ekonomii i przedsiębiorczości

Lublin 2013

Program jest zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego dla liceów ogólnokształcących w zakresie podstawowym zgodnie z: Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz. U. poz. 977) oraz Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 7 lutego 2012 r. w sprawie ramowych planów nauczania w szkołach publicznych (Dz. U. poz. 204).

Zespół ekspercki:
Katarzyna Ługowska – psycholog
Piotr Barszcz – psycholog
Kinga Sarad-Deć – pedagog
Joanna Rusinkiewicz – pedagog
Milena Potręć – nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna – nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman – specjalista ds. technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń – specjalista ds. technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak – specjalista ds. mediów
Grzegorz Kozak – specjalista ds. mediów
Agnieszka Wróblewska – specjalista ds. przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda – specjalista ds. przedsiębiorczości
Zbigniew Biały – specjalista ds. ekonomii
Ewa Oleksiejczuk – specjalista ds. ekonomii
Agata Linkiewicz – specjalista ds. matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch – specjalista ds. matematyki
Katarzyna Korona – doradca metodyczny
Dorota Ulikowska – doradca metodyczny

Koordynator merytoryczny:
dr Agnieszka Lewicka-Zelent

Korekta:
Elżbieta Amborska

Łamanie i skład:
Info Studio, Lublin

Projekt okładki:
Maciej Wasilewski

ISBN 978-83-64395-12-3

Prawa autorskie zastrzeżone dla © Stowarzyszenie Postis,
© Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego sp. z o.o.

Druk i oprawa:
MULTIPRESS G. Wodecki, D. Wodecka s.c.

SPIS TREŚCI

Uwaga: Treści rozszerzone zostały oznaczone: *

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań zatytułowanym „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Ja w świecie liczb

Z liczbami spotykasz się na każdym kroku, każdego dnia, dlatego musisz sprawnie wykonywać różnego rodzaju działania na liczbach rzeczywistych. Przypomnij sobie, czego nauczyłeś się w gimnazjum, i postaraj się jak najlepiej opanować nowe wiadomości i umiejętności, które w życiu na pewno ci się przydadzą.

To już potrafię:

1. Odczytać i zapisać liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
2. Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych;
3. Zamienić ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienić ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
4. Zaokrąglić rozwinięcia dziesiętne liczb;
5. Obliczyć wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne;
6. Szacować wartości wyrażeń arytmetycznych;
7. Stosować obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.);
8. Interpretować liczby wymierne na osi liczbowej;
9. Obliczyć odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
10. Wskazać na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3, x < 5$;.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 W 2005 roku Szanghaj liczył około 14 600 000 mieszkańców. W postaci wykładniczej liczbę tę zapisuje się jako:

a) $146 \cdot 10^5$

b) $14{,}6 \cdot 10^6$

c) $0{,}146 \cdot 10^8$

d) $1{,}46 \cdot 10^7$

Zad.2 Liczbę $\sqrt{72}+\sqrt{32}-\sqrt{98}$ można zapisać w postaci:

a) $2\sqrt{6}+4\sqrt{2}-7\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$
d) $17\sqrt{2}$

Zad.3 Dane są liczby zapisane w systemie rzymskim, największa z nich to:

a) MCMLX
b) MCMXCIX
c) MMVII
d) MCMLXXIV

Zad.4 Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{7}{\sqrt{5}}$, należy mianownik tego ułamka pomnożyć przez:

a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{5}-1$
d) $\sqrt{5}+1$

Zad.5. Drut o długości 45 m przecięto na trzy części, których stosunek długości jest równy 1: 3: 5. Najdłuższa z tych części ma długość:

a) $15\ m$
b) $5\ m$
c) $25\ m$
d) $9\ m$

Zad.6 Przybliżona wartość$\sqrt{13}$ wynosi:

a) 3,62
b) 3,60
c) 3,61
d) 3,63

Zad.7 Ile jest liczb ujemnych wśród liczb przeciwnych do: $-\frac{1}{4}, 2,\ \frac{3}{5},\ 5\frac{1}{2}, -0,75$?

a) 5
b) 3
c) 2
d) 4

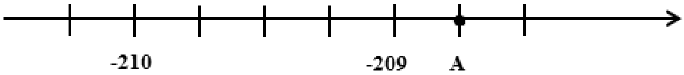
Zad.8 O godzinie 4^{00} termometr wskazywał $-12°C$, a o godzinie 10^{00} ten sam termometr wskazywał $+2°C$. Różnica temperatur w tym dniu wynosiła:

a) -10
b) 14
c) -14
d) 10

Zad.9 Jeśli jest godzina 13^{14}, to do godziny 15^{32} pozostało sekund:

a) $10\ 000$
b) 8280
c) 7500
d) 2180

Zad.10. Punkt A na osi liczbowej ma współrzędne:



a) $-208{,}75$

b) $-209{,}25$

c) $208{,}75$

d) $209{,}75$

ZADANIA OTWARTE

1. Masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24} kg$, masa Księżyca $7 \cdot 10^{22} kg$. Ile wynosi stosunek masy Ziemi do masy Księżyca? Wynik podaj w przybliżeniu.

2. Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}$?

3. Zapisz wyrażenie $\left[\frac{(a^7:a^5)^3 \cdot a^4}{a^{13}:a^2}\right]^3$ w postaci potęgi liczby a

4. Z dwóch przystani na rzece odległych od siebie o 100 km wyruszają dwie łódki. Jedna płynie z A do B z prędkością 12 km/h, druga z B do A z prędkością 13 km/h. Po jakim czasie łódki się miną?

5. Jednego dnia cenę pewnego towaru zwiększono o 15%, zaś następnego dnia zmniejszono o 20%. Oblicz początkową cenę tego towaru, jeśli ostatecznie po tych zmianach wynosiła ona 345 zł.

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	4	C	C	B	C	B	A

Zadania otwarte

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – Masa ziemi – $6 \cdot 10^{24} kg$ y – Masa księżyca – $7 \cdot 10^{22} kg$ $\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{7 \cdot 10^{22} kg} = \frac{6}{7} \cdot 10^2 = \frac{600}{7} \approx 85{,}714$
2	$\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}} = \frac{4-(7-4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{20}{9}} = \frac{9}{20}$ $1{,}8 - 100\%$ $\frac{9}{20} - x$ $45 = 1{,}8x \Rightarrow x = 25\%$

3	$\left[\frac{(a^7 : a^5)^3 \cdot a^4}{a^{13} : a^2}\right]^3 = \left[\frac{(a^2)^3 \cdot a^4}{a^{10}}\right]^3 = \left[\frac{a^{10}}{a^{10}}\right]^3 = a^0$
4	x – czas do spotkania $12x$ – droga I łódki $13x$ – droga II łódki $14x + 13x = 100 \Rightarrow x = 4$ Odp. Łódki miną się po 4 godzinach.
5	x – cena początkowa $x + 0{,}15x - 0{,}20 \cdot 1{,}15x = 345 \Rightarrow x = 375$ zł Odp. Początkowa cena wynosiła 375 zł.

1.1 Zbiory liczbowe

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości i inne wytwory dzieł ludzkich, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próbę liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano dobra, dni, czy np. ludzi w konkurencyjnej grupie. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce[1].

➡ Zbiór liczb naturalnych (N) – nazywamy zbiór liczb 0,1,2,3,4,5,6,7,8...

Zapis matematyczny zbioru:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Zbiór ten jest zbiorem nieskończonym. Najmniejsza liczba naturalna w tym zbiorze to 0. Największa liczba naturalna nie istnieje. Podzbiorem liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych dodatnich:

$\mathbb{N}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\} = \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0}\}$

➡ Zbiór liczb całkowitych (Z) – stanowią wszystkie liczby naturalne **N** i liczby do nich przeciwne ...–5,–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,5...

Zapis matematyczny zbioru:

$\mathbb{Z} = \{\dots, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$

Zbiór liczb całkowitych jest zbiorem nieskończonym. Nie istnieje najmniejsza i największa liczba całkowita. Zbiór ten możemy podzielić na dwa podzbiory: liczb całkowitych dodatnich oznaczanych jako $\mathbf{C}_+ = \{1,2,3,\dots\}$ oraz liczb całkowitych ujemnych oznaczanych jako $\mathbf{C}_- = \{\dots,-3,-2,-1\}$.

Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb, 10.02.2013

Zbiór liczb wymiernych (W) to zbiór wszystkich liczb, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i q jest różne od 0. Jest to zbiór nieskończony. Postać p/q liczby wymiernej nazywamy postacią ułamkową tej liczby.

Podzbiorem liczb wymiernych jest zbiór liczb naturalnych i całkowitych. Oznacza to, że każda liczba całkowita i naturalna jest jednocześnie liczbą wymierną.

Przykłady liczb wymiernych[2]:

$$-0.04=\frac{-4}{100}=\frac{-1}{25}$$
$$\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$$
$$-\sqrt[3]{27}=-3=\frac{-3}{1}$$
$$0.166(6)=\frac{1}{6}$$
$$5=\frac{5}{1}$$

Rysunek 1-1 – Liczby wymierne

Jak widać, każdą z nich da się zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Zbiór liczb niewymiernych (NW) – nazywamy zbiór liczb, które nie dadzą się przedstawić w postaci ułamka p/q, gdzie p i q należą do zbioru liczb całkowitych i dodatkowo q jest różne od 0.

Przykłady liczb niewymiernych[3]:

$$\pi$$
$$\sqrt[2]{2}$$
$$-\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[5]{7}$$
$$\sqrt[2]{\pi}$$
$$\frac{1}{\pi}$$

Rysunek 1-2 – Liczby niewymierne

Zbiór liczb rzeczywistych (R) – jest sumą zbiorów liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych. Jest uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych.

Przykłady liczb rzeczywistych[4]:

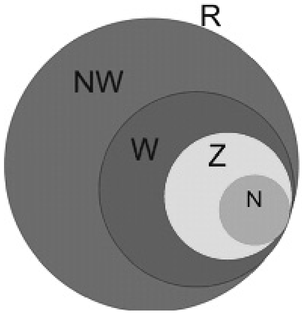
$$0$$
$$\pi$$
$$-0.123$$
$$\sqrt{5}$$
$$\sqrt[5]{7}$$
$$-3$$
$$\frac{3}{4}$$
$$1230$$

Rysunek 1-3 – Liczby rzeczywiste

2 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png, 10.02.2013
3 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png, 10.02.2013
4 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png, 10.02.2013

Zbiór liczb rzeczywistych dzieli się na dwa podzbiory: zbiór liczb rzeczywistych **dodatnich** $\mathbb{R}_+$ i **ujemnych** $\mathbb{R}_-$.

Zależności między zbiorami liczbowymi:



Symbol $\subset$ czytamy „zawiera się".

- $N \subset Z$
- $N \subset W$
- $Z \subset W$
- $W \subset R$
- $NW \subset R$

Rysunek 1-4 – Zależności między zbiorami liczbowymi

ZADANIA

1.1.1 Z podanych liczb wypisz liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne. Które z nich mają rozwinięcie nieskończone okresowe?

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{2}{13}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 44, 0, (123), $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{27}$, −3, 16, $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt[3]{5}$, −5

Odpowiedź:

0, (6); 0,125; −0,(153846); 1,118…; 1,5707…; 44; 0,123123…; 1,732…; −3; −3,16; 1,4142…; 0; 1,709…; −5

N={0; 44}, Z={−5;−3; 0; 44 }, W={−5; −3,16; −3; $-\frac{2}{13}$, 0; 0,(123); ;$\frac{2}{3}$, 44}, NW={$\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$}

1.1.2 Wypisz wszystkie elementy zbioru A wiedząc, że A jest zbiorem:

a) wszystkich całkowitych, jednocyfrowych liczb nieparzystych,

b) wszystkich liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 20, podzielnych przez 3,

c) wszystkich dwucyfrowych liczb pierwszych mniejszych od 30,

d) wszystkich dodatnich dzielników liczby 12.

Odpowiedź: a) 1, 3, 5, 7, 9; b) 3, 6, 9, 12, 15,18; c) 11, 13, 17, 19, 23, 29; d) 1, 2, 3, 6, 12

1.1.3 Wypisz wszystkie elementy zbioru A, jeśli:

a) A = $\{x: x|20 \wedge x > 0\}$

b) A = $\{x: x \in N \wedge x < 20 \wedge NWD(x,18) = 1\}$

c) A = $\{x: x \in N \wedge x < 25 \wedge NWD(x,24) = 2\}$

d) A = $\{x: x \in N \wedge NWW(x,12) = 48\}$

Odpowiedź: a) A = {1,2,4,5,10, 20}; b) A = {1,5,7,11, 13, 17, 19}; c) A = {2,10, 14 }; d) A = {48}

Ciekawostka

Zbiór liczb rzeczywistych najprościej określamy mówiąc, że są to „wszystkie liczby". Jest to pewne uproszczenie, ponieważ istnieją liczby, które nie należą do zbioru liczb rzeczywistych – są nimi liczby zespolone.

Zbiór liczb zespolonych został wprowadzony ze względu na to, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie można było wykonywać pierwiastkowania liczb ujemnych. Liczby zespolone mają postać: $\boldsymbol{a + b \cdot i}$, gdzie $\boldsymbol{i} = \left(\sqrt{-1}\right)$ nazywa się jednostką urojoną. Liczba a jest nazywana częścią rzeczywistą, liczba b częścią urojoną.

1.2 Różne postacie liczb rzeczywistych

Teraz nauczę się:

Przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków i potęg).

Po usystematyzowaniu wiedzy na temat zbiorów liczbowych, zastanówmy się, w jaki sposób możemy przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego czy ułamka dziesiętnego okresowego).

Aby otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby zapisanej w postaci ułamka zwykłego, należy podzielić jego licznik przez mianownik, np. $\frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{25} = 0{,}04; \frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots$

A w jaki sposób przejdziemy z rozwinięcia dziesiętnego na postać ułamka zwykłego?

Przykład 1

Zapisz liczbę $0,333\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$0,333\ldots = x\ /\cdot 10$

$3,333\ldots = 10x$

$3 + 0,333\ldots = 10x$

$3 + x = 10x$

$3 = 9x /: 9$

$x = \frac{3}{9}$ ostatecznie otrzymujemy:

$x = \frac{1}{3}$

Przykład 2

Zapisz liczbę $0,(125)$ w postaci ułamka zwykłego

$0,(125) = 0,125125\ldots$

$0,125125\ldots = x\ /\cdot 1000$

$125,125125\ldots = 1000x$

$125 + 0,125125\ldots = 1000x$

$125 + x = 1000x$

$125 = 999x /: 999$

szukanym ułamkiem jest:

$x = \frac{125}{999}$

Przykład 3

Zapisz liczbę $3,7235235235\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$3,7235235235\ldots = x\ /\cdot 10$

$37,235235235\ldots = 10x\ /\cdot 1000$

$37235,235235\ldots = 10000x$

Jeżeli: $37235,235235\ldots - 37,235235235\ldots = 37198$, czyli

$10000x - 10x = 37198,$

$9990x = 37198\ /: 9990$

więc $x = \frac{37198}{9990} = \frac{18599}{4995}$

Nie wszystkie liczby rzeczywiste można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego skończonego czy też rozwinięcia nieskończonego okresowego. **W takiej formie można zapisać wszystkie liczby wymierne.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Stosując algorytm podany powyżej wykaż, że $0{,}999\ldots = 1$.

Rozwiązanie:

$0{,}999\ldots = x \,/\cdot\ 10$

$9{,}999\ldots = 10x, poniewa\dot{z}\ 0{,}999\ldots = x$

Jeżeli: $9 + 0{,}999\ldots = 9{,}999\ldots$

$to: 9 + x = 10x$

$9 = 9x \,/ : 9$

$x = 1$

Skoro, to: $0{,}999\ldots = x$,

to $0{,}999\ldots = 1$ c.n.d

ZADANIA

1.2.1 Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamków. Wskaż wśród nich liczby niewymierne.
$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{33}, \frac{8}{15}, \frac{9}{25}, \frac{1}{4}$

Odpowiedź: 0,1(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,4; 0,(15); 0,5(3); 0,36; 0,25
NW = {1,(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,(15); 0,5(3)}

1.2.2 Przedstaw poniższe liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych:

a) 0,(17) b) 0,(453) c) 0,3(8)

d) 0,25(6) e) 2,6(13) f) –2,34(5)

Odpowiedź: a) $\frac{17}{99}$; b) $\frac{453}{999}$; c) $\frac{35}{90}$; d) $\frac{231}{900}$; e) $\frac{2587}{990}$; f) $\frac{21111}{900}$

1.2.3 Znajdź rozwinięcie dziesiętne różnicy liczb:

a) 1,3(5) – 0,7(4) b) 0,8(7) – 0,3 (6)

c) 0,(67) – 0,(33) d) 0,23(5) – 0,1(1)

Odpowiedź:

a) $\frac{122}{90} - \frac{67}{90} = \frac{55}{90} =$ 0,6(1); b) $\frac{79}{90} - \frac{33}{90} = \frac{46}{90} =$ 0,5 (1); c) $\frac{67}{99} - \frac{1}{3} = \frac{102}{297} =$ 0,(34); d) $\frac{212}{900} - \frac{10}{90} = \frac{112}{900} = 0{,}12(4)$

1.2.4 Zbadaj, czy zachodzi równość:

a) $0{,}0(6) + 0{,}0(3) = \frac{2}{15}$ b) $0{,}(3) - 0{,}(2) = \frac{1}{6}$

c) $0{,}(1) \cdot 0{,}(1) = 0{,}(1)$ d) $3 \cdot 1,(4) = 4,(3)$

Odpowiedź:

a) $\frac{6}{90}+\frac{3}{90}=\frac{9}{90}=0{,}1$ NIE;

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ NIE;

c) $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$ NIE;

d) $3\cdot\frac{13}{90}=\frac{39}{90}=0{,}4(3)$ TAK

1.3 Wartości wyrażeń arytmetycznych

Teraz nauczę się:

Obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Wyrażenie wymierne[5] to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych (liter) o tej własności, że występują w nim wyłącznie takie operacje arytmetyczne, które po podstawieniu za zmienne liczb wymiernych dają w wyniku liczbę wymierną.

Aby obliczyć wartość wyrażenia wymiernego, wykonujemy we właściwej kolejności podane działania, a wynik zapisujemy w najprostszej postaci.

Ustalenie właściwej kolejności wykonywania działań podlega następującym zasadom:

1. Jeśli w wyrażeniu występują nawiasy, w pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach.
2. Jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów lub działania w nawiasach zostały już wykonane, to pozostałe działania wykonujemy w następującej kolejności:

- potęgowanie i pierwiastkowanie,
- mnożenie i dzielenie,
- dodawanie i odejmowanie.

ZADANIA

1.3.1 Wykonaj obliczenia:

a) $\dfrac{\left(2\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}\right)\cdot 7\frac{2}{8}}{\left(8-\frac{4}{6}\right):4\frac{1}{7}}=$

b) $\left(6\frac{2}{5}-4\frac{3}{16}\right)\cdot 2\frac{2}{3}=$

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne, 11.02.2013

c) $\dfrac{\left(6\frac{1}{8}-2\frac{3}{5}\right):\left(1\frac{2}{15}-3\frac{4}{6}\right)}{\left(16\frac{2}{5}+14\frac{1}{7}\right)\cdot 2\frac{3}{10}} : \dfrac{141}{76} =$

d) $\dfrac{371}{285} : \dfrac{6\frac{1}{5}-7\frac{1}{6}+2\frac{1}{5}\cdot 3\frac{2}{8}}{5\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}\cdot 3\frac{6}{12}} =$

Odpowiedź: a) $-11\frac{11}{90}$; b) $5\frac{27}{30}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) -1

1.3.2 Oblicz:

a) $\dfrac{2{,}4:1{,}32-0{,}12:1{,}5}{2{,}3\cdot 0{,}25+1{,}18:3{,}2} =$

b) $\dfrac{3\cdot(0{,}15-1{,}57)+(23{,}58-3{,}24):2{,}3}{2{,}6\cdot(0{,}12+4{,}35):2{,}33} =$

c) $\dfrac{(6{,}25:0{,}023-1{,}22):0{,}05}{13{,}24-1{,}45\cdot 2{,}8:1{,}13} =$

d) $\dfrac{(1{,}55:0{,}23)\cdot 2{,}15+(8{,}43-2{,}11)}{5{,}3:(1{,}24+2{,}98)\cdot 0{,}008} =$

Odpowiedź: a) 1,84; b) 0,9; c) 508; d) 0,13

1.3.3 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{0{,}125\cdot 3\frac{1}{5}-(0{,}24:0{,}12)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{10:3\frac{1}{3}-6\cdot\frac{2}{3}+1\frac{7}{20}:5{,}4} =$

b) $3{,}4 : \left(\dfrac{2{,}4-3\frac{3}{4}+1{,}2:\frac{1}{8}}{6:2{,}25-1{,}45\cdot 1\frac{2}{3}}\right)\cdot\dfrac{372}{34} =$

c) $\left\{4\frac{1}{9}-2{,}5 : \left(1\frac{2}{15}+3\frac{4}{3}\right) : 13{,}3\right\} : \dfrac{400147}{98154} =$

d) $-\dfrac{14985}{1969}+\dfrac{4{,}55\cdot\frac{5}{11}+(-2{,}5)\cdot 0{,}9}{[0{,}7\cdot(-0{,}34)-0{,}120]:3\frac{3}{2}} : \dfrac{1\frac{2}{3}}{5\frac{11}{20}} =$

e) $\dfrac{\left[\left[3{,}32:2\frac{1}{6}-\frac{7}{8}\cdot 0{,}6\right]\cdot 1{,}2+\frac{3}{6}\right]:\frac{975}{1012}}{\left(1{,}2+1\frac{1}{3}\cdot 0{,}21:1{,}3\right)\cdot\frac{11}{15}} : \left(-\dfrac{11107}{13000}\right) =$

Odpowiedź: a) $-2\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 0; e) -2

1.4 Potęgi

Teraz nauczę się:

- Obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych i stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- Wykorzystywać podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką).

Definicja[6]

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę mnożąc przez siebie n-razy liczbę a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ czynnikow}$$

Prawa działań na potęgach

Niech n, m będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

1) **Iloczyn potęg o tych samych podstawach:** $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$
2) **Iloraz potęg o tych samych podstawach:** $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$
3) **Potęga iloczynu:** $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$
4) **Potęga ilorazu:** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$
5) **Potęga potęgi:** $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$
6) **Potęga ilorazu o wykładniku ujemnym:** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz:

a) 2^3 b) $(-4)^2$ c) $(-\frac{2}{5})^4$ d) $(-\frac{1}{3})^3$

e) $(-1\frac{1}{4})^2$ f) $(2\frac{2}{3})^0$ g) $(0,4)^3$ h) $(0,02)^4$

i) $(-0,5)^2$ j) $(\sqrt{3})^2$ k) $(\sqrt[3]{2})^3$ l) $(-2\sqrt{3})^4$

Odpowiedź:

a) 8; b) 16; c) $\frac{16}{625}$; d) $-\frac{1}{27}$;

e) $\frac{25}{16}$; f) 1; g) 0,064; h) 0,00000016;

i) 0,25; j) 3; k) 2; l) 144

6 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 12.02.2013

1.4.2 Zastosuj prawa działań na potęgach:

a) $3^4\cdot 3^5\cdot 3^1\cdot 3^{-2}$ b) $(0,4)^1.\ (0,4)^3.\ (0,4)^{-3}$ c) $(2\frac{3}{4})\cdot(2\frac{3}{4})^0\cdot(2\frac{3}{4})^2\cdot(2\frac{3}{4})^3$

d) $(-4)^4\cdot(-4)^2\cdot(-4)^1\cdot(-4)^{-5}$ e) $3^2\cdot 22^2\cdot(-1)^0$ f) $(\frac{1}{5})^5\cdot(2\frac{3}{4})^5\cdot 3^5$

g) $(4,2)^3\cdot(\frac{2}{6})^3\cdot(1\frac{4}{12})^3$

Odpowiedź:

a) $3^8 = 6561$; b) 0,4; c) $(2\frac{3}{4})^6$; d) $(-4)^{-2} = 16$; e) $66^2 = 4356$; f) $(\frac{33}{20})^5$; g) $(\frac{28}{15})^3$

1.4.3 Oblicz:

a) $\frac{10^3}{12^3}$. b) $\frac{(1,2)^4}{120^4}$ c) $\frac{(2,2)^2}{(0,16)^2}$

d) $(4\frac{5}{6})^3:(1\frac{1}{5})^3$ e) $(3,4)^2:(\frac{7}{2})^2$ f) $(\sqrt[3]{12})^3:(-2)^3:(-22)^0$

Odpowiedź: a) $(\frac{5}{6})^3$; b) $(0,01)^4$; c) $(13,75)^2$; d) $(\frac{145}{36})^3$; e) $(\frac{34}{35})^2$; f) 1,5

1.4.4 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{6^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3:\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}{0{,}36:\left(\frac{2}{12}\right)^4} =$ b) $\frac{5^4-5^3}{5^2}:\frac{2^5}{\frac{1}{5}} =$ c) $\frac{7^2\cdot 2+3\cdot 7^5}{7^{10}\cdot 4-7^6}\cdot 7^3 =$ d) $\frac{(3\cdot 2^8-2^4\cdot 6)}{9:3^3\cdot 3^3}:\ 2^4 =$

Odpowiedź: a) $\frac{100}{36^4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{4949}{9603}$; d) 378

1.4.5 Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:

a) $\frac{a^5\cdot a^3:a^2}{a^0\cdot(a^{10})^2:a} =$ b) $\frac{(a^4\cdot a^7):a^3\cdot a^8}{a^6:a^0\cdot(a^9)^4} =$

c) $\frac{(a^5)^3\cdot(a^6)^{11}:(a^4)^7}{(a^9)^5:(a^3)^2}\cdot a^6 =$ d) $\frac{(-a)^4:(-a)^{-5}}{((-a)^{-2})^4\cdot a^3} =$

Odpowiedź: a) a^{-13}; b) a^{41}; c) 2^{20}; d) $(-a)^{14}$

1.4.6 Oblicz:

a) $(0,4)^{-3}\cdot(1\frac{4}{5})^{-2} =$ b) $(1,2)^{-3}\cdot(-4,3)^{-2} =$ c) $\frac{22^{-1}+66^0}{(0,6)^{-2}-3^{-1}} =$

d) $\frac{(1,3)^{-3}-2^{-4}}{(5:2^3):(3,3)^{-2}-(-6)} =$ e) $[(3^{-1}+3^{-1}+3^{-1})+2^{-2}]+2^{-2} =$ f) $[(\frac{1}{5})^{-2}+(\frac{1}{5})^{-2}\cdot(\frac{1}{5})^{-2}]:(\frac{1}{5})^{-2} =$

Odpowiedź:

a) 253,125; b) 0,03; c) $\frac{138}{781}$; d) 0,0663; e) 2,5; f) 26

1.4.7 Oblicz:

a) $\frac{27^3\cdot 9^2\cdot 2^4\cdot 81}{2^3\cdot 3^{14}} =$

b) $\frac{(-0,2)^5\cdot(-5^2)^{-3}}{125^{-2}:(-5)^5}$

Odpowiedź: a) $\frac{2}{27}$; b) 1

Ciekawostka

Postać wykładnicza (notacja naukowa) to zapis liczby bezpośrednio w formie iloczynu postaci[7]:

$$\pm \boldsymbol{M} \cdot \mathbf{10}^{\boldsymbol{E}}$$

gdzie: M jest mantysą należącą do przedziału $\langle 1, 10)$, E jest wykładnikiem całkowitym.

PRACA SAMODZIELNA:

1.4.8 Przedstaw w postaci wykładniczej z zaokrągleniem do 2 cyfr po przecinku:

a) 0,000004359

b) 0,000000678

Odpowiedź: a) $4{,}36 \cdot 10^{-6}$; b) $6{,}78 \cdot 10^{-7}$

1.4.9 Wyszukaj w Internecie potrzebne informacje i zapisz podane wielkości w postaci wykładniczej:

a) prędkość światła w próżni

b) masa największej ryby świata

c) masa Ziemi

d) wiek Wszechświata

e) elementarny ładunek elektryczny

f) jednostka astronomiczna 1AU

g) masa atomu wodoru

h) liczba ludności świata według danych z 31.10.2011 r.

i) podaj inne ciekawe propozycje takich liczb

Odpowiedź: a) $3 \cdot 10^{8}$m/s; b) płetwal błękitny $1{,}2 \cdot 10^{5}$ kg; c) $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg; d) $14 \cdot 10^{9}$ lat; e) $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C; f) $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km; g) $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; h) $7 \cdot 10^{9}$.

Ciekawostka

Zapis potęgowania przy użyciu indeksu górnego wprowadził Kartezjusz w XVII wieku. Naturalne potęgi liczby 2 są podstawą **arytmetyki komputerów**. Na przykład 2^n jest liczbą możliwych wartości zmiennej składającej się z n bitów (każdy bit może mieć wartość 0 lub 1, razem jest ich *n*). Z tego powodu zwykle operuje się też wielokrotnościami liczby 2 (bądź jej pewnej potęgi). Osiem bitów tworzy oktet (lub bajt). Większe wartości również są wielokrotnościami liczby 2, nie zaś 10, jak wskazywałyby ich nazwy, np. kilobajt to 1 024, a nie 1 000 bajtów[8].

7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza, 17.02.2013

8 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 17.02.2013.

Za pomocą potęg wyrażone są również jednostki miar układu SI, np.:

- 10^9 to miliard (przedrostek G), GHz – gigaherc
- 10^{12} to bilion (przedrostek T), Tm – terametr
- 10^{15} to biliard (przedrostek P), Ps – petasekunda
- 10^{18} to trylion (przedrostek E), EB – eksabajt
- 10^{21} to tryliard (przedrostek Z), Zm – zettametr
- 10^{24} to kwadrylion (przedrostek Y), Yg – jottagram

Praca dla chętnych

Wyszukaj informacje na temat innych potęg układu SI. Podaj przykłady ich wykorzystania.

1.5 Pierwiastki

Teraz nauczę się:

- Posługiwać się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosować prawa działań na pierwiastkach.

Początki symbolu pierwiastka są dość niejasne. Niektóre źródła podają, że symbol został wprowadzony przez Arabów[9].

Definicja

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką,

że $\boldsymbol{b^n} = \boldsymbol{a}$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość:

$|a| = \sqrt{a^2}$

$\sqrt[2]{a}^2 = a$

$\sqrt[3]{a}^3 = a$

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Prawa działań na pierwiastkach

Dla $a, b \geq 0, n \in N$ zachodzą następujące prawa działań na pierwiastkach:

1) **Iloczyn pierwiastków $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{ab}}$**

9 www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie, 19.02.1013

2) **Iloraz pierwiastków** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

3) **Potęgowanie pierwiastków** $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

4) **Pierwiastek z pierwiastka** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

Co łączy potęgi i pierwiastki?

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi.

1) **Potęga o wykładniku równym zero dla** $a \neq 0$: $a^0 = 1$

2) **Potęga o wykładniku ujemnym dla** $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3) **Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim dla** $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4) **Potęga o wykładniku wymiernym ujemnym dla** $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

ZADANIA

1.5.1 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}25}$ b) $\sqrt{2{,}56}$ c) $\sqrt{0{,}0144}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt{\frac{100}{169}}$ f) $\sqrt{2025}$ g) $\sqrt{5929}$

Odpowiedź: a) 0,5; b) 1,6; c) 0,12; d) –2; e) $\frac{10}{13}$; f) 45; g) 77

1.5.2 Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{500}$ b) $\sqrt{3{,}84}$ c) $\sqrt{2x^4}$ d) $\sqrt{16x^3y}$

e) $\sqrt{24x^8}$ f) $\sqrt{30xy^6}$ g) $\sqrt[3]{\frac{10000x}{a^3}}$ h) $\sqrt[3]{64a^4}$

Odpowiedź: a) $10\sqrt{5}$; b) $0{,}8\sqrt{6}$; c) $x^2\sqrt{2}$; d) $4x\sqrt{xy}$; e) $2x^4\sqrt{6}$; f) $y^3\sqrt{30x}$; g) $\frac{10}{a}\sqrt[3]{10x}$; h) $4a\sqrt[3]{a}$

1.5.3 Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $3\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{13}$ c) $0{,}1\sqrt{37}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{23}$

e) $0{,}2\sqrt{21}$ f) $4\sqrt[3]{33}$ g) $3\sqrt[4]{6}$ h) $4\sqrt[5]{15}$

Odpowiedź: a) $\sqrt{63}$; b) $\sqrt{468}$; c) $\sqrt{0{,}37}$; d) $\sqrt[3]{\frac{184}{27}}$; e) $\sqrt{\frac{21}{100}}$; f) $\sqrt[3]{2112}$; g) $\sqrt[4]{486}$; h) $\sqrt[5]{15360}$

1.5.4 Oblicz, stosując prawa działań na pierwiastkach:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ d) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

Odpowiedź: a) 4; b) 5; c) 4; d) 5

1.5.5 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}81}$ b) $\sqrt{(12{,}34)^2}$ c) $\left(\sqrt{28{,}16}\right)^2$ d) $\sqrt{3^2+4^2}$

e) $\sqrt{3^2\cdot 4^2}$ f) $\sqrt{4^2-3^2}$ g) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$

Odpowiedź: a) 0,9; b) 12,34; c) 28,16; d) 5; e) 12; f) $\sqrt{7}$; g) $\frac{13}{9}$

1.5.6 Wykonaj działania:

a) $\frac{3\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{25}}\cdot\sqrt[3]{81}$ b) $(\sqrt[3]{0{,}04}:\sqrt[3]{0{,}01})\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$

c) $(\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}):\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{32}}:\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$

Odpowiedź: a) $-\frac{27\sqrt{3}}{5}$; b) $\sqrt[3]{0{,}004}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

1.5.7 Ustaw następujące liczby w porządku rosnącym:

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{18}$ b) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$

c) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[10]{25}$ d) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$

Odpowiedź: a) $\sqrt[3]{4}<\sqrt[6]{18}<\sqrt{3}$; b) $\sqrt[5]{3}<\sqrt[15]{30}<\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}<\sqrt[5]{4}<\sqrt[10]{25}$;
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}<\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}<\sqrt[16]{64}$

1.5.8 Zapisz liczby w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\sqrt[3]{9:\sqrt[3]{27}}$

Odpowiedź: a) $3^{-\frac{3}{5}}$; b) $2^{\frac{3}{4}}$; c) $3^{\frac{1}{3}}$; d) $2^{\frac{12}{5}}$; e) $3^{\frac{1}{6}}$; f) $2^{\frac{1}{4}}$

Ciekawostka

Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir, gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go wszystkim, czego zapragnie, zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno ziarenko złożone na pierwszym polu. Władca Indii nie był w stanie takiego honorarium uiścić. Owa zapłata to suma szeregu złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co daje: 18 446 774 073 709 551 615 ziaren. Aby osiągnąć taką ilość zboża, należałoby zasiać całą ziemię kilkakrotnie i zebrać żniwo. I tak oto okazało się, że władca nie wszystkim może obdarować wynalazcę[10].

10 www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html, 1.03.2013

1.6 Przybliżenia liczbowe

Teraz nauczę się:

- Obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Na co dzień często korzystamy z przybliżeń liczbowych, np. uczeń obliczając średnią swoich ocen z przedmiotów, stosuje zaokrąglenie do części setnych, podatnik rozliczając się z urzędem skarbowym również przybliża liczbę do dwóch miejsc po przecinku (do groszy).

Podczas zaokrąglania liczb, gdy otrzymujemy wartość przybliżoną, **liczba ulega zmniejszeniu lub zwiększeniu.** Zależy to od tego, czy nie zmieniamy ostatniej pozostawionej cyfry, czy zwiększamy ją o jeden. W związku z tym wyróżniamy przybliżenia:

- **z nadmiarem –** gdy podczas zaokrąglania liczby, zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o jeden.

Przykład 1[11]

Zaokrąglamy liczbę 12,399367 do pierwszego miejsca po przecinku.

$12{,}399367 \approx 12{,}4$

Podczas zaokrąglania do pierwszego miejsca po przecinku, stojącą w tym miejscu cyfrę (3) musieliśmy zwiększyć o jeden, bo następna cyfra jest większa od 5 (9). W efekcie liczba uległa zwiększeniu.

- **z niedomiarem –** gdy podczas zaokrąglania liczby, ostatnia pozostawiona cyfra nie zmienia się.

Przykład 2[12]

$6{,}963902 \approx 6{,}96$

Podczas zaokrąglania do drugiego miejsca po przecinku, stojąca w tym miejscu cyfra (6), nie zmienia się, bo znajdująca się po niej cyfra jest mniejsza od 5 (3). W efekcie liczba uległa zmniejszeniu o „obciętą" wartość.

- Błędy przybliżenia powstają podcza obliczeń jako różnica między dokładną wartością a liczbą użytą w obliczeniach, np. $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ błąd przybliżenia to $1{,}7 - \sqrt{3}$. Pojawiają się na skutek błędów wartości pomiarowych, np. odczytując długość odcinka porównujemy go z podziałką na linijce i niedokładnie przykładamy linijkę, błędnie odczytamy wynik pomiaru lub przyrząd pomiarowy jest niedoskonały. Dokładne wyliczenie jakiejś wartości nie jest możliwe ze względów obliczeniowych. Błędów pomiarowych nie da się zupełnie wyeliminować, ale można je ograniczyć do minimum, np. stosując coraz dokładniejsze przyrządy.

- Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń:

  x – dana liczba

  Δx – przybliżenie liczby

- błąd bezwzględny – obliczamy jako wartość bezwzględną z różnicy przybliżenia i danej liczby. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$\boldsymbol{B} = |\Delta \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}|$$

11 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013
12 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013

- błąd względny – obliczamy jako stosunek błędu bezwzględnego do wartości zmierzonej i wyrażamy w procentach, pokazuje on jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką obniżyliśmy lub powiększyliśmy liczbę:

$$W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\%$$

Przykład 3

Zaokrąglij liczbę 12,647890 do części setnych i określ błąd względny i bezwzględny przybliżenia.

12,647890 ≈ **12,65**

- Błąd bezwzględny: $B = |\Delta x \; - x| \; = |12{,}65 - 12{,}647890| = | - 0{,}00211| = \; 0{,}00211$
- Błąd względny: $W = \; \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\% \; = \frac{0{,}00211}{12{,}647890} \cdot \; 100\% = 0{,}0001668 \cdot 100\% = 0{,}01\%$

Ciekawostka

Liczba π (czytaj: **liczba pi**), **ludolfina** – jest to liczba niewymierna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy lub polu koła o promieniu równym 1.

Liczba π z dokładnością do 200 miejsc po przecinku:

π =3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062 862089986280348253421170679821480865132823066470938446095 505822317253594081 28 48111745028410270193 852110555964462294895493038196...

Światowy potwierdzony rekord w zapamiętywaniu ciągu cyfr liczby π należy aktualnie do Japończyka Akiry Haraguchi, który podał ją z dokładnością do 100 tysięcy miejsc po przecinku bijąc własny rekord z roku 1995[13].

ZADANIA

1.6.1 Podaj przybliżenie liczby π z dokładnością do:

a) części setnych b) części tysięcznych

c) dziesięciu miejsc po przecinku d) jedności

Jak nazywamy to przybliżenie?

Odpowiedź:

a) 3,14 z niedomiarem; b) 3,142 z nadmiarem; c) 3,14159 26536 z nadmiarem; d) z niedomiarem

13 www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi, 04.03.2013

1.6.2 Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd względny i bezwzględny swojego przybliżenia:

a) $45{,}673 : 4$ b) $2{,}384 + 21{,}287$ c) $6 \cdot 3{,}563 - 2{,}12$

d) $44{,}11 - 3 \cdot 6{,}72$ e) $128{,}69 \cdot 2 + 301{,}25$ f) $268{,}9 : 26{,}6 + 243{,}2 : 5{,}1$

1.6.3 Oblicz błąd względny i bezwzględny (z dokładnością do 0,01%), który popełniono przybliżając liczbę a liczbą b.

a) a = 19,458; b = 19,46 b) a = 20,458; b = 20,5

c) a = 17,458; b = 17 d) a = 19,458; b = 20

e) a = 98,5 cm, b = 1m f) a = 4700 cm3, b = 5l

g) a = 372 min, b = 6h h) a=7806s, b=2h 10 min

Odpowiedź:

a) B = 0,002; W = 0,01%, b) B = 0,042; W = 0,21%, c) B = 0,458; W = 2,62%,

d) B = 0,542; W = 2,79%, e) B = 1m – 98,5 cm = 1,5 cm; W = 1,5:98,5×100 = 1,52%,

f) 5 litrów = 5 dm^3 – 4700 cm^3, 1dm^3 = 1000 cm^3, 5dm^3 = 5000 cm^3,

B = 5000 cm^3 – 4700 cm^3 = 300 cm^3; W = 300:4700 × 100 = 6,38%,

g) 6h = 360 minut, B = 372 – 360 = 12; W = 12:372 × 100 = 3,23%,

h) 2h 10 minut = 7200 s + 600 = 7800 s,

B = 7806 – 7800 = 6; W = 6:7806 × 100 = 0,08%

Ciekawostka

Różne komputerowe operacje arytmetyczne wykonywane na liczbach mogą powodować nieoczekiwane wyniki, gdy wynik obliczeń przekracza dopuszczalny zakres danych. Możemy tutaj wyróżnić dwie sytuacje:

Nadmiar – „przekręcenie licznika" w grach komputerowych, gdy ktoś zdobędzie zbyt dużo punktów

Niedomiar – liczba jest tak mała, że nie może zostać dokładnie zaokrąglona do zera

ZADANIE DLA CHĘTNYCH:

Napisz program, który obliczy:

a) $10^{40} \cdot 10^{40} = \ldots.$

b) $10^{-40} - 10^{-41} = \ldots.$

Jaki jest wynik działania programu? Czy jest zgodny z twoimi matematycznymi obliczeniami?

Algorytmy, które charakteryzują się kumulowaniem błędów, nazywamy niestabilnymi.

1.7. Obliczenia procentowe

Teraz nauczę się:

Wykonywać obliczenia procentowe.

Procent

Słowo **procent** pochodzi z łacińskiego od *per centum*, „przez sto" i oznacza sposób wyrażenia liczby jako ułamka o mianowniku 100 i oznaczamy symbolem %[14].

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Przykład 1

$23\% = \frac{23}{100}$

Procenty umożliwiają wyrażenie danej wielkości w stosunku do innej, przy czym pierwsza wielkość oznacza zwykle część lub zmianę w drugiej.

14 www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent, 06.03.2013.

Przykład 2

Obliczyć 4,5% liczby 6.

$4{,}5\% \cdot\ 6 = \frac{4{,}5}{100} \cdot\ 6 = 0{,}27$

Przykład 3

Liczbę 50 zwiększyć o 10%.

$50 + 10\% \cdot 50 = 50 + 0{,}1 \cdot 50 = 55$

Przykład 4

Cena zeszytu wynosi 3,50 zł. Oblicz jego cenę po podwyżce o 1,5%.

$3{,}50 + \frac{1{,}5}{100} \cdot 3{,}50 \approx 3{,}55$ zł

Przykład 5

Znajdź liczbę, której $33\frac{2}{3}\%$ jest równe 6.

$33\frac{1}{3}\% \cdot x = 6$

$\frac{\frac{100}{3}}{100} \cdot x = 6$

$x = 18$

Przykład 6

Oblicz, jakim procentem liczby 90 jest liczba 15.

$p\% \cdot 90 = 15$

$p\% = \frac{15}{90} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$

Przykład 7

Cena kurtki wynosi 120 zł.

a) Oblicz jej cenę po dwukrotnej obniżce o 30%.

$120 - 30\% \cdot 120 = 120 - 0{,}3 \cdot 120 = 84$

$84 - 30\% \cdot 84 = 84 - 0{,}3 \cdot 84 = 58{,}80$ zł

b) Oblicz cenę kurtki przy obniżce jednokrotnej o 60%.

$120 - 60\% \cdot 120 = 48$ zł

Punkt procentowy – to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości wyrażonymi w procentach.

Przykład 8

Frekwencja klasy Ib w I semestrze wyniosła 88%, a w drugim 92%. Mówimy, że frekwencja wzrosła o 4 punkty procentowe.

W zadaniach pomijamy podatek Belki, który został wprowadzony 01.12.2001 r.

Przykład 9

Jaś chciał w lipcu 2001 r. wpłacić do banku zaoszczędzone przez siebie pieniądze – 3000 zł, z oprocentowaniem 6% w skali roku, ale nie mógł się zdecydować na rodzaj lokaty.

Miał do wyboru lokatę:

a) roczną b) kwartalną c) półroczną d) miesięczną

Oblicz, ile odsetek po roku zostanie naliczonych Jasiowi w każdym przypadku. Którą lokatę powinien wybrać?

Odpowiedź:

a) 6% z 3000 zł = 180 zł

b) $\frac{3}{12} \cdot$ 6% z 3000 zł = 45 zł

c) $\frac{1}{2} \cdot$ 6% z 3000 zł = 90 zł

d) $\frac{1}{12} \cdot$ 6% z 3000 zł = 15 zł

Przykład 10[15]

Ania wpłaciła na lokatę 2000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 3,5% w skali 2 lat (24 miesięcy, a czas zapadalności[16] dokładnie 3 lata (36 miesięcy). Ile odsetek naliczy jej bank? Jaką kwotę będzie miała po 3 latach na swoim koncie?

Najpierw obliczamy odsetki:

$\frac{36}{24} \cdot 3{,}5\% \cdot 2000 = \frac{36}{24} \cdot \frac{3{,}5}{100} \cdot 2000 = 105$ zł

Kwota końcowa to: $2000\ zł + 105\ zł = 2105\ zł$

Przykład 11

Kasia wpłaciła na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku kwotę 1000 zł. W dniu zapadalności bank naliczył jej 20 zł odsetek. Na ile miesięcy Kasia założyła tę lokatę?
Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$\frac{x}{12} \cdot \frac{5}{100} \cdot 1000 = 20{,}83$

$x = 5$ miesięcy

ZADANIA

1.7.1 Oblicz:

a) 4% liczby 85 b) $3\frac{1}{2}\%$ liczby $30\frac{1}{4}$ c) 112% liczby 80

d) $1{,}6\%$ liczby 1000 e) $0{,}3\%$ liczby 900 f) 150% liczby 27

Odpowiedź: a) $3{,}4$; b) $\frac{847}{800}$; c) $89\frac{3}{5}$; d) 16; e) $2{,}7$; f) $40\frac{1}{2}$

15 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.
16 Czas zapadalności to czas trwania lokaty.

1.7.2 Cenę wycieczki obniżono o $p\%$. Wycieczka kosztuje obecnie x $zł$. Jaka była cena wycieczki przed obniżką?

Odpowiedź: $\frac{100a}{100-p} zł, \ \ p < 100 \ \wedge p > 0$

1.7.3 Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a następnie nową cenę podwyższono o 30%. Czy cena końcowa jest taka sama jak początkowa? Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Końcowa cena stanowi 91% ceny początkowej.

1.7.4 Znajdź:

a) Liczbę, której 7% wynosi 56

b) Liczbę, której $0{,}2\%$ wynosi $2\frac{3}{5}$

c) Liczbę, której 112% wynosi $5{,}6$

d) Liczbę, której $0{,}25\%$ wynosi $0{,}3$

Odpowiedź: a) 800; b) 1300; c) 5; d) 120

1.7.5 Aby zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym, wystarczy otrzymać 30% możliwych do uzyskania punktów. Jaka minimalna liczba punktów gwarantuje zdanie egzaminu, gdy maksymalnie można otrzymać 50 pkt.

Odpowiedź: 15 punktów.

1.7.6 Tomek wpłacił na lokatę oprocentowaną 7% w skali roku kwotę 2135 zł. W dniu zapadalności bank naliczył mu 12,45 zł odsetek. Na ile miesięcy Tomek założył tę lokatę?

Odpowiedź: Na 1 miesiąc.

1.7.7 Wojtek wpłacił na lokatę czteromiesięczną z naliczaniem odsetek na zakończenie kwotę 1500 zł. Po upływie tego okresu bank naliczył mu 40 zł odsetek. Ile wynosiło oprocentowanie tej lokaty w skali roku?

Odpowiedź: 8%.

1.7.8 Przypuśćmy, że zakładasz lokatę na 5 miesięcy, jej oprocentowanie w skali roku wynosi 4,5%, a odsetki naliczane na zakończenie wyniosły 100 zł. Oblicz, jaką kwotę powinieneś wpłacić na tę lokatę.

Odpowiedź: 5333 zł.

1.7.9 Kasia wraz ze swoim mężem Piotrem miesięcznie na opłaty wydają 40% tego, co razem zarobią. Z tego, co pozostanie, 60% przeznaczają na zakup żywności dla siebie oraz swoich dzieci. Ile procent ich łącznych miesięcznych zarobków pochłaniają miesięczne wydatki?

Odpowiedź: 64%.

1.7.10 Pan Czesław w pierwszych 2 tygodniach poprzedniego miesiąca sprzedał 15% sprowadzonego do swojego sklepu towaru. W następnych 2 tygodniach sprzedał jeszcze 40% tego towaru, który pozostał. Jaki procent sprowadzonego towaru pozostał panu Czesławowi na koniec poprzedniego miesiąca?

Odpowiedź: 49%.

1.7.11 W 5 kolejnych sesjach giełdowych cena akcji firmy X na zamknięciu dnia osiągała następujący wynik procentowy: –6%, +15%, –3%, +5%, +2%. Oblicz, czy cena końcowa tej akcji jest wyższa, czy niższa od ceny pierwotnej i o ile procent.

Odpowiedź:

x – cena początkowa, y – cena końcowa

$x \cdot 94\% \cdot 115\% \cdot 97\% \cdot 105\% \cdot 102\% = y$

$x \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}97 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}02 = 1{,}12$

$x \cdot 1{,}12 = y$

Cena końcowa akcji jest wyższa od ceny początkowej o 12%.

1.7.12 Pracodawca zaproponował Kasi pensję w wysokości 3000 zł brutto i obiecał, że jeśli się sprawdzi na powierzonym stanowisku, to po roku jej pensję zwiększy o 3%, a w następnych latach o 1 p.p.[17] względem pensji sprzed roku. Jaką pensję otrzyma Kasia w czwartym roku pracy w tej firmie przy założeniu, że się sprawdzi na powierzonym stanowisku i nie zostanie zwolniona lub sama się nie zwolni?

Odpowiedź: w drugim roku: 3000 · 103% = 3090 zł, w trzecim roku: 3090 · 104% = 3214 zł, w czwartym roku: 3214 · 105% = 3374 zł.

➡ Punkt bazowy to inaczej punkt procentowy. Zamiast mówić, że różnica między np. 5,63% a 5,61% wynosi 0,02 p.p., możesz powiedzieć, że ta różnica wynosi 2 p.b.

1.7.13 Oblicz, ile punktów bazowych (p.b.) wynosi różnica pomiędzy podanymi procentami?

a) 18,45% i 18,32%

b) 34,86% i 34,12%

c) 88,06% i 87,04%

d) 56,2% i 53,05%

Odpowiedź: a) 13 p.b.; b) 74 p.b.; c) 102 p.b.; d) 315 p.b.

17 Skrót p.p. oznacza „punkty procentowe".

Ciekawostka

Punktów bazowych często używa Rada Polityki Pieniężnej, czyli grupa ludzi odpowiedzialna za system finansowy całej Polski. Decyzje podjęte przez tę radę mają wpływ na wysokość lokat bankowych, oprocentowania kredytów i pożyczek oraz na stabilność ekonomiczną Polski. Przeciętny Polak nie spotyka się bezpośrednio z punktami bazowymi, ale odczuwa zmiany finansowe wyrażone w punktach bazowych, gdy np. pójdzie do banku.

Podatek Belki to automatycznie pobierana przez bank opłata od zysków kapitałowych. Został on wprowadzony 01.12.2001 przez Marka Belkę (stąd jego nazwa) – ówczesnego ministra finansów i dotyczył wyłącznie lokat oraz depozytów bankowych. Jego stawka wynosiła 20% naliczonych odsetek. W 2004 r. obniżono go do 19%, ale kosztem tego, że dodatkowo objęto nim inne zyski kapitałowe, np. pochodzące ze sprzedaży papierów wartościowych. Podatek Belki od 01.01.2004 do 31.12.2006 wyliczano mnożąc naliczone odsetki przez 19% i zaokrąglając otrzymany wynik do 1 grosza[18].

Wprowadzenie podatku Belki w 2001 r. spowodowało, że w bankowości pojawiły się 2 nowe terminy:

zysk brutto – naliczone odsetki bez potrącania podatku Belki

zysk netto – odsetki uzyskane po odjęciu zaokrąglonego podatku Belki do 1 grosza

1.7.14 Jako pracodawca sporządź listę płac w tabeli.

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%				
2	Belka	Robert	720 zł	5%				
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%				
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%				
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%				
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%				
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%				
8	Podkowa	Robert	1057,63	1%				
9	Sowa	Zofia	1046,4	1%				
10	Zys	Julia	1280	5%				

18 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

Odpowiedź:

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%	78,75 zł	953,75 zł	181,21 zł	772,50 zł
2	Belka	Robert	720 zł	5%	36,00 zł	756,00 zł	143,64 zł	612,36 zł
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%	118,40 zł	1 105,10 zł	209,97 zł	895,13 zł
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%	80,48 zł	1 086,48 zł	206,43 zł	880,05 zł
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%	30,00 zł	630,00 zł	119,70 zł	510,30 zł
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%	60,94 zł	1 279,69 zł	243,14 zł	1 036,55 zł
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%	111,60 zł	1 351,60 zł	256,80 zł	1 094,80 zł
8	Podkowa	Robert	875 zł	1%	105,76 zł	1 163,39 zł	221,04 zł	942,35 zł
9	Sowa	Zofia	720 zł	1%	104,64 zł	1 151,04 zł	218,70 zł	932,34 zł
10	Zys	Julia	986,7 zł	5%	64,00 zł	1 344,00 zł	255,36 zł	1 088,64 zł

1.7.15 Na podstawie poniższej tabeli:

a) oblicz wynagrodzenie netto pracownika,

b) oblicz, jaki procent wynagrodzenia brutto stanowi ubezpieczenie emerytalne, chorobowe, rentowe oraz ubezpieczenie zdrowotne,

c) oblicz, jaki procent całej pensji brutto stanowi podatek.

Wynagrodzenie brutto	3 000
Składki ZUS	
Ubezpieczenie emerytalne	292,80
Chorobowe	73,50
Rentowe	45,0
Razem składki ZUS	
Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne	2588,70
Ubezpieczenie zdrowotne	232,98
Koszty uzyskania przychodu	111,25
Podstawa opodatkowania	2477,45
Kwota zwolniona od podatku	46,33
Podatek	199,00
Pensja netto	

Odpowiedź:

a) Razem składki ZUS wyniosły 411,30, wynagrodzenie netto pracownika = wynagrodzenie brutto – składki ZUS – koszty uzyskania przychodu – ubezpieczenie zdrowotne – podatek = 1985,47 zł;
b) 21,48%; c) 6,63%.

1.7.16 Oblicz wysokość wszystkich podstawowych składek społecznych (emerytalnej i rentowej – 6%, chorobowej i zdrowotnej – 9%), jakie zostaną odliczone z pensji Pana Kowalskiego, która wynosi 1700 zł brutto.

Odpowiedź: 225 zł.

1.7.17 Oceń, ile czteroosobowa rodzina osiągająca dochody netto w wysokości 6000 zł może przeznaczyć na miesięczną spłatę raty kredytu hipotecznego. W ocenie uwzględnij przeciętne miesięczne wydatki rodziny na opłaty, żywność itp. Następnie oblicz, na ile lat musiałaby ona zaciągnąć taki kredyt oprocentowany 7% w skali roku, aby zakupić mieszkanie o wartości 300 000zł.

1.7.18 Firma oferuje ratalną sprzedaż samochodu. Raty rozłożone są na 4 lata, przy czym miesięczna kwota spłaty wynosi 900 zł. Cena samochodu wynosi 30000 zł. Jakie oprocentowanie oferuje sprzedawca w skali miesięcznej i w skali roku?
Uwaga: Rozwiąż zadanie w arkuszu kalkulacyjnym (skorzystaj z funkcji FV).

Odpowiedź: miesięczna 1,6%, a roczna 19,2%.

1.7.19 Oblicz wartość podatku Belki oraz zysk netto zgodnie z ordynacją podatkową obowiązującą od 01.01.2007 do 30.03.2012, jeśli odsetki z lokaty wyniosły:

a) 25,72 zł   b) 63,32 zł   c) 122,75 zł   d) 137,20 zł

Odpowiedź: a) odsetki: 25,72 zł, podstawa opodatkowania: 26 zł, podatek Belki: 4,94 zł, zaokrąglenie podatku: 5 zł, zysk netto: 20,72 zł; b) 51,32 zł; c) 99,75 zł; d) 111,20 zł.

Uwaga: Odsetki zaokrągla się do pełnych złotych i nazywa się tę zaokrągloną liczbę podstawą opodatkowania, z której oblicza się 19% podatku Belki; otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych złotych. Aby wyliczyć zysk netto z lokaty, trzeba od odsetek odjąć otrzymany wynik.

Ciekawostka

Banki, aby uniknąć podatku Belki, wprowadziły częstą kapitalizację odsetek. Obowiązujący obecnie system podatkowy sprawia, że od zysku poniżej 2,49 zł nie trzeba płacić podatku. Wszystko za sprawą zaokrągleń podstawy opodatkowania i samego podatku. Zgodnie z zapisami w ordynacji podatkowej odsetki w kwocie 2,49 zł należy zaokrąglić „w dół" do pełnej złotówki, czyli do 2 zł. Podatek od zysku w wysokości 2 zł wynosi 38 groszy. Tu także zaokrąglamy do pełnej złotówki, czyli do zera. W ten sposób od tak niewielkiego zysku z lokaty nie trzeba płacić podatku. Z tego też względu banki proponują lokaty z dzienną kapitalizacją odsetek. Niewielkie odsetki dopisywane są do salda lokaty codziennie i w ten sposób klient nie płaci 19 proc. podatku od zysku. Jeśli we wspomnianej wyżej lokacie zastosowalibyśmy mechanizm dziennej kapitalizacji, to zysk po roku wyniósłby 513 zł już bez podatku. W rezultacie oprocentowanie efektywne wspomnianej lokaty wyniesie 5,13%[19].

19 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

1.7.20 Jaką maksymalnie kwotę trzeba wpłacić na 2-miesięczną lokatę oprocentowaną 6,2% w skali roku, aby legalnie ominąć płacenie podatku Belki wyliczanego zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012?

Odpowiedź:

$\frac{2}{12} \cdot 6{,}2\% \cdot x = 2{,}495$

$x = 242{,}23\ zł$

1.7.21 W 2007 roku pani Kasia założyła lokatę jednodniową oprocentowaną 3,8% w skali roku na kwotę 1600 zł. Oblicz, ile dziennie będzie dostawać odsetek od takiej kwoty? Czy uniknie podatku Belki?

Odpowiedź:

$\frac{1}{365} \cdot 3{,}8\% \cdot 1600$ zł $= 0{,}17$ zł $< 2{,}50$ zł. W tym roku uniknie podatku Belki.

1.7.22 Ile wyniosą odsetki od lokaty jednodniowej oprocentowanej 6,84% w skali roku założonej na kwotę 15000 zł w 2012 roku? Jaki będzie zysk netto z tej lokaty po 300 dniach, jeśli w międzyczasie bank nie zmieni oprocentowania?

Odpowiedź: Dokładnie 1,80 zł dziennie; 540 zł po 300 dniach.

1.7.23 W państwie A produkt PKB wzrasta co roku o 8%, a w państwie B o 6%. Po ilu latach w każdym z państw nastąpi potrojenie PKB?

Odpowiedź:

Wskazówka: mając kapitał k przy rocznej kapitalizacji odsetek p% w skali roku, po n latach kapitał wzrasta do $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

A – po 16 latach,

B – po 19 latach.

1.8 Przedziały liczbowe

Teraz nauczę się:

- Posługiwać pojęciem przedziału liczbowego,
- Zaznaczać przedziały na osi liczbowej.

Przedział – zbiór elementów danego zbioru częściowo uporządkowanego, zawartych między dwoma ustalonymi elementami tego zbioru, nazywanymi początkiem i końcem przedziału[20].

20 www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy, 26.02.2013

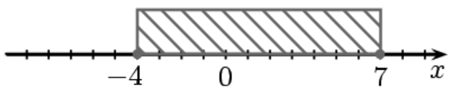
Oznaczenia przedziałów:

Przedziałem domkniętym $< a; b >$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$

$\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

Przykład 1

Przedział domknięty $< -4; 7 >$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



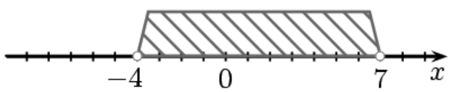
Rysunek 1-5 – Przedział domknięty

Przedziałem otwartym (a;b) o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a} < x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x < b\}$

Przykład 2

Przedział otwarty $(-4; 7)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



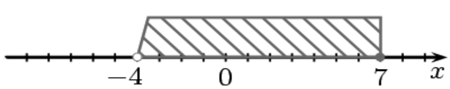
Rysunek 1-6 – Przedział otwarty

Przedziałem lewostronnie otwartym (prawostronnie domkniętym) $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x \leq b\}$

Przykład 3

Przedział lewostronnie otwarty $(-4; 7\rangle$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-7 – Przedział lewostronnie otwarty a prawostronnie domknięty

Przedziałem prawostronnie otwartym (lewostronnie domkniętym) $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} > = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < b\}$

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym $(\boldsymbol{a}; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych od a.

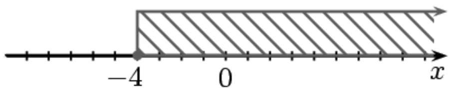
$(\boldsymbol{a};+\infty) = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} > a\}$

Podobnie przedziałem lewostronnie domkniętym nieograniczonym $\langle \boldsymbol{a};+\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych bądź równych a.

$\langle \boldsymbol{a};+\infty) = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 5

Przedział $\langle 4;+\infty)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-8 – Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony

Przedziałem prawostronnie otwartym nieograniczonym $(-\infty;\ \boldsymbol{a})$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych od a.

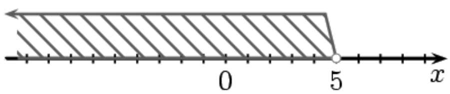
$(-\infty;\ \boldsymbol{a}) = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} < a\}$

Podobnie **przedziałem prawostronnie domkniętym nieograniczonym** $(-\infty;\ \boldsymbol{a}\rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych *x* mniejszych bądź równych *a*.

$(-\infty;\ \boldsymbol{a} >= \{ x \in R: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 6

Przedział $(-\infty;\ 5)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



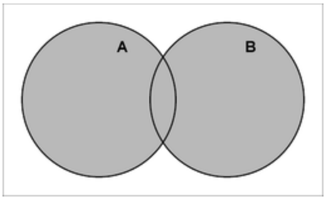
Rysunek 1-9 – Przedział prawostronnie otwarty nieograniczony

Ponieważ przedział jest zbiorem, więc możemy wyznaczać między innymi sumę, iloczyn czy też różnicę przedziałów.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Sumą zbiorów *A* i ***B*** nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A* lub do zbioru *B*, matematycznie zapisujemy ją tak: $A \cup B = \{x: x \in A \lor x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



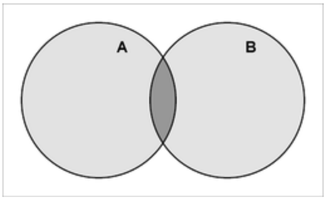
Rysunek 1-10 – Suma zbiorów

Przykład 7

Jeżeli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pomimo tego, że 1 występuje w obydwu zbiorach, w sumie tych zbiorów występuje tylko jeden raz.

Iloczynem, czyli częścią wspólną zbioru *A* i ***B*** nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru *A* i do zbioru *B*, formalnie zapisujemy ją tak: $A \cap B = \{x: x \in A \land x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



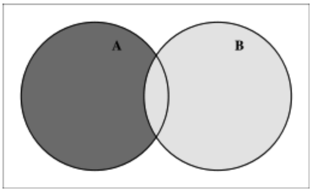
Rysunek 1-11 – Iloczyn zbiorów

Przykład 8

Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \cap B = \{1\}$. Liczba 1 jest jedynym wspólnym elementem tych zbiorów.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A*, a które nie należą do zbioru *B*, możemy ją zapisać tak: $A \backslash B = \{x: x \in A \land x \notin B\}$.

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-12 – Różnica zbiorów

Przykład 9

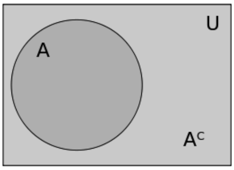
Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \backslash B = \{2, 5\}$. Jedynym wspólnym elementem obydwu zbiorów jest liczba 1, więc otrzymany zbiór będzie bardzo podobny do zbioru *A*, lecz nie posiadający liczby 1.

Dopełnieniem zbioru *A* z przestrzeni *U* nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni *U*, które nie należą do zbioru *A*. Dopełnienie zbioru *A* oznaczamy jako A'.

$A' = U \backslash A$

$A' = \{x: x \in U \land x \notin A\}$

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-13 – Dopełnienie zbiorów

Przykład 10

Jeśli $A = \{1,2,3\}$, a przestrzenią *U* jest zbiór wszystkich liczby całkowitych dodatnich, to dopełnieniem zbioru *A* będzie zbiór $A' = \{4,5,6,7,8, \dots\}$.

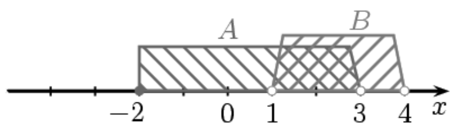
Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zauważmy, że: $\boldsymbol{A \cup A' = U}$ oraz $\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

Przykład 11`

Wyznaczmy $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, A', B'$, gdzie $A = [-2; 3), B = (1; 4)$.

Zaznaczmy najpierw oba przedziały na osi liczbowej:



Z rysunku widzimy, że:

- $A \cup B = [-2;\ 4)$
- $A \cap B = (1;\ 3)$
- $A \backslash B = [-2;\ 1]$
- $B \backslash A = [3;\ 4)$
- $A' = (-\infty;\ -2) \cup [3;\ +\infty)$
- $B' = (-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$

Własności działań na zbiorach

- Dla dowolnych zbiorów *A, B, C* zachodzą prawa:
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – I prawo De Morgana
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – II prawo De Morgana
- $A \cup B = B \cup A$ – przemienność dodawania zbiorów
- $A \cap B = B \cap A$ – przemienność mnożenia zbiorów
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – łączność dodawania zbiorów
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – łączność mnożenia zbiorów
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania

Przykład 12

Mamy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{3, 5, 9\}$. Obliczyć $D = A \cap (B \cup C)$.

$D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 9\}) =$
$= (\{1, 3\} \cup \{3\}) = \{1, 3\}$

ZADANIA

1.8.1 Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały:

a) $(-2;5)$ b) $\langle -\infty;\ 3)$ c) $\langle 0;6\rangle$

d) $\{2,3,4,5\}$ e) $(-\infty;\ -3)$ f) $(-5;\ 1\rangle$

g) $\langle -7;5\rangle$ h) $\langle 0;\ 4)$ i) $\langle -2;\ +\infty)$

1.8.2 Wyznacz zbiory:

a) N∪W b) $R \cup NW$ c) N ∪ R d) $N\ \cup C$

e) C ∩ W f) $C\ \cap N$ g) $NW\ \cap C$ h) R ∩ C

i) C \ W j) R \ W k) N \ NW

Odpowiedź:

a) W; b) R; c) R; d) C; e) C; f) N; g) Ø; h) C; i) Ø; j) NW; k) N.

1.8.3 Podaj wszystkie liczby całkowite, które należą do przedziału:

a) $\left\langle -\frac{1}{2};6\right)$ b) $(-5;\ \pi)$ c) $\langle 0;2\rangle$ d) $\langle -\pi;\ \pi\rangle$

Odpowiedź:

a) $\{0,1,2,3,4,5\}$, b) $\{0,1,2,3\}$, c) $\{0,1,2\}$, d) $\{0,1,2,3\}$.

1.8.4 Zaznacz na osi liczbowej zbiór A' wiedząc, że:

a) $A=(-3;7\rangle$ b) $A=\ (-\infty;\ 5)$ c) $A=\langle 2;6\rangle$

d) $A=(-\infty;4)\ \cup\ (6;12\rangle$ e) $A=(-5;+\infty)$

Odpowiedź:

a) $(-\infty;-3\rangle\cup\ (7;+\infty)$; b) $\langle 5;+\infty)$; c) $(-\infty;2)\ \cup\ (6;+\infty)$;

d) $\langle 4;6\rangle\cup\ (12;+\infty)$; e) $(-\infty;5)$

1.8.5 Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: A ∩ B, A ∪ B, A\B, B\A:

a) $A=\ (-3;\ 5),\ B=\ \langle -1;\ 8\rangle$ b) $A=\ \langle -4;\ 6),\ B=\ \langle 5;\ +\infty)$

c) $A=\ (-4;\ 1),\ B=\ (0;\ 2\rangle$ d) $A=\ (-\infty;\ 3),\ B=\ \langle 1;\ 4\rangle$

e) $A=(-\infty;\ 5\rangle\ \ B=\ (-2;2)$

Odpowiedź:

a) $A \cap B = \langle -1;\ 5), A \cup B = (-3;\ 8\rangle, A \backslash B = (-3;\ -1), B \backslash A = \langle 5;\ 8\rangle$

b) $A \cap B = \langle 5;\ 6), A \cup B = \langle -4;\ +\infty), A \backslash B = \langle -4; 5), B \backslash A = \langle 6;\ +\infty)$

c) $A \cap B = (0;\ 1), A \cup B = (-4;\ 2\rangle, A \backslash B = (-4;\ 0\rangle, B \backslash A = \langle 2;\ 2\rangle$

d) $A \cap B = \langle 1;\ 3), A \cup B = (-\infty;\ 4\rangle, A \backslash B = (-\infty;\ 1), B \backslash A = \langle 3;\ 4\rangle$

e) $A \cap B = (-2;\ 2), A \cup B = (-\infty;\ 5\rangle, A \backslash B = (-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 2; 5\rangle, B \backslash A = \emptyset$

1.8.6 Niech $A = \langle -3; 5\rangle, B = (-6; 7), C = (-\infty;\ 4\rangle$. Wyznacz następujące zbiory i zilustruj je na osi liczbowej:

a) A$\cap B$ b) $A \backslash B$ c) C \ A d) B \ C

e) $(A \cup B) \backslash C$ f) $A' \cap C$ g) $C \cap (A \cup B)'$

Odpowiedź: a) $\langle -3; 5\rangle$; b) Ø; c) (–∞; 3); d) 4;7); e) (4;7); f) (–∞;3); g) $(-\infty;\ 4\rangle$.

1.8.7 Mając dane zbiory A i B, zaznacz na osi liczbowej zbiory: A', B', A' ∩ B' oraz A' ∪ B'.

a) $A = (-\infty;\ 3), B = (4;\ +\infty)$

b) $A = (-\infty;\ -5) \cup\ (4; 6), B = \langle 2; 7\rangle$

c) $A = (0;\ 2\rangle \cup\ (6; +\infty), B = (-5; 8\rangle$

d) $A = \langle 2; 4\rangle, B = (1; +\infty)$

e) $A = (-\infty;\ -3) \cup \langle 1; 2\rangle, B = (0; 4)$

Odpowiedź:

a) $A' = \langle 3; +\infty), B' = (-\infty; 4\rangle, A' \cap B' = \langle 3; 4\rangle, A' \cup B' = R$

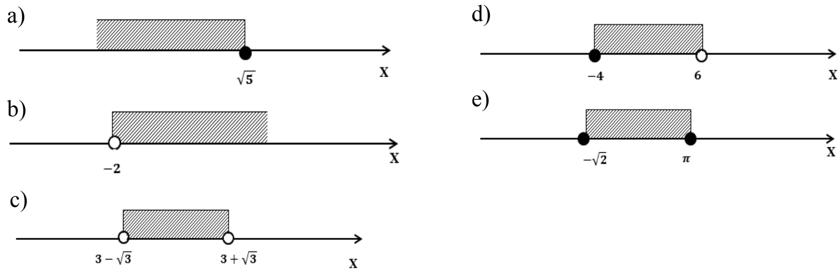
b) $A' = \langle -5; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty), B' = (-\infty; 2) \cup (7; +\infty),$
$A' \cap B' = \langle -5;\ 2) \cup (7; +\infty), A' \cup B' = (-\infty; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty)$

c) $A' = (-\infty; 0\rangle \cup (2; 6\rangle, B' = (-\infty; -5\rangle \cup (8; +\infty), A' \cap B' = (-\infty;\ -5\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty;\ 0\rangle \cup (2; 6\rangle \cup (8; +\infty)$

d) $A' = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), B' = (-\infty; 1\rangle, A' \cap B' = (-\infty; 1\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

e) $A' = \langle -3; 1) \cup (2;\ +\infty), B' = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty), A' \cap B' = \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty)$
$A' \cup B' = (-\infty; 1) \cup (2, +\infty)$

1.8.8 Zapisz w postaci nierówności i przedziału liczbowego zbiór liczb zaznaczonych na osi liczbowej:



Odpowiedź:

a) $x \leq \sqrt{5},\ x \in \left(-\infty;\ \sqrt{5}\right\rangle$

b) $x > -2, \quad x \in (-2;\ +\infty)$

c) $3+\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3},\ \ x \in \left(3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3}\right)$

d) $-4 \leq x < 6,\ \ x \in \langle -4;\ 6)$

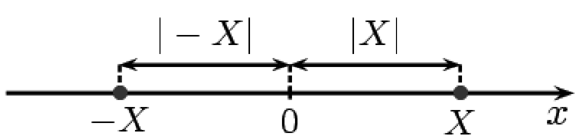
e) $-\sqrt{2} \leq x \leq \pi,\ \ x \in \langle -\sqrt{2};\ \pi\rangle$

1.9 Wartość bezwzględna*

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną,
- Zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x-a| < b$, $|x-a| = b$, $|x-a| \geq b$.

Wartość bezwzględna liczby[21] nazywana też modułem lub wartością absolutną liczby, jest to odległość na osi liczbowej od danej liczby do zera.



Rysunek 1-14 – Wartość bezwzględna

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

21 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna, 10.03.2013.

Przykład 1

Wartość bezwzględna z liczby dodatniej to ta sama liczba

$|4| = 4$

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna

$|-5| = 5$

Aby rozwiązać równanie $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \boldsymbol{b}$, należy znaleźć liczby, których odległość od liczby a jest równa b.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|2x - 3| = 5$

Rzpatrujemy dwa przypadki:

$2x - 3 = 5, \quad \vee \; 2x - 3 = -5$

Otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_1 = 4$ lub $x_2 = -1$.

Własności wartości bezwzględnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *x* i *y* zachodzą poniższe własności:

$$|\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{0}$$

$$|\boldsymbol{x}| = |-\boldsymbol{x}|$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2}$$

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystać następujące własności:

$$|x| < a \iff -a < x < a \iff (x > -a \wedge x < a)$$

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \iff (x \geqslant -a \wedge x \leqslant a)$$

$$|x| > a \iff (x < -a \vee x > a)$$

$$|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a \vee x \geqslant a)$$

Przykład 3

Rozwiążmy nierówność $|x + 5| \leq 10$, wykorzystując własność $|x| \leq a$ otrzymujemy:

$x \geq -a \wedge x \leq a$, gdzie zamiast *x* postawiamy *x+5*, a zamiast *a* liczbę 10 otrzymujemy:

$x + 5 \geq -10 \wedge x + 5 \leq 10$, stąd

$x \geq -15 \wedge x \leq 5$, co ostatecznie zapisujemy za pomocą przedziału $x \in \langle -15; 15 \rangle$.

Przykład 4

Nierówności z wartością bezwzględną możemy zapisać za pomocą przedziałów:

a) $|x| \leq b$, czyli $x \in \langle -b; b \rangle$

b) $|x| < b$, czyli $x \in (-b; b)$

c) $|x| > b$, czyli $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$

d) $|x| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; -b \rangle \cup \langle b; +\infty)$

e) $|x - a| < b$, czyli przedział o środku w punkcie a i długości b, $x \in (a - b; a + b)$

f) $|x - a| \leq b$, czyli $x \in \langle a - b; a + b \rangle$

g) $|x - a| > b$, czyli $x \in (-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)$

h) $|x - a| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; a - b \rangle \cup \langle a + b; +\infty)$

ZADANIA

1.9.1 Oblicz:

a) $|-\mathbf{34,5}| + |\mathbf{34,5}|$

b) $|-2 - 34| - |12 - 15|$

c) $|-\sqrt{7-2}|$

d) $|2 - \sqrt{3}|$

e) $|-x^2|$

Odpowiedź: a) 69; b) 33; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$ –2 e) x^2

1.9.2 Rozwiąż równanie:

a) $|x - 5| = 7$

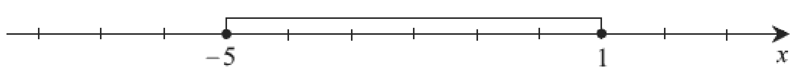
b) $|2x + 6| = 1$

c) $|3x - 3| = 1$

d) $|-x + 1| = 2$

Odpowiedź: a) 12 i –2; b) –2,5 i –3,5; c) $\frac{2}{3}$ i 1 $\frac{1}{3}$; d) –1 i 3.

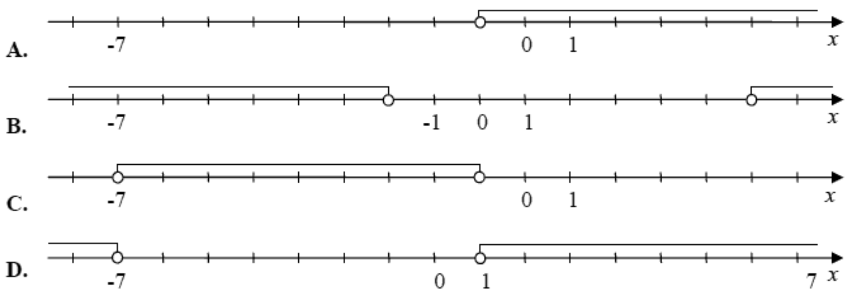
1.9.3 Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej:



A. $|x + 2| \leq 3$ B. $|x - 2| \leq 3$ C. $|x - 3| \leq 2$ D. $|x + 3| \leq 2$

Odpowiedź: D

1.9.4 Wskaż, który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 3| > 4$?



Odpowiedź: D.

1.9.5 Zapisz za pomocą przedziału liczbowego i zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $|x-5| \geq 3$ b) $|x-2| < 4$ c) $|x+1| > 3$

d) $|x+3| \geq 2$ e) $2 < |x| < 5$ f) $1 \leq |x| \leq 4$

g) $|5+x| \leq 1$ h) $|2+x| < 3$

Odpowiedź: a) $(-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 8; +\infty)$; b) $(-2; 6)$; c) $(-\infty;\ -4) \cup (2; +\infty)$; d) $(-\infty;\ -5\rangle \cup \langle -1; +\infty)$; e) $(-5; -2) \cup (2; 5)$; f) $\langle -4; -1) \cup (1; 4\rangle$; h) $\langle -6; -4\rangle$.

1.10 Logarytmy

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać definicję logarytmu i stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Dawniej logarytmy używane były do szybkiego mnożenia liczb za pomocą *tablic logarytmicznych*, które były podstawową pomocą do obliczeń naukowych, geodezyjnych, astronomicznych i inżynierskich. Dzisiaj zastąpiły je kalkulatory i komputery.

Logarytm zapisujemy następująco:

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a > 0$, $a \neq 0$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c = b$ (jest to potęga, do jakiej należy podnieść „a", aby otrzymać „b").

$$\boldsymbol{\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x}$$

Z definicji wynika, że dla $b > 0$ mamy $b = a^{\log_a b}$

Przykład 1

$\log_2 8 = 3 \qquad bo: 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \qquad bo: 3^4 = 81$

$\log_a a = 1$ **Jeżeli podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są takie same, to wynik logarytmowania zawsze wynosi 1.**

bo: $a^1 = a$ (niezależnie od wartości „a")

$\log_a 1 = 0$ **Jeżeli liczba logarytmowana wynosi 1, to wynik logarytmowania wynosi 0.**

bo: $a^0 = 1$

Przykład 2

$\log_6 6 = 1 \qquad bo: 6^1 = 6$

$\log_{15} 1 = 0 \qquad bo: 15^0 = 1$

Prawa działań na logarytmach:

1) Logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów:

$$\boldsymbol{\log_a(bc) = \log_a b + \log_b c}$$

2) Logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów:

$$\boldsymbol{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

3) Inne prawa:

$$\boldsymbol{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b} \qquad \boldsymbol{\log_a b^n = n \log_a b}$$

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad \boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Przykład 3

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

$$\log_{16} 0{,}25 = -\log_{16} 4 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_7 \frac{63}{5} - \log_7 \frac{9}{5} = \log_7 \frac{\frac{63}{5}}{\frac{9}{5}} = \log_7 7 = 1$$

$$\frac{\log_7 32}{\log_7 8} = \frac{\log_7 2^5}{\log_7 2^3} = \frac{5 \log_7 2}{3 \log_7 2} = \frac{5}{3}$$

$$\log_2 3 \cdot \log_9 2 = \log_9 2^{\log_2 3} = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

Ciekawostka

Najczęściej używa się logarytmów dziesiętnych oraz logarytmów naturalnych, tj. o podstawach równych odpowiednio 10 i *e*.

Przy odwzorowaniu wielkości w skali logarytmicznej, używane są często specyficzne jednostki miary, właściwe dla danej dziedziny, np. bele (B) i decybele (dB) w elektronice i przetwarzaniu sygnałów czy nepery w akustyce[22].

Skale logarytmiczne są szeroko stosowane w nauce i technice dla odwzorowania wielkości, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, np.:

- Skala Richtera – do określania amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych.

Skutki trzęsienia ziemi w zależności od jego wielkości w skali Richtera:

Skala Richtera	Skutki	Średnia liczba trzęsień rocznie
< 2,0	Najmniejsze wstrząsy, nieodczuwalne przez człowieka ani przez sejsmograf.	ok. 2 920 000 (8000 dziennie)
2,0-3,4	Wstrząsy nieodczuwalne dla człowieka, lecz rejestrowane przez sejsmograf.	ok. 800 000
3,5-4,2	Bardzo małe wstrząsy, odczuwane tylko przez niektórych ludzi.	ok. 30 000
4,3-4,8	Odczuwane przez większość osób, nieszkodliwe.	ok. 4 800
4,9-5,4	Odczuwane przez wszystkich, powoduje bardzo niewielkie zniszczenia.	ok. 1 400
5,5-6,1	Średnie wstrząsy, powoduje mniejsze uszkodzenia budynków.	ok. 500
6,2-6,9	Duże wstrząsy, powodują znaczne zniszczenia.	ok. 100
7,0-7,3	Poważne zniszczenia.	ok. 15
7,4-8,0	Ogromne zniszczenia.	ok. 4
8,0-8,9	Ogromne zniszczenia, katastrofalne skutki dla wielu krajów.	ok. 1
≥ 9,0	Trzęsienie, które może zburzyć wszystkie miasta na terenie większym niż kilkanaście tysięcy km².	ok. raz na 20 lat

Tabela 1-1 – Skala Richtera

- Skala decybelowa – do określania poziomu wielkości elektrycznych i akustycznych.
- Skala pH – do określania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych.
- Interwały w muzyce.

22 www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna, 25.02.2013

- Skala entropii w termodynamice.
- Skala Krumbeina – dla określania wielkości ziaren w geologii.
- Skala wielkości gwiazdowych.
- Skala logarytmiczna jest w pewnych zastosowaniach skalą naturalną, ze względu na to, że zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat innych skal logarytmicznych lub innego zastosowania logarytmów.

ZADANIA

1.10.1 Oblicz $\log_3 b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 27 b) $\frac{3}{9}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[5]{81}$

Odpowiedź: a) 3; b) –1; c) –1; d) $\frac{4}{5}$.

1.10.2 Oblicz $\log_{\frac{1}{3}} b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 9 b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$

Odpowiedź: a) –2; b) 1; c) $-\frac{4}{3}$; d) $-\frac{2}{5}$.

1.10.3 Oblicz b, jeżeli $\log_2 b$ wynosi:

a) $\sqrt[4]{2}$ b) 4 c) -3 d) $0{,}125$ e) 1

Odpowiedź: a) $-\frac{7}{4}$; b) 16; c) $2^{2^{\frac{1}{4}}}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 2.

1.10.4 Oblicz b, jeżeli $log_{\frac{1}{2}} b$ wynosi:

a) $0{,}125$ b) $0{,}25$ c) 64 d) $\frac{1}{16}$

Odpowiedź: a) 3; b) 2; c) –5; d) 4.

1.10.5 Oblicz:

a) $log_4 16$ b) $log_3 \sqrt[3]{3}$ c) $log_2 \frac{\sqrt{8}}{4}$ d) $log_{\frac{1}{2}} (\frac{8}{2})2$

e) $log_{\frac{3}{5}} (\frac{18}{50})3$ f) $3log_{2,5} \frac{2}{5}$ g) $log_{\frac{1}{3}} (64)-1$ h) $log_2 (\frac{1}{64})^{-2}$

i) $2log_{\frac{1}{5}} 125$ j) $2log_{\frac{1}{3}} 9$

Odpowiedź: a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{2}{3}$; d) –4; e) 6; f) –3; g) 2; h) 12; i) –6; j) –4.

1.10.6 Oblicz, stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_2 4 + 2\log_3 1$ b) $(\log_5 5 - \log_5 125)^3$ c) $2\log_3 27 - \log_3 81$

d) $\log_2 4 + 2\log_2 1$ e) $\log_3 21 - \log_3 7$ f) $\log_5 10 + \log_5 24{,}3$

g) $\log_4 2 + \log_4 32$ h) $\log_4 8 + \log_4 2$

Odpowiedź: a) 2; b) –1; c) 9; d) 2; e) 1; f) 5; g) 3; h) 2.

1.10.7 Oblicz podstawę logarytmu wiedząc, że:

a) $\log_a 25 = 4$ b) $\log_a 0{,}01 = 3$ c) $\log_a 27 = 3$

d) $\log_a \frac{1}{27} = 2$ e) $\log_a \frac{3}{18} = 4$

Odpowiedź: a) $\sqrt[4]{25}$; b) $\sqrt[3]{0{,}01}$; c) 3; d) $\sqrt{27}$; e) $\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

1.10.8 Oblicz:

a) $\log_3 (2 - (\log_4 \sqrt{4}) \cdot \log_{\sqrt{4}} \frac{1}{4})$ b) $\log_3 9 \cdot \log_4 16 \cdot \log_5 25 + 1$

c) – log3log2log2256 d) $-\log3\log4\sqrt[5]{\sqrt[4]{4}}$

Odpowiedź: a) 1; b) 9; c) –1; d) 2.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Na seans filmowy sprzedano 280 biletów. W tym 126 ulgowych. Jaki procent sprzedanych biletów stanowiły bilety ulgowe?[23]

a) 22% b) 33% c) 45% d) 63%

2. 6% liczby x jest równe 9. Wtedy:

a) $x = 240$ b) $x = 150$ c) $x = 24$ d) $x = 15$

3. Iloraz $32^{-27} \div \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy:

a) 2^{-27} b) 2^{-3} c) 2^3 d) 2^{27}

4. O liczbie x wiadomo, że $\log_3 x = 9$. Zatem:

a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 3^9$ d) $x = 9^3$

5. Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?[24]

a) 163,80 b) 180 c) 294 d) 420

23 Zadania: 1, 2, 3, 4 zaczerpnięte z CKE, Próbna matura, listopad 2009.
24 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpięte z CKE, maj 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).

6. Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa:

a) 1 b) 4 c) 9 d) 36

7. Liczba jest równa $\log_4 8 + \log_4 2$:

a) 1 b) 2 c) $\log_4 6$ d) $\log_4 10$

8. Liczba $|5-7|-|-3+4|$ jest równa: [25]

a) –3 b) –5 c) 1 d) 3

9. Samochód kosztował 30000 zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Po tych obniżkach samochód kosztował:

a) 24400 zł b) 24700 zł c) 24000 zł d) 300 zł

10. Dana jest liczba $x = 63^2 \cdot (\frac{1}{3})^4$. Wtedy:

a) $x = 7^2$ b) $x = 7^{-2}$ c) $x = 3^8 \cdot 7^2$ d) $x = 3 \cdot 7$

11. Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa:

a) -2 b) -1 c) $\frac{1}{25}$ d) 4

12. Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje:[26]

a) 1701 zł b) 2100 zł c) 1890 zł d) 2091 zł

13. Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%, w wyniku obu obniżek cena nart zmiejszyła się o:[27]

a) 44% b) 50% c) 56% d) 60%

14. Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16\frac{3}{4}$ jest równa:

a) -8 b) -4 c) 2 d) 4

15. Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy:

a) –6 b) –4 c) –1 d) 1

16. Liczba $\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 \cdot 0{,}5}$ jest równa:

a) 1 b) –1 c) 2 d) 4

---

25 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpięte z CKE, listopad 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd, 20.03.2013).

26 Zadanie 20 zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20,03,2013).

27 Zadania: 13, 14, 15 zaczerpnięte z CKE, maj 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).

17. Liczba $\log_3 36 - \log_3 4$ jest równa:

a) $\log_3 32$ b) $\log_3 14$ c) 2 d) 9

18. Stół kosztował 320 zł. Ile kosztuje stół po podwyżce ceny o 20%?

a) 384 zł b) 256 zł c) 340 zł d) 400 zł

19. Liczba $27^{-2} \cdot 9^6$ jest równa:[28]

a) 9^5 b) 3^{16} c) 6^4 d) 3^6

20. Liczba $\log 0{,}1 + \log_2 16$ jest równa:

a) 6 b) –5 c) 3 d) 7

21. Torba kosztowała 40 zł, a po podwyżce 50 zł. O ile procent podwyższono cenę tej torby?

a) 10% b) 25% c) 75% d) 20%

22. Liczba $\dfrac{\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}}$ jest równa: [29]

a) -1 b) $\dfrac{4}{49}$ c) $-2\dfrac{1}{4}$ d) 1

23. Liczba $\log 6$ jest równa:

a) $\log 2 \cdot \log 3$ b) $\dfrac{\log 12}{\log 2}$ c) $\log 2 + \log 3$ d) $\log 2 - \log 3$

24. 20% pewnej liczby jest o 16 mniejsze od tej liczby. Tą liczbą jest:

a) 32 b) 20 c) –2 d) –20

25. Liczbę $x = 2^2 \cdot 16^{-4}$ można zapisać w postaci:[30]

a) $x = 214$ b) $x = 2–14$ c) $x = 32–2$ d) $x = 2–6$

26. Hania pokonuje drogę $S = 100\ m$ z domu do szkoły w czasie 30 min. Z jaką średnią prędkością idzie Hania?

a) $0{,}05\ \frac{km}{h}$ b) $0{,}2\ \frac{km}{h}$ c) $5\ \frac{km}{h}$ d) $3{,}3\ \frac{km}{h}$

27. Liczba $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ jest równa:

a) 6 b) –3 c) 3 d) –6

---

28 Zadania 19, 20, 21 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2009.

29 Zadania 22, 23, 24 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011 (www.operon.𝑥.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 20.03.2013).

30 Zadania 25, 26, 27, 28 zaczerpnięte z OKE Poznań, styczeń, 2013 (www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc-0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 21.03.2013).

28. Odległość z Elbląga do Legnicy jest równa 468 km, natomiast po zaokrągleniu do setek kilometrów 500 km. Błąd względny tego przybliżenia jest równy:

a) 32 km b) 68 km c) około 6,8% d) 0,32%

29. Liczba $|5-2|+|1-6|$ jest równa:[31]

a) 8 b) 2 c) 3 d) –2

30. Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

31. **(2 pkt)**[32] Miesięczny koszt ogrzewania domu wynosi 200 zł. Dla zmniejszenia tych kosztów planuje się położenie dodatowej izolacji cieplnej, której wartość wynosi 4200 zł. Jeśli ta izolacja daje 30% oszczędności w wydatkach na ciepło, to po ilu latach poniesione koszty zwrócą się?

32. **(2pkt)** Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.

33. **(2 pkt)** Wiedząc, że $\sqrt{x}=16$, $\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}$ oblicz $\sqrt[5]{xy}$.

34. **(2 pkt)** Dana jest liczba 2,363636... Podaj zaokrąglenie tej liczby z dokładnością do 0,001 i oblicz błąd względny tego przybliżenia.

35. **(5 pkt)** Siostry Zosia i Zuzia są współwłaścicielkami działki, przy czym część Zosi jest o 40% więsza od części Zuzi. Zuzia przeznaczyła na budowę altany 21% powierzchni swojej działki, to jest 210 m^2. Oblicz pole powierzchni całej działki. Jaki procent pola powierzchni całej działki stanowi działka Zuzi? Wynik zaokrągij do 1%.

36. **(2 pkt)** Aby obliczyć kwadrat liczby trzycyfrowej, można skorzystać ze wzoru: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, na przykład:

$$172 = (100+70+2)^2 = 100^2+70^2+2^2+2*100*70+2*100*2+2*70*2$$
$$= 10000+4900+4+14000+400+280 = 29584$$

37. **(2 pkt)** O ile procent zwiększy się pole powierzchni działki w kształcie prostokąta, jeśli długość każdego boku powiększymy o 30%?

38. **(2 pkt)** Liczbę 0,(4) – 0,2(1) zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

39. **(3 pkt)** Podaj liczby całowite, które należą do zbioru:

a) $(-\infty,2\rangle \cap (1;5)$ b) $\langle -2;3) \cup (3;5\rangle$ c) $(-5;7)/\langle 0;+\infty)$

40. **(4 pkt)** Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:

A $=\log_6(\log_2 64)$; B $=\log_{\frac{2}{3}}\frac{81}{16}$; C $=\log_{\frac{1}{2}}2\frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{2}}1\frac{1}{8}$; D $=\log_3 3\frac{6}{7}+\log_3 2\frac{1}{3}$

41. **(2 pkt)** Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{(0{,}75)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}$?

---

31 Zadania: 29, 30 zaczerpnięte z matury poprawkowej, sierpień, 2011 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 21.03.2013).

32 Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2 Wyrażenia algebraiczne

Algebra jest jednym z najstarszych działów matematyki. Około 300 r. n.e. starożytny myśliciel Diofantos po raz pierwszy niewiadome oznaczał literami. Za twórcę współczesnej algebry uznaje się jednak Francioisa Viete. Ten francuski matematyk pierwszy szeroko wprowadził oznaczenia literowe dla niewiadomych oraz dla współczynników.

To już potrafię:

1. Opisywać za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
2. Obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3. Redukować wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4. Dodawać i odejmować sumy algebraiczne;
5. Mnożyć jednomiany, sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnożyć sumy algebraiczne.

▶ **SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?**

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Wyrażenie $(2ab^2c^3)^3$ można zapisać jako:

a) $2ab5c^2$ b) $2ab^6c^9$ c) $8a^3b^5c^6$ d) $8a^3b^6c^9$

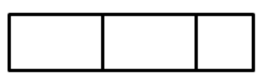
Zad.2. Wyrażenie $25 - a^2 + a$, dla $a = -3$ jest równe:

a) 13 b) 31 c) 19 d) 16

Zad.3. Wyrażenie $(n - 3m)(n + 3m)$ jest równe wyrażeniu

a) $n^2 - 6nm + 9n^2$ b) $n^2 - 6m^2$ c) $n^2 - 6nm + 6n^2$ d) $n^2 - 9m^2$

Zad.4. Na ceglanej elewacji jednego z budynków w mieście powtarza się wzór. Przez *n* oznaczmy długość dłuższej cegły, a przez *m* długość krótszej cegły. Łączną długość pięciu takich wzorów opisuje wyrażenie:



a) $5 \cdot 2n + m$ b) $2n + 5m$ c) $5(2n + m)$ d) $5(2n + 2m)$

Zad.5. Wyrażenie $9b^2 + 6ab - 3b$ jest równe:

a) $3b^2(3 + 2a - 1)$ b) $3b(b + 3a - 1)$

c) $3b(3b + 2a - 1)$ d) $3(b + 2a - 1)$

Zad.6. W sklepie było 20 kilogramów pomarańczy po 3 zł za kilogram, 35 kilogramów mandarynek po 2,50 zł za kilogram. Sprzedano owoce o wartości 130 zł. Które z wyrażeń przedstawia wartość owoców pozostawionych w sklepie?

a) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 - 130$ b) $130 - (20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50)$

c) $(20 + 35) \cdot (3 + 2{,}50) - 130$ d) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 + 130$

Zad.7. Ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$ wyznacz zmienną *v*

a) $v = \frac{2m}{E}$ b) $v = \sqrt{\frac{2m}{E}}$ c) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ d) $v = \sqrt{2Em}$

Zad.8. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $(5x^2 + 4x) - 7y^2 - (3x^2 + 3y^2)$ otrzymamy:

a) $2x^2 - 4y^2 + 4x$ b) $2x^2 - 10y^2 - 4x$

c) $2x^2 + 10y^2 + 4x$ d) $2x^2 - 10y^2 + 4x$

Zad.9. Liczbę 4 razy mniejszą od kwadratu liczby n przedstawia wyrażenie:

a) $n^2 : 4$ b) $n^2 - 4$ c) $\frac{1}{4n^2}$ d) $4 : n^2$

Zad.10. Różnica kwadratu potrojonej liczby x i ćwierci sześcianu liczby y, to:

a) $3x^2 - 0{,}25y^3$

b) $(3x)^2 - 0{,}25y^3$

c) $3x^2 - (0{,}25y)^3$

d) $(3x)^2 - (0{,}25y)^3$

Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	C	C	A	C	D	A	A

ZADANIA OTWARTE

1. Ze szkoły liczącej n uczniów $x\%$ wyjeżdża w czasie wakacji na obozy, $y\%$ do znajomych w góry, a $z\%$ z rodzinami na wczasy. Ile osób pozostaje w miejscu zamieszkania?

2. Zapisz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych w postaci wyrażenia algebraicznego.

3. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych

$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)$

4. Sprowadź do najprostszej postaci i oblicz wartość liczbową wyrażenia dla $x=-5, y=\frac{1}{2}$

$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)$

5. Uzasadnij, że $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ dla $a,b>0$

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	n – wszyscy uczniowie $x\%\cdot n$ – ilość uczniów na obozach $y\%\cdot n$ – ilość uczniów w górach $z\%\cdot n$ – ilość uczniów na wczasach $a\%\cdot n$ – uczniowie pozostający w domu $x\%\cdot n+y\%\cdot n+z\%\cdot n+a\%\cdot n=n$ $xn+yn+zn+an=100n$ $an=100n-xn-yn-zn$ $a=\frac{n(100-x-y-z)}{n}$ uczniów
2	n– liczba naturalna $2n$ – liczba parzysta $2n+1$ – liczba nieparzysta $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=2n+1+2n+3+2n+5=6n+9=3(2n+3)$
3	$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)=2x+5+3x-2y+2x+3-4y-1$ $=7x-6y+7$
4	$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)=x^2-4y^2+x^2+2xy+y^2-4xy+4y^2$ $=2x^2+y^2-2xy=2\cdot(-5)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-5)\cdot\frac{1}{2}=50+\frac{1}{4}+5=55\frac{1}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}\left(2-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2-\sqrt{b}+\sqrt{b}=2$

2.1 Wartość liczbowa wyrażeń

Teraz nauczę się:

Stosować wzory skróconego mnożenia na:

- Kwadrat sumy: $(a + b)^2$
- Kwadrat różnicy: $(a - b)^2$
- Różnicę kwadratów: $a^2 - b^2$

Wyrażenia algebraiczne powstają przez łączenie symboli literowych oraz liczb znakami działań i nawiasów.

Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$x, 25,\ 2y^3, -\frac{1}{2}ab^2, 5(x-2),\ a+3b^2,\ \frac{(a+b)}{2}\cdot h,\ 3(2+2a)+4-6a$$

Wyrażenia algebraiczne występują w różnych wzorach, twierdzeniach czy dowodach.

Wyrażenia takie, jak $3x, \frac{1}{5}ab, -2y^2, 3ab^2c^3, -1$nazywamy **jednomianami**. Możemy wśród nich wyróżnić **jednomiany podobne,** czyli takie, które różnią się między sobą tylko współczynnikiem liczbowym.

Przykłady jednomianów podobnych:

$1;\ 4;\ \frac{3}{8};\ 15, \ldots$

$x;\ 5x;\ -0{,}75x;\ 1\frac{1}{5}x, \ldots$

$a^2bc^3;\ 4a^2bc^3;\ -2\frac{4}{5}a^2bc^3;\ 0{,}63a^2bc^3$

Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.

$$xy - \mathbf{2x} + \mathbf{y} - \mathbf{2} - \mathbf{x} + 2xy + \mathbf{4y} - \mathbf{5} = -\mathbf{3x} + \mathbf{5y} + 3xy - \mathbf{7}$$

$$4a^2 - \mathbf{3b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \mathbf{2b^2} - \mathbf{12} + 2\frac{3}{4}\boldsymbol{a} - 3a^2 + \mathbf{5b} = a^2 + \mathbf{2b^2} + 2\frac{1}{4}\boldsymbol{a} + 2b - \mathbf{12}$$

$$3a - \mathbf{8b^2} + \mathbf{14ac} + \frac{1}{2}a + \mathbf{7} - \mathbf{10ca} + 5\frac{3}{4}\boldsymbol{b^2} - \mathbf{4} = -2\frac{1}{4}\boldsymbol{b^2} + 3\frac{1}{2}a + \mathbf{4ac} + \mathbf{3}$$

Taki zabieg nazywa się **redukcją wyrazów podobnych**.

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażeń algebraicznych, w miejsce liter należy wstawić liczby i wykonać określone działania.

Przykład 1

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3x^2 + 2x - 4$ dla $x = -2$.

$$3x^2 + 2x - 4 = 3(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 4 = 3\cdot 4 - 4 - 4 = 12 - 4 - 4 = 4$$

Przykład 2

Zdredukuj wyrazy podobne i oblicz wartość liczbową danego wyrażenia dla $x = -3, y = 2$.

a) $4x^2 + 2x - 8 + 3x - \frac{1}{3}x^2 + 4 - 5x = 3\frac{2}{3}x^2 - 4 = 3\frac{2}{3} \cdot (-3)^2 - 4 = \frac{11}{3} \cdot 9 - 4 =$
$33 - 4 = 29$

b) $12x - 8x^2 + \frac{4}{3}x - 7 + 12x^2 - 14 + 9x = 4x^2 + 21\frac{4}{3}x - 21 =$
$= 4 \cdot (-3)^2 + \frac{67}{3} \cdot (-3) - 21 = 4 \cdot 9 - 67 - 21 = 36 - 88 = -52$

c) $3x^2y + 5y - 6 + 3y^2x - 4y + 7x + 6x^2y - 4y^2x - 12x =$
$= 9x^2y - y^2x - 5x + y - 6 = 9 \cdot (-3)^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-3) + 2 - 6$
$= 9 \cdot 9 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 15 + 2 - 6 = 162 + 12 + 15 + 2 - 6 = 185$

d) $-\frac{2}{5}x + 1\frac{1}{4}x - 0,3y = -\frac{8}{20}x + 1\frac{5}{20}x - 0,3y = \frac{17}{20}x - 0,3y =$
$= \frac{17}{20} \cdot (-3) - 0,3 \cdot 2 = -\frac{51}{20} - \frac{6}{10} = -\frac{51}{20} - \frac{12}{20} = -\frac{63}{20} = -3,15$

ZADANIA

2.1.1 Znajdź wartości liczbowe wyrażenia $(2x^2 - 2xy)^2$ przy następujących wartościach:

a) $x = 3;\ y = 2$

b) $x = 0,5;\ y = 0,2$

c) $x = 3\frac{1}{2};\ y = 1\frac{1}{2}$

d) $x = 2,5;\ y = 1,75$

Odpowiedź: a) 36; b) 0,09; c) 196; d) $14\frac{1}{16}$.

2.1.2 Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $3(x^2 - 3y + 4) - 8$, dla $x = 2; y = \frac{4}{3}$

b) $10(x - 2) - 4(y + 3) + 6$, dla $x = 1\frac{1}{2}; y = 0,75$

c) $20 - 4(2x^3 - 8x + 1) + 3$, dla $x = -\frac{1}{2}$

d) $x + 5 - (x - 3) + 4y - 7$, dla $x = -5; y = 3$

Odpowiedź: a) 4; b) –14; c) 4; d) 13.

2.1.3 Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $(5x - 2)^2 - (5x - 2)(5x + 2)$, dla $x = -0,2$

b) $\frac{4x}{y(x+y)}$, dla $x = 6, y = -2$

c) $(a^2 - 16)(a + 2)$, dla $a = \sqrt{2}$

d) $\frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1}$, dla $x = 4$

Odpowiedź: a) 12; b) –3; c) $-14(\sqrt{2} + 2)$; d) $1\frac{1}{5}$.

2.2 Działania na wyrażeniach algebraicznych

Poza dodawaniem sum algebraicznych można na wyrażeniach algebraicznych wykonywać także inne działania: mnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożyć dwie sumy algebraiczne i wyłączać wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias.

Do przekształcania wyrażeń wykorzystuje się prawa działań na liczbach rzeczywistych.

➡ Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian polega na zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Przykład 1

$$-5(3x+y) = -5 \cdot 3x + (-5) \cdot y = -15x - 5y$$

$$2x(x^2 - 5y) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-5y) = 2x^3 - 10xy$$

$$3a(2x^2 + 4x - 2) = 3a \cdot 2x^2 + 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-2) = 6ax^2 + 12ax - 6a$$

➡ Mnożenie sum algebraicznych polega na pomnożeniu każdego składnika pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Przykład 2

$$(x+3)(2x-1) = x \cdot 2x + x \cdot (-1) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-1) = 2x^2 - x + 6x - 3$$

$$\begin{aligned}(3x-2y)(-2x-5) &= 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot (-5) + (-2y) \cdot (-2x) + (-2y) \cdot (-5) \\ &= -6x^2 - 15x + 4xy + 10y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2x+3y-7)(x-2y) = \\ &= 2x \cdot x + 2x \cdot (-2y) + 3y \cdot x + 3y \cdot (-2y) + (-7) \cdot x + (-7) \cdot (-2y) \\ &= 2x^2 - 4xy + 3xy - 6y^2 - 7x + 14y = 2x^2 - 6y^2 - xy - 7x + 14y\end{aligned}$$

ZADANIA

2.2.1 Uprość wyrażenia, a następnie oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $x^2 - 2y^2 + xy$ dla $x = 2$ i $y = -5$

b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{4}{5}$

c) $3x^2 - 4x + 7 + x^2 - 5x - 8$ dla $x = -1$

d) $5x - 3(4 - 2x) + 2(-x + 1)$ dla $x = -2$

e) $(x-3)(x+2-4)$ dla $x = 3$

f) $4x^2 - x(x+3) - 5x$ dla $x = \frac{1}{3}$

g) $x(x-3y) + 2xy - y^2(2-y)$ dla $x = 2$ i $y = -3$

h) $3x - 4 - [2x^2 - 5x - (3 - 4x + 3x^2)]$ dla $x = -\frac{1}{2}$

i) $\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2} + \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}$ dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$

Odpowiedź: a) -56; b) 1; c) 16; d) -28; e) 0; f) $-2\frac{1}{3}$; g) $-2{,}75$

2.2.2 Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $(x-5)(x+2) =$

b) $(2x-3)(x-1) + 5x - 4(5-3x) =$

c) $2(2x-5y) - 3(4x+3y) =$

d) $(-x-2y)(-1) + 3(x+y+5) =$

e) $2x(x-5) - (x-y)(x+1) - 5x\left(\frac{2}{5}y - 2\right) =$

f) $5x(1-x^2) - (x-3)(-2x^2) =$

g) $-(3x-2y+1) + (5x-4y+4z) - (x-5y-z) =$

h) $2x - 3y + 4z - \{3x + y - 2z - [3x - 2y - 2z - (3x + 5y - 7z)]\} =$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 2x - 10$; b) $2x^2 + 12x - 17$; c) $-8x - 19y$; d) $4x + 5y + 15$;

e) $x^2 - x + y - xy$; f) $-x^3 - 6x^2 + 5x$; g) $x + 3y + 5z - 1$; h) $-x - 11y + 11z$.

2.2.3 Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia.

a) $(2x+y)(3y-5x) - 4x(x-y)$, dla $x = 1, y = -2$

b) $p(p-3k) + 2pk - k^2(2-k)$, dla $p = 2, k = -4$

c) $\frac{(2a-3b)(b-4a)-2b^2}{3a(4-b)-5b(a+3)}$, dla $a = -2, b = -4$

d) $(a+1)(b+2) + (b+3)(c+4) + (a+5)(c+6)$, dla $a = 1, b = 2, c = 3$

Odpowiedź: a) –12; b) –35; c) 0; d) 9; e) 7.

2.2.4 Wiedząc, że $x = 2 + \sqrt{5}$ i $y = 1 - 2\sqrt{5}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{xy}{2x+y}$

Odpowiedź: $\frac{-8-3\sqrt{5}}{5}$

2.2.5 Uzasadnij, że dla $a, b > 0 \; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}-a}{a-b} = 1$

2.3 Wzory skróconego mnożenia

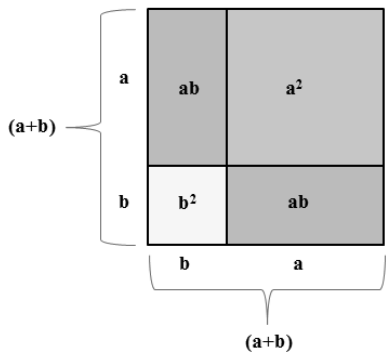
Wzory skróconego mnożenia – kwadrat sumy

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów powiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a+b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a+b)^2$ i jest sumą pól czterech figur.



$$(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Rysunek 2-1 – Kwadrat sumy

Interpretacja algebraiczna

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Przykład 1

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$$(2a+4)^2 = (2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot 4 + 4^2 = 4a^2 + 16a + 16$$

$$(2k+5l)^2 = (2k)^2 + 2\cdot 2k\cdot 5l + (5l)^2 = 4k^2 + 20kl + 25l^2$$

$$\left(a\sqrt{2}+2\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot a\sqrt{2}\cdot 2 + 2^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 4$$

Przykład 2

$$(102)^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

$(120)^2 = (100 + 20)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 20^2 = 10000 + 4000 + 400 = 14400$

$(27)^2 = (20 + 7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 400 + 280 + 49 = 729$

Przykład 3

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + x^2 = (7 + x)^2 = (7 + x)(7 + x)$

$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x + 2y)^2 = (3x + 2y)(3x + 2y)$

$9 + 6x\sqrt{3} + 3x^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)\left(3 + x\sqrt{3}\right)$

Wzory skróconego mnożenia – kwadrat różnicy

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów pomniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

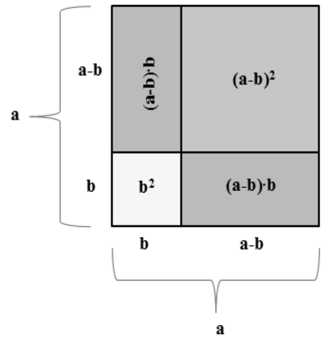
Interpretacja algebraiczna

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a - b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a - b)^2$

i jest równe sumie pól kwadratów o boku$a$ i o boku b zmniejszonej o pole dwóch prostokątów o bokach a, b.



$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Rysunek 2-2 – Kwadrat różnicy

Przykład 4

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(4x - 3)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$

$(3a - 5b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$

$\left(1 - x\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2x\sqrt{3} + 3x^2$

Przykład 5

$(198)^2 = (200 - 2)^2 = 200^2 - 2 \cdot 200 \cdot 2 + 2^2 = 40000 - 800 + 4 = 39204$

Przykład 6

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$a^2 - 16a + 64 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 8 + 8^2 = (a - 8)^2 = (a - 8)(a - 8)$

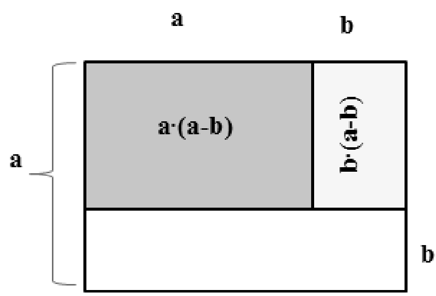
$9 - 6y\sqrt{5} + 5y^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot y\sqrt{5} + \left(y\sqrt{5}\right)^2 = \left(3 - y\sqrt{5}\right)^2 = \left(3 - y\sqrt{5}\right)\left(3 - y\sqrt{5}\right)$

$36x^2 - 36xz + 9z^2 = (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot 3z + (3z)^2 = (6x - 3z)^2 = (6x - 3z)(6x - 3z)$

Wzory skróconego mnożenia – różnica kwadratów

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń a i b przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$



Rysunek 2-2– Różnica kwadratów

Interpretacja geometryczna

Pole pokolorowanego prostokąta jest równe:

$P = (a + b)(a - b)$

$P = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Zatem $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Interpretacja algebraiczna

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Przykład 7

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(a-3)(a+3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$

$(3z+2y)(3z-2y) = (3z)^2 - (2z)^2 = 9z^2 - 4y^2$

$(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5) = (\sqrt{7})^2 - 5^2 = 7 - 25 = -18$

Przykład 8

Zapisz różnicę w postaci iloczynu.

$16b^2 - 25c^2 = (4b)^2 - (5c)^2 = (4b-5c)(4b+5c)$

$2x^2 - 4y^2 = (x\sqrt{2})^2 - (2y)^2 = (x\sqrt{2}+2y)(x\sqrt{2}-2y)$

$a^4 - 64 = (a^2)^2 - 8^2 = (a^2-8)(a^2+8) = (a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})(a^2+8)$

Przykład 9

Oblicz $399 \cdot 401$.

$399 \cdot 401 = (400-1)(400+1) = 400^2 - 1^2 = 160000 - 1 = 159999$

ZADANIA

2.3.1 Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia.

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+6)^2$ c) $(2+5y)^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)^2$

e) $(6x+5y)^2$ f) $(y-5)^2$ g) $(2y-4x)^2$ h) $(-3-x)^2$

i) $(y-5)^2$ j) $\left(6y-\frac{1}{3}x\right)^2$

Odpowiedź:

a) x^2+6x+9; b) $4x^2+24x+36$; c) $4+20y+25y^2$; d) $\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$;
e) $36x^2+60xy+25y^2$; f) $y^2-10y+25$; g) $4y^2-16xy+16x^2$; h) $9+6x+x^2$;
i) $y^2-10y+25$; j) $36y^2-4x+\frac{1}{9}x^2$.

2.3.2 Oblicz.

a) 103^2 b) 78^2 c) 503^2 d) 99^2 e) 498^2 f) 303^2

Odpowiedź: a) 10609; b) 6084; c) 253009; d) 9801; e) 248004; f) 91809.

2.3.3 Oblicz, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

a) $(\sqrt{3}+2)^2$ b) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$

c) $(2\sqrt{2}-5)^2$ d) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

Odpowiedź: a) $4\sqrt{3}+7$; b) $2\sqrt{21}+10$; c) $33-20\sqrt{2}$; d) $18+12\sqrt{2}$.

2.3.4 Zapisz wyrażenia w postaci iloczynu.

a) $x^2 - 25$ b) $4x^2 - 9y^2$ c) $x^4 - 49y^2$

d) $64 - 0{,}36x^2$ e) $\frac{64}{81}x^2 - 121y^2$ f) $3x^2 - 7y^2$

Odpowiedź:

a) $(x-5)(x+5)$; b) $(2x-3)(2x+3y)$; c) $(x-7y)(x+7y)$;

d) $(8-0{,}6x)(8+0{,}6x)$; e) $\left(\frac{8}{9}x - 11y\right)\left(\frac{8}{9}x + 11y\right)$; f) $\left(\sqrt{3}x - \sqrt{7}y\right)\left(\sqrt{3}x + \sqrt{7}y\right)$.

2.3.4 Zapisz w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

a) $(x-2)(x+2)$ b) $(2x-3y)(2x+3y)$

c) $-\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(\frac{1}{2}x - y\right)$ d) $\left(\sqrt{2}-5\right)\left(\sqrt{2}+5\right)$

e) $\left(3\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-3\right)$ f) $(-5x-6)(5x-6)$

Odpowiedź: a) $x^2 - 4$; b) $4x^2 - 9y^2$; c) $-\frac{1}{4}x^2 + y^2$; d) -23; e) 54; f) $36 - 25x^2$.

2.4 Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Wzory skróconego mnożenia stosuje się także do **usuwania niewymierności** z mianownika ułamka. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez taki czynnik, który da w mianowniku liczbę całkowitą. Jeżeli w mianowniku mamy sumę lub różnicę, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Przykład 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+5)}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{18+15\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{18+15\sqrt{3}}{12-5} = \frac{3(6+5\sqrt{3})}{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} =$$

$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

ZADANIA

2.4.1 Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$ c) $\frac{7}{\sqrt[3]{8}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ f) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ h) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$

Odpowiedź:

a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; c) 3,5; d) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{4\sqrt{33}-4\sqrt{6}-\sqrt{22}+11}{9}$; f) $2\sqrt{2}-2$; g) $15+5\sqrt{6}$; h) $\frac{-7-2\sqrt{10}}{3}$.

2.4.3 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2}{5+\sqrt{5}}$, $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2\sqrt{3}+5}{6+2\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Odpowiedź:

a) $\sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-3, 0{,}5-0{,}1\sqrt{5}, -3\left(2+\sqrt{5}\right)$;

b) $\frac{6-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}, -5-2\sqrt{6}, \frac{3}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.4.4 Usuń niewymierność, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $\frac{5}{4+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Odpowiedź: a) $\frac{-30+25\sqrt{3}-15\sqrt{7}+10\sqrt{21}}{12}$; b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

2.5 Rozkład wielomianu na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias to nic innego, jak zamiana sumy algebraicznej na iloczyn wyrażeń. Umiejętność ta jest przydatna do rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Przykład

$$3x+6y-12z = 3\cdot z + 3\cdot 2y - 3\cdot 4z = 3(z+2y-4z)$$

$$-2abc+6a^2bc-10ac^2 = -2abc + (-2)\cdot 3aabc + (-2)\cdot 5acc$$
$$= -2ac(b+3ab+5c)$$

$$x(2a+b)-y(2a+b) = (2a+b)(x-y)$$

$$x(y-z)-(y-z) = x(y-z) - 1(y-z) = (y-z)(x-1)$$

ZADANIA

2.5.1 Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5x + x^2 =$ b) $6x^2 - 3x =$

c) $6x + 10xy + 8xz =$ d) $8x^2y + 4xy - 2y =$

e) $3xyz + 6xzt - 9xyt =$ f) $5x^4 - 25x^3 - 10x^2 =$

g) $2(x + y) + (x + y)z =$ h) $(2x - 3y) - a(2x - 3y) =$

i) $(5 - x)y^2 - 9(5 - x)y - (x - 5) =$

Odpowiedź:

a) $x(5 + x)$; b) $3x(2x - 1)$; c) $2x(3 + 5y + 4z)$; d) $2y(4x^2 + 2x - 1)$; e) $3x(yz + 2zt - 3yt)$;

f) $5x^2(x^2 - 5x - 2)$; g) $(x + y)(2 + z)$; h) $(2x - 3y)(1 - a)$; i) $(5 - x)(y^2 - 9y + 1)$.

2.5.3 Zapisz w postaci iloczynowej:

a) $3x^2 - 6$ b) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ c) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

d) $3x^3 - 15x^2 - 6x + 30$ e) $x^4 - x^3 - 8x + 8$

Odpowiedź:

a) $3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$; c) $(x + 2)(x^2 + 9)$;

d) $3(x - 5)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; e) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Równość $(a + 4\sqrt{2})^2 = a^2 + 32\sqrt{2} + 32$ zachodzi dla:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$ d) $a = 4\sqrt{2}$

2. Liczba $(2 - 3\sqrt{2})^2$ jest równa:[33]

a) -14 b) 22 c) $-14 - 12\sqrt{2}$ d) $-22 - 12\sqrt{2}$

3. Równość $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$ zachodzi dla:

a) $a = 14$ b) $a = 7\sqrt{2}$ c) $a = 7$ d) $a = 2\sqrt{2}$

33 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z „Poprawkowy egzamin maturalny z matematyki", sierpień, 212 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 23.03.2013).

4. Liczba x stanowi 20% liczby y. Zatem prawdziwe jest następujące równanie:

a) $0{,}2x = y$ b) $y = 5x$ c) $1{,}2x = y$ d) $x = 1{,}2\,y$

5. Liczba $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2})$ jest równa:[34]

a) $19 - 10\sqrt{2}$ b) $17 - 4\sqrt{2}$ c) $15 + 14\sqrt{2}$ d) $19 + 6\sqrt{2}$

6. Wyrażenie $8x^2 - 4xy + 6x$ jest równe iloczynowi:

a) $2x(4x - 2y + 6)$ b) $2x(4x - 2y + 3)$

c) $2x(4x^2 - 2y + 3x)$ d) $2x(4x - y + 3)$

7. Wartość wyrażenia $(\sqrt{x+1} + 1)(1 - \sqrt{x+1})$ dla $x = \sqrt{2} - 2$ jest równa:

a) $2 - \sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} - 2$ c) $\sqrt{2} - 3$ d) $4 - \sqrt{2}$

8. Liczba a stanowi 60% liczby b. Wówczas:[35]

a) $a = b - 0{,}4$ b) $b = 0{,}4\,a$ c) $b = \frac{5}{3}\,a$ d) $a = \frac{5}{3}\,b$

9. Wartość wyrażenia $\frac{2a+12}{-a^2}$ dla $a = -2\sqrt{3}$ jest równa:

a) $4\sqrt{3} - 1$ b) $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$ c) $\frac{-\sqrt{3}+3}{3}$ d) $-4\sqrt{3} + 1$

10. Rozwiązanie równania $x(x - 1) + 36 = x(x + 3)$ należy do przedziału:

a) $(3{,}10)$ b) $(11, +\infty)$ c) $(-5{,}9)$ d) $(-\infty, 5)$

11. Różnica liczby x i 15% tej liczby jest równa 255. Równaniem opisującym tę zależność jest:

a) $x - 0{,}15 = 255$ b) $1{,}85 \cdot x = 255$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 255$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 255$

12. Jeżeli $x = 1 - 2\sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2}$, to xy równe jest:[36]

a) $\sqrt{2} - 4$ b) $4 - \sqrt{2}$ c) -3 d) $-\sqrt{2}$

13. Wyrażenie $x(x-2)(x+2)$ jest równe:

a) $(x - 2)^3$ b) $x^3 - 4x$ c) $x^3 - 2$ d) $x^3 - 2x$

14. Wyrażenie $27x^3 + y^3$ jest równe iloczynowi

a) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ b) $(3x + y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

c) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ d) $(3x - y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

---

34 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpnięte z „Egzamin maturalny z matematyki", maj, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 23.03.2013).

35 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturaly z matematyki, CEN, Bydgoszcz.

36 Zadania: 12, 13, 14 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturalny z matematyki, OKE, Poznań.

15. Kwadrat liczby $x = 5 + 2\sqrt{3}$ jest równy:[37]

a) 37 b) $25 + 4\sqrt{3}$ c) $37 + 20\sqrt{3}$ d) 147

16. Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi:[38]

a) 5a2(1–10b+3) b) 5a (a–2b+3)

c) 5a (a–10b+15) d) 5(a–2b+3)

17. Liczba $\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 + 4\left(2 - \sqrt{2}\right)$ jest równa:[39]

a) $19 - 10\sqrt{2}$ b) $17 - 4\sqrt{2}$ c) $15 + 14\sqrt{2}$ d) $19 + 6\sqrt{2}$

18. Dla pewnych a i b zachodzą równości $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych a i b wartość wyrażenia $a - b$ wynosi:[40]

a) 25 b) 16 c) 10 d) 2

19. **(2 pkt)** Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} > \frac{a+1}{2}$.[41]

20. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

21. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

22. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a,b,c spełniają nierówność $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

23. Uprość wyrażenie: $-9(2m-3)+(m-3)^3-(m+2)(m-2)-m^3$, a następnie oblicz jego wartość dla $m = \sqrt{3}$[42].

24. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

25. Oblicz wartość wyrażenia: $(2x+3y)\cdot(2x-3y)-(2x-3y)^2$ dla $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$

37 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z CKE, 2010 (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 20.03.2013).
38 (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
39 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).
40 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 24.03.2013).
41 (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
42 Zadania: 23, 24, 25 zaczerpnięto z Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności

To już potrafię:

- Zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
- Sprawdzić, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- Sprawdzić, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- Rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi oraz zadania osadzone w kontekście praktycznym.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 Liczba 7 jest rozwiązaniem równania:

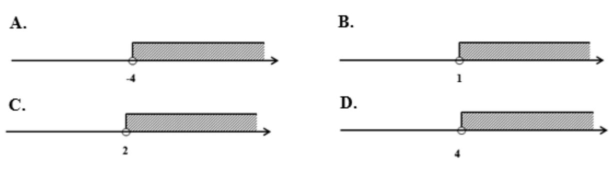
a) $2x + 1 = 3x - 2$ b) $2(x + 1) = 3x - 2$

c) $2x + 1 = 3(x - 2)$ d) $2x + 1 = 3x + 2$

Zad.2 Po obniżce o 30% płaszcz kosztuje 392 zł. Jaka jest pierwotna cena płaszcza?

a) 500 b) 560 c) 650 d) 600

Zad.3 Wybierz rysunek, który przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $x - 3 > 1$



Zad.4 Które z równań należy dopisać do równania $x - 2y = 8$, aby utworzony układ równań był sprzeczny?

a) $6x + 2y = 13$
b) $2x + 2y = 4$
c) $x - 2y = 4$
d) $2x - 4y = 16$

Zad.5 Układ równań $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

a) Ma dokładnie jedno rozwiązanie
b) Nie ma rozwiązań
c) Ma dwa rozwiązania
d) Ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zad.6 Jeżeli y jest liczbą szklanek o pojemności $0{,}2$ litra, które można napełnić sokiem z pełnego naczynia o pojemności $1{,}5$ litra, to opisuje to nierówność:

a) $0{,}2y \geq 1{,}5$
b) $0{,}2y > 1{,}5$
c) $0{,}2y \leq 1{,}5$
d) $1{,}5y < 0{,}2$

Zad.7 Ile litrów wody należy dolać do 3 litrów 10% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 6%? Załóż, że gęstość roztworu jest równa gęstości wody.

a) 1 litr
b) 4 litry
c) 3 litry
d) 2 litry

Zad.8 Nierównością równoważną nierówności $x > 1$ jest:

a) $x - 1 < 0$
b) $-x > -1$
c) $x - 2 > -1$
d) $\frac{x}{2} > 1$

Zad.9 Po wyznaczeniu y ze wzoru $2y = z - \frac{1}{3}y$, otrzymamy:

a) $y = \frac{3}{4}z$
b) $y = \frac{3}{7}z$
c) $y = \frac{4}{3}z$
d) $y = \frac{7}{3}z$

Zad.10 Pan Marek zebrał m kg jagód, pan Janek o $5\ \mathrm{kg}$ więcej niż pan Marek, a pani Ewa 2 razy mniej niż pan Marek i pan Janek razem. Łącznie zebrali $40\ \mathrm{kg}$ jagód. Wskaż odpowiednie równanie opisujące tę sytuację.

a) $m + m + 5 - \frac{1}{2}(m - 5 + m) = 40$
b) $m + m + 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$
c) $m + m - 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$
d) $m + m - 5 - \frac{1}{2}(m - 5 - m) = 40$

Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	A	C	D	C	B	B

ZADANIA OTWARTE

1. Za dwa filmy zapłacono 60,20 zł. Ile kosztuje każdy film, jeżeli jeden jest o 15% droższy od drugiego?

2. Korzystając z własności proporcji, rozwiąż równanie $\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$.

3. Za jedną książkę droższą i jedną tańszą zapłacono 19 zł, a za pięć książek droższych i sześć książek tańszych zapłacono 104 zł. Jaka była cena książki droższej, a jaka książki tańszej?

4. Kupując telewizor, Tomek wpłacił 30% jego wartości. Pozostałą część należności postanowił spłacić na raty. Płatność miała się odbyć w 9 ratach po 140 zł. Ile kosztował telewizor?

5. O godzinie 10^{00} Adam wyruszył piechotą z miejscowości A do miejscowości B. O godzinie 11^{30} z miejscowości A wyruszyła Ewa i jadąc na rowerze z prędkością 24 km/h, dogoniła Adama o godzinie 12^{15}. Z jaką średnią prędkością szedł Adam?

Odpowiedzi:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – cena I filmu $x + 15\%x$ – cena II filmu $x + x + 15\%x = 60{,}20$ $2{,}15x = 60{,}20 \Rightarrow x = 28$ Odp. Jeden film kosztuje 28 zł, a drugi 32,20 zł.
2	$\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$ $6x + 4 = 12 + 4x$ $2x = 8 \Rightarrow x = 4$
3	x – tańsza książka y – droższa książka $\begin{cases} x + y = 19 \\ 5x + 6y = 104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ Odp. Tańsza książka kosztowała 9 zł, a droższa 10 zł.
4	x – cena komputera $30\%x + 9 \cdot 140 = x$ $1260 = 0{,}7x \Rightarrow x = 1800$ Odp. Komputer kosztował 1800 zł.
5	$2\ h\ 15\ min$ – czas podróży Adama, $45\ min$ – czas podróży Ewy x – prędkość Adama $x \cdot 2\frac{15}{60}$ – droga przebyta przez Adama $24 \cdot \frac{45}{60}$ – droga przebyta przez Ewę $x \cdot 2\frac{15}{60} = 24 \cdot \frac{45}{60} \Rightarrow x = 8$ Odp. Adam szedł ze średnią prędkością $8\ km/h$.

3.1 Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Teraz nauczę się:

- Sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania,
- Rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Nazywać równania w zależności od liczby rozwiazań (sprzeczne, oznaczone, nieoznaczone),
- Korzystać z proporcji do rozwiązywania zadań.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy **zbiorem rozwiązań tego równania.**

Równanie o postaci $ax+b=0$, gdzie x jest niewiadomą, natomiast a i b są dowolnymi liczbami, nazywamy **równaniem liniowym.** Aby rozwiązać równanie liniowe, należy sprowadzić je w wyniku przekształceń równoważnych do równania elementarnego $ax=-b$ i obustronnie podzielić przez współczynnik występujący przy niewiadomej x.

! Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą zmieniają swój znak!

Przykład 1

$5x-10=0$

$5x=10/:5$

$x=2$

Równanie liniowe może mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Takie równanie nazywamy **oznaczonym.**

Przykład 2

a) $2x+1=-2(x+3)-1$

$2x+1=-2x-6-1$

$2x+2x=-6-1-1$

$4x=-8$

$x=-2$

b) $2x+3(3x-5)-10=5x+5$

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

Zgodnie zasadą mnożenia liczby przez nawias w wyrażeniach algebraicznych. Mnożymy przez 3 kolejne wyrażenia z nawiasu: 3x i (-5).

$$2x+9x-15-10=5x+5$$

Po lewej stronie można jeszcze zredukować wyrażenia podobne:
2x+9x=11x
-15-10=-25

$$11x-25=5x+5$$

Uwaga!!!

Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą, zmieniają swój znak!

$$11x-25=5x+5$$

Przenosimy 5x na lewo. W związku z tym zmieniamy znak i po lewej zapisujemy: -5x

Przenosimy (-25) na prawo. W związku z tym zmieniamy znak i po prawej zapisujemy: +25

$$11x-5x=5+25$$

Wykonujemy ostatnie działania po obu stronach równania.

$$6x=30$$

$$6x=30 \quad /\div 6$$

30 : 6 = 5

$$x=5$$

Sprawdzenie

Sprawdzenie warto wykonać zawsze, niezależnie od tego, czy jest wymagane w zadaniu, czy nie. Aby je wykonać, do pierwotnej formy równania podstawiamy zamiast „*x*" otrzymaną wartość, zgodnie z zasadami podstawiania wartości liczbowych za symbole w wyrażeniach algebraicznych. Zapisujemy zamiast „*x*" otrzymaną wartość, a między liczbą i podstawianą wartością zapisujemy mnożenie.

Równanie zostało dobrze wykonane, gdy po obu stronach uzyskujemy taką samą wartość i możemy zapisać: L = P.

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

$$2\cdot 5+3(3\cdot 5-5)-10=5\cdot 5+5$$

$$10+3(15-5)-10=25+5$$

$$10+3\cdot 10-10=30$$

$$10+30-10=30$$

$$30=30$$

$$L=P$$

Równanie liniowe może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Takie równanie nazywamy **nieoznaczonym (tożsamościowym).**

$$2(x-1)+4=2x+2$$
$$2x-2+4=2x+2$$
$$2x+2=2x+2$$
$$2x-2x=2-2$$
$$0=0$$
$$\downarrow$$

0 = 0 !
Piszemy więc:

$$\downarrow$$

Równanie jest tożsame
$$x \in R$$

➡ Równanie liniowe może nie mieć rozwiązań. Takie równanie nazywamy **sprzecznym.**

Równanie sprzeczne nie ma rozwiązań. W trakcie liczenia, dochodzimy do momentu, w którym powstaje sprzeczność (np. 0 = 9), wtedy znak równości przekreślamy: (0 ≠9). Następnie należy zapisać: „Równanie jest sprzeczne" oraz $x \in \emptyset$ (czyt. x należy do zbioru pustego), można też zapisać słownie: „Brak rozwiązań".

Przykład 4

$$5x-9 \neq 2x+3(x-2)$$
$$5x-9 \neq 2x+3x-6$$
$$5x-9 \neq 5x-6$$
$$5x-5x \neq -6+9$$
$$0 \neq 3$$
$$\downarrow$$

0 ≠ 3 !
Piszemy więc:

$$\downarrow$$

Równanie jest sprzeczne
$$x \in \emptyset$$

➡ Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to **proporcję**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ możemy zastąpić równością $\boldsymbol{d} \quad = b$.

Przykład 5

$$\frac{2x-5}{x+1} = \frac{5}{3}$$

Z: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$3(2x-5) = 5(x+1)$$
$$6x-15 = 5x+5$$
$$6x-5x = 5+15$$
$$x = 20$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x = 20$.

Zdarzają się równania, które zawierają pewne „utrudnienie" w formie postaci ułamkowych. Łatwo można jednak ten problem rozwiązać. Należy „pozbyć" się mianowników, mnożąc całe równanie przez wspólny mianownik.

Wspólnym mianownikiem dla 4, 8 i 2 jest 8, dlatego mnożymy całe równanie przez 8.

$$\frac{2x+3}{4}-\frac{x-3}{8}+2x=\frac{-2x+4}{2}+5 \quad /\cdot 8$$

UWAGA: Pamiętajmy by przemnożyć każde wyrażenie.

$$\cancel{8}^{2}\cdot\frac{2x+3}{\cancel{4}_{1}}-\cancel{8}^{1}\cdot\frac{x-3}{\cancel{8}_{1}}+8\cdot 2x=\cancel{8}^{4}\cdot\frac{-2x+4}{\cancel{2}_{1}}+8\cdot 5$$

Skracamy mianowniki z 8, a następnie przepisujemy równanie, pomijając uzyskane w mianownikach 1 (bo dzielenie przez 1 nie zmienia wartości).
UWAGA: Pamiętajmy by liczniki zapisać w nawiasach.

$$2\cdot(2x+3)-(x-3)+16x=4(-2x+4)+40$$

Od tego momentu mamy do rozwiązania „normalne" równanie:

$$4x+6-x+3+16x=-8x+16+40$$
$$4x-x+16x+8x=16+40-3-6$$
$$27x=47$$
$$x=\frac{47}{27}=1\frac{20}{27}$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x=1\frac{20}{27}$.

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $6x+7+2x=8-x+1+80$

b) $-4(2x-5)=2(3x+7)$

c) $(8x-5)+(2x-3)=(x-2)-(3x+4)$

d) $x(x-3)=(x+2)^2$

e) $(3x+5)^2+(4x+6)^2=(5x+6)^2+37$

f) $\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{7}{15}(3+x)$

g) $\frac{5x-4}{6}-\frac{7-2x}{2}=0$

h) $\frac{x(3-x)}{3}-\frac{3-2x^2}{6}=2x$

i) $3-\frac{2x+3}{2}=\frac{17}{6}-\frac{3x+2}{2}$

j) $\frac{0{,}7x+5}{7}=0{,}1\left(x+\frac{2}{7}\right)$

1. Odpowiedź: a) $9\frac{1}{9}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{-4}{7}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{84}{11}$; g) $\frac{25}{11}$; h) $\frac{-1}{2}$; i) $\frac{2}{3}$; j) równanie sprzeczne.

3.1.2 Rozwiąż równania:

a) $x-2(x+5)=-3(4+x)+8$

b) $\frac{x}{2}-3(x-2)=-5x+16$

c) $\frac{x+1}{3}-2(x-1)=\frac{x}{2}-x$

d) $(x+2)^2=2x+(x-3)^2$

e) $(x-2)(x+2)=(x-1)^2$

f) $2(x-4)(x+5)=x(2x-10)-14$

Odpowiedź: a) 3; b) 4; c) 2; d) $\frac{5}{8}$; e) 2,5; f) $2\frac{1}{6}$.

3.1.3 Podaj liczbę rozwiązań równania:

a) $2(3x-2)-5=7-2x$

b) $5x-3=2(x+4)+3x$

c) $(x-2)^2=(x-1)(x+1)-4x$

d) $8-(2x-4)=-2(x-1)+10$

e) $\frac{3x-2}{3}-2x=-\frac{2}{3}-x$

f) $(x+3)^2-(x-3)(x+3)=5$

Odpowiedź:

a) $x = 2$ oznaczone; b) 0 = 11 sprzeczne; c) 0 = –5 sprzeczne; d) 0 = 0 nieoznaczone;
e) 0 = 0 nieoznaczone; f) –2 i 1/6 oznaczone.

3.1.4 Rozwiąż równanie podane w postaci proporcji (najpierw przyjmij odpowiednie założenia):

a) $\frac{5}{4x+3}=\frac{2}{x}$

b) $\frac{x}{x-1}=\frac{5x+1}{5x+3}$

c) $\frac{3+x}{x-2}=\frac{5-x}{-x+1}$

d) $\frac{x-2}{-x}=\frac{1-x}{x-2}$

e) $\frac{7}{7x-10}=\frac{5}{5x-20}$

Odpowiedź: a) –2; b) $\frac{-1}{9}$; c) $\frac{13}{9}$; d) $\frac{4}{3}$; e) sprzeczne.

3.2 Nierówności liniowe

Teraz nauczę się:

- Rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Zaznaczać zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisywać w postaci przedziału.

Rozwiązywanie nierówności nie różni się znacząco od rozwiązywania równań.

W nierównościach zamiast znaku „=" mamy znak nierówności.

W porównywaniu do równań mamy tu do czynienia z dwoma podstawowymi różnicami:

1) W trakcie obliczeń, gdy zachodzi konieczność pomnożenia lub podzielenia całego równania przez liczbę ujemną, należy obrócić znak nierówności w drugą stronę.

2) Po uzyskaniu rozwiązania, należy zaznaczyć je na osi oraz za pomocą przedziału liczbowego.

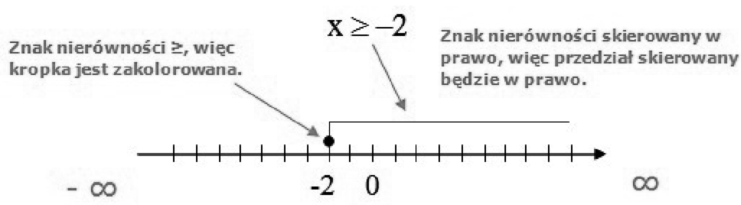
Przykład 1

$$2(x+1)-3 \le 4x+3$$
$$2x+2-3 \le 4x+3$$
$$2x-1 \le 4x+3$$
$$2x-4x \le 3+1$$
$$-2x \le 4 \,/ \div(-2)$$

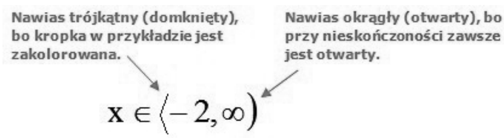
Dzielimy całe równanie przez (-2), w związku z czym **musimy obrócić znak nierówności.**

$$x \ge -2$$

Teraz należy zaznaczyć wynik na osi liczbowej.



Po narysowaniu przedziału na osi, należy jeszcze go zapisać.



Przykład 2

Rozwiąż nierówność $5(x-1)-2x+3>2x$

$$5(x-1)-2x+3>2x$$

$$5x-5-2x+3>2x$$

$$3x-2>2x$$

$$3x-2x>2$$

$$x>2$$

$x \in (2;\ \infty)$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż nierówności:

a) $5(x-1)-2x+3>2x$

b) $-2(x+6)>4(3+2x)$

c) $3(2-x)\le -\frac{2}{3}(6x-21)$

d) $1-\frac{2x-5}{3}<3$

e) $\frac{5x+1}{2}\ge\frac{2-5x}{-3}$

f) $2-3(3-2x)>3-\frac{19-12x}{2}$

g) $5-\frac{2x-3}{3}>4-\frac{4x+2}{6}$

Odpowiedź: a) $(2,+\infty)$; b) $(-\infty;-2,4)$; c) $(-\infty,8\rangle$; d) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; e) $\langle -\frac{7}{5},+\infty)$; f) $\varnothing$; g) R.

3.3 Przekształcanie wzorów

Teraz nauczę się:

- Przekształcać wzory matematyczne, fizyczne, chemiczne

Przekształcanie wzorów często sprawia uczniom wiele problemów, a jest to naprawdę bardzo proste. Pamiętaj, że każdy wzór możesz potraktować jako równanie. Działania wykonujesz zawsze po obu stronach równania. Aby pozbyć się jakiejś wielkości, wykonujesz działanie odwrotne do danego.

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczaniu jednej zmiennej, która we wzorze występuje jako niewiadoma.

Przykład 1

Znając wzór na siłę, wyznacz wzór na przyspieszenie ciała.

$F = m\cdot a$

Podziel obie strony równania przez m

$a=\frac{F}{m}$

Przykład 2

Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s=\frac{a\cdot t^2}{2}$ wyznacz czas.

$s=\frac{a\cdot t^2}{2}$

Pomnóż obie strony równania przez $\frac{2}{a}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Wyciągnij pierwiastek z obu stron równania

ZADANIA

3.3.1 Przekształć wzory fizyczne , tak aby wyznaczyć:

a) m, v ze wzoru na pęd $p = m \cdot v$

b) T ze wzoru na częstość $f = \frac{1}{T}$

c) m, v ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$

d) l, g ze wzoru na okres wahadła matematycznego $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

e) x, y z równania soczewki $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

f) l, s ze wzoru na opór $R = \rho \, \frac{l}{s}$

g) q, r z prawa Coulomba $F = k \frac{q^2}{r^2}$

Odpowiedź:

a) $m = \frac{p}{v}$, $v = \frac{p}{m}$; b) $T = \frac{1}{f}$; c) $m = \frac{2E}{v^2}$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$; d) $l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$, $g = \frac{4l\pi^2}{T^2}$;

e) $x = \frac{fy}{y-f}$, $y = \frac{fx}{x-f}$; f) $l = \frac{Rs}{\rho}$, $s = \frac{\rho l}{R}$; g) $q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}}$.

3.3.2 Ze wzoru na stężenie procentowe wyznacz:

a) masę substancji m_s

$$c_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$$

b) masę roztworu m_r

Odpowiedź: a) $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$; b) $m_r = \frac{m_s \cdot 100\%}{c_p}$.

3.3.3 Przekształć wzory matematyczne tak, aby wyznaczyć:

a) promień r, ze wzoru na objętość kuli $v = \frac{4}{3} \pi r^3$

b) bok trójkata równobocznego, ze wzoru na pole trójkata $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) a, b, ze wzoru na pole trapezu $p = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

d) promień r, ze wzoru na pole koła $p = \pi r^2$

Odpowiedź: a) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$; b) $a = \sqrt{\frac{4p\sqrt{3}}{3}}$; c) $a = \frac{2p-bh}{h}$, $b = \frac{2p-ah}{h}$; d) $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$.

3.3.4 Wyznacz a z wyrażeń:

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{3b}=\frac{c}{d}$

b) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b-c}=\frac{1}{c}$

c) $(\frac{(a+2b)}{2}:\frac{3a}{b}):2d=e$

d) $\sqrt{\frac{2a}{a+c}}=2d$

Odpowiedź: a) $a=\frac{3db}{2d-3bc}$; b) $a=\frac{bc-c^2-b^2}{2c+b}$; c) $a=\frac{2b^2}{12ed-b}$; d) $a=\frac{4cd^2}{2-4d^2}$.

3.4 Rozwiązywanie zadań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się:

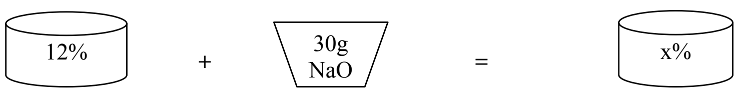
- Układać i rozwiązywać równania i nierówności liniowe do zadań z treścią.

Zadania chemiczne można rozwiązywać różnymi metodami. Często korzystamy ze wzorów chemicznych, które należy przekształcić do odpowiedniej postaci. Istnieją też inne sposoby. A oto jeden z nich:

Przykład 1

Do 130 g 12% roztworu NaOH wrzucono 40 g NaOH. Jakie jest jego stężenie procentowe

Rozwiązanie



130 g roztworu substancji rozpuszczanej 130g + 30g = 160g roztworu

Układamy równanie:

$$12\% \cdot 130g\ + 30g = 160g \cdot x\%$$

stąd $x =\ 28{,}5\%$

Przykład 2

Ile wody należy odparować z 200 gramów 25% roztworu Na_2SO_4, aby otrzymać roztwór o stężeniu 30%?

Rozwiązanie

W 200 g 25% roztworu znajduje się 0.25 · 200 = 50g czystego Na_2SO_4 i 150 g wody. Stężenie procentowe roztworu, jaki chcemy otrzymać, wynosi 30%. Jeśli masę rozpuszczalnika oznaczymy jako x, ze wzoru na stężenie procentowe otrzymamy równanie:

$$c_p = \frac{m_s . 100\%}{m_r}$$

$$30\% = \frac{50}{150 + x}$$

$$x = 18,(3)$$

Należy więc odparować 150 g – 18,(3) g = 131,7 g wody.

Rozwiązując zadania fizyczne, pamiętaj o jednostkach.

Przykład 3[43]

Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością 20 m/s, a drugą połowę ze stałą prędkością 30 m/s. Obliczycz średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi.

Rozwiązanie

Średnia prędkość samochodu wynosi $\mathbf{v}_{\mathbf{śr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdzie

$\Delta s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = \mathbf{s}$ całkowita droga przebyta przez samochód,

$\Delta t = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ całkowity czas ruchu samochodu,

$t_1 = \frac{s}{2v_1}$ czas, w którym samochód przebył pierwszą połowę drogi jadąc z prędkością v_1

$t_2 = \frac{s}{2v_2}$ czas, w którym samochód przebył drugą połowę drogi z prędkością v_2

zatem średnia prędkość samochodu jest równa:

$$vśr = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = 24\ \frac{m}{s}$$

Uwaga: Średnia prędkość samochodu nie jest, w tym przypadku, średnią arytmetyczną prędkości.

Przykład 4

Adam wyjeżdża w trasę o godzinie 13.00 i jedzie motocyklem ze średnią prędkością 70 $\frac{km}{h}$. Piotr wyjeżdża godzinę póniej i ma do pokonania dwa razy krótszą trasę. Jedzie motocyklem z szybkością 50 $\frac{km}{h}$. Oblicz, jakie trasy mieli do pokonania motocykliści, jeżeli wiadomo, że skończyli jazdę o tej samej godzinie.

Rozwiązanie

Zauważ, że:

$$t_1 = t_2 + 1$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 70(t_2 + 1)$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 50\,t_2$$

$$s_1 = 2s_2$$

43 www.mif.pg.gda.pl/zz/3%20Kinematyka.pdf, 12.03.2013.

stąd otrzymujemy równanie

$$70(t_2 + 1) = 100\, t_2$$

Odpowiedź:

$$t_2 = 2\frac{1}{3}\ h, \qquad t_1 = 3\frac{1}{3}\ h, \qquad s_2 = 116{,}7\ km, \qquad s_1 = 233{,}4\ km$$

ZADANIA

3.4.1 Paweł jedzie do pracy ze średnią szybkością 50 $\frac{km}{h}$. W pogodny dzień podróż zajmuje mu 1,4 h. W deszczowy dzień jego średnia szybkość wynosi 35 $\frac{km}{h}$. Oblicz jaką drogę pokonuje Paweł do pracy i ile minut więcej zajmuje mu pokonanie tej trasy w deszczowy dzień.

Odpowiedź: s = 70 km, t_2-t_1 = 36 min

3.4.2 Oblicz średnią szybkość Ziemi w ruchu dookoła Słońca, wiedząc że w ciągu roku planeta pokonuje drogę 10^9 km.

Odpowiedź: $v = 1{,}14 \cdot 10^5 \frac{km}{h}$

3.4.3 Samolot leciał z szybkością v = 780 $\frac{km}{h}$ i pokonał drogę 1800 km, następnie 1400 km leciał z wiatrem, którego szybkość wynosiła 150$\frac{km}{h}$. Oblicz czas przelotu całej trasy i średnią szybkość samolotu.

Odpowiedź: t = 3 h 12 min, v = 846 $\frac{km}{h}$

3.4.4 Karuzela wykonała 4 okrążenia o promieniu r = 15 m wokół własnej osi w czasie t = 100 s. Oblicz średnią szybkość karuzeli.

Odpowiedź: $v = \frac{n2\pi r}{t} = 3{,}77\ \frac{m}{s}$

3.4.5 Statek wycieczkowy płynie z miejscowości A do B, tam i spowrotem. Prędkość statku względem wody to 40 $\frac{km}{h}$, a prędkość wody względem brzegu rzeki to 2 $\frac{m}{s}$. Oblicz średnią prędkość statku na całej trasie.

Odpowiedź:

(Pamiętaj o zamianie jednostek. Wykorzystaj wzór z przykładu 3, rozważ ruch w obu kierunkach).
$v_{śr} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1} = 10{,}75\frac{m}{s}$

3.4.6 Swobodnie puszczona kulka stalowa odbija się (bez strat energii) od poziomej, doskonale sprężystej powierzchni, uderzając w nią co 1,2 s. Jak wysoko podskakuje kulka? Przyjmij $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

Odpowiedź: Skorzystaj ze wzoru $h = \frac{gt^2}{2}$, za czas podstaw $\frac{t}{2}$ (pomyśl dlaczego), h = 1,8 m.

3.4.7 Z miast odległych o 150 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwa samochody. Średnia prędkość jazdy jednego z nich wynosi 80 $\frac{km}{h}$, a drugiego 60 $\frac{km}{h}$. O której godzinie i w jakiej odległości od każdego z miast nastapi ich spotkanie?

Odpowiedź: (Pamiętaj, że jadą tyle samo czasu).

$s_1 = v_1 \cdot t = 80t$

$s_2 = v_2 \cdot t = 60t$

$s = 80t + 60t = 150$

$t = 1{,}0714\,h = 1h\,4\,min$

$s_1 = 85{,}7\,km$

$s_2 = 64{,}3\,km$

Samochody spotkają się o godzinie 9.04.

3.4.8 Ile gramów 30% roztworu LiOH należy dodać do 200 gramów 15% roztworu tego związku, aby otrzymać roztwór 20%?

Odpowiedź: $0{,}3x + 0{,}15 \cdot 200 = 0{,}2(200 + x)$

$x = 100g$

3.4.9 Odparowano 35 g 12% roztworu NaCl. Jaką masę osadu otrzymano?

Odpowiedź: $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$

$m_s = 12 \cdot 35/100 = 4{,}2$ g

3.4.10 Ile $CaCl_2$ należy dodać do 300 gramów 25% roztworu $CaCl_2$, aby otrzymać roztwór o stężeniu 40%?

Odpowiedź: $0{,}25 \cdot 300 + x = 0{,}4x + 0{,}4 \cdot 300$

$x = 75$ g

3.4.11 Zmieszano 120 g 18% roztworu KOH i 35 g 25% roztworu tego związku. Jakie jest stężenie procentowe powstałego roztworu?

Odpowiedź: $ms = 120 \cdot 18\% + 35 \cdot 25\% = 30{,}35$ g

$mr = 120 + 35 = 155$ g

$Cp = 19{,}58\%$

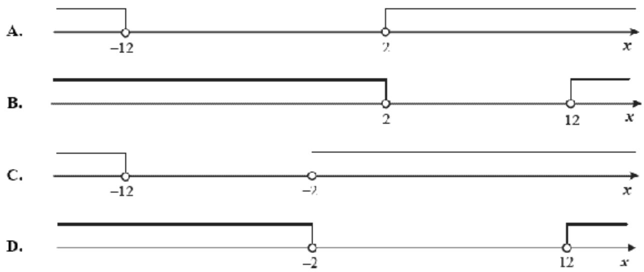
1. Wskaż nierówność, która opisuje sumę przedziałów zaznaczonych na osi liczbowej:[44]

a) $|x-2|>4$ b) $|x-2|<4$ c) $|x-4|<2$ d) $|x-4|>2$

2. Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3}=\frac{2}{3}$ jest liczba:

a) 21 b) 7 c) 17/3 d) 0

3. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$[45]



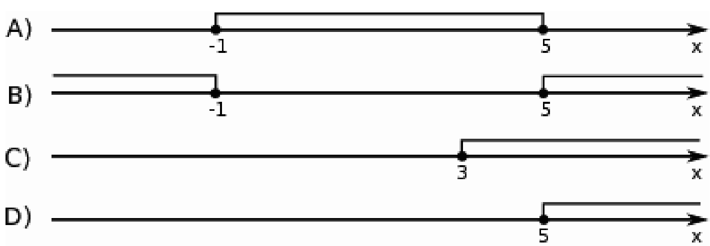
4. Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest:

a) 1 b) 7/3 c) 4/7 d) 7

5. Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3)<0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

6. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x-2| \geq 3$.[46]



7. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.[47]

a) $|x+1|>5$ b) $|x-1|<2$ c) $|x+\frac{2}{3}| \leq 3$ d) $|x-\frac{1}{3}| \geq 3$

8. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36=x(x+3)$ należy do przedziału:

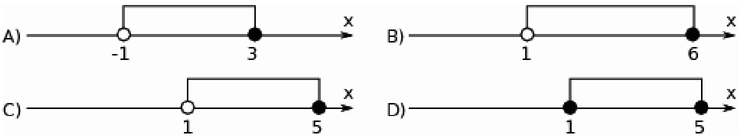
a) $(3, 10)$ b) $(11, +\infty)$ c) $(-5, 9)$ d) $(-\infty, 5)$

44 Zadania: 1, 2 zaczerpnięte z Próbna matura, CKE, listopad, 2010.
45 Zadania: 3, 4, 5 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010.
46 Arkusz maturalny, Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
47 Zadania: 7, 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011.

9. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}<\frac{5x}{12}$ jest:

a) 1 b) 2 c) –1 d) – 2

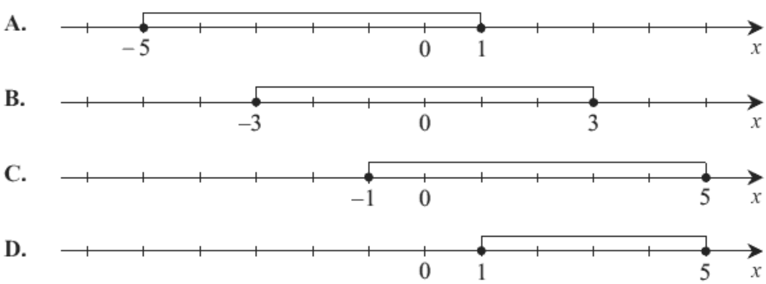
10. Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\leq 0 \;\; i\; x>1$.



11. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1|=4x$.[48]

a) $x=-1$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=-2$

12. Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\leq 3$:[49]



13. **Rozwiązaniem równania $\frac{x-6}{2x-4}=\frac{2}{3}$ jest:**

a) 8 b) 10 c) $\frac{1}{2}$ d) –10

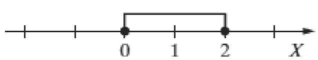
14. Największa liczba naturalna n spełniająca nierówność $n<2\pi-1$ to:[50]

a) 3 b) 5 c) 6 d) 0

15. Rozwiązaniem równania $-2=\frac{x-1}{x+2}$ jest liczba:

a) –1 b) 1 c) 0 d) $\frac{5}{3}$

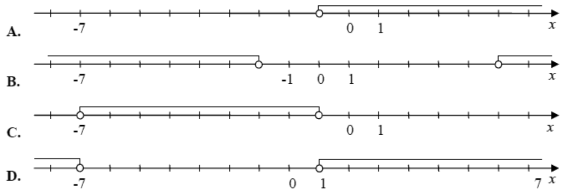
16. Przedział zaznaczony na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



a) $|x+1|\leq 1$ b) $|x+1|\geq 2$ c) $|x-1|\geq 1$ d) $|x-1|\leq 1$

48 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2012.
49 Zadania: 12, 13 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem”, listopad, 2010.
50 Zadania: 14, 15, 16 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem”, listopad, 2011.

17. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+3| > 4$ jest przedstawiony na rysunku:[51]



18. Rozwiązaniem równania $3(2-3x) = x-4$ jest:[52]

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

19. Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tą zależność jest:

a) $0{,}15 \cdot x = 230$ b) $0{,}85 \cdot x = 230$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 230$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 230$

20. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $2x+1 = 2-\sqrt{3}x$ i rozstrzygnij, czy rozwiązanie jest liczbą wymierną?[53]

21. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójata. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

22. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$[54]

23. **(4pkt)** Uzasadnij, że $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}^{40} \cdot (3{,}1)^{22}}{6^2} < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{22}$.

24. **(2 pkt)** Oblicz, dla jakich wartości parametru a wartość wyrażenia $|3a-1|$ nie jest większa od 3.

25. **(2 pkt)** Trzej wspólnicy postanowili podzielić zysk w wysokości 6500 zł w stosunku $1 : 4 : 8$. Jakie kwoty dostaną ci wspólnicy?

26. **(2 pkt)** Sprowadź wyrażenie $|x-1| + |x| - |-x+1|$ do najprostszej postaci, gdy $x \in (0,1)$[55].

27. **(2 pkt)** Za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu. Ile lat ma Julka?

51 Arkusz maturalny z matematyki, OKE, Poznań, 2013.
52 Zadania 18, 19 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, sierpień, 2011.
53 Zadania 20, 21 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
54 Zadania 22, 23, 24, 25 zaczerpnięte z informatora CKE, 2007.
55 Zadania 26, 27 zaczerpnięte z próbnej matury z Operonem, listopad, 2009.

4 Funkcja liniowa

To już potrafię:

- Zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- Odczytać współrzędne danych punktów;
- Odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- Odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- Obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

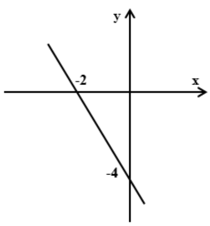
Zad.1 Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje wartości ujemne dla argumentów:

a) $x < -4$

b) $x < -2$

c) $x > -2$

d) $x < -3$



Zad.2 Na odcinku trasy długości 120 km samochód jechał z prędkością y km/h. Wzór funkcji określającej zależność czasu od prędkości to:

a) $y = 120x$ b) $y = \frac{120}{x}$ c) $\frac{x}{y} = 120,\ y \neq 0$ d) $\frac{y}{x} = 120,\ x \neq 0$

Zad.3 Które przyporządkowanie nie jest funkcją:

a) Każdemu nauczycielowi przyporządkujemy ucznia, którego uczy.

b) Każdemu wielokątowi przyporządkujemy liczbę jego boków.

c) Każdej figurze geometrycznej przyporządkowana jest jej nazwa.

d) Każdej liczbie całkowitej jest przypisana liczba do niej przeciwna.

Zad.4. Miejscem zerowym funkcji $y = -6x + 3$ jest:

a) Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) Punkt $(0,3)$ d) $x = 3$

Zad.5 Wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x(2 - x)$ dla argumentu $x = 4$ wynosi:

a) -16 b) 16 c) 8 d) 0

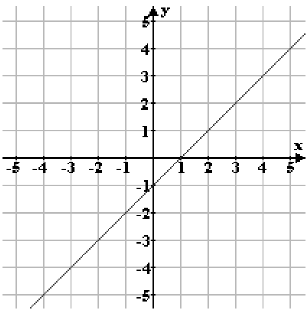
Zad.6 Które zdanie dotyczące funkcji jest $y = 2x - 4, x \in R$ prawdziwe:

a) Funkcja jest malejąca

b) Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(2, 4)$

c) Miejscem zerowym tej funkcji jest 2

d) Funkcja jest stała



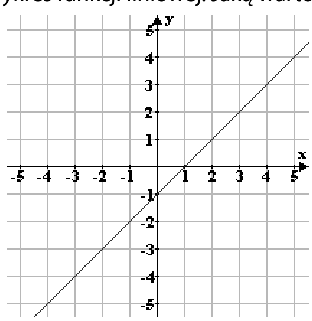
Zad.7. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej. Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?

a) 4

b) 2

c) -4

d) 2



Zad.8 $y = 5$ jest to funkcja:

a) Rosnąca b) Stała c) Malejąca d) Nie jest to funkcja

Zad.9 Do wykresu funkcji $y = ax, x \in R$, należy punkt $A = (-2,5)$. Wzór tej funkcji to:

a) $y = 5x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2\frac{1}{2}x$ d) $y = -2,5x$

Zad.10. Funkcja określona jest następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkujemy sumę jej cyfr. Dziedziną tej funkcji jest:

a) Zbiór wszystkich liczb naturalnych

b) Zbiór liczb naturalnych większych od 9, a mniejszych od 100

c) Zbiór liczb wymiernych większych od 9, a mniejszych od 100

d) Zbiór liczb całkowitych

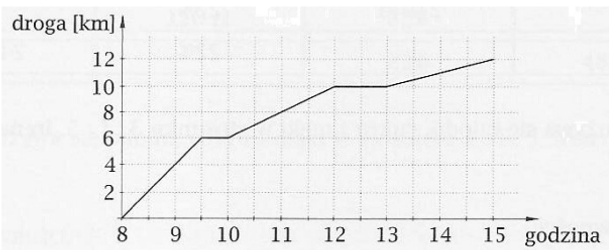
Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	A	C	B	B	D	B

ZADANIA OTWARTE

Zad.1 Trzech pracowników może oczyścić basen w ciągu 5 godzin. Napisz wzór funkcji określającej zależność liczby pracowników (y) od liczby godzin pracy (x). Podaj współczynnik proporcjonalności tej funkcji.

Zad.2 Wykres przedstawia odległość, jaką pokonała Małgosia w zależności od czasu.



Na podstawie wykresu uzupełnij poniższy tekst:

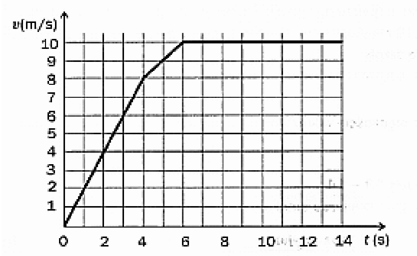
Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła ....

Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie ....

Pierwsze 8 km pokonała w czasie ....

Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością ....

Zad.3 Wykres przedstawia zależność szybkości od czasu w pewnym ruchu.



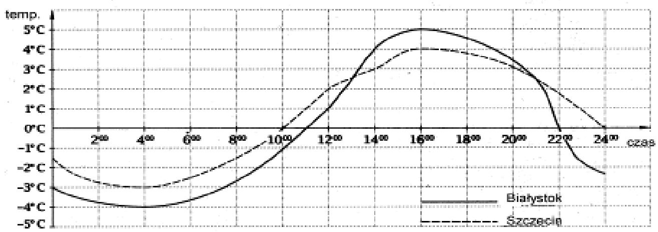
Odpowiedz na pytania:

a) Kiedy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a kiedy jednostajnym?

b) Jaką drogę przebyło ciało między 6 a 8 sekundą ruchu?

c) Jaka była maksymalna szybkość tego ciała?

Zad.4 Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Białymstoku i Szczecinie.



a) Jaką temperaturę pokazywał termometr w obu miastach o 12^{00}?

b) O której godzinie temperatura w tych miastach wynosiła 0^{o}C?

c) W jakich godzinach temperatura w Białymstoku była ujemna?

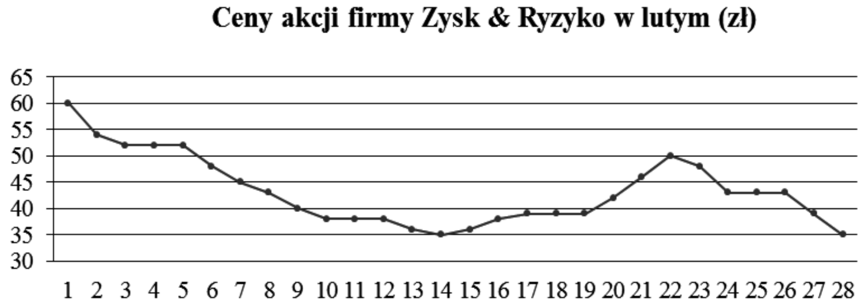
d) O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?

e) W jakich godzinach w Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie?

f) Jaka była najwyższa temperatura w Białymstoku, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?

g) Jaka temperatura była w Białymstoku, gdy w Szczecinie były 3^{o}C?

Zad.5 Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.



a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Odpowiedzi:

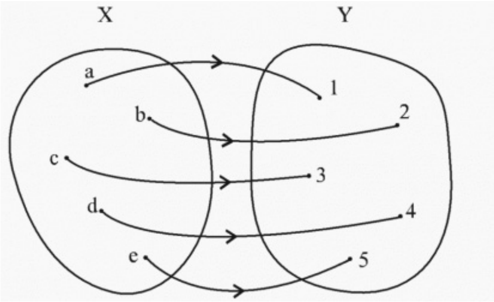
Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$y = \frac{15}{x}, x \in R_+, a = 15$
2	Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła 4 km Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie 9^{30} Pierwsze 8 km pokonała w czasie 3 godzin Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością 1 km/h.
3	a) Ciało poruszało się ruchem przyspieszonym w pierwszych czterech sekundach ruchu oraz od czwartej do szóstej sekundy ruchu – z innym przyspieszeniem. Z ruchem jednostajnym mamy do czynienia od szóstej do czternastej sekundy ruchu. b) $s = 10\frac{m}{s} \cdot 2s = 20m$ c) Maksymalna szybkość, którą osiągnęło to ciało, wynosi $10\frac{m}{s}$
4	O godzinie 12^{00} w Szczecinie były 2°C, a w Białymstoku 1°C. 0°C w Białymstoku było o godzinie 11^{00}, a w Szczecinie o 10^{00}. W Białymstoku ujemna temperatura była w godzinach 0^{00} – 11^{00}. Temperatura w obu miastach była taka sama o godzinie 13^{00} i 21^{00}. W Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie w godzinach 13^{00} – 21^{00}. Najwyższa temperatura w Białymstoku wynosiła 5°C (godz. 16^{00}), a w Szczecinie 4°C (również o godz. 16^{00}). Gdy w Szczecinie były 3°C, to w Białymstoku były 4°C.
5	Wartość akcja spadła w lutym o 25 zł. Kupując i sprzedając akcje w ciągu lutego można było na nich zarobić. Aby zysk był możliwie największy (15 zł za akcję), należało kupić akcje 14 lutego, a sprzedać 22 lutego. Poniedziałki były: 5, 12, 19, 26 lutego.

4.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji.

Teraz nauczę się:

- Rozpoznać i podać przykłady funkcji,
- Posługiwać się pojęciami: dziedzina, argumenty, wartość funkcji,
- Określać funkcję za pomocą grafu, tabeli, wykresu, opisu słownego.

Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory i pewne przyporządkowanie.



WAŻNE!

Zauważ, że każdy punkt zbioru X jest początkiem **tylko jednej** strzałki.

Symbolicznie zapisujemy to jako f: X → Y

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji (D_f), a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**.

Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

Zmienną *x* nazywamy też **zmienną niezależną**, a *y* **zmienną zależną**.

$\boldsymbol{X = \{a, b, c, d, e\}}$ **– zbiór argumentów (dziedzina funkcji)**

$\boldsymbol{Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ **– zbiór wartości funkcji**

Bardzo ważne!

Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość (z jednego punktu grafu może wychodzić tylko jedna strzałka).

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h,...

Nasza funkcja f jest ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$ do zbioru {1, 2, 3, 4}.

Funkcja f liczbie a przyporządkowuje liczbę 2.

Zapisujemy to tak:

$f(a) = 2$ – czytamy: f od a równa się 2

Liczbie b funkcja f przyporządkowuje liczbę 1, piszemy:

$f(b) = 1$ – czytamy: f od b równa się 1

Liczbie c funkcja f przyporządkowuje liczbę 3, piszemy:

$f(c) = 3$ – czytamy: f od c równa się 3

Liczbie d funkcja f przyporządkowuje liczbę 4, co zapisujemy:

$f(d) = 4$ – czytamy: f od d równa się 4

lub dla argumentu d wartość funkcji wynosi 4.

Liczbie e funkcja f przyporządkowuje liczbę 5, piszemy:

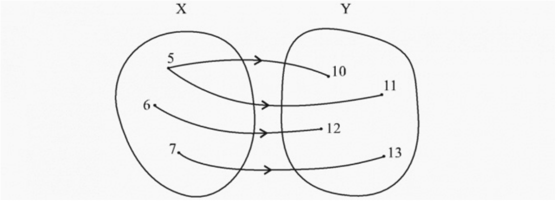
$f(e) = 5$ – czytamy: f od e równa się 5

lub: dla argumentu e wartość funkcji wynosi 5.

Uwaga!

Nie każde przyporządkowanie między dwoma zbiorami nazywa się funkcją.

Funkcją nazywamy tylko takie przyporządkowanie, według którego **każdemu elementowi z dziedziny** (ze zbioru X) przyporządkowany jest **dokładnie jeden element z przeciwdziedziny** (ze zbioru Y).



Rysunek 4-1 – Funkcja

Ten graf nie opisuje funkcji, bo liczbie 5 ze zbioru X przyporządkowane zostały dwie liczby: 10 i 11 ze zbioru Y. Zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi zbioru X ma być przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru Y.

Nie ma żadnych zastrzeżeń co do natury zbiorów X i Y. Mogą być to zupełnie dowolne zbiory.

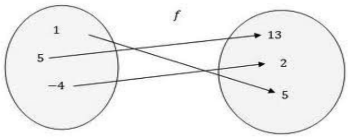
My jednak będziemy zajmować się tylko przypadkiem, gdy zbiory X i Y będą pewnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Innymi słowy, argumentami i wartościami funkcji będą... no właśnie... będą liczby.

Sposoby określania funkcji

Funkcje można określić za pomocą:

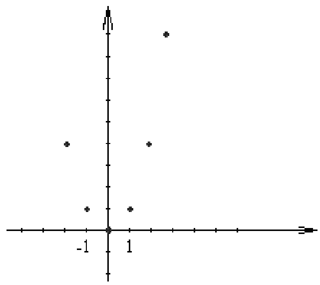
– grafu

Przykład 1



Rysunek 4-2 – Graf

– wykresu



Rysunek 4-3 – Wykres

Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

– wzoru

Przykład 2

$y = x^2$, dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Używa się również zapisu $f(x) = x^2$, lub $f\colon x \to x^2$.

– tabelki

Przykład 3

x	−7	−5	−3	−2	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	5	7	6	5	3	−2

Rysunek 4-4 – Tabelka

– opisu słownego

Przykład 4

Mamy daną funkcję, określoną opisem słownym:

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

– zbioru par uporządkowanych

Przykład 5

{(–2,4), (–1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)}

Takie określenie funkcji jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Przykład 6

Funkcję ″Każdej liczbie ze zbioru $X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}$ przypisujemy liczbę o 2 od niej mniejszą″, przedstaw w postaci wzoru, tabeli i wykresu.

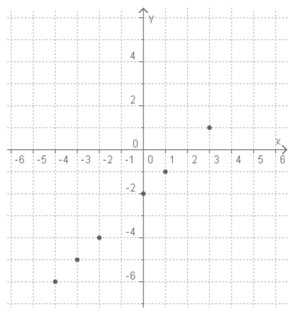
Wzór:

$y = x - 2$

Tabela:

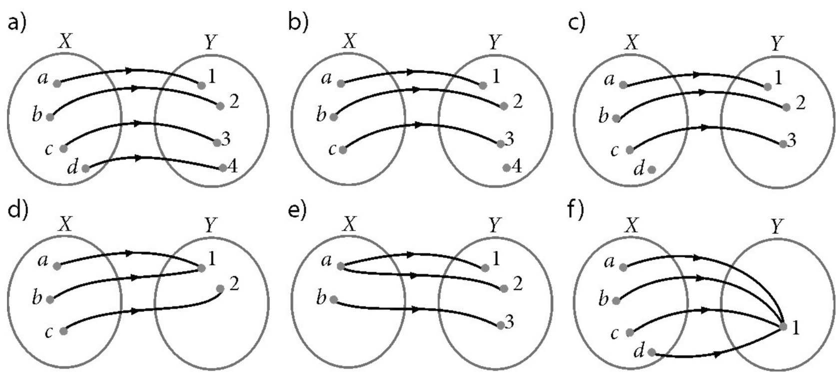
x	–4	–3	–2	0	1	3
y	–6	–5	–4	–2	–1	1

Wykres:



ZADANIA

4.1.1 Który z grafów określa funkcję:



Odpowiedź: a;   b;   d;   f.

4.1.2 Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

b) Każdej liczbie różnej od 0 przyporządkowano odwrotność tej liczby.

c) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

f) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

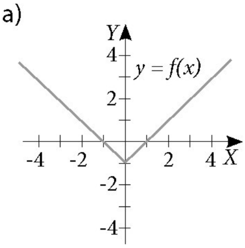
g) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

h) Każdej liczbie przyporządkowano kwadrat tej liczby.

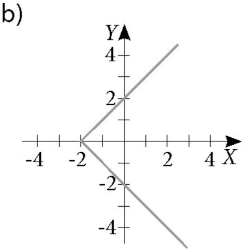
Odpowiedź: a; b; c; d; e; f; g; h – tak.

4.1.3 Podaj, które z wykresów przedstawiają funkcję. Odpowiedź uzasadnij.

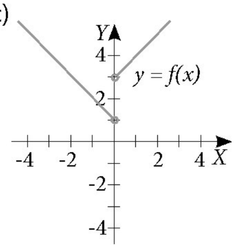
a)



b)



c)



Odpowiedź: a; c.

4.1.4 Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej dwukrotność tej liczby powiększoną o jeden. Opisane słowami przyporządkowanie opisz:

a) wzorem

b) tabelką dla argumentów $-3,-2,-1,0,1,2,3$

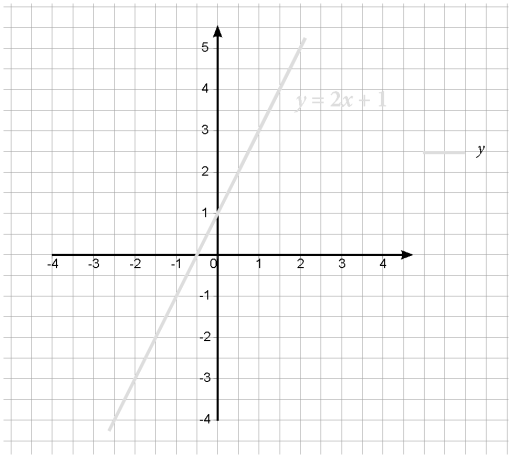
c) wykresem

Odpowiedź: a) $y = 2x + 1$.

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)



4.2 Własności funkcji

Teraz nauczę się:

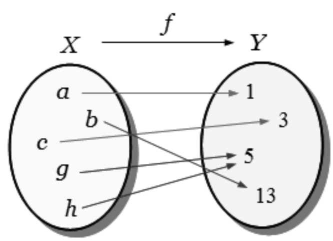
- Obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu,
- Posługiwać się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczania, dla jakiego argumentu przyjmuje daną wartość,
- Wyznaczać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą.

Przyporządkowanie, będące funkcją, możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

a) Dziedzina i wartość funkcji

Wiemy już z poprzedniego działu, że zbiór X, na którym określona jest funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji, a zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Przykład 1



Rysunek 4-5 – Dziedzina i przeciwdziedzina

$X = \{a, b, c, g\ h\}, Y\ =\ \{1, 3, 5, 13\}$

Zbiorem wartości funkcji $f: X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$

Przykład 2

Wyznacz dziedzinę funkcji podanej wzorem:

a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $x = 2$ w mianowniku wyrażenia będziemy mieli 0, a więc wyrażenie nie będzie miało sensu: $X = D_f = R/\{2\}$

Możemy zapisać dziedzinę inaczej: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Wskazówka:

Dziedziną funkcji danej wzorem jest zbiór wszystkich argumentów *x*, dla których funkcja jest określona.

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

Rozwiązanie:

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$X = D_f : x \in \langle 2, +\infty)$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$

Rozwiązanie:

$x + 4 \rangle 0$

$x \rangle -4$

$X = D_f : (-4, +\infty)$

ZADANIA

4.2.1 Dana jest funkcja

a) $f(x) = 3x + 4$ b) $f(x) = 2x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Oblicz:

$f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x-1)$, $f(x^2)$

Odpowiedź:

a) $f(0) = 4$, $f(1) = 7$, $f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x} + 4$, $f(x-1) = 3x + 1$, $f(x^2) = 3x^2 + 4$

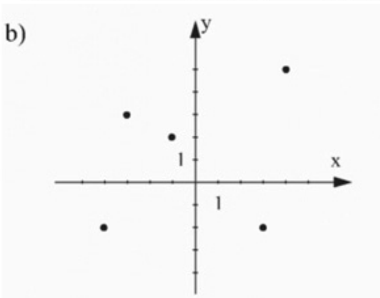
b) $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(\sqrt{2})=7$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^2}+1$, $f(x-1)=2x^2-4x+3$, $f(x^2)=2x^4+1$

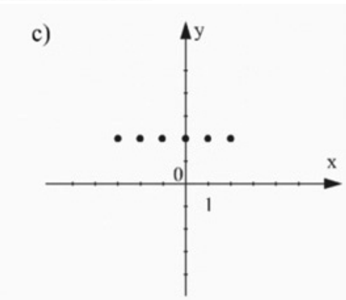
c) $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$, $f(x-1)=\frac{x-1}{x}$, $f(x^2)=\frac{x^2}{x^2+1}$

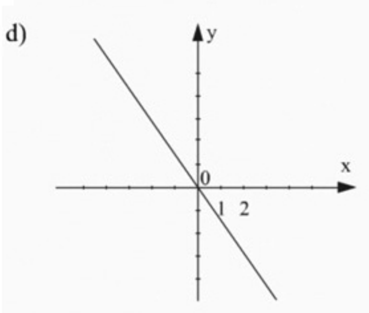
4.2.2 Dla każdej z tych funkcji odczytaj dziedzinę i zbiór wartości:

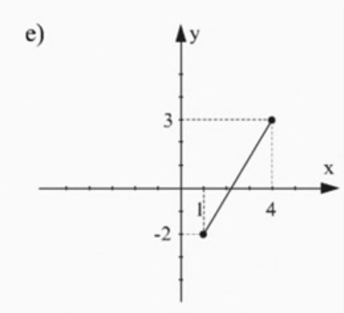
a)

x	-2	-1	0	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
y	4	3	5	0	$-2\frac{1}{2}$



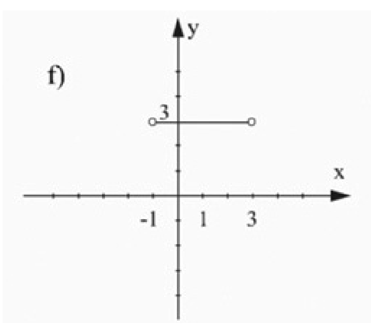






Odpowiedź:

a) Df = $\{-2, -1. 0, 1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{3}\}$ Y = $\{-2\frac{1}{2}, 0, 3,4,5\}$; b) Df = {–4,–3,–1,3,4} Y ={–2,2,3,%};
c) Df = {–3,–2,–1,0,1,2} Y ={2}; d) Df = R Y = R; e) Df : $x \in$ <1,4> Y $\in$ <–2,3>; f) Df : $x \in$ (–1,3) Y = {3}.



4.2.3 Funkcja określona jest tabelką:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	–3	3	–1	–2	5	2

a) podaj zbiór argumentów i zbiór wartości funkcji

b) wymień wszystkie ujemne argumenty tej funkcji

c) odczytaj wartość dla argumentu $x = 0$ oraz argumentu $x = 3$

d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2

e) czy punkt (–1,–3) należy do wykresu funkcji

f) narysuj wykres tej funkcji

Odpowiedź:

a) $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ $Y = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 5\}$

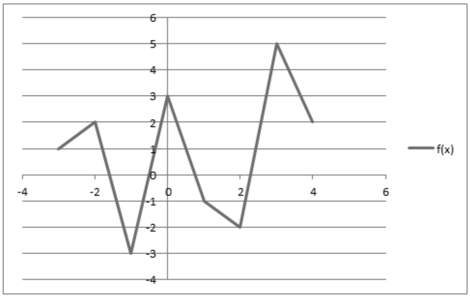
b) $-3, -2, -1$

c) $f(0) = 3, f(3) = 5$

d) $x = 4, x = -2$

e) tak

f)



4.2.4 Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-3)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 10x + 25}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

h) $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{x}{x+4} - \dfrac{1}{x-1}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+3}$

j) $f(x) = -3x^2 + 7x - 8$

k) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-4}{x+2}$

m) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 9} + \dfrac{4}{x^2}$

n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2}}$

o) $f(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{2-x}} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+4}}$

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2 - 16}$

Odpowiedź:

a) R; b) R/ {–1, 3}; c) R/ {–3, 3}; d) R; e) R; f) $x \in (-\infty, 4)$; g) $x \in < 1, +\infty)$;
h) $x \in < -3, 1) \cup (1, +\infty)$; i) R\ {–3, 1}; j) R; k) R; l) R\ {–2,0}; m) R\ {–3,0,3};
n) $X \in (2, +\infty)$; o) $x \in (-4,2)$; p) $x \in (4,+\infty)$.

Miejsca zerowe

Argument x, dla którego $f(x) = 0$ nazywamy **miejscem zerowym** funkcji f.

Przykład 3

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{x-1}}$ c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

Rozwiązania:

a)
$D_f = R$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$
$(x-1)(x+1) = 0$
$x - 1 = 0$ lub $x + 1 = 0$
zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji f to $x = 1$ oraz $x = -1$.

b)
$D_f = (1,+\infty)$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right) = 0$
$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$
$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$
$\sqrt{2} \in D_f$ $-\sqrt{2} \notin D_f$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2}$.

c)
$D_f : x \in R / \{4\}$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$
$x = -2 \in D_f$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji jest $x = -2$.

Przykład 4

Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe, dziedzinę i przeciwdziedzinę.

Dziedzina:

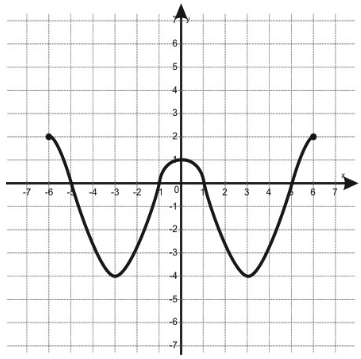
$D_f = \langle -6; 6 \rangle$

Zbiór wartości:

$Z_w = \langle -4; 2 \rangle$

Miejsca zerowe:

$x = -5, x = -1, x = 1, x = 5$



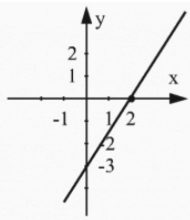
ZADANIA

4.2.5 Wypisz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

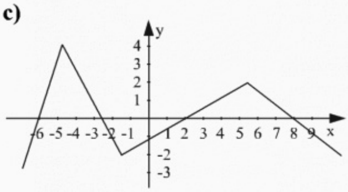
a)

x	–5	0	1	5
y	2	3	4	0

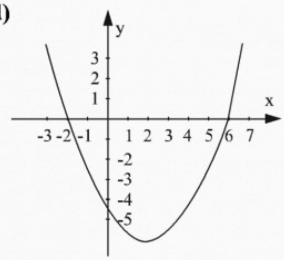
b)



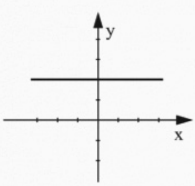
c)



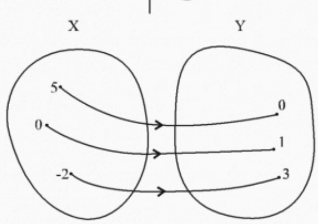
d)



e)



f)



Odpowiedź: a) $x = 5$; b) $x = 2$; c) –6; –2,5; 2; 8; d) 2,6; e) brak miejsc zerowych; f) $x = 5$.

4.2.6 Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji *f*.

a) $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{x-3}{x-3}$ d) $f(x)=\frac{1+2x}{4x-2}$

e) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ f) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ g) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ h) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

i) $f(x)=\sqrt{x+9}$ j) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ k) $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$ l) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$

m) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+9}$

Odpowiedź:

a) df R/−2; $x=2$, b) df R/2; $x=-2$, c) df R/3; brak miejsc zerowych, d) df R oprócz 1/2; $x=-1/2$, e) df (2,+∞); brak miejsc zerowych, f) df (−2; +∞) $x=0$, g) df R/{−3,3}; brak miejsc zerowch, h) df R/{−2,2}, brak miejsc zerowych, i) df <−9,+∞) ; f(−9) = 0, j) df <0,3) suma (3,+∞); f(0) = 0, k) df <3,+∞); f(3) = 0, l) df (−3,+∞); f(0) = 0, m) df = R; f(−1) = 0.

4.3 Monotoniczność funkcji

Monotoniczność jest to pewna cecha funkcji, która mówi nam, co się dzieje z wartościami funkcji podczas zwiększania wartości liczbowych argumentów funkcji. I tak, wyróżniamy z tego względu funkcje:

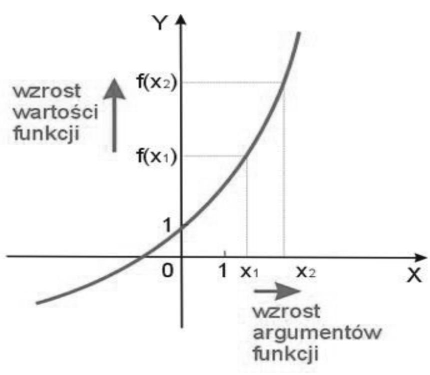
- rosnące
- malejące
- nierosnące
- niemalejące

Warto tu jeszcze wspomnieć o funkcji stałej, choć nie mówimy o niej jak o funkcji monotonicznej.

Funkcja rosnąca

Funkcja *f* jest **rosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

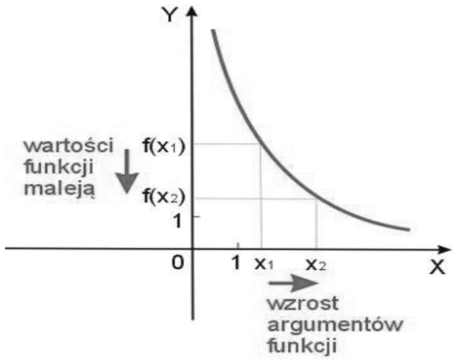


Cechą charakterystyczną wykresu funkcji rosnącej jest to, że zdaje się wznosić ku górze.

Funkcja malejąca

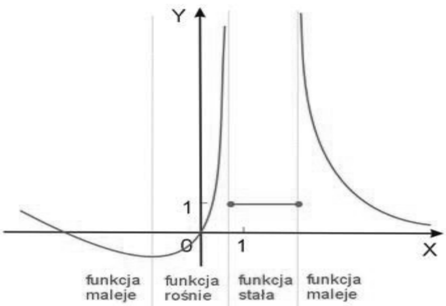
Funkcja f jest **malejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Cechą charakterystyczną wykresu funkcji malejącej jest to, że zdaje się opadać w dół.

Czy funkcja może być jednocześnie malejąca i rosnąca w różnych przedziałach liczbowych? Oczywiście, że tak. Poniżej przykład takiej funkcji wraz z określonymi przedziałami, w których funkcja rośnie i maleje oraz jest stała.



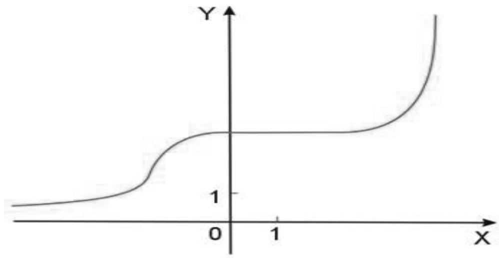
Funkcja niemalejąca

Funkcja f jest **niemalejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Zatem definicja funkcji niemalejącej przypomina definicję funkcji rosnącej, z tym że w przypadku funkcji niemalejącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała.

Oto ilustracja funkcji niemalejącej.

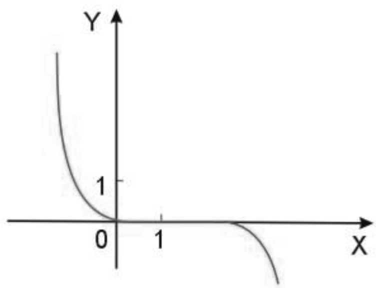


Funkcja nierosnąca

Funkcja f jest **nierosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

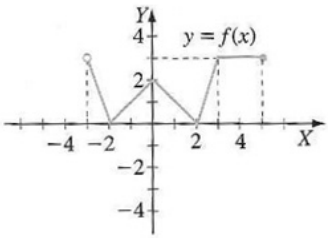
Zatem definicja funkcji nierosnącej przypomina definicję funkcji malejącej, z tym że w przypadku funkcji nierosnącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała. Oto ilustracja funkcji nierosnącej.

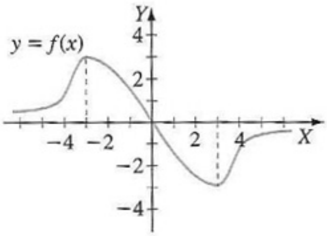


Uwaga: Symbole $\langle$, $\rangle$ oznaczają tak zwane **nierówności mocne** (ostre), symbole $\leq, \geq$ oznaczają tak zwane **nierówności słabe** (nieostre).

ZADANIE

4.3.1 Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca i stała.





Odpowiedź:

a) rosnąca $x \in (-2;0) \cup (2;3)$, malejąca $x \in (-3;-2) \cup (0;2)$, stała $x \in (3;4)$

b) rosnąca $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$, malejąca $x \in (-3;3)$

4.4 Sporządzanie wykresów funkcji

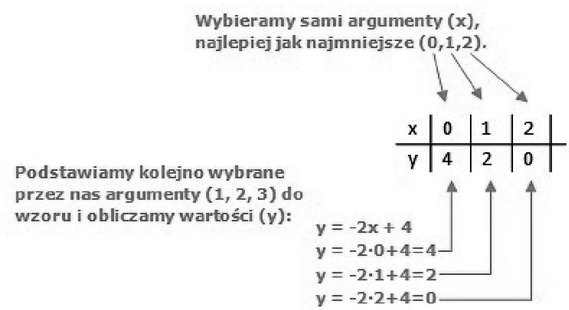
Teraz nauczę się:

- Szkicować wykres funkcji za pomocą wzoru lub tabeli,
- Odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

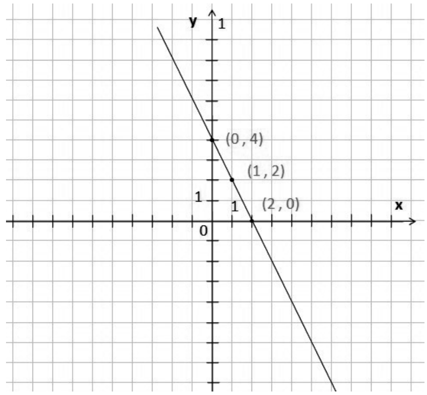
Aby narysować wykres funkcji, należy wykonać dwie następujące po sobie czynności. Powstawanie wykresu funkcji $y = -2x + 4$ przedstawimy na przykładzie:

I. Za pomocą wzoru określamy kilka punktów należących do funkcji (minimum 3). W tym celu wybieramy wartości x, podstawiamy je do wzoru i obliczamy wartości y. Wartości x i y pomocniczo możemy zapisywać w tabeli:

x			
y			



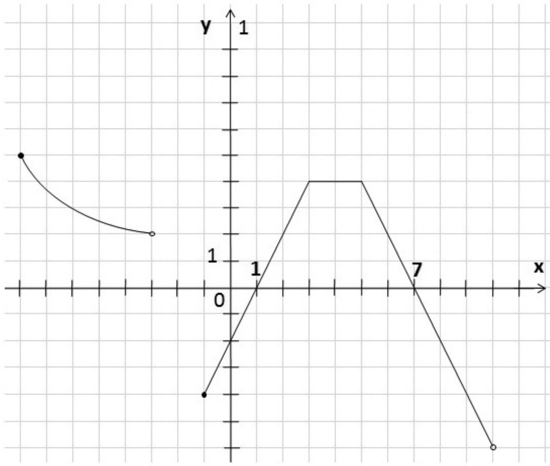
Otrzymujemy więc punkty: (0,4), (1,2), (2,0).



II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je prostą.

Przykład 1

Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:



Uwaga: *Minimalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{min}$ *lub* y_{min}. *Maksymalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{max}$ *lub* y_{max}. *Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości, wypada podać argument (x) lub przedział argumentów dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.*

Odpowiedzi:

a) Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0X):

Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu to dwa przedziały, zgodne z zakresami liczb, widocznymi na powyższym rysunku: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$\boldsymbol{D = \langle -8;\ -3) \cup \langle -1;\ 10)}$

b) Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0Y):

Zbiór wartości to jeden przedział. Powyżej widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$\boldsymbol{Z_w} = \langle \mathbf{-6;\ 5} \rangle$

c) Monotoniczność

Funkcja malejąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam, gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy –8), nawias jest trójkątny, tam, gdzie jest pusta (–3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam, gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$\boldsymbol{f(x)} \searrow$ w przedziałach $\langle \mathbf{-8;\ -3}) \cup \langle \mathbf{5;\ 10})$

Funkcja rosnąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca. Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3, nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt, w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)} \nearrow$ w przedziale $\langle \mathbf{-1;\ 3} \rangle$

Funkcja stała

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)}_{\rightarrow}$ w przedziale $\langle \mathbf{3, 5} \rangle$

d) Miejsce zerowe:

$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{1} \vee \boldsymbol{x_2} = \mathbf{7}$

e) Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

Punkty przecięcia z osią $0X$: $(1{,}0);\ (7{,}0)$

Punkt przecięcia z osią $0Y$: $(0, -2)$

f) Argumnety, dla których funkcja jest dodatnia/ujemna.

Przy liczbie –8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie –3, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów, leżących na osi OX.

$\boldsymbol{f(x)} > 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-8;\ -3}) \cup (\mathbf{1; 7})$

Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX. Przy liczbie 10, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta.

$\boldsymbol{f(x)} < 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-1;\ 1}) \cup (\mathbf{7; 10})$

g) Argumnety, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Dla wartości –5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.

$\boldsymbol{f(x) = -5}$ dla $\boldsymbol{x = 8,5}$

Dla wartości –2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 7. Rozwiąaniem jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$\boldsymbol{f(x) = -2}$ dla $\boldsymbol{x \in \{0,7\}}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argumenty –7 i 3. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i dwuelementowego zbioru.

$\boldsymbol{f(x) = 4}$ dla $\boldsymbol{x \in \langle 3, 5\rangle \cup \{-7, 3\}}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$\boldsymbol{f(x) = 6}$ Brak argumentów

h) Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2, 4), B = (6, 2)$

Punkt A nie należy do wykresu funkcji.

Punkt B należy do wykresu funkcji.

i) Maksimum i minimum

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka.

Minimum funkcji: brak

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego –8.

Maksimum funkcji $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

ZADANIA

4.4.1 Uzupełnij tabelkę funkcji $f : R \to R$ i narysuj jej wykres. Zadanie wykonaj również w arkuszu kalkulacyjnym.

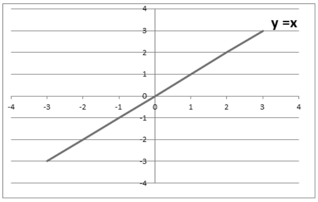
x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...								...

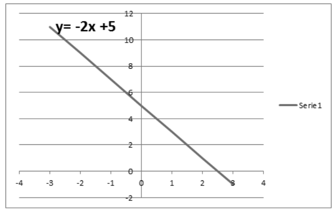
a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{2}x+1$ c) $y = -2x + 5$ d) $y = 3x+5$

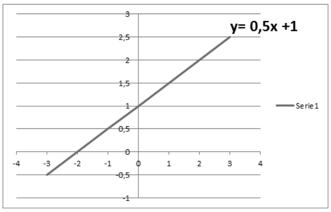
e) $y = -x + 3$ f) $y = \frac{3}{4}x - 2$ g) $y = |x|$ h) $y = |x + 2|$

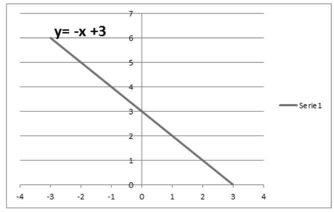
i) $y = |x| - 1$ j) $y = \frac{1}{2}|x|$ k) $y = 3|x|$

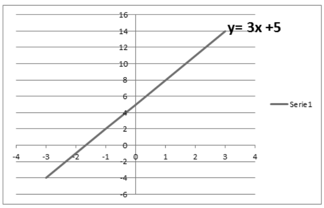
Odpowiedź:

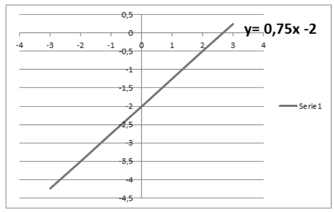

y =x

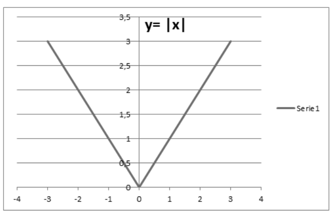

y= -2x +5
Serie1

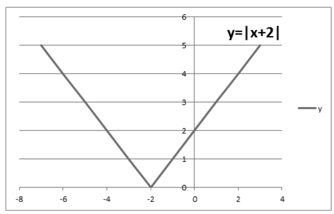

y= 0,5x +1
Serie1

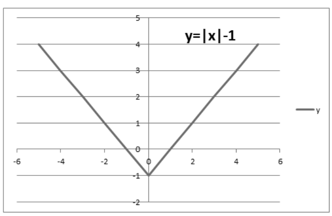

y= -x +3
Serie1

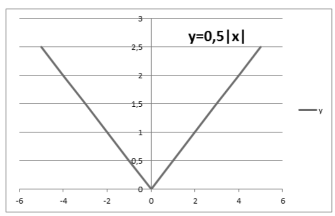

y= 3x +5
Serie1


y= 0,75x -2
Serie1


y= |x|
Serie1

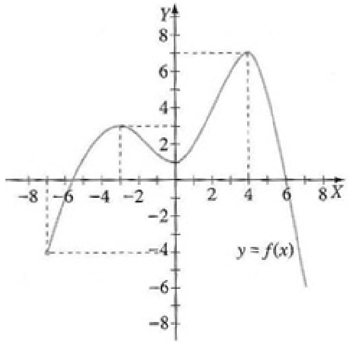

y=|x+2|
y


y=|x|-1
y

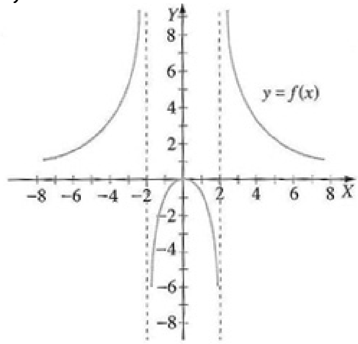

y=0,5|x|
y

4.4.2 Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$, określ:

Wykres I



Wykres II



a) dziedzinę funkcji,

b) zbiór wartości funkcji,

c) miejsca zerowe funkcji,

d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,

e) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała,

f) wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją).

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-7; +\infty)$

b) $y \in (-\infty; 7)$

c) $x = -5,5$; $x = 6$

d) $y > 0$ dla $x \in (-5,5; 6)$
$y < 0$ dla $x \in (-\infty; -5,5) \cup (6; +\infty)$

e) f rosnąca dla $x \in <-7; 4>$
f malejąca dla $x \in <4; +\infty)$

f) $y_{max} = 7$ dla $x = 4$
y_{min} nie istnieje

Wykres II

a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$

b) $y \in (-\infty;+\infty)$

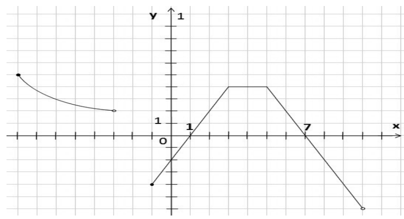
c) $x = 0$

d) $y > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2;+\infty)$
$y < 0$ dla $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

e) f rosnąca dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;0)$
f malejąca dla $x \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$

f) y_{max} nie istnieje
y_{min} nie istnieje

4.4.3 Określ własności funkcji przedstawionej na rysunku:



a) Dziedzina funkcji.

b) Zbiór wartości.

c) Przedziały monotoniczności.

d) Miejsce zerowe.

e) Punkty przecięcia z osiami.

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$.

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$.

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość:

$f(x) = 5, f(x) = -2, f(x) = 4, f(x) = 6$.

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x) < -2$; $f(x) \le -2$.

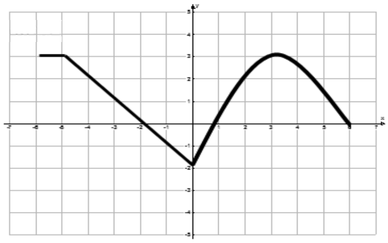
j) Sprawdź, czy dane punkty A = (−2, 4), B = (6, 2) należą do wykresu funkcji f.

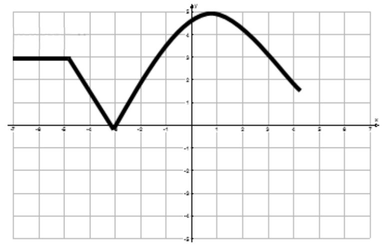
k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji.

Odpowiedź:

a) $x \in \langle -8;\ -3) \cup \langle -1;\ 10)$, b) $y \in (-6;\ 5\rangle$,
c) f rosnąca dla $x \in \langle -1;\ 3\rangle$, f malejąca dla $x \in \langle -8;\ -3) \cup \langle 5;\ 10)$, f stała dla $x \in \langle 3;\ 5\rangle$,
d) $x = 1$, $x = 7$, e) $x = 0$ $y = -2$; $y = 0$ $x = 1$ i $x = 7$, f) funkcja jest dodatnia dla $x \in \langle -8;\ -3) \cup (1;\ 7)$,
g) funkcja jest ujemna dla $x \in \langle -1;\ 1) \cup (7;\ 10)$,
h) $f(x) = 5$ dla $x = -8$, $f(x) = -2$ dla $x = 0$, $f(x) = 4$ dla $x \in \langle 3;5\rangle$, $f(x) = 6$ nie ma takich x,
i) $f(x) < -2$ dla $x \in \langle -1;0) \cup (8;\ 10)$, $f(x) \le -2$ dla $x \in \langle -1;0\rangle \cup \langle 8;\ 10)$, j) A nie należy, B $\in$ f,
k) $y_{max} = 5$ dla $x = -8$, y_{min} nie istnieje

4.4.4 Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:





a) Dziedzina funkcji.

b) Zbiór wartości.

c) Przedziały monotoniczności.

d) Miejsce zerowe.

e) Punkty przecięcia z osiami.

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$.

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$.

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość: $f(x) = 3$, $f(x) = 1$.

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\langle 3$.

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–4, 2), B = (5, 1) należą do wykresu funkcji f.

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji.

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-6,6>$

b) $y \in <-2,3>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <3,1>$
f jest malejąca dla $x \in <-5,0> \cup <3; 6)$
f jest stała dla $x \in <-6,-5>$

d) $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$

e) $(-2,0); (\frac{1}{2}, 0); (6,0); (0,-2)$

f) $x \in <-6,-2) \cup <\frac{1}{2}; 6)$

g) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-6,-5> \cup <\{3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3, 1\}$

i) $x \in (-5,3)$

j) tak

k) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -2$

Wykres II

a) $x \in <-7,4>$

b) $y \in <0,5>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <0,\frac{1}{2}>$
f jest malejąca dla $x \in <-5,0) \cup <\frac{1}{2}; 4>$
f jest stała dla $x \in <-7,-5>$

d) $x \in \{-3\}$

e) $(3,0); (0;4\frac{1}{2})$

f) $x \in <-7,-3) \cup (-3; 4)$

g) $x \in \{\emptyset\}$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-7,-5> \cup <\{-1\frac{1}{2}, 3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\}$

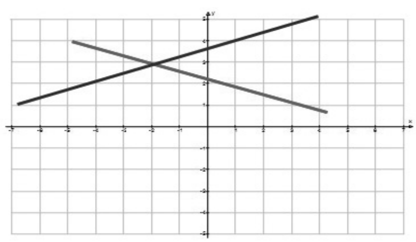
i) $x \in (-5,-1\frac{1}{2}) \cup (3;4)$

j) nie

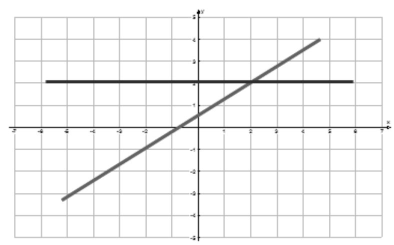
k) $y_{max} = 5, y_{min} = 0$

4.4.5 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) = g(x)$.

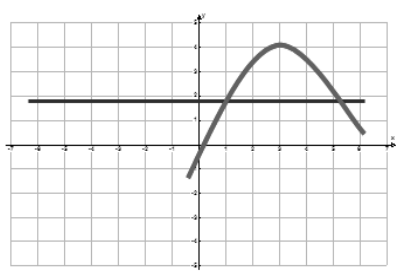
a)



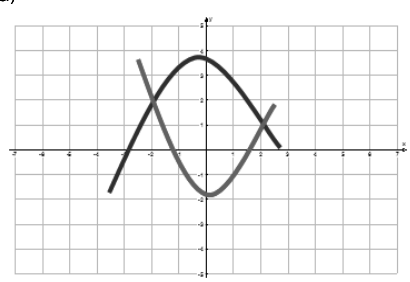
b)



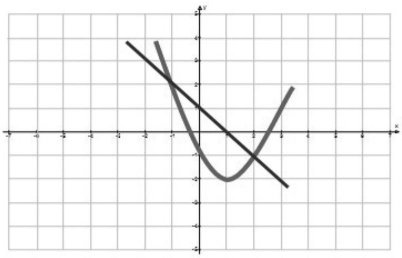
c)



d)



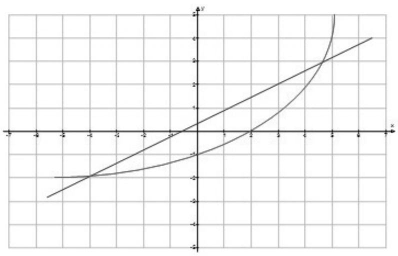
e)



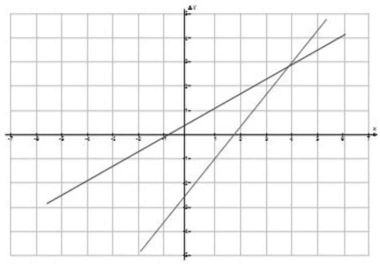
Odpowiedź: a) $(-2\frac{1}{2},1)$, b) (2,2), c) (1,2); (5,2), d) (–2,2); (2,1), e) (–1,2); (2,–1).

4.4.6 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) \geq g(x)$ oraz $f(x) \langle\, g(x)$

a)

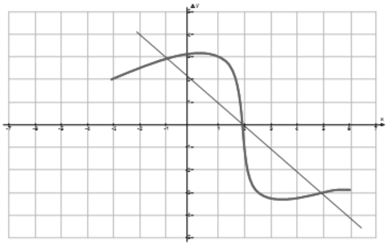


b)



a)

c)



Odpowiedź:

a) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in$ <–4,$4\frac{1}{2}$>; $f(x) < g(x)$ dla $x \in$ <–∞,–4) ∪ $(4\frac{1}{2}, +\infty)$

b) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in$ <–∞,4>; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (4, +\infty)$

c) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in$ <–∞,–1> ∪ <2,5>; f(x) < $g(x)$ dla $x \in (-1, 2)$ ∪ (5,+∞)

4.5 Przekształcanie wykresów funkcji

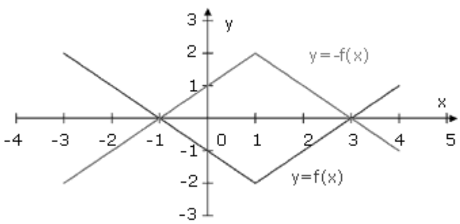
Teraz nauczę się:

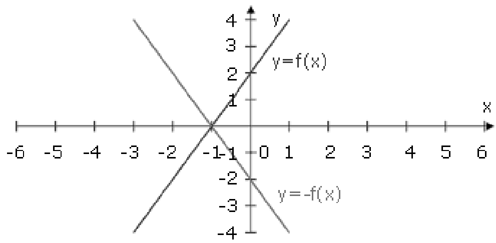
- Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$
- Narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru,
- Wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie,
- Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y=|f(x)|$

$\boldsymbol{x \to y = -f(x)}$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

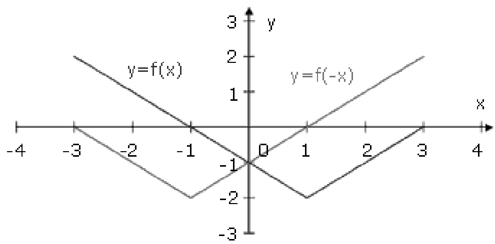
Przykład





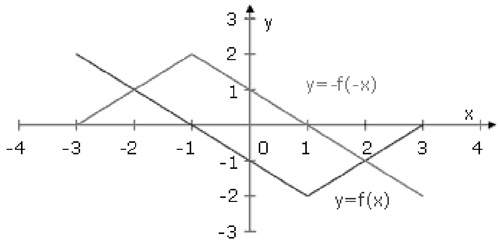
$\boldsymbol{x \to y = f(-x)}$

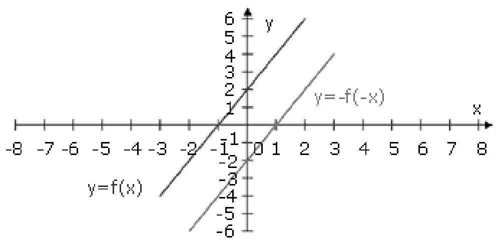
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

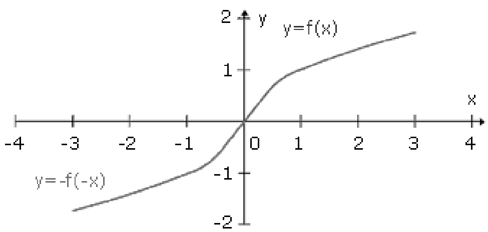


$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$.

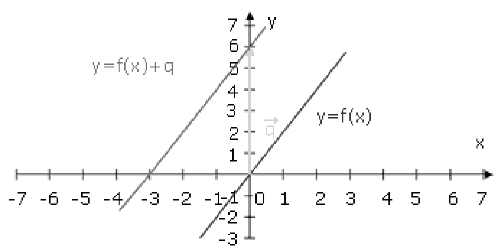






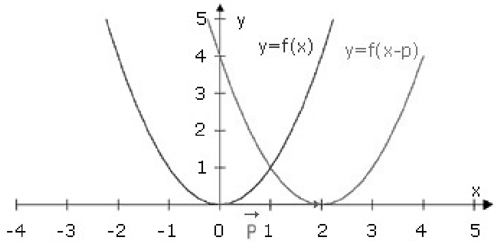
$x \to y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0, q]$).



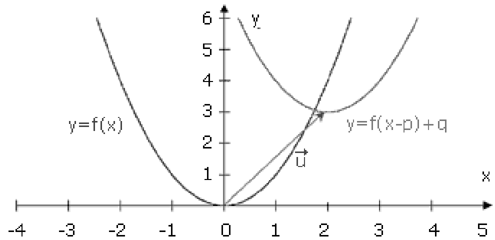
$x \to y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $[p, 0]$.



$x \to y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.



$x \to y = k \cdot f(x)$

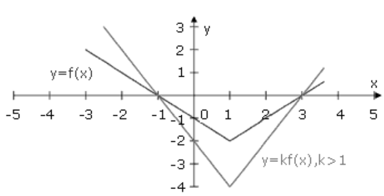
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k-krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

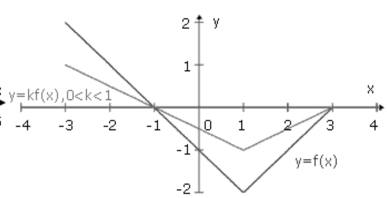
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY

(„rozciągnął się" wzdłuż osi OY).

Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY

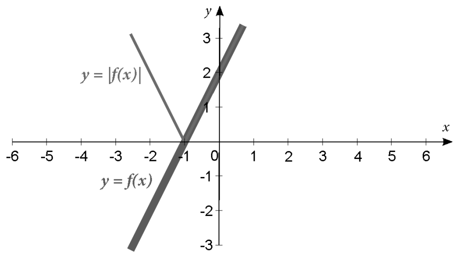
(„ściągnął się" wzdłuż osi OY).





➡ $* \, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$

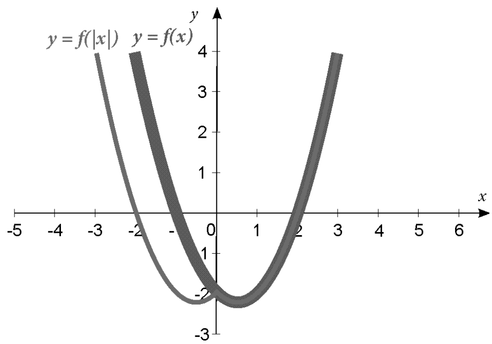
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$ leżącą nad osią OX lub na niej pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX, odbić symetrycznie względem osi OX.

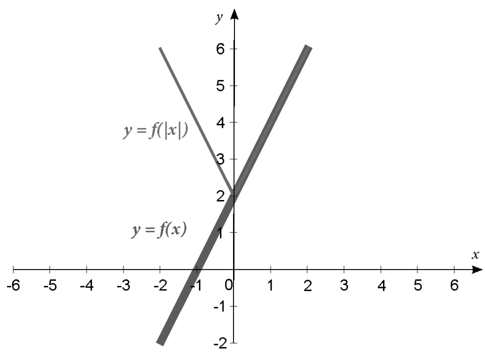


➡ $* \, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian;
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.



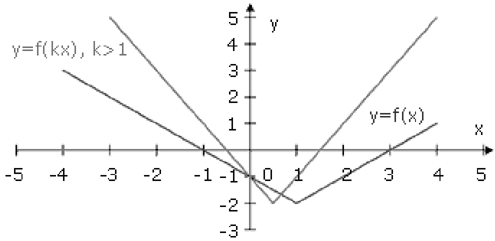


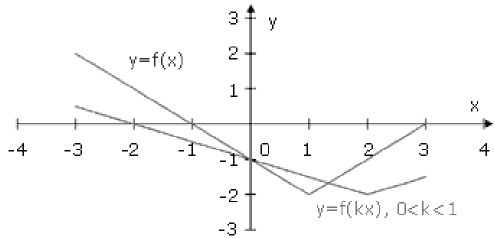
$* \boldsymbol{x \to y = f(k * x)}$

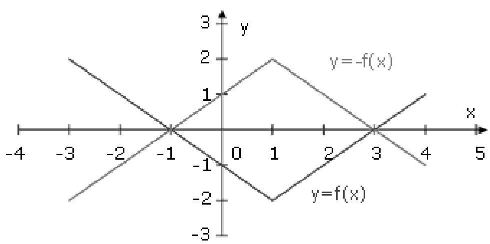
Wykres funkcji $y = f(k * x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

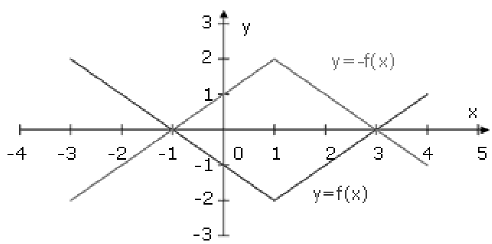
Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX.

Dla k $\in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.









ZADANIA

4.5.1 Mając dane funkcje:

$f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = -2x - 1, f(x) = -x + 4,$

zapisz wzory funkcji i naszkicuj wykresy:

a) $x \to f(x)$ b) $x \to -f(x)$ c) $x \to f(-x)$

d) $x \to f(x) - 1$ e) $x \to f(x+1)$ f) $x \to |f(x)|$

g) $x \to f(|x|)$ h) $x \to |f(x) - 1|$

Odpowiedź:

a) $y = f(x) = 2x$

b) $y = -f(x) = -2x$

c) $y = -f(x) = -2x$

d) $y = f(-x) = -2x$

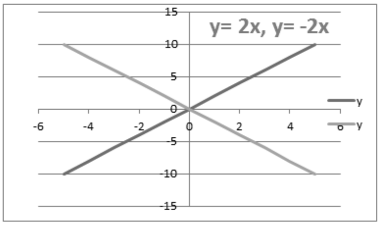
e) $y = f(x) - 1 = 2x - 1$

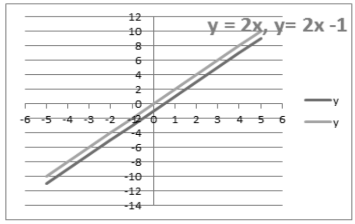
f) $y = f(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$

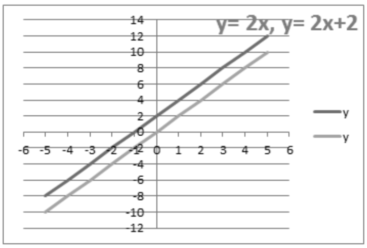
g) $y = |f(x)| = |2x|$

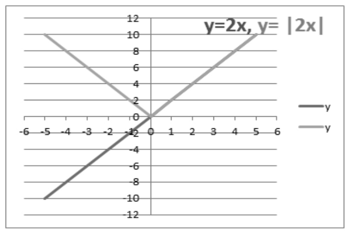
h) $y = f(|x|) = 2|x|$

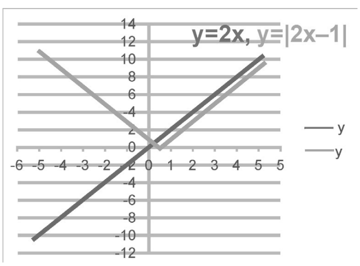
i) $y = |f(x) - 1| = |2x - 1|$

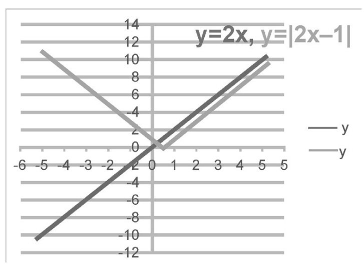












$f(x) = 3x + 1$, $y = -f(x) = -3x - 1$, $y = f(-x) = -3x + 1$, $y = f(x) - 1 = 3x$, $y = f(x+1) = 3x + 4$,

$y = |f(x)| = |3x + 1|$, $y = f(|x|) = 3|x| + 1$, $y = |f(x) - 1| = |3x|$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = -f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $y = f(-x) = \frac{1}{2}x + 2$, $y = f(x) - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$,

$y = f(x+1) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, $y = |f(x)| = |-\frac{1}{2}x + 2|$, $y = f(|x|) = -\frac{1}{2}|x| + 2$, $y = |f(x) - 1| = |-\frac{1}{2}x + 1|$

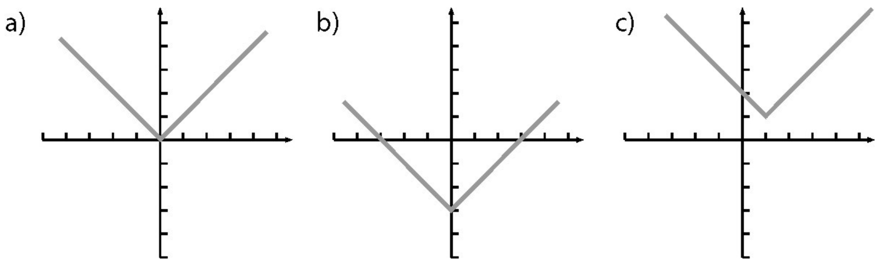
$f(x) = -2x - 1$, $y = -f(x) = 2x + 1$, $y = f(-x) = 2x - 1$, $y = f(x) - 1 = -2x - 2$,

$y = f(x+1) = -2x - 3$, $y = |f(x)| = |-2x - 1|$, $y = f(|x|) = -2|x| - 1$, $y = |f(x) - 1| = |-2x - 2|$

$f(x) = -x + 4$, $y = -f(x) = x - 4$, $y = f(-x) = x + 4$, $y = f(x) - 1 = -x + 3$, $y = f(x+1) = -x + 3$,

$y = |f(x)| = |-x + 4|$, $y = f(|x|) = -|x| + 4$, $y = |f(x) - 1| = |-x + 3|$

4.5.2 Dla każdego z poniższych wykresów funkcji opisz, jak go otrzymano, przesuwając odpowiedni wykres funkcji $y = |x|$. Podaj wzór funkcji o danym wykresie.



Odpowiedź:

a) $y = |x|$ przesunięto o wektor [1,0] $y = |x-1|$

b) $y = |x|$ przesunięto o wektor [0,–3] $y = |x| - 3$

c) $y = |x|$ przesunięto o wektor [3,1] $y = |x-3| + 1$

4.5.3 Zadanie 1 i 2 rozwiąż za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

4.6 Funkcja liniowa i jej własności

Teraz nauczę się:

- Zapisywać funkcję w postaci ogólnej i kierunkowej,
- Interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej,
- Określać monotoniczność funkcji na podstawie jej wzoru i wykresu,
- Badać monotoniczność funkcji w zależności od parametru.

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są współczynnikami liczbowymi, nazywamy **funkcją liniową**. **Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.**

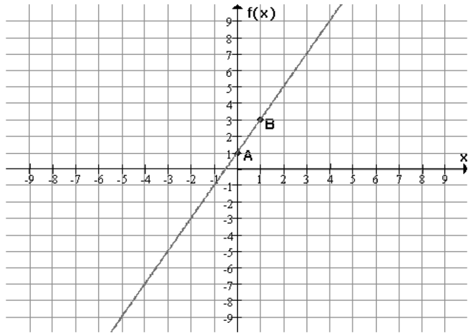
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej.**

Wykresem każdej funkcji liniowej **jest linia prosta**. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty.

Przykład 1

Narysuj prostą: $y = 2x + 1$



Jeżeli $x = 0$, to $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{A}\,(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

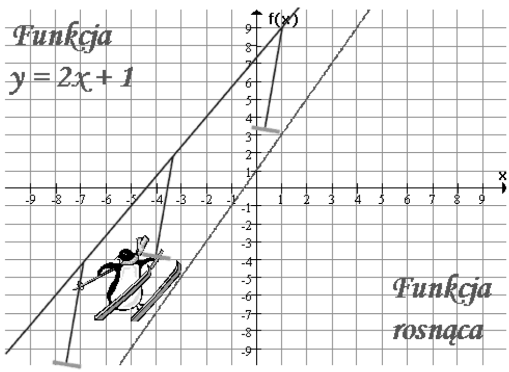
Jeżeli $x = 1$, to $y = 3 \rightarrow \boldsymbol{B}\,(\mathbf{1}, \mathbf{3})$

Rysunek 4-6 Wykres funkcji y=2x+1

▶ MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ[56]

- Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz większe wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **rosnąca**.

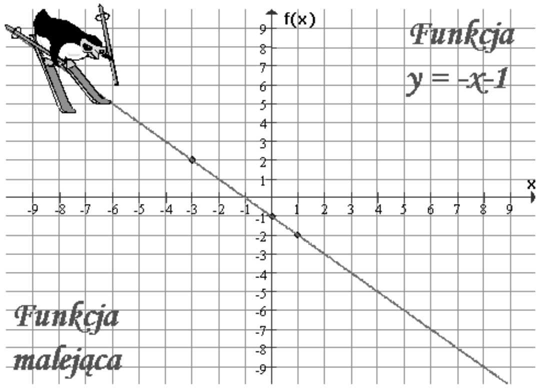
➡ Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy rosnącą, jeżeli $a > 0$



- Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz mniejsze wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **malejąca**.

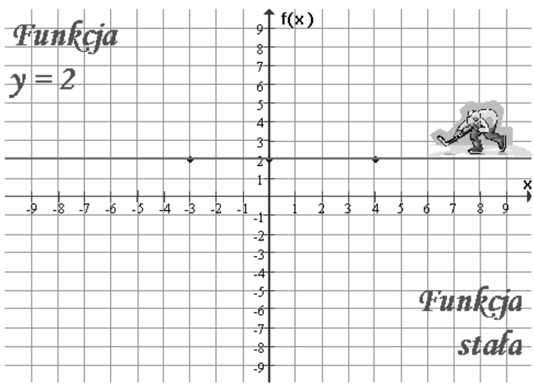
➡ Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy malejącą, jeżeli $a < 0$.

56 https://sites.google.com/site/wlasnoscfunkcji/monotoniczno%C5%9B%C4%87, 28.03.2013.



➢ Jeżeli dla wszystkich argumentów funkcja przyjmuje taką samą wartość, to o takiej funkcji mówimy, że jest **stała**.

➡ Jeżeli $a = 0$, to funkcja $y = ax + b$ jest stała. Jej wzór przyjmuje postać: $y = b$.



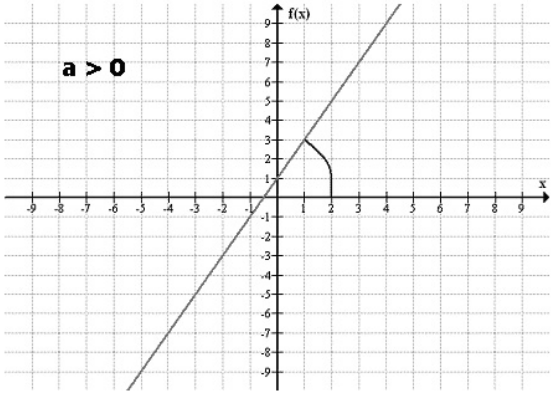
➡ **Współczynnik** a

Współczynnik a mówi o kierunku prostej, która jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$.
Liczba a jest więc nazywana **współczynnikiem kierunkowym** funkcji $y = ax + b$.

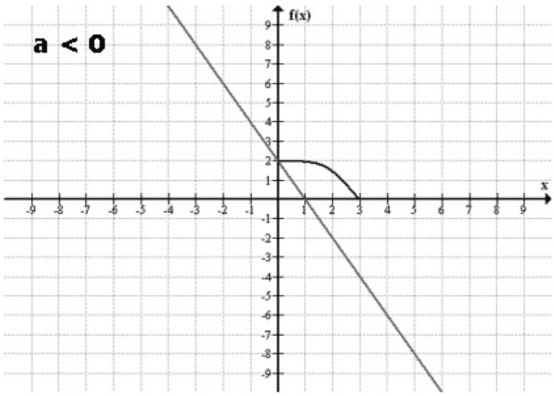
➡ Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej $a = tg\alpha$. Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

➡ Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, kąt nachylenia do osi x jest wyrażony jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Jeżeli liczba a jest dodatnia, to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem ostrym

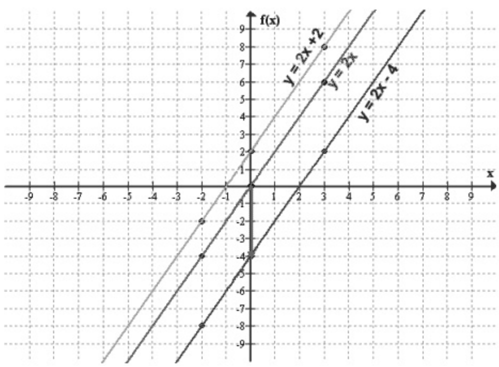
(im większa jest liczba a, tym kąt ten jest większy):



Jeżeli liczba a jest ujemna,to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem rozwartym:



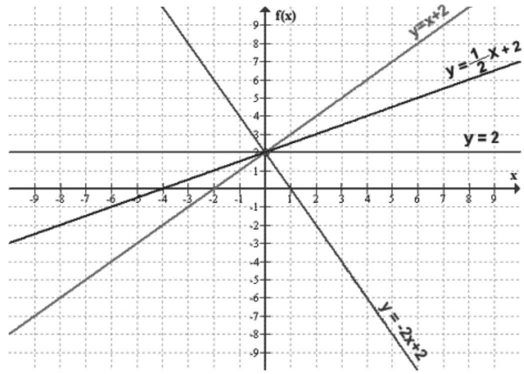
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Współczynnik b

Współczynnik b mówi o tym, w którym punkcie wykres funkcji $y = ax + b$ przecina oś OY, czyli wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0,b)$.

Wykres



Miejsce zerowe – jest to taki argument (x), dla którego wartość (y) wynosi 0.

UWAGA!!!!

Funkcja stała nie ma miejsca zerowego z wyjątkiem funkcji $y = 0$, która ma ich nieskończenie wiele.

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy miejsca zerowego, podstawiając za y wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (czyli miejsce zerowe).

Przykład 2

$$y = 2x - 4$$

Podstawiamy za y wartość 0 i rozwiązujemy równanie.

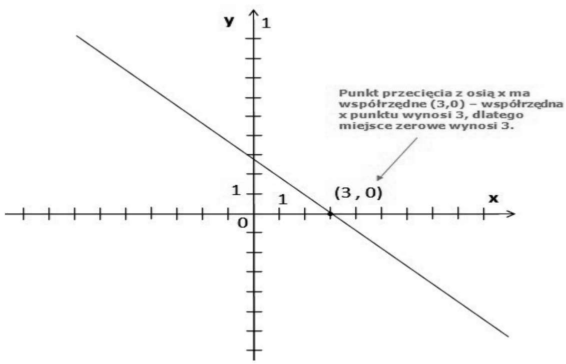
$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 \qquad /\div(-2)$$

$$x = 2$$

Piszemy: Miejsce zerowe funkcji wynosi: $x = 2$.

Mając do dyspozycji wykres, szukamy punktu przecięcia wykresu z osią odciętych (x) i odczytujemy wartość argumentu (x), który jest miejscem zerowym.



Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y - ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$

Przykład 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 4$

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$$

Funkcja ma miejsce zerowe równe: $x_0 = 2$

Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

– **punktu przecięcia z osią x**, podstawiając za y wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe znajduje się w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład 4

$y = 4x + 12$

$0 = 4x + 12$

$-4x = 12 \ / \div (-4)$

$x = -3$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: (–3,0)

– **punktu przecięcia z osią y**, podstawiając za x wartość 0 i obliczając y.

Przykład 5

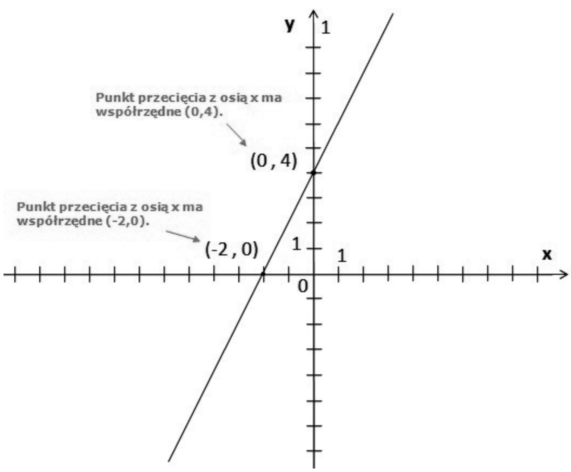
$y = 4x + 12$

$y = 4 \cdot 0 + 12$

$y = 12$

Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: (0,12)

Mając do dyspozycji wykres, odczytujemy współrzędne obu punktów z wykresu.



Punkt przecięcia z osią x: $(-2{,}0)$

Punkt przecięcia z osią y: $(0{,}4)$

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji i wykonać obliczenia po obu stronach powstałego równania, patrząc, czy lewa strona będzie równała się prawej. Jeżeli tak jest, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie – znaczy to, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

Przykład 6

Sprawdź, czy punkty: A = (1,2); B = (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x-1$.

Sprawdzamy osobno oba punkty:

$$y = 3x - 1$$

Podstawiamy punkt (1,2)

$$2 = 3 \cdot 1 - 1$$
$$2 = 2$$
$$L = P$$

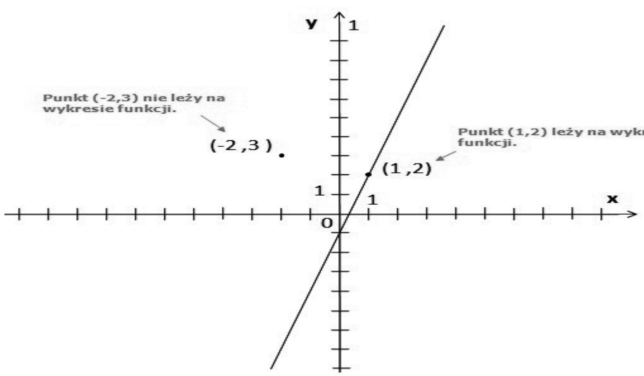
Podstawiamy punkt (-2,3)

$$3 = 3 \cdot (-2) - 1$$
$$3 \neq -7$$
$$L \neq P$$

Punkt (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt (–2,3) nie należy.

Mając do dyspozycji wykres funkcji, wystarczy znaleźć dany punkt w układzie współrzędnych – jeżeli leży on na prostej, która jest wykresem funkcji, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, to znaczy, że nie należy.

Przykład: Sprawdź, czy punkty: (1,2); (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x-1$



Punkt A = (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt B = (–2,3) nie należy.

ZADANIA

4.6.1 Podane równanie sprowadź do postaci kierunkowej:

a) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$ b) $x + y - 4 = 0$ c) $2x + 2y + 3 = 0$

d) $x + 2y = 12$ e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ f) $\frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2$

Odpowiedź:

a) $y = 3x + 0{,}5$; b) $y = -x + 4$; c) $y = -x - 1\frac{1}{2}$; d) $y = -\frac{1}{2}x - 6$; e) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$;

4.6.2 Które spośród punktów A, B, C, D należą do wykresu funkcji: $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $f_2(x) = \frac{x+1}{2}$,

a) A = (2,1) B = $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ C = (–2,1), D =(0, 2);

b) A = (1,1), B = (2,2), C = (–3,–1), D = $(2, \frac{3}{2})$.

Odpowiedź: $A \in f_1$, $D \in f_1$, $A \in f_2(x)$, $C \in f_2(x)$, $D \in f_2(x)$.

4.6.3 Narysuj wykresy funkcji, a następnie:

- określ monotoniczność,
- oblicz miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- sprawdź, czy punkt A = (1,3) należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x - 1$ b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ c) $f(x) = -9x - 3$

d) $f(x) = 0{,}4x + 0{,}1$ e) $f(x) = \frac{-x+2}{2}$ f) $f(x) = \frac{2-2x}{-4}$

g) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$ h) $f(x) = \frac{1-6x}{3} + 2x$

Odpowiedź:

a) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y (0, –1); nie należy

b) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{2})$; nie należy

c) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{3}$; z osią x $(-\frac{1}{3},0)$; z osią y (0,–3); nie należy

d) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{10})$; nie należy

e) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = 2$; z osią x (2,0); z osią y (0,1); nie należy

f) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y $(0, -\frac{1}{2})$; nie należy

g) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -4$; z osią x (– 4,0); z osią y (0,–2); nie należy

h) funkcja stała; miejsce zerowe brak; brak; brak; nie należy

4.6.4 Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-1)x+1$ b) $f(x) = (-m+2)x-4$ c) $f(x) = (m-\frac{\sqrt{3}}{2})x-\sqrt{3}$

Odpowiedź: a) $m > \frac{1}{2}$; b) $m < 2$; c) $m > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

4.6.5 Przez które ćwiartki przechodzą proste $y_1 = 2x + 1$ i $y_2 = \frac{1}{2}x - 5$? Która z prostych tworzy z osią OX większy kąt? W której ćwiartce przecinają się proste?

Odpowiedź: y_1 przez I, II, III; y_2 przez I, III, IV.

4.7 Zastosowanie funkcji do opisywania zjawisk z życia codziennego

Teraz nauczę się:

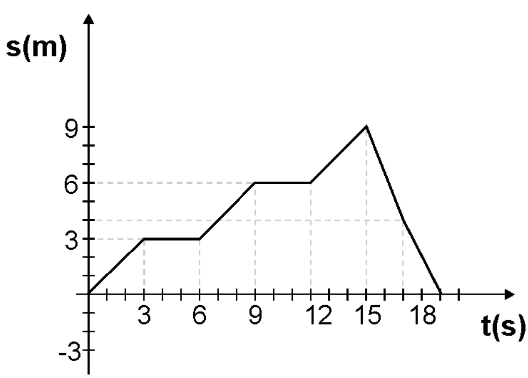
Wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Funkcje wykorzystywane są w wielu dziedzinach życia, np.:

- W badaniach statystycznych – kurs walut,
- W balistyce – zapisywanie toru lotu pocisku,
- Do bliczania maksymalnej prędkości samochodu, z jaką bezpiecznie może pokonać dany zakręt, oraz wiele innych.

W fizyce często do opisywania zajwisk z życia codziennego korzystamy z wykresów funkcji. Analizując dane przedstawione na wykresie najpierw sprawdzamy, jakie wielkości fizyczne i ich jednostki zostały na nim zaznaczone.

Przykład 1



Jak zinterpretować dane na poniższym wykresie? Zauważ, że mamy do czynienia z dwiema wielkościami: szybkością i czasem. Co się dzieje z szybkością ciała w poszczególnych przedziałach czasu?

Na początku ciało spoczywało, następnie przez 2 sekundy jego szybkość wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu (ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym), przez kolejne 2 sekundy ciało poruszało się ze stałą prędkością, od 4 do 6 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 6 do 8 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne dwie sekundy jego szybkość wzrastała, następnie ciało zmieniło zwrot prędkości (zawraca) i przez pierwszą sekundę porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 11 do 12 sekundy jest to również ruch jednostajnie przyspieszony. Obliczmy przyspieszenie ciała w poszczególnych przedziałach czasu. Wiedząc, że przyspieszenie jest równe ilorazowi zmiany szybkości ciała do zmiany czasu $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Z wykresu odczytujemy:

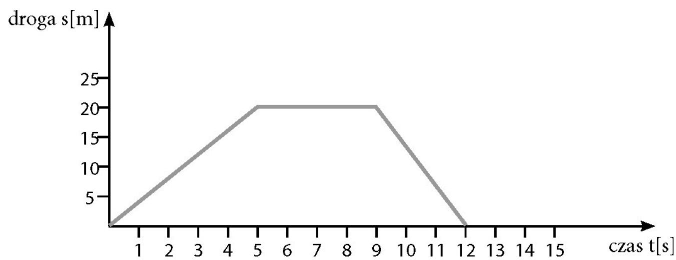
$v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 4, v_5 = 4, v_6 = 6,$

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11, t_7 = 12$, stąd

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{2m/s}{2s} = 1\frac{m}{s^2}$ i analogicznie

$a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, \qquad a_4 = -3\frac{m}{s^2}, a_5 = -1{,}5\frac{m}{s^2}.$

Przykład 2



Przeanalizujmy podobny wykres. Zauważmy, jakie wielkości fizyczne mamy teraz zaznaczone na wykresie? Przez pięć pierwszych sekund droga rosła proporcjonalnie do czasu, to znaczy, że ciało poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne 4 sekundy ciało spoczywa, a przez następne 3 sekundy zawraca, poruszając się ze stałą prędkością. Obliczmy $v_1,\ v_2\ i\ v_3$.

Z lekcji fizyki pamiętasz, że:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, stąd\ v_1 = 4\frac{m}{s}, v_2 = 0\frac{m}{s}, v_3 = -6\frac{2}{3}\frac{m}{s}.$$

Przykład 3

Zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita a wyrażoną w stopniach Celsjusza jest zależnością liniową:

a) Znajdź tę zależność, wiedząc że $32°F = 0°C$, a $5°F = -15°C$.

b) 22 lipca w San Diego temperatura o godzinie 12^{00} była o $12{,}5°C$ wyższa niż temperatura o godzinie 6^{00}. Wyraź wzrost temperatury w stopniach Fahrenheita.

Jeżeli F jest temperaturą w Fahrenheitach, a C w Celsjuszach, to wiemy, że $F = aC + b$. Stałe a i b wyznaczymy z podanych informacji.

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a(-15) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 32 \\ 15a = b - 5 = 27 \ \Rightarrow a = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

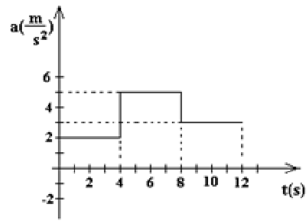
Skorzystamy ze wzoru z podpunktu a).

$$F_2 - F_1 = T_F = \frac{9}{5}C_2 + 32 - \frac{9}{5}C_2 - 32 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$$

Odpowiedź: $22{,}5°F$

ZADANIA

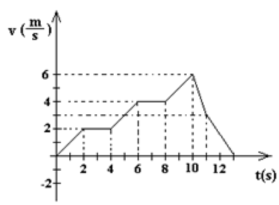
4.7.1 Na podstawie poniższego wykresu dokonaj analizy ruchu ciała i sporządź wykres zależności $v(t)$, $s(t)$.



Odpowiedź:

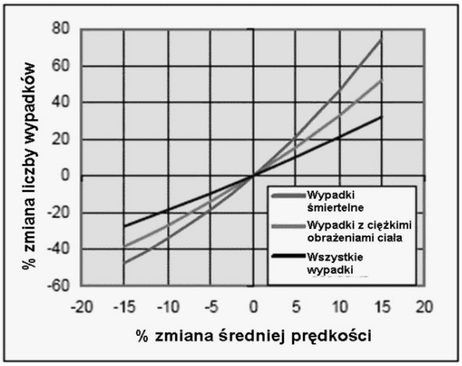
Przez pierwsze dwie sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym $a = 2\,\frac{m}{s^2}$,
przez kolejne z przyspieszeniem a = 5 $\frac{m}{s^2}$, od 8 do 12s z przyspieszeniem a = 3 $\frac{m}{s^2}$.
Podstawiamy do wzoru $v = at$ kolejne sekundy czasu i obliczamy odpowiadające jej szybkości.

4.7.2 Opisz zachowanie ciała na podstawie wykresu.



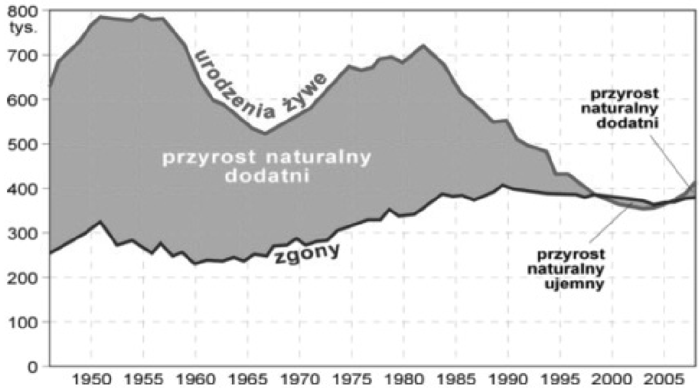
Odpowiedź: Przez pierwsze 3s ciało porusza się ruchem jednostajnym, następnie spoczywa i tak na zmianę, w 15s zawraca, dalej poruszając się ruchem jednostajnym, ale z inną szybkością 3.

4.7.3 Jakie informacje można odczytać z poniższego wykresu? Wyciągnij odpowiednie wnioski.



Zależność między zmianami średniej prędkości jazdy a liczbą wypadków

4.7.4 Wykres przedstawia, jak zmianiał się przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1950 – 2005.[57]



Przyrost naturalny w Polsce w latach 1946 – 2008

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak zmieniała się liczba urodzeń w latach 1950 – 2005?
2. W którym roku liczba urodzeń była największa, a w którym najmniejsza?
3. Jak w tym czasie kształtowała się liczba zgonów?
4. W którym roku przyrost naturalny ludności był najwyższy, a w którym najniższy?

Informacja do zadania:

Prędkość rzeki zależy od takich czynników, jak: głębokość rzeki, nachylenie terenu, rodzaj podłoża tworzącego dno i brzegi rzeki.

Większość rzek zwalnia pod koniec swojego biegu, ponieważ nachylenie terenu, czyli spadek wody, znacznie się zmniejsza. Gdyby przeanalizować przekrój rzeki, można by zauważyć, że pręd-

57 (www.wiking.edu.pl/article.php?id=269, 25.03.2013)

kość różni się w różnych obszarach – najmniejsza jest na dnie rzeki, a największa na jej powierzchni. Powodem tego jest tarcie pomiędzy przepływającą wodą a powierzchnią dna rzeki.

Przy brzegach rzeki, szczególnie na zakrętach, przepływ wody jest najszybszy z powodu siły odśrodkowej.

Zwykle prędkość V wyrażamy w metrach na sekundę $\left[\frac{m}{s}\right]$, natomiast współczynnik rodzaju podłoża oznaczamy k i wyrażamy w $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$. Poziom wody oznaczamy T i wyrażamy w metrach, do wyznaczenia prędkości używamy również współczynnika nachylenia, spadku terenu S.

Prędkość przepływu wody obliczamy ze wzoru: $V = k \cdot \sqrt[3]{T^2} \cdot \sqrt{S}$

Wskazówka: współczynnik nachylenia S = (różnica poziomów)/(długość rzeki)

4.7.5 Dwie stacje pomiarowe Berthelsdorf i Nossen znajdują się na rzece Mulde. Pomiędzy tymi stacjami średni poziom wody wynosi 35 cm. Wysokość nad poziomem morza w Berthelsdorf wynosi 376,61m, a w Nossen 203,76 m. Długość rzeki na tym odcinku wynosi 42,3 km. Dno rzeki jest wyboiste i wartość współczynnika rodzaju podłoża wynosi 30$\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$.

1. Oblicz prędkość rzeki na tym odcinku.

2. Raz na 20 lat poziom wody rzeki Mulde osiaga 2,5 m. Oblicz, jaką wówczas prędkość osiąga rzeka.

3. 30 sierpnia 2008 roku po długim okresie deszczowym prędkość rzeki osiągnęła wartość 1,68 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Oszacuj, jak wysoki był wówczas poziom wody.

4. Prędkość rzeki można również wyrazić w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Tak wyrażona, daje nam informację, jak dużo wody przepływa w ciągu sekundy. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki pomiarów poziomu wody w rzece i jej przepływu.

Data	Godzina	Poziom wody w [cm]	Przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
26.10	01:00	41	2,04
	07:00	39	1,81
	13:00	40	1,92
	19:00	40	1,92
27.10	01:00	40	1,92
	07:00	40	1,92
	13:00	41	2,04
	19:00	44	2,42
28.10	01:00	45	2,55
	07:00	45	2,55
	13:00	41	2,04
	19:00	41	2,04
29.10	01:00	41	2,04
	07:00	41	2,04
	13:00	53	3,78
	19:00	56	4,31
30.10	01:00	73	8,07
	07:00	83	10,9
	13:00	103	19,3
	19:00	106	20,7
31.10	01:00	93	14,8
	07:00	81	10,3
	13:00	75	8,6
	19:00	71	7,56
01.11	01:00	70	7,31
	07:00	66	6,36

a) Przedstaw na wykresie zależność prędkości przepływu od poziomu wody w dniach od 30 października od godziny 01:00 do 31 października do godziny 01:00.

b) Za pomocą jakiej funkcji można opisać tą zależność?

c) Za pomocą programu Exel lub kalkulatora graficznego znajdź wzór funkcji, która w przybliżeniu opisuje tę zależność.

d) Wykorzystując otrzymaną funkcję oszacuj, ile będzie wynosić prędkość przepływu w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$, jeśli poziom wody osiągnie 2,5 m.

e) Przedstaw chronologicznie na wykresie prędkość przepływu wody w dniach od 30 października od godziny 01:00 do 31 października do godziny 01:00. Wyraź przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$.

f) Jaką wartość wyraża obszar zawarty pomiędzy wykresem funkcji a osią x?

g) Oblicz pole powierzchni tego obszaru (wyznacz pole powierzchni tego obszaru na różne sposoby).

6. Wywnioskuj, jak będzie się zmieniać wartość współczynnika $\boldsymbol{k}$, jeżeli dno rzeki będzie bardziej gładkie.

7. Wyjaśnij, dlaczego prędkość przepływu nie jest liniowo zależna od poziomu wody.

8. Wykorzystanie rzek jako drogi wodnej dla statków powoduje czasem pogłębienie koryta rzeki. Jakie może to mieć konsekwencje dla środowiska?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

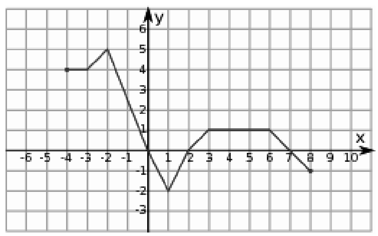
1. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:[58]

a) $-1/3$ b) -3 c) $1/3$ d) 3

2. Zbiorem wartości funkcji f jest:[59]

a) $< -2{,}5 >$ b) $< -4{,}8 >$ c) $< -1{,}4 >$ d) $< 5{,}8 >$

3. Korzystając z wykresu funkcji f, wskaż nierówność prawdziwą:



a) $f(-1) < f(1)$ b) $f(1) < f(3)$ c) $f(-1) < f(3)$ d) $f(3) < f(0)$

4. Wskaż m, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała.

a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = -1$

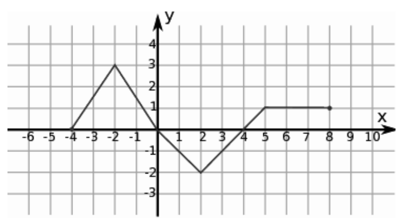
5. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:[60]

a) $-2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

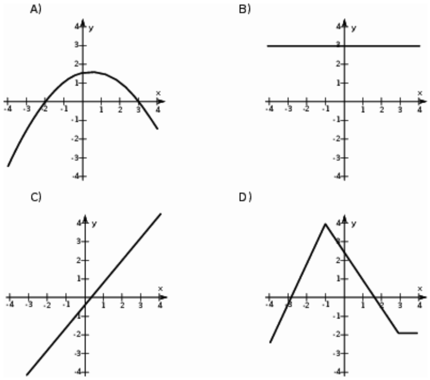


58 Arkusz próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.
59 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2010.
60 Zadania: 5, 6 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2010.

7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem f (x) = ax + 6, gdzie a > 0. Wówczas spełniony jest warunek:[61]

a) $f(x) > 1$ b) $f(2) = 2$ c) $f(3) < 3$ d) $f(4) = 4$

8. Wskaż wykres funkcji, która w przedziale <–4,4> ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



9. Funkcja liniowa $f(x) = (m-1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:[62]

a) $m = 6$ b) $m = 1,5$ c) $m = 1$ d) $m = 5$

10. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

a) 4 b) –2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

11. Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt A = (2,–4), gdy:[63]

a) $m = 5$ b) $m = -5$ c) $m = 1$ d) $m = -4$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

a) $x < 6$ b) $x > 6$ c) $x > -6$ d) $x < -6$

13. Dziedziną funkcji $F(x) = \begin{cases} -2x+1, & gdy\ x \le 3 \\ -x, & gdy\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$ jest zbiór:[64]

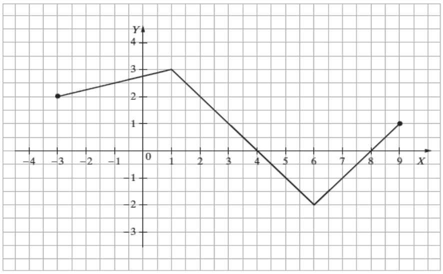
a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle 1,4 \rangle$ c) $\langle 0,4 \rangle$ d) $(-\infty, 1)$

14. Funkcja liniowa $f(x) = (m+2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

a) $m < -2$ b) $m < 2$ c) $m > -2$ d) $m > -4$

61 Zadania: 7, 7 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
62 Zadania: 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2010.
63 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2009.
64 Zadania: 13, 14, 15, 16, 17 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011.

15. Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

a) $\langle 0,4 \rangle$ b) $\langle 1,6 \rangle$ c) $\langle 0,6 \rangle$ d) $\langle -2,4 \rangle$

16. Punkt $P = (a+1{,}2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

a) 0 b) –1 c) 2 d) 1

17. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 2)x - 11$ jest rosnąca dla:

a) $m > 2$ b) $m > 0$ c) $m < 13$ d) $m < 11$

18. (**5 pkt)** Funkcja liniowa $f(x) = 3ax - b$ jest malejąca, natomiast funkcja liniowa $g(x) = bx - 3a$ jest rosnąca. Wykresy funkcji f i g przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Oblicz odciętą punktu A oraz wyznacz wzory funkcji f i g wiedząc, że ich wykresy są prostopadłe[65.]

19. (**2 pkt)** Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru:

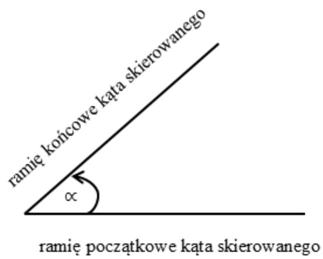
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & dla\ x \in (0,3\rangle \\ \sqrt{3}-3 & dla\ x \in (3,10 \end{cases}$$

65 Zadania: 18,19 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

5 Trygonometria

5.1 Miara łukowa i stopniowa kąta

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy parę prostych o wspólnym początku (wierzchołek kąta).



Rysunek 5-1 – Kąt skierowany

Miarą kąta skierowanego jest **stopień**.

$$1^\circ = \frac{1}{360}\text{kąta pełnego}$$

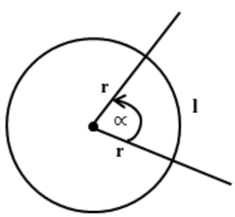
Jednostki mniejsze niż stopień to **minuta kątowa 1'** (uwaga: to nie jest jednostka czasu)

$$1^\circ = 60' \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ 1'$$

oraz **sekunda kątowa (1")**

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' \quad 1''.$$

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu.



Rysunek 5-2 – Radian

Jednostką miary łukowej jest radian.

$$1\,radian = \frac{180^\circ}{\pi} \sim 57^\circ 17' 44''$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Zamiana miary stopniowej (α°) na miarę łukową (α):

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}\ radiana}$$

Przykład 1

$180^\circ = \pi\, rad$

$90^\circ = \frac{\pi}{2}\ rad$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}\ rad$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową (α°):

$$\boldsymbol{\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}}$$

Przykład 2

$\frac{3}{2}\pi\, rad = 270^\circ$

$\frac{\pi}{3}\ rad = 60^\circ$

$\frac{\pi}{2}\ rad = 90^\circ$

Ciekawostka

W niektórych krajach, obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. gradusy. **Gradus** – jest to jedna setna część kąta prostego.

ZADANIA

5.1.1 Znajdź:

a) miarę łukową kątów: $90^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 360^\circ$,

b) miarę stopniową kątów: $3\pi\ rad;\quad 6{,}5\pi\ rad;\quad \frac{6}{5}\pi\ rad;\quad \frac{5}{3}\pi\ rad.$

Odpowiedź: a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{7}{6}\ \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\,\pi$; b) 540°, 117°, 216°, 300°.

5.1.2 Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta. Wynik podaj w stopniach.

Odpowiedź: 114°.

5.1.3 Pole wycinka koła o promieniu $r = 3\ cm$, jest równe $2cm^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

Odpowiedź: $\alpha = \frac{4}{9}$.

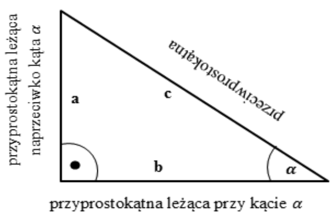
5.2 Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać definicje i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus, tanens i cotangens kątów o miarach od 0° do 180°,
- Obliczać miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).

Termin **trygonometria** pochodzi od dwóch greckich słów: trigonom (trójkąt) i metron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

Rozważmy trójkąt prostokątny o kącie ostrym $\boldsymbol{\alpha}$.



Rysunek 5-3 Trójkąt prostokątny

Tangensem kąta ostrego $\boldsymbol{\alpha}$ nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta $\boldsymbol{\alpha}$ do długości przyprostokątnej (leżącej przy tym kącie) i oznaczamy $\boldsymbol{tg\ \alpha}$.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $sin\ \alpha$.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta α (czytaj: kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta α do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $cos\ \alpha$.

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangensem kąta α (czytaj: kotangensem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta α do długości drugiej przyprostokątnej i oznaczamy $ctg\ \alpha$.

$$ctg\alpha = \frac{a}{b}$$

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, zatem ilorazy określające sinus i cosinus są liczbami mniejszymi od 1.

Przykład 1

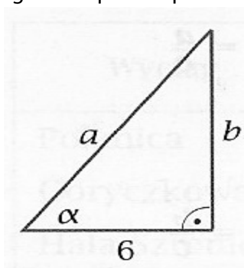
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi 3/4. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$cos\alpha = \frac{6}{a}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{a}$$

$$a = 8$$



Ciekawostka

Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim zapisywali oni hinduską nazwę sinusa bez samogłosek, jako *jb*. Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie zatoka to sinus, tak przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa sinus znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla różnych miar kątów, można odczytać z tablic.

Z tablic możemy korzystać w dwóch celach:

1. Możemy odczytać wartość danej funkcji dla danego kąta.

2. Możemy odczytać, z jakim kątem mamy do czynienia, mając podaną wartość danej funkcji.

Funkcje trygonometryczne i ich wartości odczytywane z tabeli wykorzystujemy do obliczania długości poszczególnych boków lub miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2

Podaj wartość tangensa kąta o mierze $15°$.

Dla podanego kąta i funkcji odczytujemy wartość:

	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	-
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046
13°	0.225	0.9744	0.2309	4.3315
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874

Możemy więc zapisać, że tangens 15° wynosi 0,2679:

tg 15° = 0,2679

Przykład 3

Podaj miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,6023. Dla podanego kąta i funkcji odczytujemy wartość. Szukamy w kolumnie funkcji cosinus podanej wartości (0,6023), a jeżeli nie ma jej w tabeli, szukamy wartości najbliższej do danej (dla naszego przykładu będzie to wartość 0,6018):

	sin	cos	tg	ctg
46°	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
47°	0.7314	0.682	1.0724	0.9325
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
49°	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
50°	0.766	0.6428	1.1918	0.8391
51°	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
52°	0.788	0.6157	1.2799	0.7813
53°	0.7986	0.6018	1.327	0.7536
54°	0.809	0.5878	1.3764	0.7265
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
56°	0.829	0.5592	1.4826	0.6745
57°	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494

Kąt ma więc w przybliżeniu miarę 53°.

5.3 Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

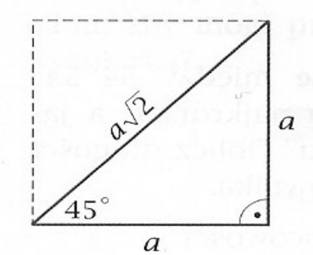
Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°, korzystamy z tego, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° jest połową kwadratu.

➡ Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°.

$$sin45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{a}{a} = 1$$



Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60°, korzystamy z tego, że trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° to połowa trójkąta równobocznego.

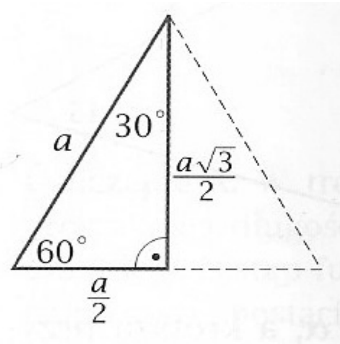
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°.

$$sin30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



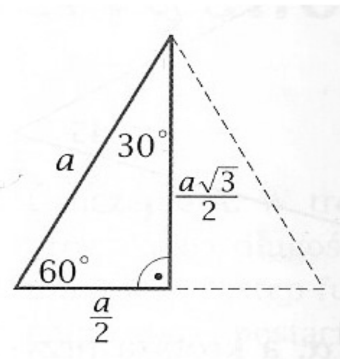
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°.

$$sin60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



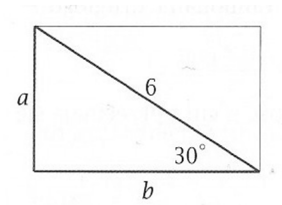
Wartości funkcji trygonometrycznych

α	30°	45°	60°
$sin\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\ \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 5-1 – Wartości funkcji trygonometrycznych

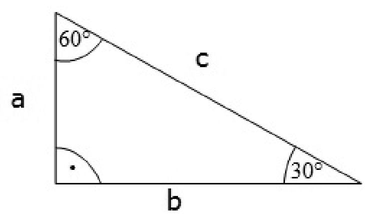
Przykład 1

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



Przykład 2

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.



$$\sqrt{3}c = 12 /: \sqrt{3}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

ZADANIA

5.3.1 Oblicz:

a) $sin30° \cdot cos60° + 2sin45°$ b) $tg45° + sin60° + 2cos30°$

c) $tg30° \cdot ctg60° - sin30° \cdot cos30°$ d) $(tg30° - ctg30°): cos30°$

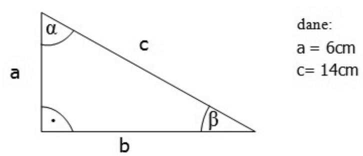
e) $\sqrt{2tg^2 60° - 4cos^2 45°} - ctg45°$

Odpowiedź: a) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$; b) $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{12-9\sqrt{3}}{36}$; d) $-1\frac{1}{3}$; e) 6.

5.3.2 Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.

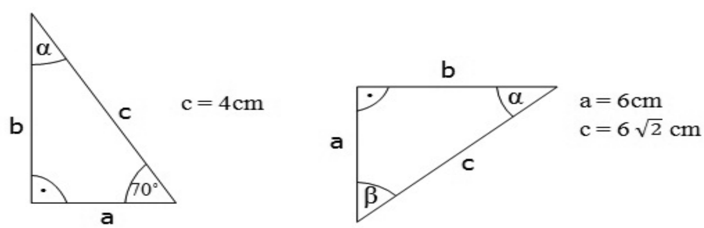
Odpowiedź: $P = 9\sqrt{3}cm^2$.

5.3.3 Oblicz miary kątów trójkąta.



Odpowiedź: $\alpha = 65°, \beta = 25°$.

5.3.4 Rozwiąż podane trójkąty prostokątne



Odpowiedź: a) $\alpha = 20°, a = 1{,}368\ cm, b = 3{,}7588\ cm$; b) $\alpha = 45°, \beta = 45°, b = 6\ cm$.

5.3.5 Linę podtrzymującą maszt przymocowano na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy naprężona lina z poziomem?
Odpowiedź: Lina nachylona jest do poziomu pod kątem około 64°.

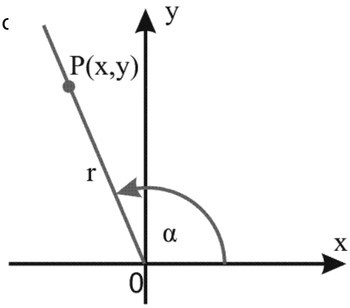
5.3.6 Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 45°. Oblicz jego pole, jeżeli jego podstawy mają długość 12 cm i 6 cm.

Odpowiedź: $P = 27\sqrt{3}cm^2$.

5.4 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych kątów, umieszczamy te kąty w układzie współrzędnych.

Dowolny kąt w układzie współrzędnych to kąt skierowany, którego ramieniem początkowym jest c



$\alpha -$ kąt skierowany

dodatnia półoś x – ramię początkowe kąta α

półprosta $OP^{\rightarrow}$ – ramię końcowe kąta α

$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – promień wodzący punktu $P \neq 0$, gdzie $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta α.

Rysunek 5-4 – Promień wodzący

▶ **DEFINICJE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DOWOLNEGO KĄTA**

➡ **Sinusem dowolnego kąta α** w układzie współrzędnych nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

➡ **Cosinusem dowolnego kąta C** w układzie współrzędnych nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

➡ **Tangensem dowolnego kąta α** w układzie współrzędnych $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do odciętej tego punktu.

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

➡ **Cotangensem dowolnego kąta α** w układzie współrzędnych $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do rzędnej tego punktu.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych katów o mierze $0°, 90°$ i $180°$.

Dla ułatwienia obliczeń, na końcowym ramieniu każdego kąta obieramy punkt, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1.

Dla kąta $0°$, $P = (1,0)$

$x = 1, y = 0, r = 1$

$sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$tg0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

Dla kąta $90°$, $P = (0,1)$

$x = 0, y = 1, r = 1$

$sin90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$cos90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$tg90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

$ctg90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

Dla kąta $180°$, $P = (-1,0)$

$x = -1, y = 0, r = 1$

$sin180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$

$tg180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} - nie\ istnieje$

Wyniki umieścimy w tabeli:

α	0°	90°	180°
$sin\ \alpha$	**0**	**1**	**0**
$cos\ \alpha$	**1**	**0**	**−1**
$tg\ \alpha$	**0**	−	**0**
$ctg\ \alpha$	−	**0**	−

Tabela 5-2 – Wartości funkcji trygonometrycznych

ZADANIE

5.4.1 Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany α, w którym punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta, a następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta:

a) $P = (1,7)$ b) $P = (-2,5)$ c) $P = \left(-\sqrt{3}, -4\right)$ d) $P = (6, -3)$

Odpowiedź:

a) $r = 5\sqrt{2}, sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}, cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, tg\alpha = 7, ctg\alpha = \frac{1}{7};$

b) $r = 29, sin\alpha = \frac{5}{29}, cos\alpha = \frac{-2}{29}, tg\alpha = -\frac{5}{2}, ctg\alpha = -\frac{2}{5};$

c) $r = 19, sin\alpha = -\frac{4}{19}, cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{19}, tg\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{2}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4};$

d) $r = 3\sqrt{5}, sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}, cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, tg\alpha = -\frac{1}{2}, ctg\alpha = -2.$

5.5 Wzory redukcyjne

Teraz nauczę się:

Korzystać ze wzorów typu: $sin(90° - \alpha) = cos\alpha$.

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

Jeśli argument zmienia się w nieparzystą wielokrotność kąta $\frac{\pi}{2}$, to funkcja przechodzi w kofunkcję (sinus w cosinus, cosinus w sinus, tangens w cotangens, cotangens w tangens). Ponieważ wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, więc należy je poprzedzić odpowiednim znakiem, pisząc prawą stronę wzoru. Znak piszemy taki, jaki odpowiada funkcji trygonometrycznej kąta α występującej z lewej strony wzoru.

Tabela wzorów redukcyjnych

$\varphi =$	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
	$\frac{\pi}{2}-a$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\pi-a$	$\pi+a$	$\frac{3}{2}\pi-a$	$\frac{3}{2}\pi+a$	$2\pi-a$
$sin\ \varphi$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\ \varphi$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
$tg\ \varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\ \varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tabela 5-3 – Wzory redukcyjne

Przykład 1

$$sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\alpha$$

Funkcja przeszła w kofunkcję, bo kąt zmienił się o $\frac{\pi}{2}$. Znak z prawej strony jest dodatni (+), bo kąt $\frac{\pi}{2}+\alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam sinus jest dodatni.

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

Funkcja nie zmieniła się, bo kąt zmienił się o π. Znak z prawej strony jest ujemny (–), bo kąt π – α jest kątem drugiej ćwiartki, a tam cosinus jest ujemny.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
$sin\ \alpha$	+	+	−	−
$cos\ \alpha$	+	−	−	+
$tg\ \alpha$	+	−	+	−
$ctg\ \alpha$	+	−	+	−

Zapamiętaj wierszyk!

W pierwszej wszystkie są dodatnie,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus.

Tabela 5-4 – Znaki funkcji trygonometrycznych

Przykład 2

$$sin150° = sin(180° - 30°) = sin30° = \frac{1}{2}$$

$$cos420° = cos(4 \cdot 90° + 60°) = cos60° = \frac{1}{2}$$

$$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$$

$$cos\frac{3}{4}\pi = cos135° = cos(180° - 45°) = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ZADANIA

5.5.1 Oblicz:

a) $sin120°$ b) $cos315°$ c) $tg(-840°)$

d) $sin\frac{\pi}{3}$ e) $ctg(-2\pi)$ f) $2sin^2 225° - ctg330° \cdot tg450°$

Odpowiedź: a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) Nie ma rozwiązania; f) $1 + \sqrt{3}$.

5.5.2 Korzystając z wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $\frac{cos135° + tg330°}{ctg225° \cdot sin840°}$ b) $sin\frac{5\pi}{4} \cdot tg\frac{4\pi}{3} + cos2\frac{1}{2}\pi$

Odpowiedź: a) $\frac{-\sqrt{6}-2}{3}$; b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

5.5.3 Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

5,6 Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Teraz nauczę się:

Stosować proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1, \; tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznaczyć wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Jedynka trygonometryczna

$$\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Uzasadnimy wzór dla sinusa i cosinusa kąta ostrego.

$sin\alpha = \frac{a}{c} sin\alpha = \frac{a}{c}$, $cos\alpha = \frac{b}{c} cos\alpha = \frac{b}{c}$

$a^2 + b^2 = c^2$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

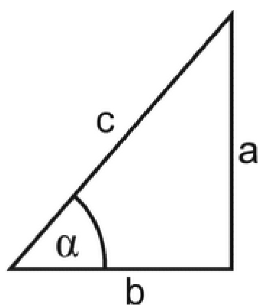
$$a^2 + b^2 = c^2 /: c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$



Rysunek 5-5 – Twierdzenie Pitagorasa

Wniosek:

Jeżeli $\alpha \epsilon (0°; 90°)$, to:

$$\boldsymbol{sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha}$$

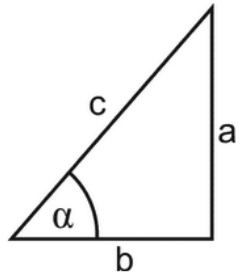
$$\boldsymbol{\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = ctg\alpha}$$

Przykład 1

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$,

b) $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$.



Niech będzie dany trójkąt prostokątny:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha : cos\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha$,

b) $\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha : sin\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = ctg\alpha$.

Ponieważ wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta ostrego są liczbami odwrotnymi, to:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

Z tego wynika, że $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$

Przykład 2

Wiedząc, że $cos\alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2}$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

Przykład 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną: $sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - \left(\frac{sinx}{tgx}\right)^2$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie:

$$\frac{sinx}{tgx} = sinx : tgx = sinx : \frac{sinx}{cosx} = sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} = cosx$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - (cosx)^2$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx(1 - cos^2x) - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx \cdot sin^2x - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sin^3x - cos^2x$$

$$L = P$$

ZADANIA

5.6.1 Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych:

a) $cos\alpha = \frac{1}{4}$,

b) $tg\alpha = 2\sqrt{2}$.

Odpowiedź: a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, tg\alpha = \sqrt{15}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, cos\alpha = \frac{1}{3}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.6.2 Oblicz $a + b$, gdy $a = 1 - cos^2\alpha, b = tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 45°$.

Odpowiedź: 1.

5.6.3 Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Odpowiedź: $sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{1}{2}$.

5.7 Zastosowanie trygonometrii

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać wiadomości i umiejętności w zadaniach oraz problemach życia codziennego

Przykład 1

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta? Jaką długość ma wysokość opuszczona na tę podstawę?

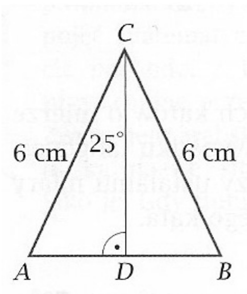
Wartość $\sin 25°$ odczytujemy z tablic.

$\sin 25° \approx 0{,}4226$

$|AB| = 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5{,}1$

$cos25° = \frac{|CD|}{6}$

$|CD| = 6 \cdot cos25°$



Wartość $\cos 25°$ odczytujemy z tablic.

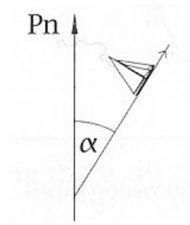
$cos25° \approx 0{,}906$

$|CD| = 6 \cdot 0{,}906 \approx 5{,}4$

Odpowiedź: Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości, a wysokość około 5,4 cm.

Przykład 2

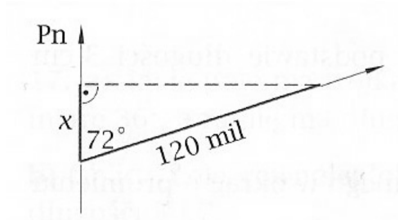
Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°.
O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).



Rysunek pomocniczy do zadania

$$\frac{x}{120} = cos72°$$

$$x = 120 \cdot cos72°$$



Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tablic.

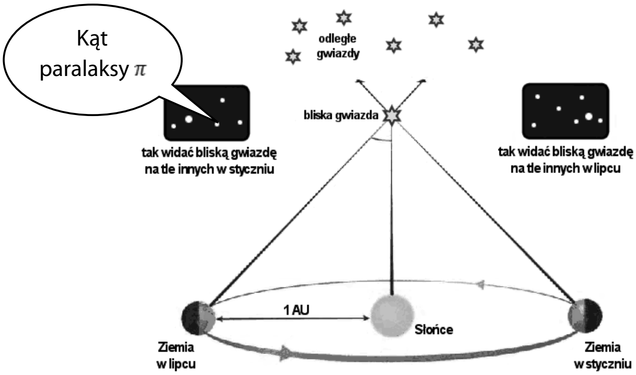
$$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$$

Odpowiedź: Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

Ciekawostka

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się przy pomiarze odległości do trudno dostępnych obiektów, np. do wyznaczania odległości obiektów astronomicznych przy pomocy zjawiska paralaksy.
Paralaksa to zjawisko pozornej zmiany położenia obiektu oglądanego z dwóch kierunków.

W praktyce najłatwiej zobaczyć zmianę położenia na tle innych odległych obiektów. Paralaksę geocentryczną stosuje się do pomiarów odległości w Układzie Słonecznym, wówczas za bazę przyjmuje się promień Ziemi. Do wyznaczenia odległości do innych gwiazd, za bazę obiera się jedną jednostkę astronomiczną, czyli średnią odległość Ziemia – Słońce (149,6 mln km). Można zmierzyć położenie danej gwiazdy na tle odległych gwiazd w dwóch momentach czasu, gdy Ziemia jest na przeciwnych miejscach na swojej orbicie. Otrzymujemy wtedy podwojony kąt paralaksy (2π).



Rysunek 5-6 – Kąt paralaksy

Kąt ten jest na tyle mały, że wyrażamy go w sekundach łuku i oznaczamy symbolem π. **Jedna sekundy łuku,** czyli odległość, z jakiej obiekt o średnicy równej średniej odległości Ziemi od Słońca miałby rozmiary jednej sekundy łuku na niebie[66].

Ciekawostka

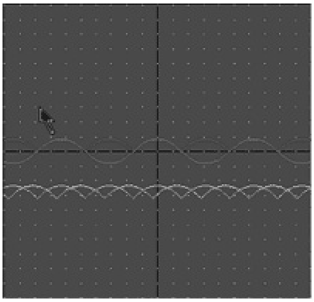
Parsek – jednostka odległości używana w astronomii. Jest to odległość, dla której paralaksa roczna położenia Ziemi, widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity, wynosi 1 sekundę łuku. Parsek można równoważnie opisać jako odległość, z jakiej połowa wielkiej osi orbity ziemskiej (czyli 1 j.a.) jest widoczna jako łuk o długości 1 sekundy kątowej.
Słowo parsek zostało wprowadzone przez Herberta Turnera w XIX wieku. Utworzył on je jako zbitkę pierwszych sylab słów **par**alaksa i **sek**unda. Parsek oznaczany jest skrótem **pc** lub **ps**. Używanie drugiego ze skrótów nie jest wskazane, gdyż jest on identyczny ze skrótem dla pikosekundy (1 ps = 10^{-12} s) [67].

1 pc ≈ 3,2616 roku świetlnego ≈ **206265 jednostek astronomicznych ≈ 3,086·10^{16}** m

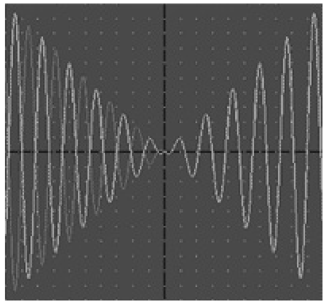
66 74 www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk, 19.04.2013.
67 www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek, 20.04.2013.

Ciekawostka

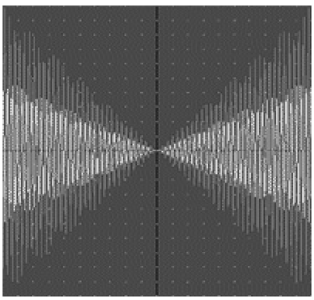
$y = sin(cos(x))$



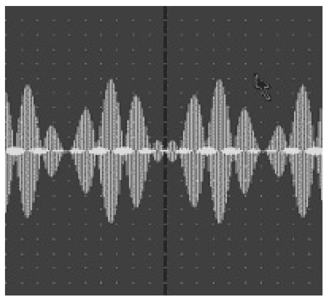
$y = -x \cdot cos(100x)$



$y = x \cdot sin(20x)$



$y = 5sin(0,5x) \cdot cos(50x)$



Zadania

5.7.1 Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Ramię tego trapezu ma długość $10\ cm$, a obwód wynosi $40\ cm$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

Odpowiedź: $2\ cm, 18\ cm$.

5.7.2 Oblicz wysokość drzewa, które daje cień o długości 17 m przy wysokości słońca 54°. *Wysokość słońca – kąt między kierunkiem promieni słonecznych a płaszczyzną horyzontu.*

Odpowiedź: 23,4 m.

5.7.3 Najbardziej „stroma" kolej na świecie znajduje się w Gwatemali. Tory biegną pod kątem 52°. Na jaką wysokość wjedziesz po przejechaniu 1000 m?

5.7.4 Pod jakim kątem nachylona jest do podłoża drabina o długości 10 m, jeżeli sięga ona na wysokość 8 m? Jak wysoko sięgnie ta drabina, jeżeli kąt między nią a ziemią będzie wynosił 60°? ($\sqrt{3} \approx 1,73205$)

5.7.5 Obserwator stoi na stromym brzegu na wysokości 35 m nad wodą. Widzi żaglówkę pod kątem 12° do poziomu wody. Jak daleko jest ta żaglówka od brzegu?

5.7.6 Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi znajduje się Księżyc, jeżeli kąt paralaksy wynosi $\pi = 57'$. Przyjmij promień Ziemi R = 6378 km.

Odpowiedź: d = $\frac{R}{tg\pi}$ = 384000 km.

5.7.7 Oblicz kąt paralaksy najbliższej nam gwiazdy Proxima Centauri, znajdującej się w odległości 4,3 lat świetlnych od Ziemi. Podpowiedź: Rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu jednego roku. (Jaką drogę pokona światło? $c \approx 3\cdot 10^8 \frac{m}{s}$)

Odpowiedź: d = 4,3 lat świetlnych = 4,3 · 365,35· 24 ·3600s · 3 · $10^8 \frac{m}{s}$ = 4,1 · 10^{16} m

R = 149 600 000 km = 1,496 · 10^{11} m

$tg\alpha = \frac{r}{d} \approx 6{,}36 \cdot 10^8$

$\alpha = (3{,}6 \cdot 10^{-6})^\circ$

5.7.8 Po upływie 6 miesięcy pozycja obserwowanej gwiazdy zmieniła się, tak że jej kąt paralaksy wyniósł 0,00013°. Oblicz odległość gwiazdy od Ziemi, wiedząc, że promień orbity Ziemi wynosi 1,496 · 10^8 km. Odległość wyraź w kilometrach i parsekach.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{r}{l}$, $l = \frac{r}{tg\alpha}$ = 6,6 · 10^{13} km = 2,14 pc.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Kąt α jest ostry i $sin\,\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy $cos\,\alpha$ jest równy:[68]

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{65}}{9}$

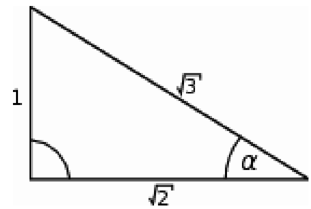
2. Dany trójkąt jest prostokątny (patrz rysunek). Wtedy $tg\,\alpha$ jest równy:

a) $\sqrt{2}$,

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



3. Kąt α jest ostry i $tg\,\alpha$ = 4/3. Oblicz $sin\,\alpha + cos\,\alpha$.

68 Zadania: 1, 2, 3 zaczerpnięto z próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

4. Kąt α jest ostry i $sin\ \alpha = 3/4$. Wartość wyrażenia $2 - cos^2\alpha$ równa się:[69]

a) $\frac{25}{16}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{17}{16}$ d) $\frac{31}{16}$

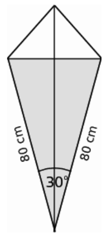
5. Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa:

a) 3200 cm^2

b) 6400 cm^2

c) 1600 cm^2

d) 800 cm^2



6. Kąt α jest ostry i $tg\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $cos\ \alpha$.

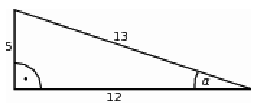
7. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy:[70]

a) $cos\alpha = \frac{5}{13}$

b) $tg\alpha = \frac{13}{12}$

c) $cos\alpha = \frac{12}{13}$

d) $tg\alpha = \frac{12}{5}$



8. Kąt $\boldsymbol{\alpha}$ jest ostry i $cos\alpha = \frac{5}{13}$, wtedy:[71]

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin^{\alpha} = \frac{12}{5}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

9. Wartość wyrażenia $\frac{sin^2 38^\circ + cos^2 38^\circ - 1}{sin^2 52^\circ + cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ d) 1

10. **(2 pkt)** Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

11. Liczba $tg\,30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa:[72]

a) $\sqrt{3} - 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i |AB| = 13 oraz |BC| = 13. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

a) $\frac{12}{13}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{13}{12}$

---

69 Zadania: 4, 5, 6 zaczerpnięto z matury z matematyki, CKE, maj, 2010.
70 Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
71 Zadania: 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2011.
72 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.

13. Kąt α jest ostry i $cos\,\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ jest:[73]

a) mniejsza od –1 b) równa 1 c) większa od 1 d) równa 0

14. Kąt α jest ostry i $sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy $cos\alpha$ jest równy:[74]

a) $\frac{45}{49}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

15. Kąt α jest ostry i $sin\,\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas:[75]

a) $\cos\alpha = \sin\alpha$ b) $\cos\alpha > \sin\alpha$

c) $\cos\alpha < \sin\alpha$ d) $\cos\alpha = 1 - \sin\alpha$

16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy:[76]

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{4}{3}$

17. Wyrażenie $\frac{1-sin^2\alpha}{\frac{1}{tg^2\alpha}}$, gdzie α jest kątem ostrym, można zapisać w postaci:

a) $sin2\,\alpha$ b) $\frac{cos^4\alpha}{sin\alpha}$ c) $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$ d) $\frac{1}{sin\alpha}$

18. **(2 pkt.)**Wykaż, że jeżeli kąt α jest kątem ostrym i $tg\,\alpha = 2$, to $cos\,\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. **(2 pkt)** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

20. Oblicz wartość wyrażenia $tg^2\alpha - 3cos^2\alpha$, jeżeli $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem ostrym.

21. **(4 pkt)** Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$. Oblicz wartość $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$ i $tg\,\alpha$[77].

22. **(2 pkt)** Drabina o długości 2,5 m oparta o mur styka się z nim na wysokości 2 m. Na jakiej wysokości zetknie się z murem drabina o długości 3,5 m, jeśli obie drabiny nachylone są pod takim samym kątem do podłoża?

23. **(2 pkt)** Posługując się wzorem: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, oblicz $sin75°$.

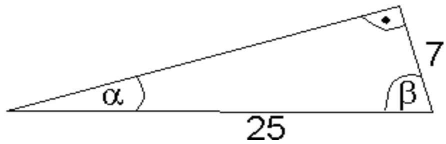
24. **(2 pkt)** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$[78].

25. **(2 pkt)** Oblicz $a–b$, gdy $a = sin^4\alpha - cos^4\alpha$, $b = 1 - 4sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

---

73 Zadania: 13, 14 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2010.
74 Próbna matura z Operonem, listopad, 2009.
75 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2011.
76 Zadania:18, 19, 20 zaczerpnięto z arkusza maturalnego, OKE Poznań, styczeń, 2013.
77 Zadania: 21, 22, 23 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
78 Zadania: 24, 25, 26, 27 zaczerpnięte z informatora maturalnego, CKE, 2007.

26. (**4 pkt**) Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia $(tg\beta - \frac{1}{sin\beta})^2 \cdot cos\alpha$.



27. (**4 pkt**) Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{ctg\alpha - tg\,\alpha}{ctg\alpha + tg\,\alpha}$.

28. (**5 pkt)** Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α[79].

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $sin\alpha - tg\alpha < 0$,

b) Dla $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

79 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2009.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka, Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań*.
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty*, Matura 2009 – Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb
2. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png
3. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png
4. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png
5. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
7. www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza
8. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
9. www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie
10. www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html
11. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
12. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
13. www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi
14. www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent
15. www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf
16. www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy
17. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna
18. www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna
19. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd
21. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
22. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
24. www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
25. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
28. www.wiking.edu.pl/article.php?id=269
29. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf