ace

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały pomocnicze dla nauczyciela

Część 2.
Matematyka kl. II LO

Projekt ACE – aktywna, kreatywna
i przedsiębiorcza młodzież. Innowacyjne
programy kształcenia w obrębie
ekonomii i przedsiębiorczości

Lublin 2013

Program jest zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego dla liceów ogólnokształcących w zakresie podstawowym zgodnie z: Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz. U. poz. 977) oraz Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 7 lutego 2012 r. w sprawie ramowych planów nauczania w szkołach publicznych (Dz. U. poz. 204).

Zespół ekspercki:
Katarzyna Ługowska – psycholog
Piotr Barszcz – psycholog
Kinga Sarad-Deć – pedagog
Joanna Rusinkiewicz – pedagog
Milena Potręć – nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna – nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman – specjalista ds. technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń – specjalista ds. technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak – specjalista ds. mediów
Grzegorz Kozak – specjalista ds. mediów
Agnieszka Wróblewska – specjalista ds. przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda – specjalista ds. przedsiębiorczości
Zbigniew Biały – specjalista ds. ekonomii
Ewa Oleksiejczuk – specjalista ds. ekonomii
Agata Linkiewicz – specjalista ds. matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch – specjalista ds. matematyki
Katarzyna Korona – doradca metodyczny
Dorota Ulikowska – doradca metodyczny

Koordynator merytoryczny:
dr Agnieszka Lewicka-Zelent

Korekta:
Elżbieta Amborska

Łamanie i skład:
Info Studio, Lublin

Projekt okładki:
Maciej Wasilewski

ISBN 978-83-64395-13-0

Druk i oprawa:
MULTIPRESS G. Wodecki, D. Wodecka s.c.

SPIS TREŚCI

Uwaga: Treści rozszerzone zostały oznaczone: *

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Układy równań pierwszego stopnia

1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony;
- nieoznaczony;
- sprzeczny.

Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie.**

Przykład 1

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość $x = 2$ do pierwszego równania:

$$2 + y = 3$$
$$y = 1$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

➡ Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania.**

Przykład 3

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \,/\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-2 \end{cases}$$

$$0=-1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax+by=A \\ cx+dy=B \end{cases}$$

Przykład 4[1]

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2}=\dfrac{2-y}{4}+6 \quad /\cdot 4 \\ 6(x-1)-2x+4=y-8 \end{cases}$$

Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{3x}{2}=4\cdot\dfrac{2-y}{4}+4\cdot 6 \\ 6x-6-2x+4=y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3x=2-y+24 \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 6x=26-y \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" i z „y" na lewo, a liczby na prawo.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-8+2 \end{cases}$$

Wykonujemy końcowe obliczenia.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-6 \end{cases}$$

1 http://www.matematykam.pl/upraszczanie_ukladu.html, 17.02.2013r

KRÓTKIE PRZYPOMNIENIE Z GIMNAZJUM.

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODA PODSTAWIANIA

Przykład 5[2]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} \boxed{2x + 4y = 10} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} \boxed{2x = 10 - 4y} \quad / \div 2 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} \boxed{x = 5 - 2y} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać: x = 5 - 2y. Uzyskane wyrażenie (5 – 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x = \boxed{5 - 2y} \\ -3(5 - 2y) - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + 6y - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + y = -13 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = -13 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

2 http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej y=2, do wcześniej wyprowadzonej postaci: x = 5 - 2y
Po podstawieniu obliczamy drugą niewiadomą (x).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu niewiadomych.

METODA PRZECIWNYCH WPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 6[3]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą x (bo ma najmniejszą wartość w obu równaniach).

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 4y = 10 & /\cdot 3 \\ \boxed{3x} - 5y = -7 & /\cdot (-2) \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest 6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 – w ten sposób w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „–" (tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaliśmy mnożenie równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia, przez liczby określone w poprzednim kroku.

3 http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases} \quad +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x - 6x} + 12y + 10y = 30 + 14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x" skracają się do „0"

$$12y + 10y = 30 + 14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y = 44$$
$$y = 2$$

$$2x + 4y = 10$$
$$2x + 4 \cdot 2 = 10$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik y=2).

$$2x + 8 = 10$$
$$2x = 10 - 8$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

1.2 Graficzna interpretacja układów równań

Teraz nauczę się wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1[4]

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

4 http://www.matematykam.pl/metoda_graficzna.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x” na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 & / \div 2 \\ -y = -3x + 8 & / \div (-1) \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y” (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu (x , y), to nasze rozwiązanie.

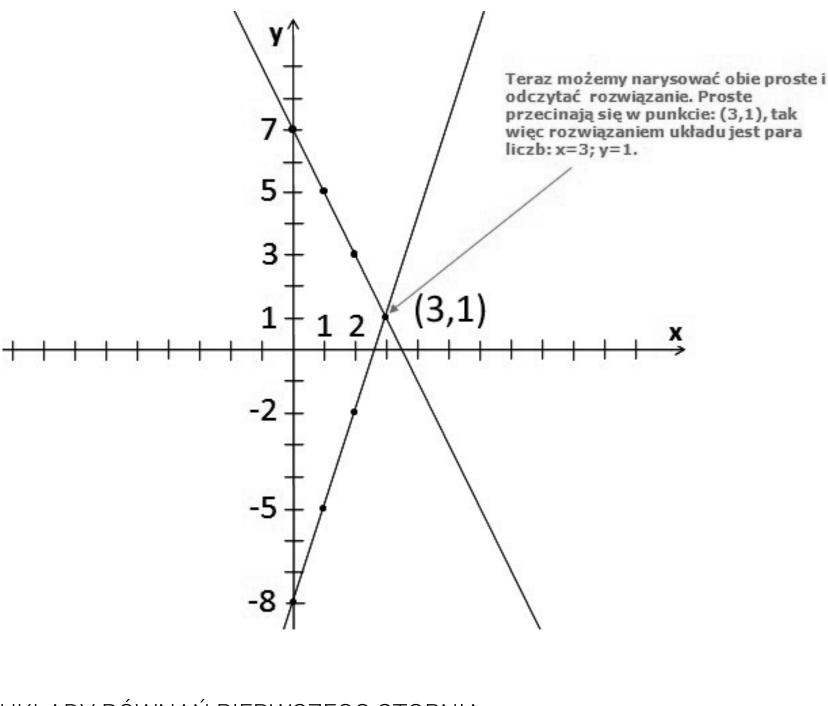
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	7	5	3

x	0	1	2
y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ZADANIA

1.1.1 Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 5x + 2\frac{1}{2}y = 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}3 \\ 2x + 5y = 8{,}6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 0{,}2y = 35 \\ 2{,}5x - 5y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \dfrac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1 - 0{,}3(y - 2) = \dfrac{x+1}{5} \\ \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{4x+9}{20} - 1{,}5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - 2y) = -7x - 2 \\ 5(x + 1) - 2(3 - y) = -4(x + 2) \end{cases}$

n) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5} + \dfrac{5x-3y}{3} = x + 1 \\ \dfrac{2x-3y}{3} + \dfrac{4x-3y}{2} = y + 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

a) Układ równań nieoznaczony

b) Układ równań sprzeczny

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, układ równań oznaczony

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, układ równań oznaczony

e) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

f) $\begin{cases} x = 1{,}3 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

g) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 40 \end{cases}$, układ równań oznaczony

h) $\begin{cases} x = 3\frac{3}{23} \\ y = -1\frac{5}{23} \end{cases}$, układ równań oznaczony

i) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

j) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

k) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$, układ równań oznaczony

l) $\begin{cases} x = 5\frac{3}{11} \\ y = -1\frac{9}{11} \end{cases}$, układ równań oznaczony

m) $\begin{cases} x = -\frac{13}{15} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$, układ równań oznaczony

n) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

Wnioski:

- Dla układu **oznaczonego** proste przecinają się w 1 punkcie.
- Dla układu **nieoznaczonego** proste pokrywają się.
- Dla układu **sprzecznego** proste są równoległe i nie pokrywają się.

1.1.3. Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$

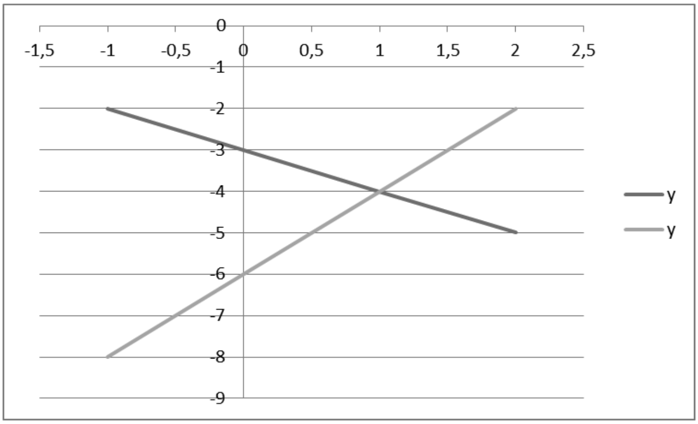
b) $\begin{cases} 3x + y = -(x-8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$

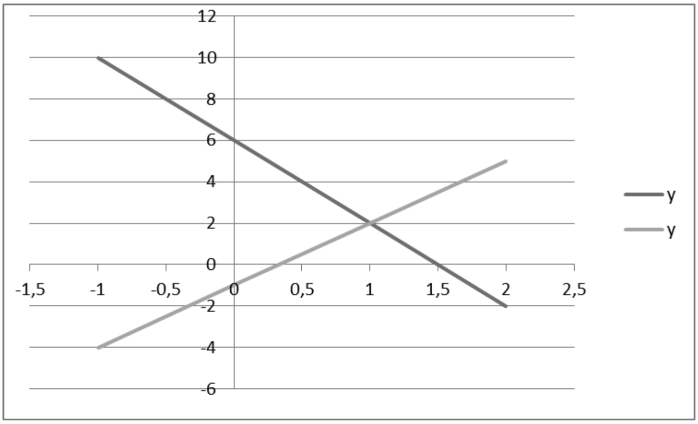
d) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

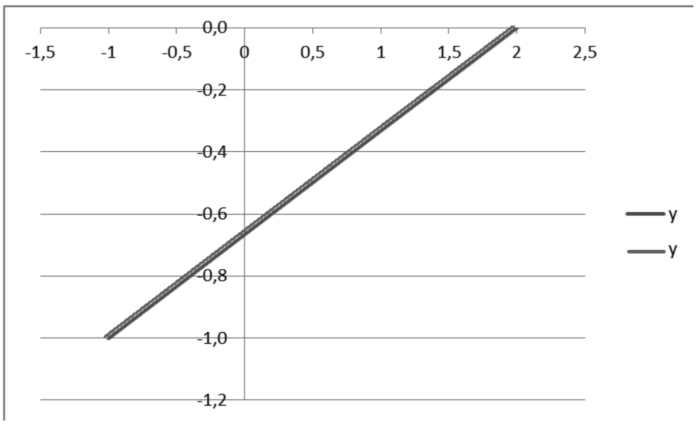
a) $x = 1$ $y = -4$



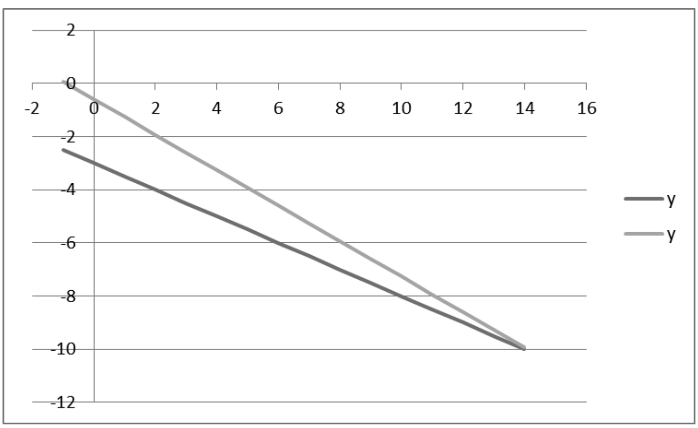
b) $x = 1$ $y = 2$



c) rozwiązaniem jest R



d)



$x = 13$, $y = -9{,}3$

1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową 10 $\frac{m}{s}$ i poruszał się z przyspieszeniem 1 $\frac{m}{s^2}$. Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość 20 $\frac{m}{s}$ i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 10\frac{m}{s}, v = 20\frac{m}{s}, a = 1\,\frac{m}{s^2}, s_0 = 100$ m

Szukamy: t, s

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

Odpowiedź: $t = 10$ s, $s = 250$ m

Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się 120 m³ wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

Odpowiedź:

v_1 – objętość pierwszej rury

v_2 – objętość drugiej rury

p_1 – przepustowość pierwszej rury

p_2 – przepustowość drugiej rury

t_1 – czas napełniania przez pierwszą rurę

t_2 – czas napełniania przez drugą rurę

$v = p \cdot t$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$p_1 . 2 + p_2 = 120$

$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$

Odpowiedź: Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi 40 m³

ZADANIA

1.1.3 W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością 20 $\frac{m}{s}$ przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem 2 $\frac{m}{s^2}$ w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_1 = 20 \frac{m}{s}$, $a = 2\frac{m}{s^2}$

Szukamy: s, t, v_2

Układamy równania ruchu pojazdów. Zauważ, że drogi pojazdów są jednakowe.

$$\begin{cases} s = v_1 t \\ s = \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie:

$v_1 t = \frac{at^2}{2}$ stąd $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

Odpowiedź: $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

1.1.4 Z balkonu znajdującego się na wysokości 50 m spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?

Rozwiązanie

Mamy dane: $h = 50$ m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$

Szukamy: t, v

Doniczka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ziemskim g.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} \mathrm{h} = \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{cases}$$

Odpowiedź:

$t = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ s

$v = 31{,}6 \frac{m}{s}$

1.1.5 Samolot podczas lądowania z szybkością 200 $\frac{m}{s}$, wyhamował na drodze 1000 m.

Z jakim opóźnieniem lądował samolot?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 200 \frac{mm}{s\ s}$, $s = 1500$ m, $v_k = 0$

Szukamy: a

Samolot poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Układamy równania ruchu:

$$\begin{cases} s = v_0 - \frac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

$t = \frac{v_0}{a}$, podstawiamy do pierwszego równania

$s = \frac{v_0^2}{2a}$, stąd $a = \frac{v_0^2}{2s} = 20 \frac{m}{s^2}$

Odpowiedź: $a = 20 \frac{m}{s^2}$

1.1.6 Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?

Odpowiedź: 2:5

1.1.7 Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty". Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Odpowiedź: Stefan miał 10 zł, a Jan 8 zł.

1.1.8 Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?

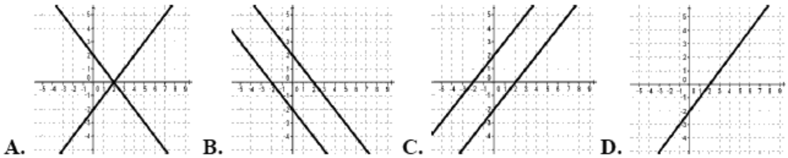
Odpowiedź: 2 długopisy i 9 ołówków

1.1.9 Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł . W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje 1 m^3 wody zimnej, a ile ciepłej?

Odpowiedź: 1 m^3 ciepłej wody kosztuje 6 zł, a zimnej 2 zł

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[5] Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:



Odpowiedź: c

2.[6] Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

Odpowiedź: d

3.[7] Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$y = -2x - \frac{1}{4}$ i $4x - 4y + 5 = 0$

Odpowiedź: (–1/2,3/4)

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

a) $x = 1, y = -1$ b) $x = -1, y = 1$ c) $x = -1, y = -1$ d) $x = 1, y = 1$

Odpowiedź: d

5.[8] Aby układ $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ był układem nieoznaczonym ,należy w miejsce a wstawić:

a) 10 b) –5 c) 5 d) –6

Odpowiedź: c

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia x – liczba uczniów klasy I, y – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

a) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}08x + 0{,}075y = 51 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}80 + 0{,}75y = 51 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0{,}8x + 0{,}75y = 66 \end{cases}$

Odpowiedź: c

5 Zadanie 1: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 18.02.2013.
6 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.
7 Zadanie 3, 4: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.
8 Zadanie 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

Odpowiedź: a

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

Odpowiedź: 15 kg wafli po12 zł i 5 kg wafli po 8 zł

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odpowiedź: $a = 6$, $b = 7$ lub $a = 7$, $b = 6$

2 Równania i nierówności kwadratowe

2.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowmi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$, bo można przeształcić do postaci: $3x^2 - 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$, gdzie $a = 5$,$b = 3$, $c = 7$
- $8x = 3x^2 + 1$, bo można przeształcić do postaci $3x^2 - 8x + 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = -8$, $c = 1$
- $x^2 + 5x = 0$, gdzie $a = 1$, $b = 5$, $c = 0$

Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + c = 0$, gdy $a \neq 0,\ b = 0$ i $c \neq 0$

- $x^2 - 16 = 0$
  $x^2 = 16$
  $x = 4$ lub $x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$
  $-3x^2 = 6 / \div(-3)$
  $x^2 = -2$ sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x-2)^2 = 4(1-x)$
  $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$
  $x^2 = 0$
  $x = 0$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx = 0$, gdy $a \neq 0, b \neq 0$ i $c = 0$

- $5x^2 - 3x = 0$

  $x(5x-3) = 0$

  $x = 0 \text{ lub } 5x - 3 = 0$

  $x = 0$ lub $x = \frac{5}{3}$

- $-5x - 4x^2 = 0$

  $-x(5+4x) = 0$

  $-x = 0 \text{ lub } 5 + 4x = 0$

  $x = 0 \text{ lub } 4x = -5$

  $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{4}$

ZADANIA

2.4.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2 + 16 = 0$	b) $-\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$	c) $2x^2 + 8 = 0$
d) $2x^2 - 5x = 0$	e) $-3x^2 + 6x = 0$	f) $-x^2 - 2 = 0$
g) $x(x-3) = 0$	h) $(x+2)(x-4) = 0$	i) $\frac{1}{2}x^2 = 0$
j) $5x^2 - 7x = 0$	k) $-3x^2 + 1 = 0$	l) $5x^2 = 1$
m) $-x^2 - 3 = 0$	n) $9x^2 + \frac{x}{3} = 0$	o) $x^2 = (1-x)(1+x)$

Odpowiedź:

a) $x = -4$ lub $x = 4$	b) $x = -3$ lub $x = 3$	c) brak rozwiązań
d) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$	e) $x = 0$ lub $x = 2$	f) brak rozwiązań
g) $x = 0$ lub $x = 3$	h) $x = -2$ lub $x = 4$	i) $x = 0$
j) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{5}$	k) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	l) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
m) brak rozwiązania	n) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$	o) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

Teraz nauczę się:

- obliczać wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a $\neq 0$.

Aby rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, najpierw obliczamy wartość wyrażenia $\Delta = b^2 - 4ac$

- jeśli $\Delta \rangle 0$, to równanie ma dwa rozwiązania : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{-b}{2a}$;
- jeśli $\Delta \langle 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole Δ i δ to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga – mała litera delta. Z symbolem δ spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

Przykład 1

- $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$
$$x_1 = \frac{-(-13)-7}{2 \cdot 6} = \frac{13-7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-(-13)+7}{2 \cdot 6} = \frac{13+7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{5}{3}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

- $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -23$$

Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3

➢ $6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{4}{2 \cdot 6} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

Rozwiązywanie równań, prowadzące do równań kwadratowych.

Równanie typu $ax^4 + bx^2 + c = 0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym.**

Przykład 4

$x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

$(x^2)^2 + 6x^2 + 5 = 0$

podstawiam $x^2 = t$ w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać

$t^2 + 6t + 5 = 0$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$\Delta > 0$ – wyznaczamy dwa miejsca zerowe

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Wracamy do podstawienia $x^2 = t$

$x^2 = -5 \ \vee \ x^2 = -1$

$x \in \emptyset \qquad x \in \emptyset$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań = Ø)

Przykład 5

Rozwiąż równania:

a) $5x - \frac{15}{x} = 10$

Rozwiązanie

Założenie: $x \neq 0$

$Df : x \in R / \{0\}$

$5x - \frac{15}{x} = 10 / \cdot x$

$5x^2 - 15 = 10x$

$5x^2 - 10x - 15 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)$

$\Delta = 400$

$\sqrt{\Delta} = 20$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 20}{10} = -1$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 20}{10} = 3$

b) $\frac{8}{4-x} = \frac{x}{x-4}$

Założenie:

$4 - x \neq 0$ i $x - 4 \neq 0$

$x \neq 4$ i $x \neq 4$

$Df : x \in R / \{4\}$

$8 \cdot (x-4) = (4-x) \cdot x$

$8x - 32 = 4x - x^2$

$x^2 + 4x - 32 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$

$\sqrt{\Delta} = 12$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 12}{2} = -8$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$

$x_2 \notin Df$, stąd rozwiązaniem jest $x_1 = -8$

ZADANIA

2.2.1. Rozwiąż równania:

a) $-x^2-2=0$ b) $x\sqrt{3}-\sqrt{2}x^2=0$ c) $x(x-3)=0$

d) $(x-4)(x+2)=0$ e) $(x-2)^2-9=0$ f) $16-(x+3)^2=0$

g) $(3x+2)^2=25$ h) $x^2+6x+5=0$ i) $x^2-10x+25=0$

j) $x^2+2x-120=0$ k) $12x^2+7x-12=0$ l) $3x^2-7x+2=0$

m) $9x^2-24x-20=0$ n) $-3x^2+1{,}5x+54=0$

Odpowiedź:

a) Brak rozwiązania b) $x=0$ lub $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $x=0$ lub $x=3$

d) $x=-2$ lub $x=4$ e) $x=-1$ lub $x=5$ f) $x=-7$ lub $x=1$

g) $x=-\frac{7}{3}$ lub $x=1$ h) $x=-5$ lub $x=-1$ i) $x=5$

j) $x=-12$ lub $x=10$ k) $x=-\frac{4}{3}$ lub $x=\frac{3}{4}$ l) $x=\frac{1}{3}$ lub $x=2$

m) $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\frac{10}{3}$ n) $x=-4$ lub $x=\frac{9}{2}$

2.2.2 Rozwiąż równania:

a) $(3x-2)^2+2=6$ b) $3(4x-1)^2+1=28$

c) $2(5x-2)^2+5=13$ d) $x(3x-5)=12$

e) $(2x-5)^2+(x+4)^2=41$ f) $\frac{x(x-2)}{5}-3x=2x^2+\frac{x(x+1)}{3}$

g) $(x-2)(x+5)-(x-7)(x+1)=(x+2)(x-3)$ h) $3x^2-6x-24=0$

i) $4x^2-20x+25=0$ j) $x^2-2x+4=0$

k) $4x^2-4x-1=0$ l) $3x^2+2x+2=3x+4x^2-3$

Odpowiedź:

a) 0 lub $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ lub 1 c) 0 lub $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{3}$ lub 3

e) 0 lub $\frac{12}{5}$ f) $-\frac{7}{4}$ lub 0 g) $5-2\sqrt{7}$ lub $5+2\sqrt{7}$ h) –2 lub 4

i) $\frac{5}{2}$ j) Brak rozwiązań k) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ l) Brak rozwiązań

2.2.3 Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+3}{x-1}=0$ b) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$ c) $\frac{x+1}{4x}=\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x-3}{6x}=\frac{2}{2x+3}$ e) $\frac{5-x}{5x}=\frac{2}{5x}$ f) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{-3}{3x-1}$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$ b) $x=-1$ lub $x=3$

c) $x=2-\sqrt{5}, x=2+\sqrt{5}$ d) $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}, x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=-5-5\sqrt{2}, x=-5+5\sqrt{2}$ f) równanie sprzeczne

2.2.4 Rozwiąż równania:

a) $x^4-4=0$ b) $x^4-4x^2=0$ c) $x^4-x^2-2=0$

d) $x^4-5x^2+4=0$ e) $x^4-4x^2+4=0$ f) $x^4+2x^2-3=0$

g) $x^4-x^2+1=0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą $x^2=t$, dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe)

Odpowiedź:

a) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ b) 0, –2,2 c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

d) –1,1, –2,2 e) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ f) –1, 1

g) brak pierwiastków rzeczywistych

2.3 *Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

TWIERDZENIE[9]

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$ ma rozwiązania x_1, x_2, to:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

9 http://pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete’a, 18.02.2013.

Dowód

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4a\right)}{4a^2}=\frac{4a}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

UWAGA!

Wzory Viete'a mają szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

Jeżeli...

- $\Delta<0$ – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta=0$ – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta\geq 0$ – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta>0$ – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

- $x_1\cdot x_2<0$ – to są one różnych znaków,
- $x_1\cdot x_2>0$ – to mają one takie same znaki,
- $x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2>0$ – to są one dodatnie,
- $x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2<0$ – to są one ujemne.

Przykład 1

Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji $y=x^2+5x+6$

Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości *a, b, c* do wzorów:

$$x_1+x_2=\frac{-5}{1}=-5$$

$$x_2\cdot x_2=\frac{6}{1}=6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba –5, a iloczynem liczba 6?". Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb –2 i –3.

Rozwiązaniami są więc: $x_1=-2$ i $x_2=-3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

2.3.1 Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a oraz zastosuj je, aby uzyskać:

a) kwadrat sumy pierwiastków

b) sumę kwadratów pierwiastków

c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków

d) kwadrat różnicy pierwiastków

e) sumę sześcianów pierwiastków

Odpowiedź:

a) $(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)$

b) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$

d) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}$

e) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$
$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right)$

2.3.2 Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2 - 300x - 200 = 0$

c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2 - x + 21 = 0$

Odpowiedź:

a) $-\frac{115}{203}$ b) 90400 c) $\frac{43}{441}$

Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m = 0$ ma:

a) dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$

Z założenia $m^2 + 4m > 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$

b) jeden pierwiastek

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$

Z założenia $m^2 + 4m = 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m = -4$, $m = 0$

c) nie ma pierwiastków

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$

Z założenia $m^2 + 4m < 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m \in (-4;0)$

ZADANIA

2.3.3 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a) $-2x^2 + 3mx - 1 = 0$ b) $mx^2 + 2x + m = 0$

Odpowiedź:

a) $m = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $m = -1$

2.3.4 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 1 = 0$ ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: $m \in (-\infty;2\sqrt{2})$

2.3.5 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania o różnych znakach.

Odpowiedź: $m \in (-1;2)$

2.3.6 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 + (m + 2)x + m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Odpowiedź: brak rozwiązań

2.3.7 Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$ jest najmniejsza.

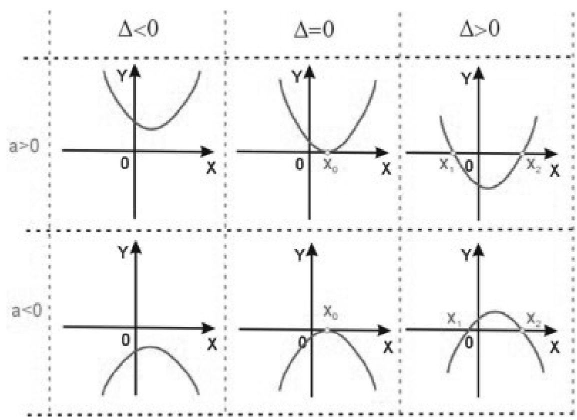
Odpowiedź: $m = 4$

2.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego.** Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika a oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

<u>**Przykład 1**</u>[10]

$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Krok 1. Wyznaczamy miejsca zerowe, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

10 http://www.matematykam.pl/ , 19.02.2013.

Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia.
Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

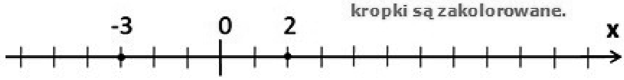
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Krok 2. Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

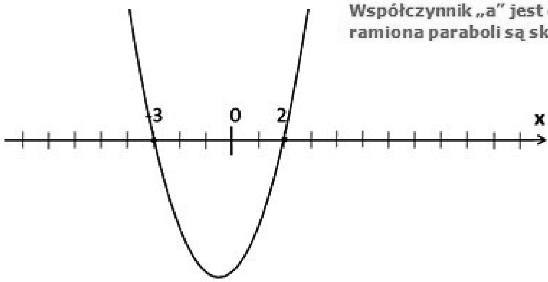
- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

Ze względu na znak nierówności (≥) kropki są zakolorowane.



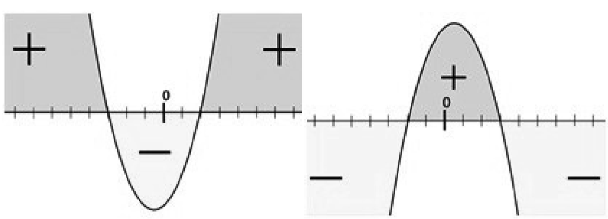
- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istotny jest jedynie kierunek ramion paraboli.

Współczynnik „a" jest dodatni (2), dlatego ramiona paraboli są skierowane w górę.



Krok 3. Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zacznijmy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę).

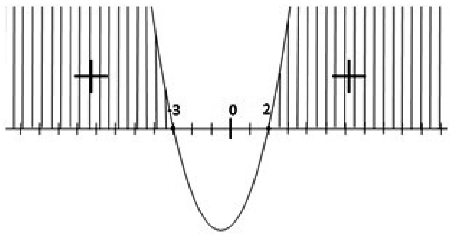
Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy" (<) lub „mniejszy lub równy" (≤), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy" (>) lub „większy lub równy" (≥), zakreślamy obszar dodatni.

W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem: ≥, dlatego zakreślimy obszar dodatni.

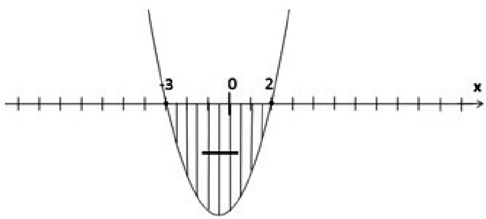


Krok 4. Odczytujemy rozwiązanie. Są nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in (-\infty,\ -3\rangle \cup \langle 2,\ \infty)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę (≤), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



$$x \in \langle -3,\ 2\rangle$$

INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI....

Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie mieć go wcale.

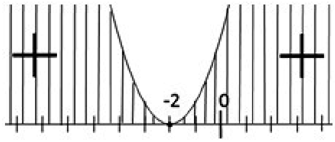
Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

- Z jednym miejscem zerowym

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady

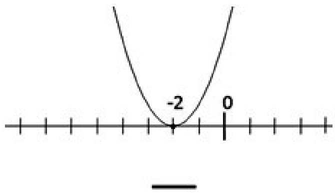
➡ Znak nierówności $\geq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$x \in R$

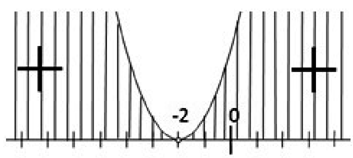
➡ Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

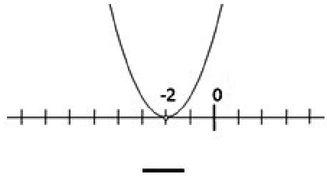
➡ Znak nierówności $>$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

Znak nierówności $<$



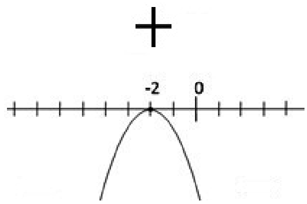
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W DÓŁ

Przykłady:

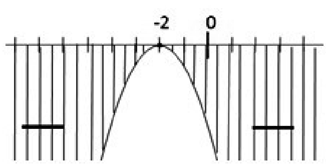
Znak nierówności $\geq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

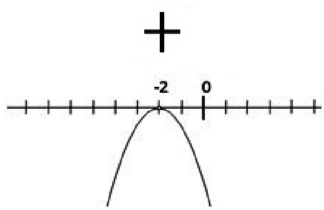
Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero (–2), także należy do rozwiązania.

$x \in R$

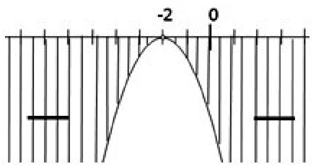
Znak nierówności $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pust. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

Znak nierówności $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba –2 do niego nie należy.

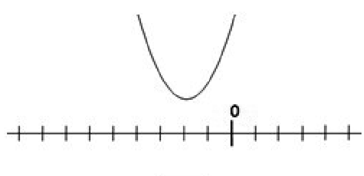
$x \in R \setminus \{-2\}$

- Bez miejsc zerowych

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady:

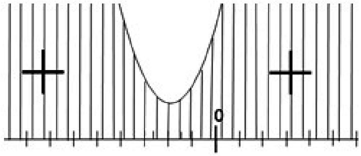
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in \varnothing$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



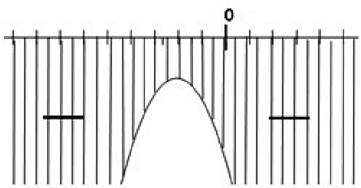
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in R$

– gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

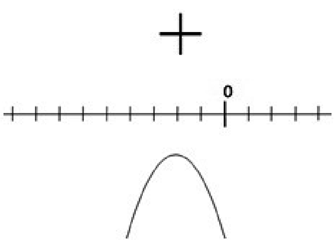
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in R$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in \varnothing$

ZADANIA

2.4.1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)\rangle 0$

b) $x(x+4)\langle 0$

c) $(x-7)(x+6)\geq 0$

d) $2x^2-8x\leq 0$

e) $x^2-16\rangle 0$

f) $x^2\leq 4$

g) $8x^2\geq 24$

h) $48\langle x^2$

i) $x^2-2x-8\geq 0$

j) $x^2+12x+24\rangle 0$

k) $x^2+12x+24\langle 0$

l) $x^2\langle -4(x+1)$

m) $(2x-6)^2\leq 4x-13$

n) $(2x-6)x\geq 0$

o) $(x-1)(x+3)>0$

p) $(2-x)(2x-3)\leq 0$

q) $-3x^2-8x>0$

r) $6x-2x^2\leq 0$

s) $3x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\leq 0$

t) $(x-3)\ (3x-4)-(x-3)\ (x+2)>0$

u) $(x+5)^2+(x+5)\ (x-3)\leq 0$

v) $(3x-4)\ (x+2)>(x+2)\ (x-1)$

w) $(4x-5)\ (x+4)>(x+4)^2$

x) $9x^2+6x+4<3$

y) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

z) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

Odpowiedź:

a) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

b) $(-4,0)$

c) $\left(-\infty,-6\right\rangle\cup\left\langle 7,+\infty\right)$

d) $\langle 0,4\rangle$

e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

f) $\langle -2,2\rangle$

g) $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{3},+\infty\right)$

h) $\left(-\infty,-4\sqrt{3}\right)\cup\left(4\sqrt{3},+\infty\right)$

i) $\left(-\infty,-2\right\rangle\cup\left\langle 4,+\infty\right)$

j) $\left(-\infty,-6-\sqrt{3}\right)\cup\left(-6+2\sqrt{3},+\infty\right)$

k) $\left(-6-2\sqrt{3},-6+2\sqrt{3}\right)$

l) $\varnothing$

m) $\frac{7}{2}$

n) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

o) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

p) $(-\infty,\frac{3}{2}>\cup<2,\infty)$

q) $(0,4)$

r) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

s) $\left\langle -\frac{1}{6},1\right\rangle$

t) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

u) $\langle -5,-1\rangle$ v) $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},\infty)$

w) $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$ *x)* brak rozwiązania

y) $x\in R$ z) $x\in R$

2.4.2 Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność:

a) $(x-1,2)(x-3,4)\langle 0$ b) $-x^2+3,6x\geq 0$

c) $x^2-6,25\langle 0$ d) $2x^2-0,6x-16,2\langle 0$

Odpowiedź:

a) $\{2,3\}$ b) $\{0,1,2,3\}$ c) $\{-2,-1,0,1,2\}$ d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2.4.3 Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a) $x^2-1\rangle 0,\ x^2+3x\leq 0$

b) $9x^2+9x+2\langle 0,\ x^2-9x+2\langle 0$

c) $x^2\geq 9$; $(x+7)(x-3)(5x+1)>0$

Odpowiedź:

a) $\langle -3,-1\ );\ x\in(\ \ -\infty,0\ \rangle\cup(1,+\infty)$

b) zbiór pusty; $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\setminus\{-7\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[11] Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa:

a) $-\frac{7}{2}$ b) $-\frac{7}{2}\frac{7}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{4}$

Odpowiedź: c

2.[12] Rozwiąż nierówność: $-x^2+2x+8\geq 0$.

Odpowiedź: $x\in<-2,4>$

11 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 19.02.2013.

12 Zadanie 2, 3, 4: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php$x$ arkusze , 19.02.2013.

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 4$ jest:

a) (–2;2) b) (–∞;–2) ∪ (2;∞) c) (–∞;2) d) <–2;2>

Odpowiedź: a

4. Uzasadnij, że równanie $x^2 + (b - 2)x - 2b = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej b ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

5.[13] Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-3,3)$

6.[14] Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x + 6) < 0$ jest:

a) (–6;0) b) (0;6) c) (–∞;–6) ∪ (0;∞) d) (–∞;0) ∪ (6;∞)

Odpowiedź: a

7. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,1> \cup <7,\infty)$

8.[15] Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-2,5)$

9.[16] Liczba wszystkich rozwiązań równania $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

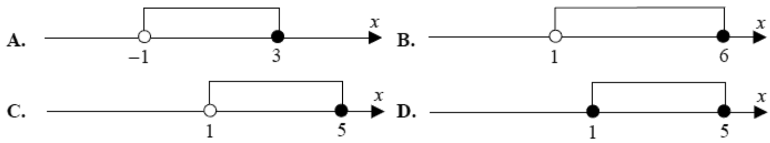
Odpowiedź: d

10 Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,-\frac{1}{2}> \cup <2,\infty)$

13 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 19.02.2013.
14 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.
15 Zadanie 8: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 19.02.2013.
16 Zadanie 9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 19.02.2013.

11.[17] Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5) \le 0$ i $x > 1$.



Odpowiedź: d

12. Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

13.[18] Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

Odpowiedź: d

14. Rozwiąż nierówność: $x^2 - x - 2 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \langle -1, 2 \rangle$

15.[19] Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 4 i 1 lub –4 i –1

16. Wartość k, dla której jeden z pierwiastków równania $x^2 + 9x + k = 0$ jest równy –3 wynosi:

a) –6 b) –18 c) 18 d) 6

Odpowiedź: c

17. Równanie $2x^2 - 4x - 3 = 0$:

a) nie ma rozwiązań, b) ma jedno rozwiązanie,

c) ma dwa rozwiązania , d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: c

17 Zadanie 11, 12: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013

18 .Zadanie 13,14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013.

19 Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

18. Rozwiązaniem równania $2(x-2)^2 = (x-2)\,(x+3)$ jest:

a) $x = -2$ i $x = -1$ b) $x = 7$ c) $x = 2$ i $x = 7$ d) $x = 1$ i $x = 2$

Odpowiedź: c

19. Podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich spełniających nierówność $(3-x)\,(3+x) > 0$ ma:

a) dwa elementy, b) skończoną liczbę elementów,

c) co najmniej 4 elementy, d) nieskończenie wiele elementów.

Odpowiedź: a

20. Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x-1)^2 \geq 5(x-1)$ jest:

a) $\left(-\infty, 4\right\rangle$ b) $\left\langle -4, 1\right\rangle$ c) $\left(-\infty, -4\right\rangle \cup \left\langle 1, \infty\right)$ d) $\left\langle 1, \infty\right)$

Odpowiedź: b

21. Rozwiązaniem równania $x^2 + x = (x+1)^2 - 7(x+2)$ jest liczba:

a) $\frac{15}{8}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $-\frac{13}{6}$

Odpowiedź: d

22. Ile liczb pierwszych zawiera zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej $(x + 1)\,(x - 10) < 0$?

a) 5 b) 4 c) więcej niż 10 d) 6

Odpowiedź: b

23. Kwadrat piątej części stada małp pomniejszonej o 3 schował się w jaskini. Jedna małpa pozostała na drzewie. Ile małp liczy stado?

Odpowiedź: 50 małp

24. Liczby $2a - 2$, $2a + 2$, $a + 1$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

Odpowiedź: $a \in (3, \infty)$

25. Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

Odpowiedź: $x \in \{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$

25. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: –9, –7, –5 lub 5, 7, 9

2.5 *Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego

Teraz nauczę się rozwiązywać układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań metodą algebraiczną:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podstawiamy wyznaczone y z pierwszego równania do drugiego równania i otrzymujemy:

$$2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 /\div 2$$
$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy $\Delta = 9$, a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego: $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone x_1 i x_2 do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 11 = -1$$
$$y_2 = 2x_2 + 11 = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji: $y = 2x^2 + 20x + 47$ i $y = 2x + 1$ w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

ZADANIA

2.5.1 Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną:

a) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7{,}25 \end{cases}$

Odpowiedzi:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ b) Brak rozwiązania

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -6\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -7\frac{1}{2} \end{cases}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[20] Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

2.[21] Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: 28 km

3.[22] W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Odpowiedź: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m × 8 m, a w drugim hotelu 35 m × 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m × 12 m, a w drugim 25 m × 14 m.

20 Zadanie 1: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.02.2013.
21 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
22 Zadanie 3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.

4.[23] Turysta pokonał pieszo trasę o długości 30 km z miejscowości A do miejscowości B ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $v = 6$ km/h, $t = 5$h

5.[24] Z miast A i B, odległych o 330 km, wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km, licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Odpowiedź: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

6.[25] Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa o długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąg pospieszny pokona tę trasę.

Odpowiedź: Pociąg pospieszny pokonał tę trasę w 2,5 godziny.

7.[26] Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440 zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż planowano. Co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Oblicz:

a) ilu uczniów pojechało na wycieczkę,

b) jaki był całkowity koszt wycieczki dla jednego uczestnika.

Odpowiedź: 45 osób, koszt dla uczestnika to 32 zł

8. Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań) i w sumie rozwiązała ich 448. Jeśli rozwiązywałaby codziennie o 4 zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o 2 dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

Odpowiedź: 16 dni, 28 zadań

---

23 Zadanie 4: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 20.02.2013.
24 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 20.02.2013.
25 Zadanie 6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
26 Zadanie 7, 8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu

3.1 Jednomian kwadratowy

Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

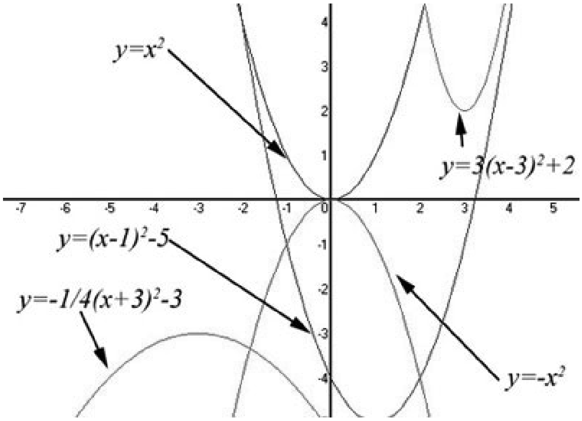
➡ Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**[27].

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

➡ Gdy współczynnik a jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry.

➡ Gdy współczynnik a jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

27 http://www.moskat.pl/szkola/matematyka/b_f_kwadratowa.php.



Przykłady funkcji kwadratowych:

$y = 5x^2 + 9x - 4$

$y = -x^2 - x$

$y = 2x^2 - 7$

$y = x^2$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy).

Jest to funkcja w postaci $y = ax^2$. Jest to więc przypadek, w którym $a \neq 0$ i $b = c = 0$.

Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$y = x^2$

$y = -x^2$

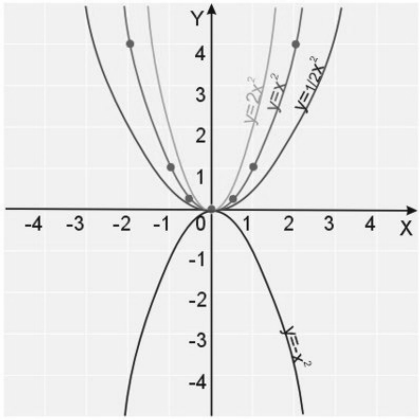
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie a jest dowolną liczbą.

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

x	–2	–1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	–4	–1	0	–1/4	–1	–4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2

Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji.



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**.
  Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik $a > 0$, oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik $a < 0$.
- Im większy jest współczynnik a, tym parabola jest „węższa".
- Parabola posiada jeden wierzchołek w punkcie (0,0).
- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór $(-\infty;0)$, gdy $a > 0$, oraz $(-\infty;0\rangle$, gdy $a < 0$.
- Oś OY jest osią symetrii paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.
- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale $(-\infty;0)$ i rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz rośnie w przedziale $(-\infty;0)$ i maleje w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a < 0$.
- Gdy $a < 0$, funkcja osiąga wartość największą (maksimum) w punkcie $x = 0$, natomiast dla $a > 0$ funkcja osiąga wartość najmniejszą (minimum) w punkcie $x = 0$.
- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 0$.

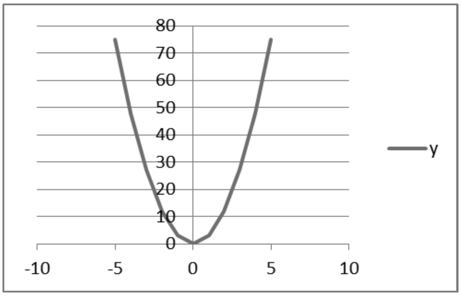
ZADANIA

3.1.1 Sporządź tabelkę wartości funkcji i naszkicuj wykres funkcji f.

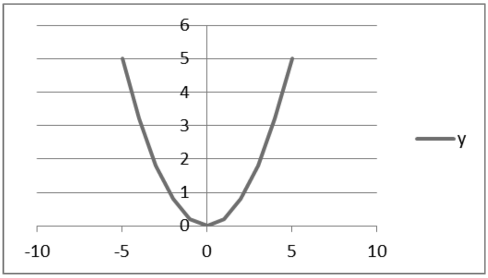
a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ c) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

Odpowiedź:

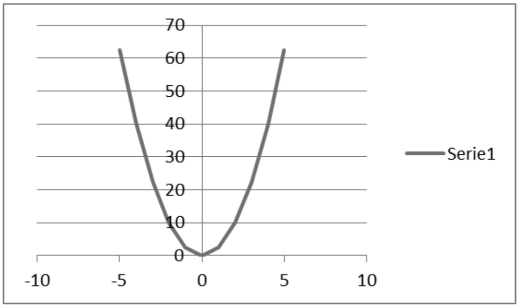
a)



b)



c)



3.1.2 prawdź, czy punkt K należy do paraboli $y = 4x^2$.

a) K = (4,32) b) K = (–2,16) c) $K = \left(-\frac{1}{4},1\right)$ d) $K = \left(\frac{1}{2},1\right)$

Odpowiedź:

a) nie należy b) należy c) nie należy d) należy

3.1.3 Omów następujące własności:

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x)=-x^2$ c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$

Odpowiedź:

a) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

b) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale , funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

c) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

d) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

3.2 Parabola w układzie współrzędnych

Teraz nauczę się interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

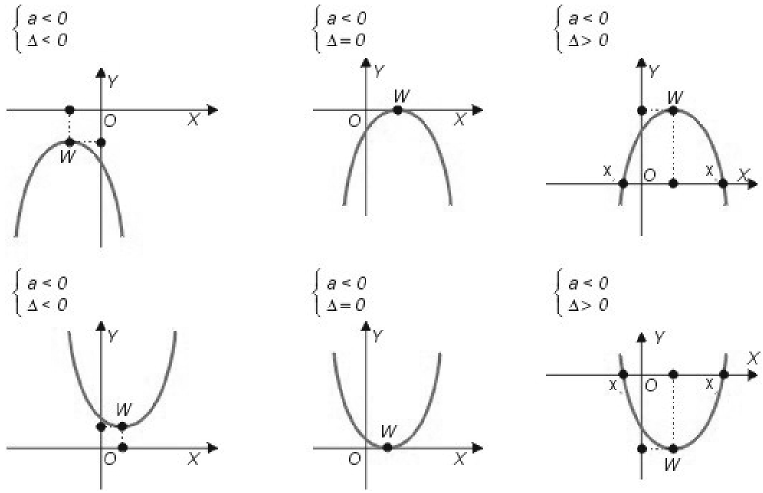
Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

1. znaku współczynnika $\boldsymbol{a}$, który warunkuje skierowanie ramion paraboli,

2. wartości wyróżnika **Δ**, która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią OX :

- ¾ dla **Δ < 0** parabola leży pod (**a < 0**) lub nad (**a > 0**) osią OX , nie ma z osią OX punktów wspólnych,
- ¾ dla **Δ = 0** parabola jest styczna do osi OX ,
- ¾ dla **Δ > 0** parabola przecina oś OX w dwóch punktach.

Różne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



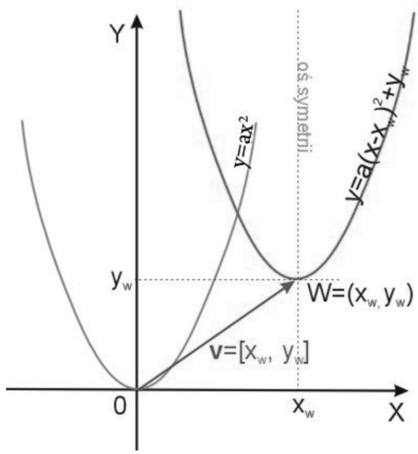
Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$ jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [x_w, y_w]$, przy czym

$x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w -$$

W przypadku dodatniego współczynnika a, mamy:

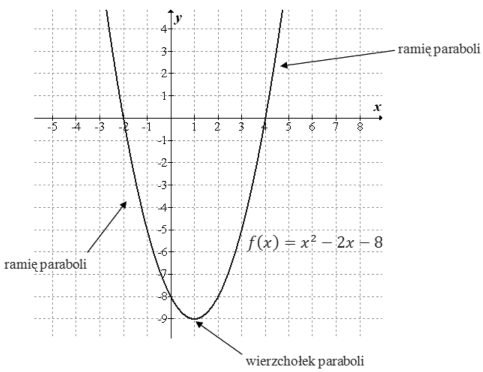


Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli $a > 0$, w dół w przypadku gdy $a < 0$.
- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli $\Delta > 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta = 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$.
- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funkcja przyjmuje minimum dla $a > 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Funkcja przyjmuje maksimum dla $a < 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Gdy $a > 0$, funkcja maleje w przedziale $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$ i rośnie w przedziale $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Gdy $a < 0$, funkcja rośnie w przedziale $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$ i maleje w przedziale $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

ZADANIA



3.2.1 Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (wykres funkcji powyżej).

a) Dziedzina:…
b) Zbiór wartości: ZW =…
c) Miejsca zerowe:…
d) Współrzędne wierzchołka: W =…
e) Oś symetrii, to:…
f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in$…
g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in$…

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne:…
i) Monotoniczność:
– funkcja jest rosnąca w przedziale…
– funkcja jest malejąca w przedziale…

Odpowiedź:

a) Dziedzina: D = R.

b) Zbiór wartości: ZW = ⟨–9; +∞).

c) Miejsca zerowe: funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 4$.

- W = (1,–9)
- Oś symetrii: $x = 1$

d) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (4 +\infty)$.

e) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in (-2; 4)$.

f) Punkt przecięcia z osią y–ów ma współrzędne: (0, –8).

g) Monotoniczność: funkcja jest niemonotoniczna (jest jedynie monotoniczna przedziałami)

– funkcja jest rosnąca w przedziale $x \in (1, \infty)$

– funkcja jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty, 1)$

3.2.2 Naszkicuj wykres jednomianu funkcji $f(x)$, a następnie przesuń równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile: jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a) $y = x^2$, $\vec{u} = [0,3]$ b) $y = -x^2$, $\vec{u} = [-1,0]$ c) $y = 2x^2$, $\vec{u} = [-3,2]$

Odpowiedź:

a) $y = x^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 3, \infty)$, brak miejsc zerowych; W = (0,3); funkcja rośnie $(0, \infty)$; funkcja maleje $(-\infty, 0)$

b) $y = -(x+1)^2$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $(\infty \ ,0 >$, jedno miejsce zerowe $x = -1$; W = (–1,0); funkcja rośnie $(\infty, -1)$, funkcja maleje $(-1, \infty)$

c) $y = 2(x+3)^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 2, \infty)$, brak miejsc zerowych; W = (–3,2); funkcja rośnie $(-3, \infty)$, funkcja maleje $(-\infty, -3)$

3.3 Postacie trójmianu kwadratowego

Teraz nauczę się:

- zapisywać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej

Postać iloczynowa trójmianu kwadratowego

TWIERDZENIE[28]

Dany jest trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie x_1 i x_2 są rozwiązaniami trójmianu:

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_0)^2$

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania: $(x-3)(x+2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod x 3, to pierwszy nawias się „wyzeruje". Iloczyn jakiejkolwiek liczby przez 0 daje nam 0.

Jeśli podstawimy pod drugi x liczbę 2, to ten nawias także nam się wyzeruje. Rozwiązaniami są więc wartości: $x = 3$ i $x = -2$.

Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Postępujemy analogicznie jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

28 http://pl.wikibooks.org.

$\Delta > 0$, więc korzystamy ze wzoru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Widzimy, że $a = 1$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$, stąd $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$, stąd otrzymujemy rozwiązanie $x = 1$, a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej korzystając ze wzoru

$y = a(x - x_0)^2$

Odpowiedź: $2(x-1)^2 = 0$

Sposób II

Policzymy deltę.

$\Delta = (-4)\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$x_0 = 1$

$\Delta = 0$ – korzystamy więc ze wzoru: $y = a(x - x_0)^2$

a jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy: $2(x - 1)^2 = 0$

Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7.

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy, że podstawimy te wartości do wzoru.

$(x - (-3))(x - 7) = 0$

$(x + 3)(x - 7) = 0$

Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:

$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7. Można to sprawdzić poprzez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

ZADANIA

3.3.1 Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a) $12x^2+11x+2=0$ b) $3x^2-7x+2=0$ c) $2x^2-3x+4=0$

d) $-7x^2+10x-4=0$ e) $5x^2-3x=0$ f) $9x^2-8=0$

g) $2x^2-3x-2=0$ h) $-x^2+x+6=0$ i) $3x^2-5x+4=0$

j) $-4x^2+2x-1=0$ k) $10-2x^2=0$ l) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x=0$

Odpowiedź:

a) $12\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$

b) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=0$

c) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

d) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

e) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)=0$

f) $9\left(x^2-\frac{8}{9}\right)=9\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

g) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$

h) $-(x-3)(x+2)=0$

i) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

j) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

k) $-2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$ l) $\frac{1}{3}x\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

3.3.2 Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego

a) $(x-3)(x-30)=0$ b) $2(x-2)(x+5)=0$

c) $\frac{11}{3}(x+15)(x+27)=0$ d) $4x(x+6)=0$

e) $-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$ f) $-2(x+1)(x+1-\sqrt{2})=0$

g) $(x+2-\sqrt{3})(x-3+\sqrt{2})=0$ h) $(2x-3)(2x-3)=0$

Odpowiedź:

a) $x_1=3, x_2=30$ b) $x_1=2, x_2=-5$ c) $x_1=-15, x_2=-27$

d) $x_1=0, x_2=-6$ e) $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$ f) $x_1=-1, x_2=\sqrt{2}-1$

g) $x_1=\sqrt{3}-2, x_2=3-\sqrt{2}$ h) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$

3.3.3 Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, mając dane pierwiastki:

a) 3 i 5 b) 4 i –9 c) $\frac{1}{3}$ i 7

d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ e) $\sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{7}$ i $1-\sqrt{7}$

Odpowiedź:

a) $b = -8$, $c = 15$ b) $b = 5$, $c = -36$ c) $b = 7\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{3}$

d) $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{6}{3}$ e) $b = -\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $c = 2+\sqrt{2}$ f) $b = -2$, $c = -6$

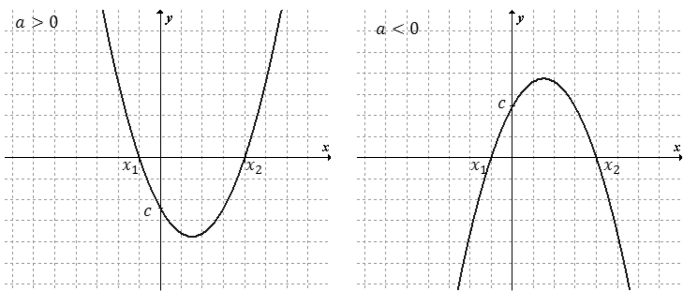
Postać ogólna funkcji kwadratowej

$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY $(0, c)$.

Przykład



Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami x_1 oraz x_2). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2. Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka W funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a, p, q są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną funkcji kwadratowej**.

Współczynniki p i q to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez W = (p, q). Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne p i q ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zaletą postaci kanonicznej jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli.

Dodatkowo po współczynniku a możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry (a > 0), czy do dołu ($a < 0$).

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (gdy $\Delta > 0$) i $f(x) = a(x-x_0)^2$ ($\Delta = 0$) nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym, takim że $a \neq 0$. Literki x_0, x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji *f*(*x*).

Uwaga!

Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje.

Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ($\Delta > 0$), to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli $\Delta = 0$, to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Zaletą postaci iloczynowej jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry (a > 0), czy do dołu (a < 0).

Reasumując

Dla $\boldsymbol{a \neq 0}$ trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

Postać ogólna	$y = ax^2 + bx + c$		
Postać kanoniczna	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x-p)^2 + q$ gdzie $p = -\frac{b}{2a}$**,** $q = -\frac{\Delta}{4a}$		
Postać iloczynowa	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	Brak postaci iloczynowej	$y=a(x-x_0)^2$	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

ZADANIA

3.3.4 Wyznacz te wartości parametrów a, b i c, dla których $f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = ax^2 - 7x + c$ i $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$ i $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

a) $a = -2$, $b = 7$, $c = -5$

b) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{7}{4}$, $c = -\frac{3}{8}$

3.3.5 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników a, b i c:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}$

c) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x-2)(x-3)$

e) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

f) $f(x) = (1-x)(3-x) + 6 - 2x$

g) $f(x) = -2(x-3)^2 + 18$

h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 6$

i) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$

j) $f(x) = 2\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right)$

Odpowiedź:

a) $f(x) = x^2 - x + 16\frac{1}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{8}$

c) $f(x) = -3x^2 - 24x - 49$

d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

e) $f(x) = -9x^2 + 6x + 5$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

g) $f(x) = -2x^2 + 12x$

h) $f(x) = 3x^2 + 6x + 6$

i) $f(x) = 2x^2 + 18x - 20$

j) $f(x) = 2x^2 + 4\sqrt{2} - 6$

3.3.6 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2 + 20x + 50 = 2(x + p)^2$

b) $3x^2 - 18x + 20 = 3(x + p)^2 + q$

c) $3x^2 - 15x + 25 = a(x + p)^2 + q$

d) $5x^2 + 12x - 6 = a(x + p)^2 + q$

Odpowiedź:

a) $p = -5$,

b) $p = 3, q = -7$

c) $a = 3, p = \frac{15}{6}, q = -\frac{75}{12}$

d) $a = 5, p = -1{,}2, q = -13{,}2$

3.3.7 Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a) $f(x) = 4x^2 + 6x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

e) $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2$

g) $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$

h) $f(x) = 2(x - 1)(x + 10)$

i) $f(x) = 3x(2 - 3x) + 5$

j) $f(x) = 4(x + 5)x$

Odpowiedź:

a) $p = -\frac{3}{4}, q = \frac{3}{2}, f(x) = 4(x + \frac{3}{4}) + \frac{3}{2}$

b) $p = 1, q = 3, f(x) = -2(x - 1) + 3$

c) $p = 1, q = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}$

d) $p = -2, q = 7, f(x) = -(x + 2) + 7$

e) $p = \frac{1}{8}, q = \frac{47}{64}, f(x) = (x - \frac{1}{8}) + \frac{47}{64}$

f) $p = -3, q = -8, f(x) = \frac{2}{3}(x + 3) - 8$

g) $p = 4, q = 10, f(x) = -2(x - 4) + 10$

h) $p = -4{,}5; q = -50{,}5; f(x) = 2(x + 4\frac{1}{2}) - 50\frac{1}{2}$

i) $p = \frac{1}{3}, q = 6, f(x) = -9(x - \frac{1}{3}) - 6$

j) $p = -2{,}5; q = -25, f(x) = 4(x + 2\frac{1}{2}) - 25$

3.3.8 Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $f(x)=3x^2+x+5$

b) $f(x)=16x^2+8x+1$

c) $f(x)=-2x^2+3x+7$

d) $f(x)=-2x^2+6x+5$

Odpowiedź:

a) Brak miejsc zerowych

b) Jedno miejsce zerowe

c) Dwa miejsca zerowe

d) Dwa miejsca zerowe

3.3.9 Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a) $f(x)=2(x-1)(x+10)$

b) $f(x)=-3(x-2)(x+5)$

c) $f(x)=4(x+5)x$

d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-6)$

Odpowiedź:

a) $x_1=-10, x_2=1$

b) $x_1=-5, x_2=2$

c) $x_1=-5, x_2=0$

d) $x_1=-1, x_2=6$

3.3.10 Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a) $a=\sqrt{2}, x_1=-4, x_2=\frac{1}{2}$

b) $a=-3, x_1=-2, x_2=0$

c) $a=7, x_0=9$

d) $a=\frac{1}{2}, x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{5}$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\sqrt{2}(x+4)(x-\frac{1}{2})$

b) $f(x)=-3(x+2)x$

c) $f(x)=7(x-9)^2$

d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$

3.3.11 Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a) $f(x)=(x-1)(x+5)$

b) $f(x)=-(x-6)(x+4)$

c) $f(x)=2(x+1)(x+5)$

d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

Odpowiedź:

a) $f(x)=(x+2)^2-9$

b) $f(x)=-(x-1)^2+25$

c) $f(x)=2(x+3)^2-8$

d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+128$

3.3.12 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ c) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

d) $f(x) = 9x^2 + 6x - 1$ e) $f(x) = -3x^2 + 5$ f) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

g) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$ h) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$ b) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$

c) $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ d) $x_1 = -\frac{1}{3}(1 + \sqrt{2}), x_2 = -\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2})$

e) $f(x) = -3(x - \frac{1}{3}\sqrt{15})(x + \frac{1}{3}\sqrt{15})$ f) $f(x) = -2(x - 1)(x + \frac{1}{2})$

g) $f(x) = -2(x - 5)(x + \frac{1}{2})$ h) $x_1 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}, x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$

3.4 Rysowanie wykresów funkcji[29]

Teraz nauczę się

- szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.

Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

Poniżej przedstawimy dwa sposoby rysowania wykresów.

Sposób I:

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

1) wierzchołek paraboli,

2) punkty przecięcia z osią $0X$ (punkty dla miejsc zerowych),

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

29 http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html, 21.02.2013.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

$$y = -x^2 - 2x + 8 \qquad a = -1,\ b = -2,\ c = 8$$

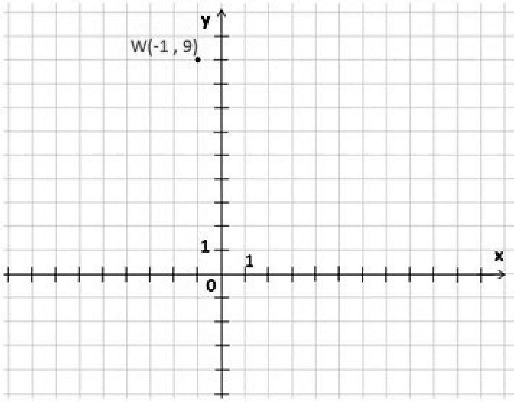
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1,\ 9)$$



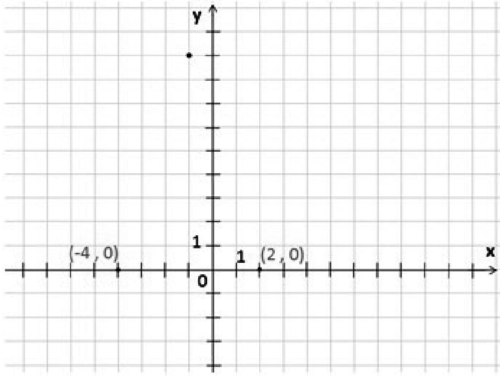
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

UWAGA: Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punktu, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 + 6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 - 6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$(-4, 0);\ (2, 0)$$



3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych:

Wybraliśmy argument –5.

Podstawiamy argument -5 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(-5)^2 - 2 \cdot (-5) + 8 = -25 + 10 + 8 = -7$$

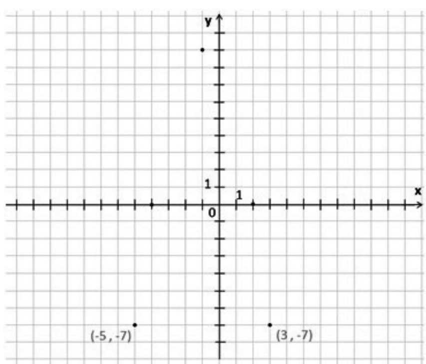
Współrzędne punktu: (–5, –7)

Punkt na prawo od miejsc zerowych:

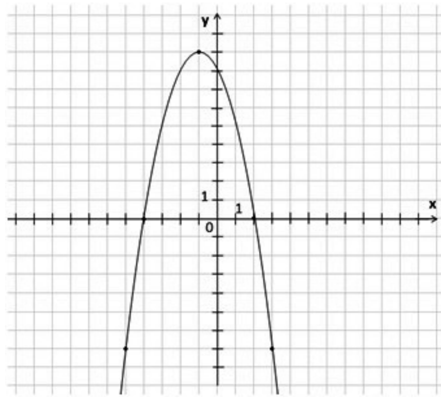
Podstawiamy argument 3 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = -9 - 6 + 8 = -7$$

Współrzędne punktu: (3, –7)



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.

Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze zmienionym znakiem!

$x_1 = 1$

$x_2 = -3$

$$(1, 0); (-3, 0)$$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

RÓŻNICE:

1) wierzchołek paraboli

Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru.

Przykład1

$$y = 2(x+5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p” będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q” się nie zmienia:
x = -5
y = 2

$$W=(-5, 2)$$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Sposób II:

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

Przykład 2

$y = -2(x + 1)^2 - 3$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków).

W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszy przypadek funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W=(0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych:

Wybraliśmy:

x = -2

$$y = -2 \cdot (-2)^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

(-2, -8)

x = -1

$$y = -2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2$$

(-1, -2)

x = 1

$$y = -2 \cdot 1^2 = -2 \cdot 1 = -2$$

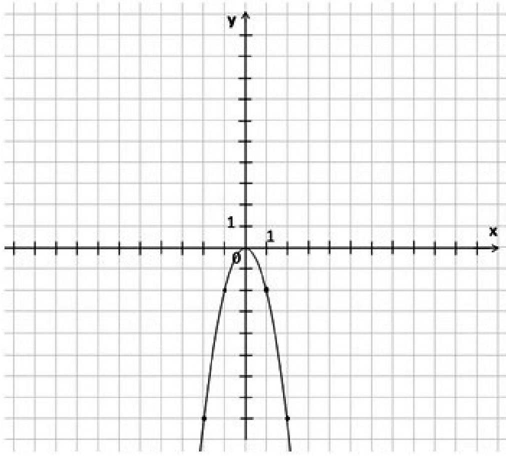
(1, -2)

x = 2

$$y = -2 \cdot 2^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

(2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

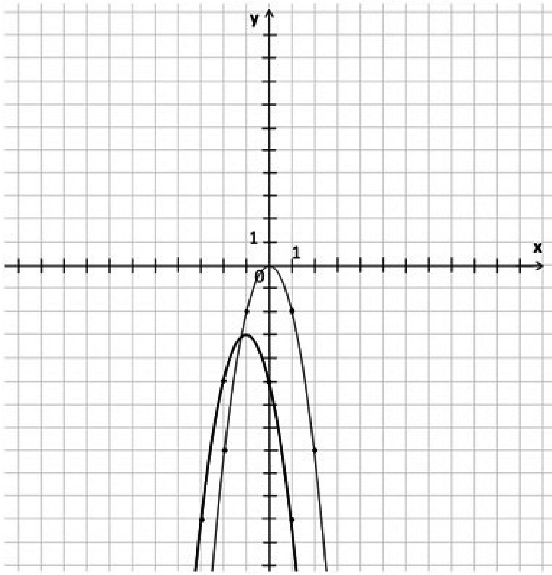


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.



ZADANIA

3.4.1 Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej f z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 + 8$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Odpowiedź:

a) z osią OX : 1, –1; z osią OY: –3

b) z osią OX : nie istnieje; z osią OY: 8

c) z osią OX : 2; z osią OY: 4

d) z osią OX : 8, –2; z osią OY: –16

3.4.2 Oblicz:

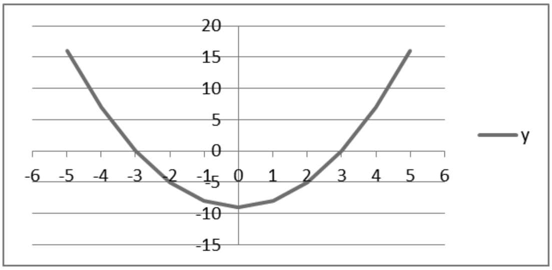
- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych
- współrzędne wierzchołka paraboli
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

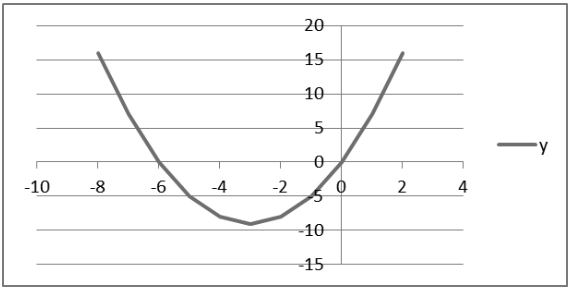
a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 + 6x$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Odpowiedź:

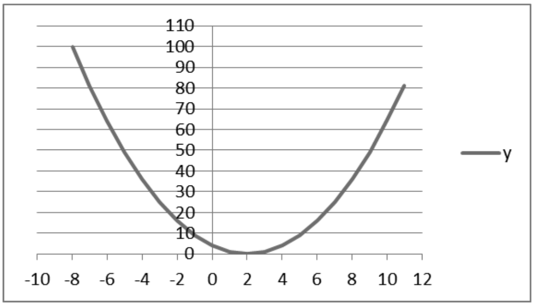
a) z osią OX : –3, 3; z osią OY: –9; $p = 0$; $q = -9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$



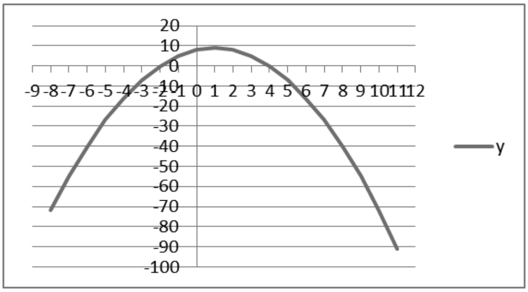
b) z osią OX : 0, –6; z osią OY: 0; $p = -3$; $q = -9$; $x_1 = 0$, $x_2 = -6$



c) z osią OX : 2; z osią OY: 4; $p = 2$; $q = 0$; $x_1 = x_2 = 2$



d) z osią OX : –2, 4; z osią OY: 8; $p = 1$; $q = 9$; $x_1 = -2$, $x_2 = 4$



3.5 Własności funkcji kwadratowej

Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum.

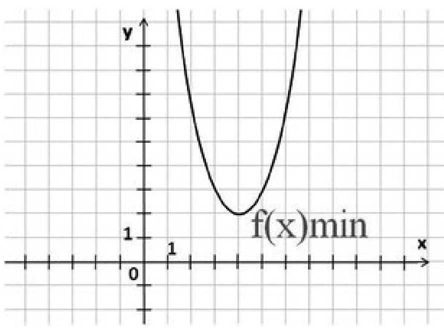
Przypominamy:

Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{min}$ lub y_{min}. Maksymalną wartość oznaczamy:

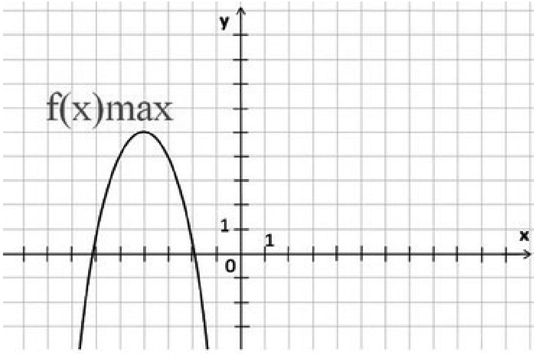
$f(x)_{max}$ lub y_{max}.

W celu wyznaczenia minimum lub maksimum funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „a" funkcji kwadratowej.

Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy $a > 0$, w dół,

gdy $a < 0$.

Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „a" funkcji ma wartość –3 ($a < 0$). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli mamy do czynienia z maksimum.

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

- **Dziedzina**

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc:

D = R.

- **Zbiór wartości**

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka (q) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka (*q*):

$$ZW = \left(-\infty,\ q\right\rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka (*q*) a nieskończonością:

$$ZW = \left\langle q,\ \infty\right)$$

Przykład 2

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

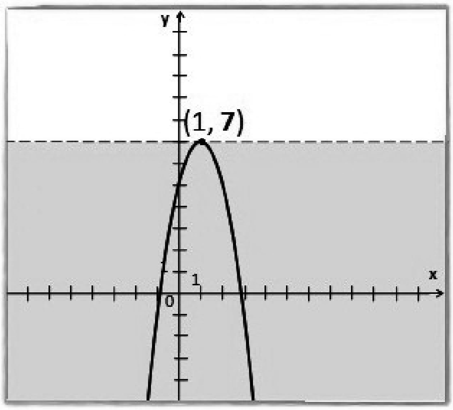
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-56}{4\cdot(-2)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Ponieważ współczynnik „a" jest ujemny (-2), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością q.

$$ZW = \left(-\infty,\ 7\right\rangle$$



Przykład 3

$$y = 2x^2 + 4x - 2$$

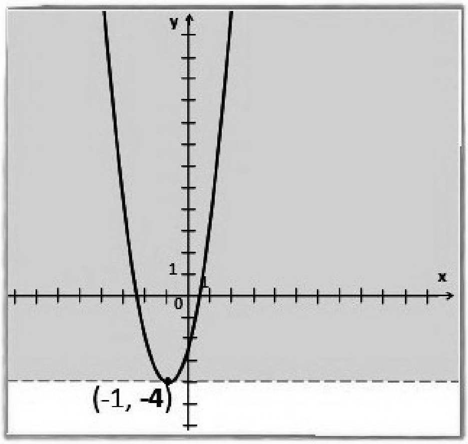
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 16 + 16 = 32$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-32}{4\cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4$$

Ponieważ współczynnik „a" jest dodatni (2), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością q a nieskończonością.

$ZW = \langle -4, \infty)$



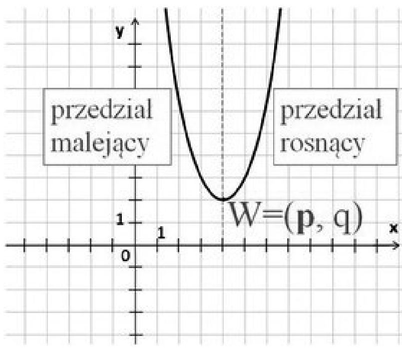
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś 0X), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka (*p*).

Drugą potrzebną informacją, jest kierunek ramion paraboli:

Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.



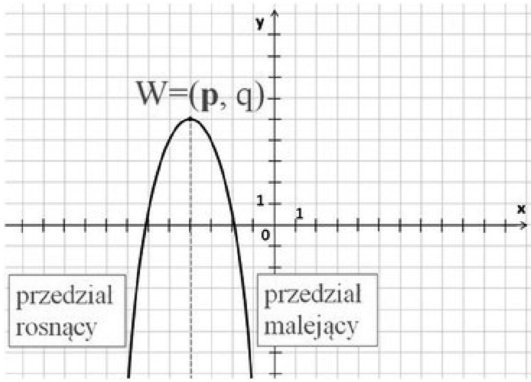
Funkcja jest rosnąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle p, \infty)$

Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\searrow$ w przedziale $(-\infty, p\rangle$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$$f(x)\nearrow \text{ w przedziale } \left(-\infty,\ p\right\rangle$$

Funkcja jest malejąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$$f(x)\searrow \text{ w przedziale } \left\langle p,\ \infty\right)$$

$$y = 3x^2 - 12x + 8$$

Obliczamy współrzędną „p" wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a" funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę.
W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$$f(x)\nearrow \text{ w przedziale } \left\langle 2,\ \infty\right)$$

$$f(x)\searrow \text{ w przedziale } \left(-\infty,\ 2\right\rangle$$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$f(x)\uparrow : (-\infty, 2\rangle$$

$$f(x)\downarrow : \langle 2, \infty)$$

Reasumując

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y = \left\langle -\frac{\Delta}{4a}, \infty \right)$	$Y = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right\rangle$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right)$, rosnąca dla $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty \right)$	rosnąca dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right)$ malejąca dla $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty \right)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 = -\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowne do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x = -\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$	

ZADANIA

3.5.1 Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a) $y = x^2 - 4$ b) $y = x^2 - 6x$ c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = -2x^2 + 6x + 7$

3.5.2 Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

- zbiór wartości

- miejsca zerowe
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = -x^2 + 6x$ c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$

d) $f(x) = -(x-1)(x+5)$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ f) $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$

	Zbiór wartości	Miejsca zerowe	Wartości dodatnie	Wartości ujemne	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	$\langle -4, \infty)$	–2,2	$(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$	$(-2,2)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	–	Dla $x=0$ $y=-4$
b)	$(-\infty,9\rangle$	0,6	$(0,6)$	$(-\infty,0) \cup (6,\infty)$	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$	Dla $x=3$ $y=9$	–
c)	$\langle -4, \infty)$	1,5	$(-\infty,1) \cup (5,\infty)$	$(1,5)$	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla $x=3$ $y=-4$
d)	$(-\infty,9\rangle$	5,1	$(-5,1)$	$(-\infty,-5) \cup (1,\infty)$	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$	Dla $x=2$ $y=9$	–
e)	$\langle 0,\infty)$	3	$(-\infty,3) \cup (3,\infty)$	ϕ	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla $x=3$ $y=0$
f)	$\left(-\infty,10\frac{1}{8}\right\rangle$	–4, $\frac{1}{2}$	$\left(-5,\frac{1}{2}\right)$	$(-\infty,-4) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right)$	$\left(-\infty,-1\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1\frac{3}{4},\infty\right)$	Dla $x=-1\frac{1}{3}$ $y=10\frac{1}{8}$	–

3.5.3 Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = -2x^2 - 8x - 5$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

Odpowiedź:

a) Dziedzina: $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości: $ZW = \langle -1, \infty)$

Miejsce zerowe: $x_1 = 1$ lub $x_2 = 3$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$

rosnąca w przedziale $\langle 2, \infty)$

Wierzchołek: W = (2,–1)

Najmniejsza wartość: $y_{min} = -1$ dla $x = 2$

Największa wartość: nie istnieje

b) Dziedzina $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości $ZW = (-\infty, 3 >$

Miejsce zerowe $x_0 \approx -3,2$ lub $x_0 \approx -0,8$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca w przedziale $(-\infty, -2 >$

malejąca w przedziale $< -2, \infty)$

Wierzchołek W = (–2, 3)

Największa wartość $y_{max} = 3$ dla $x = -2$

Najmniejsza wartość: nie istnieje

c) Dziedzina: $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości: $ZW = < 1, \infty)$

Miejsce zerowe: nie istnieją

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 3 >$

rosnąca w przedziale $< 3, \infty)$

Wierzchołek: W = (3, 1)

Najmniejsza wartość $y_{min} = 1$ dla $x = 3$

Największa wartość: nie istnieje

3.5.4 Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 4x - 1$ z prostymi:

a) $y = -5$ b) $y = -3$ c) $y = -1$ d) $y = 2$

Odpowiedź:

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 4x - 1$ ma:

– 0 punktów wspólnych z prostą $y = -5$

– 1 punkt wspólny z prostą $y = -3$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = -1$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = 2$

3.5.5 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli, określonej równaniem: $y = -x^2 + 6x - 7$.

Odpowiedź: $x = 3$

3.5.6 Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

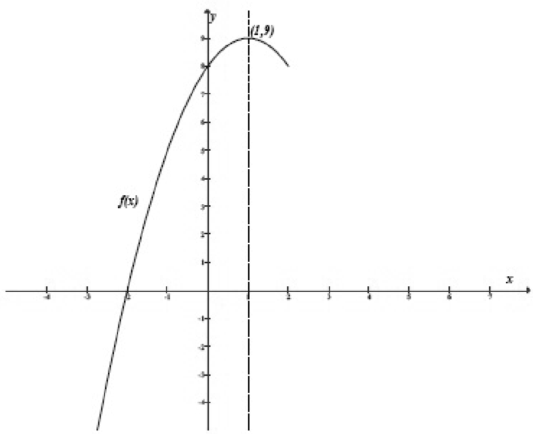
b) Podaj rozwiązanie nierówności: $f(x) \geq 0$.

Odpowiedź:

a) $(-\infty, 4>$

b) $x \in \langle 1,5 \rangle$

3.5.7 Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe:



a) miejscami zerowymi funkcji są liczby: –2 oraz 4

b) funkcja jest rosnąca w przedziale (–2, 4)

c) funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$

d) zbiorem wartości funkcji jest przedział (−1, 9)

Odpowiedź: a

3.5.8 Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $f(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f(x) = -3x(x-2)$

d) $f(x) = 2(x-2)(x+4) - 5$

Odpowiedź:

a) $m = 0$ b) $m = -11\frac{5}{4}$ c) $m = 3$ d) $m = -23$

3.5.9 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$, $x \in \langle -1,2 \rangle$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $x \in \langle -2,5 \rangle$

c) $f(x) = -2x^2 + x - 1$, $x \in \langle 0,2 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = 12$, $m = 0$ b) $m = 46$, $m = 7/8$ c) $m = -7/8$, $m = -7$

3.5.10 Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^2 - 9$, $x \in \langle -2,2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 5x$, $x \in \langle 3,7 \rangle$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $x \in \langle -4,1 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $x \in \langle -4,1 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = -9$ b) $m = -14$ c) $m = -10$ d) $m = 1$

3.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

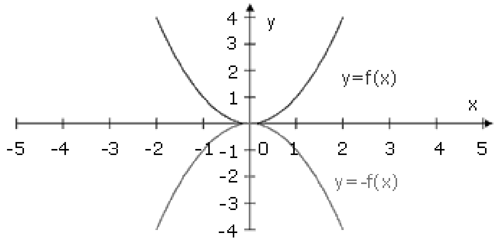
Teraz nauczę się:

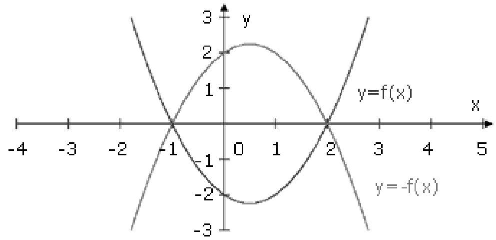
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

$\boldsymbol{x \to y = -f(x)}$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .

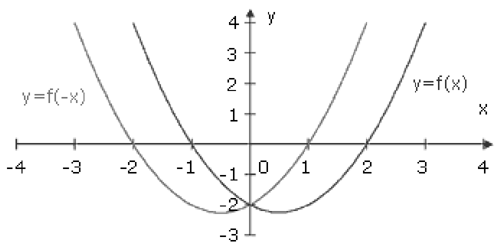
Przykłady





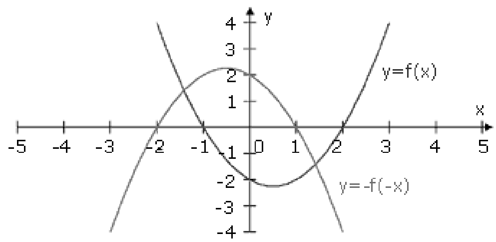
$x \rightarrow y = f(-x)$

Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.



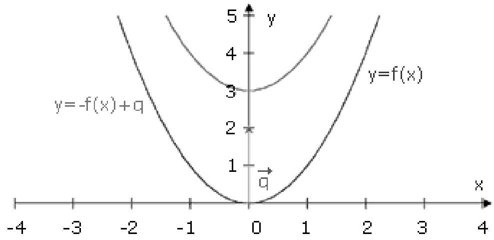
$x \rightarrow y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).



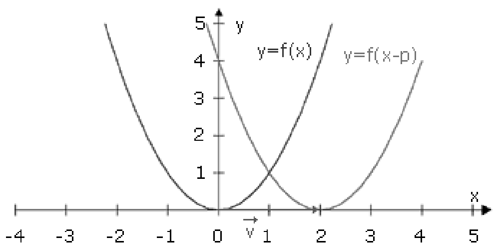
$x \rightarrow y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o |q| jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0,q]$).



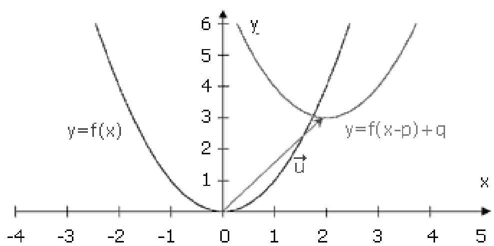
$x \rightarrow y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $\vec{v} = [p,0]$



$x \rightarrow y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p,q]$

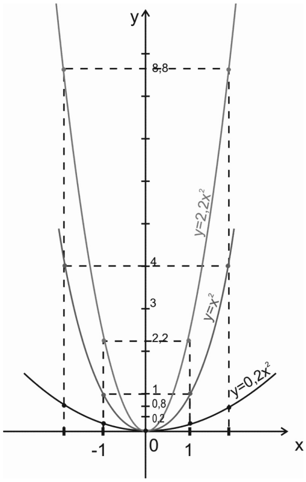


- $x \rightarrow y = k \cdot f(x)$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k–krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

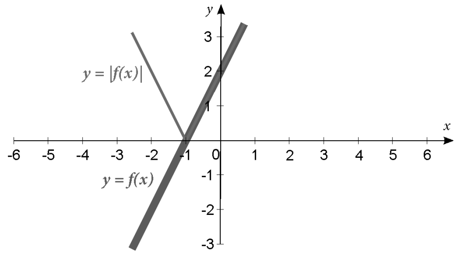
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY).

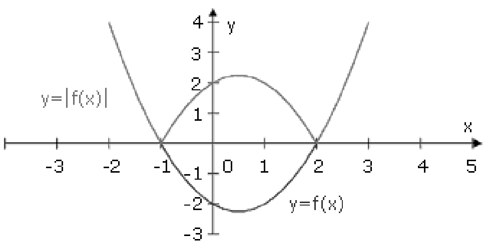
Dla $k \in (0,1)$wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).



***$x \rightarrow y = |f(x)|$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$ – leżącą nad osią OX lub na niej – pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX .

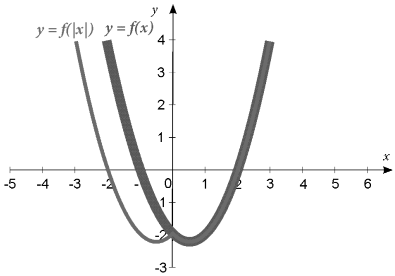




*** $x \rightarrow y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

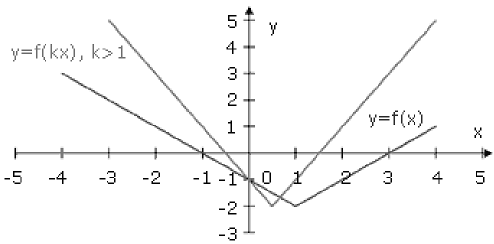


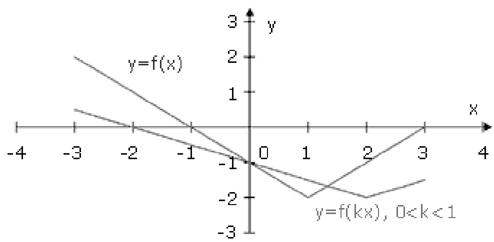
*****$x \to y = f(k*x)$**

Wykres funkcji $y = f(k*x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX .

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX .

Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX .





3.6.1 Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$ o p jednostek wzdłuż osi OX i q jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji f. Uzupełnij tabelkę według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji g	Przesunięcie wzdłuż osi OX p	Przesuniecie wzdłuż osi OY q	Postać kanoniczna wzoru funkcji f	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x + 4)^2 - 5$	W = (–4,–5)
			$f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				W = (3,0)
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x - 2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		W = (0,–1)

3.6.2 Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = (x - 3)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 3$ e) $y = (x + 1)^2 - 1{,}6$ f) $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) przesuwamy o 3 jednostki w prawo

b) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo

c) przesuwamy o 4 jednostki w górę

d) przesuwamy o 3 jednostki w dół

e) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 1,6 jednostki w dół

f) rysujemy $y = x^2$, odbijamy symetrycznie względem osi OX i przesuwamy w dół o $3\frac{1}{3}$ jednostki w dół

3.6.3 Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi OY o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Odpowiedź:

a) Zbiór wartości $(-\infty, 8\rangle$

b) $b = 12$, $c = -10$

3.6.4 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -0{,}3x^2 + 12$ c) $y = 1{,}4(x - 48)^2$

d) $y = -35(x + 1{,}2)^2$ e) $y = 15(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) W = (0,–5); funkcja maleje $x \in (-\infty, 0)$, funkcja rośnie $x \in (0, \infty)$

b) W = (0,12); funkcja rośnie $x \in (-\infty, 0)$, funkcja maleje $x \in (0, \infty)$

c) W = (48,0); funkcja maleje $x \in (-\infty, 48)$, funkcja rośnie $x \in (48, \infty)$

d) W = (–1,2;0); funkcja rośnie $x \in (-\infty; -1{,}2)$, funkcja maleje $x \in (-1{,}2; \infty)$

e) W = $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; funkcja maleje $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, funkcja rośnie $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$

3.6.5 Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta.

a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$ b) $y = 0{,}6x^2 - 5$ i $y = 10$

c) $y = -0{,}1(x - 3)^2$ i $y = -4$ d) $y = 15(x + 2)^2 + 4$ i $y = -1$

e) $y = -3{,}2(x - 5)^2 - 1$ i $y = -11$ f) $y = 33(x + 7)^2 + 21$ i $y = 20$

Odpowiedź:

a) ma dwa punkty wspólne b) nie ma punktów wspólnych

c) ma dwa punkty wspólne d) nie ma punktów wspólnych

e) ma jeden punkt wspólny f) nie ma punktów wspólnych

3.6.6 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W, przechodząca przez punkt P:

a) W = (–1,–1), p = (3,3) b) W = (–8,7), p = (1,6) c) W = (3,2), p = (–5,10)

Odpowiedź:

a) $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 1$ b) $y = -\frac{1}{81}(x + 8)^2 + 7$ c) $y = \frac{1}{8}(x - 3)^2 + 2$

3.6.7 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Odpowiedź:

a) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$ b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ c) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$

3.6.8 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ b) $f(x) = (x-1)(x+3)$ c) $f(x) = -(x-1)(x+3)$

3.6.9 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$ b) $f(x) = x^2 + x - 6$ c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

3.6.10 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3, \infty)$, wykres przechodzi przez punkt P = (–1,5) i ma oś symetrii o równaniu x = 1,

b) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4, \infty)$, jednym z miejsc zerowych jest x = 1 i wykres ma oś symetrii o równaniu x = –1,

c) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 4, \infty)$, wykres ma oś symetrii o równaniu x = 2 i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3\frac{1}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

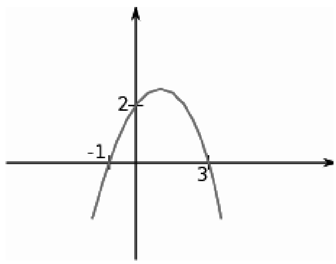
3.6.11 Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 6, 7, 8.

3.6.12 Rozwiąż równanie $f(x-1)=4$, jeżeli $f(x)=x^2+x-2$

Odpowiedź: $x=-2$, $x=3$

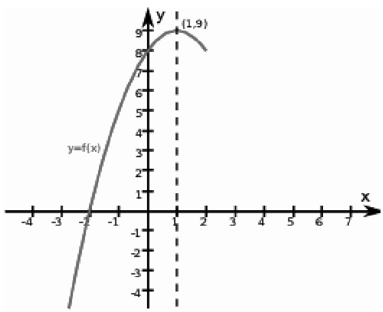
3.6.13 Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór.



Odpowiedź:

$$y=-\frac{2}{3}(x+1)(x-3)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$$

3.6.14 Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



Odpowiedź:

$$y=-(x-1)^2+9$$
$$y=-(x+2)(x-4)$$
$$y=-x^2+2x+8$$

3.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

ZADANIA

3.7.1 Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Odpowiedź: Prędkość turysty z miasta A to 4 km/h, a turysty z miasta B 3 km/h.

3.6.2 Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Odpowiedź: Wymiary pierwszego boiska to 56 m $\times$ 33m, a drugiego boiska 60 m $\times$ 25 m.

3.6.3 Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: Turysta dziennie przechodził 28 km.

3.6.4 Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm, a od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Trójkąt ma boki 41cm, 40 cm i 9 cm.

3.6.5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej trójkąta to 17 cm.

3.6.6 Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

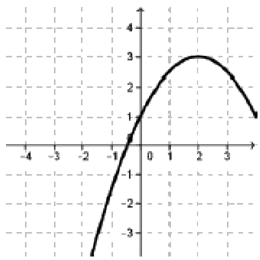
Odpowiedź: Czas napełniania zbiornika przez obie rury jednocześnie wyniesie $23\frac{1}{3}$ godziny.

1.[30] Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x - 7)(x + 2)$ są

a) $x = 7, x = -2$ b) $x = -7, x = -2$ c) $x = 7, x = 2$ d) $x = -7, x = 2$

Odpowiedź: a

2.[31] Wzorem funkcji kwadratowej f, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku, jest:



a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Odpowiedź: b

3. Największa wartość funkcji: $y = -2x^2 + x + 1$, w przedziale $\langle -1; 0{,}5 \rangle$, jest równa:

a) $1\frac{1}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) -4

4.[32] Gdy przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji opisanej wzorem:

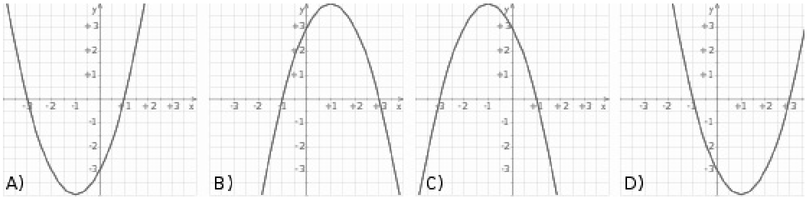
a) $y = 2(x - 2) + 4$; b) $y = 2(x - 2) - 4$; c) $y = 2(x - 2) + 1$; d) $y = 2(x + 2) + 4$

5. Funkcja kwadratowa $y = x^2 + bx + c$ jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2\rangle$, a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$. Postać kanoniczna tej funkcji opisana jest wzorem:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ b) $f(x) = (x + 2)^2 + 4$ c) $f(x) = (x + 4)^2 + 2$ d) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$

30 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 22.02.2013.
31 Zadanie 2, 3: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 22.02.2013.
32 Zadanie 4, 5, 6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 22.02.2013.

6. Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



Odpowiedź: a

7.[33] Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-4\right\rangle \\ 5x+10 & \text{dla } x\in\left(-4,2\right) \\ x+4 & \text{dla } x\in\left\langle 2,+\infty\right) \end{cases}$$ jest:

a) -4 b) -2 c) -1 d) 1

8. Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

a) $(-\infty, \frac{3}{2})$ b) $(-\infty, -1)\cup(4,+\infty)$ c) $(-1,4)$ d) $(-4,1)$

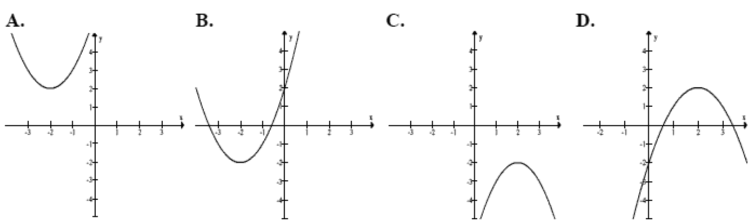
9. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:

a) $(2,\infty)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(1,+\infty)$

10.[34] Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:

a) $x = -8$ b) $x = -4$ c) $x = 4$ d) $x = 8$

11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

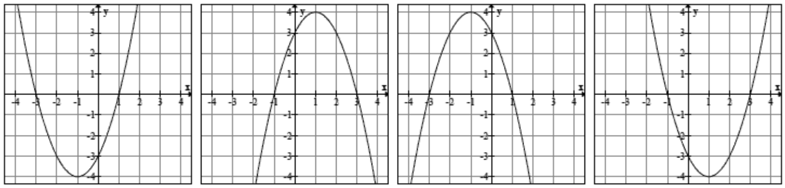


12. Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

33 Zadanie 7: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 22.02.2013.

34 Zadanie 10, 11, 12: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 22.02.2013.

13.[35] Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



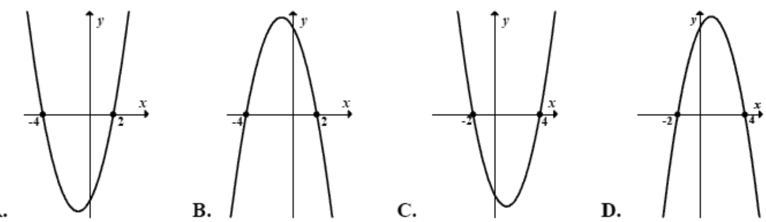
A. B. C. D.

14. Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$, jest punkt o współrzędnych:

a) (0,2) b) (0,–2) c) (–2,0) d) (2,0)

15.[36] Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale <–2, 3>.

16.[37] Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x . Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:



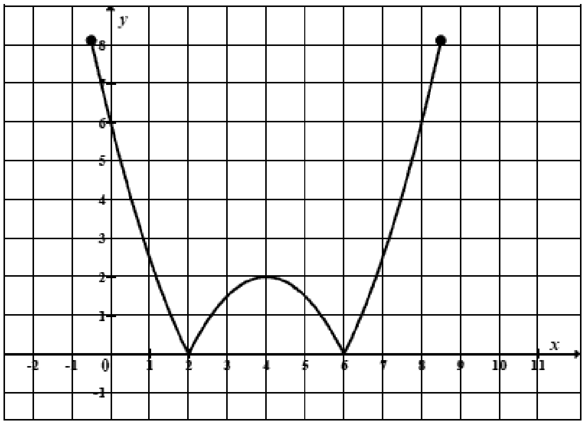
A. B. C. D.

17.[38] Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:

a) (3,0) b) (0,3) c) (–3,0) d) (0,–3)

35 Zadanie 13, 14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 22.02.2013.
36 Zadanie 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 22.02.2013.
37 Zadanie 16: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.
38 Zadanie 17, 18: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = 3$

19.[39] Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 10x + 9$ w przedziale <3,7>.

Odpowiedź: $y_{\mathbf{max}} = -12$, $y_{\min} = -16$

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ i $x + y = 10$

Odpowiedź: $p = (3,7)$, $R = (5,5)$

21. Wyznacz wartość liczby m tak, aby funkcja $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$ miała dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -1$

Odpowiedź: $m = 12$

22. Wzór w postaci funkcji kanonicznej $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, to:

a) $y = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ b) $y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

c) $y = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ d) $y = (x + \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{8}$

39 Zadania 19- 35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Odpowiedź: a

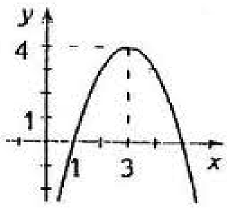
23. Funkcję kwadratową, przedstawioną na rysunku, opisuje wzór:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



Odpowiedź: a

24. Zbiorem wartości funkcji $y = x^2 - 6x + 11$, jest:

a) $\left(-\infty, 2\right\rangle$ b) $\left(-\infty, 3\right\rangle$ c) $\left\langle 3, \infty\right)$ d) $\left\langle 2, \infty\right)$

Odpowiedź: d

25. Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla $x = 2$, jeśli:

a) $b = -4$, $c = 8$ b) $b = 4$, $c = -8$ c) $b = -4$, $c = -8$ d) $b = 4$, $c = 8$

Odpowiedź: a

26. Wykresy funkcji $f(x) = 9 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 9$:

a) są symetryczne względem osi OX b) są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY d) nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja f ma wzór:

a) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ b) $f(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ d) $f(x) = -(x+2)^2$

Odpowiedź: a

28. Liczba punktów wspólnych prostej $y = -x$ z wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, wynosi:

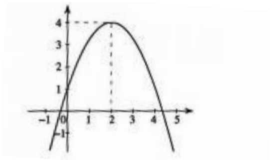
a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

Odpowiedź: c

29. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby –6 oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$.

Odpowiedź: 62

30. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określ jej wzór:



Odpowiedź: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

31. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

Odpowiedź: $y = -x^2 + 6x$

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem $y = x + 4$

Odpowiedź: $x \in (1,4)$

32. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$, jeśli $x + y = 4$.

Odpowiedź: 8

33. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami: $y = x^2 + 2x - 8$ oraz $y = x^2 + 6x - 4$ mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

Odpowiedź: (–1,–9)

34. Wartością największą funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x - 3$, określonej w przedziale <–3,2>, jest liczba:

a) –4 b) 5 c) 0 d) 6

35. Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 9$ przyjmuje wartości nieujemne dla:

a) $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$ b) $x \in (-3,3)$

c) $x \in \langle -3,3 \rangle$ d) $x \in (-\infty,-3 \rangle \cup \langle 3,\infty)$

4 Planimetria

To już potrafię:

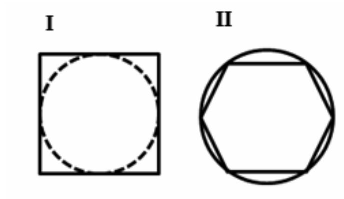
- korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
- rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznawać styczną do okręgu;
- korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
- rozpoznawać kąty środkowe;
- obliczać długość okręgu i łuku okręgu;
- obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
- stosować twierdzenie Pitagorasa;
- korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
- obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów;
- zamieniać jednostki pola;
- obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
- obliczać stosunek pól wielokątów podobnych;
- rozpoznawać wielokąty przystające i podobne;
- stosować cechy przystawania trójkątów;
- korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych;
- rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu;
- narysować pary figur symetrycznych;
- rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii;
- wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury;
- rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
- konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach 60°, 30°, 45°, okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
- rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Informacja do zadań 1 i 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.



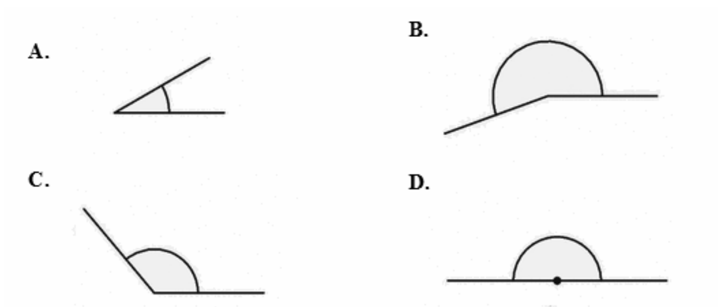
Zad. 1 Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości $4\sqrt{2}$ m?

a) 4 m b) 2 m c) 5,6 m d) 2,8 m

Zad. 2 Jaki jest obwód sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

a) 16 m b) 24 m c) $12\sqrt{3}$ m d) $6\sqrt{3}$ m

Zad. 3 Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły:



Zad. 4 Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

a) BARDZO ATRAKCYJNE CENY b) OBNIŻKA CEN

c) CENY PROMOCYJNE d) PRZECENA TOWARÓW

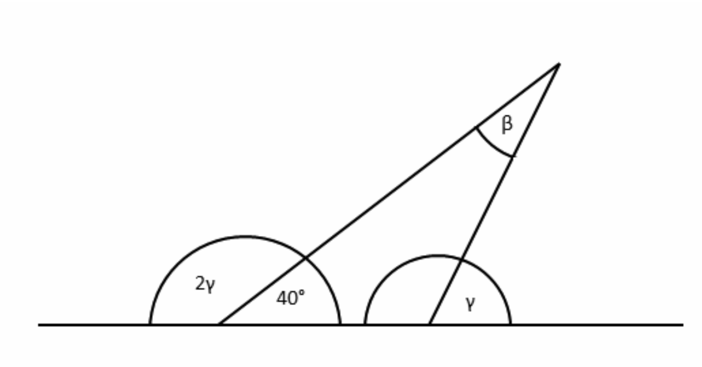
Zad. 5 Jaka miarę ma kąt β

a) 50°:

b) 35°

c) 30°

d) 40°



Zad. 6 Miara kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{3}$ okręgu wynosi:

a) 90° b) 60° c) 120° d) 80°

Zad. 7 Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

a) 6π b) 18π c) 9π d) 12π

Zad. 8 W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

a) przystające b) równoboczne c) podobne d) rozwartokątne

Zad. 9 Pole kwadratu o przekątnej długości $5\sqrt{6}$, to:

a) 25 b) 50 c) 75 d) 15

Zad. 10. Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $6\ \mathrm{cm}$ i $8\ \mathrm{cm}$, wynosi:

a) $24\ \mathrm{cm}^2$ b) $24\ \mathrm{cm}$ c) $10\ \mathrm{cm}$ d) $12\ \mathrm{cm}^2$

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	C	B	A	D	C	B

ZADANIA OTWARTE

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi …………

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi ………

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na ……………

Proste prostopadłe oznaczamy symbolem ……

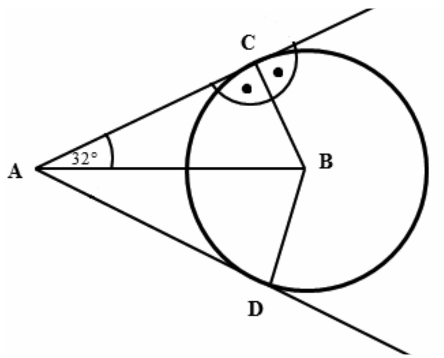
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach ………

Przez jeden punkt można poprowadzić ……… prostych.

Miejsce przecięcia się dwóch prostych, to………

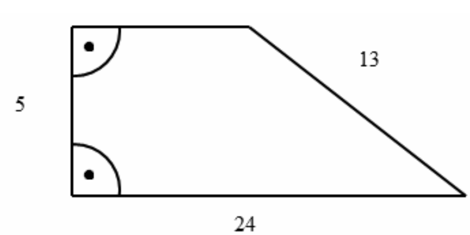
Kąt o mierze 180º nazywamy kątem ……

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$.



3. Oblicz x i y wiedząc, że punkty $A = (3x - 1; 2y)$ i $B = (x + 2; 4y - 1)$ są symetryczne względem osi OX .

4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



5. Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

Rozwiązania

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi 135° Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na równoramienne, równoboczne, różnoboczne. Proste prostopadłe oznaczamy symbolem ⊥ Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: romb, deltoid Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych Miejsce przecięcia się dwóch prostych to punkt Kąt o mierze 180° nazywamy kątem półpełnym.
2	$\sphericalangle A = 64°, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°, \sphericalangle B = 116°$
3	$3x - 1 = x + 2$ $-2y = 4y - 1$ $x = 1{,}5$ $y = \frac{1}{6}$
4	b $-b$ $-$ górna podstawa $b = 12$ $P = \frac{(24 + 12) \cdot 5}{2} = 65$ $L = 54$
5	Konstrukcja

„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków".

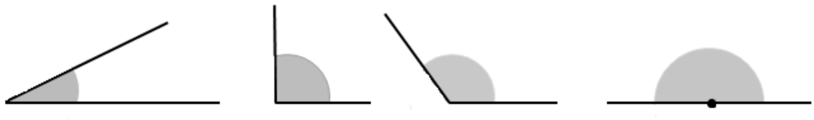
Planimetria jest działem geometrii (słowo „geometria" pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

4.1 Kąt środkowy i wpisany

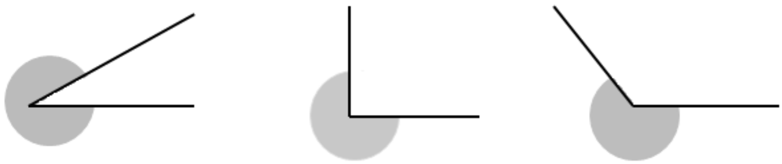
Teraz nauczę się stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na: **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe 180°) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od 180°, ale mniejsze od 360°).

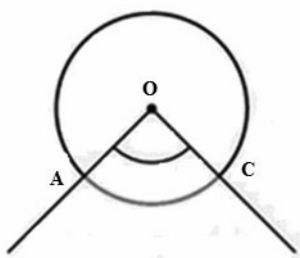
Kąty wypukłe:



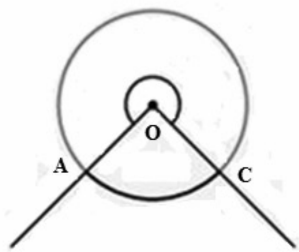
Kąty wklęsłe:



Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.

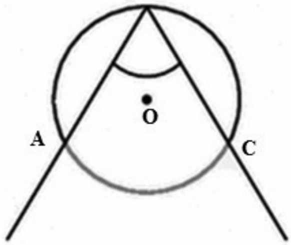


Kąt środkowy wypukły



Kąt środkowy wklęsły

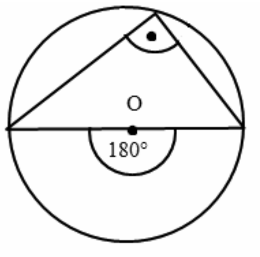
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.



Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.

Własności kątów środkowych i wpisanych

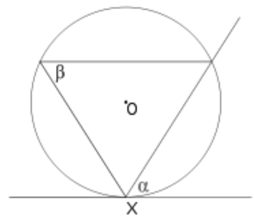
- Jeżeli kąt wpisany i środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.
- Kąt wpisany opary na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.



- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

Kąt dopisany do okręgu

Kąt dopisany do okręgu w punkcie X należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie X oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie X.



Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

$\alpha - kąt\ dopisany$

$\beta - kąt\ wpisany$

$\alpha = \beta$

Przykład 1

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A, jak na rysunku obok. Kąt dopisany $\alpha = 50°$. Oblicz miarę kąta ACB.

Dorysujmy promienie $OAOA$ i OB. Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$\sphericalangle OAB = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\sphericalangle OAB = 180° - 80° = 100°$

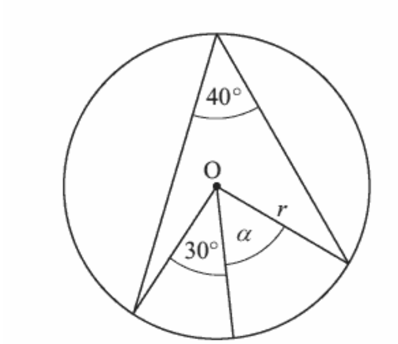
W takim razie z twierdzenie o kątach, wpisanym i środkowym, mamy:

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180° - 50° - 75° = 55°$

ZADANIA

4.1.1 Oblicz miarę kąta α.



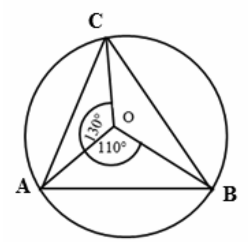
Odpowiedź: 50°

4.1.2 Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta środkowego ABS.

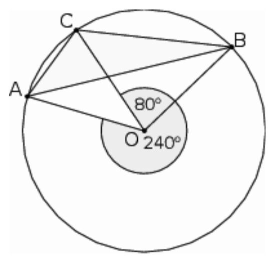
Odpowiedź: 120°

4.1.3 Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

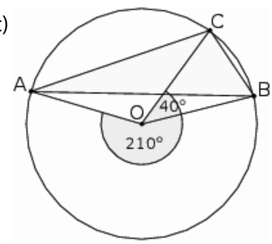
a)



b)



c)

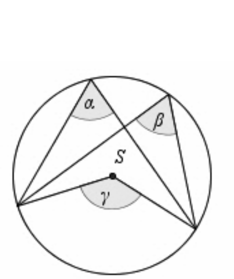


a) 60°, 65°, 55° b) 40°, 20°, 120° c) 20°, 55°, 105°

4.1.4 Okrąg podzielono na trzy części w stosunku $2 : 3 : 3$. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $45°,\ 45°,\ 90°$

4.1.5 Dany jest okrąg o środku w punkcie S. Miara kąta α jest równa $70°$. Ile wynosi suma miar kątów $\alpha + \beta$?



Odpowiedź: $210°$

4.1.6 Wierzchołki trójkąta $\mathbf{ABC}$ leżą na okręgu, a środek $\mathbf{O}$ okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąta $\mathbf{ABO}$ ma miarę $\mathbf{20^\circ}$, to jaką miarę ma kąt $\mathbf{ACB}$?

Odpowiedź: 70°

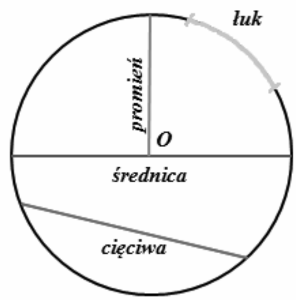
4.1.7 Ostrokątny trójkąt równoramienny $\mathbf{ABC}$ o podstawie $\mathbf{AB}$ jest wpisany w okrąg o środku $\mathbf{S}$, przy czym kąt $\mathbf{SAB}$ ma miarę $\mathbf{40^\circ}$. Oblicz miarę kąta $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: 65°

4.2 Wzajemne położenie prostej i okręgu

Teraz nauczę się korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od środka O. Okrąg oznaczamy $o(O, r)$.



Promieniem okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą r. Okrąg o promieniu r ma długość $2\pi r$.

Cięciwą okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i **okręgu:**

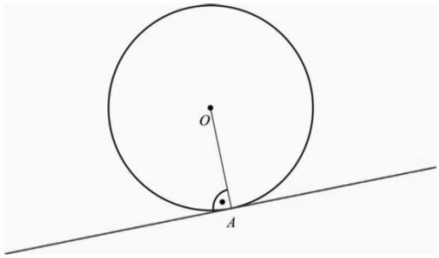
1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.

Definicja

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

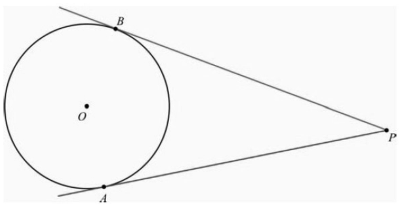
Twierdzenie 1.

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

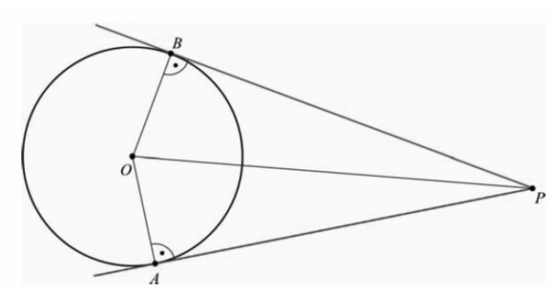


Twierdzenie 2.

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.



Dowód

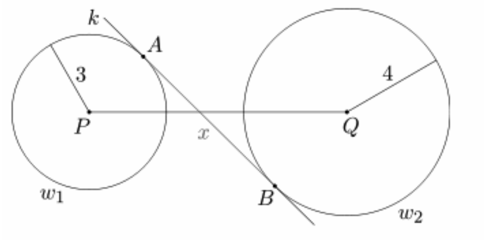


Trójkąty POA i POB są prostokątne. Półprosta PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$ (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$. Oznacza to (suma kątów w trójkącie),

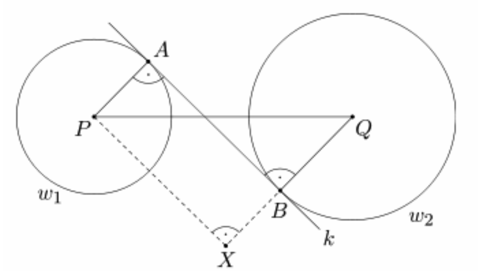
że również $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$. Ponadto $AO = BO = r$. Z cechy kbk wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że $PA = PB$.

Przykład

Dany jest odcinek $|PQ| = 10$ oraz okręgi: jeden o środku P i promieniu 3, a drugi o środku Q i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej k, która jest do nich styczna odpowiednio w punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB.



Zaznaczamy na prostej BQ, lecz poza odcinkiem BQ, taki punkt X, aby długość odcinka BX była równa 3. Następnie uzasadnimy, że czworokąt $ABXP$ jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PQX



Niech X będzie takim punktem leżącym na prostej BQ, poza odcinkiem BQ, że $|BX| = 3$. Proste AP i BX są prostopadłe do wspólnej prostej AB, więc $AP \parallel BX$ są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt $APXB$ jest równoległobokiem. A ponieważ w równoległoboku tym kąt $\sphericalangle PAB = 90^{\circ}$, więc równoległobok $ABXP$ jest prostokątem.

Zatem trójkąt PXQ jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |Ab|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4 + 3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

$$|AB| = \sqrt{51}$$

ZADANIA

4.2.1 Obwód okręgu jest równy $\mathbf{8\pi\ cm}$. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

a) nie mniejsza niż $4\ \mathrm{cm}$

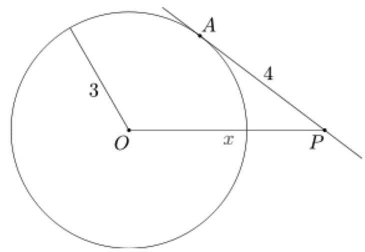
b) nie większa niż $3\ \mathrm{cm}$?

Odpowiedź:

a) jeden lub wcale

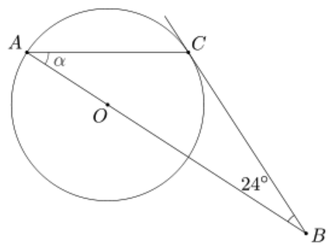
b) dwa punkty

4.2.2 Dany jest okrąg o środku O i promieniu 3. Przez punkt p leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiedząc, że długość odcinka AP wynosi 4, oblicz długość odcinka OP.



Odpowiedź: $|OP| = 5$

4.2.3 Dany jest okrąg o środku $\mathbf{O}$ oraz punkty $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie $\mathbf{C}$ przecina prostą $\mathbf{AO}$ w punkcie $\mathbf{B}$. Wiedząc, że miara kąta $\mathbf{ABC}$ wynosi $\mathbf{24°}$, oblicz miarę kąta $\mathbf{CAB}$.



Odpowiedź: $33°$

4.3 Wzajemne położenie dwóch okręgów

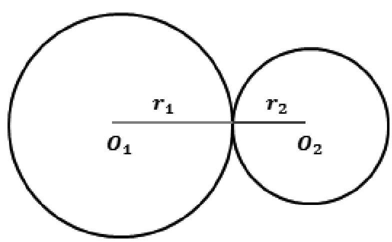
Teraz nauczę się korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)

Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

Okręgi styczne zewnętrznie

Okręgi styczne zewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.

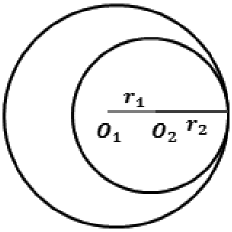
$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$



Okręgi styczne wewnętrznie

Okręgi styczne wewnętrznie mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.

$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

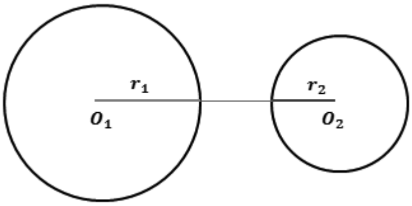


Okręgi rozłączne

Okręgi rozłączne nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:

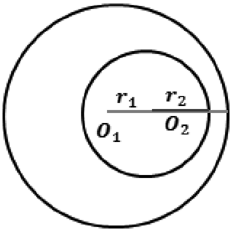
- Większa od sumy ich promieni

$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$



- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni

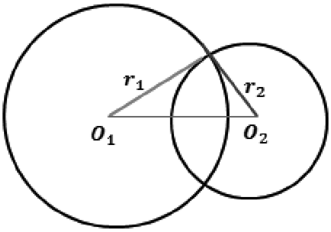
$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$



Okręgi przecinające się

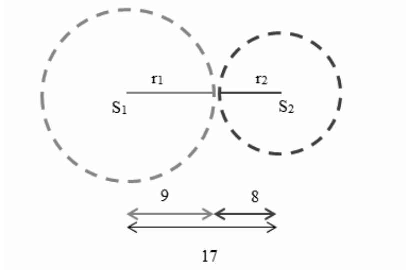
Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.

$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$



Przykład

Dane są dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio równych r_1 i r_2. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli $|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8$.



Robimy rysunek poglądowy. Jeden okrąg ma promień $r_1 = 9$, a drugi $r_2 = 8$.

Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.

ZADANIA

4.3.1 Określ wzajemne położenie okręgów $\mathbf{o(O_1, r_1)}$ i $\mathbf{o(O_2, r_2}$, jeśli $|\mathbf{O_1O_2}| = \mathbf{12\ cm}$ oraz:

a) $r_1 = 3\ cm,\ r_2 = 8\ cm$ b) $r_1 = 5\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

c) $r_1 = 9\ cm,\ r_2 = 7\ cm$ d) $r_1 = 22\ cm,\ r_2 = 10\ cm$

Odpowiedź:

a) rozłączne zewnętrznie b) styczne zewnętrznie

c) przecinające się d) styczne wewnętrznie

4.3.2 Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach $\mathbf{10\ cm}$ i $\mathbf{6\ cm}$, gdy:

a) okręgi te są styczne zewnętrznie

b) okręgi są styczne wewnętrznie

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego

d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

Odpowiedź:

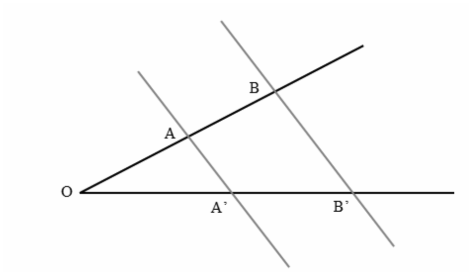
a) $|S_1S_2| = 16\ cm|S_1S_2| = 16\ cm$ b) $|S_1S_2| = 4\ cm|S_1S_2| = 4\ cm$

c) $|S_1S_2| = 6\ cm|S_1S_2| = 6\ cm$ d) $|S_1S_2| = 10\ cm|S_1S_2| = 10\ cm$

4.4 Twierdzenie Talesa

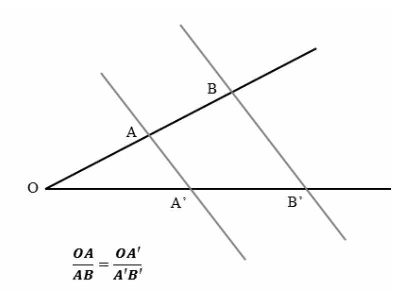
Teraz nauczę się stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.

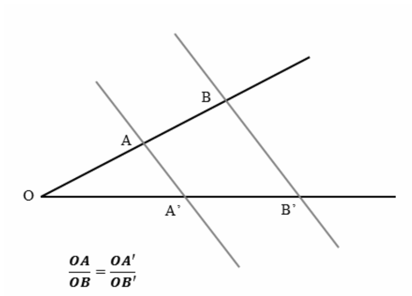


Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

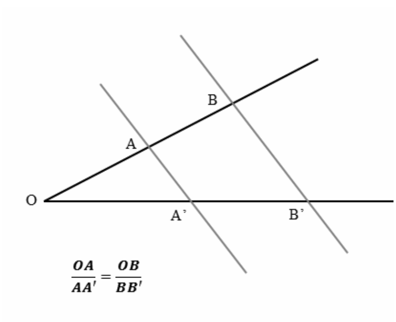
Przypadek 1



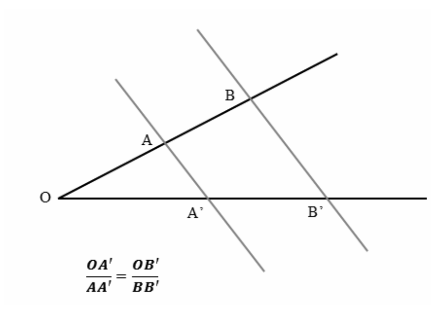
Przypadek 2



Przypadek 3

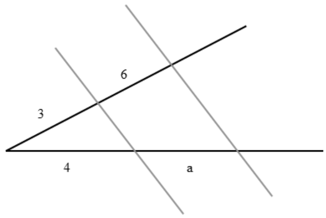


lub



Przykład1

Oblicz długość odcinka a.



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

Układamy proporcję: $\frac{3}{6}=\frac{4}{a}$

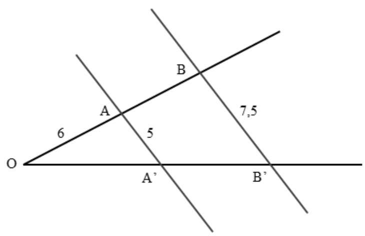
$3a = 6 \cdot 4$

$3a = 24 / :3$

$a = 8$

Przykład 2

Oblicz długość odcinka AB.



Obliczając długość odcinka AB, skorzystamy z przypadku 3.

Układamy proporcję: $\frac{OA}{AA'}=\frac{OB}{BB'}$

$\frac{6}{5}=\frac{6+|AB|}{7,5}$

$5(6+|AB|)=6\cdot 7,5$

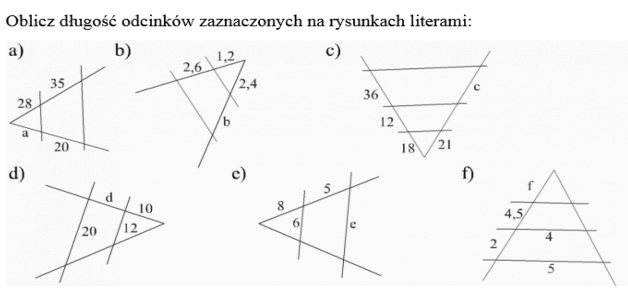
$30+5|AB| = 45/-30$

$5|AB| = 15 / :5$

$|AB| = 3$

ZADANIA

4.4.1 Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



Odpowiedź:

a) 16 | b) 5,2 | c) 42

d) $6\frac{2}{3}$ | e) $9\frac{3}{4}$ | f) 3,52

4.4.2 W trapezie $\mathbf{ABCD}$, gdzie $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{CD}$, przedłużono boki $\mathbf{AD}$ i $\mathbf{BC}$ do przecięcia w punkcie $\mathbf{S}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DS}$ wiedząc, że jest on krótszy od odcinka $\mathbf{CS}$ o $\mathbf{3\ cm}$ i $|\mathbf{AD}| = \mathbf{16\ cm}$, a $|\mathbf{BC}| = \mathbf{24\ cm}$.

Odpowiedź: 6 cm

4.4.3 W trapezie krótsza podstawa wynosi 6, zaś ramiona mają długość 4 i 5. Ramiona trapezu przedłużono tak, że powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości 4 zostało przedłużone o odcinek długości 3.

Odpowiedź: 30

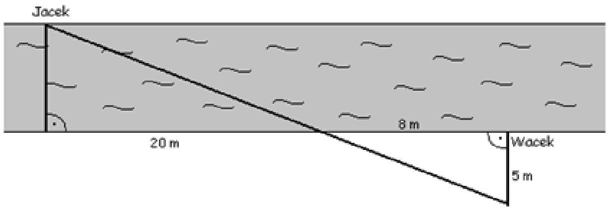
4.4.4 W trójkąt równoramienny o podstawie $\mathbf{8\ cm}$ wpisano kwadrat o boku równym $\mathbf{6\ cm}$, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

Odpowiedź: 24 cm

4.4.5 Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

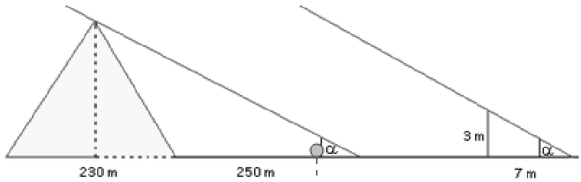
Odpowiedź: 3,4 cm

4.4.6 Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



Odpowiedź: 12,5 cm

4.4.7 Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



Odpowiedź: 156,43 m

4.4.8 Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

Odpowiedź: 12 m

4.4.9 W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: AC = 2,4 i CB = 7,2 m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec A podniesie się na wysokość 4 metrów.

Odpowiedź: O 12 m.

4.4.10 Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm , a średnicę 2 cm?

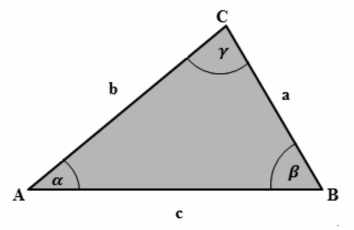
Odpowiedź: Wielkość przedmiotów z odległości 100 m wynosi 10 m.

4.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne

Teraz nauczę się:

- sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt;
- sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny;
- obliczać miary kątów i długości boków trójkąta;
- obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona;
- korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

Trójkąt – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Podział trójkątów

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

- **Podział trójkątów ze względu na kąty:**

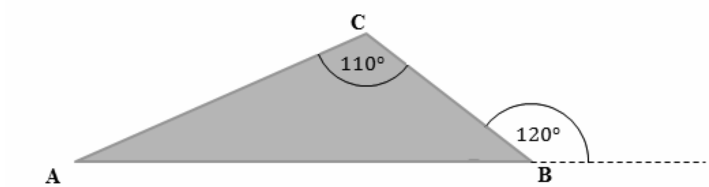
1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.
2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną.**
3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

- **Podział trójkątów ze względu na boki:**

1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę 60°.
2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.
3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 110º, a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę 120º. Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



$\sphericalangle B = 180° - 120° = 60°$

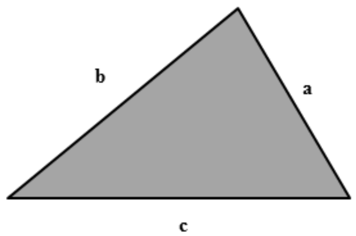
$110° + 60° + \sphericalangle A = 180°$

$170° + \sphericalangle A = 180°$

$\sphericalangle A = 180° - 170°$

$\sphericalangle A = 10°$

Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > c$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > b$

$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > a$

Przykład 2

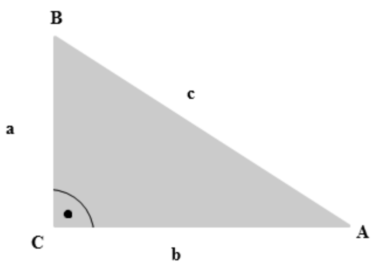
Sprawdź, czy odcinki o długościach $5, 6, 3\sqrt{2}$ mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości. Należy sprawdzić, czy suma długosci dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4{,}25 \approx 9{,}25 > 6$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

Twierdzenie Pitagorasa

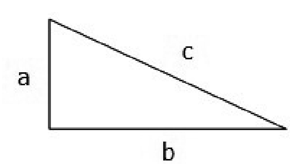


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$

Przykład 3

<u>Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: </u>$3:4$, a przeciwprostokątna ma długość 15 cm.



$a = ?$

$b = ?$

$c = 10\ cm$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3 : 4$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2 a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15\ cm^{\ 2})$$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225\ cm^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225\ cm^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144\ cm^2$$

$$b = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \Rightarrow \ a = \frac{3}{4} \cdot 12\ cm = 9\ cm$$

Odpowiedź: Przyprostokątne mają długości $9\ \mathrm{cm}$ i $12\ \mathrm{cm}$.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a) $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$ b) $2, \sqrt{10}, 4$

a) $\left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$24 = 3 + 21$

$24 = 24$

$L = P$

Trójkąt jest prostokątny

b) $4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2 4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2$

$16 = 10 + 4$

$16 \neq 14$

$L \neq P$

Trójkąt nie jest prostokątny

Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską.**

Przykłady takich trójek:

3, 4, 5;

5, 12, 13;

40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q takie, że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$a^2 + b^2 = c^2$

Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

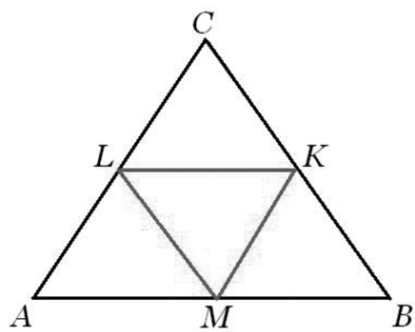
Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$AB \parallel LK \qquad |LK| = \frac{1}{2}|AB|$

$AC \parallel KM \qquad |KM| = \frac{1}{2}|AC|$

$BC \parallel LM \qquad |LM| = \frac{1}{2}|BC|$



ZADANIA

4.5.1 Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.

Odpowiedź: 30°, 40°, 110°

4.5.2 Jeden kąt trójkąta ma miarę 26°, a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi 12°. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Odpowiedź: 26°, 71°, 83°

4.5.3 Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3:5:4.

Odpowiedź: $a = 12\ \mathrm{cm}, b = 20\ \mathrm{cm}, c = 16\ \mathrm{cm}$

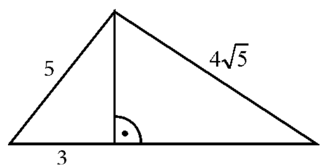
4.5.4 W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.

Odpowiedź: 8 cm

4.5.5 W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

4.5.6 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:



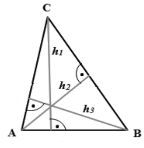
Odpowiedź: $P = 22$

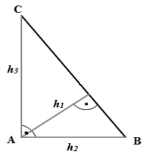
4.5.7 Dany jest trójkąt $\mathbf{ABCABC}$ o bokach długości: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{6}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AC}| = \mathbf{5}$. Punkt $\mathbf{M}$ jest środkiem boku $\mathbf{AC}$, punkt $\mathbf{N}$ – środkiem boku $\mathbf{BC}$. Obliczyć obwód trapezu $\mathbf{ABNM}$.

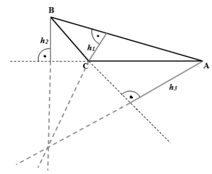
Odpowiedź: 13,5

Wysokości i **środkowe** w **trójkącie**

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

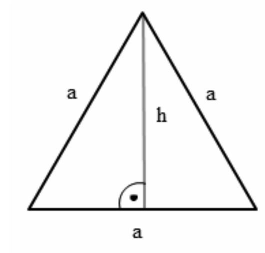






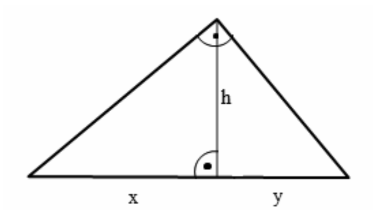
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



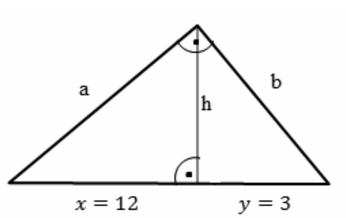
Wysokość trójkąta o boku a jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

W **trójkącie prostokątnym** wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki x, y, dla których $h = \sqrt{x \cdot y}$



Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 3 cm i 12 cm. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.



a, b – szukane długości przyprostokątnych

h – wysokość

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej a

$a^2 = x^2 + h^2$

$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$

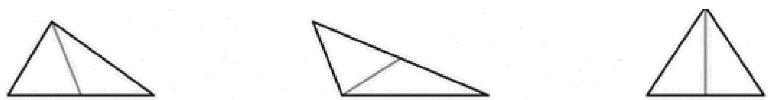
Podobnie liczymy długość przyprostokątnej b

$$b^2 = y^2 + h^2$$

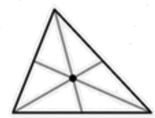
$$b^2 = 9 + 36 = 45 \ \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$$

Wysokość trójkąta ma długość $6\ \mathrm{cm}$, a przyprostokątne $6\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$ i $3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$.

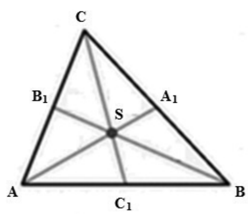
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

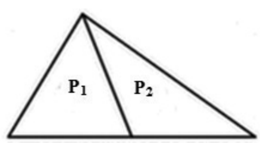


Środek ciężkości S dzieli każdą środkową w stosunku $2 : 1$.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości $3, 5, 6$.

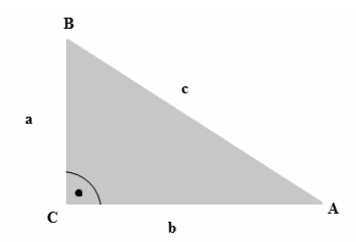
Liczymy najpierw ile wynosi połowa obwodu trójkąta $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

Odpowiedź: Pole trójkąta o bokach $3, 5$,6 wynosi $2\sqrt{14}$.

Twierdzenie

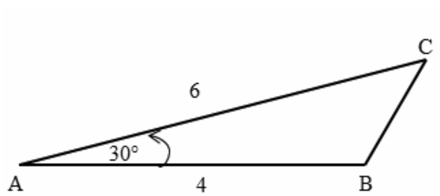
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BCA|}$$

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot sin30^\circ$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6j^2$.

ZADANIA

4.5.8 W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: 16 cm$, 2\sqrt{97}$ cm$, 2\sqrt{97}$ cm

4.5.9 W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Odpowiedź: $64, 16+16\sqrt{2}64, 16+16\sqrt{2}$

4.5.10 Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|\mathbf{AB}| = \mathbf{4}$ i $|\mathbf{BC}| = \mathbf{2\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $\sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90°$

4.5.11 Oblicz pole trójkąta ABC jeśli $|\mathbf{AC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AB}| = \mathbf{7}$, $\sphericalangle \mathbf{BAC} = \mathbf{60°}$.

Odpowiedź: $7\sqrt{3}$

4.5.12 Oblicz pole trójkąta o bokach $\mathbf{12}$ i $\mathbf{9\sqrt{2}}$ oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze 30°.

Odpowiedź: $27\sqrt{2}$

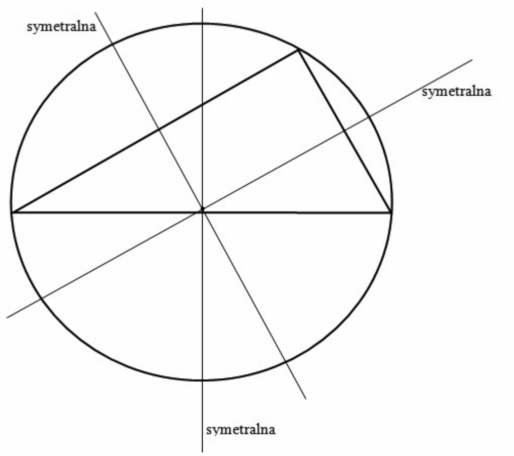
4.5.13 W trójkącie ostrokątnym $\mathbf{ABC}$ poprowadzono prostą prostopadłą do boku $\mathbf{AB}$, przecinającą bok $\mathbf{AC}$ w punkcie $\mathbf{E}$ i bok $\mathbf{AB}$ w punkcie $\mathbf{F}$. Punkt $\mathbf{D}$ jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu $\mathbf{C}$. Wiedząc, że $|\mathbf{EC}| = \mathbf{3}|\mathbf{FD}| = \mathbf{1}$, oblicz sinus kąta $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

4.6 Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*

Teraz nauczę się stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu

Okrąg opisany na trójkącie

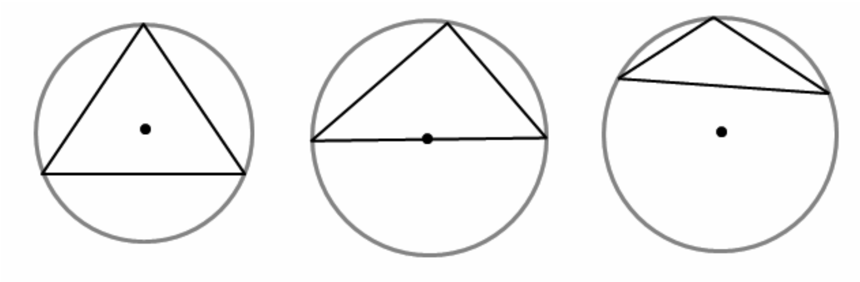


Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

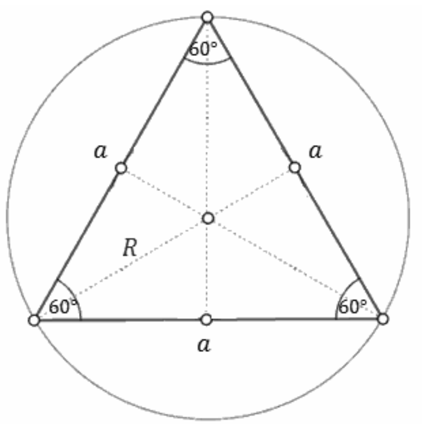
Na każdym trójkącie można opisać okrąg.



- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

OKRĘGI OPISANE NA WYBRANYCH TRÓJKĄTACH

Trójkąt równoboczny



R – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

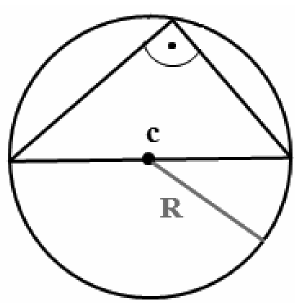
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



c – przeciwprostokątna

h – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$R = \frac{1}{2}c$$

Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku $a = 12$ cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru $R = \frac{2}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 12\text{ cm}$, to:

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

więc $R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi $2R$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$$

$$(2R)^2 = 16 + 100$$

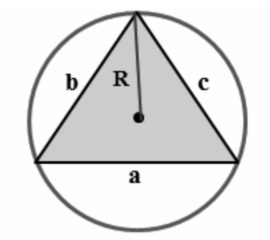
$$4R^2 = 116 /:4$$

$$R^2 = 29 \ \Rightarrow R = \sqrt{29}$$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = \sqrt{29}$.

Pole trójkąta wpisanego w **okrąg**

Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.



Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wynosi $\boldsymbol{P = \frac{abc}{4R}}$

ZADANIA

4.6.1 Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: 8π**.**

4.6.2 Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $25\pi\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

4.6.3 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

a) równobocznym, o boku o długości $8\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

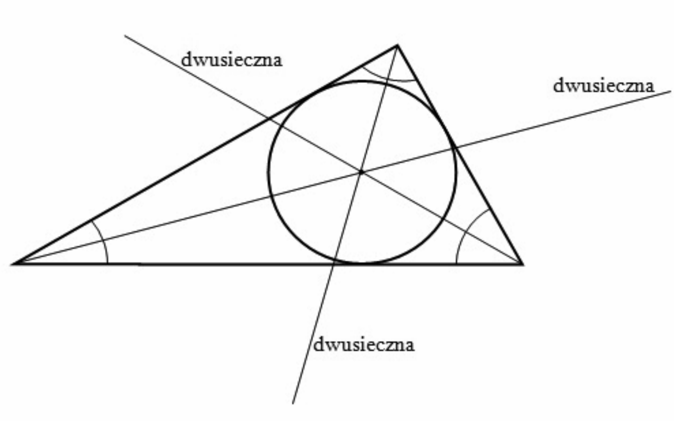
b) prostokątnym, o przyprostokątnych $12\ \mathrm{cm}$ i $18\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $R = 3\sqrt{13}$.

4.6.4 Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy $13\frac{13}{24}$. Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

Odpowiedź: 17.

Okrąg wpisany w **trójkąt**



Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta.

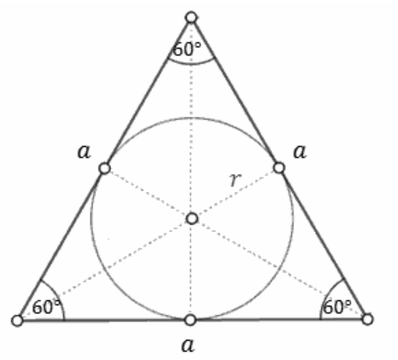
Dwusieczna kąta to półprosta, która ma początek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa kąty o równych miarach.

Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

Trójkąt równoboczny



r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

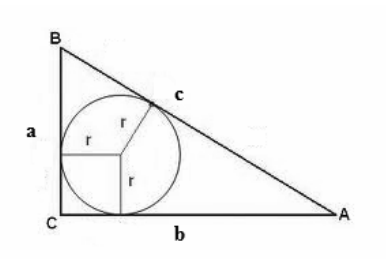
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{1}{3}h$

Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$r = \frac{a+b-c}{2}$

Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ \mathrm{cm}$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 8\ \mathrm{cm}$, to:

$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

więc $r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ \mathrm{cm}$ wynosi $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$.

Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3\ \mathrm{cm}$ i przeciwprostokątnej $5\ \mathrm{cm}$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$5^2 = 3^2 + a^2$

$25 = 9 + a^2$

$a^2 = 16\ \Rightarrow a = 4\ cm$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru $r = \frac{a+b+c}{2}$, więc

$$r = \frac{4+3-5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 1 cm.

Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c opisanego na okręgu o promieniu r jest równe

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

ZADANIA

4.6.5 Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

4.6.6 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:

a) Pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: $25\pi \text{ cm}^2$

b) Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $4\pi \text{ cm}^2$

c) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Odpowiedź: $h = \frac{24}{5} \text{ cm}$

4.6.7 Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

4.6.8 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $\mathbf{12 \text{ cm}}$. Kąty przy tej podstawie mają po $\mathbf{30}°$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $r = \left(12 - 6\sqrt{3}\right)$

4.6.9 Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $\mathbf{a}$ i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:

a) $a = 4$ b) $a = 3\sqrt{6}$ c) $a = 6\sqrt{2}$ d) $a = 12$

Odpowiedź:

a) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3} r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $r = \sqrt{3},\ R = 3\sqrt{2} r = \sqrt{3},\ R = 3\sqrt{2}$

c) $r = \sqrt{6},\ R = 2\sqrt{6} r = \sqrt{6},\ R = 2\sqrt{6}$

d) $r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3} r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}$

4.6.10 W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{5}{12}, tg\beta = \frac{12}{5}$

4.7 Przystawanie i podobieństwo trójkątów

Teraz nauczę się:

- rozpoznawać trójkąty przystające i podobne;
- wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów

Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.

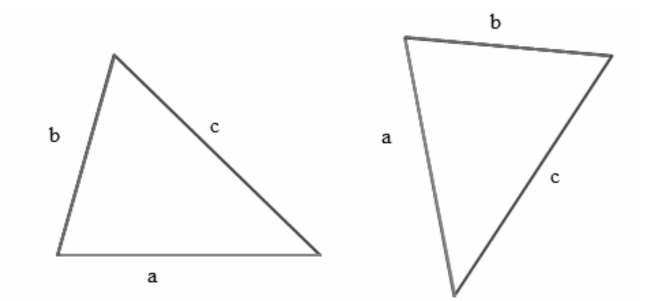
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem ≡.

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

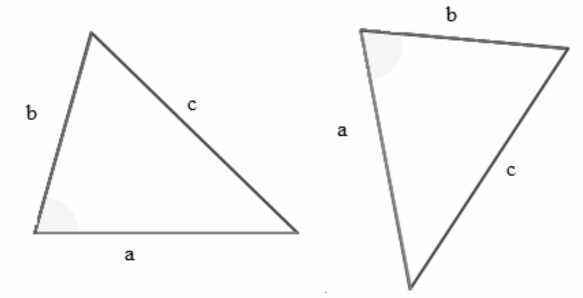
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



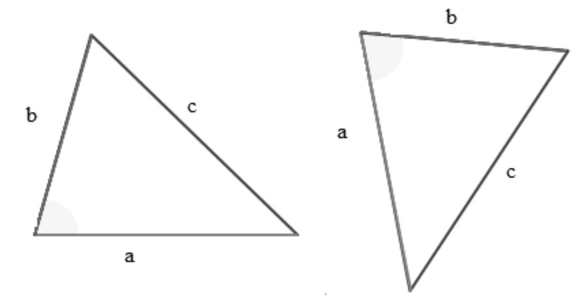
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



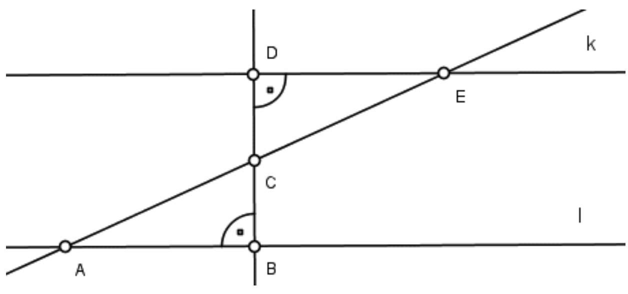
III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Przykład 1

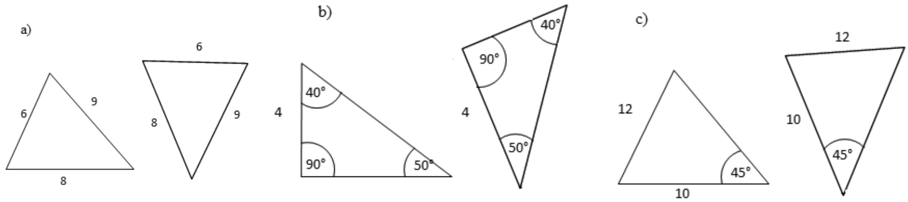
Proste k i l są równoległe. Punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.



Kąty BCA oraz DCE jako kąty wierzchołkowe mają równe miary. $|DC| = |CB|$ ponieważ punkt C jest środkiem odcinka BD. Wobec powyższych faktów, trójkąty ABC oraz DCE na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

ZADANIE

4.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

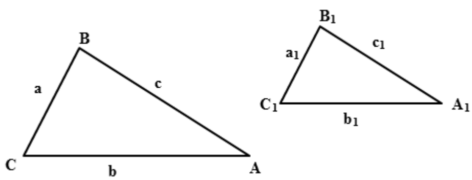
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem ~.

I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



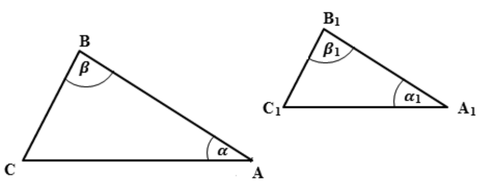
$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} = k$$

k – skala podobieństwa

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \beta_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

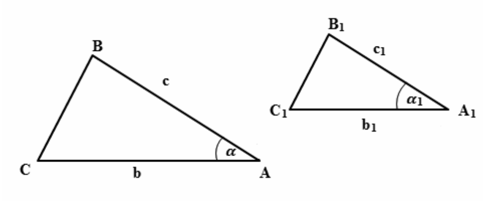
III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.

$\alpha = \alpha_1$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

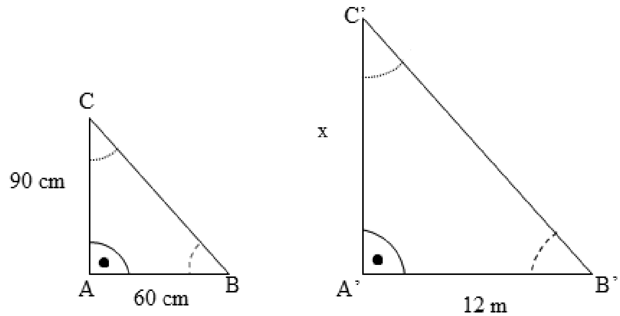
$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$



Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.

W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{x}{12}$$

$$6x = 9 \cdot 12$$
$$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$$

Odpowiedź: Wieża ma wysokość 18 m.

ZADANIA

4.7.2 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ w skali $\mathbf{k = 2}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$, jeśli: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{5}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{7}, |\mathbf{CA}| = \mathbf{4}$.

Odpowiedź: $|A'B'| = 10, |B'C'| = 14, |C'A'| = 8$.

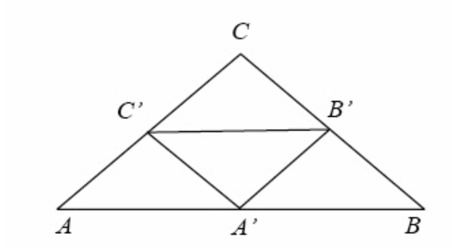
4.7.3 Ramiona trapezu $\mathbf{ABCD}$ przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie $\mathbf{E}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DE}$.

Odpowiedź: 12.

4.7.4 Punkty $\mathbf{A', B', C'}$ są środkami boków trójkąta $\mathbf{ABC}$. Pole trójkąta $\mathbf{A', B', C'}$ jest równe $\mathbf{4}$. Oblicz pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Odpowiedź: 16.

4.7.5 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$. Oblicz długość boku $|\mathbf{A'C'}|$, jeżeli



Odpowiedź: $|A'C'| = 7{,}5 \text{ cm}$**.**

4.7.6 Trójkąty $\mathbf{ABC}$ i $\mathbf{A'B'C'}$ są podobne. Trójkąt $\mathbf{ABC}$ ma boki o długości $\mathbf{4\ cm}$, $\mathbf{6\ cm}$

i $\mathbf{8\ cm}$. Obwód trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ wynosi $\mathbf{135\ cm}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$.

Odpowiedź: $30 \text{ cm}, 45 \text{ cm}, 60 \text{ cm}$.

4.7.7 Drzewo o wysokości $\mathbf{4\ m}$ rzuca cień o długości $\mathbf{8\ m}$. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości $\mathbf{3\ m}$. Oblicz wysokość znaku drogowego.

Odpowiedź: $1{,}5 \text{ m}$.

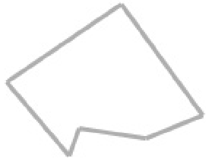
4.8 Wielokąty

Teraz nauczę się:

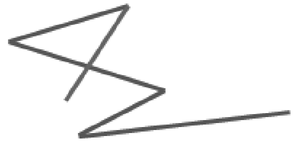
- obliczać liczbę przekątnych wielokąta;
- obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta

Łamaną nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.

Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej.**



Łamana zwyczajna zamknięta

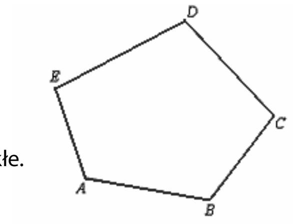


Łamana zwyczajna otwarta

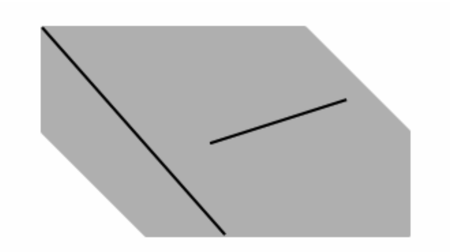
Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.

Wielokąt o n bokach nazywamy również n–kątem.

Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.



Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.



Wielokąt wypukły

Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie

Wielokąt wklęsły

Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\boldsymbol{\frac{(n-3)n}{2}}$$

Przykład 1

Oblicz liczbę przekątnych 17–kąta.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:

$$\boldsymbol{(n-2)\cdot 180^\circ}$$

Przykład 2

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3) \cdot 17}{2} = \frac{14 \cdot 17}{2} = 119$$

$$(n-2) \cdot 180° = (17-2) \cdot 180° = 15 \cdot 180° = 2700°$$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę". To znaczy mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n". Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \ /\cdot 2$$

Obliczamy powstałe równanie:

$$(n-3)n = 108$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 441$$

$$\sqrt{\Delta} = 21$$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ – nie spełnia warunków zadania – liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+21}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1080°$. Jaki to wielokąt?

Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$(n-2) \cdot 180° = 1080° \ /: 180°$$

$$n - 2 = 6$$

$$n = 8$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

ZADANIA

4.8.1 Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: dziesięciokąt.

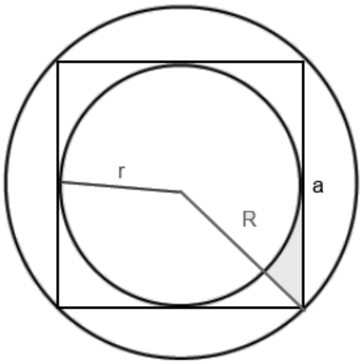
4.8.2 Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1620°$. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: jedenastokąt.

Czworokąty

Na początek przypomnimy podstawowe wzory na pola czworokątów.

Kwadrat



$P = a^2$

$P = 2R^2$

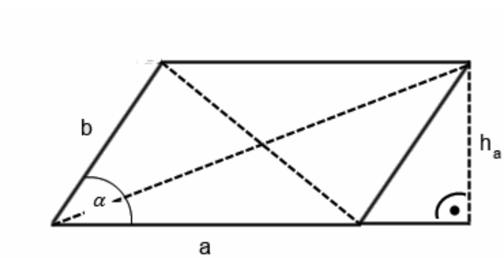
$P = 4r^2$

d – przekątna

$d = a\sqrt{2}$

$P = \frac{1}{2}d^2$

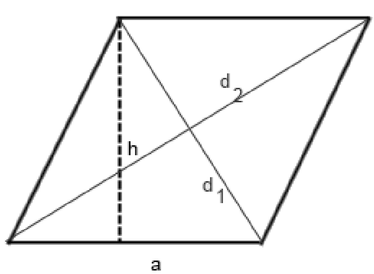
Równoległobok



$P = a \cdot h_a$

$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Romb

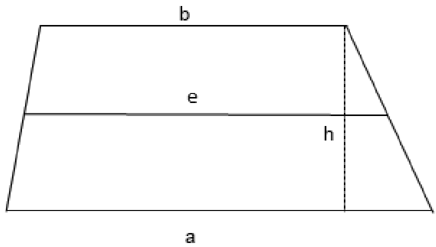


$P = a \cdot h_a$

$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$

$P = a^2 sin\alpha$

Trapez

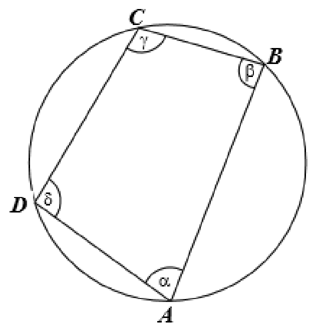


$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

e – odcinek łączący środki ramion trapezu

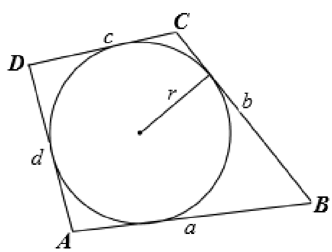
$$e = \frac{a+b}{2}$$

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.



W **czworokąt wypukły można wpisać okrąg** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$a + c = b + d$



ZADANIA

4.8.3 Oblicz pole równoległoboku o bokach $\mathbf{7cm}$ i $\mathbf{12cm}$, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o 60°.

Odpowiedź: $42\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$**.**

4.8.4 W rombie $\mathbf{ABCD}$ bok AB ma długość $\mathbf{20\ cm}$, a przekątna $\mathbf{BD}$ ma długość $\mathbf{24\ cm}$. Punkty $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ są kolejno środkami boków rombu.

a) wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest prostokątem
b) oblicz pole tego prostokąta

Odpowiedź:

b) $P = 192\ \mathrm{cm}^2$.

4.8.5 W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą $\mathbf{45}^\circ$ i . Oblicz pole trapezu.

Odpowiedź: $P = 21(\sqrt{3} - 1)\ \mathrm{cm}^2$**.**

4.8.6 Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedź: $P = 45\ \mathrm{cm}^2$

4.8.7 W trójkącie prostokątnym ABC dane są $|\mathbf{AC}| = \mathbf{12}$, $\sphericalangle \mathbf{CAB} = \mathbf{60}^\circ$. Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1:5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.

Odpowiedź: $P = 70\sqrt{3}$**.**

4.8.8 W czworokącie $\mathbf{ABCD}$ przekątne $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BD}$ przecinają się w punkcie $\mathbf{E}$. Dane są pola trzech trójkątów : $\mathbf{P_{BCE}} = \mathbf{15}, \mathbf{P_{ECD}} = \mathbf{5}, \mathbf{P_{AED}} = \mathbf{10}$. Oblicz pole czworokąta $\mathbf{ABCD}$.

Odpowiedź: 60.

4.9 Wielokąty foremne

Teraz nauczę się obliczać:

- miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego;
- sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego;
- pola wielokątów foremnych

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.

Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.

Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

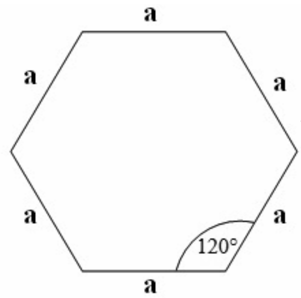
Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

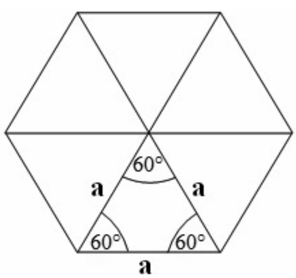
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny.**



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi 720°.

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę 120°.



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	Pole	Promień okręgu opisanego na wielokącie	Promień okręgu wpisanego w wielokąt
Trójkąt równoboczny	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ZADANIA

4.9.1 Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $\mathbf{4{,}5\ cm}$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $R = 3\ \mathrm{cm},\ r = 1{,}5\ \mathrm{cm}.$

4.9.2 W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

4.9.3 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód długości $\mathbf{10\ cm}$. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

Odpowiedź: pole trójkąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{9}$, pole kwadratu $P = 6\frac{1}{4}$, pole sześciokąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{6}$.

4.9.4 Pole kwadratu jest równe $\mathbf{8\ cm^2}$. Oblicz promień koła:

a) opisanego na kwadracie

b) wpisanego w kwadrat

Odpowiedź: $R = 2\ \mathrm{cm},\ r = \sqrt{2}\ \mathrm{cm}$**.**

4.9.5 W koło o polu $\mathbf{6{,}25\pi\ cm^2}$ wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

Odpowiedź: $P = 12{,}5\ \mathrm{cm}$**.**

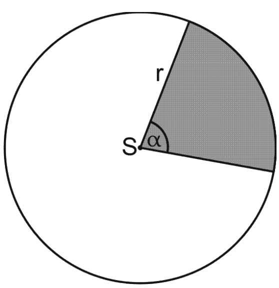
4.10 Pole koła i długość okręgu

Teraz nauczę się obliczać: pole koła i wycinka koła oraz długość okręgu

Dla danego koła o promieniu r możemy policzyć:

pole: $\boldsymbol{P = \pi r^2}$

oraz obwód: $\boldsymbol{L = 2\pi r}$



Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu r.

Kąt pełny ma 360°. Podzielmy całe koło na wycinki o kącie 1°. Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$$P = \frac{\pi r^2}{360°}$$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie α stopni będzie miał postać:

$$\boldsymbol{P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole wycinka koła o promieniu $r = 10$ i kącie równym 60°.

Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:

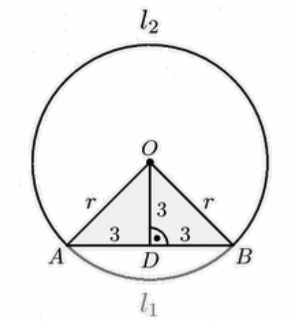
$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$$

Długość l łuku okręgu o promieniu r, odpowiadającego kątowi środkowemu o mierze α, wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r}$$

Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości $6\ \mathrm{cm}$ odległą o $3\ \mathrm{cm}$ od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt AOB jest równoramienny. Odcinek OD jest jego wysokością i dzieli cięciwę AB o długości $6\ \mathrm{cm}$ na dwie równe części po $3\ \mathrm{cm}$. Promień r liczymy z twierdzenia Pitagorasa.

$$3^2 + 3^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 18 = r^2 \quad \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\ cm$$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180°. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych ADO i DBO są równe $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

$$\sphericalangle AOB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Długość łuku l_1 wynosi:

$$l_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku l_1.

$$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \pi\ \mathrm{cm}.$$

Odpowiedź: okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$ i $4\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \pi\ \mathrm{cm}$.

ZADANIA

4.10.1 Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $\mathbf{60^\circ}$ ma długość $\mathbf{2}$. Oblicz pole tego wycinka.

Odpowiedź: 6π**.**

4.10.2 Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\boldsymbol{\pi}$ odpowiada kąt $\mathbf{135^\circ}$.

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{6}}{9}$**.**

4.10.3 Promień koła jest równy $\mathbf{2\ cm}$. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze $\mathbf{30^\circ}$?

Odpowiedź: $\frac{1}{3}\pi$**.**

4.10.4 Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie $\mathbf{60^\circ}$, jeżeli promień koła ma długość $\mathbf{6\ cm}$.

Odpowiedź: $P = 6\pi\ \mathrm{cm}^2,\ l = 2\pi\ \mathrm{cm}$**.**

4.10.5 Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu $\mathbf{9\ cm}$ i kącie $\mathbf{60^\circ}$.

Odpowiedź: $l = 3\pi\ \mathrm{cm}, P = 13{,}5\pi\ \mathrm{cm}^2$**.**

4.10.6 Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie $\mathbf{120^\circ}$, wynosi $\boldsymbol{l = 8\pi\ cm}$.

Odpowiedź: $r = 12\ \mathrm{cm}$**.**

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[40] W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość:

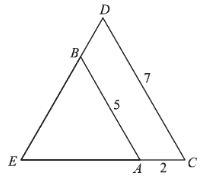
a) 6 b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{29}$ d) 14

2. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) $16\sqrt{6}$ b) $14\sqrt{6}$ c) $12+4\sqrt{6}$ d) $12+2\sqrt{6}$

40 Zadania 1-6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 01.03.2013.

3. *Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:

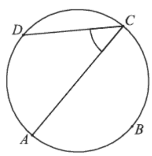


a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{14}{5}$ c) 3 d) 5

4. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

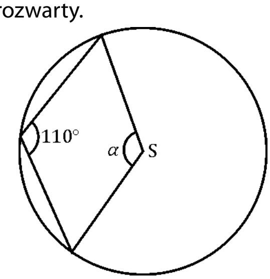
a) 25 b) 50 c) 75 d) 100

5. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa:



a) 90° b) 60° c) 45° d) 30°

6. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.



7.[41] Punkt S jest środkiem koła. Zatem miara kąta α jest równa (patrz na rysunek):

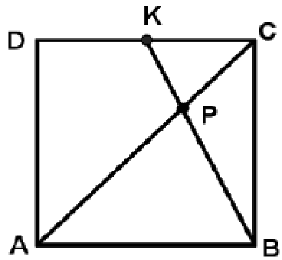
a) 70° b) 220° c) 140° d) 250°

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe 30° i 60°. Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

41 Zadanie 7, 8, 9: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze, 01.03.2013.

9. Na boku DC kwadratu $ABCD$ obrano punkt K tak, że $|DK| = |KC|$ (zobacz rysunek). Przekątna AC kwadratu przecina odcinek BK w punkcie P. Uzasadnij, że pole trójkąta ABP jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta KCP.



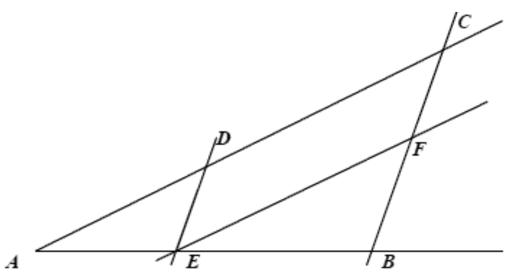
10.[42] Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

a) 36π b) 9π c) $18\sqrt{3}\pi$ d) 12π

11. Odcinek o długości 2,4 m podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

a) 120 cm b) 0,72 m c) 480 mm d) 14 dm

12. *Proste DE i CB oraz EF i AC są równoległe. Oblicz długość odcinka EB, jeżeli $AE = 2{,}5$, $DE = 3$ oraz $FB = 4$.



13. Wykaż, że wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki AD i DB, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio AC i BC tego trójkąta.

14.[43] W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

a) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ d) $\frac{1}{17}$

42 Zadania 10-13: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 01.03.2013.
43 Zadanie 14, 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 01.03.2013.

15. Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{5}$

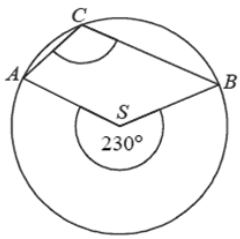
16.[44] Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1:

a) o 10% b) o 110% c) o 21% d) o 121%

17. Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 14. Bok AB tego prostokąta ma długość 6. Długość boku BC jest równa:

a) 8 b) $4\sqrt{10}$ c) $2\sqrt{58}$ d) 10

18. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego ACB jest równa:

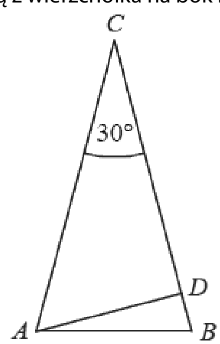


a) 65° b) 100° c) 115° d) 130°

19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

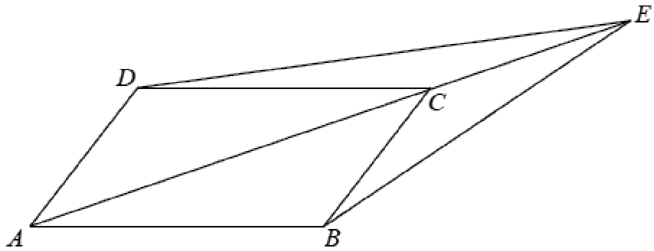
a) 36 b) 18 c) 12 d) 6

20. W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok BC.



44 Zadania 16-21: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 01.03.2013.

21. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.



22.[45] Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

a) 21° i 105 b) $11°$ i $66°$ c) 18° i $108°$ d) 16° i $96°$

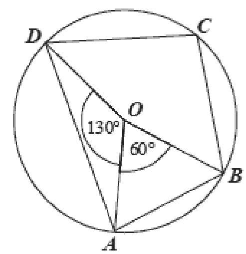
23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta a dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm d) 8 cm

25. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany BAD ma miarę:



a) 150° b) 120° c) 115° d) 85°

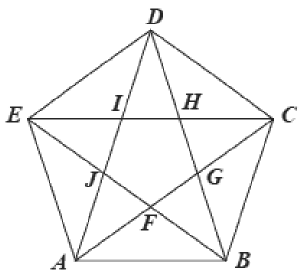
26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

27.[46] W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość:

a) 6 b) $2\sqrt{21}$ c) $2\sqrt{29}$ d) 14

45 Zadania 22-26: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 02.03.2013.
46 Zadania 27-31: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf,0 2.03.2013.

28. Pięciokąt $ABCDE$ jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ECD:



A. $\Delta\, ABF$

B. $\Delta\, CAB$

C. $\Delta\, IHD$

D. $\Delta\, ABD$

29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) $16\sqrt{6}$ b) $14\sqrt{6}$ c)1 $2 + 4\sqrt{6}$ d) $12 + 2\sqrt{6}$

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

a) 25 b) 50 c) 75 d) 100

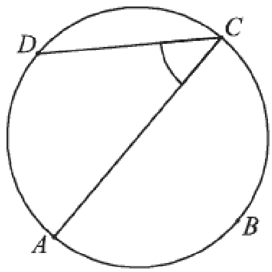
31. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa:

A. 90°

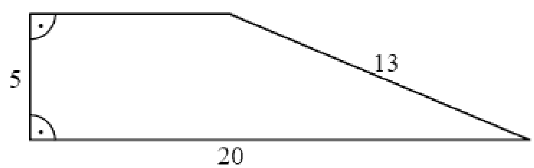
B. 60°

C. 45°

D. 30°



32.[47] Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.

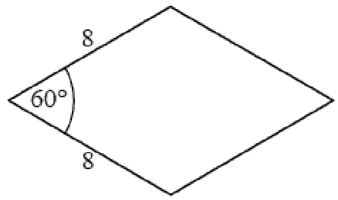


Obwód tego trapezu jest równy:

a) 43 b) 46 c) 48 d) 50

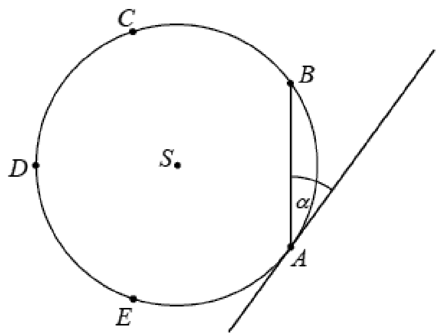
47 Zadania 32-35: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 03.03.2013.

33. Bok rombu ma długość 8, a kąt ostry ma miarę 60°. Wysokość tego rombu jest więc równa:



a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$

34. Punkty A, B, C, D i E leżą na okręgu o środku S i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek).

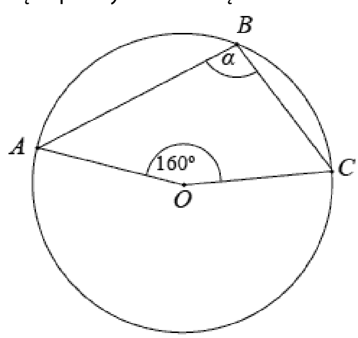


Wówczas miara kąta ostrego α między cięciwą AB i styczną do tego okręgu w punkcie A jest równa:

a) 18° b) 30° c) 36° d) 54°

35. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

36.[48] Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę:



a) 80° b) 100° c) 110° d) 120°

48 Zadanie 36, 37, 38: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 04.03.2013.

37. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa:

a) $3\sqrt{3}$ b) 3 c) $6\sqrt{3}$ d) 6

38. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

39.[49] Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:

a) 7 b) 14 c) 21 d) 28

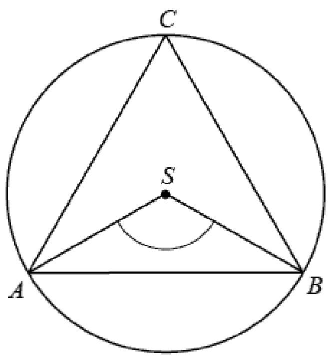
40. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:

a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 8 d) 4

41. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{61}$

42. Punkty A, B, C, leżące na okręgu o środku S, są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

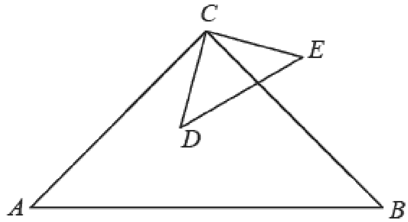


Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa:

a) 120° b) 90° c) 60° d) 30°

49 Zadania 39-44: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

43. Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $AD = BE$.



44. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

45.[50] Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E takie, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Wykaż, że kąt $|\sphericalangle DCE| = 45°$.

46. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.

Odpowiedź: $2(\sqrt{2}+1)$.

47. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

a) $120°$ b) $135°$ c) $144°$ d) $150°$

Odpowiedź: c.

48. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{3}$

49. Długościami boków trójkąta mogą być:

a) $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$ b) 6 mm; 0,1 dm; 12 cm

c) $4{,}2 - \sqrt{3{,}2} + \sqrt{3}$ d) 2 dm; 4 cm; 0,07 m

Odpowiedź: a.

50. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:

a) $50°$ b) $80°$ c) $40°$ d) $70°$

Odpowiedź: b.

50 Zadania 45-53: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

51. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o 38° większy od drugiego. Kąty te mają miary:

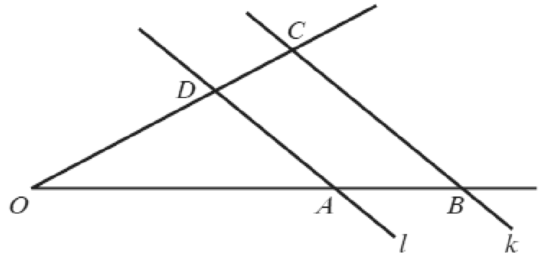
a) 71° i 109° b) 38° i 142° c) 26° i 64° d) 38° i 76°

52. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:

a) 360° b) 540° c) 720° d) 1080°

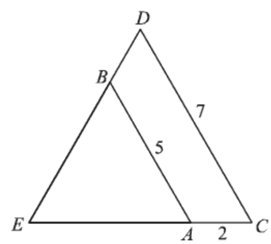
Odpowiedź: c.

53. *Proste l i k są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek OD ma długość:



a) 12 b) 18 c) $\frac{18}{5}$ d) $\frac{144}{5}$

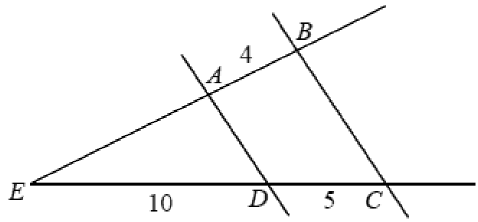
54.[51] *Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:



a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{14}{5}$ c) 3 d) 5

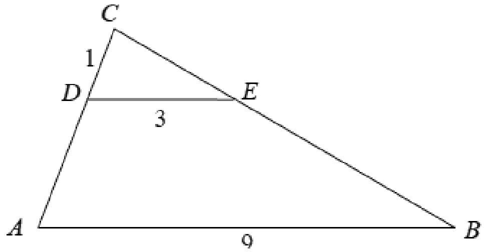
51 Zadanie 54: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf,0 4.03.2013

55.[52] *Proste AD i BC są równoległe. Długości odcinków ED, DC oraz AB podane są na rysunku. Długość odcinka EA jest równa:



a) 4 b) 8 c) 9 d) 10

56.[53] *Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka AD jest równa:



a) 2 b) 3 c) 5 d) 6

52 Zadanie 55: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf,

53 Zadanie 56: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

5 Ciągi

W liceum uczeń nauczy się:

- 1. Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.
- 2. Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.
- 3. Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu
- 4. arytmetycznego i geometrycznego.

5.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

Teraz nauczę się wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby naturalne.

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub (a_1, a_2, ...).

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze {1, 2, 3, ..., n} i oznaczamy (a_n) lub (a_1, a_2, ..., a_n).

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.

a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a liczby (1, 2, 3, ..., n) nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności**.**

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia, wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Przykłady:

$a_n = n + 3$: 2, 5, 8, 11, 14, ... – ciąg rosnący

$a_n = n^2$: 1, 4, 9, 16, 25, ... – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n$: 3, 2, 1, 0, –1, ... – ciąg malejący

$a_n = -5n$: –5, –10, –15, –20, –25, ... – ciąg malejący

5.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny;
- stosować wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$\boldsymbol{r = a_{n+1} - a_n}$ nazywamy różnicą ciągu

$\boldsymbol{a_{n+1}a_{n+1} = a_n a_n + r}$

Przykłady ciągów arytmetycznych:

$a_1 = 5$, $r = 3$; 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

$a_1 = 6$, $r = -2$; 6, 4, 2, 0, –2, –4, ...

Zależność między pierwszym a **dowolnym wyrazem ciągu :**

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$

Suma n–początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$\boldsymbol{s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n) n(a_1 + a_n)}{2 \qquad 2} = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r 2a_1 + (n-1) \cdot r}{2 \qquad 2} \cdot n}$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} zachodzi równość:

$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1} a_{n-1} + a_{n+1}}{2 \qquad 2}}$

Ciąg arytmetyczny jest:

– **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia: $a_{n+1} - a_n > 0$,

– **malejący**, gdy różnica ciągu jest ujemna: $a_{n+1} - a_n < 0$,

– **stały**, gdy różnica ciągu jest równa 0: $a_{n+1} - a_n = 0$.

Ciekawostka [54]

W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych nazwany następnie jego imieniem:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

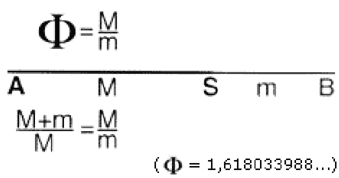
$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie n – należy do naturalnych oraz $k_0 = 1$ i $k_1 = 1$

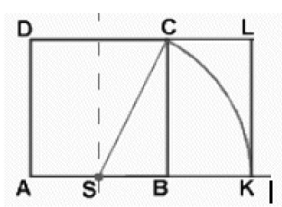
Można pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1{,}618033998875\ \ldots = \Phi$ gdzie Φ jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym. Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba Φ, jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd w opracowaniach często podaje się, że $\Phi = 1{,}618$.

Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:

1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.

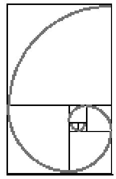


2. Złoty podział prostokąta .



54 Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym", J. Nowakowski i K. Borowski, Wydawnictwo Difin., www.bossa.pl, 6.03.2013.

3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

ZADANIA

5.2.1 Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

a) 1, 2, 3, 4, 5, ... b) 2, 4, 8, 16, 32, ... c) −2, −4, −6, −8, ... d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

Odpowiedź: Ciągi arytmetyczne: a, c, d

5.2.2 Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n):

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 3n-1$ c) $a_n = 2n+1$

d) $a_n = 1-n$ e) $a_n = n^n$ f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Odpowiedź:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12 b) 2, 5, 8, 11, 14, 17 c) 3, 5, 7, 9, 11, 13

d) 0, −1, −2, −3, −4, −5 e) 1,4, 27, 256, 3125, 46656 f) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

5.2.3 Dany jest ciąg (a_n) o podanym wzorze:

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_3 i a_4.

Odpowiedź: $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$

5.2.4 Sprawdź, czy dany ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 3 + n$ b) $a_n = 2n - 1$ c) $a_n = n^2 + 1$

d) $a_n = \frac{2}{3}n + 2$ e) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Odpowiedź: Tak: a, b, c

5.2.5 Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_2 = 5$, $a_6 = 15$

b) $a_3 = 6$, $a_{11} = 21$

c) $a_7 = 4$, $a_9 = 18$

d) $a_1 = 3$, $a_4 = 9$

e) $a_2 = 1$, $a_4 = 3-2\sqrt{3}$

Odpowiedź:

a) $a_n = -35 + (n-1) \cdot 10 = -45 + 10n$

b) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$

c) $a_n = -38 + (n-1) \cdot 7 = -45 + 7n$

d) $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$

e) $a_n = 5 + 2\sqrt{3} - n(2 + \sqrt{3})$

5.2.6 Znając trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, wyznacz 60 wyraz tego ciągu: $a_1 = 12$, $a_2 = 24$, $a_3 = 36$

Odpowiedź: 720

5.2.7 Mając dany ciąg arytmetyczny (a_n), w którym: $a_1 = 2$, $r = 4$, $a_n = 122$, oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg i ile wynosi suma jego wyrazów.

Odpowiedź: $n = 31$, $S_n = 1922$

5.2.8 Wyznacz a_3, a_7, a_{12} w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 8$, $r = 11$.

Odpowiedź: $a_3 = 30$, $a_7 = 74$, $a_{12} = 129$

5.2.9 Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów ciągu: 1, 4, 7, 10, 13, ….

Odpowiedź: $S_{20} = 590$

5.2.10 Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym $a_n = 2n - 5$.

Odpowiedź: $S_{15} = 165$

5.2.11 Oblicz x , wiedząc, że liczby:

a) $8, x, 22$ b) $x - 4, 5, x + 12$

w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Podaj różnicę ciągu.

Odpowiedź: a) $x = 15, r = 7$ b) $x = 1, r = 8$

5.2.12 Oblicz x , wiedząc, że: $2 + 6 + 10 + \ldots + x = 648$.

Odpowiedź: 70

5.2.13 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n):

a) $a_n = 3n$ b) $a_n = 2n - 4$ c) $a_n = n^2 - 1$

d) $a_n = -n + 2$ e) $a_n = \frac{-2n}{n+3}$

Odpowiedź:

a) $r = 3$ ciąg rosnący b) $r = 2$ ciąg rosnący

c) $r = 2n + 1$ dla $n \geq 1$ r > 0 ciąg rosnący d) $r = -1$ ciąg malejący

e) $r = \frac{-6}{n^2 + 7n + 12} < 0$ ciąg malejący

Ciekawostka

Ciąg liczb Fibonacciego na giełdzie

Istnieją trzy sposoby wykorzystania ciągu liczb Fibonacciego do analizy papierów wartościowych:

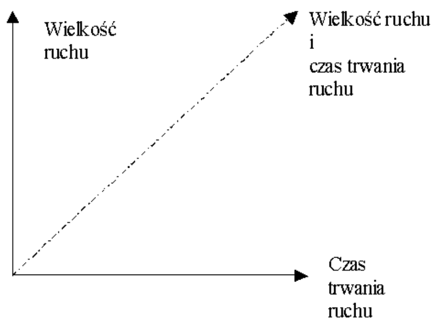
1. metody czasowe – w odniesieniu do upływu czasu (rozdział 3.2.1)
2. metody cenowe – w odniesieniu do zmiany ceny (rozdział 3.2.2)
3. metody cenowo–czasowe – w odniesieniu do upływu czasu i zmiany ceny (rozdział 3.2.3).

Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.

Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.

Rysunek 27. Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.



5.3 Ciąg geometryczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest geometryczny;
- stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą q, zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą q, a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

Suma n–początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$Sn = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1(1-q^n)a_1(1-q^n)}{1-q \qquad 1-q} \textbf{ dla } q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad \textbf{dla } q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, $a_{n,}$ a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n^{\,2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy:

$q > 0$ i $a_1 > 0$ lub $q \in (0, 1)$ i $a_1 < 0$

Ciąg jest malejący wtedy gdy:

$q > 0$ i $a_1 < 0$ lub $q \in (0, 1)$ i $a_1 > 0$

Ciąg jest stały wtedy, gdy:

$q = 1$ lub $a_1 = 0$

Jeśli iloraz q jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny.

Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału (–1, 1).

Ciekawostka

Metody cenowe

Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotne jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi Φ i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby Φ z przedziału <–3, 3>.

Tabela 3. Współczynniki złotego podziału[55]

Potęga n	F^n – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	Ciąg zewnętrzny
2	2,618	
3	4,236	

55 Źródło: Fischer R., "Liczby Fibonacciego na giełdzie", WIG - Press, Warszawa 1996.

−1	0,618	Ciąg wewnętrzny
−2	0,382	
−3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrotu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego, wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół) ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomu poziomów odwrotu Fibonacciego rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).

ZADANIA

5.3.1 Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a) 3, 6, 12, … b) 2, –6, 18, … c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \dots$ d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$

Odpowiedź:

a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ c) $a_n = \frac{2}{5} \cdot (5)^{n-1}$ d) $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

5.3.2 Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $q = -2, a_3 = 0{,}5$ b) $q = -\frac{1}{3}, a_4 = -27$ c) $q = -0{,}2, a_5 = -151{,}2$ d) $q = -6, a_4 = 0{,}5$

Odpowiedź:

a) $a_1 = \frac{1}{8}$ b) $a_1 = 729$ c) $a_1 = -94500$ d) $a_1 = -\frac{1}{432}$

5.3.3 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na n-ty wyraz wiedząc, że:

a) $a_1 = 1, a_5 = 12{,}5$ b) $a_1 = 16, a_7 = 256$ c) $a_1 = -3, a_{10} = -81$ d) $a_1 = 5, a_3 = 2{,}5$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt[4]{\frac{25}{2}}, a_n = (\sqrt[4]{\frac{25}{2}})^{n-1}$ b) $q = \sqrt[6]{16}, a_n = 16^{\frac{n+4}{5}}$

c) $q = 3, a_n = -3^n$ d) $q = \sqrt{\frac{1}{2}}, a_n = 5 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^{n-1}$

5.3.4 Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a) $a_1 = 3, q = -2, a_n = 1536$ b) $a_1 = -1, q = -20, a_n = -64000000$

c) $a_1 = 7, q = 0{,}5, a_n = \frac{7}{128}$ d) $a_1 = 0{,}5, q = -4, a_n = 128$

Odpowiedź:

a) 10, b) 7, c) 8, d) 5

5.3.5 Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = 96, a_5 = 48$ b) $a_3 = 12, a_6 = 24$ c) $a_2 = 6, a_5 = -3$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt{2}, a_1 = 7{,}5$ b) $q = \sqrt[3]{2}, a_1 = 6\sqrt[3]{4}$ c) $q = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, a_1 = 6\sqrt[3]{-2}$

5.3.6 W ciągu geometrycznym (a_n) mamy dane $a_2 = -1$, $q = -2$. Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: $S_n = \frac{3}{16}$

5.3.7 Wyznacz x, wiedząc że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$a_1 = 9$, $a_2 = x$, $a_3 = 1$

Odpowiedź: $x = 3$

5.3.8 Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest geometryczny? Wyznacz q.

a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$ c) $a_n = 2n^2$

Odpowiedź:

a) $q = 2$ b) $q = 9$ c) nie

5.3.9 Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), jeśli:

a) $a_1 = 8$, $2a_5 = 3a_4$, $n = 6$ b) $a_1 = 2$, $a_7 = 128$, $n = 8$

Odpowiedź:

a) 166,25 b) –510

5.3.10 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), określonego wzorem:

a) $a_n = \frac{3 - 2n}{4n - 50}$ b) $a_n = \frac{5n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{1}{3n^2 - 12n - 3}$ d) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 7}$

Odpowiedź: a, b, d – rosnące, c – nie jest monotoniczny

5.3.11 Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 10^{n+2} - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $b_n = 10^{n+1}$, $q = 10$

5.3.12 Znajdź sumę:

a) $1 + 6 + 21 + \ldots + n(2^n - 1)$ b) $3 + 27 + 135 + \ldots + (2n - 1) \cdot 3^n$

Odpowiedź:

$(n - 1) \cdot 2^{n+1} - 0{,}5 \cdot (n^2 + n - 4)$ $(n - 1) \cdot 3^{n+1} + 3$

5.3.13 Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

5.4 Praktyczne zastosowanie ciągów (procent prosty, składany)

Teraz nauczę się obliczać podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)

Kapitalizacja odsetek[56]

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk. W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej – na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia 19-procentowego podatku od zysków kapitałowych, zwanego potocznie podatkiem Belki.

Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota. Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{oprocentowanie}{liczba\ kapitalizacji\ w\ roku}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001 — 31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{oprocentowanie}{liczba\ kapitalizacji\ w\ roku} \cdot 0{,}8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

56 www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc, 06.03.2013.

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004 — 31.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{oprocentowanie}{liczba\ kapitalizacji\ w\ roku} \cdot 0{,}81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 — brak wzoru na procent składany.

Ciekawostka

Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

ZADANIA

5.4.1 Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

5.4.2 Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym z kapitalizacją odsetek:

co miesiąc	co kwartał	co pół roku	co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.

Odpowiedź:

2253,65 zł	2251,02 zł	2247,20 zł	2240 zł

5.4.3 Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

Odpowiedź: 10982,29 zł

5.4.4 Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000 zł.

a) Bank I oferuje 14% w stosunku rocznym z roczną kapitalizacją odsetek.

b) Bank II oferuje 10% w stosunku rocznym z kwartalną kapitalizacją odsetek.

c) Bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji . Zdecydujesz się na rok czy na dwa lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

Odpowiedź:

a) po roku 68400 zł, po dwóch latach 77976 zł

b) po roku 66228,77 zł, po dwóch latach 73104,17 zł

c) po roku 60906,21 zł, po 2 latach 61826,11 zł

5.4.5 Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

a) Oblicz, jaką kwotą (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.

b) O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Odpowiedź:

a) 33043,06 zł b) o 713,80 zł

5.4.6 Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95 zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).

5.4.7 Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

5.4.8 W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?

5.4.9[57] . Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku. Bank zaproponował mu następujące oferty:

a) oprocentowanie 6% w sali rocznej z odsetkami doliczanymi po roku,

b) oprocentowanie 3,8% w skali rocznej z odsetkami doliczanymi co kwartał.

57 http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/.

c) Dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?

Odpowiedź:

a) 1049 zł b) 1031 zł c) Pierwsza o 18 zł

5.4.10 Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować w banku, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400$.

Odpowiedź: Skorzystaj z funkcji finansowej PV

=PV(6%;20;0;400) w wyniku otrzymujemy: 125 $

Z matematycznego punktu widzenia obliczyliśmy sumę ciągu geometrycznego. Ten sam wynik uzyskamy wprowadzając własną formułę: = 400/(1 + 6%) ^ 20 = 125

5.4.5 Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyłeś w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5% w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.

Odpowiedź:

Możesz skorzystać z kalkulatora kredytowego, p.: http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/kredytowy.html

prowizja: 450 zł

kwota kredytowana: 15450 zł

kwota do wypłaty: 15000 zł

suma spłat: 22007,32 zł

rata: 183,39 zł

5.4.5 Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł, oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:

a) na koniec okresu rozliczeniowego

b) na początek okresu rozliczeniowego

c) Jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

Odpowiedź:

169,35zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0))

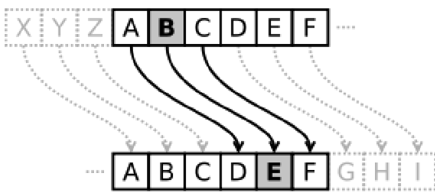
168,58 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0;0;1))

252,87 zł

Możesz skorzystać z funkcji finansowej PMT.

Ciekawostka

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻ

Szyfr: CĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻAĄB

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŻ DĆFĄ, EKTRP ŚZŃM YŹŚŁ L UAGWĘ INCJ

PRACA DLA CHĘTNYCH

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza).Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

1[58] Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

a) 40° b) 50° c) 60° d) 70°

2 Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy:

a) $-\frac{3}{25}$ b) $\frac{3}{25}$ c) $-\frac{7}{25}$ d) $\frac{7}{25}$

3 Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz: x, y, z.

4[59] Który wyraz ciągu $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$ jest równy zero?

a) a_9 b) a_{18} c) a_{21} d) a_{49}

5 Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n równym:

a) $a_n = 3 \cdot 2^n$ b) $a_n = \frac{4n^2 - 9}{3 + 2n}$ c) $a_n = \frac{n+3}{2n+2}$ d) $a_n = \frac{n^2 + 1}{3}$

6 Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

7[60] Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_2 = 64$ b) $a_2 = 0$ c) $a_2 = -64$ d) $a_2 = 128$

8 Liczby 2; $2x-1$; 0,5 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:

a) $x = 0$ b) $x = 0$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ d) $x = -1$

9 O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

---

58 Zadania 1-3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.
59 Zadania 4-6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 08.03.2013.
60 Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 08.03.2013.

10[61] Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

11 Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

a) $10000 \cdot (1{,}0075)^4$ b) $10000 \cdot (1{,}03)^4$ c) $10000 \cdot (1{,}03)^{16}$ d) $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

12 Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1$, $z = 3\sqrt{5} + 2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

a) z, y, x b) y, x, z c) x, y, z d) z, x, y

13 Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

a) $S_{2n} = 8n^2 + 4n$ b) $S_{2n} = 4n^2 + 2n$ c) $S_{2n} = 4n^2 + n$ d) $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

14 Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

a) $q = 2$ b) $q = 7$ c) $q = 9$ d) $q = 28$

15 W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16[62] Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_3 = \frac{1}{2}$ b) $a_3 = -\frac{1}{2}$ c) $a_3 = \frac{3}{8}$ d) $a_3 = -\frac{3}{8}$

17 W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy:

a) $a_4 = -18$ b) $a_4 = 0$ c) $a_4 = 4{,}5$ d) $a_4 = 144$

18 Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

19[63] Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n} + 4$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_8 = 2\sqrt{5}$ b) $a_8 = 8$ c) $a_8 = 5\sqrt{2}$ d) $a_8 = \sqrt{12}$

---

61 10-15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
62 Zadania 16-18: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 09.03.2013.
63 Zadania 19-21: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013..

20 Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4\sqrt{2}$ c) $a = 8 - 2\sqrt{2}$ d) $a = 8 + 2\sqrt{2}$

21 Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$. Wyznacz wzór na n–ty wyraz tego ciągu.

22[64] Liczby 12, 18, $2x + 1$ są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

a) $x = 11\frac{1}{2}$ b) $x = 12$ c) $x = 12\frac{1}{2}$ d) $x = 13$

23 W ciągu arytmetycznym a_n dane są $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 30 b) 110 c) 220 d) 2046

24 Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$.

25[65] Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy:

a) $a_1 = \frac{2}{3}$ b) $a_1 = \frac{4}{9}$ c) $a_1 = \frac{3}{2}$ d) $a_1 = \frac{9}{4}$

26 Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy:

a) $a_4 + a_1 = a_{10}$ b) $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ c) $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ d) $a_5 + a_7 = 2a_8$

27 Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz: x i y.

28[66] W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

a) 13 b) 0 c) –13 d) –26

29 W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy:

a) 8 b) 2 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{2}$

---

64 Zadania 22-24: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
65 Zadania 25-27: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
66 Zadanie 28, 29: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 10.03.2013.

30[67] Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności 102 dm^3 wypływa w pierwszej minucie 5 dm^3 cieczy, a w każdej następnej o 0,25 dm^3 mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?

Odpowiedź: W 17 minucie.

31 Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:

a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w poprzednim miesiącu.

b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.

Odpowiedź: a) S_{12} = 8190 zł, b) S_{12} = 7958,56zł; powinien wybrać propozycję a).

32 Wyznacz liczbę składników w sumie 1 + 4 + 7 + 10 +…+ 151 i wyznacz tę sumę.

Odpowiedź: 51 składników, 3876.

33 Oblicz, dla jakiej wartości k liczby 5, $(k+1)^2$, $2k + 9$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?

Odpowiedź: = –3.

34 Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.

a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?

b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?

Odpowiedź: rozbicie namiotu kosztuje 234,5 zł; 350 zł wystarczy na 25 dni.

35 Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby x, y, z, t, aby liczby 4, x, y, z, t, 8 tworzyły ciąg geometryczny.

Odpowiedź: $x = 4\sqrt[5]{2}, y = 4\sqrt[5]{4}, z = 4\sqrt[5]{8}, t = 4\sqrt[5]{16}$.

67 Zadania 30-37: Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

36 Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnicę tworzącą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 10, 7, 4 lub 2, 7, 12.

37 Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: $(31, 31, 31)$ lub $(3, 15, 75)$.

Bibliografia

1 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.

2 Testy maturalne. Matematyka 2010, Wydawnictwo Aksjomat.

3 Kalina R., Szymański T., Zbiór zadań z matematyki, Wydawnictwo Sens.

4 Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.

5 Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., Arkusze egzaminacyjne, Wydawnictwo Szkolne Omega.

6 Cewe A., Nahorska H., Matura z matematyki od 2010 roku, Wydawnictwo Podkowa.

7 Gwizdak D., Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.

8 Antek M., Belka K., Grabowski P., Prosto do matury, Wydawnictwo Nowa Era.

9 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era.

10 Jenike M., Fizyka, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

11 Wojciechowska M., Unieszowska J., Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009, Operon.

12 Jaworski R., Fizyka. Matura 2012, Operon.

13 Fischer R. Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.

14 Nowakowski J., Borowski K., Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym, Wydawnictwo Difin.

Źródła internetowe:

1. www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html
2. www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html
3. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
4. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
5. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
6. pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
11. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
12. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
15. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
16. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
21. www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

27. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
28. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
29. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
31. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
32. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
34. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
35. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
36. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
37. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
38. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
39. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
40. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
43. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
44. www.bossa.pl
45. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
46. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
47. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
48. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
49. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
50. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
51. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
52. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
53. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
54. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf