KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały pomocnicze dla nauczyciela

Część 2.
Matematyka kl. II TE

Projekt ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież. Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości

Lublin 2013

Program jest zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego dla liceów ogólnokształcących w zakresie podstawowym zgodnie z: Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz. U. poz. 977) oraz Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 7 lutego 2012 r. w sprawie ramowych planów nauczania w szkołach publicznych (Dz. U. poz. 204).

Zespół ekspercki:
Katarzyna Ługowska – psycholog
Piotr Barszcz – psycholog
Kinga Sarad-Deć – pedagog
Joanna Rusinkiewicz – pedagog
Milena Potręć – nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna – nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman – specjalista ds. technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń – specjalista ds. technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak – specjalista ds. mediów
Grzegorz Kozak – specjalista ds. mediów
Agnieszka Wróblewska – specjalista ds. przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda – specjalista ds. przedsiębiorczości
Zbigniew Biały – specjalista ds. ekonomii
Ewa Oleksiejczuk – specjalista ds. ekonomii
Agata Linkiewicz – specjalista ds. matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch – specjalista ds. matematyki
Katarzyna Korona – doradca metodyczny
Dorota Ulikowska – doradca metodyczny

Koordynator merytoryczny:
dr Agnieszka Lewicka-Zelent

Korekta:
Elżbieta Amborska

Łamanie i skład:
Info Studio, Lublin

Projekt okładki:
Maciej Wasilewski

ISBN 978-83-64395-16-1

Druk i oprawa:
MULTIPRESS G. Wodecki, D. Wodecka s.c.

SPIS TREŚCI

Uwaga: Treści rozszerzone zostały oznaczone: *

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Układy równań pierwszego stopnia

1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony,
- nieoznaczony,
- sprzeczny.

Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie.**

Przykład 1

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość $x = 2$ do pierwszego równania:

$$2 + y = 3$$
$$y = 1$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania.**

Przykład 3

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 /\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

$$0 = -1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax + by = A \\ cx + dy = B \end{cases}$$

Przykład 4[1]

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2} = \dfrac{2-y}{4} + 6 \quad /\cdot 4 \\ 6(x-1) - 2x + 4 = y - 8 \end{cases}$$

Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{3x}{2} = 4\cdot\dfrac{2-y}{4} + 4\cdot 6 \\ 6x - 6 - 2x + 4 = y - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3x = 2 - y + 24 \\ 4x - 2 = y - 8 \end{cases}$$

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 6x = 26 - y \\ 4x - 2 = y - 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" i z „y" na lewo, a liczby na prawo.

$$\begin{cases} 6x + y = 26 \\ 4x - y = -8 + 2 \end{cases}$$

Wykonujemy końcowe obliczenia.

$$\begin{cases} 6x + y = 26 \\ 4x - y = -6 \end{cases}$$

1 http://www.matematykam.pl/upraszczanie_ukladu.html, 17.02.2013.

Krótkie przypomnienie z gimnazjum

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODA PODSTAWIANIA

Przykład 5[2]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} \boxed{2x + 4y = 10} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} \boxed{2x = 10 - 4y} \quad /\div 2 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} \boxed{x = 5 - 2y} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać: x = 5 - 2y. Uzyskane wyrażenie (5 – 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x = \boxed{5 - 2y} \\ -3(5 - 2y) - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + 6y - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + y = -13 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = -13 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

2 http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej y=2, do wcześniej wyprowadzonej postaci: x = 5 - 2y
Po podstawieniu obliczamy drugą niewiadomą (x).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu niewiadomych.

METODA PRZECIWNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 6[3]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą x (bo ma najmniejszą wartość w obu równaniach).

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 4y = 10 & / \cdot 3 \\ \boxed{3x} - 5y = -7 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest 6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 – w ten sposób w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „–" (tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaliśmy mnożenie równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia, przez liczby określone w poprzednim kroku.

3 http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 6x+12y=30 \\ -6x+10y=14 \end{cases} \quad +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x-6x}+12y+10y=30+14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x" skracają się do „0"

$$12y+10y=30+14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y=44$$
$$y=2$$

$$2x+4y=10$$
$$2x+4\cdot 2=10$$
$$2x+8=10$$
$$2x=10-8$$
$$2x=2$$
$$x=1$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik y=2).

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

1.2 Graficzna interpretacja układów równań

Teraz nauczę się wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1[4]

$$\begin{cases} 4x+2y=14 \\ 3x-y=8 \end{cases}$$

4 http://www.matematykam.pl/metoda_graficzna.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x” na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 & / \div 2 \\ -y = -3x + 8 & / \div (-1) \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y” (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu (x, y), to nasze rozwiązanie.

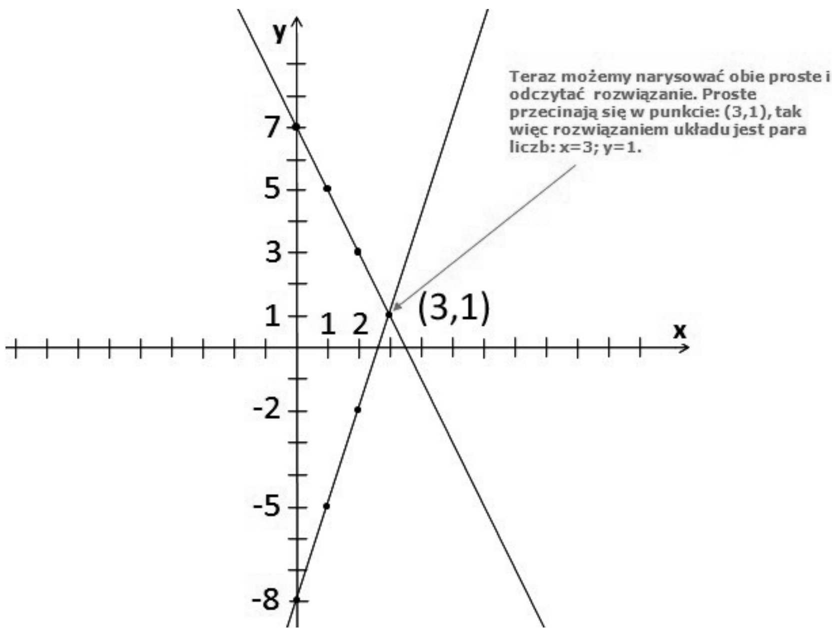
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	7	5	3

x	0	1	2
y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{4x - y = 18}{5x + 2\frac{1}{2}y = 30} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}3 \\ 2x + 5y = 8{,}6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 0{,}2y = 35 \\ 2{,}5x - 5y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \dfrac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1 - 0{,}3(y - 2) = \dfrac{x+1}{5} \\ \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{4x+9}{20} - 1{,}5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - 2y) = -7x - 2 \\ 5(x + 1) - 2(3 - y) = -4(x + 2) \end{cases}$

n) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{5} + \dfrac{5x - 3y}{3} = x + 1 \\ \dfrac{2x - 3y}{3} + \dfrac{4x - 3y}{2} = y + 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

a) Układ równań nieoznaczony

b) Układ równań sprzeczny

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, układ równań oznaczony

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, układ równań oznaczony

e) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

f) $\begin{cases} x = 1{,}3 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

g) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 40 \end{cases}$, układ równań oznaczony

h) $\begin{cases} x = 3\frac{3}{23} \\ y = -1\frac{5}{23} \end{cases}$, układ równań oznaczony

i) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

j) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

k) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$, układ równań oznaczony

l) $\begin{cases} x = 5\frac{3}{11} \\ y = -1\frac{9}{11} \end{cases}$, układ równań oznaczony

m) $\begin{cases} x = -\frac{13}{15} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$, układ równań oznaczony

n) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

Wnioski:

- Dla układu oznaczonego proste przecinają się w 1 punkcie.
- Dla układu nieoznaczonego proste pokrywają się.
- Dla układu sprzecznego proste są równoległe i nie pokrywają się.

1.1.2. Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$

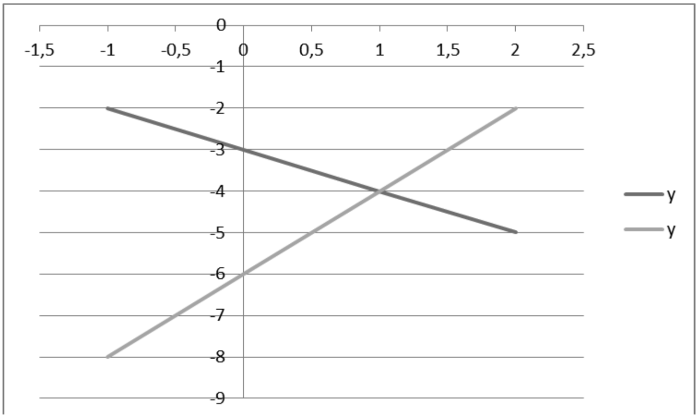
b) $\begin{cases} 3x + y = -(x - 8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$

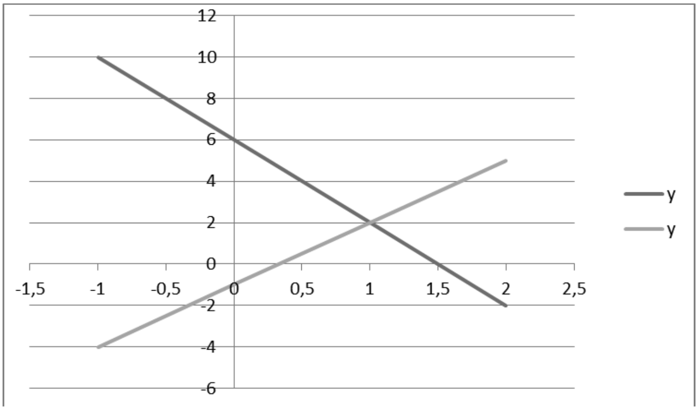
d) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

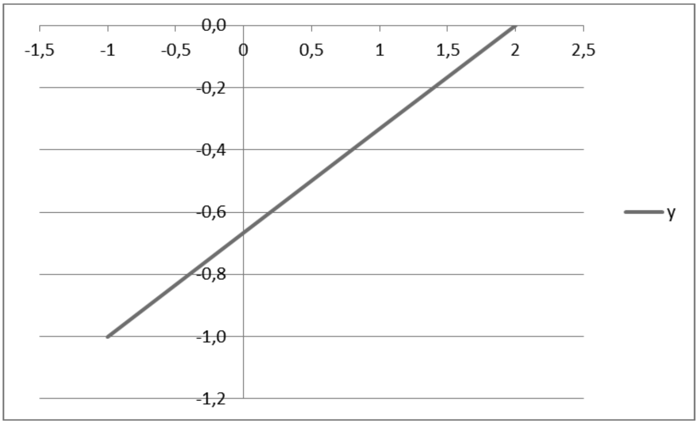
a) $x = 1 \;\; y = -4$



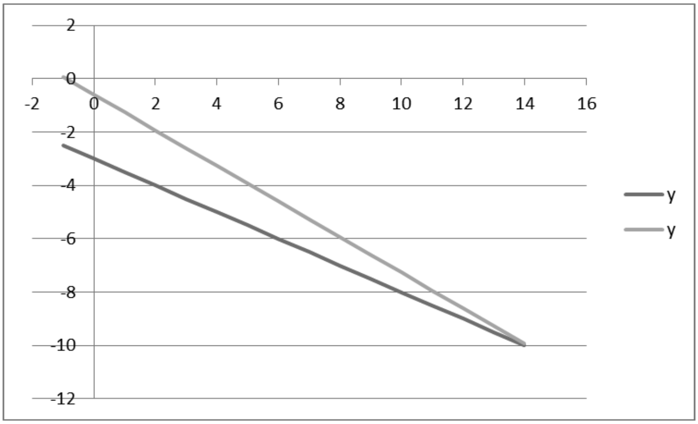
b) $x = 1 \quad y = 2$



c) rozwiązaniem jest R



d) $x = 13$, $y = -9{,}3$



1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową 10 $\frac{m}{s}$ i poruszał się z przyspieszeniem 1 $\frac{m}{s^2}$ Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość 20 $\frac{m}{s}$ i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 10\frac{m}{s}, v = 20\frac{m}{s}$, a=1 $\frac{m}{s^2}$, s_0= 100 m

Szukamy: t, s

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

Odpowiedź:

$t = 10$ s, $s = 250$ m

Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się 120 m^3 wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

Odpowiedź:

v_1 – objętość pierwszej rury

v_2 – objętość drugiej rury

p_1 – przepustowość pierwszej rury

p_2 – przepustowość drugiej rury

t_1 – czas napełniania przez pierwszą rurę

t_2 – czas napełniania przez drugą rurę

$v = p \cdot t$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$p_1 . 2 + p_2 = 120$

$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$

Odpowiedź:

Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi 40 m^3.

ZADANIA

1.1.3. W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością 20 $\frac{m}{s}$ przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem 2 $\frac{m}{s^2}$ w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_1 = 20\frac{m}{s}$, a = $2\frac{m}{s^2}$,

Szukamy: s, t, v_2

Układamy równania ruchu pojazdów. Zauważ, że drogi pojazdów są jednakowe.

$$\begin{cases} s = v_1 t \\ s = \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie:

$v_1 t = \frac{at^2}{2}$, stąd $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

Odpowiedź:

$t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

1.1.4. Z balkonu, znajdującego się na wysokości 50 m, spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?

Rozwiązanie

Mamy dane: $h = 50$ m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$

Szukamy: t, v

Doniczka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ziemskim g.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} \mathrm{h} = \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{cases}$$

Odpowiedź:

$t = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ s

$v = 31{,}6 \frac{m}{s}$

1.1.5. Samolot podczas lądowania z szybkością 200 $\frac{m}{s}$ wyhamował na drodze 1000 m. Z jakim opóźnieniem lądował samolot?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 200 \frac{m}{s}$, $s = 1500$ m, $v_k = 0$

Szukamy: a

Samolot poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Układamy równania ruchu:

$$\begin{cases} s = v_0 - \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

$t = \frac{v_0}{a}$, podstawiamy do pierwszego równania

$s = \frac{v_0^2}{2a}$, stąd $a = \frac{v_0^2}{2s} = 20 \frac{m}{s^2}$

Odpowiedź:

$a = 20 \frac{m}{s^2}$

1.1.6. Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?

Odpowiedź: 2:5

1.1.7. Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty". Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Odpowiedź: Stefan miał 10 zł, a Jan 8 zł

1.1.8. Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?

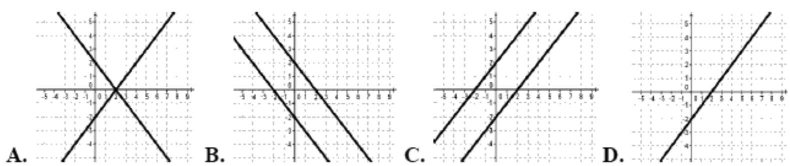
Odpowiedź: 2 długopisy, 9 ołówków

1.1.9. Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł. W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje 1 m^3 wody zimnej, a ile ciepłej?

Odpowiedź: 1 m^3 ciepłej wody kosztuje 6 zł, a zimnej 2 zł

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[5] Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:



Odpowiedź: c

2.[6] Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

5 Zadanie 1: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 18.02.2013.
6 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.

Odpowiedź: d

3.[7] Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$y = -2x - \frac{1}{4}$ i $4x - 4y + 5 = 0$

Odpowiedź: (–1/2,3/4)

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

a) $x = 1, y = -1$ $x = -1, y = 1$

b) $x = -1, y = -1$ $x = 1, y = 1$

Odpowiedź: d

5.[8] Aby układ $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ był układem nieoznaczonym, należy w miejsce a wstawić:

a) 10 b) –5 c) 5 d) –6

Odpowiedź: c

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia x – liczba uczniów klasy I, y – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

a) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}08x + 0{,}075y = 51 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}80 + 0{,}75y = 51 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0{,}8x + 0{,}75y = 66 \end{cases}$

Odpowiedź: c

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

Odpowiedź: a

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

Odpowiedź: 15 kg wafli po12 zł i 5 kg wafli po 8 zł

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odpowiedź: $a = 6$, $b = 7$ lub $a = 7$, $b = 6$

---

7 Zadanie 3, 4: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.

8 Zadania 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2. Funkcja liniowa

To już potrafię:

- Zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych.
- Odczytać współrzędne danych punktów.
- Odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero.
- Odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).
- Obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

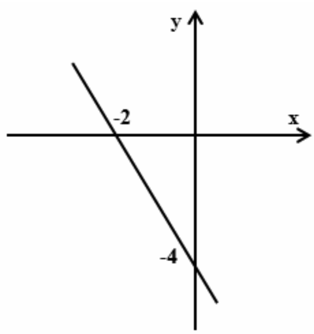
Zad.1. Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje wartości ujemne dla argumentów:

A. $x < -4$

B. $x < -2$

C. $x > -2$

D. $x < -3$



Zad.2. Na odcinku trasy o długości 120 km samochód jechał z prędkością y km/h. Wzór funkcji określającej zależność czasu od prędkości, to:

A. $y = 120x$ **B.** $y = \frac{120}{x}$

C. $\frac{x}{y} = 120,\ y \neq 0$ **D.** $\frac{y}{x} = 120,\ x \neq 0$

Zad.3. Które przyporządkowanie nie jest funkcją:

A. Każdemu nauczycielowi przyporządkujemy ucznia, którego uczy.

B. Każdemu wielokątowi przyporządkujemy liczbę jego boków.

C. Każdej figurze geometrycznej przyporządkowana jest jej nazwa.

D. Każdej liczbie całkowitej jest przypisana liczba do niej przeciwna.

Zad.4. Miejscem zerowym funkcji $y = -6x + 3$ jest:

A. Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **B.** $x = \frac{1}{2}$

C. Punkt $(0,3)$ **D.** $x = 3$

Zad.5. Wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x(2 - x)$ dla argumentu $x = 4$ wynosi:

A. -16 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 0

Zad.6. Które zdanie dotyczące funkcji $y = 2x - 4, x \in R$ jest prawdziwe:

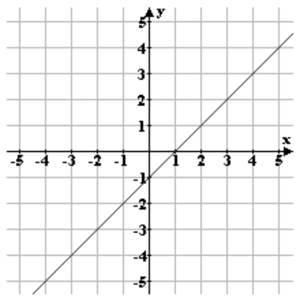
A. Funkcja jest malejąca.

B. Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(2,4)$.

C. Miejscem zerowym tej funkcji jest 2.

D. Funkcja jest stała.

Zad.7. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej. Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?



A. 4 **B.** 2 **C.** -4 **D.** 2

Zad.8. $y = 5$ jest to funkcja:

A. Rosnąca **B.** Stała **C.** Malejąca **D.** Nie jest to funkcja

Zad.9. Do wykresu funkcji $y = ax, x \in R$, należy punkt $A = (-2,5)$. Wzór tej funkcji to:

A. $y = 5x$

B. $y = -2x$

C. $y = 2\frac{1}{2}x$

D. $y = -2{,}5x$

Zad.10. Funkcja określona jest następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkujemy sumę jej cyfr. Dziedziną tej funkcji jest:

A. Zbiór wszystkich liczb naturalnych.

B. Zbiór liczb naturalnych większych od 9, a mniejszych od 100.

C. Zbiór liczb wymiernych większych od 9, a mniejszych od 100.

D. Zbiór liczb całkowitych.

Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	A	C	B	B	D	B

ZADANIA OTWARTE

Zad.1. Trzech pracowników może oczyścić basen w ciągu 5 godzin. Napisz wzór funkcji określającej zależność liczby pracowników (y) od liczby godzin pracy (x). Podaj współczynnik proporcjonalności tej funkcji.

Zad.2. Wykres przedstawia odległość, jaką pokonała Małgosia w zależności od czasu.

Na podstawie wykresu uzupełnij poniższy tekst.

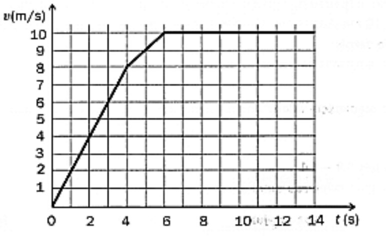
Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła…

Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie…

Pierwsze 8 km pokonała w czasie…

Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością…

Zad.3. Wykres przedstawia zależność szybkości od czasu w pewnym ruchu.



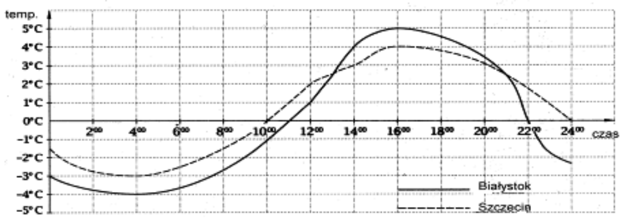
Odpowiedz na pytania:

Kiedy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a kiedy jednostajnym?

Jaką drogę przebyło ciało między 6 a 8 sekundą ruchu?

Jaka była maksymalna szybkość tego ciała?

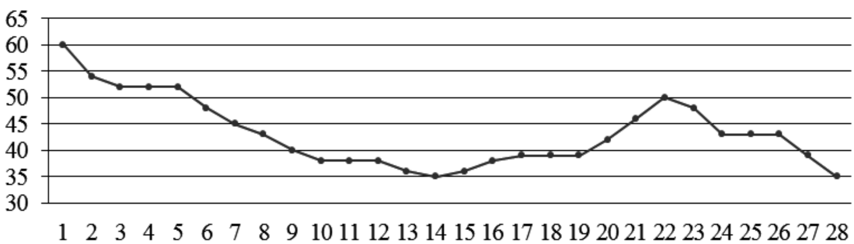
Zad.4. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Białymstoku i Szczecinie.



Jaką temperaturę pokazywał termometr w obu miastach o 12^{00}?
O której godzinie temperatura w tych miastach wynosiła $0^{o}C$?
W jakich godzinach temperatura w Białymstoku była ujemna?
O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?
W jakich godzinach w Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie?
Jaka była najwyższa temperatura w Białymstoku, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?
Jaka temperatura była w Białymstoku, gdy w Szczecinie były $3^{o}C$?

Zad.5. Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.

Ceny akcji firmy Zysk & Ryzyko w lutym (zł)



a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

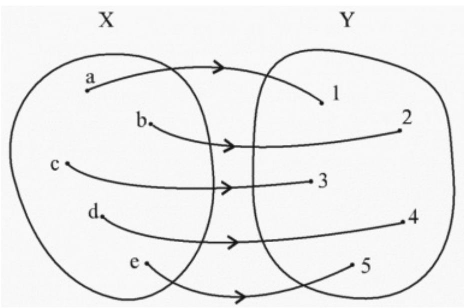
c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Odpowiedzi

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$y = \frac{15}{x}$, $x \in R_+$, $a = 15$
2	Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła 4 km. Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie 9^{30}. Pierwsze 8 km pokonała w czasie 3 godzin. Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością 1 km/h.
3	a) Ciało poruszało się ruchem przyspieszonym w pierwszych czterech sekundach ruchu oraz od czwartej do szóstej sekundy ruchu – z innym przyspieszeniem. Z ruchem jednostajnym mamy do czynienia od szóstej do czternastej sekundy ruchu. b) $s = 10\frac{m}{s} \cdot 2s = 20m$. c) Maksymalna szybkość, którą osiągnęło to ciało, wynosi $10\frac{m}{s}$.
4	a) O godzinie 12^{00} w Szczecinie były 2°C, a w Białymstoku 1°C. b) 0°C w Białymstoku było o godzinie 11^{00}, a w Szczecinie o 10^{00}. c) W Białymstoku temperatura ujemna była w godzinach 0^{00} – 11^{00}. d) Temperatura w obu miastach była taka sama o godz. 13^{00} i 21^{00}. e) W Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie w godzinach 13^{00} – 21^{00}. f) Najwyższa temperatura w Białymstoku wynosiła 5°C (godz. 16^{00}), a w Szczecinie 4°C (również o godz. 16^{00}). g) Gdy w Szczecinie było 3°C, to w Białymstoku było 4°C.
5	a) Wartość akcja spadła w lutym o 25 zł. b) Kupując i sprzedając akcje w ciągu lutego można było na nich zarobić. Aby zysk był możliwie największy (15 zł za akcję), należało kupić akcje 14 lutego, a sprzedać 22 lutego. c) Poniedziałki były: 5, 12, 19, 26 lutego.

2.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji

Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory i pewne przyporządkowanie.



WAŻNE!

Zauważ, że każdy punkt zbioru X jest początkiem **tylko jednej** strzałki.

Symbolicznie zapisujemy to jako f: X → Y

Zbiór x nazywamy **dziedziną** funkcji (D_f), a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**. Zbiór y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

Zmienną x nazywamy też **zmienną niezależną**, a y **zmienną zależną**.

$\boldsymbol{X = \{a, b, c, d, e\}}$ **– zbiór argumentów (dziedzina funkcji)**

$\boldsymbol{Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ **– zbiór wartości funkcji**

Bardzo ważne!

Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość (z jednego punktu grafu może wychodzić tylko jedna strzałka).

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h,...

Nasza funkcja f jest ze zbioru {a, b, c, d, e} do zbioru {1, 2, 3, 4}.

Funkcja f liczbie a przyporządkowuje liczbę 2.

Zapisujemy to tak:

$f(a) = 2$ – czytamy: f od a równa się 2

Liczbie b funkcja f przyporządkowuje liczbę 1, piszemy:

$f(b) = 1$ – czytamy: f od b równa się 1

Liczbie c funkcja f przyporządkowuje liczbę 3, piszemy:

$f(c) = 3$ – czytamy: f od c równa się 3

Liczbie d funkcja f przyporządkowuje liczbę 4, co zapisujemy:

$f(d) = 4$ – czytamy: f od d równa się 4

lub: dla argumentu d wartość funkcji wynosi 4.

Liczbie e funkcja f przyporządkowuje liczbę 5, piszemy:

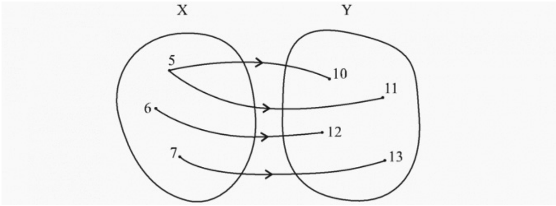
$f(e) = 5$ – czytamy: f od e równa się 5

lub: dla argumentu e wartość funkcji wynosi 5.

Uwaga!

Nie każde przyporządkowanie między dwoma zbiorami nazywa się funkcją.

Funkcją nazywamy tylko takie przyporządkowanie, według którego **każdemu elementowi z dziedziny** (ze zbioru X) przyporządkowany jest **dokładnie jeden element z przeciwdziedziny** (ze zbioru Y).



Rysunek 2-1. Funkcja

Ten graf nie opisuje funkcji, bo liczbie 5 ze zbioru x przyporządkowane zostały dwie liczby: 10 i 11 ze zbioru Y. Zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi zbioru x ma być przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru Y.

Nie ma żadnych zastrzeżeń co do natury zbiorów X i Y. Mogą być to zupełnie dowolne zbiory.

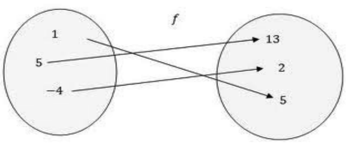
My jednak będziemy zajmować się tylko przypadkiem, gdy zbiory X i Y będą pewnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Innymi słowy, argumentami i wartościami funkcji będą... no właśnie... będą liczby.

SPOSOBY OKREŚLANIA FUNKCJI

Funkcje można określić za pomocą:

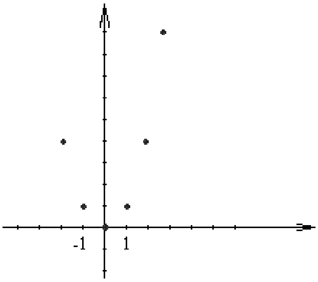
- **grafu**

Przykład 1



Rysunek 2-2. Graf

- **wykresu**



Rysunek 2-3. Wykres

Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

wzoru

Przykład 2

$y = x^2$, dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ Używa się również zapisu $f(x) = x^2$ lub $f\colon x \to x^2$.

tabelki

Przykład 3

x	-7	-5	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	5	7	6	5	3	-2

Rysunek 2-4. Tabelka

opisu słownego

Przykład 4

Mamy daną funkcję określoną opisem słownym:

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

–zbioru par uporządkowanych

Przykład 5

$\{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$ Takie określenie funkcji jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Przykład 6

Funkcję „Każdej liczbie ze zbioru $X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}$ przypisujemy liczbę o 2 od niej mniejszą", przedstaw w postaci wzoru, tabeli i wykresu.

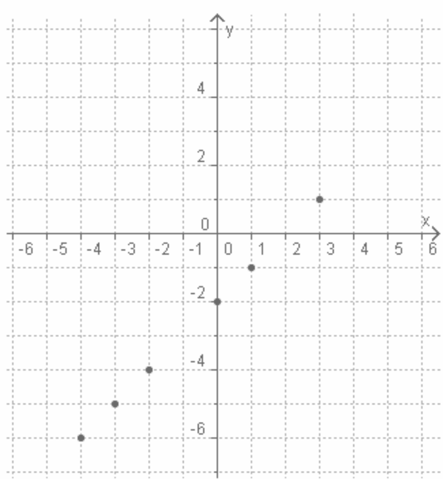
Wzór:

$y = x - 2$

Tabela:

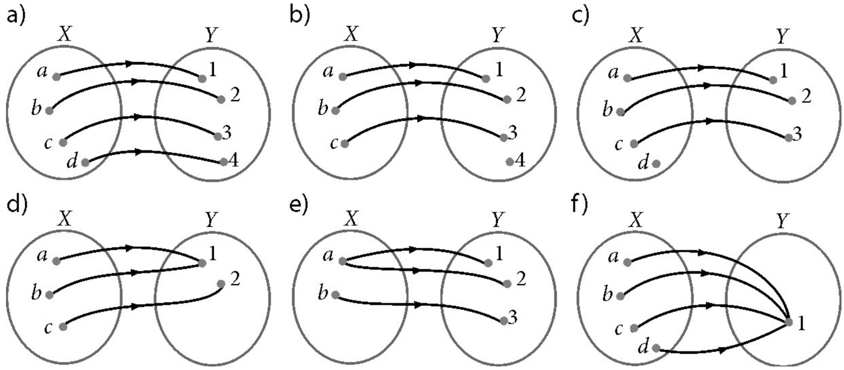
x	–4	–3	–2	0	1	3
y	–6	–5	–4	–2	–1	1

Wykres:



Zadania

2.1.1 Który z grafów określa funkcję:



Odpowiedź: *a*, *b*, *d*, *f*

2.1.2 Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

b) Każdej liczbie różnej od 0 przyporządkowano odwrotność tej liczby.

c) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

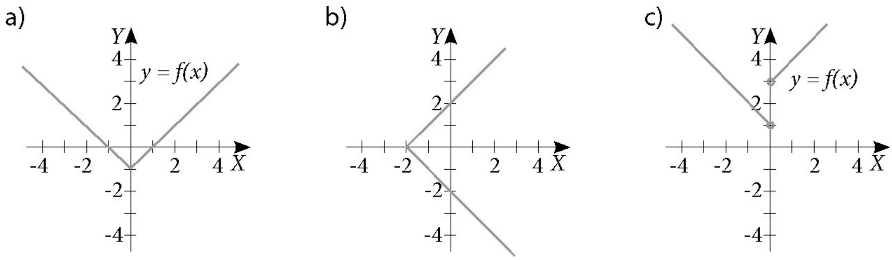
f) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

g) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

h) Każdej liczbie przyporządkowano kwadrat tej liczby.

Odpowiedź: a, b, c ,d, e, f, g, h – tak

2.1.3 Podaj, które z wykresów przedstawiają funkcję. Odpowiedź uzasadnij.



Odpowiedź: a, c

2.1.4 Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej dwukrotność tej liczby powiększoną o jeden. Opisane słowami przyporządkowanie opisz:

a) wzorem

b) tabelką dla argumentów –3,–2,–1,0,1,2,3

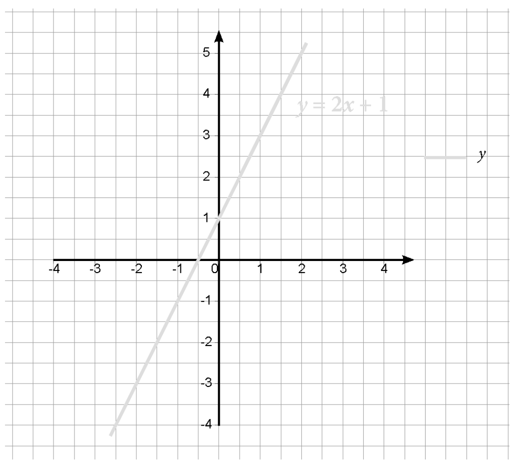
c) wykresem

Odpowiedź: a) $y = 2x + 1$.

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)



2.2 Własności funkcji

Teraz nauczę się:

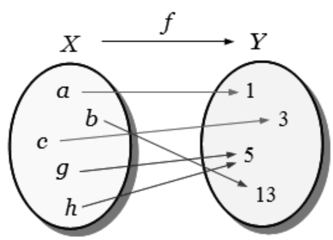
- Obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu;
- Posługiwać się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczania, dla jakiego argumentu przyjmuje daną wartość;
- Wyznaczać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą.

Przyporządkowanie, będące funkcją, możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

Dziedzina i wartość funkcji

Wiemy już z poprzedniego działu, że zbiór X, na którym określona jest funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji, a zbiór y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Przykład 1



Rysunek 2-5. Dziedzina i przeciwdziedzina

$X = \{a, b, c, g\ h\}, Y\ =\ \{1, 3, 5, 13\}\ Y\ =\ \{1, 3, 5, 13\}$

Zbiorem wartości funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$

Przykład 2

Wyznacz dziedzinę funkcji podanej wzorem:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla $x = 2$ w mianowniku wyrażenia będziemy mieli 0, a więc wyrażenie nie będzie miało sensu: $X = D_f = R / \{2\ \}$

Możemy zapisać dziedzinę inaczej: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Wskazówka:

Dziedziną funkcji danej wzorem jest zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określoną.

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

Rozwiązanie

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$X = D_f : x \in \langle 2, +\infty \ )$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$

Rozwiązanie

$x + 4 \rangle 0$

$x \rangle - 4$

$X = D_f : (-4, +\infty)$

ZADANIA

2.2.1 Dana jest funkcja:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = 2x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Oblicz:

$f(0), f(1), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(\sqrt{2}), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f(x-1), f(x^2)$

Odpowiedź:

a) $f(0) = 4$, $f(1) = 7$, $f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{x} + 4$, $f(x-1) = 3x + 1$, $f(x^2) = 3x^2 + 4$

b) $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(\sqrt{2}) = 7$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{x^2} + 1$, $f(x-1) = 2x^2 - 4x + 3$, $f(x^2) = 2x^4 + 1$

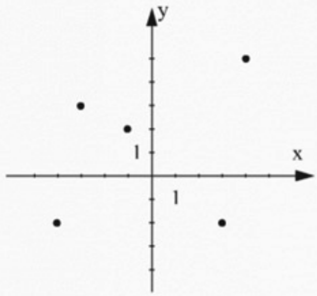
c) $f(0) = 0$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x+1}$, $f(x-1) = \dfrac{x-1}{x}$, $f(x^2) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

2.2.2 Dla każdej z tych funkcji odczytaj dziedzinę i zbiór wartości:

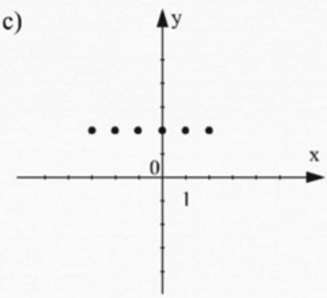
a)

x	-2	-1	0	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
y	4	3	5	0	$-2\frac{1}{2}$

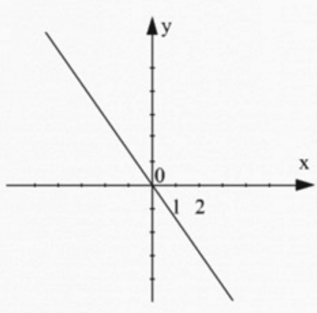
b)



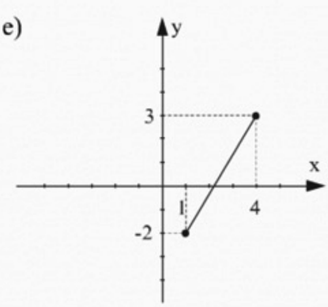
c)



d)



e)



Odpowiedź:

a) $Df = \{-2, -1. 0, 1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{3}\}$ $y = \{-2\frac{1}{2}, 0, 3,4,5\}$,

b) $Df = \{-4,-3,-1,3,4\}$ $y = \{-2,2,3,\%\}$,

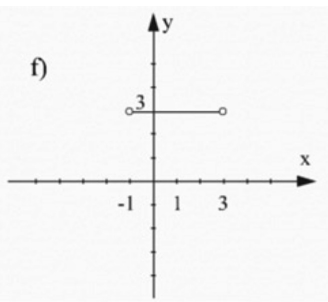
c) $Df = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ $y = \{2\}$,

d) $Df = R$ $y = R$,

e) $Df : x \in <1,4>$ $y \in <-2,3>$,

f) $Df\!: x \in (-1,3)$ $y = \{3\}$

f)



2.2.3 Funkcja określona jest tabelką:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	–3	3	–1	–2	5	2

a) podaj zbiór argumentów i zbiór wartości funkcji,

b) wymień wszystkie ujemne argumenty tej funkcji,

c) odczytaj wartość dla argumentu $x = 0$ oraz dla argumentu $x = 3$,

d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2?

e) czy punkt (–1,–3) należy do wykresu funkcji?

f) narysuj wykres tej funkcji.

Odpowiedź:

a) $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $Y = \{-3,-2,-1,1,2,3,5\}$

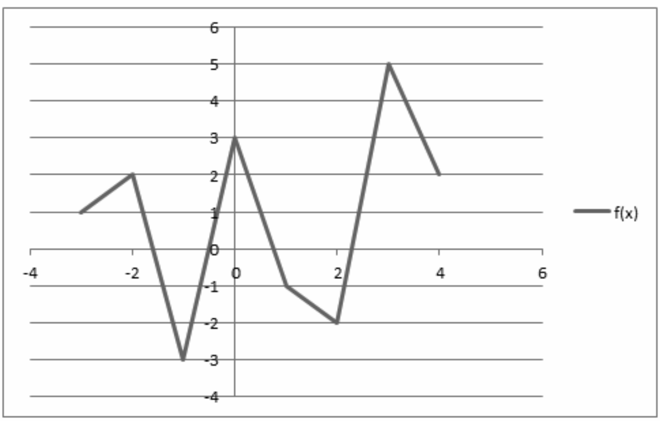
b) $-3,-2,-1$

c) $f(0) = 3, f(3) = 5$

d) $x = 4, x = -2$

e) tak

f)



2.2.4 Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-3)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+10x+25}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}$

g) $f(x)=\sqrt{x+1}$

h) $f(x)=\sqrt{x+3}-\frac{x}{x+4}-\frac{1}{x-1}$

i) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x+3}$

j) $f(x)=-3x^2+7x-8$

k) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$

l) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{2x-4}{x+2}$

m) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{4}{x^2}$

n) $f(x)=\sqrt{\frac{3}{x-2}}$

o) $f(x)=\frac{3-2x}{\sqrt{2-x}}+\frac{x+6}{\sqrt{x+4}}$

p) $f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{x^2-16}$

Odpowiedź:

a) R, b) R/ {–1, 3}, c) R/ {–3, 3},

d) R, e) R, f) $x \in (-\infty, 4)$,

g) $x \in < 1, +\infty)$, h) $x \in < -3, 1) \cup (1, +\infty)$, i) R\ {–3, 1},

j) R, k) R, l) R\ {–2,0},

m) R\ {–3,0,3}, n) X $\in (2, +\infty) \in (2, +\infty)$, o) $x \in \in (-4,2)$,

p) $x \in (4,+\infty)$

Miejsca zerowe

Argument *x*, dla którego *f(x)* = 0, nazywamy **miejscem zerowym** funkcji *f*.

Przykład 3

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x)=x^2-1$

b) $f(x)=\frac{2-x^2}{\sqrt{x-1}}$

c) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$

Rozwiązania

$D_f=R$

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

$x-1=0$ lub $x+1=0$

zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji *f* to $x = 1$ oraz $x = -1$

a) $D_f = (1, +\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0$

$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$

$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in D_f \quad -\sqrt{2} \notin D_f$

Miejscem zerowym funkcji *f* jest $x = \sqrt{2}$

a) $D_f : x \in R / \{4\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$

$x = -2 \in D_f$

Miejscem zerowym funkcji jest $x = -2$

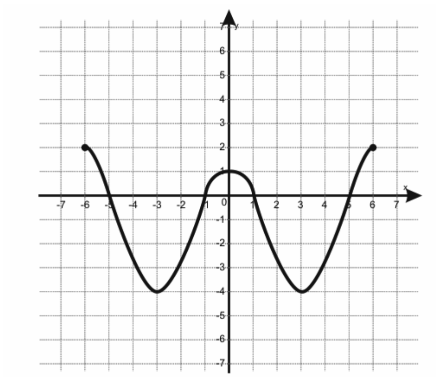
Przykład 4

Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe, dziedzinę i przeciwdziedzinę.

Dziedzina: $D_f = \langle -6; 6 \rangle$

Zbiór wartości: $Z_w = \langle -4; 2 \rangle$

Miejsca zerowe: $x = -5, x = -1, x = 1, x = 5$



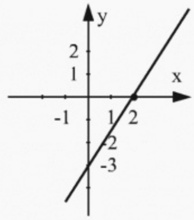
ZADANIA

2.2.5 Wypisz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

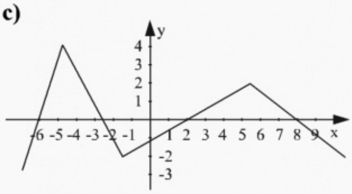
a)

x	-5	0	1	5
y	2	3	4	0

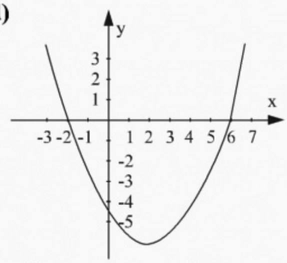
b)



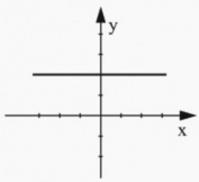
c)



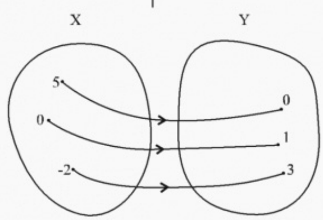
d)



e)



f)



Odpowiedź:

a) $x = 5$, b) $x = 2$, c) $-6; -2{,}5; 2;8$,

d) 2,6, e) brak miejsc zerowych, f) $x = 5$

2.2.6 Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji *f*.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 3}$ d) $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{4x - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - 2}}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2}}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ h) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

i) $f(x) = \sqrt{x + 9}$ j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 3}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x}$ l) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$

m) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 9}$

Odpowiedź:

a) Df R/−2; $x = 2$,
b) Df R/2; $x = -2$,
c) Df R/3; brak miejsc zerowych,
d) Df R oprócz 1/2; $x = -1/2$,
e) Df (2,+∞); brak miejsc zerowych,
f) Df (−2;+∞) $x = 0$,
g) Df R/{−3,3}; brak miejsc zerowych,
h) Df R/{−2,2}, brak miejsc zerowych,
i) Df<−9,+∞) ; $f(-9) = 0$,
j) Df<0,3) suma (3,+∞); $f(0) = 0$,
k) Df<3,+∞); $f(3) = 0$,
l) Df (−3,+∞); $f(0) = 0$,
m) Df = R; $f(-1) = 0$

2.3 Monotoniczność funkcji

Monotoniczność jest to pewna cecha funkcji, która mówi nam, co się dzieje z wartościami funkcji podczas zwiększania wartości liczbowych argumentów funkcji. Z tego względu wyróżniamy następujące funkcje:

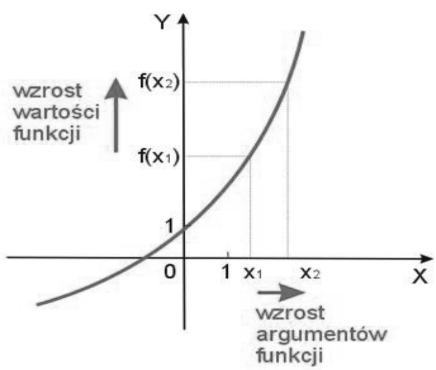
– rosnące
– malejące
– nierosnące
– niemalejące

Warto tu jeszcze wspomnieć o funkcji stałej, choć nie mówimy o niej, jak o funkcji monotonicznej.

Funkcja rosnąca

Funkcja f jest **rosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

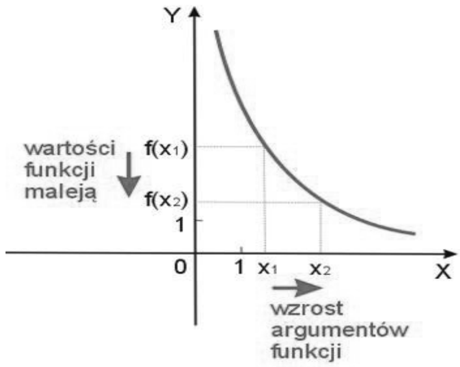


Cechą charakterystyczną wykresu funkcji rosnącej jest to, że zdaje się wznosić ku górze.

Funkcja malejąca

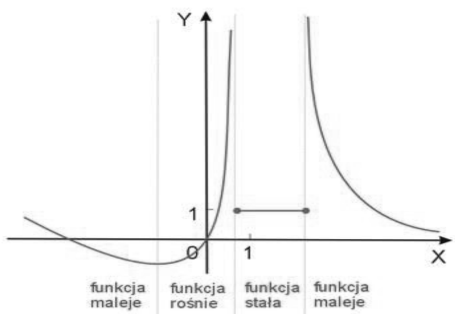
Funkcja f jest **malejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Cechą charakterystyczną wykresu funkcji malejącej jest to, że zdaje się opadać w dół.

Czy funkcja może być jednocześnie malejąca i rosnąca w różnych przedziałach liczbowych? Oczywiście, że tak. Poniżej przykład takiej funkcji wraz z określonymi przedziałami, w których funkcja rośnie i maleje oraz jest stała.

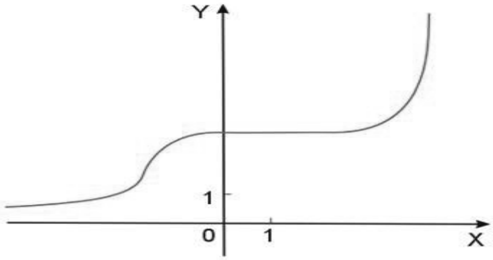


Funkcja niemalejąca

Funkcja f jest **niemalejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Zatem definicja funkcji niemalejącej przypomina definicję funkcji rosnącej, z tym że w przypadku funkcji niemalejącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała.

Oto ilustracja funkcji niemalejącej.

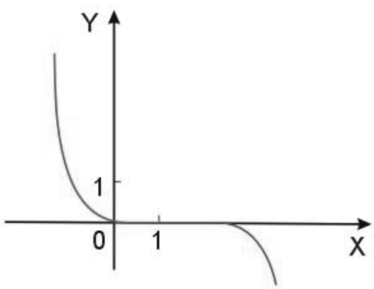


Funkcja nierosnąca

Funkcja f jest **nierosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

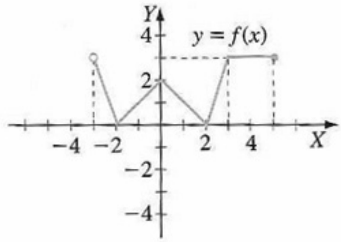
Zatem definicja funkcji nierosnącej przypomina definicję funkcji malejącej, z tym że w przypadku funkcji nierosnącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała. Oto ilustracja funkcji nierosnącej.

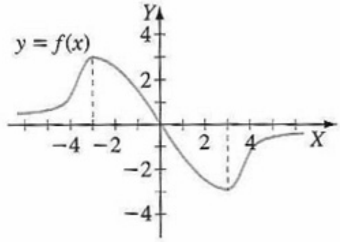


Uwaga: Symbole $\langle$, $\rangle$ oznaczają tak zwane **nierówności mocne** (ostre), symbole $\leq, \geq$ oznaczają tak zwane **nierówności słabe** (nieostre).

ZADANIE

2.3.1 Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca i stała.





Odpowiedź:

a) rosnąca $x \in (-2;0) \cup (2;3)$, malejąca $x \in (-3;-2) \cup (0;2)$, stała $x \in (3;4)$

b) rosnąca $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$, malejąca $x \in (-3;3)$

2.4 Sporządzanie wykresów funkcji

Teraz nauczę się:

Szkicować wykres funkcji za pomocą wzoru lub tabeli;

Odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

Aby narysować wykres funkcji, należy wykonać dwie następujące po sobie czynności. Powstawanie wykresu funkcji $y = -2x + 4$ przedstawimy na przykładzie: I. Za pomocą wzoru określamy kilka punktów należących do funkcji (minimum 3). W tym celu wybieramy wartości x, podstawiamy je do wzoru i obliczamy wartości y. Wartości x i y pomocniczo możemy zapisywać w tabeli:

x			
y			

Wybieramy sami argumenty (x), najlepiej jak najmniejsze (0,1,2).

x	0	1	2
y	4	2	0

Podstawiamy kolejno wybrane przez nas argumenty (1, 2, 3) do wzoru i obliczamy wartości (y):

$y = -2x + 4$

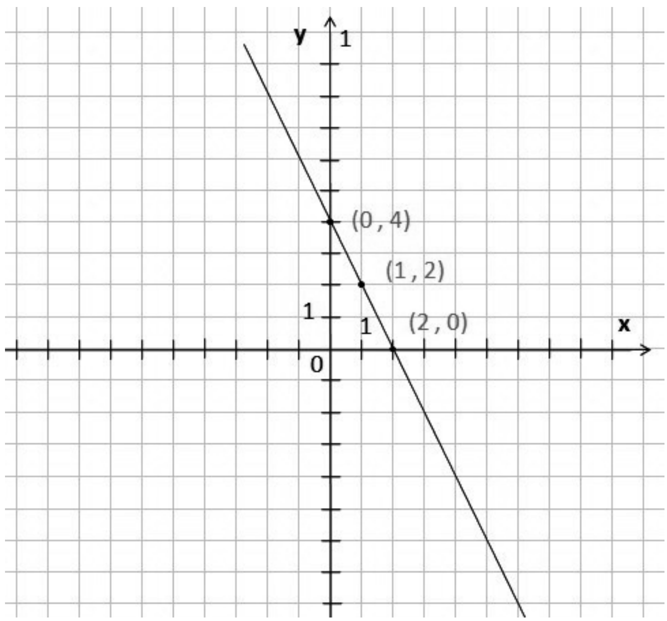
$y = -2\cdot 0+4=4$

$y = -2\cdot 1+4=2$

$y = -2\cdot 2+4=0$

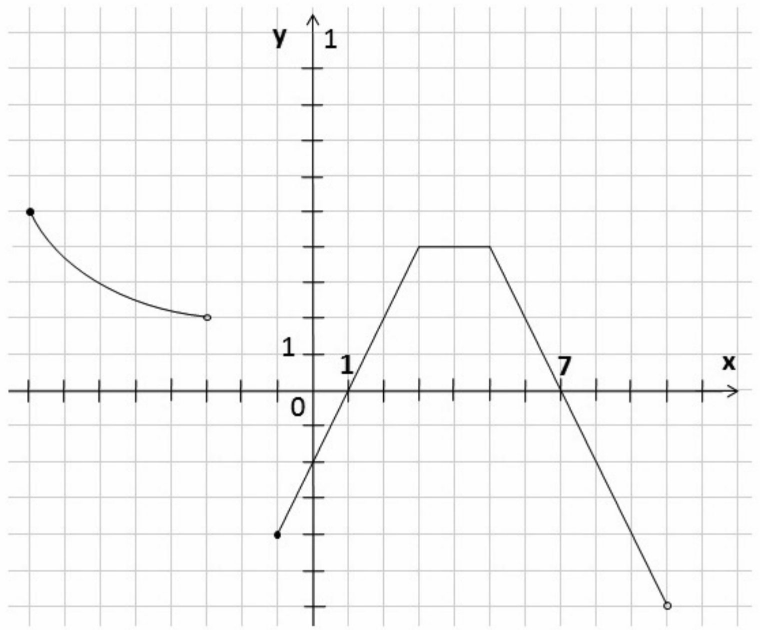
Otrzymujemy więc punkty: (0,4), (1,2),(2,0)

II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je prostą.



Przykład 1

Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:



Uwaga: *Minimalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{min}$ *lub* y_{min}*. Maksymalną wartość oznaczamy:* $f(x)_{max}$ *lub* y_{max}*. Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna – punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości wypada podać argument (x) lub przedział argumentów, dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.*

Odpowiedzi:

Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0X): Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu, to dwa przedziały, zgodne z zakresami liczb widocznymi na powyższym rysunku: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$\boldsymbol{D} = \langle \mathbf{-8};\ \mathbf{-3}) \cup \langle \mathbf{-1};\ \mathbf{10})$

Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0Y):

Zbiór wartości to jeden przedział. Powyżej widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$\boldsymbol{Z_w} = (\mathbf{-6};\ \mathbf{5}\rangle$

Monotoniczność

Funkcja malejąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam, gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy –8), nawias jest trójkątny, tam, gdzie jest pusta (–3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam, gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$\boldsymbol{f(x)} \searrow \boldsymbol{f(x)} \searrow$ w przedziałach $\langle \mathbf{-8};\ \mathbf{-3}) \cup \langle \mathbf{5};\ \mathbf{10})$

Funkcja rosnąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca. Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3 nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt, w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)} \nearrow \boldsymbol{f(x)} \nearrow$ w przedziale $\langle \mathbf{-1};\ \mathbf{3} \rangle$

Funkcja stała

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)}_{\rightarrow}$ w przedziale $\langle \mathbf{3}, \mathbf{5} \rangle$

Miejsce zerowe:

$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{1} \lor \boldsymbol{x_2} = \mathbf{7}$

Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych Punkty przecięcia z osią $0X$: $(1{,}0)$; $(7{,}0)$
Punkt przecięcia z osią $0Y$: $(0, -2)$

Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia/ ujemna

Przy liczbie –8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie –3 nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX.

$\boldsymbol{f(x)} > 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-8};\ \mathbf{-3}) \cup (\mathbf{1}; \mathbf{7})$

Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX. Przy liczbie 10 nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta.

$\boldsymbol{f(x)} < 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-1};\ \mathbf{1}) \cup (\mathbf{7}; \mathbf{10})$

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Dla wartości –5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.
$\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{-5}$ dla $\boldsymbol{x} = \mathbf{8{,}5}$

Dla wartości –2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 7. Rozwiązaniem jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$\boldsymbol{f(x) = -2}$ dla $\boldsymbol{x \in \{0, 7\}}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argument –7, 3. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i dwuelementowego zbioru.

$\boldsymbol{f(x) = 4}$ dla $\boldsymbol{x \in \langle 3, 5\rangle \cup \{-7, 3\}}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$\boldsymbol{f(x) = 6}$ Brak argumentów

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2, 4), B = (6, 2)$

Punkt A nie należy do wykresu funkcji. Punkt B należy do wykresu funkcji.

Maksimum i minimum

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka.

Minimum funkcji: brak

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego –8.

Maksimum funkcji $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

ZADANIA

2.4.1 Uzupełnij tabelkę funkcji $f: R \to R$ i narysuj jej wykres. Zadanie wykonaj również w arkuszu kalkulacyjnym.

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...								...

a) $y = x$

b) $y = \frac{1}{2}x+1$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = 3x+5$

e) $y = -x + 3$

f) $y = x\frac{3}{4}x - 2$

g) $y = |x|$

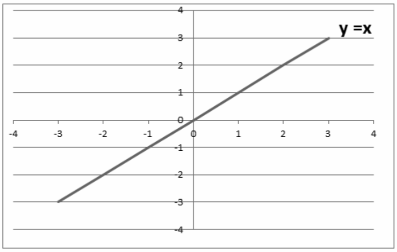
h) $y = |x+2|$

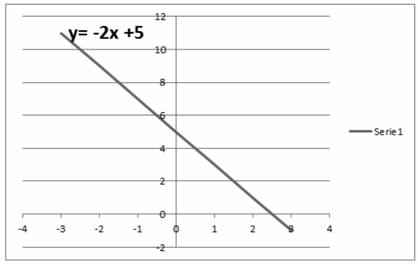
i) $y = |x| - 1$

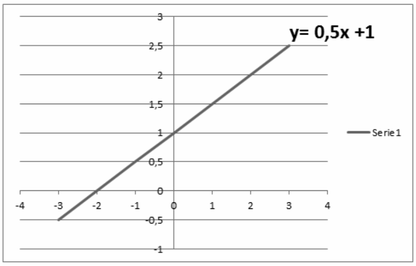
j) $y = \frac{1}{2}|x|$

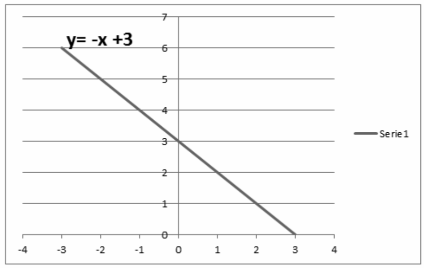
k) $y = 3|x|$

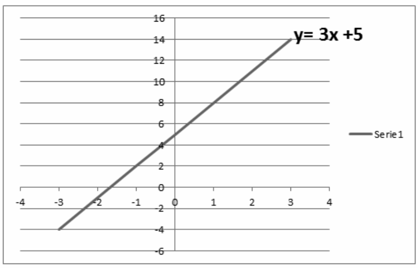
Odpowiedź:

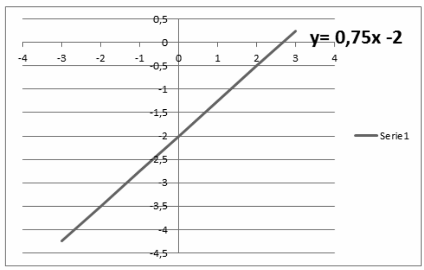

y =x

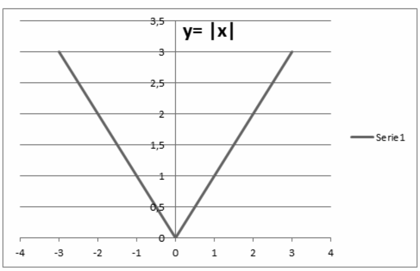

y= -2x +5
Serie1

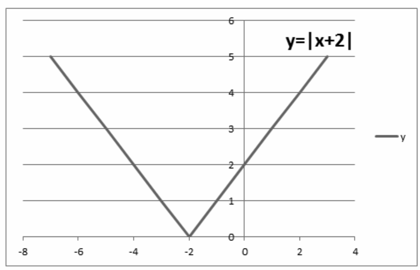

y= 0,5x +1
Serie1

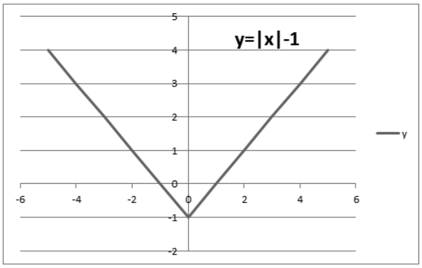

y= -x +3
Serie1

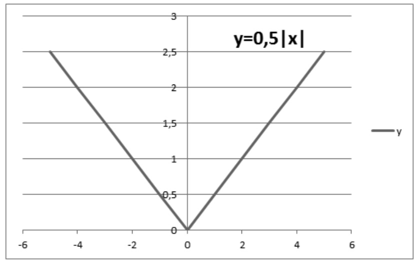

y= 3x +5
Serie1


y= 0,75x -2
Serie1


y= |x|
Serie1

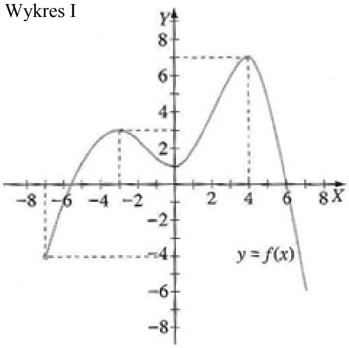

y=|x+2|
y



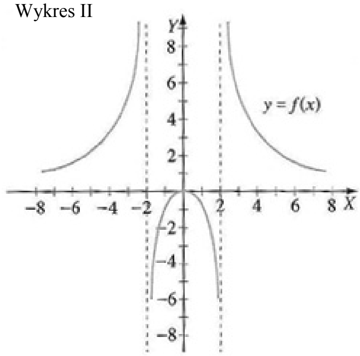


2.4.2 Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ:

Wykres I



Wykres II



a) dziedzinę funkcji,

b) zbiór wartości funkcji,

c) miejsca zerowe funkcji,

d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,

e) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała,

f) wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją).

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in \langle -7; +\infty)$

b) $y \in (-\infty; 7)$

c) $x = -5{,}5;\ x = 6$

d) $y > 0$ dla $x \in (-5{,}5; 6)$ $y < 0$ dla $x \in (-\infty; -5{,}5) \cup (6; +\infty)$

e) f rosnąca dla $x \in \langle -7; 4\rangle$ f malejąca dla $x \in \langle 4; +\infty)$

f) $y_{max} = 7$ dla $x = 4$ y_{min} nie istnieje

Wykres II

a) $x \in (-\infty; -2) \cup\cup(-2;2) \cup (2;+\infty)$

b) $y \in (-\infty;+\infty)$

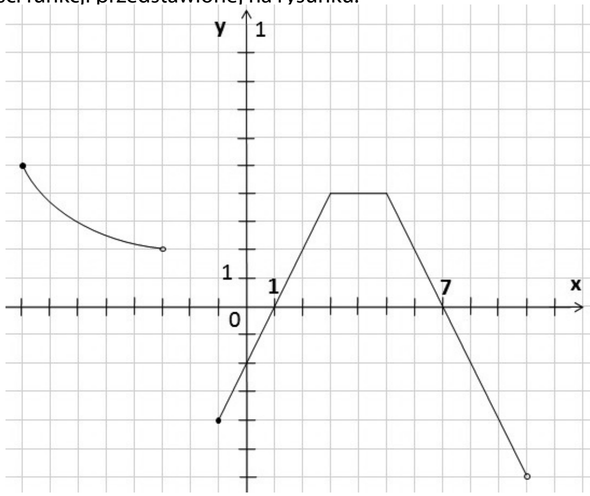
c) $x = 0$

d) $y > 0$ *dla* $x \in (-\infty; -2) \cup (2;+\infty)$ $y < 0$ *dla* $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

e) *f rosnąca dla* $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;0)$ *f malejąca dla* $x \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$

f) y_{max} *nie istnieje* y_{min} *nie istnieje*

2.4.3 Określ własności funkcji przedstawionej na rysunku:



a) Dziedzina funkcji
b) Zbiór wartości
c) Przedziały monotoniczności
d) Miejsce zerowe
e) Punkty przecięcia z osiami
f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$
g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$
h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość:
$f(x) = 5, f(x) = -2, f(x) = 4, f(x) = 6$
i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\leftarrow 2$; $f(x) \leq -2$
j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–2, 4), B = (6, 2) należą do wykresu funkcji *f*
k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji

Odpowiedź:

a) $x \in$ <–8; –3) ∪ <–1; 10),

b) $y \in$ (–6;5>,

c) f rosnąca dla $x \in$ <–1;3>, f malejąca dla $x \in$ <–8;–3) ∪ <5; 10), f stała dla $x \in$ <3;5>,

d) $x = 1$, $x = 7$,

e) $x = 0$ $y = -2$; $y = 0$ $x = 1$ i $x = 7$,

f) funkcja jest dodatnia dla $x \in$ <–8;–3) ∪ (1; 7),

g) funkcja jest ujemna dla $x \in$ <–1;1) ∪ (7; 10),

h) $f(x) = 5$ dla $x = -8$, $f(x) = -2$ dla $x = 0$, $f(x) = 4$ dla $x \in$ <3;5>, $f(x) = 6$ nie ma takich x,

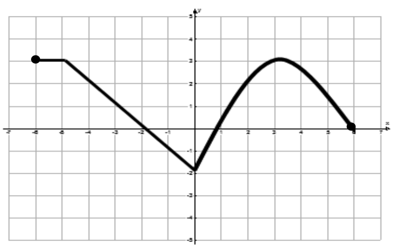
i) $f(x) < -2$ dla $x \in$ <–1;0) ∪ (8; 10), $f(x) \leq -2$ dla $x \in$ <–1;0> ∪ <8; 10),

j) A nie należy, B $\in f$,

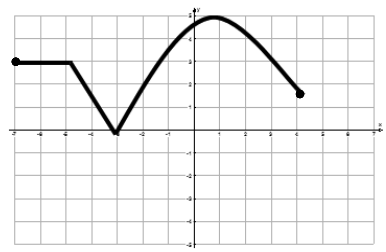
k) $y_{max} = 5$ dla $x = -8$, y_{min} nie istnieje

2.4.4 Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:

Wykres I



Wykres II



a) Dziedzina funkcji

b) Zbiór wartości

c) Przedziały monotoniczności

d) Miejsce zerowe

e) Punkty przecięcia z osiami

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość: $f(x) = 3$, $f(x) = 1$

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\langle 3$

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–4, 2), B = (5, 1) należą do wykresu funkcji f

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in$ <–6,6>

b) $y \in$ <–2,3>

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in$ <3,1> f jest malejąca dla $x \in$ <–5,0> ∪ <3; 6)
f jest stała dla $x \in$ <–6,–5>

d) $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$

e) (–2,0); ($\frac{1}{2}$, 0); (6,0); (0,–2)

f) $x \in$ <–6,–2) ∪ <$\frac{1}{2}$; 6)

g) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-6,-5> \cup <\{3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3, 1\}$

i) $x \in (-5,3)$

j) tak

k) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -2$

Wykres II

a) $x \in <-7,4>$

b) $y \in <0,5>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <0,\frac{1}{2}>$ f jest malejąca dla $x \in <-5,0) \cup <\frac{1}{2}; 4>$
f jest stała dla $x \in <-7,-5>$

d) $x \in \{-3\}$

e) (3,0); $(0;4\frac{1}{2})$

f) $x \in <-7,-3) \cup (-3; 4)$

g) $x \in \{\emptyset\}$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-7,-5> \cup <\{-1\frac{1}{2}, 3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\}$

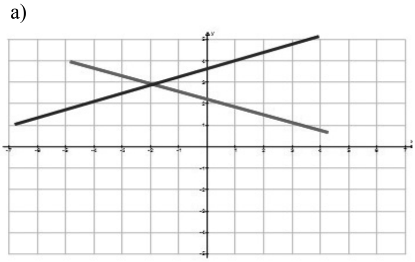
i) $x \in (-5,-1\frac{1}{2}) \cup (3;4)$

j) nie

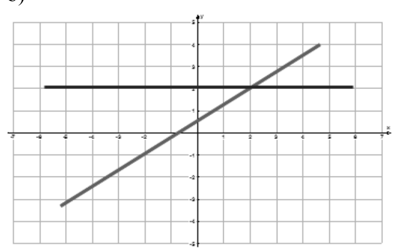
k) $y_{max} = 5$, $y_{min} = 0$

2.4.5 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) = g(x)$.

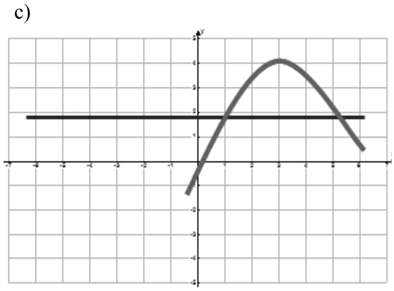
a)



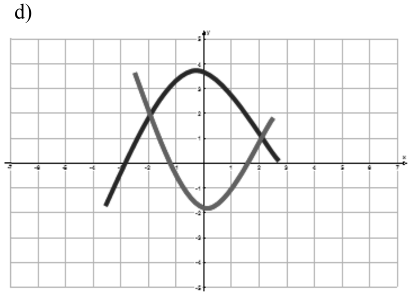
b)



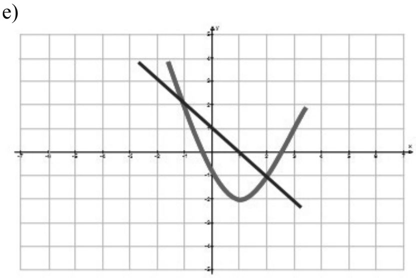
c)



d)



e)

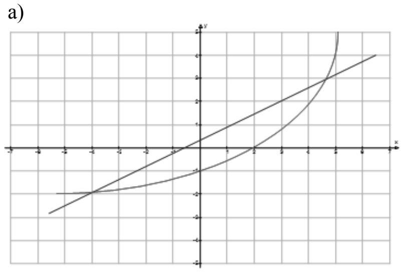


Odpowiedź:

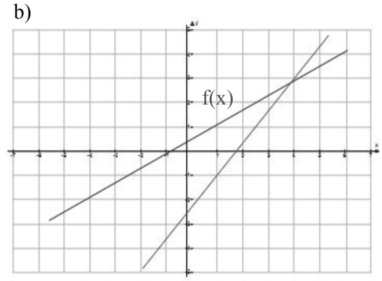
a) $(-2\frac{1}{2},1)$,
b) (2,2),
c) (1,2); (5,2),
d) (–2,2); (2,1),
e) (–1,2); (2,–1)

2.4.6 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) \geq g(x)$ oraz $f(x) \langle g(x)$

a)



b)



Odpowiedź:

a) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in <-4,4\frac{1}{2}>$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in <-\infty,-4) \cup (4\frac{1}{2},+\infty)$
b) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in <-\infty,4>$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (4,+\infty)$
c) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in <-\infty,-1> \cup <2,5>$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-1,2) \cup (5,+\infty)$

2.5 Przekształcanie wykresów funkcji

Teraz nauczę się:

Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = -f(x)$;

Narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

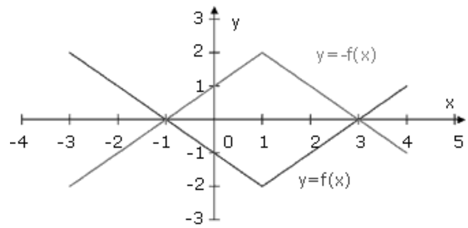
Wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

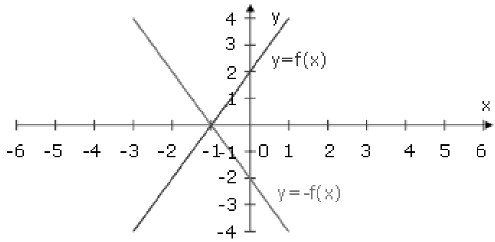
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = |f(x)|$,

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

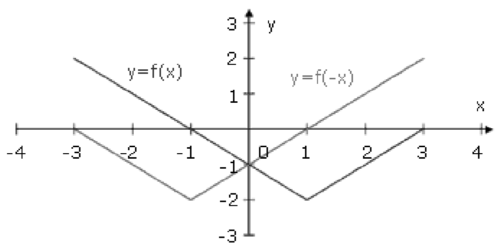
Przykład





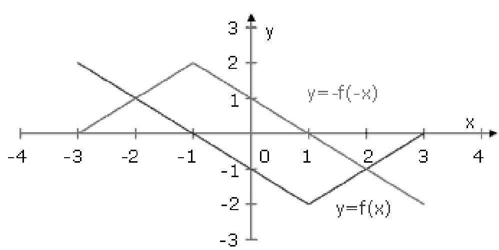
$x \to y = f(-x)$

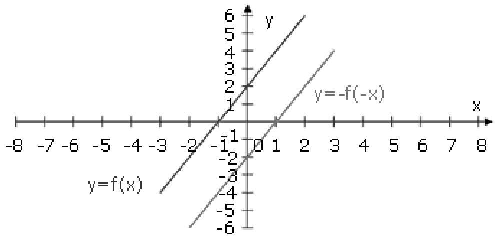
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

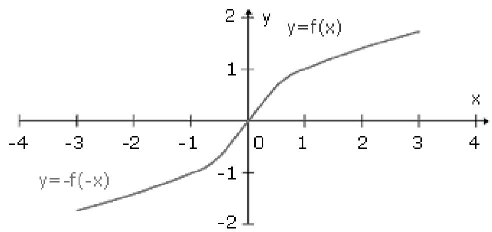


$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$.

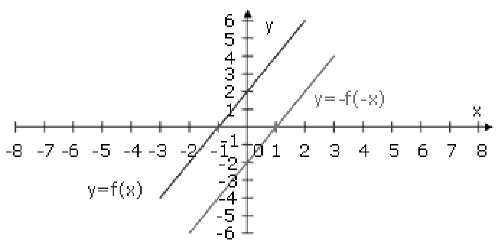






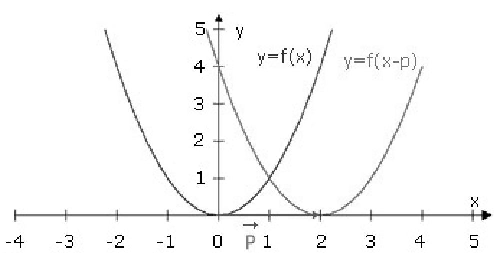
$\boldsymbol{x \rightarrow y = f(x) + q}$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0, q]$).



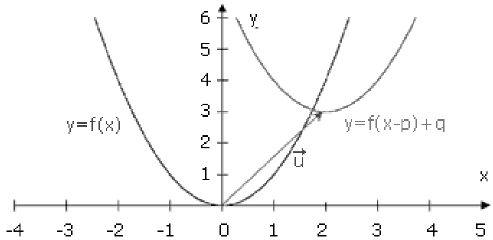
$\boldsymbol{x \rightarrow y = f(x - p)}$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $[p, 0]$.



➡ $\boldsymbol{x \rightarrow y = f(x-p)+q}$

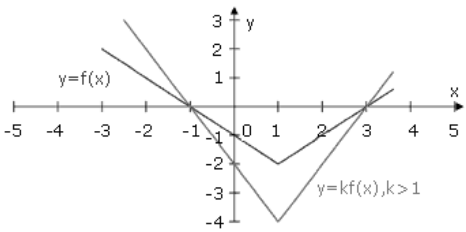
Wykres funkcji $y = f(x-p)+q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $[p,q]$.

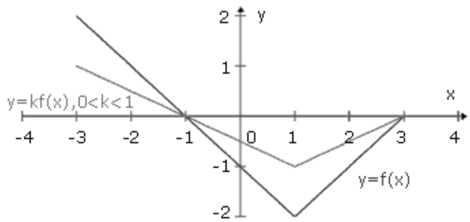


◤ $\boldsymbol{x \rightarrow y = k \cdot f(x)}$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k-krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

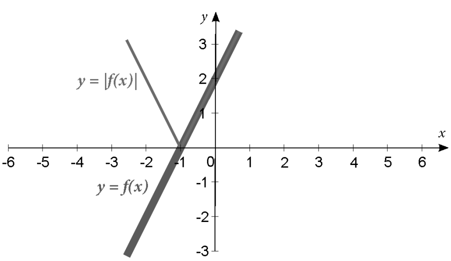
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY). Dla $k \in (0{,}1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).





➡ $\boldsymbol{* x \rightarrow y = |f(x)|}$

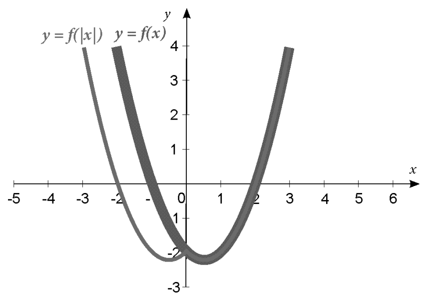
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$, leżącą nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX, odbić symetrycznie względem osi OX.

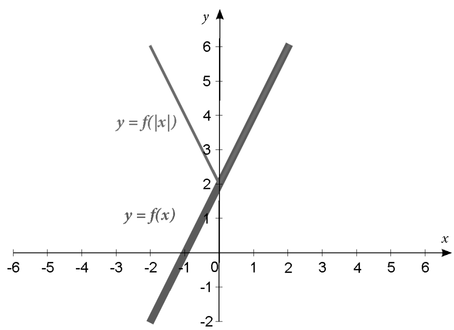


$* \boldsymbol{x \to y = f(|x|)}$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

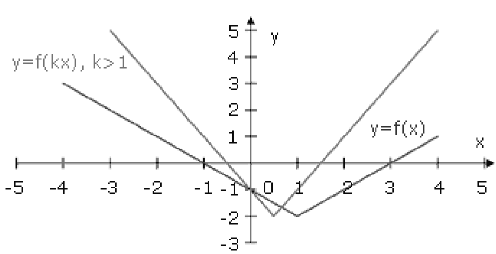


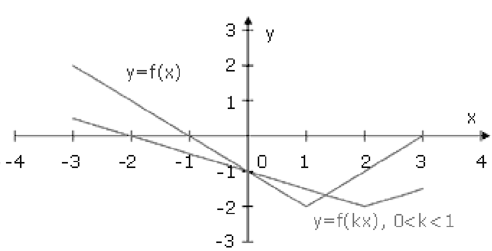


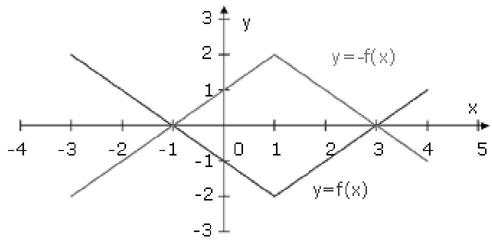
$* \boldsymbol{x \to y = f(k * x)}$

Wykres funkcji $y = f(k * x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX. Dla k $\in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.







ZADANIA

2.5.1 Mając dane funkcje:

$$f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = -2x - 1, f(x) = -x + 4$$

Zapisz wzory funkcji i naszkicuj wykresy:

a) $x \to f(x)$

b) $x \to -f(x)$

c) $x \to f(-x)$

d) $x \to f(x) - 1$

e) $x \to f(x+1)$

f) $x \to |f(x)|$

g) $x \to f(|x|)$

h) $x \to |f(x) - 1|$

Odpowiedź:

a) $y = -f(x) = -2x$

b) $y = -f(x) = -2x$

c) $y = f(-x) = -2x$

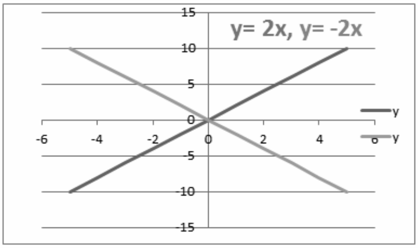
d) $y = f(x) - 1 = 2x - 1$

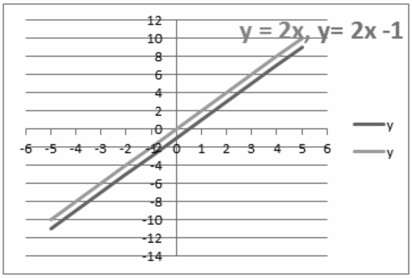
e) $y = f(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$

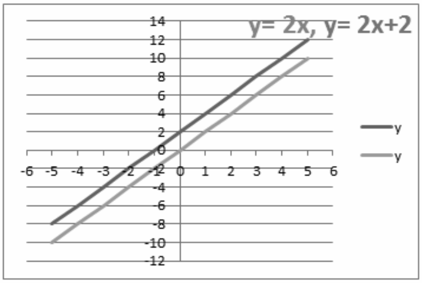
f) $y = |f(x)| = |2x|$

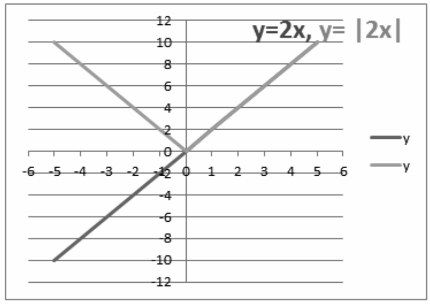
g) $y = f(|x|) = 2|x|$

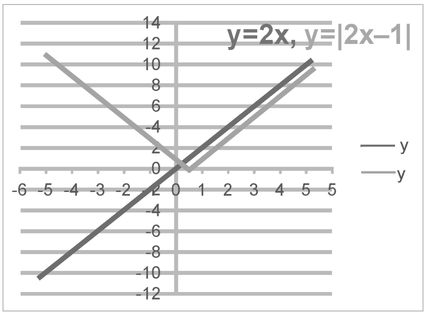
h) $y = |f(x) - 1| = |2x - 1|$

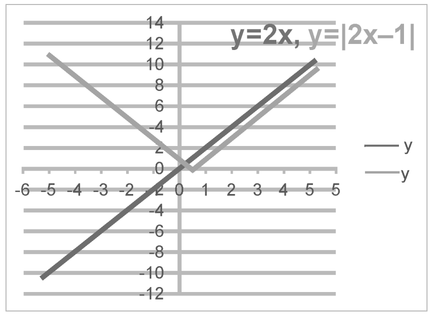












$f(x) = 3x + 1$, $y = -f(x) = -3x - 1$, $y = f(-x) = -3x + 1$, $y = f(x) - 1 = 3x$, $y = f(x+1) = 3x + 4$,

$y = |f(x)| = |3x + 1|$, $y = f(|x|) = 3|x| + 1$, $y = |f(x) - 1| = |3x|$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = -f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $y = f(-x) = \frac{1}{2}x + 2$, $y = f(x) - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = f(x+1) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$,

$y = |f(x)| = |-\frac{1}{2}x + 2|$, $y = f(|x|) = -\frac{1}{2}|x| + 2$, $y = |f(x) - 1| = |-\frac{1}{2}x + 1|$

$f(x) = -2x - 1$, $y = -f(x) = 2x + 1$, $y = f(-x) = 2x - 1$, $y = f(x) - 1 = -2x - 2$,

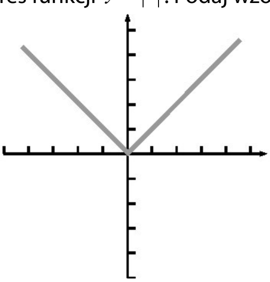
$y = f(x+1) = -2x - 3$, $y = |f(x)| = |-2x - 1|$, $y = f(|x|) = -2|x| - 1$, $y = |f(x) - 1| = |-2x - 2|$

$f(x) = -x + 4$, $y = -f(x) = x - 4$, $y = f(-x) = x + 4$, $y = f(x) - 1 = -x + 3$, $y = f(x+1) = -x + 3$,

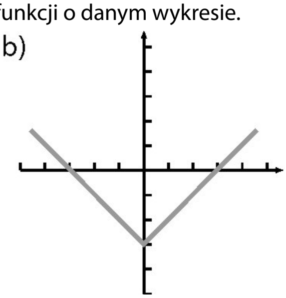
$y = |f(x)| = |-x + 4|$, $y = f(|x|) = -|x| + 4$, $y = |f(x) - 1| = |-x + 3|$

2.5.2 Dla każdego z poniższych wykresów funkcji opisz, jak go otrzymano, przesuwając odpowiedni wykres funkcji $y = |x|$. Podaj wzór funkcji o danym wykresie.

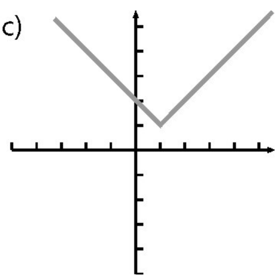
a)



b)



c)



Odpowiedź:

a) $y = |x|$ przesunięto o wektor [1,0] y = $|x-1|$

b) $y = |x|$ przesunięto o wektor [0,–3] $y = |x| - 3$

c) $y = |x|$ przesunięto o wektor [3,1] $y = |x-3| + 1$

2.5.3 Zadanie 1 i 2 rozwiąż za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

2.6 Funkcja liniowa i jej własności

Teraz nauczę się:

- Zapisywać funkcję w postaci ogólnej i kierunkowej;
- Interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- Określać monotoniczność funkcji na podstawie jej wzoru i wykresu;
- *Badać monotoniczność funkcji w zależności od parametru.

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są współczynnikami liczbowymi, nazywamy **funkcją liniową**. **Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.**

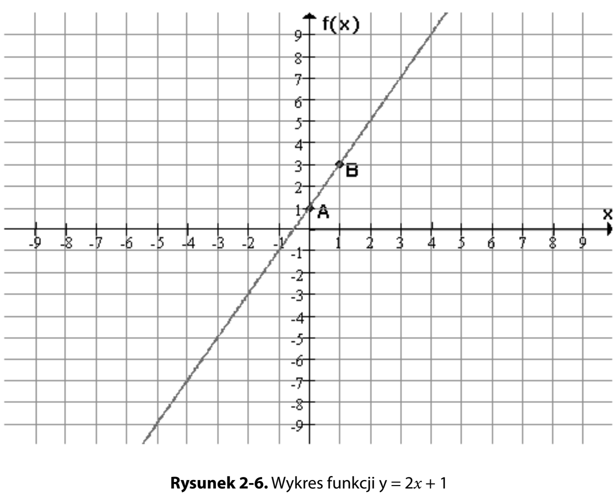
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej.**

Wykresem każdej funkcji liniowej **jest linia prosta**. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty.

Przykład 1

Narysuj prostą: $y = 2x + 1$ Jeżeli $x = 0$, to $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{A}\ (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ Jeżeli $x = 1$, to $y = 3 \rightarrow \boldsymbol{B}\ (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

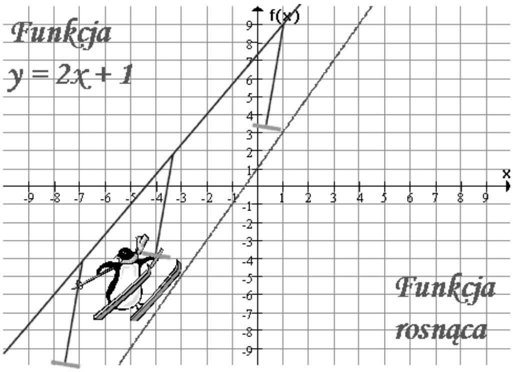


Rysunek 2-6. Wykres funkcji y = 2x + 1

Monotoniczność funkcji liniowej

Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz większe wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **rosnąca**.

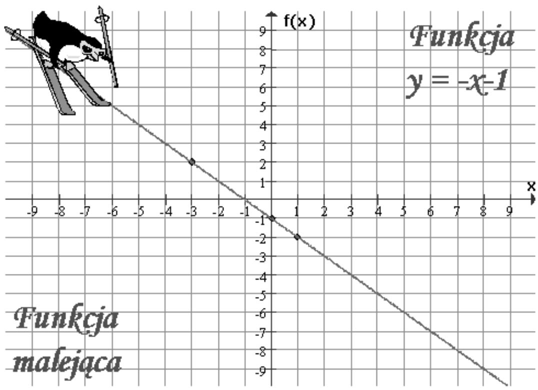
Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy rosnącą, jeżeli $a > 0$.



[9]

Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz mniejsze wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **malejąca**.

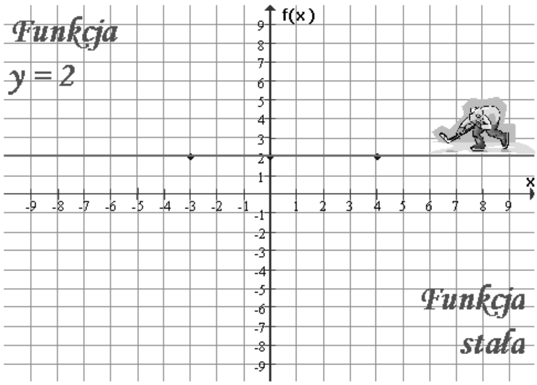
Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy malejącą, jeżeli $a < 0$.



- Jeżeli dla wszystkich argumentów funkcja przyjmuje taką samą wartość, to o takiej funkcji mówimy, że jest **stała**.

Jeżeli $a = 0$, to funkcja $y = ax + b$ jest stała. Jej wzór przyjmuje postać: $y = b$.

9 https://sites.google.com/site/wlasnoscfunkcji/monotoniczno%C5%9B%C4%87.

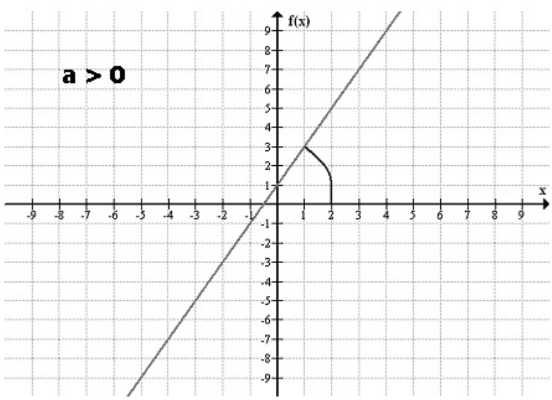


Współczynnik *a*

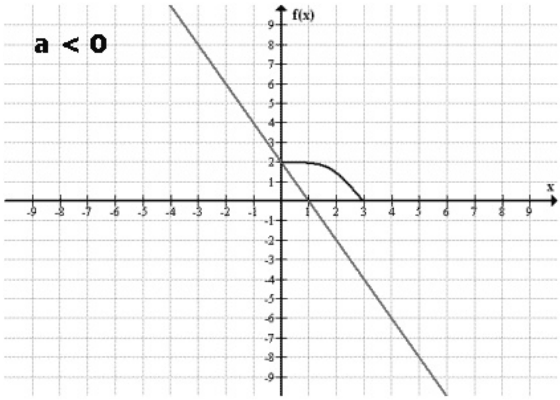
Współczynnik *a* mówi o kierunku prostej, która jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$. Liczba *a* jest więc nazywana **współczynnikiem kierunkowym** funkcji $y = ax + b$.

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej $a = tg\,\alpha$. Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

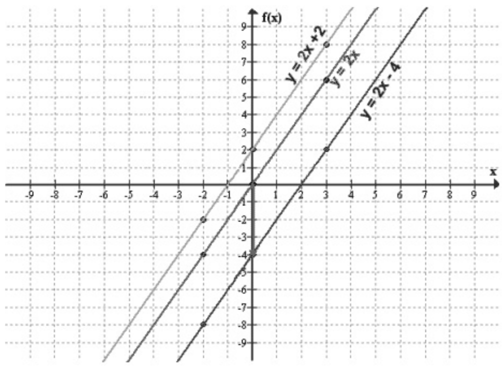
- Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, kąt nachylenia do osi x jest wyrażony jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Jeżeli liczba a jest dodatnia, to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem ostrym (im większa jest liczba a, tym kąt ten jest większy):



Jeżeli liczba a jest ujemna, kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem rozwartym:



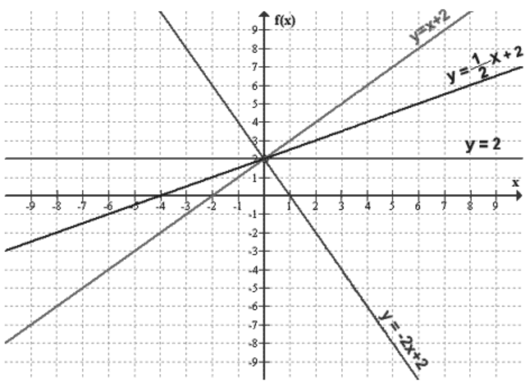
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Współczynnik b

Współczynnik b mówi o tym, w którym punkcie wykres funkcji $y = ax + b$ przecina oś OY, czyli wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych (0,b).

Wykres



Miejsce zerowe – jest to taki argument (x), dla którego wartość (y) wynosi 0.

UWAGA!!!!

Funkcja stała nie ma miejsca zerowego z wyjątkiem funkcji $y = 0$, która ma ich nieskończenie wiele.

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy miejsca zerowego, podstawiając za y wartość 0, i z tak powstałego równania liczymy x (czyli miejsce zerowe).

Przykład 2

$$\mathbf{y = 2x - 4}$$

Podstawiamy za y wartość 0 i rozwiązujemy równanie.

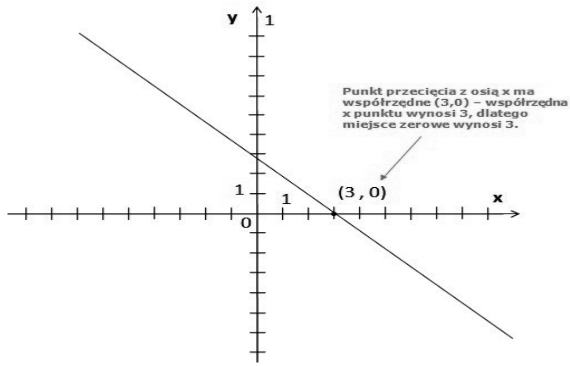
$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 \qquad /\div(-2)$$

$$x = 2$$

Piszemy: Miejsce zerowe funkcji wynosi: $x = 2$

Mając do dyspozycji wykres, szukamy punktu przecięcia wykresu z osią odciętych (x), i odczytujemy wartość argumentu (x), który jest miejscem zerowym.



Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y - ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.

Przykład 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 4$

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$$

Funkcja ma miejsce zerowe równe: $x_0 = 2$

Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

– **punktu przecięcia z osią x** – podstawiając za y wartość 0, i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe znajduje się w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład 4

$y = 4x + 12$

$0 = 4x + 12$

$-4x = 12 \;/\div (-4)$

$x = -3$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: (–3,0)

– **punktu przecięcia z osią y** – podstawiając za x wartość 0, i obliczając y.

Przykład 5

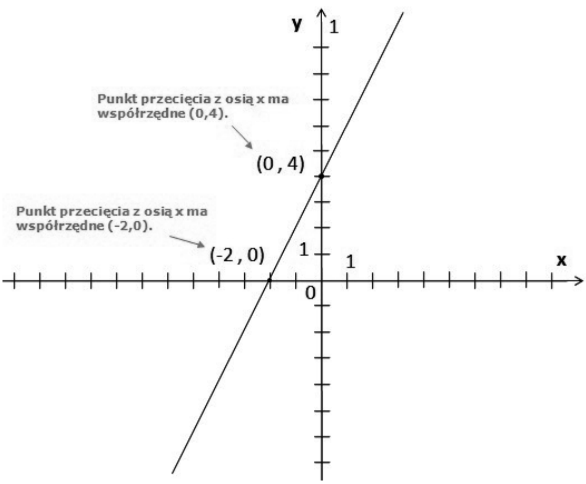
$y = 4x + 12$

$y = 4 \cdot 0 + 12$

$y = 12$

Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: (0,12)

Mając do dyspozycji wykres, odczytujemy współrzędne obu punktów z wykresu.



Punkt przecięcia z osią x: $(-2{,}0)$ Punkt przecięcia z osią y: $(0{,}4)$

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji i wykonać obliczenia po obu stronach powstałego równania, aby sprawdzić, czy lewa strona będzie równała się prawej. Jeżeli tak jest, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, znaczy to, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

Przykład 6

Sprawdź, czy punkty: A = (1,2); B = (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.

Sprawdzamy osobno oba punkty:

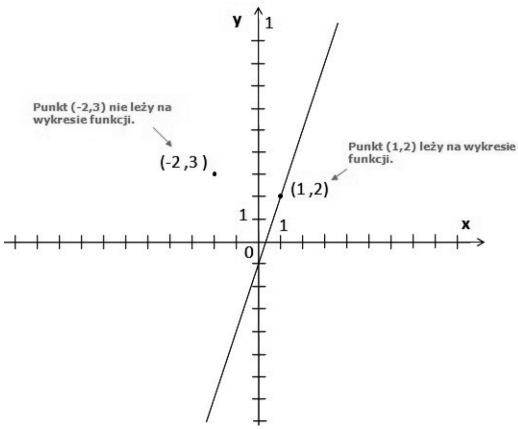
$$y = 3x - 1$$

Podstawiamy punkt (1,2)	Podstawiamy punkt (-2,3)
$2 = 3 \cdot 1 - 1$	$3 = 3 \cdot (-2) - 1$
$2 = 2$	$3 \neq -7$
$L = P$	$L \neq P$

Punkt (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt (–2,3) nie należy. Mając do dyspozycji wykres funkcji, wystarczy znaleźć dany punkt w układzie współrzędnych – jeżeli leży on na prostej, która jest wykresem funkcji, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, znaczy to, że nie należy.

Przykład:

Sprawdź, czy punkty: (1,2); (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.



Punkt A = (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt B = (–2,3) nie należy.

ZADANIA

2.6.1 Podane równanie sprowadź do postaci kierunkowej:

a) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$

b) $x + y - 4 = 0$

c) $2x + 2y + 3 = 0$

d) $x + 2y = 12$

e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

f) $\frac{x-1}{2}+\frac{y+2}{3}=2$

Odpowiedź:

a) $y = 3x + 0{,}5$,

b) $y = -x + 4$,

c) $y = -x - 1\frac{1}{2}$,

d) $y = -\frac{1}{2}x - 6$,

e) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$

2.6.2 Które spośród punktów A, B, C, D należą do wykresu funkcji: $\mathbf{f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2,\ f_2(x) = \frac{x+1}{2}}$:

a) A = (2,1) B = $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ C = (–2,1), D = (0, 2),

b) A = (1,1), B = (2,2), C = (–3,–1), D = $(2, \frac{3}{2})$

Odpowiedź:

$A \in f_1$, $D \in f_1$, $A \in f_2(x)$, $C \in f_2(x)$, $D \in f_2(x)$

2.6.3 Narysuj wykresy funkcji, a następnie:

- określ monotoniczność,
- oblicz miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- sprawdź, czy punkt A = (1,3) należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x - 1$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = -9x - 3$

d) $f(x) = 0{,}4x + 0{,}1$

e) $f(x) = \frac{-x+2}{2}$

f) $f(x) = \frac{2-2x}{-4}$

g) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$

h) $f(x) = \frac{1-6x}{3} + 2x$

Odpowiedź:

a) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y (0, –1); nie należy

b) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{2})$; nie należy

c) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{3}$; z osią x $(-\frac{1}{3},0)$; z osią y (0,–3); nie należy

d) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0,\frac{1}{10})$; nie należy

e) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = 2$; z osią x (2,0); z osią y (0,1); nie należy

f) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y $(0, -\frac{1}{2})$; nie należy

g) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -4$; z osią x (–4,0); z osią y (0,–2); nie należy

h) funkcja stała; miejsce zerowe brak; brak; brak; nie należy

2.6.4 Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-1)x+1$

b) $f(x) = (-m+2)x-4$

c) $f(x) = (m-\frac{\sqrt{3}}{2})x-\sqrt{3}$

Odpowiedź: a) $m > \frac{1}{2}$, b) $m < 2$, c) $m > \sqrt{\frac{3}{2}}$

2.6.5 Przez które ćwiartki przechodzą proste $\mathbf{y_1 = 2x + 1}$ **i** $\mathbf{y_2 = \frac{1}{2}x - 5}$? Która z prostych tworzy z osią OX większy kąt? W której ćwiartce przecinają się proste?

Odpowiedź: y_1 przez I, II, III; y_2 przez I, III, IV

2.7 Zastosowanie funkcji do opisywania zjawisk z życia codziennego

Teraz nauczę się:

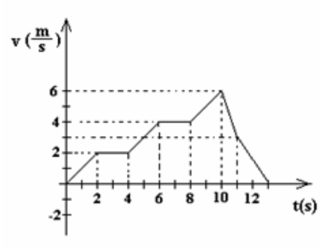
Wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Funkcje wykorzystywane są w wielu dziedzinach życia, np.:

- W badaniach statystycznych – kurs walut.
- W balistyce – zapisywanie toru lotu pocisku.
- Do obliczania maksymalnej prędkości samochodu, z jaką bezpiecznie może pokonać dany zakręt, oraz wiele innych.

W fizyce często do opisywania zjawisk z życia codziennego korzystamy z wykresów funkcji. Analizując dane przedstawione na wykresie, najpierw sprawdzamy, jakie wielkości fizyczne i ich jednostki zostały na nim zaznaczone.

Przykład 1



Jak zinterpretować dane na powyższym wykresie? Zauważ, że mamy do czynienia z dwiema wielkościami: szybkością i czasem. Co się dzieje z szybkością ciała w poszczególnych przedziałach czasu?

Na początku ciało spoczywało, następnie przez 2 sekundy jego szybkość wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu (ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym), przez kolejne 2 sekundy ciało poruszało się ze stałą prędkością, od 4 do 6 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 6 do 8 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne dwie sekundy jego szybkość wzrastała, następnie ciało zmieniło zwrot prędkości (zawraca) i przez pierwszą sekundę porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 11 do 12 sekundy jest to również ruch jednostajnie przyspieszony. Obliczmy przyspieszenie ciała w poszczególnych przedziałach czasu. Wiedząc, że przyspieszenie jest równe ilorazowi zmiany szybkości ciała do zmiany czasu a = $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Z wykresu odczytujemy:

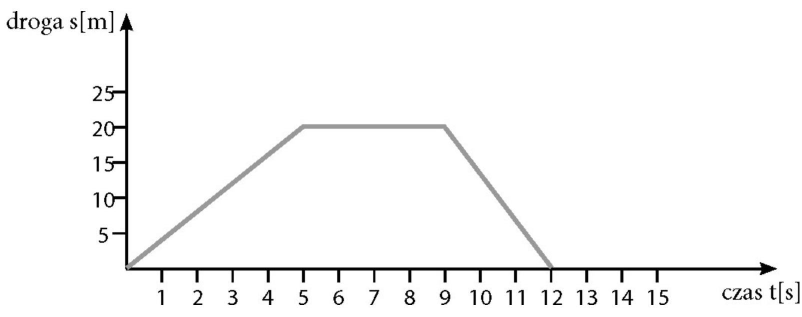
$v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 4, v_5 = 4, v_6 = 6,$

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11, t_7 = 12$, stąd

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{2m/s}{2s} = 1\frac{m}{s^2}$ i analogicznie

$a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, a_4 = -3\frac{m}{s^2}, a_5 = -1{,}5\frac{m}{s^2}.$

Przykład 2



Przeanalizujmy podobny wykres. Zauważmy, jakie wielkości fizyczne mamy teraz zaznaczone na wykresie? Przez pięć pierwszych sekund droga rosła proporcjonalnie do czasu, to znaczy, że ciało poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne 4 sekundy ciało spoczywa, a przez następne 3 sekundy zawraca, poruszając się ze stałą prędkością. Obliczmy $v_1,\ v_2,\ i\ v_3$ Z lekcji fizyki pamiętasz, że:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, stąd\ v_1 = 4\ \frac{m}{s}, v_2 = 0\ \frac{m}{s}, v_3 = -6\ \frac{2}{3}\frac{m}{s}.$$

Przykład 3

Zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita a wyrażoną w stopniach Celsjusza, jest zależnością liniową.

a) Znajdź tę zależność, wiedząc że $32°F = 0°C$, a $5°F = -15°C$.

b) 22 lipca w San Diego temperatura o godzinie 12^{00} była o $12{,}5°C$ wyższa niż temperatura o godzinie 6^{00}. Wyraź wzrost temperatury w stopniach Fahrenheita.

Jeżeli F jest temperaturą w Fahrenheitach, a C w Celsjuszach, to wiemy, że $F = aC + b$. Stałe a i b wyznaczymy z podanych informacji.

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a(-15) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 32 \\ 15a = b - 5 = 27 \Rightarrow a = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$

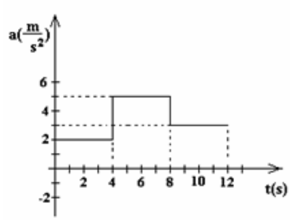
Skorzystamy ze wzoru z podpunktu a).

$$F_2 - F_1 = T_F = \frac{9}{5}C_2 + 32 - \frac{9}{5}C_2 - 32 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$$

Odpowiedź: $22{,}5°F$

ZADANIA

2.7.1 Na podstawie poniższego wykresu dokonaj analizy ruchu ciała i sporządź wykres zależności *v(t), s(t).*

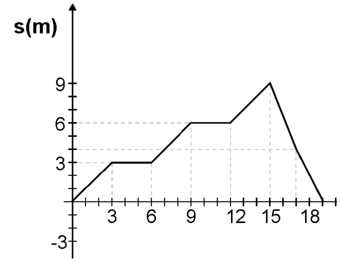


Odpowiedź:

Przez pierwsze dwie sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym a = 2 $\frac{m}{s^2}$, przez kolejne z przyspieszeniem a = 5 $\frac{m}{s^2}$, od 8 do 12s z przyspieszeniem a = 3 $\frac{m}{s^2}$.

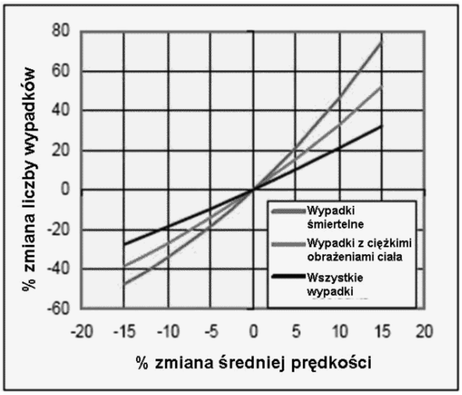
Podstawiamy do wzoru $v = at$ kolejne sekundy czasu i obliczamy odpowiadające jej szybkości.

2.7.2 Opisz zachowanie ciała na podstawie wykresu.



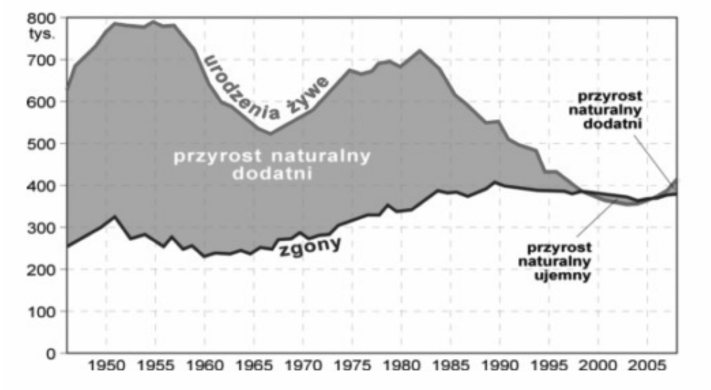
Odpowiedź: Przez pierwsze 3s ciało porusza się ruchem jednostajnym, następnie spoczywa, i tak na zmianę, w 15s zawraca, dalej poruszając się ruchem jednostajnym, ale z inną szybkością.

2.7.3 Jakie informacje można odczytać z poniższego wykresu? Wyciągnij odpowiednie wnioski.



Zależność między zmianami średniej prędkości jazdy a liczbą wypadków

2.7.4 Wykres przedstawia, jak zmieniał się przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1950 – 2005. [10]



Przyrost naturalny w Polsce w latach 1946 – 2008

10 (www.wiking.edu.pl/article.php?id=269, 25.03.2013).

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak zmieniała się liczba urodzeń w latach 1950 – 2005?
2. W którym roku liczba urodzeń była największa, a w którym najmniejsza?
3. Jak w tym czasie kształtowała się liczba zgonów?
4. W którym roku przyrost naturalny ludności był najwyższy, a w którym najniższy?

Informacja do zadania 2.6.5:

Prędkość rzeki zależy od takich czynników, jak: głębokość rzeki, nachylenie terenu, rodzaj podłoża tworzącego dno i brzegi rzeki.

Większość rzek zwalnia pod koniec swojego biegu, ponieważ nachylenie terenu, czyli spadek wody, znacznie się zmniejsza. Gdyby przeanalizować przekrój rzeki, można by zauważyć, że prędkość różni się w różnych obszarach, najmniejsza jest na dnie rzeki, a największa na jej powierzchni. Powodem tego jest tarcie pomiędzy przepływającą wodą a powierzchnią dna rzeki.

Przy brzegach rzeki, szczególnie na zakrętach, przepływ wody jest najszybszy z powodu siły odśrodkowej.

Zwykle prędkość V wyrażamy w $\left[\frac{m}{s}\right]$ metrach na sekundę, natomiast współczynnik rodzaju podłoża oznaczamy k i wyrażamy w $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$. Poziom wody oznaczamy T i wyrażamy w metrach, do wyznaczenia prędkości używamy również współczynnika nachylenia, spadku terenu S.

Prędkość przepływu wody obliczamy ze wzoru: $V = k \cdot \sqrt[3]{T^2} \cdot \sqrt{S}$

Wskazówka: współczynnik nachylenia S = (różnica poziomów)/(długość rzeki)

2.7.5 Dwie stacje pomiarowe Berthelsdorf i Nossen znajdują się na rzece Mulde. Pomiędzy tymi stacjami średni poziom wody wynosi 35 cm. Wysokość nad poziomem morza w Berthelsdorf wynosi 376,61 m, a w Nossen – 203,76 m. Długość rzeki na tym odcinku wynosi 42,3 km. Dno rzeki jest wyboiste i wartość współczynnika rodzaju podłoża wynosi 30 $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$.

a) Oblicz prędkość rzeki na tym odcinku.

b) Raz na 20 lat poziom wody rzeki Mulde osiąga 2,5 m. Oblicz, jaką wówczas prędkość osiąga rzeka.

c) 30 sierpnia 2008 roku po długim okresie deszczowym prędkość rzeki osiągnęła wartość 1,68 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Oszacuj, jak wysoki był wówczas poziom wody.

2.7.6 Prędkość rzeki można również wyrazić w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Tak wyrażona, daje nam informację, jak dużo wody przepływa w ciągu sekundy. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki pomiarów poziomu wody w rzece i jej przepływu.

Data	Godzina	Poziom wody w [cm]	Przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
26.10	01:00	41	2,04
	07:00	39	1,81
	13:00	40	1,92
	19:00	40	1,92
27.10	01:00	40	1,92
	07:00	40	1,92
	13:00	41	2,04
	19:00	44	2,42
28.10	01:00	45	2,55
	07:00	45	2,55
	13:00	41	2,04
	19:00	41	2,04
29.10	01:00	41	2,04
	07:00	41	2,04
	13:00	53	3,78
	19:00	56	4,31
30.10	01:00	73	8,07
	07:00	83	10,9
	13:00	103	19,3
	19:00	106	20,7
31.10	01:00	93	14,8
	07:00	81	10,3
	13:00	75	8,6
	19:00	71	7,56
01.11	01:00	70	7,31
	07:00	66	6,36

a) Przedstaw na wykresie zależność prędkości przepływu od poziomu wody w dniach od 30 października (godz. 01:00) do 31 października (godz. 01:00).

b) Za pomocą jakiej funkcji można opisać tę zależność?

c) Za pomocą programu Exel lub kalkulatora graficznego znajdź wzór funkcji, która w przybliżeniu opisuje tę zależność.

d) Wykorzystując otrzymaną funkcję, oszacuj, ile będzie wynosić prędkość przepływu w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$, jeśli poziom wody osiągnie 2,5 m.

e) Przedstaw chronologicznie na wykresie prędkość przepływu wody w dniach od 30 października (godz. 01:00) do 31 października (godz. 01:00). Wyraź przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$.

f) Jaką wartość wyraża obszar zawarty pomiędzy wykresem funkcji a osią x?

g) Oblicz pole powierzchni tego obszaru (wyznacz pole powierzchni tego obszaru na różne sposoby).

h) Wywnioskuj, jak będzie się zmieniać wartość współczynnika *k*, jeżeli dno rzeki będzie bardziej gładkie.

i) Wyjaśnij, dlaczego prędkość przepływu nie jest liniowo zależna od poziomu wody.

j) Wykorzystanie rzek jako drogi wodnej dla statków wymaga czasem pogłębiania koryta rzeki. Jakie może to mieć konsekwencje dla środowiska?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

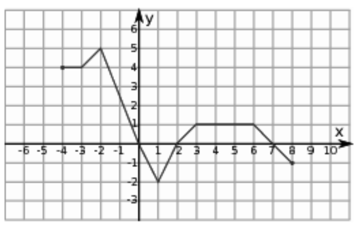
1. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:[11]

a) −1/3 b) −3 c) 1/3 d) 3

2. Zbiorem wartości funkcji f jest:[12]

a) $< -2,5 >$ b) $< -4,8 >$ c) $< -1,4 >$ d) $< 5,8 >$

3. Korzystając z wykresu funkcji *f*, wskaż nierówność prawdziwą:



a) $f(-1) < f(1)$ b) $f(1) < f(3)$ c) $f(-1) < f(3)$ d) $f(3) < f(0)$

4. Wskaż m, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała:

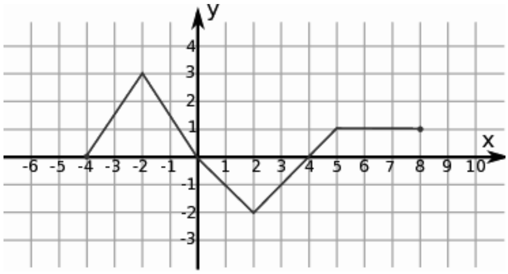
a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = -1$

5. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:[13]

a) $-2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Odczytaj z wykresu i zapisz:

11 Arkusz próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.
12 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2010.
13 Zadania: 5, 6 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2010.



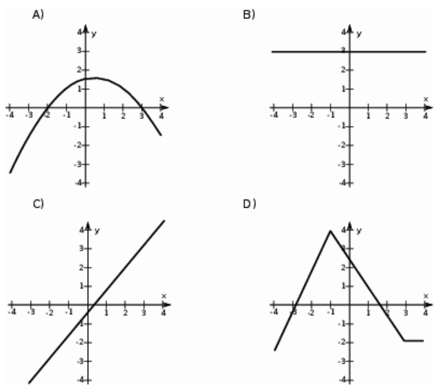
a) zbiór wartości funkcji f

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$.
Wówczas spełniony jest warunek:[14]

a) $f(x) > 1$ b) $f(2) = 2$ c) $f(3) < 3$ d) $f(4) = 4$

8. Wskaż wykres funkcji, która w przedziale <–4,4> ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



9. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:[15]

a) $m = 6$ b) $m = 1,5$ c) $m = 1$ d) $m = 5$

10. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

a) 4 b) –2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

11. Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt A = (2,–4), gdy:[16]

a) $m = 5$ b) $m = -5$ c) $m = 1$ d) $m = -4$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

a) $x < 6$ b) $x > 6$ c) $x > -6$ d) $x < -6$

14 Zadania: 7, 8 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
15 Zadania: 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2010.
16 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2009

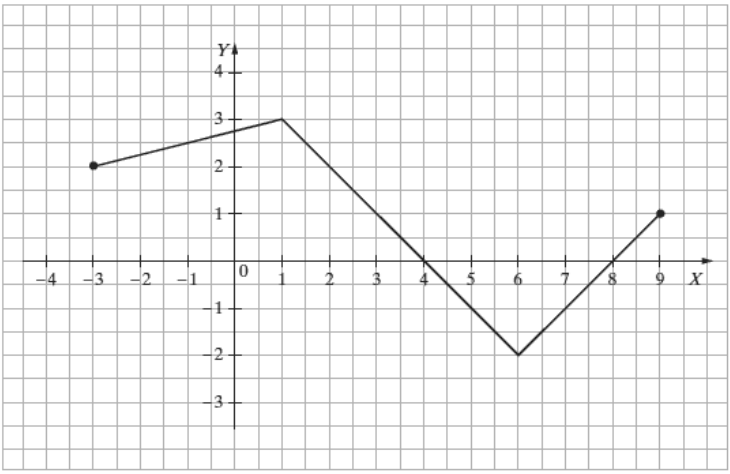
13. Dziedziną funkcji $F(x) = \begin{cases} -2x+1, & gdy\ x \leq 3 \\ -x, & gdy\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ jest zbiór:[17]

a) $\left(-\infty,4\right\rangle$ **b)** $\langle 1,4\rangle$ **c)** $\langle 0,4\rangle$ **d)** $(-\infty,1)$

14. Funkcja liniowa $f(x) = (m+2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

a) $m < -2$ **b)** $m < 2$ **c)** $m > -2$ **d)** $m > -4$

15. Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

a) $\langle 0,4\rangle$ **b)** $\langle 1,6\rangle$ **c)** $\langle 0,6\rangle$ **d)** $\langle -2,4\rangle$

16. Punkt P = $(a + 1,2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

a) 0 **b)** –1 **c)** 2 **d)** 1

17. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 2)x - 11$ jest rosnąca dla:

a) $m > 2$ **b)** $m > 0$ **c)** $m < 13$ **d)** $m < 11$

18. Funkcja liniowa $f(x) = 3ax - b$ jest malejąca, natomiast funkcja liniowa $g(x) = bx - 3a$ jest rosnąca. Wykresy funkcji f i g przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Oblicz odciętą punktu A oraz wyznacz wzory funkcji f i g wiedząc, że ich wykresy są prostopadłe.[18]

19. Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & dla\ x \in (0,3\rangle \\ \sqrt{3}-3 & dla\ x \in (3,10 \end{cases}$$

---

17 Zadania: 13, 14, 15, 16, 17 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011.

18 Zadania: 18, 19 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności kwadratowe

3.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$, bo można przekształcić do postaci: $3x^2 - 1 = 0$, gdzie a = 3, b = 0, c = –1
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$, gdzie a = 5,b = 3, c = 7
- $8x = 3x^2 + 1$, bo można przekształcić do postaci $3x^2 - 8x + 1 = 0$, gdzie a = 3, b = –8, c = 1
- $x^2 + 5x = 0$, gdzie a = 1, b = 5, c = 0

Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + c = 0$, gdy $a \neq 0$, b = 0 i c ≠ 0

- $x^2 - 16 = 0$

  $x^2 = 16$

  $x = 4$ lub $x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$

  $-3x^2 = 6 \,/ \div (-3)$

  $x^2 = -2$ sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x-2)^2 = 4(1-x)$

  $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$

  $x^2 = 0$

  $x = 0$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx = 0$, gdy $a \neq 0, b \neq 0$ i $c = 0$

- $5x^2 - 3x = 0$
  $x(5x - 3) = 0$
  $x = 0 \text{ lub } 5x - 3 = 0$
  $x = 0$ lub $x = \frac{5}{3}$
- $-5x - 4x^2 = 0$
  $-x(5 + 4x) = 0$
  $-x = 0 \text{ lub } 5 + 4x = 0$
  $x = 0 \text{ lub } 4x = -5$
  $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{4}$

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2 + 16 = 0$	b) $-\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$	c) $2x^2 + 8 = 0$
d) $2x^2 - 5x = 0$	e) $-3x^2 + 6x = 0$	f) $-x^2 - 2 = 0$
g) $x(x - 3) = 0$	h) $(x + 2)(x - 4) = 0$	i) $\frac{1}{2}x^2 = 0$
j) $5x2 - 7x = 0$	k) $-3x2 + 1 = 0$	l) $5x2 = 1$
m) $-x2 - 3 = 0$	n) $9x2 + \frac{x}{3} = 0$	o) $x2 = (1-x)(1+x)$

Odpowiedź:

a) $x = -4$ lub $x = 4$	b) $x = -3$ lub $x = 3$	c) brak rozwiązań
d) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$	e) $x = 0$ lub $x = 2$	f) brak rozwiązań
g) $x = 0$ lub $x = 3$	h) $x = -2$ lub $x = 4$	i) $x = 0$
j) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{5}$	k) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	l) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
m) brak rozwiązania	n) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$	o) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

Teraz nauczę się:

- obliczyć wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne.

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a$\neq 0$.

Aby rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, najpierw obliczamy wartość wyrażenia

$\Delta = b^2 - 4ac$

- jeśli $\Delta \rangle 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{-b}{2a}$;
- jeśli $\Delta \langle 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole Δ i δ to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga mała litera delta. Z symbolem δ spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

Przykład 1

- $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-13)-7}{2 \cdot 6} = \frac{13-7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-13)+7}{2 \cdot 6} = \frac{13+7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{5}{3}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

- $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -23$$

Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3

➢ $6x^2+4x+\frac{2}{3}=0$

$\Delta=4^2-4\cdot6\cdot\frac{2}{3}=0$

$x=-\frac{b}{2a}$

$x=-\frac{4}{2\cdot6}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ PROWADZĄCE DO RÓWNAŃ KWADRATOWYCH.

Równanie typu $ax^4+bx^2+c=0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym.**

Przykład 4

$x^4+6x^2+5=0$ $(x^2)^2+6x^2+5=0$

Podstawiam $x^2=t$ w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać:

$t^2+6t+5=0$

$a=1$ $b=6$ $c=5$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=6^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16$

$\Delta>0$ wyznaczamy dwa miejsca zerowe:

$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow t_1=\frac{-6-\sqrt{16}}{2}=\frac{-10}{2}=-5$

$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow t_1=\frac{-6+\sqrt{16}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Wracamy do podstawienia $x^2=t$

$x^2=-5 \quad \vee \quad x^2=-1$

$x\in\emptyset \qquad\qquad x\in\emptyset$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań = Ø)

Przykład 5

Rozwiąż równania:

$$5x - \frac{15}{x} = 10$$

Rozwiązanie

Założenie : $x \neq 0$

$$Df : x \in R / \{0\}$$

$$5x - \frac{15}{x} = 10 / \cdot x$$

$$5x^2 - 15 = 10x$$

$$5x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)$$

$$\Delta = 400$$

$$\sqrt{\Delta} = 20$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 20}{10} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 20}{10} = 3$$

$$\frac{8}{4 - x} = \frac{x}{x - 4}$$

Założenie: $4 - x \neq 0$ i $x - 4 \neq 0$

$x \neq 4$ i $x \neq 4$

$$Df : x \in R / \{4\}$$

$$8 \cdot (x - 4) = (4 - x) \cdot x$$

$$8x - 32 = 4x - x^2$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$$

$$\sqrt{\Delta} = 12$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 12}{2} = -8$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

$x_2 \notin Df$, stąd rozwiązaniem jest $x_1 = -8$

ZADANIA

3.2.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2-2=0$
b) $x\sqrt{3}-\sqrt{2}x^2=0$
c) $x(x-3)=0$
d) $(x-4)(x+2)=0$
e) $(x-2)^2-9=0$
f) $16-(x+3)^2=0$
g) $(3x+2)^2=25$
h) $x^2+6x+5=0$
i) $x^2-10x+25=0$
j) $x^2+2x-120=0$
k) $12x^2+7x-12=0$
l) $3x^2-7x+2=0$
m) $9x^2-24x-20=0$
n) $-3x^2+1{,}5x+54=0$

Odpowiedź:

a) brak rozwiązania
b) $x=0$ lub $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $x=0$ lub $x=3$
d) $x=-2$ lub $x=4$
e) $x=-1$ lub $x=5$
f) $x=-7$ lub $x=1$
g) $x=-\frac{7}{3}$ lub $x=1$
h) $x=-5$ lub $x=-1$
i) $x=5$
j) $x=-12$ lub $x=10$
k) $x=-\frac{4}{3}$ lub $x=\frac{3}{4}$
l) $x=\frac{1}{3}$ lub $x=2$
m) $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\frac{10}{3}$
n) $x=-4$ lub $x=\frac{9}{2}$

3.2.2 Rozwiąż równania:

a) $(3x-2)^2+2=6$
b) $3(4x-1)^2+1=28$
c) $2(5x-2)^2+5=13$
d) $x(3x-5)=12$
e) $(2x-5)^2+(x+4)^2=41$
f) $\frac{x(x-2)}{5}-3x=2x^2+\frac{x(x+1)}{3}$
g) $(x-2)(x+5)-(x-7)(x+1)=(x+2)(x-3)$
h) $3x^2-6x-24=0$
i) $4x^2-20x+25=0$
j) $x^2-2x+4=0$
k) $4x^2-4x-1=0$
l) $3x^2+2x+2=3x+4x^2-3$

Odpowiedź:

a) 0 lub $\frac{4}{3}$
b) $-\frac{1}{2}$ lub 1
c) 0 lub $\frac{4}{5}$
d) $-\frac{4}{3}$ lub 3
e) 0 lub $\frac{12}{5}$
f) $-\frac{7}{4}$ lub 0
g) $5-2\sqrt{7}$ lub $5+2\sqrt{7}$
h) −2 lub 4
i) $\frac{5}{2}$
j) brak rozwiązań
k) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
l) brak rozwiązań

3.2.3 Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+3}{x-1}=0$

b) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$

c) $\frac{x+1}{4x}=\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x-3}{6x}=\frac{2}{2x+3}$

e) $\frac{5-x}{5x}=\frac{2}{5x}$

f) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{-3}{3x-1}$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$

b) $x=-1$ $x=3$

c) $x=2-\sqrt{5}, x=2+\sqrt{5}$

d) $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}, x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=-5-5\sqrt{2}, x=-5+5\sqrt{2}$

f) równanie sprzeczne

3.2.4 Rozwiąż równania:

a) $x^4-4=0$

b) $x^4-4x^2=0$

c) $x^4-x^2-2=0$

d) $x^4-5x^2+4=0$

e) $x^4-4x^2+4=0$

f) $x^4+2x^2-3=0$

g) $x^4-x^2+1=0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą $x^2=t$, dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe.)

Odpowiedź:

a) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

b) 0,–2,2

c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

d) –1,1,–2,2

e) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

f) –1,1

g) brak pierwiastków rzeczywistych

3.3 *Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

TWIERDZENIE[19]

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ ma rozwiązania x_1, x_2, to: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Dowód

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4\mathbf{a}\right)}{4a^2}=\frac{4\mathbf{a}}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

UWAGA!

Wzory Viete'a mają szerokie zastosowanie przy **rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.**

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

Jeżeli...

- $\Delta<0$ – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta=0$ – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta\geq 0$ – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta>0$ – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

$x_1\cdot x_2<0$ to są one różnych znaków,

$x_1\cdot x_2>0$ – to mają one takie same znaki,

$x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2>0$ – to są one dodatnie,

$x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2<0$ – to są one ujemne.

Przykład 1 Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji $y=x^2+5x+6$.

Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości *a, b, c* do wzorów:

19 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 19.02.2013.

$$x_1 + x_2 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_2 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba –5, a iloczynem liczba 6?”. Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb –2 i –3.

Rozwiązaniami są więc: $x_1 = -2$ i $x_2 = -3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

3.3.1 Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a, oraz zastosuj je tak, aby uzyskać:

a) kwadrat sumy pierwiastków,

b) sumę kwadratów pierwiastków,

c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków,

d) kwadrat różnicy pierwiastków,

e) sumę sześcianów pierwiastków.

Odpowiedź:

a) $(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$

d) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}$

e) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$
$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right)$

3.3.2 Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$,

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2 - 300x - 200 = 0$,

c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2 - x + 21 = 0$.

Odpowiedź:

a) $-\frac{115}{203}$ b) 90400 c) $\frac{43}{441}$

Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m = 0$ ma:

a) dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$

Z założenia $m^2 + 4m > 0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

a) jeden pierwiastek

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$

Z założenia $m^2 + 4m = 0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie m = –– 4, $m = 0$

nie ma pierwiastków

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$

Z założenia $m^2 + 4m < 0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m \in (-4; 0)$

ZADANIA

3.3.3 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a) $-2x^2 + 3mx - 1 = 0$ b) $mx^2 + 2x + m = 0$

Odpowiedź:

a) $m = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $m = -1$

3.3.4 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 1 = 0$ ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: $m \in \left(-\infty; 2\sqrt{2}\right)$

3.3.5 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Odpowiedź: $m \in (-1;2)$

3.3.6 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Odpowiedź: brak rozwiązań

3.3.7 Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$ jest najmniejsza?

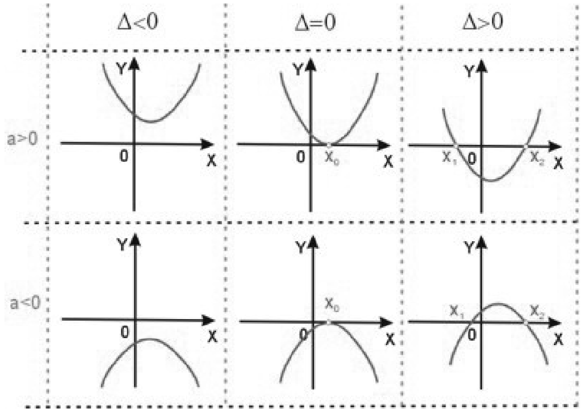
Odpowiedź: $m = 4$

3.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego.** Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika *a* oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

Przykład 1[20]

$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Krok 1. Wyznaczamy miejsca zerowe, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia.
Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

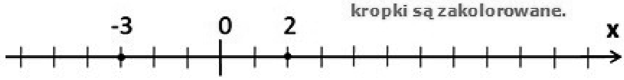
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Krok 2. Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

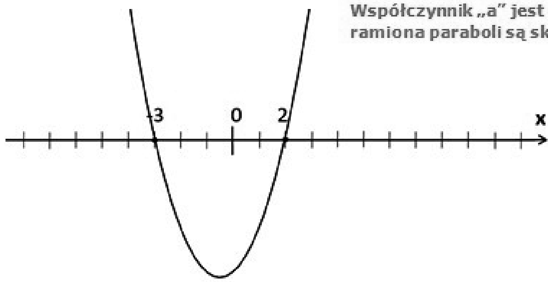
- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

Ze względu na znak nierówności (≥) kropki są zakolorowane.



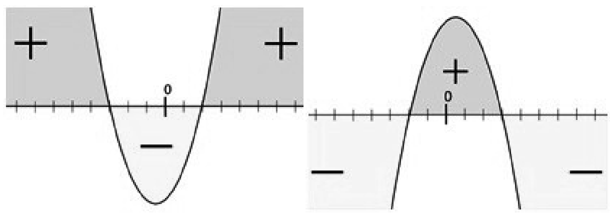
- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istoty jest jedynie kierunek ramion paraboli.

20 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.



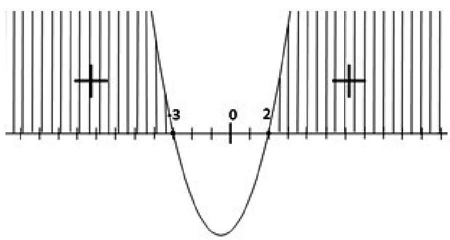
Współczynnik „a” jest dodatni (2), dlatego ramiona paraboli są skierowane w górę.

Krok 3. Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zacznijmy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę). Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy” (<) lub „mniejszy lub równy” (≤), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy” (>) lub „większy lub równy” (≥), zakreślamy obszar dodatni. W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem: ≥, dlatego zakreślamy obszar dodatni:

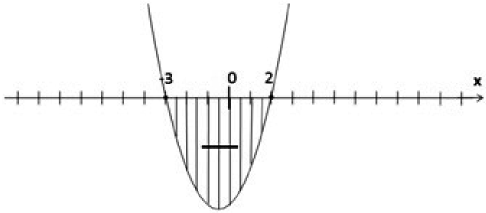


Krok 4. Odczytujemy rozwiązanie. Jest nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in \left(-\infty,\ -3\right\rangle \cup \left\langle 2,\ \infty\right)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę (≤), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



$$x \in \langle -3,\ 2 \rangle$$

INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI…

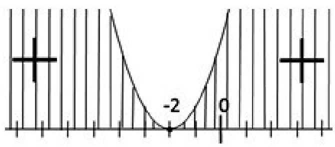
Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie posiadać go wcale. Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

- Z jednym miejscem zerowym – gdy ramiona paraboli są skierowane w górę

Przykłady

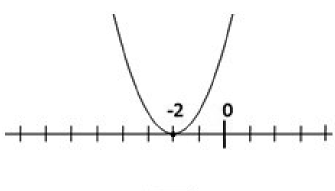
Znak nierówności ≥



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$x \in R$

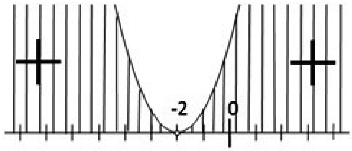
Znak nierówności ≤



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

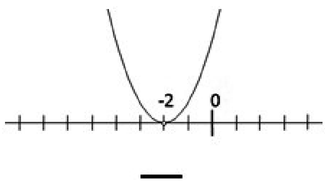
Znak nierówności >



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

Znak nierówności <



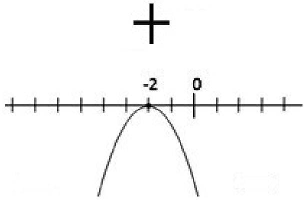
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

➢ gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

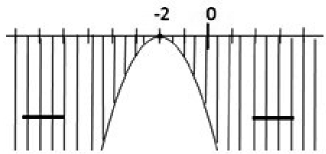
Znak nierówności ≥



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$$x = -2$$

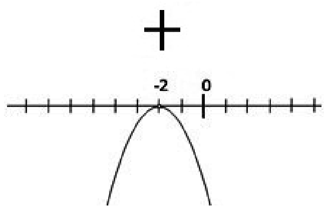
Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero (–2), także należy do rozwiązania.

$$x \in \mathrm{R}$$

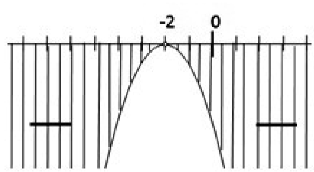
Znak nierówności $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$$x \in \varnothing$$

Znak nierówności $<$



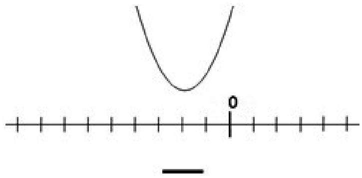
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

- Bez miejsc zerowych
- gdy ramiona paraboli są skierowane w górę

Przykłady:

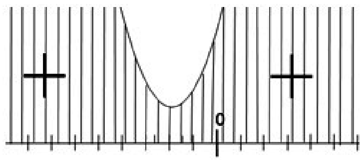
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in \emptyset$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



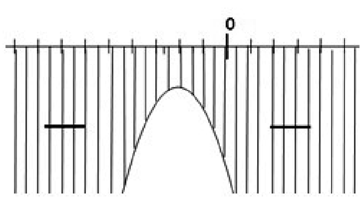
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in R$

- gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

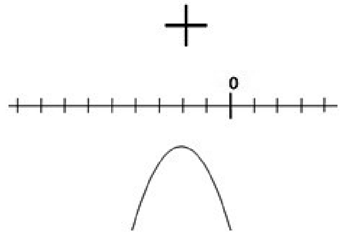
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in R$

Znak nierówności ≥ lub >



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in \varnothing$

ZADANIA

3.4.1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)\rangle 0$

b) $x(x+4)\langle 0$

c) $(x-7)(x+6)\geq 0$

d) $2x^2-8x\leq 0$

e) $x^2-16\rangle 0$

f) $x^2\leq 4$

g) $8x^2\geq 24$

h) $48\langle x^2$

i) $x^2-2x-8\geq 0$

j) $x^2+12x+24\rangle 0$

k) $x^2+12x+24\langle 0$

l) $x^2\langle -4(x+1)$

m) $(2x-6)^2\leq 4x-13$

n) $(2x-6)x\geq 0$

o) $(x-1)(x+3)>0$

p) $(2-x)(2x-3)\leq 0$

q) $-3x^2-8x>0$

r) $6x-2x^2\leq 0$

s) $3x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\leq 0$

t) $(x-3)(3x-4)-(x-3)(x+2)>0$

u) $(x+5)^2+(x+5)(x-3)\leq 0$

v) $(3x-4)(x+2)>(x+2)(x-1)$

w) $(4x-5)(x+4)>(x+4)^2$

x) $9x^2+6x+4<3$

y) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

z) $5x-10<2x^2$

Odpowiedź:

a) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

b) $(-4,0)$

c) $(-\infty,-6\rangle\cup\langle 7,+\infty)$

d) $\langle 0,4\rangle$

e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

f) $\langle -2,2\rangle$

g) $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3},+\infty)$

h) $(-\infty,-4\sqrt{3})\cup(4\sqrt{3},+\infty)$

i) $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 4,+\infty)$

j) $(-\infty,-6-\sqrt{3})\cup(-6+2\sqrt{3},+\infty)$

k) $\left(-6-2\sqrt{3},-6+2\sqrt{3}\right)$

l) $\varnothing$

m) $\frac{7}{2}$

n) $(-\infty,0 > \cup < 3,\infty)$

o) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

p) $(-\infty,\frac{3}{2} > \cup < 2,\infty)$

q) $(0,4)$

r) $(-\infty,0 > \cup < 3,\infty)$

s) $\left\langle -\frac{1}{6},1\right\rangle$

t) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

u) $\langle -5,-1\rangle$

v) $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},\infty)$

w) $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

x) brak rozwiązania

y) $x\in R$

z) $x\in R$

3.4.2 Znajdź wszystkie liczby całkowite x, spełniające nierówność:

a) $(x-1{,}2)(x-3{,}4)\langle 0$

b) $-x^2+3{,}6x\geq 0$

c) $x^2-6{,}25\langle 0$

d) $2x^2-0{,}6x-16{,}2\langle 0$

Odpowiedź:

a) $\{2,3\}$

b) $\{0,1,2,3\}$

c) $\{-2,-1,0,1,2\}$

d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

3.4.3 Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności, oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a) $x^2-1\rangle 0,\ x^2+3x\leq 0$

b) $9x^2+9x+2\langle 0,\ x^2-9x+2\langle 0$

c) $x2 \geq 9$; $(x+7)(x-3)(5x+1)>0$

Odpowiedź:

a) $\langle -3,-1\ )$; $x\in(\ -\infty,0\ \rangle\cup(1,+\infty)$

b) zbiór pusty; $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\setminus\{-7\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[21] Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa:

a) $-\frac{7}{2}$ b) $-\frac{7}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{4}$

21 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 19.02.2013..

Odpowiedź: c

2.[22] Rozwiąż nierówność: $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in <-2,4>$

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 4$ jest:

a) $(-2;2)$ b) $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$ c) $(-\infty;2)$ d) $<-2;2>$

Odpowiedź: a

4. Uzasadnij, że równanie $x^2 + (b - 2)x - 2b = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej b ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

5.[23] Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-3,3)$

6.[24] Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x + 6) < 0$ jest:

a) $(-6;0)$ b) $(0;6)$ c) $(-\infty;-6) \cup (0;\infty)$ d) $(-\infty;0) \cup (6;\infty)$

Odpowiedź: a

7. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,1> \cup <7,\infty)$

8.[25] Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-2,5)$

9.[26] Liczba wszystkich rozwiązań równania $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

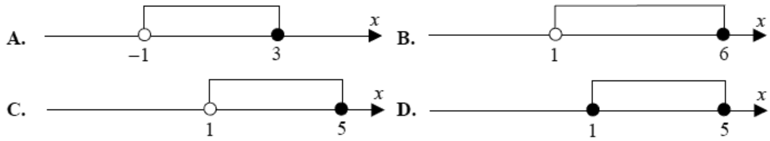
Odpowiedź: d

10. Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,-\frac{1}{2}> \cup <2,\infty)$

11.[27] Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x - 1)(x - 5) \leq 0$ i $x > 1$.

22 Zadanie 2,3,4: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 19.02.2013..
23 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012–listopad.pdf, 19.02.2013.
24 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.
25 Zhttp://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf,19.02.2013.
26 http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 19.02.2013.
27 Zadania 11,12: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013.



Odpowiedź: d

12. Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

13.[28] Do zbioru rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) < 0$, należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

Odpowiedź: d

14. Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$.
Odpowiedź: $x \in \langle -1, 2 \rangle$

15.[29] Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 4 i 1 lub –4 i –1

16. Wartość k, dla której jeden z pierwiastków równania $x^2 + 9x + k = 0$ jest równy –3, wynosi:
a) –6 b) –18 c) 18 d) 6
Odpowiedź: c

17. Równanie $2x^2 - 4x - 3 = 0$:
a) nie ma rozwiązań,

b) ma jedno rozwiązanie,

c) ma dwa rozwiązania,

d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: c

18. Rozwiązaniem równania $2(x-2)^2 = (x-2)(x+3)$ jest:

a) $x = -2$ i $x = -1$

b) $x = 7$

28 Zadania 13,14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013..
29 Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń..

c) $x = 2$ i $x = 7$

d) $x = 1$ i $x = 2$

Odpowiedź: c

19. Podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich spełniających nierówność $(3-x)(3+x) > 0$ ma:

a) dwa elementy,

b) skończoną liczbę elementów,

c) co najmniej 4 elementy,

d) nieskończenie wiele elementów.

Odpowiedź: a

20. Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x-1)^2 \geq 5(x-1)$ jest:

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle -4, 1\rangle$ c) $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty)$ d) $\langle 1, \infty)$

Odpowiedź: b

21. Rozwiązaniem równania $x^2 + x = (x+1)^2 - 7(x+2)$ jest liczba:

a) $\frac{15}{8}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $-\frac{13}{6}$

Odpowiedź: d

22. Ile liczb pierwszych zawiera zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej $(x+1)\,(x-10) < 0$?

a) 5 b) 4 c) więcej niż 10 d) 6

Odpowiedź: b

23. Kwadrat piątej części stada małp pomniejszonej o 3 schował się w jaskini. Jedna małpa pozostała na drzewie. Ile małp liczy stado?

Odpowiedź: 50 małp

24. Liczby $2a - 2$, $2a + 2$, $a + 1$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

Odpowiedź: $a \in (3, \infty)$

25. Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

Odpowiedź: $x \in \{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$

26. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: –9, –7, –5 lub 5, 7, 9

3.5 *Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego

Teraz nauczę się rozwiązywać układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań metodą algebraiczną:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podstawiamy wyznaczone y z pierwszego równania do drugiego równania i otrzymujemy:

$$2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 / \div 2$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy Δ = 9, a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego: $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone x_1 i x_2 do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 1 \quad = -1$$

$$y_2 = 2x_2 + 1 \quad = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji: $y = 2x^2 + 20x + 47$ i $y = 2x + 1$ w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

ZADANIA

3.5.1 Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną.

a) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7,2 \end{cases}$

Odpowiedzi:

a) $\begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

b) brak rozwiązania

c) $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-6\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-7\frac{1}{2} \end{cases}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[30] Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

2.[31] Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 *k*m mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: 28 km

3.[32] W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Odpowiedź: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m $\times$ 8 m, a w drugim hotelu 35 m $\times$ 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m $\times$ 12 m, a w drugim hotelu 25 m $\times$ 14 m.

4.[33] Turysta pokonał pieszo trasę o długości 30 km z miejscowości *A* do miejscowości *B* ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $v = 6$ km/h, $t = 5$h

5.[34] Z miast A i B, odległych o 330 km, wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km, licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Odpowiedź: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

30 Zadanie 1: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.02.2013.
31 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
32 Zadanie 3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
33 Zadanie 4: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 20.02.2013.
34 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 20.02.2013.

6.[35] Miasto *A* i miasto *B* łączy linia kolejowa o długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąć pospieszny pokonał trasę z miasta *A* do miasta *B*.

Odpowiedź: Pociąg pospieszny pokonał tę trasę w 2,5 godziny.

7.[36] Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440 zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż planowano, co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Podaj:

a) ilu uczniów pojechało na wycieczkę;

b) jaki był całkowity koszt wycieczki?

Odpowiedź: 45 osób, koszt dla uczestnika to 32 zł

8. Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań). W sumie rozwiązała 448 zadań. Jeśli rozwiązywałaby codziennie o 4 zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o 2 dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

Odpowiedź: 16 dni, 28 zadań

35 Zadanie 6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.

36 Zadania 7-8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

4 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych
- współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

4.1 Jednomian kwadratowy

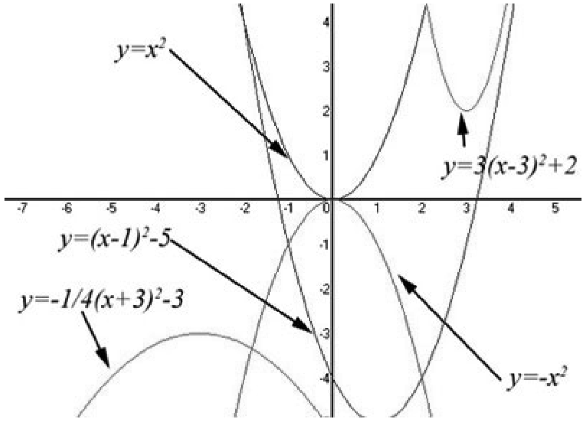
Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**.[37]

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Gdy współczynnik a jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry. Gdy współczynnik a jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

37 http://www.moskat.pl/szkola/matematyka/b_f_kwadratowa.php.



Przykłady funkcji kwadratowych:

$y = 5x^2 + 9x - 4$

$y = -x^2 - x$

$y = 2x^2 - 7$

$y = x^2$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy). Jest to funkcja w postaci $y = ax^2$. Jest to więc przypadek, w którym $a \neq 0$ i $b = c = 0$.

Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$y = x^2$

$y = -x^2$

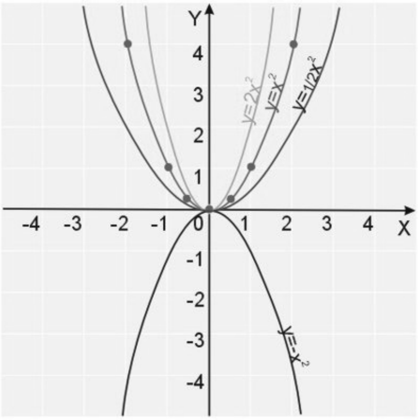
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie *a* jest dowolną liczbą.

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

x	-2	-1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	-4	-1	0	$-1/4$	-1	-4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2

Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji:



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**. Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik $a > 0$, oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik $a < 0$.
- Im większy jest współczynnik a, tym parabola jest „węższa".
- Parabola posiada jeden **wierzchołek** w punkcie (0,0).
- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór $\langle 0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz $(-\infty;0\rangle$, gdy $a < 0$.
- Oś OY jest **osią symetrii** paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.
- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale $(-\infty;0)$ i rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz rośnie w przedziale $(-\infty;0)$ i maleje w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a < 0$.
- Gdy $a < 0$, funkcja osiąga wartość największą (**maksimum**) w punkcie $x = 0$ równe 0, natomiast dla $a > 0$ funkcja osiąga wartość najmniejszą (**minimum**) w punkcie $x = 0$ równe 0.
- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe, gdy $x_0 = 0$.

ZADANIA

4.1.1 Sporządź tabelkę wartości funkcji i naszkicuj wykres funkcji f:

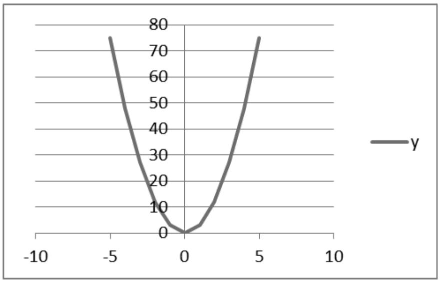
a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

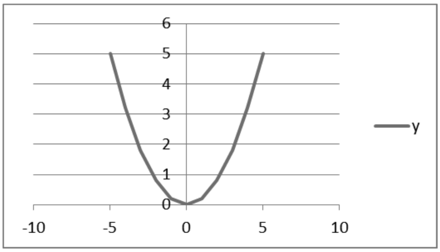
c) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

Odpowiedź:

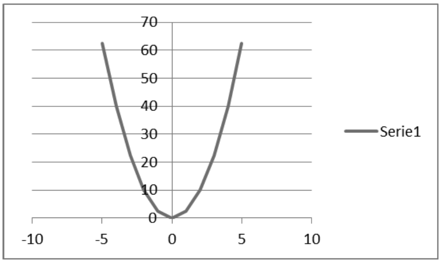
a)



b)



c)



4.1.2 Sprawdź, czy punkt K należy do paraboli $y = 4x^2$:

a) K = (4,32) b) K = (–2,16) c) K = $\left(-\frac{1}{4},1\right)$ d) K = $\left(\frac{1}{2},1\right)$

Odpowiedź:

a) nie należy b) należy c) nie należy d) należy

4.1.3 Omów następujące własności,

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x)=-x^2$

c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$

Odpowiedź:

a) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla x = 0 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

b) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla x = 0 funkcja przyjmuje wartość największą.

c) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla x = 0 funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

d) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla x = 0 funkcja przyjmuje wartość największą.

4.2 Parabola w układzie współrzędnych

Teraz nauczę się interpretować współczynniki występujące w wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników a, b, c.

Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

1. znaku współczynnika a, który warunkuje skierowanie ramion paraboli,

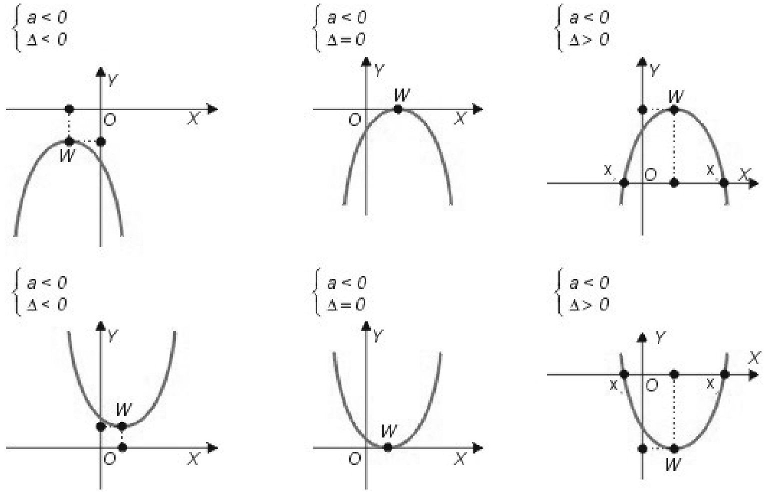
2. wartości wyróżnika Δ, która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią OX:

dla $\Delta < 0$ parabola leży pod (a < 0) lub nad (a > 0) osią OX, nie ma z osią OX punktów wspólnych,

dla $\Delta = 0$ parabola jest styczna do osi OX,

dla $\Delta > 0$ parabola przecina oś OX w dwóch punktach.

Rożne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



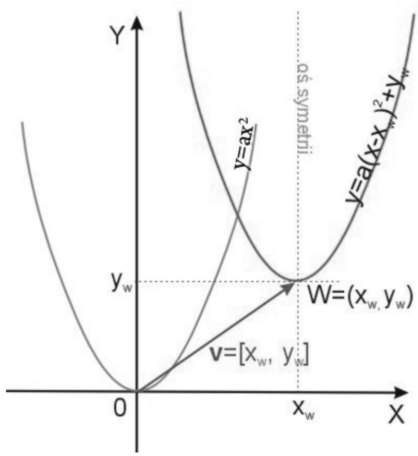
Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$ jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [x_w, y_w]$, przy czym:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$$

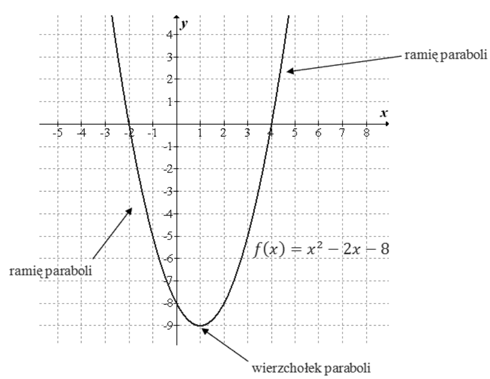
W przypadku dodatniego współczynnika a, mamy:



Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.
- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli $a > 0$, w dół w przypadku gdy $a < 0$.
- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.
- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli $\Delta > 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta = 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$.
- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funkcja przyjmuje minimum dla $a > 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Funkcja przyjmuje maksimum dla $a < 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Gdy $a > 0$, funkcja maleje w przedziale $x = (-\infty; \frac{b}{2a})$ i rośnie w przedziale $y = (\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Gdy $a < 0$, funkcja rośnie w przedziale $x = (-\infty; \frac{b}{2a})$ i maleje w przedziale $y = (\frac{b}{2a}; +\infty)$.

ZADANIA



4.2.1 Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x2 - 2x - 8$ (wykres funkcji powyżej).

a) Dziedzina: …

b) Zbiór wartości: ZW = …

c) Miejsca zerowe: …

d) Współrzędne wierzchołka: W = …

e) Oś symetrii to: …

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x\in$ …

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x\in$ …

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne: …

i) Monotoniczność: – funkcja jest rosnąca w przedziale … – funkcja jest malejąca w przedziale …

Odpowiedź:

a) Dziedzina: D = R.

b) Zbiór wartości: ZW = $\langle -9; +\infty)$.

c) Miejsca zerowe: funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 4$.

d) W = (1,–9)

e) Oś symetrii: $x = 1$

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x\in(-\infty; -2) \cup (4 +\infty)$.

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x\in(-2; 4)$.

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne: (0, –8).

i) Monotoniczność: funkcja jest niemonotoniczna (jest jedynie monotoniczna przedziałami) – funkcja jest rosnąca w przedziale $x\in(1, \infty)$, – funkcja jest malejąca w przedziale $x\in(-\infty,1\ \infty)$.

4.2.1 Naszkicuj wykres jednomianu funkcji $f(x)$, a następnie przesuwając równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile – jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a) $y = x^2$, $\vec{u} = [0,3]$

b) $y = -x^2$, $\vec{u} = [-1,0]$

c) $y = 2x^2$, $\vec{u} = [-3,2]$

Odpowiedź:

a) $y = x^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 3,\infty)$, brak miejsc zerowych; W = (0,3);

funkcja rośnie $(0,\infty)$; funkcja maleje $(-\infty,0)$

b) $y = -(x+1)^2$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $(-\infty,0>$, jedno miejsce zerowe $x = -1$; W = (–1,0);

funkcja rośnie $(\infty,-1)$, funkcja maleje $(-1,\infty)$

c) $y = 2(x+3)^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 2,\infty)$, brak miejsc zerowych; W = (–3,2);

funkcja rośnie $(-3,\infty)$, funkcja maleje $(-\infty,-3)$

4.3 Postacie trójmianu kwadratowego

Teraz nauczę się:

- zapisać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej.

POSTAĆ ILOCZYNOWA TRÓJMIANU KWADRATOWEGO

TWIERDZENIE[38]

Dany jest trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie x_1 i $x2$ są rozwiązaniami trójmianu.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_0)^2$.

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania $(x - 3)(x + 2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod x liczbę 3, to pierwszy nawias się „wyzeruje". Iloczyn jakiejkolwiek liczby przez 0 daje nam 0. Jeśli podstawimy pod drugi x liczbę –2, to ten nawias także nam się „wyzeruje". Rozwiązaniami są więc wartości: $x = 3$ i $x = -2$.

Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Postępujemy analogicznie, jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

38 http://pl.wikibooks.org.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$
$$\sqrt{\Delta} = 6$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

$\Delta > 0$, więc korzystamy ze wzoru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Widzimy, że $a = 1$.

$(x + 5)(x - 1) = 0$

Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $2x^2 - 4x + 2 = 0$.

Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$, stąd $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$, stąd otrzymujemy rozwiązanie: $x = 1$, a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej, korzystając ze wzoru :

$y = a(x - x_0)^2$ Odpowiedź: $2(x-1)^2 = 0$

Sposób II

Policzymy deltę.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$x_0 = 1$

$\Delta = 0$ – korzystamy więc ze wzoru: $y = a(x - x_0)^2$. a jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy: $2(x - 1)^2 = 0$

Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7.

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy że podstawimy te wartości do wzoru.

$$(x-(-3))(x-7) = 0$$
$$(x+3)(x-7) = 0$$

Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:

$$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$$
$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7. Można to sprawdzić przez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

ZADANIA

4.3.1 Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a) $12x^2+11x+2=0$ b) $3x^2-7x+2=0$

c) $2x^2-3x+4=0$ d) $-7x^2+10x-4=0$

e) $5x^2-3x=0$ f) $9x^2-8=0$

g) $2x^2-3x-2=0$ h) $-x^2+x+6=0$

i) $3x^2-5x+4=0$ j) $-4x^2+2x-1=0$

k) $10-2x^2=0$ l) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x=0$

Odpowiedź:

a) $12\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$ b) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=0$

c) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

d) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

e) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)=0$

f) $9\left(x^2-\frac{8}{9}\right)=9\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

g) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$

h) $-(x-3)(x+2)=0$

i) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

j) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

k) $-2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$

l) $\frac{1}{3}x\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

4.3.2 Podaj pierwiastki trójmiany kwadratowego:

a) $(x-3)(x-30)=0$ b) $2(x-2)(x+5)=0$

c) $\frac{11}{3}(x+15)(x+27)=0$ d) $4x(x+6)=0$

e) $-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$ f) $-2(x+1)(x+1-\sqrt{2})=0$

g) $(x+2-\sqrt{3})(x-3+\sqrt{2})=0$ h) $(2x-3)(2x-3)=0$

Odpowiedź:

a) $x_1=3, x_2=30$ b) $x_1=2, x_2=-5$

c) $x_1 = -15, x_2 = -27$ d) $x_1 = 0, x_2 = -6$

e) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$ f) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$

g) $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$ h) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

4.3.3 Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, mając dane pierwiastki:

a) 3 i 5 b) 4 i –9 c) $\frac{1}{3}$ i 7

d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ e) $\sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{7}$ i $1-\sqrt{7}$

Odpowiedź:

a) $b = -8, c = 15$ b) $b = 5, c = -36$ c) $b = 7\frac{1}{3}, c = 2\frac{1}{3}$

d) $b = \frac{11}{35}, c = -\frac{6}{35}$ e) $b = -\left(1+2\sqrt{2}\right), c = 2+\sqrt{2}$ f) $b = -2, c = -6$

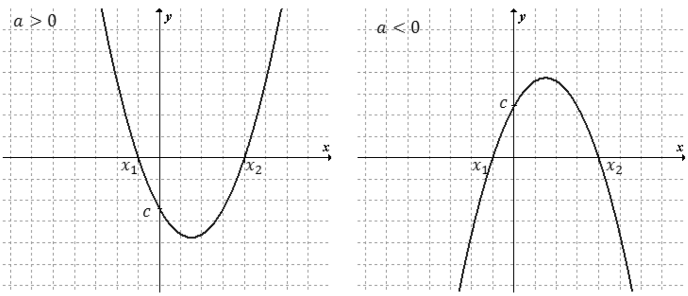
Postać ogólna funkcji kwadratowej

$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY (0, c).

Przykład:



Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami x_1 oraz x_2). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2. Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka *W* funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a, p, q są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczna funkcji kwadratowej**. Współczynniki p i q to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez $W = (p, q)$. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne p i q ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zaletą postaci kanonicznej jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli. Dodatkowo po współczynniku a możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (gdy $\Delta > 0$) i $f(x) = a(x-x_0)^2$ ($\Delta = 0$) nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym, takim że $a \neq 0$. Literki x_0, x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$.

Uwaga! Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ($\Delta > 0$), to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli $\Delta = 0$, to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Zaletą postaci iloczynowej jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Reasumując

Dla $a \neq 0$ trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

<table>
<tr><td>Postać ogólna</td><td colspan="3">$y = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Postać kanoniczna</td><td colspan="3">$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x-p)^2 + q$,
gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Postać iloczynowa</td><td>$\Delta \langle 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta \rangle 0$</td></tr>
<tr><td>Brak postaci iloczynowej</td><td>$y = a(x - x_0)^2$</td><td>$y = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
</table>

ZADANIA

4.3.4 Wyznacz te wartości parametrów a, b i c, dla których $f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = ax^2 - 7x + c$ i $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$ i $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

a) $a = -2$, $b = 7$, $c = -5$

b) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{7}{4}$, $c = -\frac{3}{8}$

4.3.5 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników a, b i c:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}$

c) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x-2)(x-3)$

e) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

f) $f(x) = (1-x)(3-x) + 6 - 2x$

g) $f(x) = -2(x-3)^2 + 18$

h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 6$

i) $f(x)=2(x-1)(x+10)$

j) $f(x)=2\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right)$

Odpowiedź:

a) $f(x)=x^2-x+16\frac{1}{4}$

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{7}{8}$

c) $f(x)=-3x^2-24x-49$

d) $f(x)=2x^2-10x+12$

e) $f(x)=-9x^2+6x+5$

f) $f(x)=x^2-6x+9$

g) $f(x)=-2x^2+12x$

h) $f(x)=3x^2+6x+6$

i) $f(x)=2x^2+18x-20$

j) $f(x)=2x^2+4\sqrt{2}-6$

4.3.6 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2+20x+50=2(x+p)^2$

b) $3x^2-18x+20=3(x+p)^2+q$

c) $3x^2-15x+25=a(x+p)^2+q$

d) $5x^2+12x-6=a(x+p)^2+q$

Odpowiedź:

a) $p=-5$

b) $p=3, q=-7$

c) $a=3, p=\frac{15}{6}, q=-\frac{75}{12}$

d) $a=5, p=-1{,}2, q=-13{,}2$

4.3.7 Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a) $f(x)=4x^2+6x+3$

b) $f(x)=-2x^2+4x+1$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$

d) $f(x)=-x^2-4x+3$

e) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

f) $f(x)=\frac{2}{3}x^2+4x-2$

g) $f(x)=-2x^2+16x-22$

h) $f(x)=2(x-1)(x+10)$

i) $f(x)=3x(2-3x)+5$

j) $f(x)=4(x+5)x$

Odpowiedź:

a) $p=-\frac{3}{4}, q=\frac{3}{2}, f(x)=4(x+\frac{3}{4})+\frac{3}{2}$

b) $p=1, q=3, f(x)=-2(x-1)+3$

c) $p=1, q=\frac{1}{2}, f(x)=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}$

d) $p=-2, q=7, f(x)=-(x+2)+7$

e) $p=\frac{1}{8}, q=\frac{47}{64}, f(x)=(x-\frac{1}{8})+\frac{47}{64}$

f) $p=-3, q=-8, f(x)=\frac{2}{3}(x+3)-8$

g) $p=4, q=10, f(x)=-2(x-4)+10$

h) $p=-4{,}5; q=-50{,}5; f(x)=2(x+4\frac{1}{2})-50\frac{1}{2}$

i) $p=\frac{1}{3}, q=6, f(x)=-9(x-\frac{1}{3})-6$

j) $p=-2{,}5; q=-25, f(x)=4(x+2\frac{1}{2})-25$

4.3.8 Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $f(x) = 3x^2 + x + 5$ b) $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$

c) $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$ d) $f(x) = -2x^2 + 6x + 5$

Odpowiedź:

a) brak miejsc zerowych b) jedno miejsce zerowe

c) dwa miejsca zerowe d) dwa miejsca zerowe

4.3.9 Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$ b) $f(x) = -3(x-2)(x+5)$

c) $f(x) = 4(x+5)x$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-6)$

Odpowiedź:

a) $x_1 = -10, x_2 = 1$ b) $x_1 = -5, x_2 = 2$

c) $x_1 = -5, x_2 = 0$ d) $x_1 = -1, x_2 = 6$

4.3.10 Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a) $a = \sqrt{2}, x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{2}$ b) $a = -3, x_1 = -2, x_2 = 0$

c) $a = 7, x_0 = 9$ d) $a = \frac{1}{2}, x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{5}$

Odpowiedź:

a) $f(x) = \sqrt{2}(x+4)(x-\frac{1}{2})$ b) $f(x) = -3(x+2)x$

c) $f(x) = 7(x-9)^2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$

4.3.11 Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a) $f(x) = (x-1)(x+5)$ b) $f(x) = -(x-6)(x+4)$

c) $f(x) = 2(x+1)(x+5)$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x+2)^2 - 9$ b) $f(x) = -(x-1)^2 + 25$

c) $f(x) = 2(x+3)^2 - 8$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-10)^2 + 128$

4.3.12 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

c) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$ d) $f(x) = 9x^2 + 6x - 1$

e) $f(x) = -3x^2 + 5$

f) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

g) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

h) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$

b) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$

c) $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$

d) $x1 = -\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right), x2 = -\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

e) $f(x) = -3(x - \frac{1}{3}\sqrt{15})\ (x + \frac{1}{3}\sqrt{15})$

f) $f(x) = -2(x - 1)(x + \frac{1}{2})$

g) $f(x) = -2(x - 5)(x + \frac{1}{2})$

h) $x1 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}, x1 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$

4.4. Rysowanie wykresów funkcji[39]

Teraz nauczę się szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.
Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

Poniżej przedstawimy II sposoby rysowania wykresów.

Sposób I

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

1) wierzchołek paraboli,
2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych),
3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

39 http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html, 21.02.2013.

$$y = -x^2 - 2x + 8$$ a = -1, b = -2, c = 8

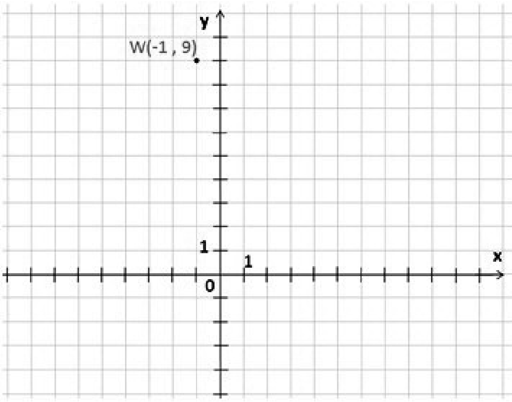
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1,\ 9)$$



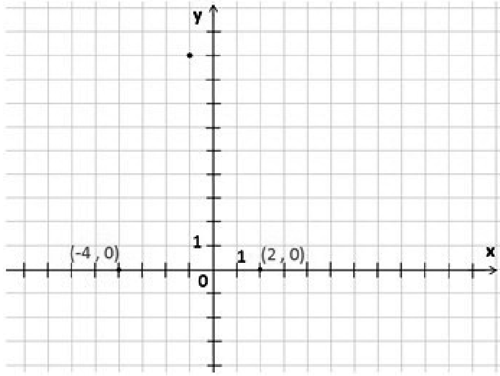
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

UWAGA: Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punktu, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 + 6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 - 6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

(-4, 0); (2, 0)



3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych: Wybraliśmy argument –5:

Podstawiamy argument -5 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(-5)^2 - 2 \cdot (-5) + 8 = -25 + 10 + 8 = -7$$

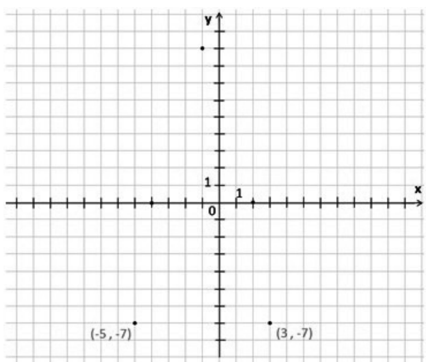
Współrzędne punktu: (–5, –7)

Punkt na prawo od miejsc zerowych: Wybraliśmy argument 3:

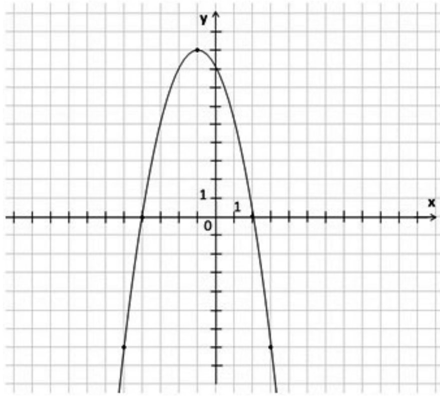
Podstawiamy argument 3 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = -9 - 6 + 8 = -7$$

Współrzędne punktu: (3, –7)



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.
Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze <u>zmienionym znakiem!</u>
$X_1 = 1$
$X_2 = -3$

$(1, 0); (-3, 0)$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo. Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru:

Przykład1

$$y = 2(x+5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p" będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q" się nie zmienia:
X = -5
y = 2

$$W=(-5, 2)$$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych) Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo. Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Sposób II

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

Przykład 2

$y = -2(x + 1)^2 - 3$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków). W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszy przypadek funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W=(0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty, znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych: Wybraliśmy:

x = -2

$$y = -2 \cdot (-2)^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

(-2, -8)

x = -1

$$y = -2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2$$

(-1, -2)

x = 1

$$y = -2 \cdot 1^2 = -2 \cdot 1 = -2$$

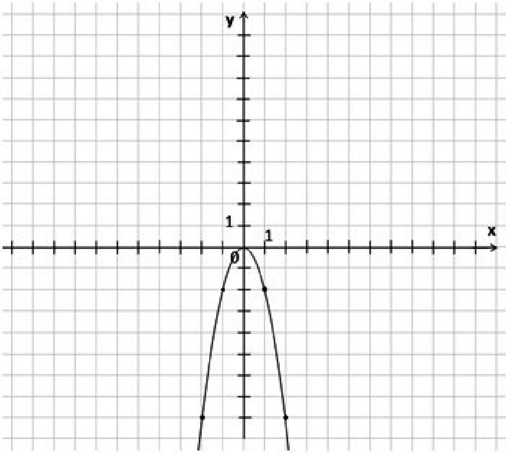
(1, -2)

x = 2

$$y = -2 \cdot 2^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

(2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

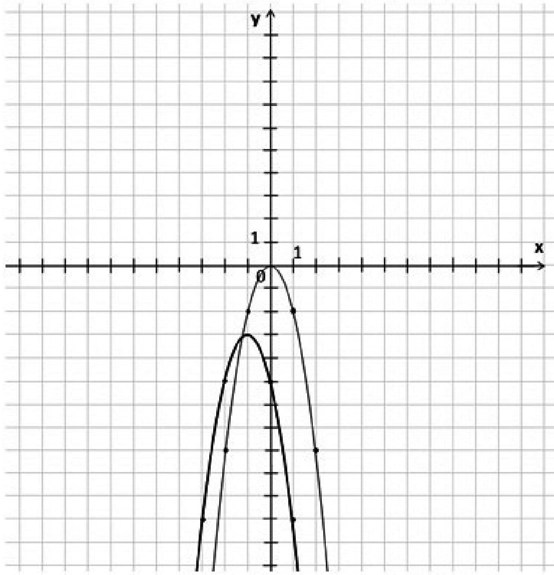


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.



ZADANIA

4.4.1 Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej f z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 - 3$
b) $f(x) = x^2 + 8$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
d) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Odpowiedź:

a) z osią OX: 1, –1; z osią OY: –3
b) z osią OX: nie istnieje; z osią OY: 8
c) z osią OX: 2; z osią OY: 4
d) z osią OX: 8, –2; z osią OY: –16

4.4.2 Oblicz:

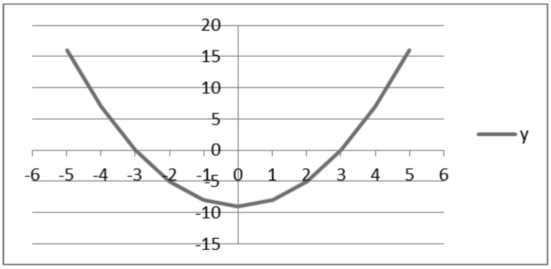
- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych,
- współrzędne wierzchołka paraboli,
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

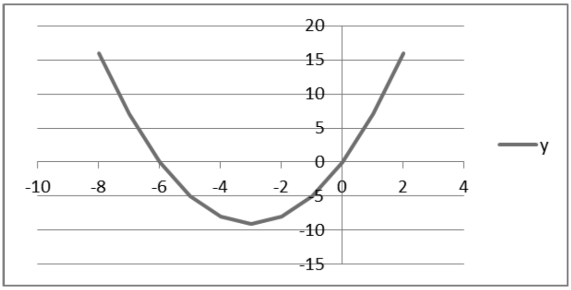
a) $f(x) = x^2 - 9$
b) $f(x) = x^2 + 6x$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Odpowiedź:

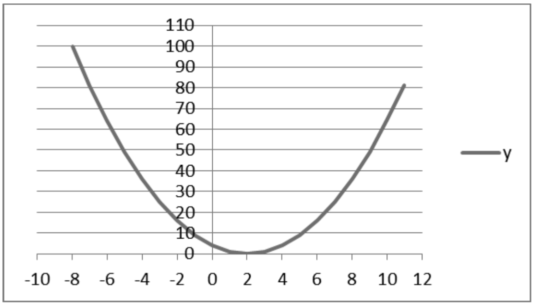
a) z osią OX: ,–3, 3; z osią OY: –9; $p = 0$; $q = -9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$



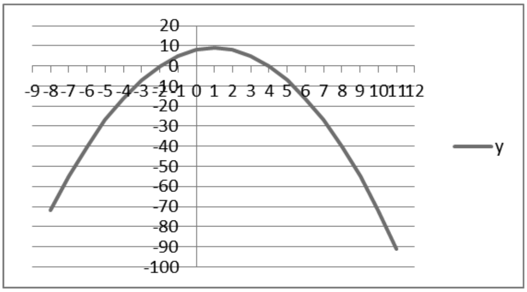
b) z osią OX: 0, –6; z osią OY: 0; $p = -3$; $q = -9$; $x_1 = 0$, $x_2 = -6$



c) z osią OX: 2; z osią OY: 4; $p = 2$; $q = 0$; $x_1 = x_2 = 2$



d) z osią OX: –2, 4; z osią OY: 8; $p = 1$; $q = 9$; $x_1 = -2$, $x_2 = 4$



4.5 Własności funkcji kwadratowej

Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

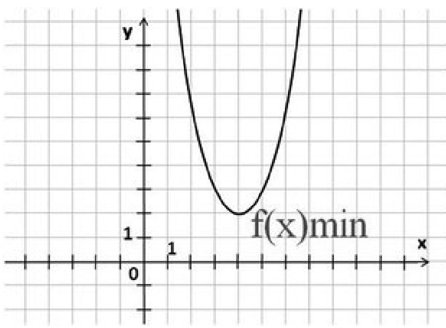
MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum. Przypominamy: Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{\min}$ lub $y_{\min}$. Maksymalną wartości oznaczamy:

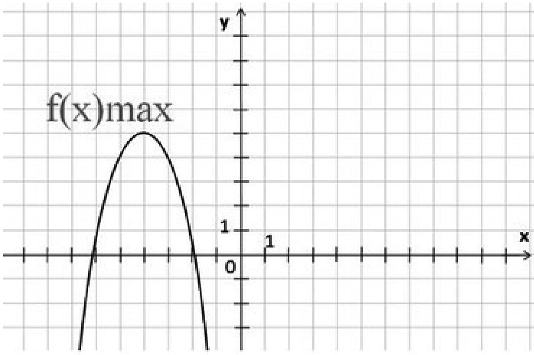
$f(x)_{\max}$ lub $y_{\max}$.

W celu wyznaczenia „– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum,” on page 121 funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum, czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum,



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum.



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „a" funkcji kwadratowej. Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy $a > 0$, w dół, gdy $a < 0$.

Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „a" funkcji ma wartość –3 ($a < 0$). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Dziedzina

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc: $D = R$

Zbiór wartości

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka (q) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka (q):

$$ZW = (-\infty, \ q\rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka (q) a nieskończonością:

$$ZW = \langle q, \ \infty)$$

Przykład 2

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

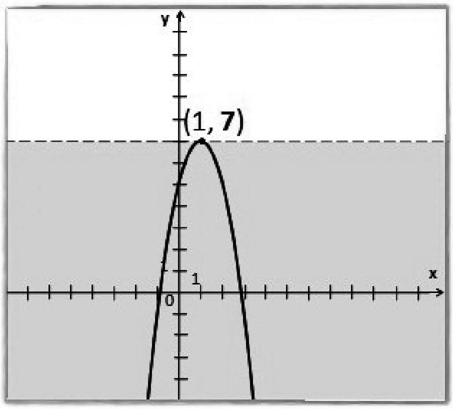
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-56}{4 \cdot (-2)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Ponieważ współczynnik „a" jest ujemny (-2), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością q.

$$ZW = (-\infty,\ 7\rangle$$



Przykład 3

$$y = 2x^2 + 4x - 2$$

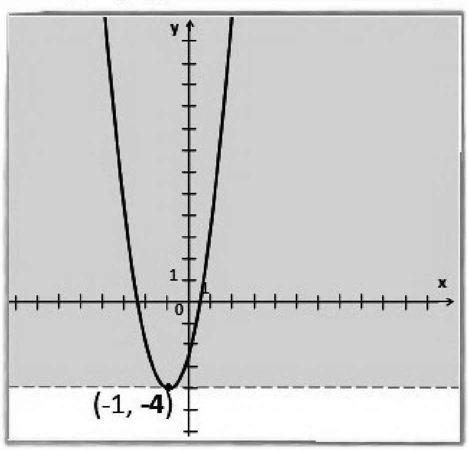
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 + 16 = 32$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-32}{4 \cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4$$

Ponieważ współczynnik „a" jest dodatni (2), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością q a nieskończonością.

$$ZW = \langle -4,\ \infty)$$



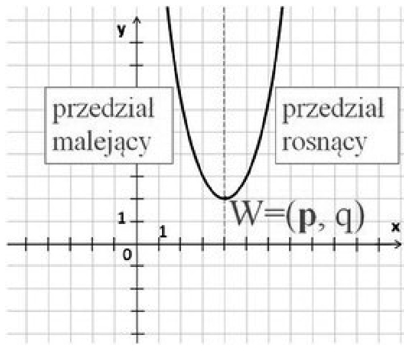
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie, jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś 0X), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka (p).

Drugą potrzebną informacją jest kierunek ramion paraboli:

Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.



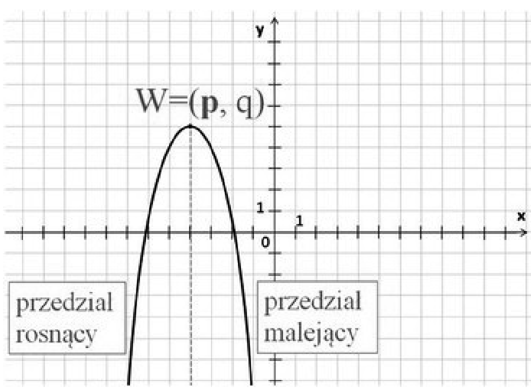
- Funkcja jest rosnąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle p, \ \infty)$

- Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\searrow$ w przedziale $(-\infty, \ p\rangle$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



- Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „*p*".

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\left(-\infty,\ p\right\rangle$

- Funkcja jest malejąca w przedziale od „*p*" do nieskończoności.

$f(x)\searrow$ w przedziale $\left\langle p,\ \infty\right)$

$y = 3x^2 - 12x + 8$

Obliczamy współrzędną „p" wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a" funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę.
W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\left\langle 2,\ \infty\right)$

$f(x)\searrow$ w przedziale $\left(-\infty,\ 2\right\rangle$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 4x + 10$.

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$f(x)\uparrow: (-\infty, 2\rangle$

$f(x)\downarrow: \langle 2, \infty)$

Reasumując

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y =< -\frac{\Delta}{4a},\infty)$	$Y =(-\infty,-\frac{\Delta}{4a} >$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x =-\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{min} -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x =-\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in (-\infty,-\frac{b}{2a})$, rosnąca dla $x \in (-\frac{b}{2a},+\infty)$	rosnąca dla $x \in (-\infty,-\frac{b}{2a})$, malejąca dla $x \in (-\frac{b}{2a},+\infty)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 =-\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 =\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 =\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowne do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x =-\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w =-\frac{b}{2a}$, $y_w =-\frac{\Delta}{4a}$	

ZADANIA

4.5.1 Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = x^2 - 6x$

c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 5$

e) $y = -2x^2 + 6x + 7$

4.5.2 Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

➢ zbiór wartości,

- miejsca zerowe,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca,
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 4$ **b)** $f(x) = -x^2 + 6x$

c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ **d)** $f(x) = -(x-1)(x+5)$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ **f)** $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$

	Zbiór wartości	Miejsca zerowe	Wartości dodatnie	Wartości ujemne	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	$\langle -4, \infty)$	−2,2	$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$	$(-2,2)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	–	Dla x=0 y= −4
b)	$(-\infty,9\rangle$	0,6	$(0,6)$	$(-\infty,0)\cup(6,\infty)$	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$	Dla x=3 y= 9	–
c)	$\langle -4, \infty)$	1,5	$(-\infty,1)\cup(5,\infty)$	$(1,5)$	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla x=3 y= −4
d)	$(-\infty,9\rangle$	5,1	$(-5,1)$	$(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$	Dla x=2 y= 9	–
e)	$\langle 0,\infty)$	3	$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$	ϕ	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla x=3 y= 0
f)	$\left(-\infty,10\frac{1}{8}\right\rangle$	−4, $\frac{1}{2}$	$\left(-5,\frac{1}{2}\right)$	$(-\infty,-4)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$	$\left(-\infty,-1\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1\frac{3}{4},\infty\right)$	Dla $x=-1\frac{1}{3}$ y= $10\frac{1}{8}$	–

4.5.3 Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -2x^2 - 8x - 5$

c) $y = x^2 - 6x + 10$

Odpowiedź:

a) Dziedzina: $D = R$
Zbiór wartości: $ZW = \langle -1, \infty)$
Miejsce zerowe: $x_1 = 1$ lub $x_2 = 3$
Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna
malejąca w przedziale $(-\infty,2\rangle$
rosnąca w przedziale $\langle 2,\infty)$

Wierzchołek: $W = (2,-1)$

Najmniejsza wartość: $y_{min} = -1$ dla $x = 2$

Największa wartość: nie istnieje

b) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: ZW = $(-\infty, 3>$

Miejsce zerowe: x0 ≈ −3, 2 lub x0 ≈ −0, 8

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca w przedziale $(-\infty, -2>$

malejąca w przedziale $< -2, \infty)$

Wierzchołek: W = (−2, 3)

Największa wartość: ymax = 3 dla x = −2

Najmniejsza wartość: nie istnieje

c) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: $ZW = < 1, \infty)$

Miejsce zerowe: nie istnieją

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 3>$

rosnąca w przedziale $< 3, \infty)$

Wierzchołek: W = (3, 1)

Najmniejsza wartość: ymin = 1 dla x = 3

Największa wartość: nie istnieje

4.5.4 Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 4x - 1$ z prostymi:

a) $y = -5$ **b)** $y = -3$ **c)** $y = -1$ **d)** $y = 2$

Odpowiedź:

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 4x - 1$ ma:

– 0 punktów wspólnych z prostą $y = -5$

– 1 punkt wspólny z prostą $y = -3$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = -1$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = 2$

4.5.5 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 6x - 7$.

Odpowiedź: $x = 3$

4.5.6 Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

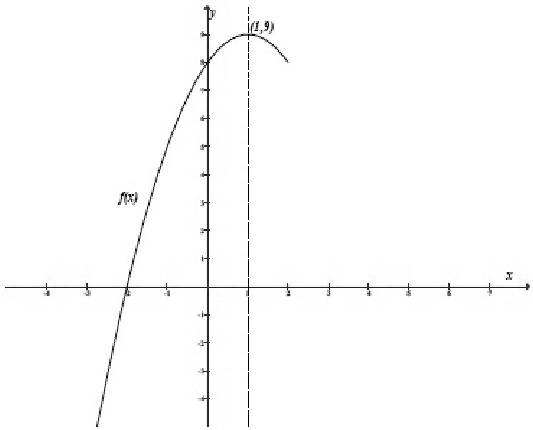
a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

Odpowiedź:

a) $(-\infty, 4>$ b) $x \in \langle 1, 5 \rangle$

4.5.7 Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe.



a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: −2 oraz 4.

b) Funkcja jest rosnąca w przedziale (−2, 4).

c) Funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$.

d) Zbiorem wartości funkcji jest przedział (−1, 9).

Odpowiedź: a

4.5.8 Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ b) $f(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f(x) = -3x(x-2)$ d) $f(x) = 2(x-2)(x+4) - 5$

Odpowiedź:

a) $m = 0$ b) $m = -11\frac{5}{4}$

c) $m = 3$ d) $m = -23$

4.5.9 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$, $x \in \langle -1,2 \rangle$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $x \in \langle -2,5 \rangle$

c) $f(x) = -2x^2 + x - 1$, $x \in \langle 0,2 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = 12$, $m = 0$

b) $m = 46$, $m = 7/8$

c) $m = -7/8$, $m = -7$

4.5.10 Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^2 - 9,\ x \in \langle -2,2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 5x,\ x \in \langle 3,7 \rangle$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 6,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = -9$

b) $m = -14$

c) $m = -10$

d) $m = 1$

4.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

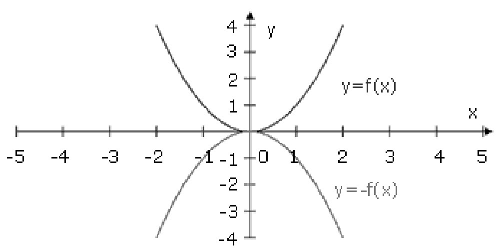
Teraz nauczę się:

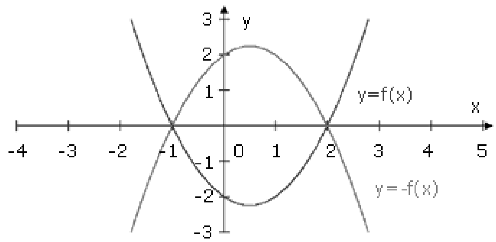
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

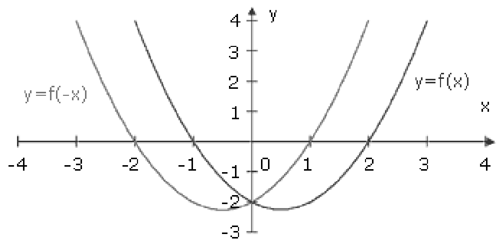
Przykłady:





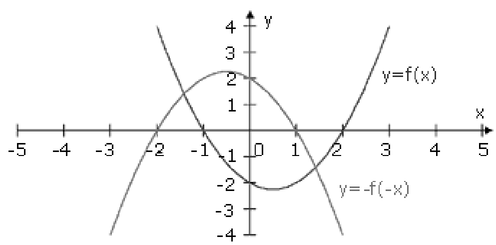
$x \rightarrow y = f(-x)$

Wykres funkcji $y = f(-x)$ **jest symetryczny do wykresu funkcji** $y = f(x)$ **względem osi OY.**



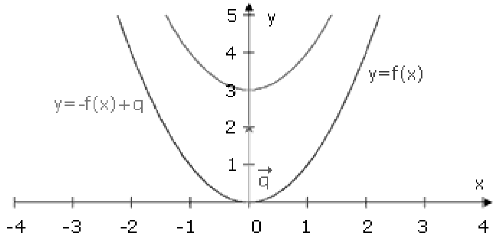
$x \rightarrow y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ **powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji** $y = f(x)$ **przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).**



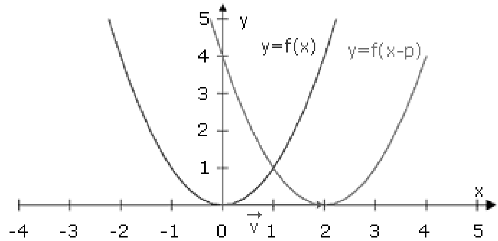
$x \rightarrow y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ **powstaje w wyniku przesunięcia wykresu** $y = f(x)$ **wzdłuż osi OY o** $|q|$ **jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor [0,q]).**



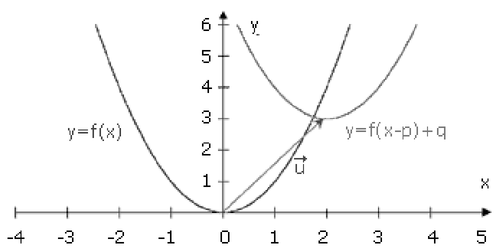
$x \to y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ **otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji** $y = f(x)$ **wzdłuż osi OX o wektor** $\vec{v} = [p,0]$.



$x \to y = f(x - p) + q$

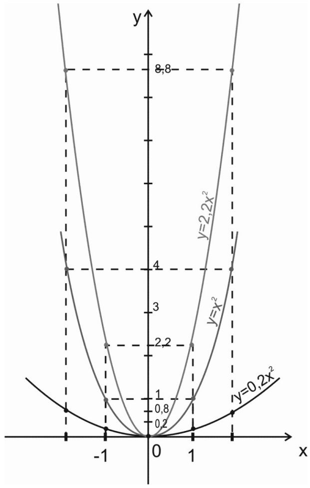
Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ **otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu** $y = f(x)$ **o wektor** $\vec{u} = [p,q]$**.**



$x \to y = k \cdot f(x)$

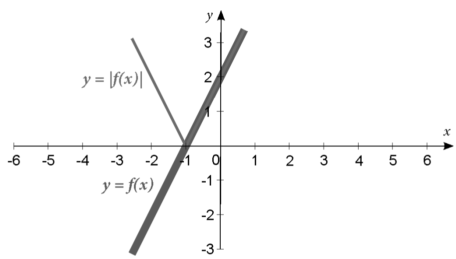
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ **powstaje z wykresu** $y = f(x)$ **w wyniku k- krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.**

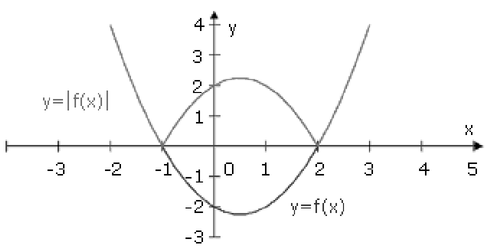
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY). Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).



***$x \to y = |f(x)|$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$, leżącą nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX.

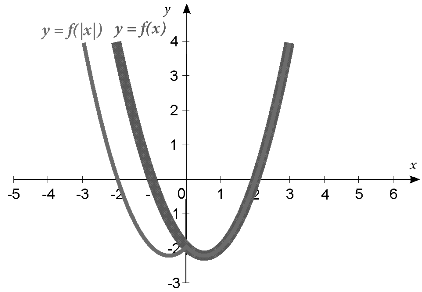




*** $x \to y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

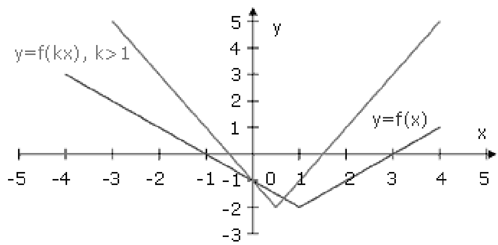
dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian, otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

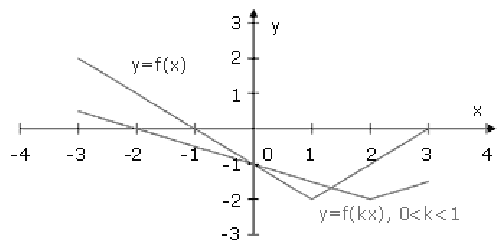


***$x \to y = f(k^*x)$**

Wykres funkcji $y = f(k^*x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX. Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.





ZADANIA

4.6.1 Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$ o p jednostek wzdłuż osi OX i q jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji f. Uzupełnij według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji g	Przesunięcie wzdłuż osi OX p	Przesuniecie wzdłuż osi OY q	Postać kanoniczna wzoru funkcji f	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x+4)^2 - 5$	W = (–4,–5)
			$f(x) = \frac{3}{4}(x+2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				W = (3,0)
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x-2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		W = (0,–1)

4.6.2 Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = (x-3)^2$ **b)** $y = (x+1)^2$ **c)** $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 3$ **e)** $y = (x+1)^2 - 1{,}6$ **f)** $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) przesuwamy o 3 jednostki w prawo

b) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo

c) przesuwamy o 4 jednostki w górę

d) przesuwamy o 3 jednostki w dół

e) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 1,6 jednostki w dół

f) rysujemy $y = x^2$, odbijamy symetrycznie względem osi OX i przesuwamy w dół o $3\frac{1}{3}$ jednostki w dół

4.6.3 Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi *OX* o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi *OY* o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Odpowiedź:

a) zbiór wartości $(-\infty, 8\rangle$

b) $b = 12$, $c = -10$

4.6.4 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji:

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = -0{,}3x^2 + 12$ **c)** $y = 1{,}4(x-48)^2$

d) $y = -35(x+1{,}2)^2$ **e)** $y = 15(x+\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) W = (0,–5); funkcja maleje $x \in (-\infty,0)$, funkcja rośnie $x \in (0,\infty)$

b) W = (0,12); funkcja rośnie $x \in (-\infty,0)$, funkcja maleje $x \in (0,\infty)$

c) W = (48,0); funkcja maleje $x \in (-\infty,48)$, funkcja rośnie $x \in (48,\infty)$

d) W = (–1,2;0); funkcja rośnie $x \in (-\infty;-1,2)$, funkcja maleje $x \in (-1,2;\infty)$

e) W = $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$; funkcja maleje $x \in (-\infty,-\frac{2}{3})$, funkcja rośnie $x \in (-\frac{2}{3},\infty)$

4.6.5 Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta:

a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$
b) $y = 0,6x^2 - 5$ i $y = 10$
c) $y = -0,1(x-3)^2$ i $y = -4$
d) $y = 15(x+2)^2 + 4$ i $y = -1$
e) $y = -3,2(x-5)^2 - 1$ i $y = -11$
f) $y = -3,2(x-5)^2 - 11$ i $y = 20$

Odpowiedź:

a) ma dwa punkty wspólne
b) nie ma punktów wspólnych
c) ma dwa punkty wspólne
d) nie ma punktów wspólnych
e) ma jeden punkt wspólny
f) nie ma punktów wspólnych

4.6.6 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W, przechodząca przez punkt P:

a) W = (–1,–1), P = (3,3)
b) W = (–8,7), P = (1,6)
c) W = (3,2), P = (–5,10)

Odpowiedź:

a) $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$
b) $y = -\frac{1}{81}(x+8)^2 + 7$
c) $y = \frac{1}{8}(x-3)^2 + 2$

4.6.7 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ względem:

a) osi OX
b) osi OY
c) punktu (0,0)

Odpowiedź:

a) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$
b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$
c) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$

4.6.8 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ względem:

a) osi OX
b) osi OY
c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x)=-(x+1)(x-3)$ b) $f(x)=(x-1)(x+3)$ c) $f(x)=-(x-1)(x+3)$

4.6.9 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x)=x^2-x-6$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x)=-x^2+x+6$ b) $f(x)=x^2+x-6$ c) $f(x)=-x^2-x+6$

4.6.10 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3,\infty)$, wykres przechodzi przez punkt P = (–1,5) i ma oś symetrii o równaniu x = 1,

b) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4,\infty)$, jednym z miejsc zerowych jest x = 1 i wykres ma oś symetrii o równaniu x = –1,

c) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 4,\infty)$, wykres ma oś symetrii o równaniu x = 2 i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+3\frac{1}{2}$ b) $f(x)=x^2+2x-3$ c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+6$

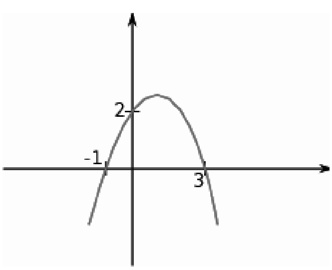
4.6.11 Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 6, 7, 8

4.6.12 Rozwiąż równanie $f(x-1)=4$, jeżeli $f(x)=x^2+x-2$.

Odpowiedź: x = –2, x = 3

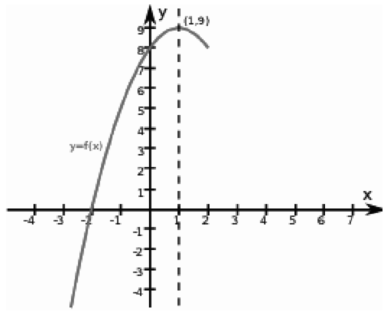
4.6.13 Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór:



Odpowiedź:

$$y = -\frac{2}{3}(x+1)(x-3) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$$

4.6.14 Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



Odpowiedź:

$$y = -(x-1)^2 + 9$$
$$y = -(x+2)(x-4)$$
$$y = -x^2 + 2x + 8$$

4.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

ZADANIA

4.7.1 Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Odpowiedź: Prędkość turysty z miasta A to 4 km/h, a turysty z miasta B 3 km/h**.**

4.7.2 Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większa niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Odpowiedź: Wymiary pierwszego boiska to 56 m $\times$ 33 m, a drugiego boiska 60 m $\times$ 25 m.

4.7.3 Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: Turysta dziennie przechodził 28 km.

4.7.4 Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Trójkąt ma boki 41cm, 40 cm, 9 cm.

4.7.5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej trójkąta to 17 cm.

4.7.6 Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

Odpowiedź: Czas napełniania zbiornika przez obie rury jednocześnie wynosi $23\frac{1}{3}$ godziny.

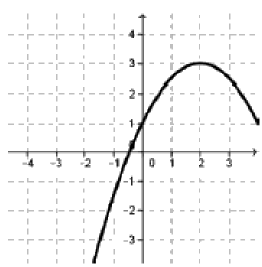
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[40] Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x - 7)(x + 2)$ są:

a) $x = 7, x = -2$ b) $x = -7, x = -2$ c) $x = 7, x = 2$ d) $x = -7, x = 2$

Odpowiedź: a

2.[41] Wzorem funkcji kwadratowej f, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku jest:



40 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 22.02.2013.
41 Zadania 2, 3: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 22.02.2013.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Odpowiedź: b

3. Największa wartość funkcji $y = -2x^2 + x + 1$ w przedziale $\langle -1; 0{,}5 \rangle$ jest równa:

a) $1\frac{1}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) -4

4.[42] Gdy przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji opisanej wzorem:

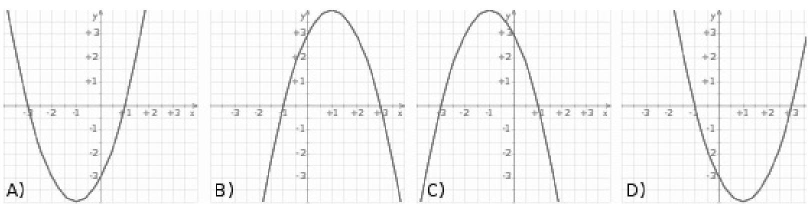
a) $y = 2(x - 2) + 4$ b) $y = 2(x - 2) - 4$ c) $y = 2(x - 2) + 1$ d) $y = 2(x + 2) + 4$

5. Funkcja kwadratowa $y = x^2 + bx + c$ jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2\rangle$, a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$. Postać kanoniczna tej funkcji opisana jest wzorem:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ b) $f(x) = (x + 2)^2 + 4$

c) $f(x) = (x + 4)^2 + 2$ d) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$

6. Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



Odpowiedź: a

7.[43] Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -4\rangle \\ 5x + 10 & \text{dla } x \in (-4, 2) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$$ jest

:

a) -4 b) -2 c) -1 d) 1

8. Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

a) $(-\infty, \frac{3}{2})$ b) $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ c) $(-1, 4)$ d) $(-4, 1)$

42 Zadania 4-6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 22.02.2013.
43 Zadanie 7: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 22.02.2013.

9. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:

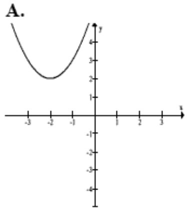
a) $(2,\infty)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(1,+\infty)$

10.[44] Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:

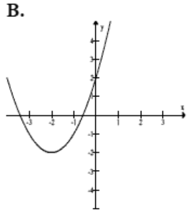
a) $x = -8$ b) $x = -4$ c) $x = 4$ d) $x = 8$

11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

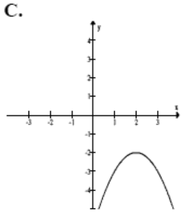
A.



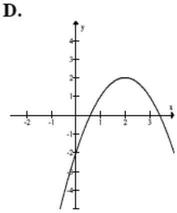
B.



C.

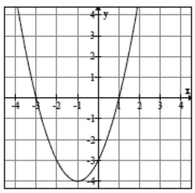


D.

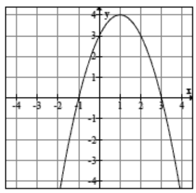


12. Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

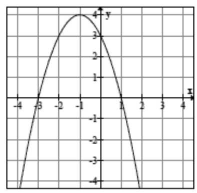
13.[45] Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



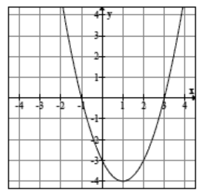
A.



B.



C.



D.

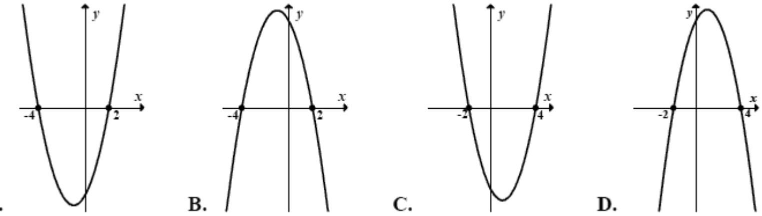
14. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$ jest punkt o współrzędnych:

a) $(0,2)$ b) $(0,-2)$ c) $(-2,0)$ d) $(2,0)$

15.[46] Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale $<-2, 3>$.

16.[47] Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:

44 Zadania 10-12: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 22.02.2013.
45 http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 22.02.2013r
46 Zadanie 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf ,
47 Zadanie 16: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013r

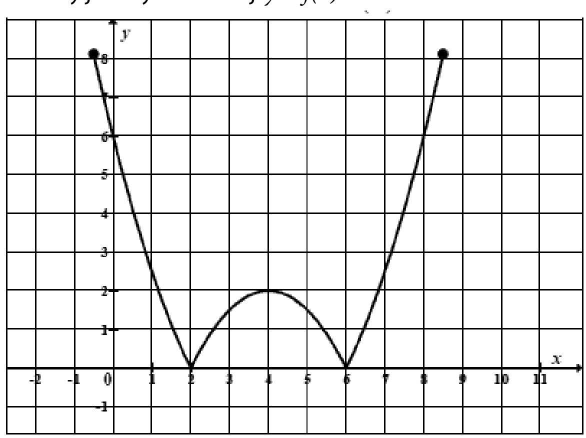


A. B. C. D.

17.[48] Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:

a) (3,0) b) (0,3) c) (–3,0) d) (0,–3)

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = 3$

19.[49] Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 10x + 9$ w przedziale <3,7> .

Odpowiedź: $y_{max} = -12$, $y_{min} = -16$

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ i $x + y = 10$

Odpowiedź: P = (3,7), R = (5,5)

21. Wyznacz wartość liczby m, tak aby funkcja $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$ miała dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -1$.

Odpowiedź: $m = 12$

22. Wzór w postaci kanonicznej funkcji $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ to:

48 Zadania 17, 18: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.
49 Zadania 19-35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

a) $y = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ b) $y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

c) $y = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ d) $y = (x + \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{8}$

Odpowiedź: a

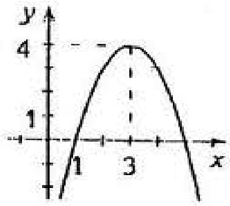
23. Funkcję kwadratową przedstawioną na rysunku opisuje wzór:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



Odpowiedź: a

24. Zbiorem wartości funkcji $y = x^2 - 6x + 11$ jest:

a) $(-\infty, 2\rangle$ b) $(-\infty, 3\rangle$ c) $\langle 3, \infty)$ d) $\langle 2, \infty)$

Odpowiedź: d

25. Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla $x = 2$, jeśli:

a) $b = -4, c = 8$ b) $b = 4, c = -8$ c) $b = -4, c = -8$ d) $b = 4, c = 8$

Odpowiedź: a

26. Wykresy funkcji $f(x) = 9 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 9$:

a) są symetryczne względem osi OX **b)** są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY **d)** nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja f ma wzór:

a) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ **d)** $f(x) = -(x+2)^2$

Odpowiedź: a

29 Liczba punktów wspólnych prostej $y = -x$ z wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, wynosi:

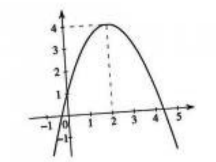
a) 1 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 3

Odpowiedź: c

30. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby –6 oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$.

Odpowiedź: 62

31. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określ jej wzór:



Odpowiedź: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

32. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem $y = x + 4$.

Odpowiedź: a) $y = -x^2 + 6x$, b) $x \in (1,4)$

33. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$, jeśli $x + y = 4$.

Odpowiedź: 8

34. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami: $y = x^2 + 2x - 8$ oraz $y = x^2 + 6x - 4$ mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

Odpowiedź: (–1,–9)

35. Wartością największą funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x - 3$, określonej w przedziale $\langle -3,2 \rangle$, jest liczba:

a) –4 b) 5 c) 0 d) 6

36. Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 9$ przyjmuje wartości nieujemne dla:

a) $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

b) $x \in (-3,3)$

c) $x \in \langle -3,3 \rangle$

d) $x \in (-\infty,-3 \rangle \cup \langle 3,\infty)$

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia*. *Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.
13. Fischer R. *„Liczby Fibonacciego na giełdzie"*, WIG - Press, Warszawa 1996.
14. Nowakowski J., Borowski K., *Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Difin.

Źródła internetowe

1. www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html
2. www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html
3. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
4. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
5. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
6. pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
11. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
12. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
15. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
16. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
21. www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
28. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

29. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
31. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
32. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
34. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
35. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
37. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
38. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
39. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
40. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
43. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
44. www.bossa.pl
45. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
46. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
47. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
48. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
49. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
50. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
51. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
52. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
53. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
54. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf