Materiały pomocnicze
dla nauczyciela z zakresu

Ekonomii w praktyce, matematyki i informatyki

ace

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

Podstawy przedsiębiorczości

Podręcznik dla nauczyciela – liceum i technikum

Informatyka

Podręcznik dla nauczyciela – liceum i technikum

Matematyka

KLASA I Podręcznik dla nauczycieli – dla Liceum Ogólnokształcącego i Technikum

Matematyka

KLASA II Podręcznik dla nauczycieli – Liceum Ogólnokształcące i Technikum

Matematyka

KLASA III Podręcznik dla nauczycieli – Liceum Ogólnokształcące i Technikum

Matematyka

KLASA I Podręcznik dla nauczycieli – Technikum

Matematyka

KLASA II Podręcznik dla nauczyciela – Technikum

Matematyka

KLASA III Podręcznik dla nauczyciela – technikum

Matematyka

KLASA IV Podręcznik dla nauczycieli – Technikum

Interdyscyplinarny podręcznik

cz. I

Podstawy przedsiębiorczości

Podręcznik dla nauczyciela – liceum i technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drodzy Nauczyciele,

Oddajemy w Państwa ręce podręcznik do *Podstaw przedsiębiorczości* będący wynikiem intensywnej pracy interdyscyplinarnego zespołu ekspertów. Proponowane opracowanie adresowane jest do nauczycieli liceów ogólnokształcących i techników.

Niniejszy podręcznik napisany został w oparciu o nową podstawę programową kształcenia ogólnego, a także treści wykraczające poza nią. Założeniem autorów było stworzyć podręcznik, który w jak największym stopniu będzie w stanie zaspokoić potrzeby uczniów, umożliwiając im wszechstronny rozwój oraz indywidualizację kształcenia, a także przygotować ich do kolejnego etapu kształcenia. Treści z *Podstaw przedsiębiorczości* zostały wzbogacone o elementy: ekonomii, psychologii i pedagogiki. Dodatkowym elementem składającym się na innowacyjność prezentowanego opracowania jest opatrzenie każdego z rozdziałów przypisami. Oswoi to uczniów z konstrukcją podręczników akademickich oraz pozwoli im na samodzielne dotarcie do materiałów źródłowych i poszerzanie prezentowanych w niniejszym podręczniku treści wiedzy stosownie do indywidualnych potrzeb i zainteresowań. Każdy rozdział zakończony jest propozycjami tematów do dyskusji, które są nie tylko konkretnym pomysłem ułatwiającym przygotowanie i realizację lekcji, ale również sprawdzonym sposobem na wyróżnienie i utrwalenie nowo poznanego materiału. Podręcznik stanowi jeden z elementów interdyscyplinarnego programu nauczania przygotowanego w ramach projektu *ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież – Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości*, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Zalecane jest równoległe realizowanie treści z *Matematyki* i *Informatyki*, ponieważ niejednokrotnie korespondują one z aktualnie realizowanym materiałem z *Podstaw przedsiębiorczości*.

W sytuacji, gdy młodzi ludzie w każdej minucie poddawani są działaniom różnorodnych bodźców, a współczesny świat niesie ze sobą tyle ciekawych propozycji, jako nauczyciele nie możemy tych faktów ignorować. Chcąc umożliwić uczniom, jak najpełniejszy rozwój – na miarę ich możliwości i umiejętności, zgodny z ich uzdolnieniami i zainteresowaniami – jesteśmy zobligowani do stworzenia im warunków do wszechstronnej, wieloaspektowej i krytycznej analizy prezentowanego materiału. Umożliwi im to stanie się w przyszłości jednostkami silnymi, samodzielnymi, samorealizującymi się i skłonnymi do samoaktualizacji.

Istotnym elementem zajęć prowadzonych z wykorzystaniem podręcznika będzie zachęcanie uczniów do rozwijania kreatywności i przedsiębiorczości, do podejmowania różnych inicjatyw, bowiem:

▶ **Ważniejsze od wykonywania zadań we właściwy sposób jest wykonywanie właściwych zadań.**

Peter F. Drucker

Autorzy mają nadzieję, że oddane Państwu opracowanie spełni swoją rolę i będzie jednym z wielu elementów przybliżających i wspierających kształtowanie u uczniów postawy przedsiębiorczej.

1. Przedsiębiorczość

> **Ilość porażek jest proporcjonalna do ilości sukcesów.**
>
> ***T.I. Watson***

Przedsiębiorczość można odnieść do każdej ludzkiej działalności i wszystkich ludzi ją podejmujących. **Przedsiębiorczość** jest specyficzną postawą człowieka wobec otaczającego go świata i ludzi, wyrażającą się w twórczym i aktywnym dążeniu do ulepszania istniejących stanów rzeczy, w gotowości do podejmowania nowych działań lub rozszerzania dotychczasowych i dążenia do osiągania złożonych – zwykle zwiększonych – korzyści materialnych, które prowadzą do odczuwalnego wzrostu uzyskiwanych zysków (dochodów) oraz poprawy warunków życia i pracy (A. Wiatrak, 2003). Jest to także podejmowanie działań mających na celu dokonywanie zmian w otaczającej rzeczywistości, zdolność do kreowania i zaspokajania swoich i cudzych potrzeb, a także cecha charakteru i zachowania. Człowiek przedsiębiorczy, niezależnie od warunków, jakie stwarza mu otoczenie, potrafi dostrzec i zaspokoić potrzeby swoje i swoich bliskich. Siłą napędową przedsiębiorczości są niezaspokojone potrzeby człowieka.

Przedsiębiorczość to „branie czegoś przed siebie", czyli podejmowanie nowych i trudnych zadań. W węższym znaczeniu *przedsiębiorczość* to zespół cech warunkujących osiągnięcie sukcesu w organizowaniu, kierowaniu i kontrolowaniu działalności (I. Sagan i in., 2009). To gotowość do podejmowania i rozwiązywania problemów w sposób twórczy, umiejętność wykorzystania pojawiających się szans oraz elastyczne przystosowywanie się do zmiennych warunków funkcjonowania.

1.1. Cechy osoby przedsiębiorczej

Postawa przedsiębiorcza charakteryzuje się inicjatywnością, aktywnością, niezależnością i innowacyjnością jest napędem, motorem w osiąganiu wyznaczonych celów.

Według Słownika języka polskiego ***Przedsiębiorcza*** **jest osoba, która**:

- ma ducha inicjatywy;
- jest skora do podejmowania różnych działań;
- ktoś pomysłowy, rzutki;
- ktoś, kto umie wykorzystywać pojawiające się szanse i elastycznie przystosowywać się do zmieniających się warunków.

Według J. Kozieleckiego (1987) osoba przedsiębiorcza wychodzi poza granice intelektualne, materialne, społeczne, poza to, czym się jest i co się posiada. Zdaniem T.W. Zimmerer'a, N.M. Scarborough'a (1996) osoba przedsiębiorcza – kobieta lub mężczyzna – to ktoś, kto jest wewnątrzsterowny, kreatywny, innowacyjny, komunikatywny. To ktoś, kto nie zraża się niepowodzeniami, jest wytrwały w dążeniu do celu, traktuje porażki jako doświadczenie, z którego można czerpać wiedzę. Nie boi się ryzyka (E. Lisowska, 1999).

Przedsiębiorczości można się nauczyć. W tym celu należy zapoznać się z wiedzą z zakresu psychologii dotyczącą metod rozwijania w sobie cech przedsiębiorczych, kształtujących wiarę w siebie, poczucie własnej wartości oraz sposobów przezwyciężania trudności, radzenia sobie ze stresem (stresorem) i komunikowania się z otoczeniem. Ważne jest stymulowanie rozwoju umiejętności myślenia i działania oraz kształtowanie postaw sprzyjających podejmowaniu działań.

Osoba przedsiębiorcza potrafi dostrzec sprzyjającą okazję, a jednocześnie odróżnić, co jest marzeniem, a co dobrym pomysłem do realizacji. Jest aktywna, zmotywowana do osiągania nowych celów, sukcesów. Orientuje się na przyszłość, wykazuje chęć uczenia się na błędach – porażkę traktuje jako cenne doświadczenie.

Rys. 1. Cechy osoby przedsiębiorczej

Do postawy osoby przedsiębiorczej należy również zaliczyć:

- chęć uczenia się i rozwijania, pomysłowość, aktywność, gotowość ponoszenia ryzyka, umiejętność analizowania sytuacji i podejmowania decyzji, umiejętność współpracy, umiejętność porozumiewania się i rozwiązywania konfliktów, wyobraźnia i elastyczność, wytrwałość;
- szacunek dla siebie – akceptuje swój wygląd;
- wiarę we własne możliwości;
- realizowanie wcześniej wyznaczonych celów;
- świadomość swoich wad – pracuje nad nimi;
- działania pionierskie – podejmuje się działań nowych, nierutynowych;
- zamiłowanie do przygody;
- chęć rozwijania się i doskonalenia;
- umiejętność definiowania pojawiających się problemów;
- opanowanie;
- odpowiedzialność;
- niezależne myślenie i działanie;
- odwagę i optymistyczne nastawienie;
- przywiązywanie wagi do własnego rozwoju;
- pewność siebie,;
- świadomość swoich mocnych i słabych stron;
- ambicja;
- wykazywanie inicjatywy w działaniu;
- odpowiedzialność w pracy i w wykonywanych działaniach;
- kreatywność i umiejętność prezentowania własnego stanowiska.

W tabeli 1 zostały uwzględnione ogólne kategorie psychologiczne, które charakteryzują przedsiębiorczość.

Tabela 1. Ogólne kategorie psychologiczne

Cechy utrudniające	Kategorie ogólne	Cechy ułatwiające
poniżanie się liczenie głównie na opiekę i oparcie u innych, uległość odrzucenie i izolacja, usprawiedliwienie siebie za brak sukcesów	potrzeby psychiczne	tendencje do dominowania skłonność do wyczynu i posiadania dążenie do własności i autonomii orientacja na osiąganie sukcesu i władzy
lęki niechęć, bojaźń zamiast samodzielności chęć utrzymania tego, co się posiada, a nie jego pomnażanie,	motywacja	tendencja do powiększania stanu posiadania orientacja na osiągnięcie i sukces motywy „bycia przedsiębiorczym"
trudności w podejmowaniu decyzji chwiejność wyuczona bezradność	decyzje	zdecydowanie decyzje adekwatne do sytuacji konsekwencja
unikanie sytuacji i decyzji obciążonych ryzykiem	ryzyko	traktowanie sytuacji ryzykownych, jako szans na sukces
brak odporności psychicznej, niski próg stresu i frustracji	sukces i niepowodzenie	konsekwencja odporność psychiczna wysoki próg stresu i frustracji umiejętność działania w sytuacjach trudnych
konformizm algorytmiczny styl działania brak zdolności twórczych	innowacyjność i twórczość	zdolności twórcze pomysłowość wyobraźnia i myślenie dywergencyjne intuicja
introwersja trudności w kontaktach i współpracy brak zdolności przywódczych	współpraca	ekstrawersja zdolności przywódcze twórcze kierowanie zaufanie u innych umiejętność negocjacji i mobilizowania innych znajomość potrzeb ludzi,
lęki i obawy lenistwo pesymizm i in.	bariery	optymizm i aktywność znajomość siebie postawa abarietyczna (eliminacja barier i hamulców kreatywnego myślenia, działania)
melancholik	temperament	sangwinik duża energia i zrównoważenie

Źródło: W. Pomykało W., Encyklopedia biznesu, Warszawa 1995, www.p-e.up.krakow.pl/pdf/pe5/sagan_szmytkowska_masin5.pdf, 15.02.2013

1.2. Typy osobowości

Znajomość typów osobowości jest ważnym elementem zrozumienia siebie, swojego postępowania, a także postępowania innych ludzi.

Osobowość społeczna jest to wypadkowa różnych czynników kulturowych. Niektóre z nich oddziałują mocniej, inne słabiej, ale wszystkie w istotny sposób wpływają na kształt osobowości. Każdy z nas jest inny, niepowtarzalny. Mimo to, jako populacja ludzka wykazujemy wiele cech wspólnych, które możemy pogrupować (w oparciu o różne kryteria, np.: sposób reagowania, mówienia, odczuwania, radzenia sobie z porażką), na jednostki o podobnym typie osobowości, zbliżonym syndromie cech psychospołecznych.

- **Osobowość** *oznacza całość zintegrowanych procesów psychicznych człowieka, które ujawniają się w działaniu ukierunkowanym na realizację określonych celów.*
- **Osobowość** *jest to zespół cech psychicznych charakterystycznych dla danego człowieka. Cechy te w dużej mierze są dziedziczone, ale także rozwijają się pod wpływem otoczenia, w którym żyjemy.*

Stymulacja rozwoju osobowości polega więc na świadomym, celowym, ukierunkowanym i systematycznym oddziaływaniu na zachowanie człowieka, zgodnie z naukowo sprawdzonymi zasadami oraz poprzez użycie określonych metod wyzwalania możliwości rozwojowych i korygowania rozwoju (J. Borkowski, 2003).

Proces stymulacji rozwoju osobowości powinien między innymi uwzględniać[1]:

– poznawanie możliwości i ograniczeń rozwojowych konkretnego człowieka;
– prognozowanie rozwoju indywidualnego i zawodowego;
– prawidłowości rozwojowe;
– zasady oddziaływania stymulacyjnego;
– wybór metod i technik stymulacji;
– właściwy moment i warunki oddziaływania.

Znajomość typów osobowości pomaga odnieść sukces. Pozwala określić nasze mocne i słabe strony. W świadomy sposób kształtujemy własną osobowości. Zyskujemy w kontaktach z innymi, gdyż jesteśmy bardziej tolerancyjnymi dla otoczenia. Znając typy osobowości ludzi, z którymi żyjemy, rozmawiamy z tymi, którym chcemy zaoferować biznes, możemy też po prostu lepiej ich rozumieć. Każdy typ osobowości ma swoje mocne i słabe strony.

Nie ma typów lepszych i gorszych – ludzie są różni. Trzeba umieć wykorzystywać swoje mocne strony.

Zainteresowanie różnymi obliczami natury ludzkiej sięga starożytności. Pierwsza koncepcja temperamentu stała się podstawą pierwszej typologii osobowości.

Hipokrates sprowadził naturę człowieka do odpowiednich proporcji czterech płynów ustrojowych (krew, flegma, żółć żółta i czarna). Wyróżnił **4 typy temperamentu**: typ **flegmatyka, choleryka, melancholika i sangwinika**. Dokonał również dokładnego opisu typologii, który jest użyteczny także obecnie.

Flegmatyk (gr. flegme – śluz) to człowiek odznaczający się mało dynamicznym usposobieniem, powolny, nieulegający gwałtownym emocjom, słabo reagujący na podniety, bodźce. Nie dąży do żadnych zmian w życiu, jest zadowolony z tego, co osiągnął do tej pory. Wytrwały w działaniu i konsekwentny w uczuciach. Według Hipokratesa dominującym narządem w organizmie flegmatyka jest mózg, a dominującym „humorem" – śluz. Flegmatyk cechuje się temperamentem reprezentującym silny, zrównoważony i bezwładny układ nerwowy (według teorii Pawłowa)[2].

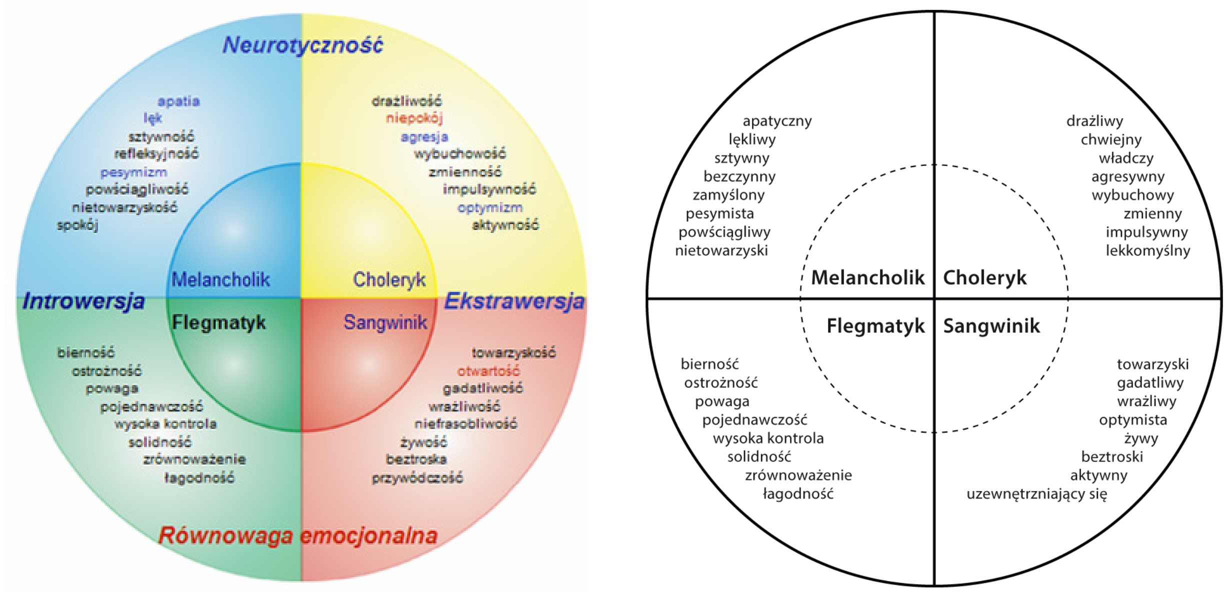
Choleryk (gr. chole – żółć, stąd „żółć go zalewa") to człowiek pobudliwy, wybuchowy, o silnych i szybko powstających reakcjach uczuciowych, odznaczający się dużą energią życiową, brakiem opanowania. Reakcje choleryka są szybkie, często nieprzemyślane, niewspółmierne do bodźca. Często żałuje on wypowiedzianych słów. Charakteryzuje go silne przeżywanie emocji, duża energia życiowa i aktywność. Nastawiony jest na działanie i kierowanie. Wśród ludzi wzbudza zaufanie i respekt, często pracuje dla potrzeb grupy. W działaniu jest szybki, preferuje pracę, którą może sam zorganizować. Lubi przewodzić i organizować pracę innym. Według

1 niemal.wordpress.com/2010/10/25/zasady-wspomagania-rozwoju-osobowosci/ dostęp 25.04.2013
2 Strelau, J., Psychologia temperamentu, Warszawa 1998, ss. 26-32.

Hipokratesa dominującym narządem w organizmie choleryka jest wątroba, a dominującym «humorem» – żółć. Według Pawłowa zaś choleryk to osoba o silnym i niezrównoważonym układzie nerwowym.

Melancholik (gr. mélanos – czarny + chole – żółć; prawdopodobnie stąd m.in. „czarne myśli") to człowiek o usposobieniu łagodnym, biernym, którego cechuje brak impulsywności, powolne, słabe, lecz długotrwałe reakcje uczuciowe. Wykazuje pesymistyczne, lękowe, negatywne podejściu do przyszłości, życia, samego siebie, jak również spraw życia codziennego. W działaniu melancholik jest niewytrwały, ma trudności z podejmowaniem decyzji, brakuje mu wiary w siebie. Cechuje się apatią, skłonnościami do depresji, przewlekłymi stanami przygnębienia i małą ruchliwością. Jest wrażliwy na krytykę, obraźliwy, nerwowy i skłonny do zadumy, spokojny, wyciszony, powściągliwy i mało elastyczny w zachowaniu. Lubi marzyć, oddawać się zadumie. Według Hipokratesa dominującym narządem w organizmie melancholika jest śledziona, a dominującym „humorem" – tzw. czarna żółć Melancholik cechuje się temperamentem reprezentującym słaby układ nerwowy (według teorii Pawłowa).

Sangwinik (łac. sanguis – krew) to człowiek o żywym, pogodnym, optymistycznym, uczuciowym, aktywnym usposobieniu, wrażliwy. Jest otwarty na relacje interpersonalne, towarzyski, beztroski. Lubi być w centrum zainteresowania, władczy i dominujący, czasem dumny i spoglądający na innych «z góry». Jest emocjonalny i spontaniczny, ma duże poczucie humoru, potrafi przyciągać do siebie ludzi. Tryska energią i entuzjazmem, jest twórczy, lubi komplementy, szybko przeprasza. Łatwo dostosowuje się do zmiennych warunków życia, jest odporny na trudności. Według Hipokratesa dominującym narządem w organizmie sangwinika jest serce, a dominującym «humorem» – krew. Zgodnie z teorią Pawłowa sangwinik cechuje się temperamentem reprezentującym silny, zrównoważony i ruchliwy układ nerwowy.



Rys. 2. Typy osobowości

Źródło: www.sedduction.fora.pl, 22.02.2013

Galen (129–199 r. p.n.e.) opisał 9 typów temperamentów, w tym cztery zależne od przewagi jednego z płynów ustrojowych. Są to: wesoły sangwinik, smutny melancholik, rozdrażniony choleryk, zrównoważony flegmatyk.

czyt. Kreczmer; niemiecki
psychiatra i psycholog
(1888-1964)

E. Kretschmer wykazał zależność pomiędzy budową ciała a osobowością. Założenie to pozwoliło na wskazanie czterech typów osobowości:

1. **pyknik** – człowiek niski o okrągłych kształtach i raczej łagodnym usposobieniu;
2. **astenik** – wysoki, o wystających kościach i mało życzliwy dla innych ludzi;

3. **atletyk** – dobrze zbudowany fizycznie i raczej zrównoważony psychicznie;
4. **dysplastyk** – człowiek niekształtny ze względu na różne anomalia w budowie fizycznej, które zwykle wpływają na jego usposobienie.

Szwajcarski psycholog
(1875-1961)

Carl Gustaw Jung, uczeń Freuda, za podstawę swej typologii osobowości przyjął kierunek i zakres aktywności społecznej człowieka. Wyróżnił dwa przeciwstawne typy:

– **ekstrawertyka** – osoba o pozytywnym nastawianiu do świata, aktywna, skierowana na otoczenie, prospołeczna, łatwo nawiązująca kontakty, zaradna, realistyczna, mocno stąpająca po ziemi, reagująca szybko i wyraźnie, robiąca dużo szumu i zamieszania wokół siebie (dobrze czująca się w takiej atmosferze);
– **introwertyka** – osoba nastawiona na własne działanie, nie uzewnętrznia swoich przeżyć, nie interesuje się otoczeniem, wykazuje skłonność do izolacji od innych, zamyka się w sobie.

Oryginalną typologię osobowości przedstawił E. Spranger (czyt. *Szpranger* Niemiecki filozof i psycholog (1882-1963). Za podstawowe kryterium osobowości uznał usposobienie. Wyróżnił sześć typów osobowości człowieka:

1. **teoretyczny** – człowiek interesujący się prawami nauki i poszukujący teorii wyjaśniających zjawiska;
2. **ekonomiczny** –człowiek dążący do bogactwa i zdobycia dóbr materialnych;
3. **estetyczny** – człowiek pragnący przeżywania piękna i jego przejawów;
4. **społeczny** – człowiek spieszący chętnie z pomocą innym ludziom;
5. **polityczny** – człowiek zabiegający o władzę i panowanie nad innymi jednostkami i zbiorowościami;
6. **religijny** – człowiek zainteresowany poznawaniem Boga i rozpowszechnianiem jego nauki.

Interesującą koncepcję osobowości społecznej i jej typologię z socjologicznego punktu widzenia opracował F. Znaniecki.

Polski filozof i socjolog
(1882-1958)

Według F. Znanieckiego (2001). Osobowość zależy od tego, kto w procesie socjalizacji danej osoby (w jej dzieciństwie, okresie wczesnej młodości) był osobą znaczącą. Wyróżnił on:

1. **ludzi dobrze wychowanych**, których osobowość ukształtowali głównie wychowawcy i instytucje upowszechniające ideały wychowawcze, zwane też kulturowymi ideałami wychowawczymi;
2. **ludzi pracy**, których osobowość kształtował warsztat pracy i funkcjonujące w nim zespoły pracownicze realizujące różne zadania gospodarcze;
3. **ludzi zabawy**, wychowanych i wprowadzonych do życia społecznego głównie dzięki uczestnictwu w grupach zabawowych i innych grupach rówieśniczych;
4. **ludzi zboczeńców**, którzy byli objęci wpływami różnych środowisk wychowawczych, w tym nie tylko instytucji typowo wychowawczych. Do tej kategorii osób zaliczał nonkonformistów i ludzi marginesu społecznego. Nonkonformiści, zwłaszcza nonkonformiści konstruktywni, to jednostkami torujące rozwój i postęp społeczny. Drudzy są mniej wartościowi, działają destrukcyjnie i dezorganizująco na różne struktury społeczne;
5. **ludzi „dobrych a mądrych”,** do tego typu zaliczył tzw. nowy typ normalności życiowej, łączący zalety wszystkich „realnych i aktualnych" typów osobowości.

(psycholog, socjolog
z Nebraski (1919-2008)

Natomiast J. L. Holland wyróżnił następujące typy osobowości zawodowych:

1. **typ realistyczny –** reprezentują go osoby, które kierują się w życiu zdrowym rozsądkiem – są realistami. Problemy rozwiązują poprzez działania, posiadają zdolności manualne, prowadzą odważny tryb życia, preferują czynności związane z aktywnością fizyczną. Są praktyczni, konserwatywni i wytrwali. Lubią polegać na sobie, dlatego nie doznają zawodów. Osoby posiadające typ realistyczny doskonale odnajdą się w zawodzie: kierowcy, mechanika, pilota, ogrodnika;
2. **typ badawczy –** określa osoby, które uwielbiają analizy, badania, chętnie rozwijają swoją wiedzę, lubią snuć teorie, stwarzać innowacyjne rozwiązania, najpierw poznają naturę problemu, a później go rozwiązują. Są to osoby bardzo ambitne, dokładne, sceptyczne i zrównoważone, stawiają sobie wyzwania, cele. Wykazują zdolności techniczne, matematyczne, odpowiada im praca intelektualna, a także zawód pełen wyzwań. Wybierają zawody, które pozwolą im wykorzystać umiejętności analityczne, np.: chemik, filozof, socjolog, matematyk;
3. **typ konwencjonalny –** osoby należące do tego typu osobowości szukają stabilności, cenią porządek, spokój i dokładność. Lubią zajęcia związane z segregowaniem danych. Są to osoby sumienne i pedantyczne. Zawody dla tego typu osobowości to: księgowy, notariusz, wizytator.
4. **typ przedsiębiorczy –** człowiek, który wie, czego chce, osiąga swoje cele, jest pewny siebie, ambitny, umie wpływać na innych i kierować ich postępowaniem. Ceni sobie poczucie bycia ważnym, jest indywidualistą ukierunkowanym na własne korzyści. Praca sprawia mu największą satysfakcję, gdy przynosi korzyści finansowe. Jest osobą energiczną, towarzyską, podejmującą ryzyko. Są to potencjalni kandydaci własnych działalności gospodarczych. Unikają pracy związanej z nauką, najczęściej wybierają karierę maklera, menedżera, notariusza czy prawnika.
5. **typ artystyczny –** kocha sztukę, stwarzanie nowych rzeczy, pomysłów, koncepcji, uwielbia obcować z tym, co piękne, twórcze. Należą do niego osoby kreatywne, o otwartych umysłach, bogatej wyobraźni. Widzące siebie w zawodzie wymagającym kreatywności i pasji. Artysta ceni sobie niezależność, jest otwarty na otoczenie, sprawia wrażenie niedbałego i niepraktycznego człowieka. Jest wolny jak ptak i nie pozwoli, ograniczać swojej wyobraźni. Typowe zawody odpowiadające Artystom to: aktor, kompozytor, malarz, projektant;
6. **typ społeczny –** zaliczymy do niego osoby towarzyskie, otwarte, lubiące pracę grupową, które są pomocne, potrafią doradzać, wspierać, lubią czuć się potrzebne. Najważniejsza jest dla nich miłość do innych ludzi, dbają o dobrą atmosferę między ludźmi, odczuwają satysfakcję, kiedy mogą pomagać innym. W sposób jasny i klarowny potrafią przedstawiać swoje zdanie. Wykazują olbrzymie umiejętności empatyczne. Są taktowne, cierpliwe, pełne serdeczności. Wybierają zawody związane z ułatwianiem życia innym osobom, np.: pielęgniarka, hostessa, ratownik, psycholog.

1.3. Hierarchia potrzeb

Źródłem motywacji są potrzeby, to dzięki nim osiągamy cele, które sobie wyznaczamy.

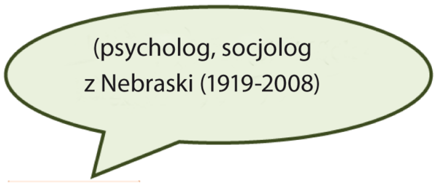
▶ **Motywacja** *to stan gotowości do podjęcia działania, proces pozwalający ludziom, dzięki określonym działaniom, osiągnąć zamierzone cele.*

▶ **Potrzeba** *jest to brak czegoś lub coś, co wprowadza człowieka w niepożądany stan i prowadzi motywację do wypełnienia tego braku. Jest to swego rodzaju stan dyskomfortu psychicznego spowodowany brakiem nieposiadania potrzebnych rzeczy lub niezaspokojenia swoich pragnień.*

Wyróżniamy potrzeby:

- **materialne** – produkty materialne rzeczowe, np.: chleb, masło, rower, mieszkanie itp.);
- **niematerialne** – duchowe, np.: obejrzę film, przeczytam książkę, a także dokumentacja techniczna i organizacyjna, wiedza praktyczna na temat rozwoju określonej produkcji tzw. know-how itp.

Od wielu lat w literaturze psychologicznej toczy się dyskusja na temat ilości i struktury potrzeb człowieka. Najbardziej znaną klasyfikację potrzeb przedstawił A. H. Maslow, według którego potrzeby człowieka tworzą logiczną hierarchię – od potrzeb niższego rzędu do potrzeb wyższego rzędu. Piramida Maslowa przedstawia hierarchię potrzeb człowieka. Decyduje ona o kolejności ich zaspokajania (A. Maslow, 2010). Zdaniem Maslowa zaspokojenie potrzeb niższego rzędu (potrzeb fizjologicznych i bezpieczeństwa) umożliwia realizację potrzeb wyższego rzędu.



Hierarchia potrzeb według A. Maslowa (A. Maslow, 2010):

– **FIZJOLOGICZNE –** zajmują najniższe miejsce w hierarchii potrzeb. Gdy nie są zaspokajane, wypierają pozostałe na dalszy plan, podporządkowując sobie całe zachowanie człowieka. Związane są z koniecznością prawidłowego funkcjonowania organizmu. Są to np.: głód, pragnienie, oddychanie, sen, doznania zmysłowe, seks.

– **BEZPIECZEŃSTWA –** pobudzają do działania w celu zapewnienia sobie warunków bezpieczeństwa teraźniejszego oraz możliwości zaspokojenia różnorodnych potrzeb w przyszłości. Wiążą się z poczuciem stałości, pewności, opieki, uniezależnienia od strachu, lęku, chaosu, z koniecznością porządku i prawa. Są to np.: bezpieczeństwo osobiste, socjalne, ochrona zdrowia fizycznego i psychicznego, pragnienie życia, praca w bezpiecznych warunkach, pragnienie stałej pracy.

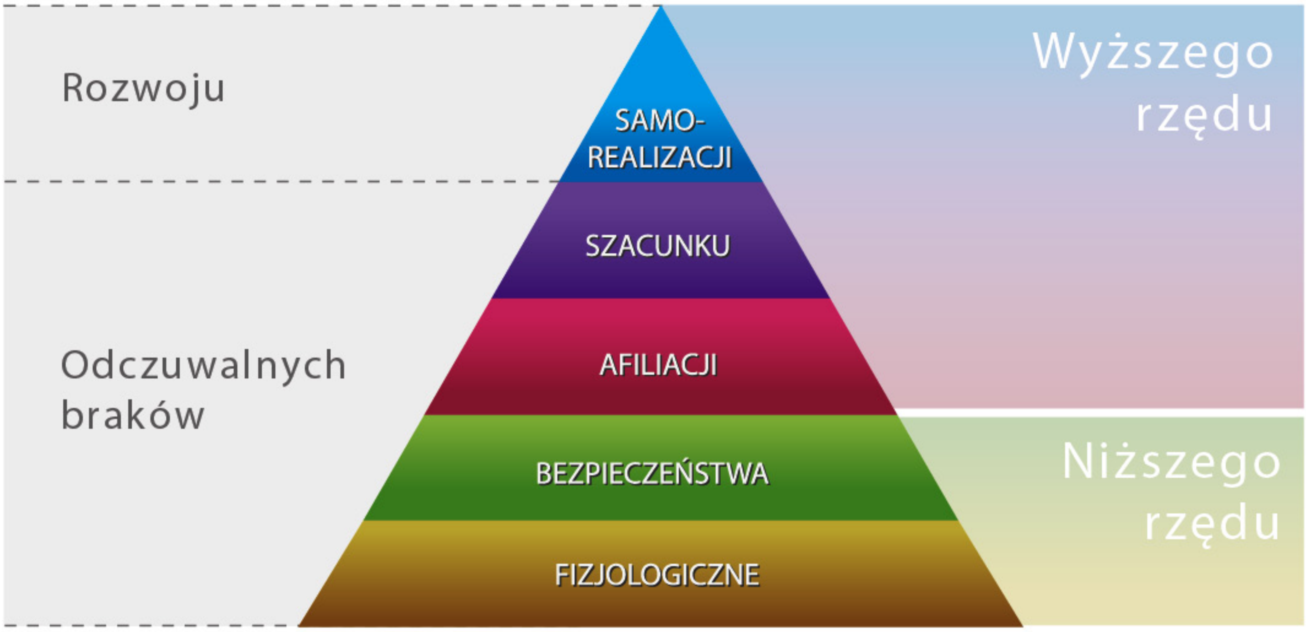
– **AFILIACJI (PRZYNALEŻNOŚCI) –** jest to jedna z ważniejszych potrzeb człowieka. Człowiek z natury jest istotą społeczną. Odczuwa więc wyraźne potrzeby przynależności do grupy oraz akceptacji ze strony jej członków. Przejawiają się one w dążeniu do tworzenia relacji z innymi ludźmi, kontaktu emocjonalnego. Należą do nich np.: potrzeba przynależności, akceptacji grupy, klasy, rodziny, pragnienie obcowania, nawiązywania kontaktów z innymi ludźmi, poczucie przyjaźni, miłości, czułości.

– **SZACUNKU –** dążenia do uzyskania prestiżu (we własnych oczach i w oczach innych ludzi, poprzez działania, kompetencję, dominację), niezależności, uznania społecznego, posiadania autorytetu, pragnienia akceptacji. Zaspokojenie tych potrzeb podnosi wiarę we własne możliwości, daje poczucie, że jest się potrzebnym i pożytecznym.

– **SAMOREALIZACJI –** ich zaspokojenie odgrywa ważną rolę w określeniu własnej tożsamości. Do tej grupy potrzeb zalicza się między innymi potrzeby intelektualne, zaspokajane przez nabywanie wiedzy o otaczającej rzeczywistości, potrzeby wykorzystywania posiadanych zdolności, potrzebę rozwoju osobistego oraz potrzebę awansu w pracy i wyrażenie własnego JA w działaniu.

Teoria hierarchii potrzeb Masłowa zakłada, że niezaspokojenie potrzeb niższego rzędu (fizjologicznych, bezpieczeństwa) uniemożliwia zaspokojenie potrzeb wyższego rzędu. W przypadku braku takiego zaspokojenia, potrzeby umieszczone niżej w hierarchii są w konflikcie z potrzebami znajdującymi się wyżej. Człowiek spragniony, głodny, jeśli w dodatku zagrożone jest jego życie, nie będzie zainteresowany osiągnięciem prestiżu społecznego czy awansu zawodowego. Jednak to dzięki realizacji potrzeb wyższego rzędu życie człowieka nabiera głębszego sensu (S. Garczyński, 1972).

Potrzeby:



Rys. 3 Piramida potrzeb

Źródło: Opracowanie własne

Indywidualizacja hierarchii potrzeb w czasie

W miarę rozwoju psychofizycznego człowieka powstają nowe potrzeby. Zależnie od warunków życia, wpływów środowiska, oddziaływania wychowawczego, a także indywidualnych właściwości układu nerwowego, potrzeby psychiczne i biologiczne mogą być mniej lub bardziej zróżnicowane. Motywy postępowania wynikają z chęci zaspokojenia potrzeb i można podzielić je na trzy grupy (S. Siek, 1984):

1. Motywy związane z **potrzebami biologicznymi,** takimi jak: unikanie bólu (niebezpieczeństwo), pragnienia głodu, snu, potrzebami seksualnymi.
2. Motywy związane z **potrzebami psychogennymi**, np.: ambicjonalnymi, osiągania władzy, pozycji społecznej, dominowania nad innymi, prestiżu, sukcesów, aspiracji, kontaktów uczuciowych, opieki itp.
3. Motywy **społeczne**, do których zlicza się np. poczucie obowiązku, solidarność z innymi, patriotyzmu, itd.

Pomimo dużej różnorodności potrzeb posiadają one pewne **cechy wspólne,** mianowicie – są obiektywne, nieograniczone pod względem rodzajów, ulegają nieustannym przekształceniom, powstają potrzeby nowe, w danym czasie są ograniczone w swojej pojemności, w miarę ich zaspokajania słabnie intensywność ich odczuwania, substytucyjne, komplementarne (uzupełniające się, np. piciu alkoholu często towarzyszy palenie tytoniu, piciu kawy – jedzenie słodyczy), mają społeczny charakter, zmieniają się w czasie i przestrzeni pod wpływem uwarunkowań społecznych i zwrotnie oddziałują na przemiany tych uwarunkowań, odnawialne – np. potrzeba jedzenia czy picia powtarza się w nas co jakiś czas[3]. Na hierarchię potrzeb wpływ ma również typ osobowości, tzn. dla osoby o usposobieniu melancholika najważniejsze będą potrzeby estetyczne, dla sangwinika – uznanie przynależność do grupy, choleryk natomiast przede wszystkim będzie dążył do zaspokojenia potrzeby dominacji.

3 www.mikroekonomia.wiedza.diaboli.pl/gospodarowanie/, 20.02.2013.

1.4. Grupy społeczne

Grupa społeczna jest to zbiór jednostek, w którym wspólnota pewnych istotnych społecznie cech wyraża się w tożsamości zbiorowej i towarzyszą temu kontakty, interakcje i stosunki społeczne w jej obrębie częstsze i bardziej intensywne niż z osobami z zewnątrz. Inaczej: zbiorowość ludzi, pomiędzy którymi występuje więź obiektywna, subiektywna i behawioralna (P. Sztompka, 2004).

▶ **Grupa społeczna** *to zbiorowość o wykrystalizowanych strukturach wewnętrznych, systemach wartości, trwałych komponentach świadomościowych i specyficznej kulturze.*

A.W. Small uważa, że grupa społeczna to wszelki zbiór osób, który możemy ujmować jako całość ze względu na jakiekolwiek godne uwagi stosunki zachodzące pomiędzy jego członkami (za: S. Ossowski, 1962).

Cechy grup społecznych

Zbiór co najmniej trzech osób (w niektórych ujęciach dwóch), którego członkowie współdziałają ze sobą w celu zaspokajania własnych potrzeb, charakteryzujący się trwałą strukturą i względnie jednolitym systemem norm i wartości (M. Michalczyk 2007)[4].

Cechy grupy społecznej:

- przynajmniej trzy osoby;

- wspólne wartości;

- odrębność;

- cele, interesy, potrzeby.

Grupa społeczna to przynajmniej trzy osoby połączone względnie trwałą więzią społeczną.

Polski socjolog, metodolog nauk społecznych i teoretyk kultury (1897-1963)

Według S. Ossowskiego więź społeczna jest akceptowanym przez jednostkę poczuciem przynależności, uczestnictwa i łączności z członkami określonej zbiorowości.

Więzi mogą mieć charakter **naturalny** (np. więzi rodzinne) i **zrzeszeniowy** (np. więzi członków organizacji społecznej, więzi państwowe wynikające z norm prawnych – statut partii, kodeks pracy, konstytucja). Inny rodzaj więzi oznaczają **więzi stanowione** – narzucone są grupie, np. żołnierze odbywający służbę wojskową.

Grupa społeczna ma określone cele, potrzeby, interesy i wartości. Spośród innych grup społecznych wyróżnia się odrębnością, na przykład: zajmowanym terytorium, wielkością, systemem wartości oraz normami społecznymi.

Etapy rozwoju grup społecznych

Pierwszym etapem rozwoju grupy jest jej **formowanie**. Polega ono na wzajemnym poznawaniu się i określaniu swych ról w grupie. Członkowie odnoszą się do siebie z rezerwą, lekką nieufnością, starają się jednocześnie wypaść jak najlepiej. Drugim etapem jest **konfrontacja**. Na tym poziomie kształtowania się grupy często dochodzi do konfliktów i spięć. Wiele kontrowersji wzbudza planowanie działań, ustalanie priorytetów oraz

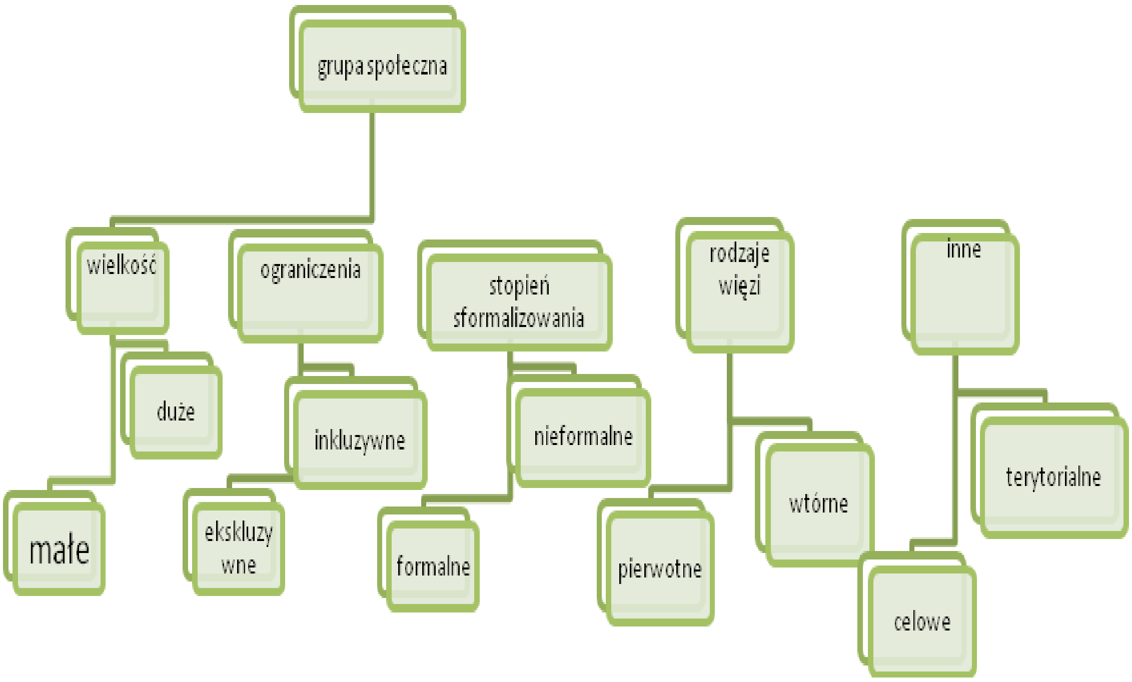
4 www.darsa.pl/edukacja/1/16/Technik_bezpieczenstwa_i_higieny_pracy_315%5B01%5D.Z3.03_u.pdf, 12.03.2013.

podział zadań. Należy uważać by nieporozumienia nie przerodziły się w gniew, wywołując zniechęcenie całego zespołu.

Schemat 1. Etapy rozwoju grupy

Źródło: Opracowanie własne

Kolejnym etapem jest **stabilizacja**. Kończy ona konflikty, ponieważ grupa wypracowała już metody współdziałania i koncentruje się głównie na pracy, osiągnięciu założonego celu. Ostatnim etapem rozwoju grupy jest **współdziałanie**. Zespół na bieżąco rozwiązuje konflikty. Zgłaszane pomysły są na poziomie merytorycznym i osiągają najlepszą efektywność.



Schemat 2. Kryteria klasyfikacji grup społecznych

Źródło: Opracowanie własne

Grupy społeczne możemy podzielić ze względu na:

a) wielkość:

– *grupy małe* – kilku- lub kilkunastoosobowe, umożliwiają bezpośrednie stosunki między członkami grupy (np.: rodzina, grupy rówieśnicze, klasa szkolna);
– *grupy duże* – sytuacja ich jest złożona, składają się z podgrup, liczebność grupy uniemożliwia bezpośrednie stosunki między członkami (np.: klasa społeczna, grupa zawodowa – lekarze, nauczyciele);

b) ograniczenia dotyczące liczby członków, możliwości uczestniczenia:

– *grupy ekskluzywne* (zamknięte) – stosują liczne i surowe kryteria przyjęcia nowych członków (np.: rodzaj wykonywanego zawodu, majątek, pochodzenie społeczne, subkultury);
– *grupy inkluzyjne (otwarte)* – dla wszystkich, przynależność do grupy nie jest ograniczona określonymi kryteriami (np.: uczestnicy manifestacji, widownia w teatrze, kibice);

c) stopień sformalizowania:

– *grupy formalne* – struktura, cel, normy są prawnie określone na przykład w statucie lub regulaminie, mają charakter bezosobowy (np.: partie polityczne, stowarzyszenia, fundacje);
– *grupy nieformalne* – funkcjonują według norm zwyczajowych, cechują się więzi o charakterze osobistym i nieformalną strukturą wewnętrzną (np.: subkultury młodzieżowe, tzw. szalikowcy);

d) rodzaje więzi społecznych:

– *pierwotne* – małe grupy, członkowie mają bliskie, osobiste i trwałe związki, więzi uczuciowe lub emocjonalne, stanowią podstawę rozwoju społecznego jednostki, (np. rodzina);
– *wtórne* – zazwyczaj większe, a ich trwałość ma charakter okresowy, powstają w określonym celu, związki między członkami nie są osobiste, zbiorowości te dążą do wykonania specyficznego zadania i nie wywierają trwałego wpływu na tworzące je jednostki (np.: ugrupowania, partie polityczne).

Wyróżniamy też:

– *grupy celowe* – tworzone według ściśle określonych zadań (np.:. osoby opracowujące program wycieczki, sztab antykryzysowy);
– *grupy terytorialne* – utworzone przez mieszkańców danego terenu (np.: miasta, wsi);
– klasy i warstwy społeczne.

1.5. Role społeczne

▶ **Świat jest teatrem, aktorami ludzie, którzy kolejno wchodzą i znikają.**

Wiliam Szekspir

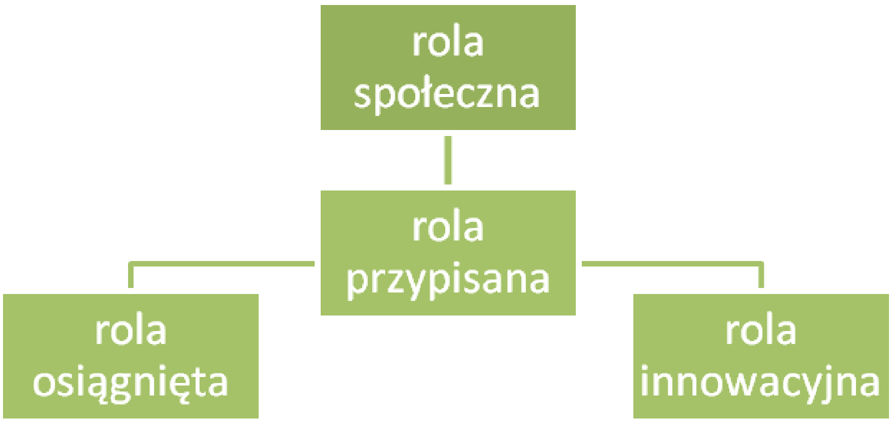
Każdy człowiek jest swojego rodzaju aktorem, ponieważ na każdym etapie życia odgrywa przypisaną mu rolę. Sposób odtwarzania przypisanej roli określają normy społeczne, wzorce zachowań, przepisy prawa.

Rola społeczna jest to zestaw wskazówek, jak należy się zachować w danej sytuacji. Według R. Lintona **rola społeczna** to zestaw praw i obowiązków przypisanych określonej pozycji społecznej i wiążących każdego, kto tę pozycję zajmuje, bez względu na cechy osobiste (za: R.K. Merton, 2002).

B. Szacka (2008) zauważa, że rolę społeczną określa się w odniesieniu do pozycji w dwojaki sposób. Po pierwsze, **rola społeczna** to **zespół praw i obowiązków związanych z daną pozycją. P**o drugie, jako **schemat zachowania związanego z pozycją, scenariusz pozycji**. Role w grupach o więzach naturalnych mają charakter nieformalny. Normy zwyczajowe określają role ojca, matki, dziecka. Od właściwego wypełniania roli zależy pozycja człowieka w społeczności. Ludzie uczą się pełnienia swoich ról w rodzinie, grupie rówieśniczej, środowisku lokalnym, pod wpływem mediów.

Do właściwego funkcjonowania grup społecznych, zwłaszcza o charakterze formalnym, takich jak przedsiębiorstwo czy szkoła, niezbędne są role organizacyjne wynikające ze struktury instytucji. Zaliczamy do nich rolę dyrektora, kierownika, pracownika.

Wyróżniamy trzy rodzaje ról społecznych. *Rola osiągnięta* to rola pełniona w wyniku podjętych wyborów i decyzji. Są to oczekiwania dotyczące zachowań jednostki, zdeterminowane tym, co w świadomy sposób robi bądź zrobiła (np. studiowanie na uczelni wyższej lub podjęcie pracy na określonym stanowisku).

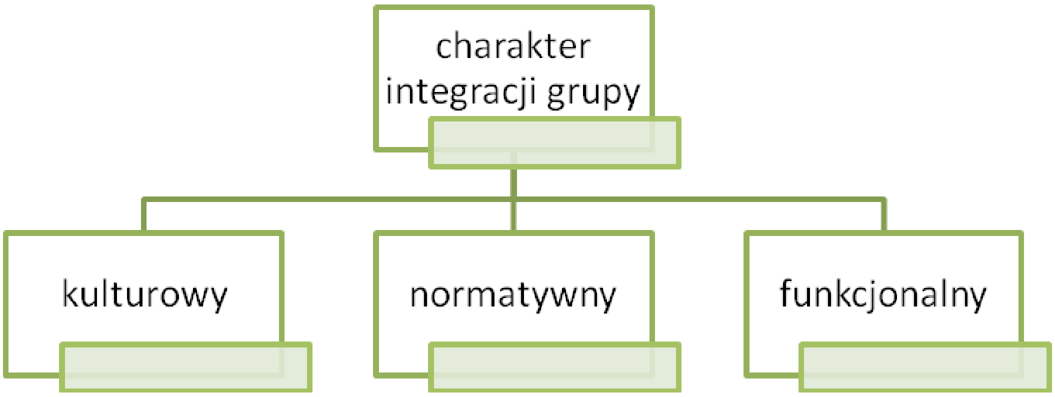


Schemat 3. Rodzaje ról społecznych

Źródło: Opracowanie własne

Rola przypisana pełniona jest przez jednostkę w wyniku posiadania przez nią (niezależnie od jej woli) cech i właściwości, takich jak: wiek, płeć czy rasa. Źródłem ról przypisanych jest kultura. Natomiast r*ola innowacyjna* to taka, której przypisane są cechy innowacyjności i kreatywności. Wykonawca roli powinien je prezentować, bez względu na cechy indywidualne. Może to być np. artysta, uczony, wynalazca, dyktator mody, mędrzec itp. Niedopełnianie obowiązku innowacyjności może skutkować pozbawieniem jednostki prawa do pełnienia tego rodzaju roli.

W czasie „wykonywania" swojej roli mogą powstać problemy związane z funkcjonowaniem, odnalezieniem się w przypisanych rolach. Często pojawia się ***ambiwalencja,*** czyli wewnętrzne uczucie niepokoju i dyskomfortu związane z przyjmowaniem nowej roli. Ambiwalencja jest często powodem rezygnacji z pełnienia danej roli. Zjawisko nazywane ***przeciążeniem rolą*** występuje, gdy dana osoba nie jest w stanie wypełniać wszystkich obowiązków związanych z pełnionymi rolami. Nie występuje tutaj wykluczanie się ról czy konflikt między rolami, a jedynie mnogość zadań do realizacji. Często powodem pojawiania się przeciążenia jest niewspółmierność kwalifikacji i predyspozycji w stosunku do pełnionej roli lub nadmiernie złożona i rozbudowana rola. Występuje również ***konflikt wewnętrzny w obrębie jednej roli***. Ma on miejsce, gdy istnieje rozbieżność pomiędzy wyobrażeniem jednostki a oczekiwaniami społecznymi. ***Konflikt zewnętrzny między różnymi rolami*** występuje natomiast, gdy zachowania związane z pełnieniem dwóch lub więcej ról przez jedną i tę samą osobę wzajemnie się wykluczają. Konflikt ten rozgrywa się w świadomości osoby, która musi pogodzić i dopasować do siebie wykonywanie sprzecznych ról. Należy też wspomnieć o ***konflikcie ról o charakterze interpersonalnym***. Jest to typowy konflikt występujący między osobami, a nie rolami. Pojawia się w sytuacji, gdy poszczególne jednostki nie mogą uzgodnić swoich ról i podzielić je między siebie**. *Konflikt ról o charakterze etycznym*** pojawia się wówczas, gdy jednostka jest zmuszona do wyboru wartości wynikającej z pełnienia danej roli, ale wartość ta jest sprzeczna z jej poczuciem etyki i moralności (P. Sztompka, 2005).



Schemat 4. Charakter integracji grupy

Źródło: Opracowanie własne

Zintegrowanie grupy potrzebne jest do prawidłowego funkcjonowania. Integracja może mieć charakter kulturowy, normatywny oraz funkcjonalny. Kulturowa polega na preferowaniu przez członków grupy podobnego stylu życia, formy spędzania wolnego czasu. Normatywna opiera się na uznawaniu tych samych lub podobnych norm i wartości. Funkcjonalna natomiast dotyczy stopnia zależności pomiędzy współdziałającymi w grupie jednostkami. Może być tak, że grupa jest bardzo zintegrowana, wtedy „panujące" w niej zależności są bardzo duże. Czynnikiem dezintegrującym grupę jest samowystarczalność poszczególnych członków.

Funkcjonowanie grupy zależy również od intensywności kontaktów społecznych, integracji komunikacyjnej.

Schemat 5. Zalety pracy grupowej *Źródło: Opracowanie własne*

Zasady pracy grupowej – to przede wszystkim wyłonienie wspólnych celów, działań. W przypadku grup społecznych może pojawić się myślenie grupowe, dla grupy ważniejsze będzie wówczas zachowanie spójności i solidarności niż realistyczna ocena sytuacji. Najlepsze wyniki daje praca w małych, kilkuosobowych grupach. W przypadku dużych grup może okazać się, że nie wszyscy członkowie wykazują się takim samym zainteresowaniem, poza tym utrudniona jest kontrola wykonywania zadań.

Nie ma osoby, która by wiedziała wszystko, dlatego uważa się, iż w grupie można dokonać więcej. Podczas formowania się grupy określane się role poszczególnych członków. Najważniejszą rolę odgrywa lider. Przejmuje on przywództwo i kieruje pracą. Powinien wyróżniać się zaangażowaniem, pracowitością, umiejętnością kierowania zespołem oraz wiarą we własne siły.

Rys. 4. Cechy lidera

Lider powinien wyróżniać się następującymi zaletami:

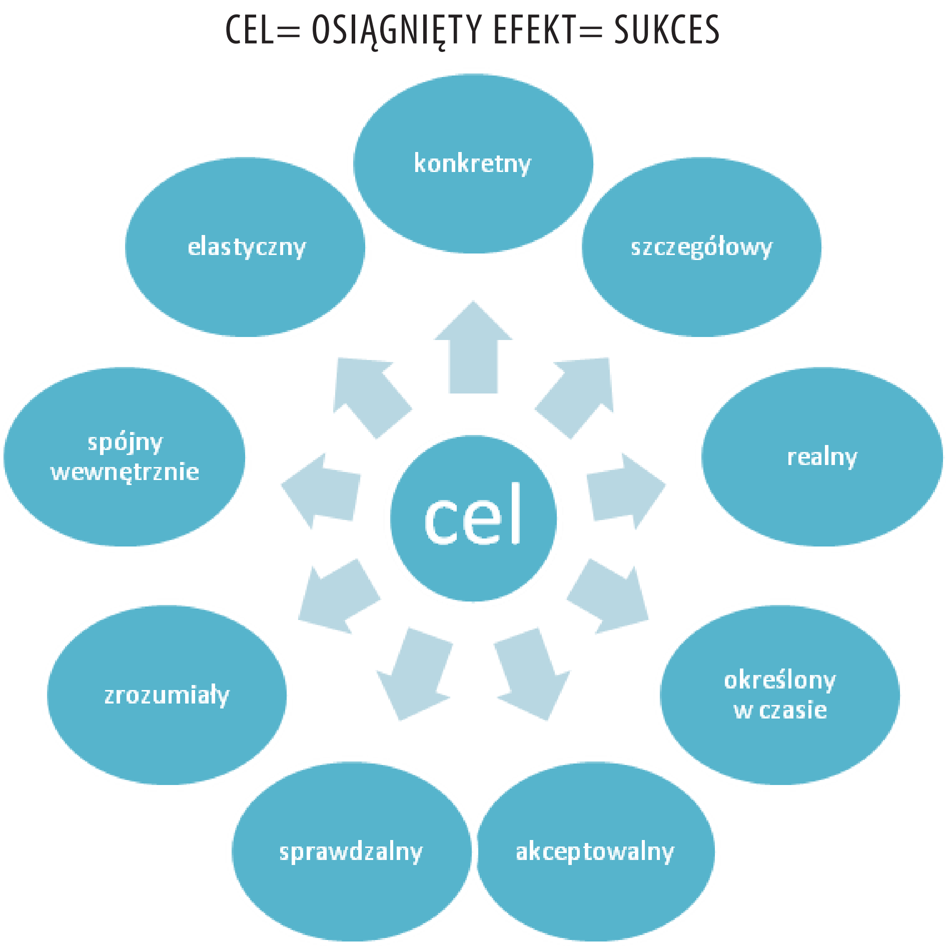
- komunikowanie się – musi posiadać umiejętności przekazywania informacji członkom grupy i rozumie komunikaty skierowane do niego
- wiara w siebie – samoakceptacja
- wyrazistość – osobowość i postawy muszą być jednoznacznie odbierane przez otoczenie
- wiarygodność – zaufanie grupy
- praca w zespole – umiejętność przydzielenia zadań i ich kontroli, w sytuacji konfliktowej powinien umieć załagodzić spór
- odwaga – umiejętność podejmowania decyzji w sytuacjach ryzykownych
- odpowiedzialność – gotowy jest ponieść konsekwencje swoich decyzji
- spostrzegawczość – dobry obserwator
- koncentracja – koncentracja uwagi na celach zasadniczych
- zaangażowanie poświęca więcej czasu na realizację zadań grupy niż pozostali członkowie zespołu
- wizja – myśli w sposób twórczy

1.6. Analiza SWOT osoby

▶ **Wygrywa ten, kto ma jasno określony cel i nieodparte pragnienie, aby go osiągnąć.**

Napoleon Hill

Każdy człowiek pragnie osiągnąć sukces, zrealizować cel i dąży do doskonałości zarówno w życiu prywatnym, jak i zawodowym. Dlatego pogłębiamy wiedzę, zdobywamy nowe doświadczenia, wyznaczamy sobie cele.



Schemat 6. Cechy celu

Źródło: Opracowanie własne

Dla osoby przedsiębiorczej bardzo ważna jest umiejętność twórczego myślenia oraz gotowość do podejmowania ryzyka. Odpowiedzialność jest bardzo ważną cechą osoby przedsiębiorczej. Dlatego gotowość do podjęcia ryzyka (osiągnięcie celu) powinna być oparta na analizie zysków i strat. Do tego możemy posłużyć się analizą SWOT. Jej zastosowanie jest bardzo szerokie. Może służyć także do oceny aktualnej sytuacji pod kątem: swojej osobowości, własnej osoby, osiągnięcia celu, wyboru kierunku dalszej nauki i zawodu, rozwoju przedsiębiorstwa, wprowadzenia nowych rozwiązań, planów rozwoju rynku, miasta, gminy.

Nazwa SWOT pochodzi od pierwszych liter angielskich słów:

- **S** – *strengths (mocne strony);*
- **W** – *weaknesses (słabe strony);*
- **O** – *opportunities (szanse);*
- **T** – *threats (zagrożenia).*

Tabela 2. Schemat analizy SWOT

S mocne strony	W słabe strony
O szanse, możliwości	T zagrożenia

Źródło: Opracowanie własne

Celem analizy SWOT jest identyfikacja naszych mocnych i słabych stron, szans i zagrożeń. Stanowi ona narzędzie weryfikacji pomysłu, identyfikacji wąskich gardeł (czyli krytycznych miejsc, zdarzeń, które hamują całość działań) i największych atutów. Pozwala również na chłodniejszą i dogłębniejszą weryfikację projektu, organizacji, inwestycji czy pomysłu, dzięki czemu podjęte działania są bardziej przemyślane.

Analizę SWOT należy przeprowadzić obiektywnie i racjonalnie. Szczególną uwagę należy zwrócić na mocne strony, zasoby są naszą potęgą. To od nich zależy osiągnięcie sukcesu.

Tabela 3. Analiza SWOT dla osoby

Mocne strony – Twoje zalety, odpowiedz na pytania: Co umiem dobrze zrobić?, W czym jestem lepszy od innych?, Jakie posiadam umiejętności, jakie są moje atuty, cechy osobowościowe, znajomość języków obcych, zasad programowania, wszelkie pozytywy?	Słabe strony – wszystko co nas ogranicza, brak czasu, słabości, coś co powinieneś umieć a nie potrafisz, wszelkie obawy, cechy osobowości przeszkadzające w osiąganiu celu np. lenistwo, zła organizacja, nie systematyczność.
Szanse – czynniki zewnętrzne, które mogą korzystnie wpłynąć na rozwój uwarunkowania, przy umiejętnym wykorzystaniu mogą wpływać pozytywnie na osiągnięcie celu.	Zagrożenia – czynniki zewnętrzne, które są w stanie utrudnić realizację założonego celu, wszelkie przeszkody, np.: wzrost wymagań pracodawców, wzrost bezrobocia, wzrost konkurencji.

Źródło: Opracowanie własne

Analiza SWOT pozwala usystematyzować wiedzę na dany temat, obrazuje nowe możliwości lub zagrożenia, uwypukla pewne kwestie a przede wszystkim:

- racjonalizuje pomysł;
- „nakazuje" zapoznać się z otoczeniem;
- ocenia obecne trendy;
- ocenia mocne i słabe strony (swoje, przedsięwzięcia);
- weryfikuje założenia projektowe, cel.

Warto w tym momencie wspomnieć o zasadzie Pareto (P. Kotler, 1994).

- *80% efektów generowanych jest przez 20% nakładów*

Zasada ta mówi, że 80% efektów generowanych jest przez 20% nakładów. W związku z tym należy skupić się na rzeczach najważniejszych. Czasami nie warto być najlepszym we wszystkim. W praktyce jest to prawie niemożliwe. Dlatego tak ważne jest poznanie i ocena swoich mocnych stron, uświadomienie sobie, w czym jesteśmy dobrzy oraz co sprawia nam przyjemność i satysfakcję.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Wyjaśnij, co sądzisz o określeniu „potrzeby człowieka są ograniczone".
2. Jakie są korzyści wynikające z planowania działań?
3. Określ swój typ osobowości.
4. Jakie cechy predysponują osobę do roli lidera?
5. Co to jest sukces, z jakich elementów się składa?
6. Co nam daje praca w grupie? Jakie dostrzegasz korzyści z prac grupowych?
7. Przedstaw drogę dochodzenia własnych praw w roli:
    a) członka zespołu;
    b) pracownika;
    c) konsumenta.
8. Podaj i omów wskazówki dotyczące podejmowania na podstawie posiadanych informacji racjonalnych decyzji i oceny ich skutków.

Bibliografia:

Garczyński S., *Potrzeby psychiczne – niedosyt, zaspokojenie*, Warszawa 1972.

Giddens A., *Socjologia*, Warszawa 2008.

Goodman N., *Wstęp do socjologii*, Poznań 2001.

Kotler P., *Marketing. Analiza, planowanie, wdrożenie i kontrola*, Warszawa 1994.

Kozielecki J., *Koncepcja transgresyjna człowieka. Analiza psychologiczna*, Warszawa 1987.

Lisowska E., *Przedsiębiorczość wobec bezrobocia kobiet i ich dyskryminacji na rynku pracy,* Warszawa 1999.

Maslow A., *Motywacja i osobowość*, Warszawa 2010.

Merton R. K., *Teoria socjologiczna i struktura społeczna*, Warszawa 2002.

Ossowski S., *O osobliwościach nauk społecznych*, Warszawa 1962.

Pomykało W., *Encyklopedia biznesu*, Warszawa 1995.

Sagan I., Szmytkowska M., Masik G., Postawy przedsiębiorcze mieszkańców Gdyni, w:: *Rola przedsiębiorczości w kształtowaniu społeczeństwa informacyjnego. Przedsiębiorczość – Edukacja*, Warszawa – Kraków 2009.

Siek S., *Rozwój potrzeb psychicznych mechanizmów obronnych i obrazu siebie*, Warszawa 1984.

Strelau, J., *Psychologia temperamentu*, Warszawa 1998, ss. 26-32.

Szacka B., *Wprowadzenie do socjologii*, Warszawa 2008.

Sztompka P., *Socjologia*, Kraków 2004.

Wiatrak A., Pojęcie przedsiębiorczości jej cele i rodzaje: *Uwarunkowania rozwoju przedsiębiorczości – szanse i bariery*, Tarnobrzeg 2003.

Zimmerer T.W., Scarborough N.M., *Entrepreneuship and New Venture Formation*, New Jersey 1996.

Znaniecki F., *Ludzie teraźniejsi a cywilizacja przyszłości*, Warszawa 2001.

Netografia:

Michalczyk M., *Zarządzanie zasobami ludzkimi w procesie pracy 315[01].Z3.03,* Instytut Technologii Eksploatacji – Państwowy Instytut Badawczy, Radom, 2007, www.darsa.pl/edukacja/1/16/Technik_bezpieczenstwa_i_higieny_pracy_315%5B01%5D.Z3.03_u.pdf, 12.03.2013.

www.mikroekonomia.wiedza.diaboli.pl/gospodarowanie/,20.02.2013.

2. Komunikacja – aspekt psychopedagogiczny

> **Korzystaj z każdej okazji do ćwiczenia umiejętności porozumiewania się, aby kiedy nadarzy się sposobność, mieć dar, styl, wyrazistość, przejrzystość i emocje do wpływania na innych ludzi.**

Jim Rohn

2.1. Pojęcie komunikacji i jej rodzaje

> **Komunikacja pracuje dla tych, którzy nad nią pracują.**

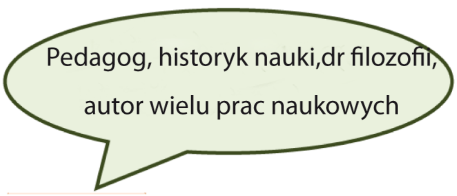
John Powell

Żyjąc w określonej zbiorowości ludzkiej, stale poszukujemy kontaktu z jej członkami, szukamy porozumienia. Umiejętność porozumiewania się odgrywa kluczową rolę w wszelakich relacjach międzyludzkich. Bez umiejętności porozumiewania się, bez komunikacji, nie da się normalnie funkcjonować, nie można osiągnąć zamierzonego celu, niemożliwe jest także osiągnięcie szeroko rozumianego sukcesu. Wchodząc w relacje z innymi, przekazujemy bądź odbieramy jakieś informacje, ustosunkowujemy się do nich, modyfikujemy pod ich wpływem swoje zachowania, opiniujemy je i wartościujemy. Od tego, w jaki sposób nawiązujemy relacje i uczestniczymy w życiu społecznym, zależy nasze zadowolenie bądź niezadowolenie z życia, osiągnięcie sukcesu lub życiowa porażka, bliskość i przyjaźń z innymi lub osamotnienie (E. Kosińska, B. Zachara, 2003).

Czym zatem jest *komunikacja* w jej definicyjnym ujęciu i jakie rodzaje komunikacji można wymienić?

Pojęcie komunikacji

Pojęcie *komunikacja* jest wieloznaczne. Odnosi się na przykład do łączności, transportu, handlu, ale my znaczenie komunikacji rozpatrywać będziemy od strony nauk społecznych. **Komunikacja** (łac. *communication*) jest to proces zachodzący we wszystkich sytuacjach społecznych, w którym to można wyróżnić trzy zasadnicze elementy: **nadawców (wytwórców), komunikaty (kody) i odbiorców** (G. Marshall, 2004).



W. Okoń (2007) określa **komunikację** jako proces komunikowania, wymiany i interakcji. Podstawowy model komunikacji to dwaj partnerzy, z których jeden informację nadaje, a drugi tę „ukrytą" wiadomość odbiera i odczytuje. Wszelkie informacje mogą być przekazywane za pośrednictwem **trzech kanałów komunikacyjnych**: optycznego, akustycznego i wizualnego – szerzej na temat kanałów komunikacyjnych w podrozdziale 2.2..

Pojęciem zbliżonym, a właściwie zazębiającym się z *komunikacją,* jest pojęcie *komunikacja interpersonalna.*

Profesor komunikacji w Wheaton College w Illinois, gdzie pracuje od wielu lat i gdzie został wybrany Nauczycielem Roku

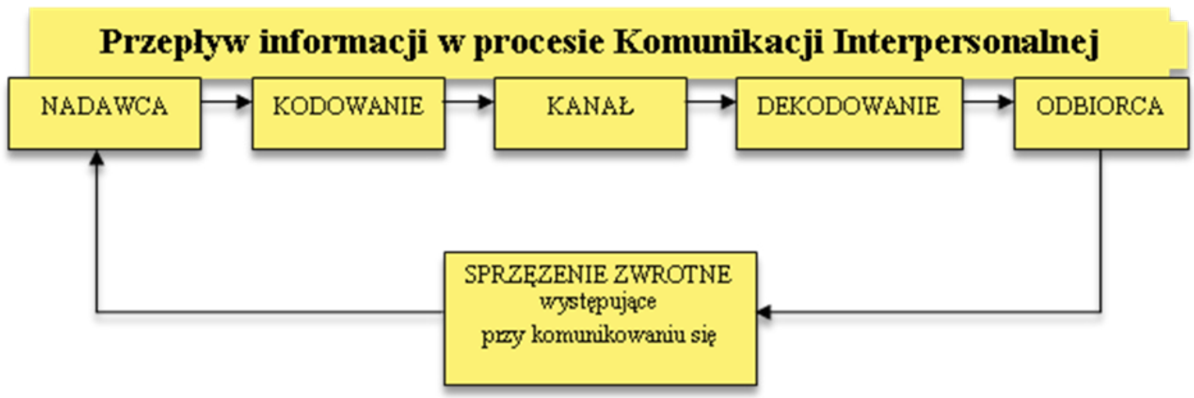
E. Griffin (2003) stwierdził, że komunikacja interpersonalna jest dwustronnym ciągłym procesem, w którym współpracują dwie strony, tworząc bądź modyfikując „obrazy", powstające w umysłach uczestników tego procesu. Komunikacja między dwiema stronami zaczyna się wtedy, gdy powstałe „obrazy" przynajmniej częściowo się pokrywają. Efektywność komunikacji wzrasta wraz ze zwiększaniem się pokrywających się „obrazów".

Komunikowanie się niewątpliwie jest koniecznością. Nasi praprzodkowie porozumiewali się ze sobą na długo przed tym, zanim ludźmi zostali. Porozumiewali się nie po to, aby zapewnić sobie towarzyski sukces, lecz po to, żeby po prostu przeżyć. To, że proces komunikacji jest starszy od samej ludzkości, nie znaczy wcale, że dobrze go rozumiemy. Czasami wprost przeciwnie. Komunikacja jest bowiem procesem złożonym i wieloaspektowym, zależnym często od wielu czynników zewnętrznych (M. Tokarz, 2006).

Aby komunikacja interpersonalna mogła zaistnieć, potrzebne są cztery ogniwa:

- osoba przesyłająca informację, czyli **nadawca;**
- osoba, do której daną informację kierujemy, czyli **odbiorca;**
- sposób przekazywania i odczytywania informacji, czyli **kod;**
- **kanał**, przez który przepływa informacja.

Przepływ informacji podczas komunikacji interpersonalnej ilustruje poniższy schemat (A. Augustynek, 2009).



Schemat 7. Przepływ informacji podczas komunikacji interpersonalnej
Źródło: A. Augustynek, Komunikacja interpersonalna, www.psychologia.net.pl, 23.02.2013

Rodzaje komunikacji

Mówi się o różnych rodzajach przekazywania informacji. Oprócz komunikacji interpersonalnej wymienia się: komunikację społeczną, werbalną, niewerbalną, grupową, językową, międzykulturową, symboliczną, marketingową, literacką, perswazyjną, wokalną, internetową…

Już sam fakt funkcjonowania w naszej kulturze tylu rodzajów komunikacji ludzkiej, może podkreślać jej ogromne, ponadczasowe znaczenie. Ważna jest już nie tylko chęć przetrwania, jak u naszych praprzodków, ale przede wszystkim pragnienie bycia zrozumianym i chęć zaistnienia na określonej płaszczyźnie (w grupie rówieśników, w społeczności szkolnej, w rodzinie itp.).

W podrozdziałach niniejszego rozdziału zaprezentowane zostały dwa zasadnicze rodzaje komunikacji interpersonalnej: **komunikacja werbalna i niewerbalna** oraz **komunikacja marketingowa.**

Komunikacja werbalna

Komunikacja werbalna polega na wyrażaniu własnych celów oddziaływań przy użyciu akceptowanego w danej zbiorowości kodu językowego. Inaczej mówiąc, jest to porozumiewanie się za pomocą słów. Ważną rolę w procesie komunikowania werbalnego odgrywa **akcent** (badania dowiodły, że jest on ważniejszy niż treść wypowiedzi), **stopień płynności mowy** (który świadczy o kompetencji i odpowiedzialności rozmówcy) oraz **stopień wypowiedzi,** który uzależniony jest między innymi od związków międzyludzkich (R. Podgórski, 2006).

Źródłem informacji dla odbiorcy komunikatów werbalnych jest treść komunikatu – słowa – oraz tak zwane **zachowania parajęzykowe**, do których zalicza się szybkość mówienia, tembr głosu i głośność. Aby komunikacja werbalna przyniosła zamierzony skutek – co oznacza wzajemne zrozumienie się – uczestnicy procesu komunikacji muszą wykazać się umiejętnością mówienia oraz aktywnego słuchania. Umiejętności te zostaną omówione w dalszej części rozdziału (J. Siuta, 2005).

Mowa ludzka w „świecie" komunikowania miała i ma znaczenia podstawowe ze względu na swą uniwersalność i zdolność wyrażania abstrakcyjnych myśli. Jest naturalnym i bezpośrednim środkiem przekazu informacji i – co ważne – spersonalizowanym, czyli przypisanym do osoby. Należy jednak do nietrwałych środków komunikowania. Słowo mówione ma bowiem ograniczony zasięg rozchodzenia się w przestrzeni, jest ulotne i często ulega zniekształceniom (B. Szlachta, 2004).

W literaturze przedmiotu, obok określania, czym jest komunikacja werbalna, zwraca się uwagę na tak zwane **zachowania werbalne.** Obejmują one wszelkie reakcje werbalne, takie jak: mówienie, reagowanie na słowa oraz zapamiętywanie treści werbalnych. Natomiast **wyobrażenie werbalne** – kolejne pojęcie związane z tym rodzajem komunikacji– to przekodowanie obrazu wzrokowego na formę słowną (A. Reber, E. Reber, Warszawa 2008).

Komunikacji werbalnej towarzyszy najczęściej komunikacja niewerbalna, której komponenty potwierdzają komunikaty zwerbalizowane.

Komunikacja niewerbalna

Wszystkie aspekty komunikacji wyrażane bez posługiwania się językiem mówionym to **komunikacja niewerbalna.** Są to takie elementy, które służą przekazywaniu informacji, czyli: pozycja ciała, gesty, wyraz twarzy, mimika, spoglądanie oraz czynniki kontekstowe (A. Reber, E. Reber, Warszawa 2008).

Język słowny – werbalny – i jego złożona struktura nie jest więc jedynym narzędziem, za pomocą którego ludzie wyrażają swoje uczucia i myśli. Co więcej, znawcy tej problematyki często wskazują na duże znaczenie komunikacji niewerbalnej i niekiedy jej przewagę nad komunikacją werbalną.

ludzie wyrażają swoje uczucia i myśli. Co więcej, znawcy tej problematyki często

Psycholog, profesor emerytowany Uniwersytetu Kalifornijskiego w Los Angeles. Znany w szczególności z prac nad rolą i istotą komunikacji niewerbalnej w relacjach międzyludzkich

A. Mehrabian sformułował prowizoryczny wzór ilustrujący wpływ każdego z kanałów na ogólną interpretację przekazu informacji. Poniżej został ów wzór nakreślony.

OGÓLNE UCZUCIE =
7% UCZUCIA WYRAŻANEGO SŁOWAMI

+ 38% UCZUCIA WYRAŻANEGO GŁOSEM
+ 55% UCZUCIA WYRAŻANEGO MIMIKĄ

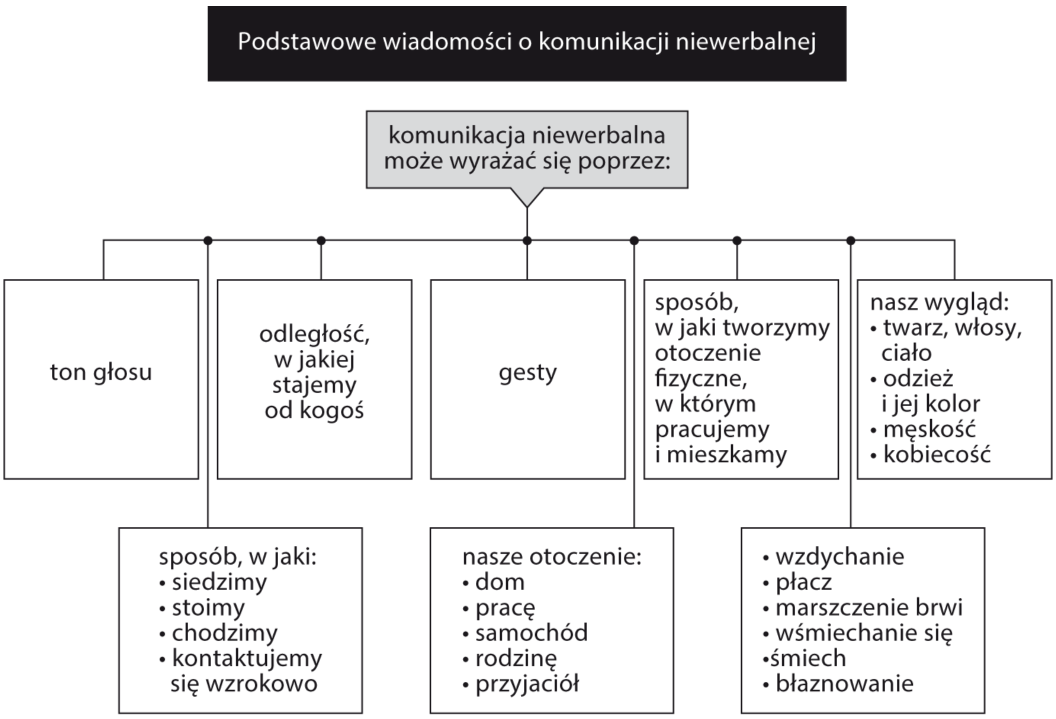
Powyższe równanie wskazuje, iż ludzie najbardziej ufają twarzy, a najmniej słowom oraz że język słów – tak często odbierany, jako jedyny sposób porozumiewania się – z gruntu jest fałszywy.

Przez „werbalny kanał" przechodzą tak zwane niezbite fakty, zaś przez „kanał niewerbalny" transponowane jest to, co chcemy przekazać ostatecznie, dodając postawę, gest, mimikę i nastrój.

Omawiając problematykę komunikacji niewerbalnej, nie sposób pominąć pewnej płaszczyzny, którą jest **ekspresja niewerbalna,** rozumiana jako forma porozumiewania skupiająca się na wykorzystywaniu zachowań niewerbalnych będących sposobem przekazu informacji. Wyróżnić można cztery zasadnicze typy ekspresji niewerbalnej:

- **mimika twarzy** („mowa" twarzy);
- **kinezjetyka** (zajmująca się pozycją ciała, postawą, gestami i innymi ruchami ciała);
- **proksemika** (zajmująca się przestrzenną odległością między osobami wchodzącymi w interakcje oraz ich stosunkiem do siebie, który przejawia się w kontakcie wzrokowym i dotykowym);
- **parajęzyk** (obejmuje głosowe, ale niewerbalne aspekty porozumiewania się: wysokość i natężenie głosu, tempo mówienia, wahania, błędy oraz wszelkie zakłócenia płynności mowy, a także dźwięki niejęzykowe, np. ziewanie, śmiech) (L. Tkaczyk, Wrocław 1999).

Komunikacja niewerbalna może wyrażać się w sposób, który ilustruje poniższy schemat.



Schemat 8. Komunikacja niewerbalna – wiadomości kluczowe
Źródło: Sienkiewicz N., Komunikacja międzyludzka, malejew.w.interia.pl, 28.02.2013

Komunikacja niewerbalna stanowi najbogatsze źródło informacji na temat stanów emocjonalnych uczestników interakcji. Sygnały niewerbalne są solidnymi i stabilnymi wskaźnikami ludzkich emocji (D. Leathers, Warszawa 2007).

W komunikacji międzyludzkiej bardzo ważna jest zgodność komunikatów werbalnych i niewerbalnych. Dwa różne komunikaty, chociaż zawierają się w tych samych słowach, mogą znaczyć zupełnie co innego. O czym należy pamiętać.

Ważnym rodzajem komunikacji – biorąc pod uwagę treść zagadnień niniejszego podręcznika – jest **komunikacja marketingowa.** Stanowi ona istotny instrument strategii marketingowej i służy realizacji celów rynkowych przedsiębiorstwa. Można stwierdzić, że przedsiębiorstwo istnieje właśnie dzięki przekazywaniu informacji i komunikowaniu się. Komunikacja marketingowa obejmuje zespół środków i działań, za pośrednictwem których, przedsiębiorstwo przekazuje na rynek między innymi informacje charakteryzujące firmę, jej produkt, a także kształtuje potrzeby nabywców, ukierunkowuje popyt. Komunikacja marketingowa jest jednym z wielu procesów informacyjnych, realizowanych w przedsiębiorstwie i poprzez przedsiębiorstwo w jego otoczeniu rynkowym. Istota komunikacji marketingowej sprowadza się do systemu, czy też procesu, przekazywania informacji (treści symbolicznych) pomiędzy przedsiębiorstwem (nadawcą) a jego otoczeniem (odbiorcą), poprzez kanał i środki komunikowania. Proces ten obejmuje **6 podstawowych elementów**:

- uczestników komunikacji (nadawcę i odbiorcę);
- przekaz (komunikat);
- kanał przekazu;
- szumy (zakłócenia);
- sprzężenie zwrotne;
- kontekst komunikacji.

W komunikacji marketingowej wykorzystywane mogą być wszystkie dostępne kanały (sensoryczne i medialne), w dowolnej konfiguracji i proporcjach. Aby zwiększyć skuteczność procesu komunikowania i efektywność realizacji stawianych przed nim celów, środki przekazu często łączą się i przenikają wzajemnie. (J. Wiktor, 2013).

2.2. Kanał komunikacyjny – główne kanały komunikowania

W jaki sposób zakodowane przez nas dane trafiają do potencjalnego odbiorcy?

Niezmiernie ważną rolę w procesie komunikowania odgrywa wspomniany już **kanał komunikacyjny,** przez który przepływają rozmaite informacje. **Kanał** jest więc środkiem przekazu wiadomości. Kanały komunikacyjne mogą być zarówno **słowne** (rozmowa osobista, rozmowa telefoniczna), jak i **pisemne** (list, notatka, ulotka). Wymienia się także kanały **niewerbalne** (wymiana spojrzeń, ruch ciała) i tzw. kanały **zapośredniczone** (komunikowanie się przy pomocy komputera, telekonferencja). Sam kanał nie wystarczy jednak do poprawnej komunikacji, dlatego potrzebne są również stosowne media. (S. Morreale, B. Spitzberg, J. Berge., 2007).

Odpowiedni dobór kanału przekazu informacji może być gwarantem wzajemnego porozumienia pomiędzy rozmówcami. Aby komunikacja była pewna, obie strony powinny wcześniej „ustalić" wspólny sposób przetwarzania informacji. W przypadku ludzi jest to najczęściej **język (kanał ustny).** Główną zaletą ustnego kanału komunikacyjnego jest możliwość uzyskania odpowiedzi niemalże natychmiastowej. Przy tego rodzaju komunikacji szybciej można dojść do porozumienia i podjąć stosowną decyzję. Ponadto druga strona może zadawać pytania lub podzielić się swoimi uwagami w trakcie samego procesu komunikowania. Użycie kanału ustnego ma jednakże i słabe strony. Wadą takiego sposobu komunikowania jest ograniczona możliwość korygowania przekazywanej wiadomości. Błędnej, czy też nieprzemyślanej wypowiedzi, nie da się wykasować lub wymazać. Wypowiadana – taką już pozostaje. Ustnego kanału komunikacji używa się najczęściej, gdy:

- potrzebna jest natychmiastowa odpowiedź;
- nie potrzebny jest zapis przebiegu rozmowy;
- wiadomość jest prosta do zrozumienia;
- można spotkać się bez problemu z drugą osobą;
- potrzebny jest udział innych osób w celu podjęcia decyzji lub rozwiązania konfliktu;
- wiadomość posiada istotny czynnik emocjonalny;
- istnieje potrzeba obserwacji zachowania, gestykulacji, tonu głosu drugiej osoby.

Kanały pisemne w dzisiejszych czasach przyjęły wiele form. Istnieją przekazy tradycyjne i elektroniczne. Media najczęściej używane do przekazania informacji to: listy, notatki, e-maile, faksy, komunikatory, strony internetowe. Wiadomości przekazywane za pomocą kanału pisemnego można wcześniej przygotować, zaplanować i kontrolować. To z pewnością jest ich zaletą. Wadą jest natomiast często brak możliwości uzyskania natychmiastowej odpowiedzi, brak kontaktu osobowego oraz to, że druga strona również ma możliwość kontrolowania swoich wypowiedzi. Z tego względu taki rodzaj komunikacji może być mniej efektywny.

Kanału pisemnego używa się, gdy:

- nie istnieje potrzeba uzyskania natychmiastowej odpowiedzi;
- przekazywana wiadomość jest skomplikowana, detaliczna, wymagająca zaplanowania;
- potrzebny jest udokumentowany zapis rozmowy;
- chcemy uniknąć przekształcenia faktów;
- kontakt bezpośredni nie jest konieczny lub jest niewygodny;
- wiadomość nie posiada czynnika emocjonalnego;
- strona, do której kierowana jest wiadomość jest duża (J. Szot, 2013).

Tabela 4. Zalety i wady słownego/ustnego kanału komunikacyjnego

SŁOWNY/USTNY KANAŁ KOMUNIKACYJNY	
ZALETY	**WADY**
1. Możliwość uzyskania niemalże natychmiastowej odpowiedzi.	1. Ograniczona możliwość korygowania przekazywanej wiadomości.
2. Możliwość dojścia do porozumienia i podjęcia stosownej decyzji.	2. Brak możliwości anulowania nieprzemyślanej wypowiedzi.
3. Możliwość zadawania pytań w trakcie procesu komunikowania.	
4. Możliwość dzielenia się swoimi uwagami w trakcie procesu komunikowania.	
5. Najczęściej bliski kontakt i możliwość patrzenia na osobę, z którą prowadzi się konwersację.	
6. Możliwość obserwacji zachowania, gestykulacji, tonu głosu drugiej osoby.	

Źródło: Opracowanie własne

Dobór kanałów komunikacyjnych jest swoistą sztuką z jednej strony, a z drugiej – pewną kalkulacją. Najważniejsze jest to, aby dobrać odpowiedni do odbiorcy przekaz, język, argumenty. Warto czasami zastosować różnorodne kanały komunikacyjne, aby przekazywane komunikaty były czytelne i aby przyniosły zamierzony efekt (M. Masłowski, 2013).

Tabela 5. Zalety i wady pisemnego kanału komunikacyjnego

PISEMNY KANAŁ KOMUNIKACYJNY	
ZALETY	**WADY**
1. Duża różnorodność i jakość mediów służących do przekazywania informacji (tradycyjne i elektroniczne).	1. Brak możliwości uzyskania natychmiastowej odpowiedzi.
2. Możliwość wcześniejszego przygotowania, zaplanowania i kontrolowania przekazywanych informacji.	2. Brak kontaktu osobowego.
3. Możliwość uniknięcia przekształconych faktów.	3. Możliwość kontrolowania swoich wypowiedzi przez drugą stronę.
	4. Brak obecności czynnika emocjonalnego.

Źródło: Opracowanie własne

Jak wynika z powyższych tabel zarówno słowny, jak i pisemny kanał komunikacyjny stosowany przez partnerów procesu komunikowania posiada swoje wady i zalety. Jak już wspomniano, szeroko rozumiana komunikacja stanowi nieodłączną część funkcjonowania człowieka w świecie, a jej „usterki" – znaczącą część je dopełniającą. Bez komunikacji praktycznie nie byłoby człowieka, społeczeństwa i kultury, bez jej „usterek" – możliwości zastanowienia się nad jej ogromnym znaczeniem.

Bez względu na możliwość występowania jednych czy drugich należy podejmować „trud" komunikowania się i dążyć do takiej komunikacji, którą w kolejnym rozdziale nazwano **skutecznym porozumiewaniem się**.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. W jakiej sytuacji należy zastosować komunikację niewerbalną, a w jakiej komunikaty zwerbalizowane?
2. Czy można nauczyć się „dobrej komunikacji"?
3. W jaki sposób komunikujemy się najczęściej, używając komunikatów werbalnych, czy komunikatów bez użycia języka mówionego?
4. Przedstaw krótką historyjkę w dwóch wersjach, używając komunikatów werbalnych i bez użycia języka mówionego.

2.3. Skuteczne porozumiewanie się

Jakość twojego życia zależy od jakości twojej komunikacji.

Z. Ziglar

Amerykański socjolingwista, językoznawca, antropolog i folklorysta, autor wielu prac z tej dziedziny

W drugiej połowie XX wieku (lata 70-te) przez **D. Hymesa** do literatury przedmiotu został wprowadzony termin **kompetencja komunikacyjna.** Odnosi się on do wiedzy użytkowej dotyczącej języka oraz reguł posługiwania się nim w zależności od sytuacji i samego słuchacza. Kompetencja ta jest rozumiana jako zdolność wyboru środków językowych i niejęzykowych odpowiednio do sytuacji mówienia. Jednostką kompetencji komunikacyjnej jest wypowiedź, która przekazuje intencję mówiącego, wyrażająca się w akcie mowy. Innymi słowy, umiejętność komunikowania polega na zdolności do przekazywania intencji własnych i rozumienia intencji innych. Warunkiem posiadania kompetencji komunikacyjnej jest zdolność do **decentracji,** czyli przyjmowania perspektywy innych oraz rozumienia ich intencji. Skuteczna komunikacja – w tym znaczeniu – wymaga współpracy, zarówno mówcy, jak i słuchacza, oraz stosowania społecznie akceptowanych reguł kulturowych (J. Siuta, 2005).

Sztuka porozumiewania się jest podstawową umiejętnością życiową, tak samo ważną, jak umiejętność radzenia sobie w szkole, zarabiania na życie czy też pracy na określonym stanowisku. Sztuka skutecznego porozumiewania jest zaś w pewnym sensie mistrzostwem. Warunkuje ona radość z życia i życiowy sukces. Gdzie można tę umiejętność nabyć i czy w ogóle można nauczyć się „mistrzowskiego" komunikowania?

Techniki skutecznej komunikacji są znane i proponowane od wielu lat[5]. Postuluje się, aby efektywnego komunikowania uczono równolegle z nauką pisania, czytania i liczenia. Za jedną z podstawowych umiejętności skutecznego porozumiewania uważa się **aktywne słuchanie.** Umiejętność ta gwarantuje utrzymanie dobrej i przyjaznej atmosfery podczas konwersacji oraz pobudzenie wzajemnego zaufania. Osoby, które nie słuchają swoich rozmówców, to nudziarze. Wydaje się, że nie interesuje ich nic poza nimi samymi. Swoją postawą odpychają potencjalnych przyjaciół i partnerów, wysyłając im „dołujące" komunikaty. Brak umiejętności słuchania jest niebezpieczny i niekiedy wręcz destruktywny. Aktywne słuchanie to zaangażowanie w rozmowę, szacunek i zrozumienie okazywane rozmówcy, wyzbycie się uprzedzeń, niepokojów i „wietrzenia" własnych interesów. To patrzenie oczyma drugiej osoby i widzenie problemów z jej perspektywy. Prawdziwe słuchanie nie polega na zachowaniu milczenia, gdy druga osoba mówi. Prawdziwe słuchanie, to zaangażowanie się w rozmowę i rozumienie rozmówcy.

Bardzo ważnym elementem rozmowy jest **utrzymywanie kontaktu wzrokowego** z partnerem, służy ono koncentracji na tym, co ma on do przekazania. Można lekko nachylić się w stronę mówiącego, ale bez naruszania jego prywatności. Należy wspierać rozmówcę (np. kiwając głową), zadbać o to, aby nic nie rozpraszało uwagi żadnej ze stron oraz upewniać się, czy dobrze zrozumiało się przekazywane treści, zadając pytania.

Ważną rolę w komunikacji – skutecznej – odgrywa także **kontakt dotykowy** (np. podanie ręki, uścisk dłoni), **otwartość, ekspresja, „mowa" ciała** (ruchy ciała), **wyjaśnianie**, **empatia i asertywność** (zostaną one omówione oddzielnie w kolejnych podrozdziałach) oraz **umiejętność mówienia** – rozumiana jako precyzowanie własnych wypowiedzi i dopasowywanie ich do percepcji rozmówcy, czyli wyrażanie jasnych, zrozumiałych komunikatów (M. McKay, M. Davis, P. Fanning, 2007).

Istotnym elementem efektywnej komunikacji jest także umiejętne **zadawanie pytań –** szczególnie otwartych – osobie, z którą prowadzi się konwersację. Już same pytania są dobrym sposobem na rozpoczęcie rozmowy i zdobycie pewnych informacji na temat przedmiotowej problematyki. Taka umiejętność ma w sobie coś ze sztuki – podobnie jak sama komunikacja (A. Cash, 2007).

Podczas rozmowy warto pochylić się w stronę rozmówcy; **parafrazować,** czyli upewniać się, czy dobrze zrozumiało się odebrany komunikat. W pewien sposób należy zaspakajać potrzeby rozmówcy, należy sprawić, by poczuł się kimś ważnym. Należy doceniać rozmówcę, chwalić, akceptować i dziękować tak często, jak tylko jest to możliwe. Należy nauczyć się patrzeć z różnych pozycji percepcyjnych i wyobrażać sobie, że jest się w ciele rozmówcy i słucha się samego siebie – co nie jest czymś łatwym. Podczas rozmowy należy być uprzejmym, kulturalnym, używać prostego i zrozumiałego słownictwa (dopasowanego do grupy odbiorców) oraz zadbać o odpowiednią atmosferę – zabarwioną zaufaniem, szczerością i wiarygodnością. Aby podnosić zdolności komunikacyjne, warto poznać **język perswazji**. Są to struktury lingwistyczne, które w dużej mierze ułatwiają komunikację z drugą osobą. Przy stosowaniu perswazji należy jednak zachować zasadę „złotego środka" i pamiętać o tym, aby nie „strzelać" w rozmówcę wyuczonymi słówkami. Należy po prostu o tej osobie pamiętać.

Sztukę komunikacji można poznać i można ją sobie przyswoić. Można nauczyć się jej równie łatwo, jak każdej innej umiejętności. Nikt nie rodzi się doskonałym mówcą. To pewne okoliczności oraz wiedza i praktyka sprawiają, że niektórzy ludzie lepiej się komunikują i mają większą łatwość nawiązywania relacji z innymi niż pozostali (M. Kijak, 2013).

▶ **Komunikacja interpersonalna** *to nasza czynność codzienna, jednak mało kto wie, jak komunikować się poprawnie. Istnieją pewne reguły, które pozwalają nam „monitorować" naszą komunikację oraz sprawić, by stała się ona skuteczniejsza i nie była przyczyną niechcianych konfliktów.*

5 M. McKay, M. Davis, P. Fanning, Sztuka skutecznego porozumiewania się, Gdańsk 2007

Nauka właściwego komunikowania się to między innymi nauka szacunku dla innych i wobec siebie samego. Komunikacja, aby była skuteczną, musi być dwukierunkowa. Obydwie strony muszą być zaangażowane i muszą mieć poczucie wzajemnego szacunku (P. Pilarska, 2012).

Sztuka porozumiewania się jest umiejętnością, którą można nabyć jedynie poprzez doświadczenie, czyli poprzez kształtowanie jej w codziennej praktyce. Ponadto nabycie tej umiejętności wymaga wiedzy, którą należy nieustannie zdobywać (M. McKay, M. Davis, P. Fanning, 2007).

CIEKAWOSTKA!

G. Leech (Profesor językoznawstwa i języka angielskiego, członek Norweskiej Akademii Nauk i Literatury) sprecyzował zbiór takich reguł. Są nimi zasady konwersacyjne, które podzielił na reguły tekstowe – dotyczące poprawnego organizowania wypowiedzi, czego uczymy się na wszystkich szczeblach edukacji szkolnej, oraz reguły interpersonalne – których przestrzeganie buduje odpowiedni klimat konwersacji. Do reguł tekstowych Leech zaliczył regułę zrozumiałości i poprawności gramatycznej (stosowanie poprawnego stylistycznie języka i odpowiednich form gramatycznych), regułę spójności (trzymanie się tematu), regułę ekonomiczności (unikanie wypowiedzi rozwlekłych i długich pauz między zdaniami) oraz regułę ekspresyjności (stosowanie odpowiedniego tempa wypowiedzi, natężenia głosu oraz akcentowania ważnych kwestii). Na reguły interpersonalne, składają się natomiast: reguła grzeczności (taktowne, kulturalne i uprzejme zachowanie), reguła aprobaty (okazywanie drugiej stronie akceptacji jako partnera podczas rozmowy), reguła skromności (nie wywyższanie się i nie przechwalanie), reguła zgodności (budowanie miłej atmosfery podczas rozmowy) oraz reguła ciekawości (zapewnianie rozmówcy o uważnym słuchaniu go).

Znajomość zasad prawidłowej komunikacji zmniejsza prawdopodobieństwo pojawiania się braku wzajemnego porozumienia (A. Czerw, 2012).

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Jakie umiejętności trzeba opanować, aby w porozumiewaniu się z innymi być zrozumianym i aby rozumieć innych?
2. Na ile „sztuka porozumiewania się” zależy ode nas samych?
3. Zaprezentuj z kolegą/koleżanką dialog na dowolny temat, w którym wykorzystasz różne poznane umiejętności efektywnej komunikacji.

2.4. Bariery zakłócające proces komunikowania

Mowa tylko zakłóca myśli – porozumienie trudne.

Jan Fedorowicz

Tak jak bardzo różnorodne jest ludzkie komunikowanie i jak wiele przyjmuje postaci, form i środków, tak różnorodne są wszelkie bariery, zakłócenia i utrudnienia procesu komunikowania.

Bywają sytuacje, w których uczestnikom rozmowy trudno jest się komunikować. Czynniki, które przeszkadzają w komunikacji określa się mianem barier. Są to takie charakterystyki nadawcy, odbiorcy lub otoczenia fizycznego, które utrudniają lub uniemożliwiają efektywne porozumienie się. Ogólnie rzecz biorąc, bariery komunikacyjne to wszystko, co zakłóca efektywne porozumienie (por. E. Brzezińska, 1997; Z. Nęcki, 1992, 1995, 2000; A. Augustynek 2009).

Rozszerzając wywód, poniżej zaprezentowano inne spojrzenie na *bariery komunikacyjne* oraz ich rodzaje i przyczyny powstawania zakłóceń w komunikacji.

Bariery to wszelkiego rodzaju przeszkody i blokady uniemożliwiające osiągnięcie zamierzonego celu. Zazwyczaj przeszkody te są natury fizycznej. Sporo barier swoje źródło ma jednak w emocjach lub intelektualnych ograniczeniach człowieka, czyli są one pochodzenia psychicznego (A. Reber, E. Reber, 2008).

Bariery komunikacyjne natomiast – najprościej rzecz ujmując **–** są to wszelkie czynniki, które utrudniają zrozumienie przekazu zawartego w wypowiedzi. Bariery komunikacyjne mogą być zakłóceniami o charakterze **psychologicznym i fizycznym**. Zakładając, że kanał komunikacji nie stwarza problemów w procesie porozumiewania, efektywność komunikacji zależy jedynie od partnerów oraz ich specyficznych umiejętności. Bariery na jakie można natrafić, będąc uczestnikiem procesu komunikacyjnego, są następujące:

- **Bariery językowe** – polegają na tym, że rozmówcy nie mówią tym samym językiem. Komunikują się zazwyczaj na różnym poziomie lub stosują inne słownictwo, co oznacza, że symbole (słowa) wykorzystywane do przekazywania informacji mogą być błędnie odczytane lub w ogóle niezrozumiane.
- **Bariery kulturowe** – odnoszą się do pochodzenia rozmówców. Partnerzy procesu komunikowania pochodzą z różnych kultur bądź w różnych kulturach zostali wychowani, co oznacza, że mogą posiadać inny model i wyobrażenie świata oraz zachodzących w nim relacji; preferować inne wartości i ich hierarchie, inne normy społeczne, zasady i rytuały formalne i nieformalne, które wpływają na zachowania i regulują cały system interakcji.
- **Bariery społeczne** – wynikają z tego, że rozmówcy reprezentują różne grupy społeczne, które mogą różnić się przyjętymi normami środowiskowymi, zasadami, przyjętymi standardami, poglądami, zwyczajami i priorytetami oraz umiejętnością wykorzystania języka i wiedzy, a także pochodzeniem społecznym, poziomem wykształcenia itp.
- **Bariery indywidualne/osobiste** – rozmówcy posiadają różne cechy osobiste, podobne do tych wymienionych powyżej, jednakże niekoniecznie wynikające z różnic językowych, kulturowych i społecznych. Należą do nich: zdolności fizyczne i umysłowe, wartości i ich hierarchia, inny obraz świata, zachowanie i stany emocjonalne, wybiórczość uwagi, a także różne umiejętności komunikacyjne.
- **Bariery strukturalne** – które tworzone są w celu uniknięcia komunikacji postrzeganej jako niechciana, nieważna, niepotrzebna, uciążliwa lub bezużyteczna.

Istnieje ponadto szereg elementów, które wpływają na cechy kanałów komunikacji i powodują szereg barier z nimi związanych. Może to być brak nośnika, hałas, odległość w czasie i przestrzeni, zakłócenia, zniekształcenia, wspomniane bariery strukturalne, czy tak zwane **filtrowanie** (o którym więcej wspomniano poniżej). Ich obecność utrudnia, a może nawet uniemożliwić, komunikację międzyludzką[6].

Bariery komunikacyjne bywają różnie ujmowane i charakteryzowane. W literaturze funkcjonują określenia:

- **Szumy –** którymi są wszelkie niepożądane lub fałszywe komunikaty. Szum przeszkadza i powoduje utratę ważnych informacji. Blokuje do niej dostęp oraz „zatyka" kanały informacyjne.

6 http://www.teachingpolish.com/artykuly/komunikacja.htm, 11.04.2013.

- **Zniekształcenie –** w miarę przemieszczania się informacji poprzez pośredników może ona ulegać przekształceniom, które wprowadzane są mniej lub bardziej świadomie. Wersja końcowa informacji może różnić się znacznie od pierwotnie wysłanej.
- **Filtracja** – polega na odrzucaniu części lub całości informacji zanim zostanie ona przesłana dalej. Celem filtrowania jest blokowanie informacji nieistotnych, powtarzających się, zbędnych. Często informacja może być skracana, zachowując tylko istotne elementy.
- **Ukrywanie-przesiewanie-generalizacja –** jest to specjalny typ filtrowania, który czyni całą lub część informacji niedostarczoną, Generalizowanie polega na usuwaniu z informacji pewnych istotnych szczegółów, co czyni ją uniwersalną, mogącą potencjalnie zainteresować każdego.
- **Komunikacja jednokierunkowa –** odległość, czas oraz generalizacja przekazu czyni komunikację praktycznie jednokierunkową. Jeżeli ten typ komunikacji jest zamierzony, oznacza to, że otrzymujemy jakąś wiadomość, ale nikt nie oczekuje od nas odpowiedzi. Jeśli jest niezamierzony, oznacza, że sytuacja taka powstała z powodu istniejących barier komunikacji[7].

Schemat 9. Główne bariery komunikacyjne, *Źródło: Opracowanie własne, za: edustat.home.pl, 12.04.2013*

Powyżej zaprezentowane bariery komunikacyjne jako reakcje o wysokim stopniu ryzyka przedstawiają się następująco:

1. **Różnice w postrzeganiu** wynikają najczęściej z odmiennej indywidualnej percepcji. Ludzie często patrzą na to samo zjawisko z różnych punktów widzenia.
2. **Różnice językowe**, które decydują często o niezrozumieniu komunikatu, ponieważ użyte słowa muszą znaczyć to samo dla nadawcy i odbiorcy, a posługiwanie się na przykład specjalistyczną terminologią utrudnia lub uniemożliwia komunikację.

7 http://www.sciaga.pl/student/index.html ,11.04.2013.

3. **Emocje** wywierają wyraźny wpływ na zrozumienie komunikatów – a w szczególności gniew, złość, lęk, zakłopotanie, zazdrość. Poczucie zagrożenia może wywołać na przykład utratę zdolności trafnej oceny treści otrzymywanych komunikatów.

4. **Niezgodność komunikatów werbalnych i niewerbalnych,** która powoduje niemożność jednoznacznego odbioru treści komunikatu. Wprowadza ona niepewność i nieufność.

5. **Decydowanie za innych** pozbawia ich możliwości samodzielnego podejmowania decyzji i doprowadza do uległości. Konsekwencją tego może być ograniczenie otwartości i szczerości. Barierami są w tym przypadku: rozkazywanie, nakazywanie, grożenie, moralizowanie.

6. **Uciekanie od cudzych problemów** to bariera tworząca się w momencie, gdy uczestnik procesu komunikowania nie przejawia chęci słuchania drugiej osoby, wzięcia pod uwagę jej zmartwień, uczuć, odsuwa jej obawy i lęki.

Teoretyk kultury i kulturoznawca oraz socjolog. Jest autorem szeregu publikacji w tym m.in. pracy Kodowanie i dekodowanie w dyskursie telewizyjnym)

S. Hall stoi na stanowisku, że najczęstsze przyczyny nieporozumień dotyczą sytuacji, w których odbiorca nie jest oswojony z językiem przekazu, nie zna znaczenia terminów i pojęć, którymi posługiwano się w procesie komunikowania, nie nadąża za logiką argumentacji, sposobem narracji oraz nie potrafi odebrać ogólnego znaczenia kodów zgodnie z intencją nadawcy. Wszystkie te elementy tworzą bariery zakłócające proces komunikacji (cyt. za: M. Golka, 2008).

Znajomość zasad prawidłowej komunikacji i odpowiedni dobór kanału komunikacyjnego zmniejsza prawdopodobieństwo występowania nieporozumień, a – co za tym idzie – zakłóceń procesu komunikacji. Nie tylko one jednak stanowią problem. Niezależnie od wyboru kanału należy pamiętać o wspomnianych już **szumach,** które wpływają na osłabienie uwagi odbiorcy (np. rozmowa na osiedlowej ulicy dotycząca istotnego problemu, której towarzyszy odgłos przejeżdżających pojazdów). Szumy powstają też w samym odbiorcy, a są nimi: brak należytej uwagi, przez co informacja może w ogóle do niego nie dotrzeć, czy też błędna interpretacja wynikająca często z docierania do niego wiadomości „przefiltrowanej". Tego typu zakłócenia komunikacyjne mogą doprowadzić partnerów interakcji do konfliktów, o których więcej w następnym rozdziale (A. Czerw, 2012).

Bariery fizyczne i psychologiczne

Zdarza się, że porozumienie trudno jest osiągnąć, ponieważ osoba wyraża się niejasno lub w sposób niezrozumiały. Dojście z naszym rozmówcą do porozumienia staje się wówczas trudne. Sama treść rozmowy zostaje także zniekształcona, przez co oddalamy się od pierwotnego celu rozmowy. Tworzenie niejasnych przekazów zaliczamy do **szumów w komunikacji interpersonalnej**.

Szumy są to zakłócenia fizyczne, utrudniające percepcję przekazów. Percepcja jest to „zestaw procesów występujących u ludzi podczas odbierania oraz interpretowania informacji płynących z otoczenia, obejmująca poza 5 zmysłami również świadomość człowieka, poczucie sensu oraz interpretację faktów" (za: E. Brzezińska, 1997, s. 47). Pełni ona kluczową rolę dla odbierania i dekodowania komunikatów.

Można wyróżnić 3 rodzaje szumów: 1) **czynniki wzrokowe** (np. osoby poruszające się w otoczeniu rozmówców odwracają uwagę mówiącego, a zwłaszcza słuchaczy); 2) **czynniki dźwiękowe** (np. hałas uliczny, telefon, szepty dobiegające z otoczenia, zbyt duży dystans pomiędzy rozmówcami); 3) **czynniki fizyczne związane z otoczeniem** (np. temperatura pomieszczenia, oświetlenie). Czynniki te rozpraszają uwagę, sprawiając, że rozmówcy muszą wkładać więcej wysiłku w utrzymanie skutecznej komunikacji. Szum utrudnia wysyłanie lub odbieranie informacji. Mimo że do wielu zakłóceń jesteśmy przyzwyczajeni, zdarzają się sytuacje, w których, pomimo naszych wysiłków, komunikacja staje się niemożliwa (E. Brzezińska, 1997; J. Stankiewicz 2006).

Na komunikację wpływają także **szumy o charakterze psychologicznym**, które związane są z cechami rozmówców. W tym przypadku w komunikacji przeszkadzają na przykład: samopoczucie, stan zdrowia, poziom zmęczenia, zaburzenia koncentracji, wady słuchu czy wzroku (por. J. Stewart, 2008, za: A. Augustynek, 2009; E. Brzesińska, 1997; J. Ober, 2007; J. Stankiewicz, 2006). Należy pamiętać, że ludzie różnią się od siebie pod wieloma względami i różnice te są częstym źródłem nieporozumień. Jedną z głównych różnic są **różnice w percepcji.** Sposób w jaki dana osoba patrzy na określony temat zależy od tego, jaką posiada wiedzę i doświadczenie. Ponadto na sposób spostrzegania komunikatu wpływa kontekst, który decyduje o tym, że dana wypowiedź może być niestosowna w pewnej sytuacji. Jeżeli różnice w wiedzy i doświadczeniu stanowią przeszkodę, należy poszukiwać wspólnej płaszczyzny porozumienia. Poznawanie doświadczeń drugiej osoby i wczuwanie się w jej perspektywę jest także pomocne. Trudności w komunikacji mogą ponadto wynikać z **różnic kulturowych**. Osoby wychowane w odmiennej kulturze, innych obyczajach i tradycji mogą różnić się nie tylko językiem, którym się posługują, ale także systemem wartości, doświadczeniami. Różnice w spostrzeganiu świata i zachowaniach uwarunkowanych kulturowo mogą stanowić przeszkodę w dojściu do porozumienia. Ponadto uczestnicy komunikacji mogą się różnić pod względem językowym. **Różnice językowe** często są bezpośrednio powiązane z różnicami w spostrzeganiu znaczenia wyrazów, szczególnie tych abstrakcyjnych, takich jak miłość, sprawiedliwość, prawda. Aby osoby mogły się porozumieć, słowa muszą mieć to samo znacznie dla nadawcy i dla odbiorcy. W razie pojawienia się tych trudności pomocne jest przeformułowanie wypowiedzi. Inną barierą psychologiczną jest **brak umiejętności decentracji**, czyli nieumiejętność przyjęcia perspektywy rozmówcy. Osoba zamiast słuchać swojego rozmówcy, koncentruje się na własnych doświadczeniach oraz przemyśleniach. Zdarza się także, że to, jak oceniamy status nadawcy, wpływa na nasz stosunek do prezentowanych przez niego informacji. W tym przypadku czynniki, takie jak pozycja społeczna, wiedza, doświadczenie, jakość wzajemnych relacji, wpływają na ocenę wiarygodności komunikatów. Uznanie **informacji jako niewiarygodnej** negatywnie wpływa osiągnięcie porozumienia. Należy pamiętać, że tworzenie relacji cechujących się zaufaniem i wiarygodnością wymaga czasu. Zdarza się, że komunikację utrudnia tendencja człowieka do **ulegania stereotypom**. W kontekście komunikacji powoduje to, że jesteśmy gotowi poświęcić więcej uwagi ludziom o wysokim statusie niż tym o niskim. Także w przypadku tych pierwszych częściej zgadzamy się z ich poglądami i jesteśmy dla nich bardziej uprzejmi. Podstawowymi narzędziami komunikacji są słowa oraz mimika, gesty, postawa ciała. **Sprzeczność lub niespójność w komunikatach werbalnych oraz niewerbalnych** może spowodować zafałszowanie informacji. Aby tego uniknąć, należy rozwijać w sobie świadomość własnych gestów i ekspresji towarzyszących naszym słowom. Czynnikiem utrudniającym komunikację są bez wątpienia także **emocje.** Złość, gniew, zazdrość, nienawiść wpływają na to, jak interpretujemy czyjeś komunikaty oraz jakie komunikaty sami przekazujemy. Poradzenie sobie z emocjami z jednej strony wymaga zaobserwowania własnych emocji oraz zastanowienia się nad tym, jak mogą one wpłynąć na komunikację, a z drugiej strony konieczne jest zrozumienie emocji przezywanych przez naszego rozmówcę (E. Brzezińska, 1997; Z. Nęcki, 1992, 1995, 1996).

Bariery wewnętrzne

Bariery komunikacji mogą mieć postać typowych odpowiedzi, które na komunikację wpływają najczęściej negatywnie (T. Gordon, 1993). Zagadnienie to jest szczególnie ważne, jeśli jedna lub obie strony uczestniczące w rozmowie mają problem lub potrzebę, która powinna być zaspokojona. Niestety, ludzie często nie są świadomi, że w takich okolicznościach stawiają bariery. Bariery wewnętrzne działają na zasadzie blokady uczuć, ponieważ ograniczają szanse na to, że druga osoba wyrazi to, co naprawdę czuje. Ich stosowanie może wpłynąć jedynie niekorzystnie na relacje, a ich nieustanne stosowanie może na stałe jej zaszkodzić (R. Bolton, 2008).

T. Gordon wyróżnił dwanaście barier komunikacyjnych, które zostały podzielone na trzy główne kategorie: osądzanie, dawanie rozwiązań oraz unikanie udziału w troskach drugiej osoby (T. Gordon 1993; R. Bolton, 2008; B. Harwas-Napierała, 2006). Zostały one opisane poniżej:

I. OSĄDZANIE jest główną i najpowszechniej stawianą barierą. W jej zakres wchodzi:

1. *Krytykowanie*, czyli negatywne ocenianie drugiej osoby, jej postaw oraz działań. Krytyka jest spostrzegana jako sposób na to, by wywołać zmianę w drugiej osobie. Przyglądając się samemu sobie i naszym relacjom, można zauważyć, jak często bywamy krytyczni. Przykładem krytycz-

nego komunikatu są zdania: „Sam to na siebie sprowadziłeś – nikogo innego nie możesz winić za kłopoty, w których tkwisz", „Postąpiłeś niedorzecznie".

2. *Przezywanie*, wiąże się z przyklejaniem osobie etykiety, klasyfikowaniem osoby do jakiegoś stereotypu i ma to charakter poniżający. Przykładem krytycznego komunikatu są zdania: „Co za głupek!", „Dokładnie jak kobieta…", „Jajogłowy", „Jesteś tak samo niewrażliwy jak inni mężczyźni"; „Maruda". Etykiety nie zawsze są poniżające, mogą mieć charakter wywyższający osobę, na przykład: „bystry", „pracowity", „wdał się w swojego ojca". Ogólnie, etykietowanie prowadzi do tego, że zamiast doświadczać życia, poznawać siebie i ludzi, ich wartość, uczucia pozostajemy na powierzchni – zamiast osoby widzimy typ człowieka.

3. *Stawianie diagnozy*. Jest to forma etykietowania. Bariera ta jest stawiana przez ludzi, którzy w podejściu do drugiej osoby zachowują się tak, jakby prowadzili śledztwo. Próbują analizować i odkrywać nieświadome motywy, by dowiedzieć się, dlaczego osoba zachowuje się w taki a nie inny sposób, na przykład: „Czytam w tobie jak w książce – robisz to właśnie po to, by mnie zirytować"; „Myślisz, że jesteś lepszy ode mnie tylko dlatego, że dostałeś się na studia".

4. *Chwalenie połączone z oceną*. W ludziach panuje przekonanie, że chwalenie jest pozytywnym sposobem okazywania wsparcia. Tymczasem zdarza się, że występuje ono w formie bariery, poważnie zagrażając relacji. Niektórzy stosują pochwałę, aby skłonić kogoś do zmiany lub osiągnięcia własnego celu. Chwalenie drugiej osoby, mając ukryte zamiary, budzi w niej uczucie bycia manipulowanym, wykorzystywanym i pozostawia żal. Przykładem jest komunikat: „Zawsze jesteś taka grzeczna. Na pewno pomożesz mi wieczorem przyciąć trawnik". Oczywiście pochwała nie zawsze służy czyimś ukrytym celom, ale nawet wtedy może spowodować, że druga osoba wycofa się i zacznie zachowywać ostrożność: „Naprawdę to było niewiele", „Mógłbym to zrobić jeszcze lepiej" (por: E. Bolton, 2008; T. Gordon, 1993).

II. DAWANIE ROZWIĄZAŃ. Jedna osoba może proponować drugiej rozwiązanie, ponieważ troszczy się o nią i chce jej pomóc, może zadać jej pytana, aby dać dobrą radę. Zdarza się także, iż przyjmuje to formę rozkazu, groźby lub pouczania. Każdy z tych sposobów dawania drugiej osobie gotowych rozwiązań posiadanego problemu różnie wpływa na relację pomiędzy osobami. Oczywiście pomoc w znalezieniu wyjścia z sytuacji poprzez podsuwanie rozwiązań bywa pozytywnym działaniem. Należy jednak zauważyć, że wpływa to na rozwój osoby, ograniczając jej możliwość na samodzielne poradzenie sobie z trudnościami. Niezależnie od tego, jaka forma została przyjęta, każda może stanowić barierę, szczególnie, gdy każda ze stron odczuwa potrzebę lub boryka się z problemem (por: E. Bolton, 2008; T. Gordon, 1993).

1. *Rozkazywanie,* czyli zmuszanie drugiej osoby do przyjęcia danego rozwiązania. Rozkazywanie prowadzi do uległości oraz posłuszeństwa, obniża samoocenę osoby i tworzy w niej przekonanie, że nie potrafi właściwie ocenić sytuacji. Przykład: „Masz natychmiast odrobić lekcje! Dlaczego?! Ponieważ tak powiedziałam…".

2. *Grożenie*, ma miejsce, gdy osoba, aby doprowadzić do przyjęcia przez nią proponowanych rozwiązań, podkreśla negatywne skutki jego odrzucenia. Prowadzi to do takich samych konsekwencji jak rozkazywanie. Przykłady: „Zrobisz to albo w przeciwnym przypadku…"; „Przestań natychmiast hałasować, albo nigdzie dzisiaj nie pójdziesz!".

3. *Moralizowanie*, czyli wskazywanie rozmówcy, co powinien zrobić poprzez wykorzystywanie autorytetu. W tym przypadku pojawiają się takie zwroty, jak: „powinno się", „należy". Uczucia, jakie pozostawia moralizowanie to niepokój i uraza, ponadto zakłócone zostaje wyrażanie prawdziwych uczuć i przemyśleń osoby. Przykłady: „Nie powinnaś się rozwodzić, pomyśl, co stanie się z dziećmi"; „Powinieneś powiedzieć, że jest ci przykro"; „Jest to właściwe postępowanie".

4. *Stawianie zbyt wielu niewłaściwych pytań*. W tym kontekście niewłaściwe pytania to pytania zamknięte, czyli takie, które dają tylko dwie możliwości odpowiedzi – tak lub nie.

Ich stosowanie powoduje, że rozmowa staje w martwym punkcie, uniemożliwiają one także pełną i skuteczną komunikację. Zadawanie takich pytań najczęściej służy jakiemuś celowi, a nie wymianie informacji. „Kiedy to się stało?"; „Czy jest Ci przykro, że to zrobiłeś?"

5. *Udzielanie rad* jest jedną z częściej stawianych barier. Osoby, które nastawione są na udzielenie rady bardzo często nie zapoznają się ze wszystkimi aspektami problemu czy sytuacji. a – co za tym idzie – nie poznają uczuć i przemyśleń drugiej osoby. Podawanie gotowych rozwiązań w formie rad to nieszanowanie drugiej osoby i jej własnej zdolności rozumienia i radzenia sobie z sytuacją problemową. Udzielanie rad może faktycznie zakomunikować osobie: „Widzisz, przecież, to takie proste – ale jesteś głupi". Przykłady: „Jeśli byłabym na twoim miejscu, z pewnością powiedziałabym mu do słuchu"; „To całkiem łatwa sprawa. Najpierw trzeba…"

III. UNIKANIE UDZIAŁU W TROSKACH DRUGIEGO CZŁOWIEKA. Przejawia się przez dążenie do zakończenia rozmowy na określony temat poprzez odwracanie uwagi od problemu, stosowanie logicznych argumentów oraz pocieszanie (por. R. Bolton, 2008; T. Gordon, 1993).

1. *Odwracanie uwagi*. Ludzie mogą próbować odwrócić uwagę drugiej osoby od problemu, gdyż nie potrafią słuchać, lub podczas rozmowy z drugą osobą mają tendencję do koncentrowania się na sobie. Przyczyną, dla której ktoś nie chce rozmawiać na dany temat mogą być też emocje, jakie temat ten w nim budzi. Wielu ludzi nie lubi rozmawiać o uczuciach, konfliktach, chorobach i tym podobnych, budzących napięcie tematach. Przykładowe komunikaty odwracające uwagę: „Nie wracaj do tego, pogadajmy o czymś przyjemniejszym"; „Myślisz, że spotkało cię coś złego? Posłuchaj, co mi się przytrafiło".

2. *Logiczne argumentowanie* polega na tym, że rozmowa dotycząca trosk osoby zostaje sprowadzona do poziomu obiektywnych faktów i logiki, a emocje z nimi związane zostają zepchnięte na dalszy plan. Problemom zawsze towarzyszą: stres oraz emocje. Na pewno łatwiej sobie z nimi poradzić, kiedy otrzymuje się wsparcie drugiej, szczególnie bliskiej osoby. Sprowadzanie rozmowy do poziomu logiki buduje dystans emocjonalny, powodując frustrację oraz złość. Stosowanie jej, by uniknąć zaangażowania emocjonalnego, oznacza opuszczenie osoby w trudnym momencie. Przykład: „Przyjrzyj się faktom. Jeśli byś nie kupiła telefonu na abonament, teraz nie miałabyś kłopotu ze spłatą rachunku za rozmowy".

3. *Uspokajanie* to de facto próba zablokowania negatywnych emocji doświadczanych przez drugą osobę. Skutkiem takiego działania może być wycofanie się. Przykładami komunikatów mających na celu powstrzymanie emocji są zdania: „Nie przejmuj się, nie jest przecież tak źle"; „Wszystko się w końcu ułoży" (por. R. Bolton, 2008; T. Gordon, 1993).

Wszystkie te działania mogą wydawać się nieszkodliwe, lecz, jeśli weźmiemy pod uwagę przeżycia drugiej osoby, ich skutki takich mogą okazać się destrukcyjne. Stosowanie barier powoduje w drugiej osobie różnorodne negatywne reakcje (za: R. Bolton, 2008; T. Gordon, 1993):

1) przyjęcie postawy obronnej;

2) poczucie niższości;

3) wycofywanie się;

4) gniew, złość, opór;

5) poczucie winy i odrzucenia;

6) postrzeganie siebie jako niezdolnej do poradzenie sobie z problemem;

7) poczucie bycia niezrozumianym;

8) poczucie, iż jej własne przeżycia są nieuzasadnione;

9) frustrację, gdyż nie może wyrazić tego, co czuje.

Oczywiście stawianie powyższych barier nie zawsze prowadzi do negatywnych skutków. Kluczowe jest uwzględnienie: sytuacji, w której znajduje się druga osoba – czy zmaga się ona jakimś problemem lub ma jakąś silną potrzebę. Ryzyko, że bariery wywołają szkodę jest większe, jeśli któryś z uczestników relacji doświadcza stresu. Jeżeli więc, na podstawie powyższych informacji, można sformułować jakąś radę, to brzmiałaby ona następująco: jeżeli ty albo twój rozmówca znajdujecie się w sytuacji stresującej, unikaj stosowania barier.

2.5. Komunikacja manipulacyjna

W procesie komunikacji mogą być podejmowane działania manipulacyjne. Manipulacja jest terminem pochodzącym od łacińskiego *manus pellere*, co oznacza trzymać dłoń w czyjejś dłoni, mieć kogoś w ręce. Ogólnie manipulować kimś oznacza wywierać na niego wpływ (por. M. Kliś, 2010). Wpływ społeczny to proces, który doprowadza do zmian w postawach, emocjach, motywacjach i zachowaniu jednostki. Zmiany te pojawiają się pod wpływem opinii i/lub zachowań osoby i/lub grupy osób, przy czym opinie i zachowania wywierające wpływ mogą być prawdziwe lub wyobrażone (B. Latane 1981, za: A. Pratkanis, E. Aronson, 2005). Wpływ może być procesem krótkotrwałym, ale także długotrwałym, gdy zmiany można zauważyć po kilku latach. Przykładem długotrwałego wpływu jest wpływ wywierany przez media (M. Kliś, 2010).

W kontekście manipulacji kluczowe jest zagadnienie etyki, osoba manipulowana nie jest bowiem świadoma tego, że podlega wpływowi. Manipulator wykorzystuje swoją wiedzę do sterowania osobą i czyni to wbrew jej woli. Kształtuje sytuację tak, by osoba manipulowana sądziła, że to ona jest sprawcą, podczas gdy faktycznie jest środkiem w rękach manipulatora (por. J. Podgórecki, 2007, za: M. Kliś, 2010).

Manipulacja w komunikacji może dotyczyć przekazywanych informacji lub aspektu emocjonalnego komunikacji. Manipulacja informacjami przybiera postać kłamstwa, oszustwa, intencjonalnego pomijania pewnych informacji lub świadomego sterowania kolejnością podawanych informacji. W komunikacji tak samo ważną rolę jak informacja pełnią emocje. One również stanowią dla człowieka źródło wiedzy i wpływają na podejmowane przez niego decyzje oraz jego zachowanie. W tym kontekście manipulacja to celowe wywoływanie określonych emocji i uczuć. Manipulator wykorzystuje wiedzę z zakresu psychologii i socjologii dotyczącą mechanizmów i uwarunkowań funkcjonowania człowieka (por. M. Kliś, 2010).

Profesor psychologii na uniwersytecie stanu
Arizona, zajmujący się psychologią społeczną

R. Cialdini () (2007) sformułował sześć reguł, które leżą u podłoża wywierania wpływu na osobę za pośrednictwem komunikacji:

1) **Reguła wzajemności** – odzwierciedla przekonanie, że zawsze powinniśmy się odwdzięczać osobie, która wyświadczyła nam jakąś przysługę, była dla nas miła, podarowała nam prezent na urodziny, zaprosiła nas na przyjęcie itp. Przykładem wykorzystywania tej reguły jest zbiórka pieniędzy przez wyznawców Hare Kriszna. Zanim jeden z nich poprosi przechodnia o datek, najpierw inny wyznawca, stojący kilkadziesiąt metrów od niego, obdarowuje tego przechodnia kwiatem. Dzięki temu przechodzień zostaje złapany w pułapkę poczucia zobowiązania i z dużo większym prawdopodobieństwem odwdzięczy się datkiem.

2) **Reguła zaangażowania i konsekwencji** – bazuje na ludzkim dążeniu do konsekwencji. Wynika ono ze spostrzegania tej cechy przez społeczeństwo jako wysoce wartościowej. Człowiekowi, którego słowa, zachowania i przekonania nie są wzajemnie zgodne przypisuje się negatywne cechy

osobowości, takie jak fałszywość. Konsekwencja natomiast, przeciwnie, wiązana jest z siłą charakteru, uczciwością, racjonalnością. Dążenie do pozostania konsekwentnym jest wyzwalane poprzez zaangażowanie. Może być ono wywoływane za pomocą różnego rodzaju metod. Przykładem jest taktyka stosowana przez osoby zbierające datki przez telefon. Rozmowę telefoniczną rozpoczynana pytanie skierowane do rozmówcy: „Jak się dziś Pan/Pani czuje?". W ten sposób telefonujący zyskuje nie tylko sympatię, ale również wciągają tę osobę w rozmowę. Gdy ktoś uprzejmie pyta o samopoczucie, w sposób naturalny odpowiadamy: „Dziękuję. Dobrze." Wtedy, gdy już powiedzieliśmy, że wszystko jest dobrze, zbierającemu datki łatwiej jest rozwinąć rozmowę i przejść do realizacji celu.

3) **Reguła społecznego dowodu słuszności** – ludzie mają tendencję do określania czy dane postępowanie jest słuszne, czy nie zgodnie z, co uważają na ten temat inni. Jeżeli widzimy, że inni się w dany sposób zachowują, uważamy to zachowanie za poprawne. Zasada ta me swoje plusy. Działając zgodnie z nią, popełniamy mniej błędów. Nie mniej ma ona także swoje słabości. Twórcy reklam na przykład bardzo lubią informować swoich odbiorców o tym, jaką ogromną popularnością cieszy się dany produkt. Informacja, że inni klienci myślą, że jest on bardzo dobry, często wystarcza i nie trzeba wprost przekonywać, że rzeczywiście tak jest.

4) **Reguła lubienia kogoś** – lubimy ludzi, którzy są podobni do nas samych, niezależnie od tego, czy to, co mamy wspólne, to przekonania, doświadczenia, charakter czy hobby. W jednym z badań, które przeprowadzono w latach 70., kiedy popularny był styl hippie, sprawdzono, jak podobny ubiór wpływa na reakcję ludzi. Zaobserwowano, że eksperymentator zwracający się do studentów na kampusie z prośbą o monetę na telefon, otrzymywał ją częściej (w 2/3 przypadków), gdy był ubrany podobnie do osoby, którą o tę monetę prosił.

5) **Reguła autorytetu** – zasada te bazuje na skłonności ludzi do ulegania osobom, które budzą autorytet, wedle przekonania, że ci którzy mają autorytet zwykle odznaczają się wiedzą, mądrością i siłą. Informacją uruchamiającą taką reakcję może być tytuł, jakim się ona posługuje, symbole, takie jak biżuteria czy kosztowny samochód. W naszej kulturze na wysoką pozycje społeczną wskazuje także „uniform". W pewnym eksperymencie mężczyzna ubrany w garnitur przechodził przez ulicę na czerwonym świetle. Zaobserwowano, że trzy i pół raz więcej osób ruszało za nim niż wtedy, gdy był ubrany jeansy i koszulę flanelową (M. Lefkowitz, R.R. Blake, J.S. Mouton, 1955, za: R. Cialdini, 2007).

6) **Reguła niedostępności** – według tej zasady ludzie przypisują większą wartość dobrom, które są mniej osiągalne. Reguła ta jest wykorzystywana na przykład w taktyce „ograniczonej ilości". Polega ona na tym, że sprzedawca informuje klienta o wyczerpywaniu się zapasów pewnego produktu i że zaraz może go zabraknąć. Podobnie taktyka „nieprzekraczalnego terminu", w jakim dany produkt może zostać nabyty. W ten sposób sprzedawcy kreują wartość produktów i tworzą zainteresowanie produktami, które wcześniej nie cieszyły się dużym popytem.

Oprócz różnych sytuacji w życiu codziennym z manipulacją w komunikacji mamy do czynienia w polityce, reklamie oraz przekazach medialnych. Należy zaznaczyć, iż komunikaty, z jakimi mamy do czynienia poprzez media, kreują pewną szczególną rzeczywistość. Za pomocą obrazów przekazywana jest interpretacja różnych aspektów ludzkiego życia. Idee jakie są przez nie przekazywane, pozostają w świadomości ludzi i wpływają na ich egzystencję, a przywoływanie tych obrazów pozwala na kontynuowanie wpływu.

Biorąc pod uwagę intencje nadawcy, należy odróżnić manipulację od perswazji. Manipulacja jest pewną strategią, stosowaną dla osiągnięcia własnych korzyści i realizacji celu bez względu na dobro odbiorcy Perswazji zaś towarzyszy intencja osiągnięcia porozumienia oraz wzajemnej koordynacji. Jeżeli uznamy, iż komunikacja z natury jest nastawiona na osiągania porozumienia, to perswazja jest nieodłącznym jej elementem. Manipulacja, która jest stosowana w celach strategicznych, wybiega poza tę normę. Ocena czy mamy do czynienia z perswazją, czy manipulacją nadal jednak pozostaje zależna od znaczeń obecnych w komunikacji oraz ich interpretacji, w której skład wchodzi kontekst społeczny (por. M. Kliś, 2010).

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Jakie rodzaje szumów mogą przeszkadzać nadawcy w jasnym i zrozumiałym przekazaniu wiadomości odbiorcy?
2. Jakimi cechami powinien charakteryzować się dobry rozmówca?
3. Jakie konsekwencje niesie ze sobą stawianie barier wyróżnionych przez Gordona?
4. Podaj przykłady zachowań lub sytuacji, w których stosowana jest manipulacja oraz perswazja. Na czym polega podstawowa różnica między nimi?
5. Czy istnieją bariery, które w sposób konstruktywny wpływają na proces komunikowania się?
6. Zaprezentuj z kolegami/koleżankami proces komunikacji, który utrudniać będą różnego rodzaju zakłócenia/szumy.

2.6. Konflikty interpersonalne jako nieodłączny element interakcji społecznych

Prawdziwe konflikty między dwojgiem ludzi, te, które nie służą do tego, aby coś ukryć czy przerzucać na innych, które przeżywa się w najgłębszych warstwach wewnętrznej rzeczywistości i które jej dotyczą – nie są destrukcyjne.

Erich Fromm

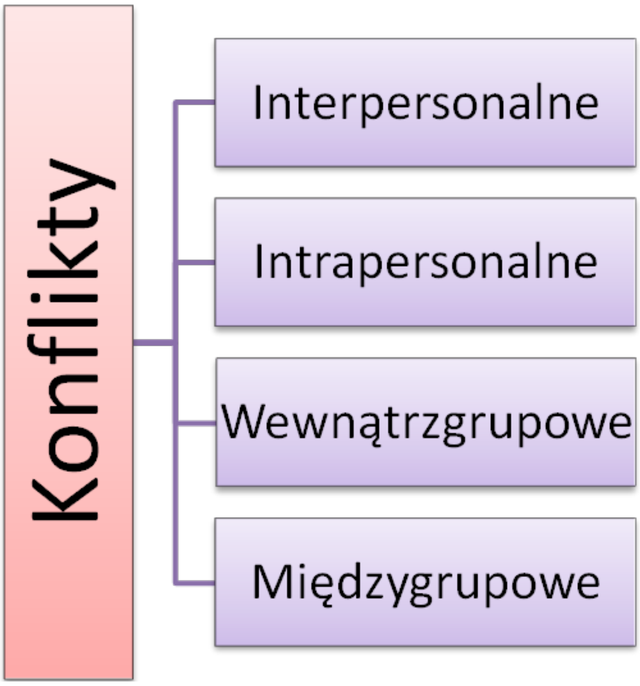
Do XVIII wieku w nauce panował pogląd, iż życie może powstawać samorodnie, z materii nieożywionej. Pogląd ten, zwany *generatio spontanea,* doskonale odzwierciedla opis eksperymentu, w wyniku którego mają powstać myszy: „Weź garnek na bieliznę, włóż do niego brudną koszulę, garść zboża i kawałek sera. Po pewnym czasie ujrzysz w garnku dorosłe myszy, które powstaną samorodnie z nieżywej zawartości garnka" (F. Gel, 1986, za: S. Chełpa, T. Witkowski, 2004, s.15).

najsłynniejszy chemik XVII wieku, twórca terminologii chemicznej i odkrywca amoniaku

Autorem tego eksperymentu był J. B. van Helmont. Pogląd *generatio spontanea* funkcjonował 3,5 tysiąca lat. Jednym z powodów, dla których ludzie tak długo byli przekonani o samorodnym powstawaniu życia, była niechęć ówczesnych naukowców do wykonywania doświadczeń. Uważano, że naukowcowi nie wypada pracować rękami i nikt nie sprawdził eksperymentu Helmonta. Drugim powodem była jednomyślność i brak konfliktu. Żaden naukowiec nie zakwestionował tego poglądu, nie spierał się o prawdę. W końcu pojawił się człowiek, który dokonał rewolucji. Był nim L. Pasteur i stoczył on czteroletnią „bitwę tytanów" w imię prawdy (por. S. Chełpa, T. Witkowski, 2004).

Czym jest konflikt

Konflikt interpersonalny jest to sytuacja napięcia pomiędzy dwiema lub więcej osobami lub grupami, które mają sprzeczne cele (E. Aronson, T.D. Wilson, R.M. Akert, 1997). W sytuacji konfliktu strony spierają się o ograniczone zasoby lub realizację interesów, które są lub wydają się być niemożliwe do pogodzenia. Strony te są od siebie zależne, co oznacza, że żadna ze stron nie może zrealizować własnych celów i dążeń bez zgody czy udziału drugiej strony, a ponadto jedna strona może swoimi działaniami przeszkadzać lub utrudniać drugiej stronie osiąganie celów (Ch. Moore, 1989, za: A. Cybulko, 2009). Oprócz konfliktów interpersonalnych istnieją także **konflikty intrapersonalne**, czyli wewnętrzne zaburzenie równowagi i integracji psychicznej, stanowiące niezbędny warunek rozwoju człowieka (K. Dąbrowski, 1979) oraz konflikty wewnątrzgrupowe i międzygrupowe.



Schemat 10. Rodzaje konfliktów

Źródło: Opracowanie własne

Od niektórych sporów chcemy się uwolnić i traktujemy je jako niepożądane. Lecz nie wszystkie spory są złem koniecznym. Konflikty mogą przynieść nam również korzyści. L. Pasteur zburzył cały porządek i dokonał przełomu w nauce. Spór, jaki rozpoczął, i walka, którą stoczył w imię swoich przekonań, były niezwykle konstruktywne. Konflikt może stać się szansą na poszerzenie wiedzy o sobie, zbudowanie autonomii czy wypracowanie nowych, lepszych sposobów porozumiewania się. Nie należy się obawiać napięcia, które mu towarzyszy. Oddzielając emocje i koncentrując się na interesach i potrzebach, łatwiej dojść do konstruktywnych rozwiązań. Konflikt poprowadzony i zakończony w sposób konstruktywny zbliża do siebie ludzi. Jest więc równie naturalny i potrzebny, jak gorączka w walce z chorobą. Oprócz konfliktów pozytywnych, konstruktywnych pojawiają się także konflikty negatywne, destrukcyjne. Są to konflikty negatywnie wpływające na życie ludzi, nie przynoszą żadnych korzyści, powodują chaos i stagnację.

Przyczyn i okoliczności konfliktów jest bardzo dużo. Różne są też sposoby radzenia sobie z konfliktami i ich rozwiązywania. Trudno jest podać uniwersalne rozwiązanie na konflikt. Na pewno znajomość przyczyn nieporozumień, świadomość własnych reakcji, umiejętność rozpoznania tych reakcji u innych, znajomość pewnych kategorii zachowań, strategii postępowania i wypróbowanych technik rozwiązywania konfliktów jest tym, co pomoże w zarządzaniu konfliktem. Poniżej przedstawiono podstawowe informacje, z których Czytelnik dowie się, jakie są rodzaje konfliktów, podstawowe metody sterowania nimi i ich rozwiązywania oraz ogólnie pojawiające się style radzenia sobie z nimi (por. S. Chełpa, T. Witkowski, 2004).

Rodzaje konfliktów

Przyczyny nieporozumień mogą być bardzo różne. Ich zrozumienie jest kluczowe, jeżeli chcemy konstruktywnie podejść do sytuacji.

Mediator, moderator, trener. Zrealizował projekty zarządzania konfliktami w ponad 40 krajach. Jako pierwszy wprowadził mediacje w Polsce

Ch. Moore(1989, za: A. Cybulko, 2009) opracował koło konfliktów, które służy jako podstawa do zarządzania konfliktem. Z jego pomocą można określić przyczynę konfliktu (zob. rysunek 5).

Moore wyróżnia pięć rodzajów konfliktów. W zależności do tego, co stanowi jego źródło możemy mieć o czynienia z:

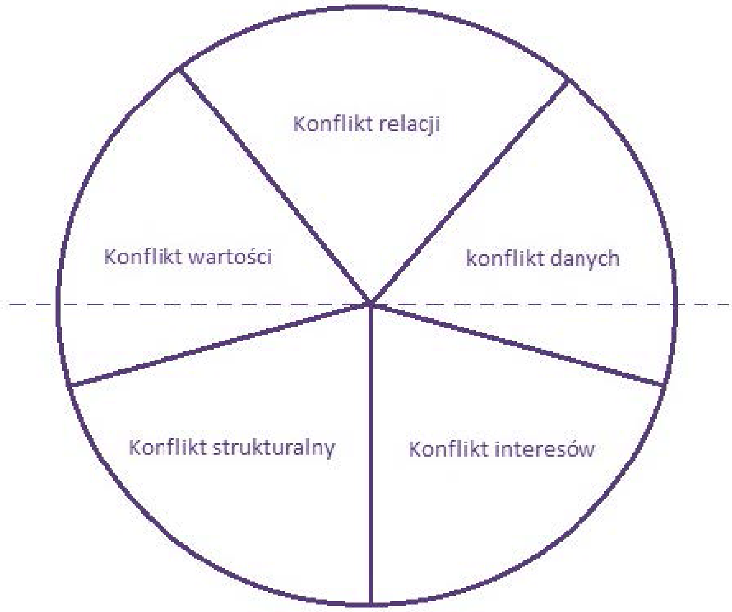
(1) **Konfliktem danych –** powstaje na tle informacji posiadanych przez uczestników konfliktu. Podłożem może być posługiwanie się przez każdą ze stron informacjami z innego źródła. Ma to wpływ szczególnie wtedy, gdy strony nie są w stanie określić stanu faktycznego. Ponadto informacje posiadane przez jedną lub obie strony mogą być niekompletne lub błędne. Do konfliktu mogą przyczynić się także różnice indywidualne w zakresie przetwarzania oraz interpretacji tych samych danych. Dodatkowo sprzyjają temu konfliktowi takie czynniki jak: brak komunikacji lub negatywne nastawienie. Jeśli strony nie porzucą podejrzeń co do złych intencji i jeśli nie zaczną ze sobą rozmawiać, nie poznają informacji, jakimi dysponuje druga strona, a zwłaszcza ich nie zweryfikują. Ponadto jeśli w relacji pomiędzy stronami nie ma zaufania i pojawiają się oskarżenia o celowe zniekształcanie lub ukrywanie informacji, może dojść do eskalacji konfliktu.

(2) **Konfliktem relacji –** odnosi się do stosunków międzyludzkich i może powstać na bazie negatywnie nasyconej relacji pomiędzy stronami. Sprzyja temu stereotypowe podejście do drugiej osoby lub brak wzajemnego zrozumienia. Tego rodzaju konflikt może się pojawić bez konkretnej i obiektywnej przyczyny. Jego podłoże jest często nieracjonalne, co powoduje, iż jest on trudny do rozwiązania, a nawet – nierozwiązywalny. Jego następstwem jest często dalsza eskalacja konfliktu.

(3) **Konfliktem wartości –** jego podstawą są różnice w zakresie wyznawanych wartości lub światopoglądzie. Zazwyczaj prowadzą do niego próby narzucenia komuś własnych przekonań, brak akceptacji dla odmiennych wartości czy przypisywanie sobie jedynej racji i najbardziej słusznych poglądów. Konflikt ten prowadzi do wrogości oraz uniemożliwia współpracę. Może być bardzo głęboki i trudny do rozwiązania. Jeśli strony pozostaną skoncentrowane na dzielących je poglądach, może dojść do eskalacji konfliktu.

(4) **Konflikt strukturalny –** dotyczy kontekstu sytuacyjnego. Do konfliktu może dojść w przypadku, gdy pojawiają się czynniki zewnętrzne, które ograniczają możliwość realizacji potrzeb stron biorących w nim udział. Należą do nich: ograniczone zasoby (pieniądze, wykwalifikowani pracownicy, woda), pełnione role społeczne, struktura organizacji, presja czasu, odległość itp. Sposobem na wyjście z trudnej sytuacji i jednocześnie poradzenie sobie z tego rodzaju konfliktem jest zwrócenie uwagi, iż jego przyczyną są czynniki zewnętrzne. Dzięki temu strony mogą wspólnie skupić się na pokonaniu zewnętrznych ograniczeń.

(5) **Konflikt interesów –** pojawia się, gdy strony rywalizują ze sobą o pewne dobra lub gdy mają odmienne potrzeby. Charakterystyczne jest to, że któraś ze stron próbuje zaspokoić własne potrzeby kosztem potrzeb drugiej strony. Mogą być to potrzeby psychologiczne, materialne lub proceduralne.



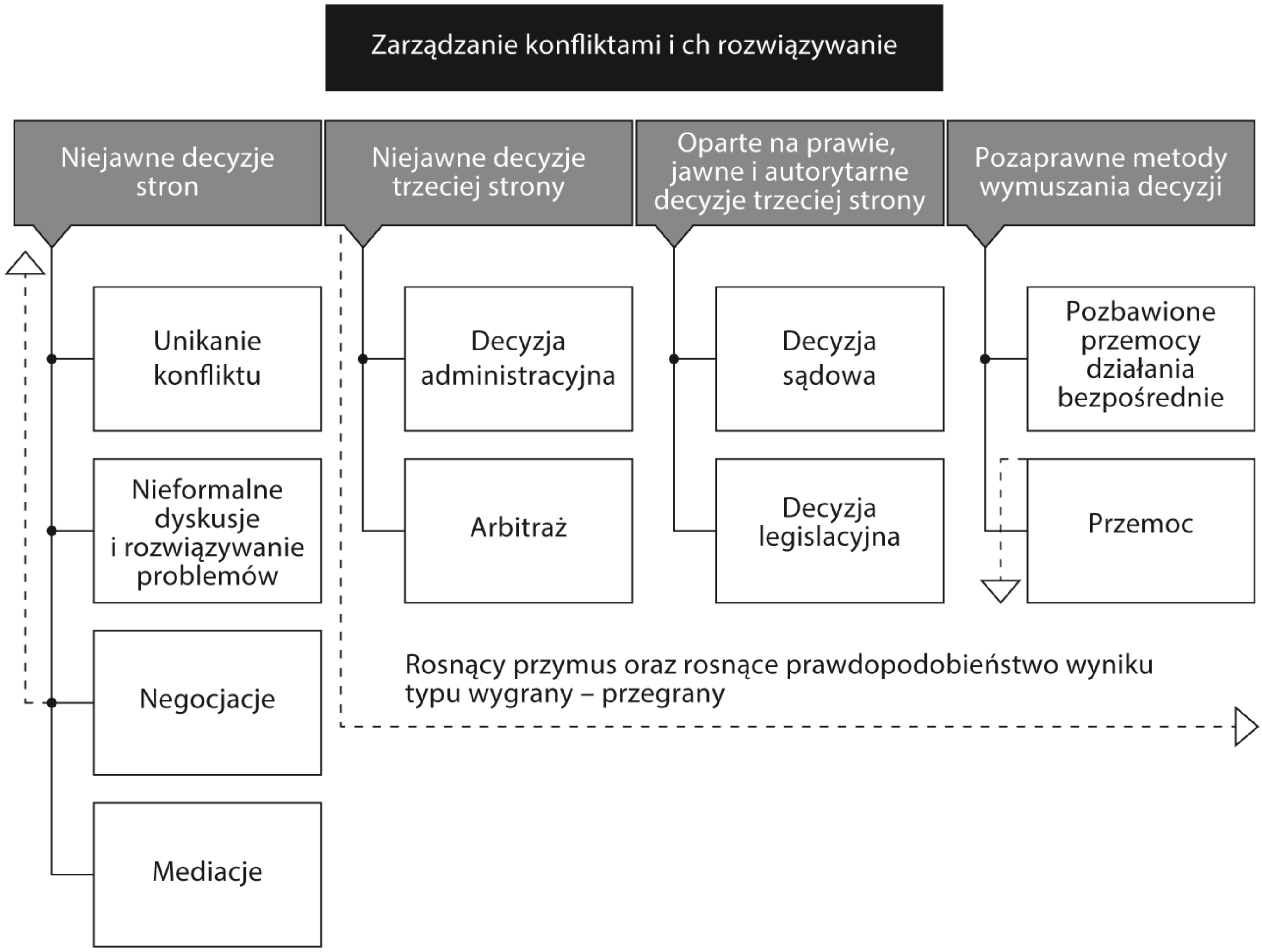
Rysunek 5. Koło konfliktu.

Źródło: (Ch. Moore, 1989, za: A. Cybulko, 2009

Rozpoznanie konfliktu nie zawsze jest proste. Jedne konflikty mogą zaczynać się od jednego źródła, z czasem przechodząc na inne obszary, a inne mogą od razu toczyć się na kilku obszarach jednocześnie. Zazwyczaj konflikt eskaluje w górę koła, np. w niesprzyjających okolicznościach prosty konflikt interesów może przerodzić się w konflikt danych, który może następnie przejść w konflikt relacji (Ch. Moore, 1989; za: A. Cybulko, 2009). Kolejną ważną kwestią dotyczącą konfliktów są metody sterowania nimi i ich rozwiązywania.

Zarządzanie konfliktami i ich rozwiązywanie

Osoby, pomiędzy którymi istnieje konflikt mogą sięgnąć do różnych sposobów jego rozwiązania. Dostępne metody mogą być różne ze względu na: stopień sformalizowania, prywatności, zaangażowania stron, rodzaj podjętej decyzji, rozmiar przymusu stosowanego przez strony konfliktu lub wobec nich oraz w przypadku, gdy w spór zostaje włączona trzecia strona – różny może być jej zakres uprawnień władczych. Poniżej przedstawiono kontinuum procedur wykorzystywanych w rozwiązywaniu konfliktów (zob. schemat 11).



Schemat 11. Kontinuum zarządzania konfliktem oraz sposobów jego rozwiązywania

Źródło: Ch. Moore, 2009

Kontinuum możliwych rozwiązań rozciąga się od nieformalnych i prywatnych procedur, w których uczestniczą jedynie zainteresowane strony i ewentualnie trzecia strona, pomagająca w procesie (są one umieszczone na lewym krańcu kontinuum), do działań opierających się na przymusie, władzy publicznej, które nastawione są na wymuszenie uległości. Te oraz zawarte pomiędzy nimi rodzaje postępowania zostały opisane szczegółowo poniżej.

Nieporozumienia są elementem nieodłącznym interakcji pomiędzy ludźmi i większość z nas radzi sobie z nimi w sposób nieformalny. Pierwszym możliwym do wystąpienia działaniem może być **unikanie konfliktu**. Dyskomfort, jaki mu towarzyszy, niedostrzeganie powagi sytuacji, brak siły i wiary w możliwość zmiany sytuacji lub po prostu brak gotowości do podjęcia działań związanych z problemem powoduje, że osoby na początku unikają się wzajemnie.

Z czasem wzrost napięcia lub okoliczności zmuszają osoby do podjęcia działania. Wówczas strony konfliktu najczęściej podejmują próbę rozwiązania problemu i przedyskutowania nieporozumień. W codziennym życiu **nieformalna dyskusja** często okazuje się wystarczająca, doprowadzając do rozwiązania. Oczywiście zdarza się, że niemożliwe jest osiągnięcie porozumienia i konflikt pozostaje nierozwiązany. Obok nieformalnych rozmów najbardziej powszechnym sposobem rozwiązywania konfliktów są negocjacje (R. Fisher, W. Ury, 1981; G.R. Shell, 1999; L. Thompson, 2001; za: Ch. Moore, 2009).

Negocjacje polegają na dobrowolnym nawiązaniu czasowej relacji pomiędzy stronami. Celem jest przedstawienie sobie nawzajem własnych potrzeb i interesów, wymiana informacji na temat przepływu określonych zasobów, rozstrzygnięcie kwestii przyszłej współpracy czy określenie procedury rozwiązania problemów. Czasem przeprowadzenie negocjacji jest utrudnione lub wręcz niemożliwe, zwłaszcza gdy strony różnią się podejściem emocjonalnym oraz materialnym. Jeśli strony napotykają trudności lub gdy następuje impas, konieczne może okazać się wsparcie osoby trzeciej (np. K. Bargiel Matusiewicz, 2010).

Mediacja jest bliska technice negocjacji, lecz w jej przypadku w cały proces zaangażowana zostaje dodatkowo trzecia strona. Jej głównym zadaniem jest towarzyszenie stronom konfliktu w osiąganiu satysfakcjonującego je porozumienia. Decyzje są podejmowane wyłącznie przez osoby będące w konflikcie, a proces dochodzenia do rozstrzygnięć jest dobrowolny. Aby mediacja miała pozytywny wpływ, osoba mediatora musi być akceptowana przez obie strony konfliktu. Mediacje najczęściej są podejmowane, gdy strony nie potrafią same poradzić sobie z konfliktem.

Nieformalna dyskusja, negocjacje i mediacja to metody, w których prawo do podejmowania decyzji posiadają wyłącznie osoby będące w konflikcie. Metody te charakteryzują się wysokim poziomem osobistej kontroli nad rezultatami konfliktu. Poniżej przedstawione zostaną metody, w których większy wpływ na efekt końcowy konfliktu mają zewnętrzni decydenci. Nawiązują one do rozstrzygnięcia sporu w kategoriach „wygrany-przegrany” lub „albo-albo” (por. Ch. Moore, 2009). Podejścia te można podzielić na publiczne i prywatne oraz prawne i pozaprawne.

Administracyjne bądź hierarchiczne rozwiązywanie konfliktów jest stosowane, gdy pojawia się konflikt wewnątrz organizacji lub pomiędzy organizacją a jej członkami. W tym przypadku decyzja w ramach konfliktu zostaje powierzona osobie trzeciej, która nie jest bezpośrednio w niego zaangażowana, ale nie musi być bezstronna. Jeśli konflikt pojawia się w prywatnej firmie, w jej oddziale czy pomiędzy jej pracownikami, procedura ta może mieć charakter prywatny. Jeśli w spór zaangażowany jest przedstawiciel administracji czy instytucja rządowa, wówczas ma ona charakter publiczny. Z założenia powyższa procedura jest ukierunkowana na osiągnięcie równowagi pomiędzy interesami jednostek lub grup a potrzebami całego systemu.

Uczestnicy konfliktu mogą również dobrowolnie zdecydować się na **arbitraż**. Jest to metoda polegająca na włączeniu do procesu osoby neutralnej i bezstronnej, która podejmie decyzje, rozstrzygając sporne kwestie. Decyzja ta może być dla nich wiążąca lub jedynie instrukcyjna. Bardzo ważne jest jednak to, by osoba trzecia nie była zaangażowana w relację. Zaletą arbitrażu jest prywatność i niejawny charakter całego postępowania oraz jego wyniku. Jest on także mniej sformalizowany, szybszy i wymaga mniejszych nakładów finansowych niż postępowanie sądowe. Osoby będące w konflikcie mają także większą kontrolę nad wynikiem, ponieważ mogą wybrać własnego arbitra lub zespół arbitrów (por. Ch. Moore, 2009).

W przypadku, gdy strony zdecydują się na postępowanie sądowe, zachodzi **interwencja zinstytucjonalizowanej oraz społecznie legitymizowanej władzy.** Kwestia znalezienia rozwiązania nabiera wówczas charakteru publicznego. Przy wykonywaniu tej procedury w imieniu stron zazwyczaj występują adwokaci, a decyzja jest zależna od sędziego, a czasem również od ławy przysięgłych. Postępowanie opiera się nie tylko na potrzebach, interesach i argumentacji obu stron, ale również na obowiązujących powszechnie wartościach i normach społecznych. Decyzja natomiast jest zgodna z przyjętymi ustawami i orzecznictwem. Polega ona na przyznaniu racji jednej ze stron konfliktu, co jasno wskazuje wygranego i przegranego. Ponadto jest ona wiążąca i zastosowanie się do niej można wyegzekwować na drodze prawnej. Wybór tej metody jest równoznaczny z utratą kontroli nad wynikiem. Zaletą natomiast – możliwość stanowczej obrony swoich racji oraz szansa na rozstrzygnięcie sporu w korzystny, usankcjonowany społecznie i prawnie sposób.

Publicznym i odwołującym się do prawa sposobem rozwiązania konfliktu jest również **wykorzystanie procedur legislacyjnych**. Metoda ta jest zazwyczaj stosowana w sytuacji pojawiania się ważnych konfliktów w większej zbiorowości, choć może ona mieć także zastosowanie w przypadku jednostek. Polega ona na podejmowaniu decyzji przez głosowanie. Wpływ, jaki osoba może wywrzeć na decyzję ustawodawcy, zależy od poparcia, jakiego udzielają inni dla jej przekonań. Jednostronny i stanowczy charakter decyzji, jaka zapadnie, w pewnym stopniu może zostać zneutralizowany przez zawarte w ustawie kompromisowe rozwiązania.

Istnieją jeszcze działania pozbawione charakteru prawnego, ponieważ nie są działaniami społecznie legitymizowanymi i zakładają stosowanie metod, które mają przekonać lub zmusić drugą stronę do tego, by się dostosowała lub uległa. Można wyróżnić dwa rodzaje takich działań: działania pokojowe i przemoc.

Działania pokojowe mogą być podejmowane lub zaniechane przez jednostkę lub grupę osób, co ma zmusić drugą stronę do postępowania w oczekiwany sposób (G. Sharp 1973, za: Ch, Moore, 2003). Repertuar działań pokojowych wyklucza stosowanie przymusu fizycznego i przemocy, a szkody psychologiczne mają być minimalne. Najlepsze warunki do stosowania działań pokojowych występują w sytuacji, gdy obie strony łączy zależność umotywowana wspólnym dobrem. Jedna strona może wówczas wpłynąć na drugą, odmawiając współpracy lub działać odwrotnie do oczekiwań. W ramach działań pokojowych należy wspomnieć o obywatelskim nieposłuszeństwie. Jego przykładem może być działalność pokojowych aktywistów, którzy, aby zwrócić uwagę społeczeństwa na szkodliwe czy niesprawiedliwe działanie swojego przeciwnika, naruszają powszechnie funkcjonujące normy i prawa. Działania pokojowe mogą mieć charakter publiczny lub prywatny.

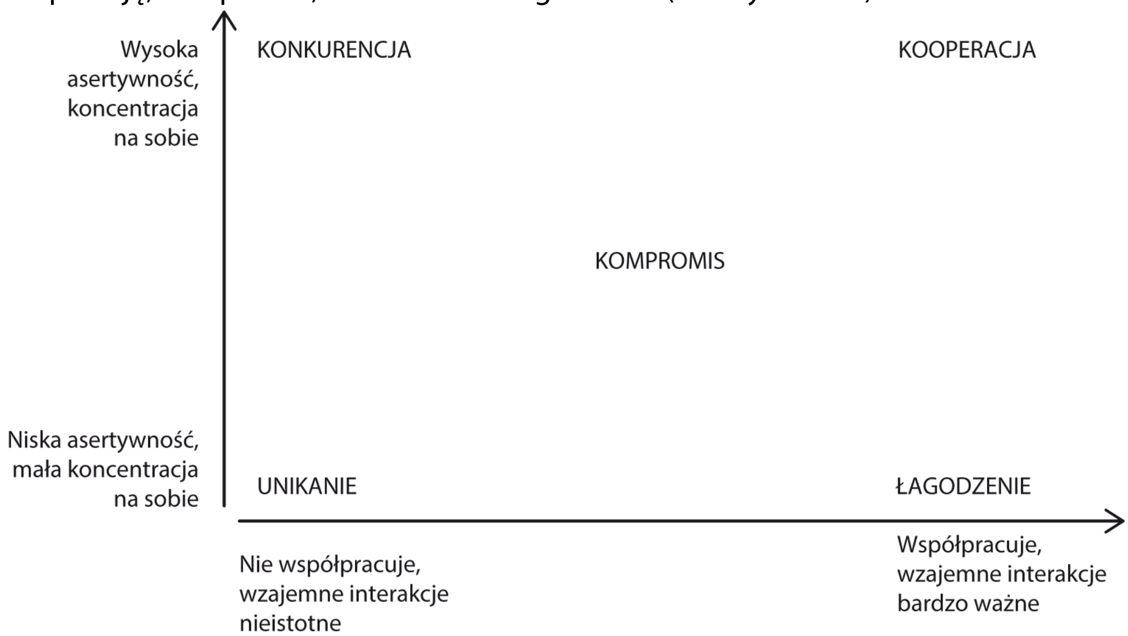
Przemoc lub przymus fizyczny znajduje się na końcu kontinuum. Stosowanie przemocy i przymusu wiąże się z założeniem, iż druga strona ustąpi pod groźbą wystarczająco wysokich kosztów wynikających z trwania przy własnym stanowisku. Wystarczająca ilość siły, gotowość do jej użycia oraz przekonanie o nich przeciwnika decyduje w tym przypadku o powodzeniu (za: Ch. Moore, 2009).

Ludzie różnie reagują w sytuacji konfliktu. Niektórzy starają się łagodzić już samą sytuację, która mogłaby do niego doprowadzić, inni wchodzą w konflikt bez obaw, ale w późniejszym etapie różnie się zachowują. Każdy z nas jest indywidualnością, posiada własną osobowość i temperament, a – co za tym idzie – tendencję do zachowywania się w pewien określony sposób. Jak różne mogą być nasze charaktery, tak różne mogą być style radzenia sobie z konfliktem.

Metody rozwiązywania konfliktów

Profesor zarządzania na Uniwersytecie stanu Floryda. Bada m.in. organizacyjne zachowania człowieka

Henry L. Tosi oraz jego współpracownicy opracowali model stylów reakcji na konflikt (H.L. Tosi, J.R Rizzo, S.J. Carroll, 1990, za: S. Chełpa, T. Witkowski, 2004). Krystalizując wiedzę twórców najważniejszych teorii zachowania się człowieka w sytuacji konfliktowej, wyróżnili pięć podstawowych stylów reakcji: rywalizację, kooperację, kompromis, unikanie oraz łagodzenie (zob. rysunek 6).



Rysunek 6. Model osobowościowych stylów reagowania na konflikt, za: S. Chełpa, T. Witkowski, 2004

Styl, w jakim dana osoba reaguje na konflikt, daje się opisać z perspektywy dwóch generalnych wymiarów: koncentracji na sobie i poziomu asertywności oraz skłonności do współpracy i dbałości o relacje z innymi. Przyglądając się powyższemu schematowi, można zauważyć, iż osoby wysoce asertywne i skoncentrowane na sobie w sytuacji konfliktowej będą konkurować lub współpracować. Natomiast osoby nisko asertywne, skoncentrowane na innych będą unikać konfliktu lub go łagodzić. Nałożenie obu wymiarów na siebie tworzy przestrzeń, w której możemy umiejscowić własny styl. Gdyby poprowadzić na schemacie idealną wypadkową, przecięłaby ona styl kompromisowy, który, w odróżnieniu od położonych w rogach skrajnych stylów, znajduje się w samym środku. Należy wziąć pod uwagę, iż skrajne zachowania zdarzają się rzadko i przedstawione style mogą służyć jedynie jako wyznaczniki pewnych skłonności. Poniżej każdy z nich został szerzej opisany (za: S. Chełpa, T. Witkowski, 2004).

Unikanie charakteryzuje ludzi, którzy, z powodu frustracji oraz napięcia emocjonalnego, wolą wycofać się niż podejmować wysiłek w celu konstruktywnego rozwiązania konfliktu. Podejście to może wynikać z przekonań osoby (konflikt jest czymś złym, niepotrzebnym, poniżającym) lub złych doświadczeń (uczucia zranione przez konflikty w przeszłości teraz powodują unikanie). Unikanie może zachodzić przez unikanie miejsca, w którym dzieje się sytuacja konfliktowa lub odwlekanie jakichkolwiek działań związanych z sytuacją konfliktową, wzajemne utrzymywanie pozornie dobrych relacji i udawanie, że konflikt nie istnieje, ignorowanie i przemilczanie problemu. Należy zaznaczyć, iż unikanie może być także konstruktywne, szczególnie w następujących okolicznościach: gdy przedmiot sporu jest nieistotny lub mało wartościowy, gdy szanse na porozumienie są małe lub gdy występuje presja czasu.

Łagodzenie to zachowywanie się zgodnie z interesem drugiej strony. Osoby, które starają się załagodzić sytuację konfliktową, dążą przede wszystkim do zachowania dobrych relacji z innymi, nawet kosztem własnych interesów. Obawiając się pogorszenia stosunków oraz osamotnienia, rezygnują z własnych potrzeb. Podobnie jak osoby unikające uważają, iż konflikt jest czymś złym. Łagodzenie może się okazać rozsądnym podejściem w sytuacji, gdy stwierdzimy, iż popełniliśmy błąd i chcemy skorygować swoje stanowisko oraz gdy nie zależy nam na przedmiocie konfliktu, a drugiej stronie – bardzo. Jest to również pozytywne podejście, gdy druga strona ma zdecydowanie silniejszą pozycję, a nasze ewentualne korzyści przewidujemy po upływie dłuższego czasu.

Konkurencja to podejście do konfliktu jak do gry, w której się wygrywa i odnosi sukces albo przegrywa i ponosi porażkę. Osoba charakteryzująca się tym stylem ma tendencje do spostrzegania siebie w roli zwycięzcy i stosuje wiele sposobów, również nieuczciwych, żeby to osiągnąć. Reagowanie z pozycji siły jest pewnym sposobem na obronę własnej samooceny, dlatego wiele osób preferuje konkurencję. Niemniej styl ten ma pozytywne aspekty, zwłaszcza w sytuacjach krytycznych, gdy decyzje trzeba podjąć szybko.

Kompromis jest stylem bazującym na przekonaniu, że nie zawsze można uzyskać to, czego się pragnie i czasem trzeba z czegoś zrezygnować, aby się porozumieć. Osoby reagujące w sposób kompromisowy poszukują wspólnej płaszczyzny, na której obie strony zarówno zyskują, ale także coś tracą. Są one przekonane, że należy wykazywać większe zrozumienie dla potrzeb i interesów drugiej strony oraz być chętnym do ustąpienia. Styl ten jest często stosowany. Jest on odpowiedni zwłaszcza, gdy obie strony, mając wygórowane oczekiwania, są równe pod względem siły. Jego zastosowanie jest również użyteczne, gdy występuje deficyt czasu. Przyjęcie tymczasowo kompromisowego rozwiązania pozwala zmniejszyć napięcie i zyskać czas na głębszą analizę problemu i wypracowanie satysfakcjonującego rozwiązania.

Kooperacja opiera się na przekonaniu, że zawsze można znaleźć rozwiązanie satysfakcjonujące obie strony, bez potrzeby rezygnacji z celów którejkolwiek ze stron. Kooperatorzy akceptują oczekiwania drugiej strony i są gotowi wspólnie pracować nad rozwiązaniem korzystnym dla każdego. Nawet jeśli takie rozwiązanie jest niemożliwe do osiągnięcia, osoby te są przekonane, że warto podjąć wysiłki i takiego rozwiązania poszukiwać. Ogólnie jest to jeden ze skuteczniejszych reakcji stylów rozwiązywania konfliktów. Szczególnie, gdy wydaje się, że cele obu stron są niezgodne, współpraca pomaga określić faktyczne podłoże nieporozumień, które często tkwi w komunikacji lub jej braku. Współpraca jest efektywną metodą, gdy strony mają wspólny cel, ale nie mogą zgodzić się co do sposobów jego realizacji. Nastawienie na współpracę w konflikcie niesie ze sobą korzyści w postaci silniejszych relacji, wysokich wyników w działaniu oraz zrealizowanych celów.

Sposób reagowania na konflikt może być różny w zależności od okoliczności. Możemy unikać konfliktów w szkole lub w pracy, ale w kłótniach z rodzeństwem czy z rodzicami będziemy dążyli do zawarcia kompromisu. Przesuwanie się jednak w przestrzeni opisanego modelu zawsze pozostaje ograniczone – styl danej osoby, jeśli ulega pewnym zmianom w różnych sytuacjach, to zmiany te nie będą diametralne.

Doktor psychologii, wykładowca, doradca i trener. Opublikował ponad sto artykułów naukowych i popularno-naukowych.

Doktor psychologii, wykładowca, konsultant, pisarz, wielbiciel gór i muzyki jazzowej.

S. Chełpa i **T. Witkowski (**2004) porównują konflikt do zjawiska atmosferycznego występującego w przyrodzie – do burzy. Podobnie jak burza w przyrodzie tak konflikty pojawiają się w sposób naturalny i nieunikniony w życiu każdego z nas. Mimo że na burzę potrafimy się przygotować i nawet podziwiać widok nieba czy słuchać kropel bijących o szyby i parapet, w przypadku konfliktu często nie wiemy, jak sobie poradzić. Autorzy dochodzą do wniosku, iż kluczowe jest spojrzenie na sytuację z boku. Kiedy znajdujemy się w samym centrum sytuacji konfliktowej, zazwyczaj nie potrafimy spojrzeć na sprawę z dystansu. Stajemy się szalejącymi żywiołami i nawet nie dostrzegamy czynników, które są charakterystyczne dla konfliktu. Próbując wskazać właściwe podejście do sytuacji konfliktowej, najistotniejsza jest, autorzy ci podkreślają, analiza. Zalecają by rozłożyć sytuację na pojedyncze elementy – odsunąć emocje na bok i skoncentrować się na interesach. Nie należy obawiać się wybuchu napięcia, które towarzyszy konfliktom. Czasami jesteśmy zmuszeni uciekać, czasem chcemy walczyć a czasem nie warto inwestować czasu czy energii na spieranie się. To czy konflikt nastąpi, jakie będzie miał dla nas znaczenie i jakie strategie zastosujemy, zależy od naszej oceny.

Pogłębianie wiedzy pozwala doskonalić własne umiejętności, dlatego zachęcamy do sięgania do literatury. Wiele praktycznych i ciekawych informacji na temat konfliktów można odnaleźć w książce wyżej wymienionych autorów „Psychologia konfliktów" (S. Chełpa, T. Witkowski, 2004). Jest to pozycja popularnonaukowa, napisana z myślą o szerokiej grupie odbiorców. Stanowi bogate źródło wiedzy przede wszystkim praktycznej, popartej wieloletnim doświadczeniem jej autorów.[8]

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Przypomnij sobie ostatnią sytuację konfliktową, w której brałeś udział. Dokonaj jej analizy, odpowiadając na następujące pytania:

   Co było przyczyną konfliktu?

   Jakie emocje pojawiły się po każdej ze stron?

   Jakie były interesy każdej strony?

   Jakie działania zostały podjęte?

8 S. Chełpa, T. Witkowski, *Psychologia konfliktów*, Wrocław 2004.

Jakie były rezultaty?

Bazując na nowych informacjach, jak oceniasz swoje zachowanie w sytuacjach konfliktowych?

Z czego jesteś zadowolony, a nad czym mógłbyś/mogłabyś popracować?

2. Jakie mogą być przyczyny konfliktów? Podaj przykłady.
3. Jakie charakterystyki i zachowania rozmówców mogą utrudniać rozwiązanie konfliktu?
4. Jaka jest rola konfliktów w życiu ludzi?

2.7. Asertywność i empatia

▶ **[...] wasze „tak" niech będzie „tak", a „nie" „niech będzie „nie"...**

Jakub Apostoł

Asertywność

- Co to jest asertywność?

„Matematyczny wzór" na asertywność zaproponował H. Fensterheim:

Asertywność = Szacunek dla samego siebie.

Według autora równania podkreśla ono, że dopóki działamy asertywnie, zwiększa się przez nasze poczucie godności, które staje się podstawowym kryterium oceny asertywności zachowań: *Jeśli będziesz miał wątpliwości, czy postąpiłeś asertywnie, zadaj sobie pytanie, czy to działanie choć trochę podniosło twoje poczucie godności. Jeżeli tak, to było asertywne. Jeśli nie – było nieasertywne* (H. Fensterheim, 2006).

A. Townend rozumie pojęcie „**asertywność**" jako szacunek zarówno wobec siebie, jak i otoczenia, kładąc przy tym nacisk na uczciwość: *[…] asertywność polega na zachowaniu wiary we własne siły i możliwości, pielęgnowanie pozytywnego stosunku do siebie oraz innych, a także na wykorzystaniu takich wzorców zachowań wobec otoczenia, które są uczciwe i szczere* (A. Townend, 1991).

Jedną z propozycji katalogu zachowań wobec otoczenia stanowi rozumienie terminu „asertywność" według W. Drydan (2007): *Asertywność to elastyczne dążenie do realizacji własnych potrzeb, wyrażania swoich opinii, do otwartego okazywania swoich emocji, w odpowiedni sposób i w odpowiednim czasie.*

G. Lindenfield (1995 w kontekście pojęcia „asertywność" i zachowań z nim związanych, używa terminu „komunikowanie". Asertywność w tym ujęciu polega na komunikowaniu własnych potrzeb, chęci i uczuć, przy czym w procesie tym należy przestrzegać praw innych osób. Samo komunikowanie zaś powinno być konkretne i zdecydowane.

Swoistym podsumowaniem i rozszerzeniem zakresu zaprezentowanych koncepcji rozumienia terminu „asertywność", jest jego charakterystyka dokonana przez M. Giannantonio (2011): *[…] asertywność to okazywanie w sposób możliwie jak najszybszy i bezpośredni – mając na uwadze własne cele i interesy – osobistych emocji, uczuć, oczekiwań i przekonań, ale w sposób wyważony, w zależności od panujących okoliczności, przy zastosowaniu zarówno agresji, jak i bierności, tak aby uzyskać jak największe korzyści lub jak najmniejsze straty dla samych siebie, zarówno na bieżąco, jak i w późniejszym czasie.*

Zachowanie asertywne

Asertywność wyrażana jest przez daną osobę poprzez jej zachowanie.

- Co to jest zachowanie asertywne?

Podobnie jak w przypadku terminu „asertywność", również pojęcie „zachowanie asertywne" określane jest w różny sposób, przy czym często obydwa pojęcia używane są zamiennie.

Zachowanie asertywne stanowi, według A. Lazarusa, jeden z aspektów wolności emocjonalnej. Przez wolność tą rozumie on umiejętność rozpoznawania i wyrażania uczuć.

A. Lazarus kładzie nacisk na poznawanie przysługujących nam praw i zabieganie o nie po to, aby wypracować wolność emocjonalną (cyt. za: H. Fensterheim, 2006).

Na gruncie teorii analizy transakcyjnej, syntezą zachowania asertywnego jest sformułowanie (A. Townend, 1991):

Ja jestem OK – ty jesteś OK

Chodzi więc o to, aby w wyniku zachowania asertywnego zarówno jego podmiot, jak i jego adresat mieli poczucie, że są szanowani.

J. Gut i W. Haman, analizując zachowanie asertywne, opierają się na jego oficjalnej definicji (za: Association for Advancement of Behavior Therapy) nawiązującej do godności człowieka: *Zachowania asertywne realizowane są w kontaktach z ludźmi i wyrażają uczucia, postawy, życzenia, opinie lub prawa danej osoby w sposób bezpośredni i stanowczy, ale bez naruszania praw i godności drugiego człowieka* (J. Gut, 1993).

Aspekt osobistej godności w kontekście zachowania asertywnego podejmowany jest w jego charakterystyce dokonanej przez M. Król-Fijewską i P. Fijewskiego: *[…] zachowanie asertywne to styl reagowania, obrony, a także ekspansji, który nie wiąże się z przemocą, nie jest inwazyjny oraz nie narusza niczyjej godności osobistej* (M. Król – Fijewska, 2007, s.).

W niniejszej koncepcji rozumienie zachowania asertywnego prezentowane jest w odniesieniu m.in. do przemocy. Kwestia zachowań agresywnych, asertywnych i uległych, oraz ich rozpoznawania stanowi powszechny temat rozważań związanych z asertywnością.

Zachowania asertywne, uległe i agresywne – kryteria ich rozpoznawania

Podaje się różne kryteria, za pomocą których charakteryzowane są zachowania asertywne.

- Jak definiuje się zachowania: uległe oraz agresywne?

W świetle teorii analizy transakcyjnej (jeden z kierunków psychologii, stworzony przez E. Berne'a) zachowania asertywne definiuje się następująco (A. Townend, 1991):

Ja nie jestem OK – ty jesteś OK; zachowanie bierne
Ja jestem OK – ty nie jesteś OK; zachowanie agresywne

„Wspólnym mianownikiem" obu rodzajów zachowań jest nierówność pozycji uczestniczących w nich podmiotów: ktoś jest „lepszy», a ktoś „gorszy».

Zachowanie bierne określane jest w różny sposób. Alternatywne jego definicje podaje W. Dryden, określając bierność jako: *brak inicjatywy* lub *brak siły przebicia*, lub *stałą skłonność do uległości*. Z kolei agresję definiuje on jako *sposób komunikowania się*, charakteryzujący się wrogością, gwałtownością i zastraszaniem (W. Dryden, 2007). W szerszym ujęciu przedstawia agresję J. Ranschburg, definiując ją jako *[…] każde zamierzone działanie,* *w formie otwartej lub symbolicznej, mające na celu wyrządzenie komuś szkody, straty lub bólu*[9].

Według A. Townend omawiane zachowania umiejscowione są na kontinuum: od nieasertywnego do agresywnego, pomiędzy nimi zaś lokalizuje się zachowanie asertywne (A. Townend, 1991).

Istnieją jednak sytuacje, w których zarówno zachowania bierne, jak i agresywne przyjmują charakter zachowań asertywnych. M. Giannantonio wyraża to w formie żartobliwego przykładu: lepiej wstrzymać się z wyrażaniem swojej opinii, gdy ma się przyłożony pistolet do głowy i pokazać naszą asertywność poprzez bierność. Podobnie czasem nasza agresja jest uzasadniona, gdy bronimy naszych praw – jest to wtedy zachowanie asertywne (M. Giannantonio, 2011).

W większości przypadków zachowania uległe, agresywne i asertywne wyraźnie różnią się między sobą.

- Jak rozpoznać zachowania: uległe, agresywne i asertywne?

Identyfikacja rodzaju omawianych zachowań jest przeprowadzana m.in. na obszarze komunikacji interpersonalnej. Tabela 1 prezentuje syntezę informacji na ten temat, przedstawiając przykłady z zakresu komunikacji w odniesieniu do rodzaju poszczególnych zachowań (według W. Dryden, 2007).

Tabela 6. Wskaźniki rodzaju zachowań na obszarze komunikacji interpersonalnej

Zachowanie asertywne	Zachowanie agresywne	Zachowanie bierne
Stosowanie komunikatów *Ja*: - *Wolałbym...* - *Nie zgadzam się...* itp.	Agresywne komunikaty: - *Muszę mieć...* - *Doskonale wiem, że...* itp.	Chaotyczne, niepewne, szukające akceptacji komunikaty *Ja*: - *Tylko chciałem wspomnieć...*
Odróżnianie faktów od opinii: - *Ja rozumiem to tak...* - *Moim zdaniem...* itp.	Brak rozróżnienia między faktami a opiniami: - *Nie, nie, ten sposób jest...* - *Teraz jedynie możemy...* itp.	Dyskredytowanie własnych oczekiwań i opinii: - *Być może się mylę, ale...*
Poznawanie potrzeb i opinii innych: - *Co myślisz o...?* - *Jakie masz pomysły...?* itp.	Pytania budujące niepewność i strach: - Wciąż jeszcze nie skończyłeś? - *Co ty w ogóle sobie...* itp.	Bagatelizowanie własnych opinii i oczekiwań: - *Nie chciałbym sprawiać kłopotu, ale...* itp.
Konstruktywna krytyka: - *Nie akceptuję, kiedy ty...* - *Zauważyłem ostatnio, że ty...*	Manipulacja poprzez udzielanie porad: - *Wiesz, na twoim miejscu...* - *Tak naprawdę powinieneś...*	Zdecydowana samokrytyka: - *Zdecydowanie nie powinienem był...* - *Przepraszam, oczywiście...* itp.
Stanowczy, ciepły ton głosu	Formalny, zimny, czasem protekcjonalny ton głosu.	Delikatny, cichy ton głosu.
Dostosowanie głosu do sytuacji (ton głosu)	Ostry, donośny głos.	Coraz słabsze natężenie głosu (w miarę trwania sytuacji)
Płynny i spokojny ton wypowiedzi	Płynność i pewność wypowiedzi (nieprzerwany potok słów)	Niepewny, nieuporządkowany ton wypowiedzi.
Utrzymywanie stałego, ale nieprzytłaczającego, kontaktu wzrokowego	Intensywny kontakt wzrokowy (spojrzenie ostre, przeszywające)	Uciekające spojrzenie.
Odpowiednia mimika twarzy (spójna z uczuciami)	Napięta mimika twarzy.	Nienaturalna mimika twarzy (niespójna z emocjami)
Otwarta postawa i gestykulacja	Gwałtowna, szybka gestykulacja itp.	Napięta, gwałtowna gestykulacja.

Źródło: Opracowanie własne, za: Dryden W., Constantinou D., Asertywność krok po kroku, Kraków 2007, s. 24-39

9 Cyt. za: Pilecka B., Agresja jako zjawisko psychologiczne, w: Borkowski R. (red.), *Konflikty współczesnego świata 1*, Kraków 2001, [Dokument elektroniczny], http://winntbg.bg.agh.edu.pl/skrypty2/0073/index.php, 15.03.2013.

Bardziej szczegółową analizę wskaźników poszczególnych zachowań, w obszarze komunikacji niewerbalnej, którą przeprowadził G. Lindenfield, przedstawia Tabela 7.

Tabela 7. Wskaźniki poszczególnych rodzajów zachowań – na obszarze komunikacji niewerbalnej

Zachowanie asertywne	Zachowanie agresywne	Zachowanie bierne
Głos spokojny, opanowany Postawa odprężenia Bezpośredni kontakt wzrokowy Wyprostowana pozycja ciała	Krzyk, podniesiony głos Wskazanie palcem Założone ręce Pozycja nieruchoma	Głos proszący Zaciśnięte pięści Przesuwanie stóp Oczy zwrócone w dół Pochylenie

Źródło: Lindenfield G., Asertywność, czyli jak być otwartym, skutecznym i naturalnym, Łódź 1995, s. 22

Zaprezentowane w tabelach przykłady wskaźników świadczących o określonych rodzajach zachowań nie wyczerpują ich pełnej listy. Istnieje ponadto szereg innych wskaźników stosowania poszczególnych rodzajów zachowań dotyczących innych sfer funkcjonowania danej osoby.

Zachowania uległe, asertywne i agresywne a cechy osoby przedsiębiorczej

W niniejszej części zostaną omówione niektóre cechy charakteryzujące osobę przedsiębiorczą i jednocześnie dotyczące komunikacji interpersonalnej, mianowicie: „umiejętność porozumiewania się" oraz „umiejętność rozwiązywania konfliktów".

Umiejętność porozumiewania się a typy zachowań

W zakresie porozumiewania się mówimy o komunikacji werbalnej i niewerbalnej. W zakresie komunikacji werbalnej podkreśla się zasadnicze znaczenie umiejętności aktywnego słuchania**,** której posiadanie pozwala na osiąganie optymalnego kontaktu.

Aktywne słuchanie uznawane jest za kluczowe w przypadku zachowań asertywnych, których stosowanie ma doprowadzić daną osobę do osiągania określonego celu (W. Dryden, 2007). W związku z tym istotnego znaczenia nabiera kształtowanie umiejętności aktywnego słuchania poprzez opanowywanie szeregu technik komunikacyjnych –mają one pomagać w stosowaniu asertywnych zachowań. A. Townend (1991) podkreśla, że w zakresie stosowania technik komunikacyjnych zachodzą różnice pomiędzy osobami – w zależności od tego, jakie zachowania przejawiają: asertywne czy agresywne. Autorka podkreśla różnicę w kwestii umiejętności zadawania pytań. Umiejętność ta jest jedną z technik komunikacyjnych (J. Gut, W. Haman, 1993). Osoby preferujące zachowanie agresywne nie umieją słuchać pytań ani ich zadawać – w przeciwieństwie do osób zachowujących się asertywnie.

Istnieje szeroki wachlarz **technik komunikacyjnych** wspomagających umiejętność aktywnego słuchania, a – tym samym – wspomagających proces przejawiania zachowań asertywnych. Autorzy zajmujący się asertywnością, jednocześnie trenerzy asertywności, szczególnie często wymieniają niektóre spośród nich:

- klaryfikacja, czyli swoistego rodzaju podsumowanie wypowiedzi rozmówcy (M. Król-Fijewska, P. Fijewski, 2007);
- parafraza, czyli powtarzanie własnymi słowami sensu wypowiedzi rozmówcy, Dzielenie się własnymi doświadczeniami (J. Gut, W. Haman, 1993).

- posługiwanie się tym samym językiem, czyli **dostosowanie się** do procesu przetwarzania informacji rozmówcy, oparte na wzroku, słuchu, bądź dotyku (A. Townend, 1991).

W kontekście komunikacji niewerbalnej w zakresie kształtowania umiejętności słuchania zaleca się stosowanie określonych technik komunikacyjnych mających na celu wzmacnianie zachowań asertywnych. Przykładem są niektóre zalecenia technik komunikacyjnych według W. Dryden:

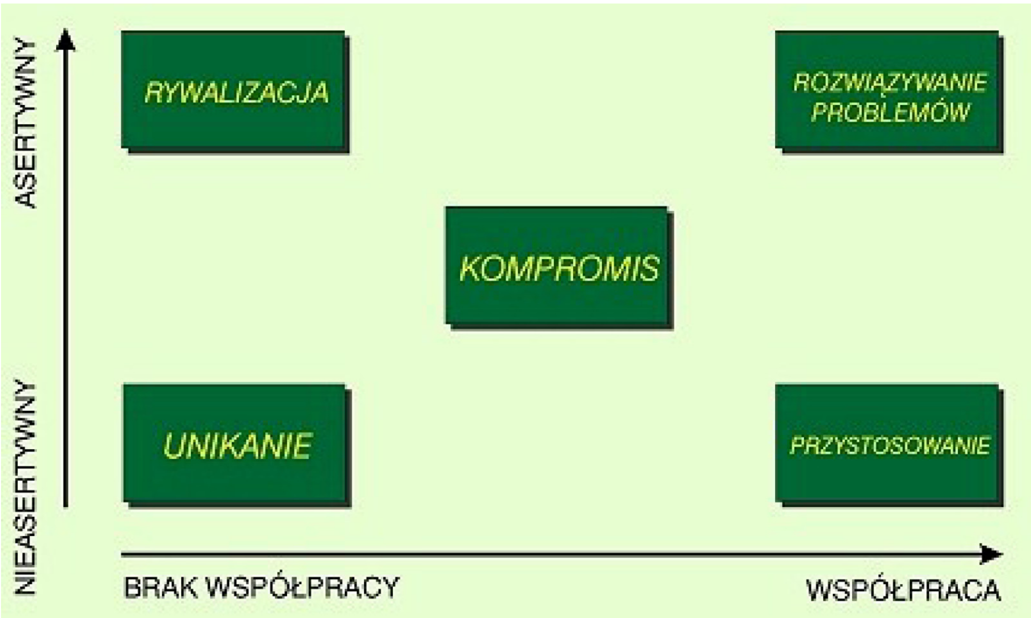
- lekko pochylona postawa, kiedy ktoś odpowiada na nasze pytanie;
- uśmiech;
- delikatne, naturalne kiwanie głową, kiedy ktoś do nas mówi.

Podsumowując, cechą osoby przedsiębiorczej jest umiejętność komunikowania się. Jej podstawą jest aktywne słuchanie stosowane w zachowaniach asertywnych.

Umiejętność rozwiązywania konfliktów a typy zachowań

Drugą omawianą cechą osoby przedsiębiorczej jest jej „umiejętność rozwiązywania konfliktów". Efektywność ich rozwiązywania jest różna – w zależności od tego, czy stosowane jest zachowanie uległe, asertywne czy agresywne. Efektywność rozwiązywania konfliktów zależy także od przyjętego sposobu ich rozwiązywania.

R. Blake i J. S. Mounton wyróżniają kilka dominujących sposobów rozwiązywania konfliktów, odnosząc się jednocześnie do asertywności, co przedstawia schemat 12 (cyt.za: W. Cwalina, J. Sobek, 2000).



Schemat 12. Style rozwiązania konfliktów

Źródło: W. Cwalina, J. Sobek, Psychologia organizacji i zarządzania – przywództwo, konflikty, negocjacje, motywacja do pracy, systemy zarządzania, w: D. Koradecka (red.), Nauka o pracy – bezpieczeństwo, higiena, ergonomia; Warszawa 2000, Tom 5, Czynniki psychologiczne i społeczne, str. 58

Interpretując prezentowany schemat, **osoby zachowujące się ulegle,** jak się wydaje, będą skłonne do preferowania unikania i przystosowania jako sposobów rozwiązywania konfliktów.

R. Blake i J.S. Mouton podają, że *[…] unikanie – polega na ignorowaniu lub pomijaniu kwestii konfliktu*, natomiast przystosowanie to *[…] rekonstrukcja własnego stanowiska, jednak nie w wyniku pełnej akceptacji poglądów drugiej strony, tylko dla pożądanej współpracy* (cyt. za: W. Cwalina, J. Sobek, 2000). Innymi słowy, osoba zachowująca się ulegle ustępuje, nawet własnym kosztem.

Osoba zachowująca się agresywnie, w świetle powyższego schematu, preferuje rywalizację, określaną jako *[…] dążenie za wszelką cenę do rozstrzygnięcia konfliktu na swoją stronę* (cyt.za W. Cwalina, J. Sobek, 2000).

Osoba zachowująca się asertywnie preferuje „rozwiązywanie problemów" jako metodę radzenia sobie z konfliktami. Metoda ta *[…] polega na szukaniu obustronnych korzyści wspólnego rozwiązania konfliktu potraktowanego problemowo* (cyt. za W. Cwalina, J. Sobek, 2000).

Empatia

Niezmiernie istotną cechą osoby przedsiębiorczej jest empatia, ponieważ to przede wszystkim dzięki niej możliwe jest stawanie się osobą zachowującą się asertywnie. Zachowania asertywne wzmagają nasze możliwości w zakresie optymalnego komunikowania się z innymi ludźmi. Z kolei umiejętność komunikowania się jest cechą osoby przedsiębiorczej.

Empatia stanowi jeden z kluczy do właściwego komunikowania się (M. Braun-Gałkowska, 1987).

- Co to jest empatia?

Empatia to umiejętność wczuwania się w aktualne emocje innych osób (P. Barszcz, 2012). Dzięki niej niejako „wchodzimy" do wnętrza człowieka – w jego świat myśli, przeżyć i pragnień[10]. Empatia rozumiana jest także, jako *[…] uczuciowe utożsamianie się z inną osobą i wywoływaniem w sobie uczucia, które ona przeżywa* (cyt. za: A. Faber, E. Mazlish, 1998).

Kształtowanie empatii

- Jakie warunki należałoby spełnić, aby być bardziej empatycznym?

Postulowane warunki wynikają z koncepcji tzw. **inteligencji emocjonalnej**. Empatia jest jednym z tworzących ją komponentów. W związku z tym, szukając odpowiedzi na postawione aktualnie pytanie, istnieje konieczność zapoznania się z pojęciem „inteligencja emocjonalna". Inteligencja emocjonalna według D. Golemana, (1999) składa się z pięciu podstawowych kompetencji:

- samoświadomości, czyli... m.in. rozpoznawania własnych emocji;
- samoregulacji, czyli... m.in. kontrolowania szkodliwych emocji;
- motywacji, czyli... umiejętności korzystania z emocji do osiągania celów;
- empatii;
- umiejętności społecznych, czyli... asertywności.

Empatia, jak wynika z prezentowanej koncepcji, jest czwartą kompetencją tworzącą inteligencję emocjonalną. Drogą do nauczenia się empatii jest praktyczne opanowywanie pierwszych trzech kompetencji.

Po pierwsze, chodzi więc o to, aby „zapoznać się" z własnymi emocjami, przepracowując niniejszym własną samoświadomość (pierwsza kompetencja). Wbrew pozorom nie musi to być takie proste. W psychologii powszechnie znane są takie terminy, jak: „tłumienie emocji", „spychanie emocji do podświadomości", „zaprzeczanie emocjom", „ślepota emocjonalna", „brak wglądu w siebie" itp. Bez samoświadomości empatia nie jest możliwa.

Po drugie, uczenie się empatii wymaga nabycia umiejętności radzenia sobie z własnymi emocjami, wypracowanie efektywnych mechanizmów samoregulacji (druga kompetencja). Chodzi o osiągnięcie takiego stanu, w którym to osoba panuje nad emocjami, a nie one nad nią. Bez samoregulacji empatia być może jest możliwa, ale mało efektywna.

Po trzecie, umiejętnością przybliżającą do empatyczności jest nabywanie doświadczenia emocjonalnego, kumulowanego w wyniku wielokrotnych, świadomie podejmowanych prób stosowania emocji w praktyce i ukierunkowanych na osiąganie celów wynikających z samomotywacji (trzeci czynnik inteligencji emocjonalnej). Istnieje niejako możliwość uczynienia emocji własnym sprzymierzeńcem, przyjacielem, atutem, obrońcą – w zależności od stawianych celów.

10 M. Dziewiecki, Co to jest empatia i jaki ma ona związek z miłością?, www.opoka.org.pl/biblioteka/I/IP/empatia_zm.html, 18.02.2013.

Rozpatrując zagadnienie empatii w kontekście edukacji, stwierdzić można, że nauczyciel przedstawiając wiedzę teoretyczną z zakresu przedsiębiorczości, odwołując się do swojej wiedzy teoretycznej, pod względem intelektualnym jest wiarygodny, ale z koncepcji empatii musi odpowiedzieć sobie na pytanie:

- Czy uczyć o empatii (teoretycznie), czy uczyć empatii w praktyce?

Jak się wydaje, rzeczywistość edukacyjna bez problemu pozwala na uczenie empatii w sposób teoretyczny. Właściwie już samo podjęcie takiego tematu często może stanowić innowację.

Dla nauczyciela, który zdecyduje się uczyć empatii w praktyce, wynikają określone, dotykające go wręcz bardzo osobiście, konsekwencje:

1. Praca nad sobą.

Po pierwsze, trudno uczyć samoświadomości, czyli odczuwania i nazywania emocji, ewentualnie nie rozumiejąc emocji własnych.

Po drugie, trudno uczyć samoregulacji, czyli radzenia sobie z własnymi emocjami, nie radząc sobie z własnymi emocjami.

Po trzecie, trudno uczyć umiejętności korzystania ze swoich emocji tak, aby osiągać cele, gdy emocje są przeszkodą w osiąganiu własnych celów.

2. Podstawowym „narzędziem dydaktycznym" staje się osobowość nauczyciela.

3. Modyfikacja procesu samokształcenia nauczyciela.

Oznacza to, że doskonalenie kwalifikacji odbywa się także w sferze psychologicznej, a korzystanie z dobrych warsztatów psychologicznych, treningów rozwojowych, coachingu, a nawet psychoterapii, tworzy wewnętrzne kompetencje, na których nauczyciel może się oprzeć, ucząc empatii.

Empatia a efektywność komunikowania się

Jak wynika z lektury poprzedniego punktu fundamentem empatii jest posiadanie umiejętności dotyczących postępowania z własnymi emocjami. Dopiero gdy w wystarczającym stopniu jesteśmy kompetentni w zakresie naszego życia emocjonalnego, jesteśmy w stanie „wczuwać się" w inną osobę, czyli dysponować empatią. Jest ona bardzo istotnym atutem w procesie komunikacji interpersonalnej.

Dla ilustracji roli empatii w komunikacji rozpatrzmy przykładową, uproszczoną sytuację, w której istnieje brak porozumienia pomiędzy szefem a podwładnym. Sytuacja przedstawia się jak poniżej:

„Tłumaczę mu n-ty raz. Bez skutku" – twierdzi szef.

Dlaczego?

Problem polega na tym, że w opisywanej sytuacji szef liczy na efektywność komunikowania się z podwładnym poprzez oddziaływanie na jego intelekt („tłumaczę"). Tymczasem możliwą przyczyną braku porozumienia mogą być trudności związane z ich komunikowaniem się na poziomie emocjonalnym. Empatyczny szef ma w opisywanej sytuacji szansę „prześwietlenia" siebie i podwładnego na poziomie emocjonalnym i określenia, na czym polega trudność w ich wzajemnym komunikowaniu się, czyli źródła braku porozumienia. Uzyskuje wtedy punkt wyjścia do podjęcia kolejnej próby skomunikowania się z podwładnym, tym razem uwzględniając emocje obu stron.

Powiedzmy, że odezwie się do podwładnego następująco:

„Lubię z tobą rozmawiać".

„Lubię" to oddziaływanie na poziom emocjonalny podwładnego. Co ważne, nie ma gwarancji, iż szef „trafi" z komunikatem, świadomość istnienia sfery emocjonalnej w komunikacji, praca nad własnymi emocjami i próby nawiązania kontaktu (nawet, gdy może to oznaczać wielokrotne „pudła") w pewnej perspektywie czasowej zwiększy jednak szanse na empatyczne kompetencje szefa.

J. R. Gibb podkreśla, że empatia w istotny sposób wpływa na przezwyciężanie barier komunikacyjnych, rozumiejąc empatię jako komunikowanie polegające na wczuwaniu się w położenie słuchacza (cyt. za: J.A.F. Stoner, Ch. Wankel 1992).

Empatia a zachowanie asertywne

Pozostaje jeszcze podkreślić rolę empatii w kształtowaniu zachowania asertywnego, które jest przejawem asertywności w praktyce.

Jak wiemy, asertywność należy do piątego komponentu tworzącego inteligencję emocjonalną i wynika ona z komponentu czwartego, czyli empatii. Asertywność niejako stoi „na szczycie" umiejętności związanych z emocjami. Stąd też „bazą" asertywności są emocje.

Podsumowując, empatia jest drogą do asertywności – ta zaś uwidacznia się w praktyce, w formie zachowań asertywnych. Te ostatnie zaś bardzo efektywnie wspomagają proces komunikacji interpersonalnej.

Etapy procesu rozumowania dotyczącego empatii można przedstawić następująco:

Samoświadomość ⇨ Samoregulacja ⇨ Motywacja ⇨ Empatia ⇨ Asertywność ⇨ Zachowanie asertywne ⇨ Komunikacja interpersonalna ⇨ Osoba przedsiębiorcza.

2.8 Postawa przedsiębiorcza

Asertywność i empatia są istotnymi komponentami postawy przedsiębiorczej. S. Mika określa **postawę** jako *[…] trwałą strukturę (lub dyspozycję do pojawienia się takiej struktury) procesów poznawczych, emocjonalnych i tendencji do zachowań, w której wyraża się określony stosunek wobec danego przedmiotu*[11].

Postawa obejmuje zatem niejako **trzy sfery**: intelekt (procesy poznawcze), emocje i zachowanie (tendencja do określonych zachowań). W sferze emocji, w świetle analizowanej wcześniej definicji inteligencji emocjonalnej, postawa przedsiębiorcza „zawiera w sobie" asertywność i empatię.

Asertywność i empatia wpływa jednocześnie na sferę poznawczą, co uwidacznia się w stosowaniu określonych sposobów komunikowania opartych o aktywne słuchanie.

W sferze zachowania postawa przedsiębiorcza ujawnia się w stosowaniu zachowań asertywnych.

Podsumowując postawę przedsiębiorczą:

Postawa przedsiębiorcza to:

procesy poznawcze, czyli... aktywne słuchanie +
procesy emocjonalne, czyli... asertywność i empatia +
tendencja do zachowań, czyli... zachowania asertywne.

11 Cyt. za: B. Chrostowska, Wybrane teorie postaw, www.profesor.pl/publikacja,16655,Referaty,Wybrane-teorie-postaw, 06.05.2013.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. W jakich sytuacjach zachowanie uległe bądź agresywne jest zachowaniem asertywnym? Podaj przykłady.
2. Jakie prawa, które należy przestrzegać powinny być według Ciebie punktem odniesienia dla stosowania zachowań asertywnych? Przedstaw swoje poglądy na ten temat.
3. Jakie realne możliwości mają nauczyciele, którzy chcą nauczyć się empatii? Podaj swoje pomysły na ten temat.

2.9. Komunikacja a zatrudnienie

Poniedziałek
Ja.
Wtorek
Ja.
Środa
Ja.
Czwartek
Ja.

Witold Gombrowicz

Pojęcie zatrudnienia

Istnieją różne definicje zatrudnienia. Są one formułowane w zależności od dyscypliny, która zajmuje się tym pojęciem. I tak, w sensie prawnym zatrudnienie to na przykład wykonywanie pracy na podstawie stosunku pracy, stosunku służbowego oraz umowy o pracę nakładczą[12]. W takim rozumieniu zatrudnieniem nie jest więc choćby wykonywanie pracy na podstawie umowy zlecenia, umowy o dzieło, bądź umowy agencyjnej[13].

W niniejszym rozdziale zatrudnienie jest rozumiane przez pryzmat komunikacji interpersonalnej. Zgodnie jej z podstawowym schematem w komunikacji występują dwa podmioty, które się ze sobą komunikują: pracodawca i potencjalny pracownik, występujący w roli nadawcy bądź odbiorcy[14]. W niniejszym podręczniku zastosowano poniższe rozumienie terminu „zatrudnienie”:

Zatrudnienie to efekt procesu komunikacji interpersonalnej, jaka zaistniała pomiędzy pracodawcą a osobą starającą się o pracę.

W świetle powyższej definicji prześledzimy, co dzieje się pomiędzy pracodawcą a osobą starającą się o pracę na obszarze ich wzajemnej komunikacji interpersonalnej. Analiza ta opiera się na założeniu, że kształtowanie przez potencjalnego pracobiorcę optymalnej komunikacji interpersonalnej z potencjalnym pracodawcą w istotnym stopniu zwiększy szanse na uzyskanie zatrudnienia. W związku z tym przydatne okażą się wszystkie dotychczas zaprezentowane w bieżącym rozdziale treści dotyczące komunikacji. Można powiedzieć, że praktyczne opanowanie tych treści zwiększy szanse na rynku pracy.

12 M. Śmigiel, *Odpowiednie zatrudnienie w przepisach o zatrudnieniu i przeciwdziałaniu bezrobociu*, www.prawo-pracy.republika.pl/art.57.htm, 21.02.2013.
13 Liżewski, *Pojęć zatrudnienie i inna praca zarobkowa nie można utożsamiać*, www.samorzad.lex.pl/czytaj/-/artykul/pojec-zatrudnienie-i-inna-praca-zarobkowa-nie-mozna-utozsamiac, 07.03.2013.
14 A. Augustynek, *Komunikacja interpersonalna*, www.psychologia.net.pl/artykul.php?level=425, 21.02.2013

Należy przy tym zauważyć, że publikacje mające na celu pomaganie w uzyskaniu zatrudnienia w zasadzie koncentrują się na uzyskaniu umowy o pracę. W takim też aspekcie przeprowadzana będzie analiza komunikacji interpersonalnej w temacie dotyczącym problematyki zatrudnienia. Pamiętać jednak należy, że mające na celu uzyskanie umowy o pracę ćwiczenie umiejętności z zakresu komunikacji interpersonalnej równie dobrze sprawdzi się przy staraniach o pracę w ramach umów cywilnoprawnych (zlecenia, o dzieło itp.).

Etapy procesu rekrutacji

Osoba, która postanowiła starać się o pracę, potrzebuje liczyć się z tym, że proces rekrutacji może składać się z wielu etapów – w zależności od rozwiązań stosowanych w tym zakresie przez pracodawcę. W niniejszym poradniku proponujemy wspólne prześledzenie tych etapów, przyjmując założenie, że „sprzedaję moje Ja" (M. Ohoven, 1994). W związku z tym ujęcie starań o zatrudnienie jest następujące:

Szukanie pracy jest sprzedażą.
Ja jestem sprzedawcą.
Sprzedaję moje JA

- Jakie są korzyści z takiego ujęcia tematu?

Po pierwsze, starania o pracę ujmowane są z perspektywy komunikacji interpersonalnej, zaś jej mistrzami są dobrzy sprzedawcy, gdyż od ich umiejętności komunikowania się z innymi zależą osiągane przez nich wyniki. W ten sposób istnieje możliwość uczenia się od profesjonalistów.

Po drugie, radykalnie zwiększa się ilość użytecznych informacji, które osoba starająca się o zatrudnienie może czerpać choćby z licznych, użytecznych publikacji dotyczących prowadzenia sprzedaży i stosować je w praktyce starań o pracę.

Po trzecie, sprzedaż to jedna z kluczowych umiejętności przy prowadzeniu biznesu (R. Kiyosaki, 2009). Tym samym perspektywa starań o pracę rozumianych jako proces dokonywania sprzedaży wspiera przygotowania, oczywiście wstępnie, do ewentualnego prowadzenia biznesu – jeżeli taka decyzja kiedyś zostanie podjęta.

Po czwarte, gdy potencjalny pracobiorca spojrzy z perspektywy zapotrzebowania rynku na określone umiejętności, zauważy, że najwięcej ofert pracy dotyczy sprzedaży i pracodawca nie zawsze wymaga wcześniejszego doświadczenia. Przyjmując więc pogląd, że proces starań o pracę jest procesem sprzedaży, osoba poszukująca pracy ma szansę efektywnie zwiększać własne możliwości na rynku.

Etap 1. Informacja pracodawcy o ofercie pracy

Standardowo pracodawca zamieszcza na wybranym przez siebie nośniku informacji ofertę pracy, rozpoczynając proces komunikacji. Określa w ofercie kryteria, jakie powinna spełniać osoba zatrudniana. Z punktu widzenia sprzedawcy zamieszczenie takiej oferty jest sytuacją komfortową. Klient (pracodawca) określa w niej bowiem swoje potrzeby. Określenie potrzeb klienta jest tymczasem jedną z podstawowych czynności, jaką musi wykonać sprzedawca i jednocześnie jedną z najtrudniejszych (K. Podstawka, 1993). W opisywanym przypadku klient (pracodawca) daje sprzedawcy swoje potrzeby niejako „na talerzu".

Starania o zatrudnienie jedynie w oparciu o inicjatywę pracodawców jest tylko jednym ze sposobów działania. H. Fensterheim postuluje przyjęcie postawy aktywnej, co oznacza otwarcie się także na inne możliwości poszukiwań (H. Fensterheim, 2006). W związku z tym osoba starająca się o pracę, jeżeli nie chce ograniczyć się jedynie do komunikatów od pracodawców, które niejako „same do niej przyszły", ma możliwość naśladowania sprzedawców w wykonywaniu ich kolejnego, podstawowego zadania: poszukiwania klientów (A. Sznajder, 1993). Przyjęcie takiego podejścia generuje aktywność i ukierunkowuje myślenie na „rynkowe", przede wszystkim na analizowanie i badanie rynku pod kątem jego potencjalnych potrzeb i możliwości ich realizacji przez potencjalnego pracobiorcę (P. Hingston, 1992).

Etap 2. Przygotowanie i wysłanie dokumentów aplikacyjnych

Standardowo pracodawca przede wszystkim oczekuje CV. W przypadku młodych osób, jeszcze bez doświadczenia, nawet wtedy, gdy pracodawca tego nie oczekuje, sens ma napisanie listu motywacyjnego, w którym młody człowiek ma okazję zawrzeć dodatkowe, istotne informacje. CV oraz list motywacyjny zostaną omówione w dalszych rozdziałach.

Trzeba pamiętać, że dokumenty aplikacyjne są formą komunikacji interpersonalnej, wyrażaną za pomocą słów w formie druku i, tym samym, są komunikatem dla pracodawcy[15]. W związku z tym dokumenty te, zgodnie ze standardami sprzedaży, powinny być napisane pod kątem potrzeb pracodawcy – na tyle, na ile udało się je ustalić. Być może więc truizmem będzie w tym momencie stwierdzenie, że wysyłanie CV „hurtowo», bez uwzględnienia potrzeb adresata, raczej mija się z celem. Jeżeli pracodawca zatrudnia rekrutera, jego pierwszym zadaniem będzie „wyeliminowanie» kandydatów, którzy nie spełniają minimum kryteriów określonych przez pracodawcę[16].

Nie od rzeczy będzie także, przy przygotowywaniu materiałów aplikacyjnych, spojrzenie na nie pod kątem materiałów reklamowych, uwzględniając w odpowiednim stopniu wiadomości dotyczące reklamy zawarte w niniejszym podręczniku. „Produktem" przeznaczonym do „sprzedaży" jest bowiem JA osoby starającej się o pracę.

Przygotowanie się do rozmowy kwalifikacyjnej

W zależności od przyjętej przez pracodawcę, bądź reprezentujących go pracowników, koncepcji spotkanie rekrutacyjne może mieć różne formy. Najczęściej rekrutacja odbywa się poprzez rozmowę kwalifikacyjną, a więc ma formę bezpośredniej komunikacji interpersonalnej. Rozmowa kwalifikacyjna wymaga przygotowań, przy czym warto na nią spojrzeć z perspektywy sprzedawcy, jak na proces prowadzenia sprzedaży.

Podstawowym elementem przygotowań jest analiza produktu, którym w tym przypadku jest JA osoby starającej się o pracę. To bardzo istotne, ponieważ jednym z najważniejszych powodów niepowodzenia w sprzedaży jest niedostateczna znajomość produktu (D. Mc Corman, 1995). Podstawowym elementem przygotowań do sprzedaży jest zatem sformułowanie odpowiedzi na pytanie:

- Jakie cechy posiada mój „produkt", czyli JA?

Samoanaliza – nie tylko samego siebie, ale także dotychczas przeprowadzonych rozmów kwalifikacyjnych, rozumianych jako sprzedaż – jest regułą postępowania sprzedawców (S. Danielewicz 1994).

I wreszcie, etap przygotowań obejmuje także komunikację niewerbalną, zwłaszcza tzw. mowę ciała. Wszelkie ćwiczenia symulacyjne, odgrywane jako rozmowa kwalifikacyjna, będą niewątpliwie pomocne w pracy nad własną mową ciała[17].

15 A. Augustynek, *Komunikacja interpersonalna*, www.psychologia.net.pl/artykul.php?level=425, 21.02.2013.
16 M. Marzec, *Drugi i trzeci etap rekrutacji – co i jak?*, www.hrwpraktyce.blogspot.com/2012/08/drugi-i-trzeci-etap-rekrutacji-co-i-jak.html, 07.03.2013.
17 Zespół Praca.pl, *Przygotowanie do rozmowy kwalifikacyjnej*, www.praca.pl/poradniki/rozmowa-kwalifikacyjna/przygotowanie-do-rozmowy-kwalifikacyjnej_pr52.html, 21.02.2013.

Etap 4. Rozmowa kwalifikacyjna

Wiele uwagi poświęca się zagadnieniu pytań stawianych przez pracodawcę kandydatom do pracy oraz temu, jak należy na nie odpowiadać. Oczywiście jest to ważne. Pamiętajmy jednak, że z perspektywy sprzedawcy stawianie przez klienta pytań na temat produktu świadczy o jego zainteresowaniu. Klient, który stawia pytania, to świetny klient. A odpowiadanie na pytania zainteresowanego klienta zwiększa szanse na zakup produktu. To bardzo dobra wiadomość dla osoby starającej się o pracę, że potencjalny pracodawca zadaje jej pytania. Patrząc z perspektywy komunikacji interpersonalnej, zadawanie pytań jest aktywnym słuchaniem, zaś słuchanie to podstawa dochodzenia do porozumienia (Z.W. Brześkiewicz, 1997).

Niejednokrotnie zdarza się, że podczas rozmowy kwalifikacyjnej pracodawca mówi dużo więcej aniżeli kandydat do pracy[18]. Z perspektywy sprzedawcy to budząca nadzieję wiadomość. Jeżeli pracodawca jest skory do rozmowy, to istnieje okazja do postawienia mu różnych pytań. Umiejętnie stawiane pytania sprawiają, że klient, odpowiadając na nie, dodatkowo ujawnia swoje potrzeby, co daje większe możliwości oddziaływania.

Etap 5. Zatrudnienie lub informacja zwrotna

Jak wiadomo, nie każda rozmowa kwalifikacyjna przynosi sukces. Jednak każda z nich może przynosić korzyści. Istnieją różne ku temu możliwości.

Po pierwsze, patrząc nadal z perspektywy sprzedawcy, klient może przekazać informację zwrotną na temat „produktu", czyli JA osoby starającej się o zatrudnienie, co da nieocenioną okazję do niwelowania uświadomionych w ten sposób braków – pracy nad sobą i doskonalenia się.

Po drugie, jeżeli informacje zwrotne nie zostaną uzyskane, istnieje możliwość dostarczenia ich sobie samemu poprzez analizę własnej postawy w procesie rekrutacji do danej firmy, diagnozę błędów i pracę nad ich wyeliminowaniem.

Po trzecie, nieudana rozmowa kwalifikacyjna to bardzo dobra okazja do kształtowania w sobie myślenia pozytywnego – sprzedawcom zaleca się między innymi, aby po każdym niepowodzeniu w sprzedaży, pomyśleli w następujący sposób: każde NIE coraz bardziej przybliża mnie do TAK.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Co rozumiesz pod pojęciem JA?
2. Czy „sprzedawanie" JA pozwala mi zachować moją podmiotowość? Uzasadnij swoją odpowiedź.
3. Jakie uczucia budzi we mnie myśl, że moje JA jest „towarem" na rynku? Co mogę z tymi uczuciami zrobić? Jakie istnieją w tej mierze rozwiązania?
4. Jak doskonalić własne JA w kontekście poszukiwania pracy?

Bibliografia:

Aksman, J., Wpływ, perswazja, propaganda, manipulacja – próba uporządkowania pojęć, w: *Manipulacja, pedagogiczno-społeczne aspekty*, Kraków 2010, cz.1.

Aronson E., Wilson T.D., Akert R.M., *Psychologia społeczna, serce i umysł*, Poznań 1997.

18 MpiPS – Portal Publicznych Służb Zatrudnienia, *Jak przygotować się do rozmowy kwalifikacyjnej*, www.psz.praca.gov.pl/main.php, 21.02.2013.

Augustynek, A., *Komunikacja interpersonalna*. Artykuł opublikowany na stronie w Internecie: http://www.psychologia.net.pl/artykul.php?level=425, 2009, 5.04.2013.

Bargiel-Matusiewicz K., *Negocjacje i mediacje*, Warszawa 2010.

Barszcz P., *Jak pozyskiwać darowizny i 1% podatku na leczenie dziecka*, Bychawa 2012.

Bolton, R., Bariery na drodze komunikacji, w: J. Stewart (red.), *Mosty zamiast murów. Podręcznik komunikacji interpersonalnej,* Warszawa 2008.

Braun-Gałkowska M., *Psychologia domowa*, Olsztyn 1987.

Brzezińska, E., *Komunikacja społeczna*, Łódź 1997.

Brześkiewicz Z.W., *Supersłuchanie. Jak słuchać i być słuchanym*, Warszawa 1997.

Cialdini, R. B., *Wywieranie wpływu na ludzi. Teoria i praktyka*, Gdańsk 2007.

Cash A., *Psychologia dla bystrzaków,* Gliwice 2007.

Chełpa S., Witkowski T., *Psychologia konfliktów*, Wrocław 2004.

Corman Mc D., *Sztuka sprzedaży*, Warszawa 1995.

Cwalina W., Sobek J., Psychologia organizacji i zarządzania – przywództwo, konflikty, negocjacje, motywacja do pracy, systemy zarządzania, w: Koradecka D. (red.), *Nauka o pracy – bezpieczeństwo, higiena, ergonomia*; Warszawa 2000, Tom 5: Czynniki psychologiczne i społeczne.

Czerw A., ABC komunikacji*, Psychologia w szkole*, 2012, nr 3 (35).

Cybulko A., Konflikt, w: E. Gmurzyńska E. Morek R. (red.), *Mediacje. Teoria i praktyka,* Warszawa 2009.

Danielewicz S., *ABC akwizycji*, Katowice 1994.

Dąbrowski K., *Dezintegracja pozytywna*, Warszawa 1979.

Drydan W., Constantinou D., *Asertywność krok po kroku*, Kielce 2007.

Faber A., Mazlish E., *Jak mówić, żeby dzieci nas słuchały, jak słuchać, żeby dzieci do nas mówiły*, Poznań 1998.

Fensterheim H., Baer J., *Jak nauczyć się asertywności. Nie mów „TAK", gdy chcesz powiedzieć „NIE"*, Warszawa 2006.

Giannatonio M., *Być asertywnym. Jak nie dać się zdominować innym i rozwijać poczucie własnej wartości,* Kraków 2011.

Goleman D., *Inteligencja emocjonalna w praktyce*, Poznań 1999.

Golka, M., *Bariery w komunikowaniu i społeczeństwo (dez)informacyjne*, Warszawa 2008.

Gordon, T., *Wychowanie bez porażek w praktyce*, Warszawa 1993.

Griffin E., *Podstawy komunikacji społecznej,* Gdańsk 2003.

Gut J., Haman W., *Docenić konflikt. Od walki i manipulacji do współpracy,* Warszawa 1993.

Harwas-Napierała B., *Komunikacja interpersonalna w rodzinie*, Poznań 2006.

Hingston P., *Wielka księga marketingu*, Kraków 1992.

Kiyosaki R.T., *Zanim rzucisz pracę*, Osielsko 2009.

Kliś, M., Kształtowanie się pojęcia „manipulacja",:] *Manipulacja, pedagogiczno-społeczne aspekty*, Kraków 2010, *cz.1*.

Kosińska E., Zachara B. *Profilaktyka pierwszorzędowa,* Kraków 2003.

Król-Fijewska M., Fijewski P., *Asertywność menedżera*, Warszawa 2007.

Leathers D., *Komunikacja niewerbalna,* Warszawa 2007.

Lindenfield G., *Asertywność, czyli jak być otwartym skutecznym i naturalnym*, Łódź 1995.

Marshall G. red. *Słownik socjologii i nauk społecznych,* Warszawa 2004.

McKay M., Davis M., Fanning P., *Sztuka skutecznego porozumiewania się*. Gdańsk 2007.

Moore Ch. W., *Mediacje. Praktyczne strategie rozwiązywania konfliktów*, Warszawa 2009, (rozdz. 1).

Morreale S., Spitzberg B., Barge J., *Komunikacja między ludźmi,* Warszawa 2007.

Nęcki, Z., *Negocjacje w biznesie*. Wydanie 3, Kraków 1995.

Nęcki, Z., *Komunikowanie interpersonalne*, Wrocław 1992.

Nęcki, Z., *Komunikacja międzyludzka*, Kraków 2000, Rozdział 1 i 4.

Ober, J., *Informacja i komunikacja w zarządzaniu*, Gliwice 2007.

Ohoven M., *Magia sprzedaży, czyli jak oczarować klienta*, Warszawa 1994.

Okoń W. *Nowy słownik pedagogiczny,* Warszawa 2007.

Pilarska P., Ty mówisz, ja słucham, *Psychologia w szkole* 2012, nr 3 (35).

Podgórski R. *Socjologia wczoraj dziś jutro,* Rzeszów 2006.

Podstawka K., *Akwizycja i sprzedaż bezpośrednia*, Warszawa 1993.

Pratkanis, A., Aronson, E., *Wiek propagandy*, Warszawa 2005.

Reber A., Reber E. *Słownik psychologii,* Warszawa 2008.

Siuta J., *Słownik psychologii,* Kraków 2005.

Stankiewicz, J., *Komunikowanie się w organizacji*, Wrocław 2006.

Stoner J. A. F., Wankel Ch., *Kierowanie*, Warszawa 1992.

Szlachta B., *Słownik społeczny,* Kraków 2004.

Sznajder A., *Promocja i jej formy jako element marketingu*, Warszawa 1993.

Tkaczyk L., *Komunikacja niewerbalna,* Wrocław 1999.

Tokarz M., *Argumentacja Perswazja Manipulacja* Gdańsk 2006.

Townend A., *Jak doskonalić asertywność. Praktyczny podręcznik asertywności dla menedżerów*, Poznań 1991.

Netografia:

Augustynek A., *Komunikacja interpersonalna,* www.psychologia.net.pl, 23.02.2013.

Kijak M., *Sztuka Komunikacji – jak skutecznie się porozumiewać?,* www.projektsukces.pl/skuteczna-komunikacja.html, 11.03.2013.

Masłowski M., *Dobór kanałów komunikacji,* https://olimpiada-medialna.edu.pl/.../12/dobor-kanalow-komunikacji, 05.03.2013.

Sienkiewicz N., *Komunikacja międzyludzka,* www.malejew.w.interia.pl, 28.02.2013.

Szot J., *Kanał komunikacyjny.* www.mfiles.pl/pl/index.php/Kanał_komunikacyjny, 05.03. 2013.

Wiktor J., *Teoretyczne podstawy systemu komunikacji marketingowej* www.swiatmarketingu.pl/index.php?rodzaj=01&id_numer=719231, 10.03.2013.

Chrostowska B., *Wybrane teorie postaw*, www.profesor.pl/publikacja,16655,Referaty,Wybrane-teorie-postaw, 06.05.2013.

Dziewiecki M., *Co to jest empatia i jaki ma ona związek z miłością?,* www.opoka.org.pl/biblioteka/I/IP/empatia_zm.html, 18.02.2013.

Pilecka B., Agresja jako zjawisko psychologiczne, w: Borkowski R. (red.), *Konflikty współczesnego świata 1*, Kraków 2001, [Dokument elektroniczny], http://winntbg.bg.agh.edu.pl/skrypty2/0073/index.php, 15.03.2013.

http://pl.wikipedia.org/wiki/Komunikacja_interpersonalna, 11.04.2013.

http://www.sciaga.pl/student/index.html, 11.04.2013.

http://www.teachingpolish.com/artykuly/komunikacja.htm, 11.04.2013.

http://edustat.home.pl/com/szkolenia/szkol14/S14M1/przegl.html?nr=6, 12.04.2013.

Augustynek A., *Komunikacja interpersonalna*, www.psychologia.net.pl/artykul.php? level=425, 21.02.2013.

Liżewski S., *Pojęć zatrudnienie i inna praca zarobkowa nie można utożsamiać*, www.samorzad.lex.pl/czytaj/-/artykul/pojec-zatrudnienie-i-inna-praca-zarobkowa-nie-mozna-utozsamiac, 07.03.2013.

Marzec M., *Drugi i trzeci etap rekrutacji – co i jak?*, www.hrwpraktyce.blogspot.com/2012/08/drugi-i-trzeci-etap-rekrutacji-co-i-jak.html, 07.03.2013.

MPiPS – Portal Publiczych Służb Zatrudnienia, *Jak przygotować się do rozmowy kwalifikacyjnej*, www.psz.praca.gov.pl/main.php, 21.02.2013.

Śmigiel M., *Odpowiednie zatrudnienie w przepisach o zatrudnieniu i przeciwdziałaniu bezrobociu*, www.prawo-pracy.republika.pl/art57.htm, 21.02.2013.

Zespół Praca.pl, *Przygotowanie do rozmowy kwalifikacyjnej*, www.praca.pl/poradniki/rozmowa-kwalifikacyjna/przygotowanie-do-rozmowy-kwalifikacyjnej_pr-52.html, 21.02.2013.

3. Etyka i odpowiedzialność społeczna

3.1. Etyczne implikacje funkcjonowania przedsiębiorcy

Działalność człowieka we wszystkich jego przejawach można, w zależności od przyjętego punktu widzenia, rozpatrywać jako działalność *dobrą* lub *złą*. Nadawanie sensu swoim działaniom i określanie ich jako *dobre* lub jako *złe* nazywamy moralnością. Moralność jest pewnym zjawiskiem społecznym, które można określić, jako „…zbiór przekonań na temat dobra i zła, które żywi dana grupa lub jednostka względem ludzkich działań”[19]. W tym ujęciu moralność jest pojęciem zakresowo różnym od etyki, która jest wypracowanym systemem osądów moralnych, opartym na określonej teorii dobra i zła. Moralność jest pojęciem pierwotnym w stosunku do etyki, która czerpie z moralności swoje refleksje i inspiracje. Współczesna **etyka to, najogólniej rzecz ujmując, teoria moralności, chociaż niekiedy oznacza również zespół norm i ocen moralnych charakterystycznych dla danego społeczeństwa lub grupy społecznej** (M. Godziek, 2005).

Obszarem rozważań etyki jest wiele zjawisk, a w szczególności pytanie o naturę dobra i zła. Cel tych rozważań jest dwojaki: ocenienie postępowania człowieka oraz odwołanie się do standardów moralnych (a co za tym idzie – poszukiwanie skutecznych zasad postępowania moralnego w określonych sytuacjach). Do kluczowych pojęć stosowanych przez naukę o moralności zaliczamy (B. Przybył, J. Swianiewicz 2002):

- **prawa –** uprawnienie do określonych działań;
- **obowiązki** – zobowiązanie do podejmowania określonych działań lub posłuszeństwo wobec przepisów prawnych;
- **normy moralne** – przyjęte, uniwersalne zasady zachowania, respektowane przez członków danej społeczności, często związane są z obowiązującym systemem religijnym (prawdomówność, szacunek dla innych ludzi, szczególnie starszych, troska o najbliższych, odpowiednie zachowanie w szkole, na ulicy, w urzędzie);
- **normy postępowania** – dopuszczony przez prawo zakres działań w danej społeczności,
- **normy prawne** – reguły zachowania skonstruowane na podstawie przepisów prawa (obowiązek płacenia podatków, kodeks ruchu drogowego, postępowania administracyjnego itp., prawa i obowiązki ucznia);
- **sankcja moralna** – niekoniecznie zamierzona przez człowieka nagroda lub kara za czyn (kara za czyn niemoralny/haniebny, nagroda za czyn dobry);
- **obiektywizm moralny** – stanowisko głoszące, że wartości i normy moralne istnieją niezależnie od odbierającego je podmiotu;
- **subiektywizm moralny** – stanowisko, które uzależnia znaczenie sądów etycznych od indywidualnych emocji i gustów lub od społecznych warunków panujących w danej społeczności i w określonym czasie;

19 B. Przybył, J. Swianiewicz , *Krytyczne myślenie, Edukacja filozoficzna*, Kielce 2002, s. 103.

- **problem moralny** – zaistnienie sytuacji, która jest trudna do określenia pod względem jej moralnych konsekwencji;
- **dylemat moralny** – trudność z wybraniem jednej z kilku możliwych opcji rozwiązania danej sytuacji, z których każda rodzi konsekwencje natury etycznej.

Za początek etyki biznesu uznaje się rok 1745, w którym wydana została encyklika *Vix pervenit* dotycząca lichwy (Benedykt XIV, 1745). Rozważania z tego zakresu rozwijały się przez wiele lat, a w obecnym rozumieniu tego terminu etykę w biznesie/etyka biznesu cechują dwie podstawowe tendencje. Pierwsza to rozszerzanie się etyki na różne dziedziny biznesu, takie jak: reklama i marketing, negocjacje, akwizycja czy sprzedaż obwoźna, proces rekrutacji personelu, ocenianie przedsiębiorstwa, pracowników i itp. Drugą tendencją jest dostrzeżenie zjawiska długotrwałych korzyści organizacji (zysk) złączonych z etycznym image. Stopniowo biznes staje się działalnością uzależnioną od społecznej akceptacji. Pojawiają się sformułowania: „przyjazny biznes", „wspólnota w biznesie", „etyczne postępowanie przedsiębiorstwa", „kultura etyczna" czy „etyka po prostu się opłaca". Powszechne staje się podejście uznające, że wartości etyczne nie są barierą dla rozwoju ekonomicznego, są natomiast fundamentem, bez którego nie może istnieć gospodarka wolnorynkowa.

Moralność jest zależna od społeczeństwa, które ją realizuje. Jest bardzo zmienna i zależy od wielu czynników ekonomiczno-społecznych i psychologiczno-społecznych. Przyczyną rozchwiania moralności może być na przykład transformacja ustrojowa i gospodarcza (zarzucenie starych wartości, niejasność nowych, relatywizm moralny), historia (liberum veto, zabory, komunizm), przenikanie się gospodarki i polityki (brak wzorców), nadużywanie prawa (luki, opieszałość egzekwowania), trudności ekonomiczne (braki kapitału by sprostać konkurencji międzynarodowej, obniżanie standardów przez firmy zagraniczne by konkurować w warunkach lokalnych), brak lobby konsumentów, brak promowania wartości.

Konsekwencją braku norm etycznych lub ich niewłaściwego stosowania są między innymi:

- utrata zaufania społecznego, w tym własnych pracowników,;
- procesy sądowe z udziałem przedsiębiorstw i pracowników;
- utrata miejsc pracy;
- długoterminowe szkody lokalne: bezrobocie;
- utrata reputacji.

Aby można było mówić o etycznym podejściu do biznesu i prowadzenia działalności gospodarczej, konieczne jest przyjęcie stanowiska, że maksymalizacja zysku nie jest najważniejszym celem biznesu, mimo iż zysk jest jego warunkiem koniecznym. Relacje zachodzące pomiędzy: przedsiębiorcą a pracownikami przedsiębiorstwa, przedsiębiorcą a klientem, przedsiębiorcą a państwem oraz przedsiębiorcą a społeczeństwem, mają charakter etyczny i mimo że można rozpatrywać je oddzielnie, nie należy zapominać, że są one ze sobą powiązane i od siebie zależne. W analizie każdego typu relacji niezwykle ważne jest ustalenie jednej płaszczyzny działania w odniesieniu do wartości, norm i zachowań, jakimi kierują się podmioty, czyli ustalenie, w jakim nurcie etycznym zachodzi dana relacja. Możliwe jest tutaj przyjęcie następujących stanowisk etycznych (G. Hołub, P. Duchliński, 2010):

- **etyka deontologiczna** – naczelnym pojęciem jest dla niej pojęcie obowiązku, „postępować moralnie" oznacza zaś postępowanie zgodne z obowiązkami, jakie są nałożone na jednostkę;
- **etyka prawa naturalnego** – w tym ujęciu uznaje się, że każdy człowiek jest z natury dobry i wszystkie działania człowieka ukierunkowane są na poszukiwanie dobra. Postępowania złe, niemoralne są uznawane za błędy natury człowieka, za jego potknięcia – nie ma ludzi złych z natury, są tylko tacy, którzy źle rozpoznają dobro, przez co popełniają błędy;
- **etyka utylitarystyczna** –zakłada, że moralnie dobre są te działania, które są użyteczne, które przynoszą jak najwięcej szczęścia i radości, każda osoba ma zatem prawo do działania w taki sposób, aby zapewnić sobie możliwie dużo szczęścia.

Przyjęcie jednego z wymienionych sposobów rozumienia etyki przyczynia się do specyficznego sposoby budowania relacji między osobami, wyznacza kierunek podejmowania działań i rozwiązywania problemów moralnych, kształtuje sposób patrzenia na kontakty biznesowe i prywatne.

3.2. Etyczne aspekty relacji pracownik – pracodawca

Każda działalność człowieka może rodzić konflikty – często mają one charakter konfliktów moralnych/etycznych. Na ogół do konfliktów etycznych zaliczamy wszelkie spory, zatargi, sprzeczności pomiędzy indywidualnymi zasadami etycznymi jednostek a globalną etyką organizacji, inaczej – zbiorowymi zasadami etyki wytworzonymi przez organizację. Zachowania nieetyczne, których podmiotem są pracownicy, mogą zachodzić na trzech płaszczyznach:

- pracownik – pracodawca;
- pracownik – pracownik,
- pracownik – otoczenie zewnętrzne.

Pojawienie się zachowań nieetycznych pomiędzy pracownikiem a pracodawcą może zajść na każdym etapie współpracy: podczas rekrutacji i podczas rozstawania się z zakładem pracy.

Na etapie rekrutacji do nieetycznych zachowań możemy zaliczyć:

- <u>ze strony pracodawcy</u>: zbyt wysokie wymagania w stosunku do kandydatów, które są niedostosowane do stanowiska, ingerencję w sferę prywatną pracownika, przekazywanie nieprawdziwych informacji na temat danego stanowiska i przedsiębiorstwa, dyskryminację – ze względu na płeć, wiek, niepełnosprawność, rasę, religię, narodowość, przekonania polityczne, przynależność związkową, pochodzenie etniczne, wyznanie, orientację seksualną;
- <u>ze strony pracownika</u>: zawyżanie kompetencji i umiejętności w CV oraz podczas rozmowy kwalifikacyjnej, przekazywanie poufnych bądź nieprawdziwych informacji o poprzednich pracodawcach, klientach, kontrahentach.

Na etapie odchodzenia z zakładu pracy lub zwolnienia również może dość do nadużyć o charakterze etycznym:

- <u>ze strony pracodawcy</u>: sposób przekazania informacji o zwolnieniu (nie osobiście), odmowa wystawienia referencji, nieterminowe rozliczenie z pracownikiem (finansowe i w dokumentach – np. świadectwo pracy),
- <u>ze strony pracownika</u>: kradzież danych firmowych, przekazywanie na zewnątrz poufnych informacji o przedsiębiorstwie, uznawanych, przekazywanie wśród pracowników nieprawdziwych informacji o sytuacji związanej ze zwolnieniem, plotkowanie, przejęcie klientów pracodawcy, zawłaszczenie majątku zakładu – np. artykułów biurowych, niszczenie majątku zakładu pracy.

W przypadku nadużyć ze strony pracodawcy pracownik może zwrócić się do instytucji, organizacji, które wspierają pracowników w dochodzeniu swoich racji. Jest to między innymi Państwowa Inspekcja Pracy[20], Państwowa Inspekcja Sanitarna[21], Społeczna Inspekcja Pracy, sądy pracy, związki zawodowe.

Jednym z elementów wpływających na dobre funkcjonowania firmy są właściwe, dobre relacje pomiędzy pracownikami. Również w tym obszarze bardzo istotne jest poszanowanie zasad etyki, przy jednoczesnym respektowaniu naczelnych zasad etycznych firmy.

Nieetyczne zachowania pracowników mogą przejawiać się jako brak kultury, agresja werbalna i/lub fizyczna, mobbing, molestowanie.

- **mobbing** – działania lub zachowania dotyczące pracownika lub skierowane przeciwko pracownikowi polegające na jego uporczywym i długotrwałym nękaniu lub zastraszaniu;
- **molestowanie** – przejawia się jako natrętne i uporczywe naprzykrzanie się, nieakceptowane przez otoczenie i naruszające godność osobistą drugiej osoby. Może mieć również charakter molestowania seksualnego.

Zachowania nieetyczne mogą występować pomiędzy pracownikami (nachalne zachowanie i narzucanie się, składanie nieprzyzwoitych propozycji, przedstawianie nieprawdziwych informacji na temat współpracowników, agresja słowna i fizyczna, naśmiewanie się z innych, sabotaż) lub pomiędzy przełożonym a podwładnym. Wśród tych ostatnich wymienić można tworzenie toksycznych relacji i przemoc psychiczną w stosunku

20 Informacje na temat działalności Państwowej Inspekcji Pracy można uzyskać na stronach www.pip.gov.pl
21 Informacje na temat działalności Państwowej Inspekcji Sanitarnej można uzyskać na stronach www.gis.gov.pl

do podwładnego, składanie nieprzyzwoitych propozycji, przedstawianie nieprawdziwych informacji o przedsiębiorstwie, innych pracownikach, klientach itp.

Zachowania nieetyczne pomiędzy pracownikami zakładu a otoczeniem zewnętrznym mogą przejawiać się brakiem kultury i uczciwości we współpracy z klientami lub wykorzystywaniem przedsiębiorstwa do realizacji prywatnych interesów. Ważne, aby zasady etyczne panujące w zakładzie pracy oraz te uniwersalne respektowane były przez wszystkich zaangażowanych: pracowników, współpracowników oraz kadrę zarządzająca i właścicieli.

Najważniejsze zadania, przed jakimi stają przedsiębiorcy i osoby zarządzające przedsiębiorstwem, to (Drucker, 1994):

- wprowadzanie do kultury organizacyjnej jasnych i wyrazistych zasad etycznych;
- propagowanie dobrych wzorców;
- wdrażanie tych zasad do strategii zarządzania;
- wprowadzanie sankcji dla naruszających normy etyczne i ich konsekwentne egzekwowanie;
- treningi zachowań etycznych.

Dobry wizerunek firmy, pozytywne opinie wśród klientów i współpracowników oraz zadowolenie z oferowanych usług/produktów jest dla przedsiębiorstwa nieocenionym atutem. Wobec wielu przeobrażeń społecznych, gospodarczych oraz związanych z mentalnością człowieka przestrzeganie zasad etycznych jest zadaniem coraz trudniejszym. Narzędzia pomocne w przestrzeganiu zasad etycznych to:

- Kodeks pracy i Konstytucja Rzeczypospolitej Polskiej[22];
- procedury dotyczące rekrutacji;
- regulamin pracy;
- szczegółowe zapisy w umowach o pracę;
- kodeks etyczny;
- precyzyjnie określona komunikacja pomiędzy poszczególnymi szczeblami w przedsiębiorstwie – strona intranetowa, blog, skrzynka e-mail, aplikacje on-line;
- procedura whistleblowing[23];
- możliwość rozmowy z przełożonymi;
- szkolenia;
- budowanie kultury organizacyjnej – wartości, normy zachowań.

Korzyści wdrażania zasad etycznych w firmie:

1. ograniczenie występowania nieetycznych zachowań wśród pracowników;
2. dobra atmosfera w firmie wśród pracowników;
3. wyższa jakość współpracy z klientami, co może mieć przełożenie na wzrost zysków;
4. pozytywny wizerunek przedsiębiorstwa;
5. jasna i otwarta relacja oraz partnerstwo we współpracy z dostawcami;
6. korzyści biznesowe wynikające z obustronnej współpracy;
7. uczciwość i lojalność, szacunek, niezależność.

Na jakość relacji pomiędzy pracownikiem a jego zwierzchnikami w przedsiębiorstwie wpływ ma wiele czynników, wśród których jednym z bardziej istotnych jest realizowany typ przywództwa obowiązujący w zakładzie. Możemy wyróżnić kilka typów przywództwa (MacGregor, 1994):

- **przywództwo dyrektywne** – cechuje je komunikacja jednostronna, lider określa role, jakie mają pełnić pracownicy oraz ich zadania i obowiązki;
- **przywództwo perswazyjne** – komunikacja dwustronna, decydująca jest rola pracodawcy, ale uwzględnia się preferencje i predyspozycje pracowników do pełnienia określonych funkcji, ról;

22 Zob. Ustawa z dnia 26 czerwca 1974 r. Kodeks pracy, Dz. U. z 1998 r. nr 21, poz. 94; Konstytucja Rzeczypospolitej Polskiej z dnia 2 kwietnia 1997 r., Dz. U. z 1997 r. nr 78, poz. 483, ze zm.

23 Procedura whistleblowingu oznacza alarmowanie o nieprawidłowościach w swojej instytucji lub przedsiębiorstwie – pracownik, który ma zastrzeżenia co do prawidłowości postępowania pod względem etycznym w swoim przedsiębiorstwie może zgłosić tego typu nadużycie organom zarządczym lub nadzorczym.

- **przywództwo partycypacyjne** – wspólne podejmowaniem decyzji w procesie, komunikacja jest dwustronna;
- **przywództwo delegacyjne** – polega na delegowaniu na pracowników odpowiedzialność za podjęcie decyzji oraz wywiązanie się z podjętych zobowiązań.

Jednym ze sposobów poszerzania świadomości etycznej przedsiębiorców i pracowników są etycznych kodeksy firm oraz kodeksy poszczególnych zawodów i profesji. Przedsiębiorstwa, którym zależy na wiarygodności, dobrym wizerunku oraz właściwym przestrzeganiu norm moralnych, prawnych i obyczajowych, oprócz stosowania się do obowiązującego prawa (do czego zobligowani są wszyscy obywatele i przedsiębiorcy) wymagają przestrzegania, wprowadzanych przez siebie jako dodatkowe narzędzie regulacji zachowań, **Kodeksu firmowego**. Kodeks taki określa zasady etyczne, jakimi kieruje się zakład – określa główne kierunki działań przedsiębiorców, reguluje relacje pomiędzy pracownikami, pomiędzy pracownikami a właścicielami (kadrą zarządzającą) oraz zasady funkcjonowania na rynkach zbytu. Ich głównym celem jest podnoszenie świadomości etycznej oraz podnoszenie standardów moralnych w zakresie prowadzenia działalności gospodarczej. Celem kodeksu etycznego jest również promowanie zachowań pozytywnych oraz określanie zobowiązań organizacji wobec jej interesariuszy. Wprowadzenie kodeksu w życie należy wspierać odpowiednimi szkoleniami i treningami wrażliwości etycznej.

Dodatkowym narzędziem chroniącym przed nieetycznymi zachowaniami w biznesie są **kodeksy zawodowe**. Przykładem kodeksów grup zawodowych są: Kodeks Etyki Lekarskiej, Kodeks Etyki Psychologa, Kodeks Etyki Radcy Prawnego, Kodeks Etyki Dziennikarskiej, Kodeks Etyczny Nauczyciela. Generalną zasadą, jaką kierują się twórcy kodeksów etyki zawodowej, jest niesprzeczność zawartych w nich norm etycznych z normami obowiązującego prawa – prawo ma wobec kodeksów charakter nadrzędny. Specyfika wykonywania jakiegoś zawodu może być uregulowana odrębnymi zestawami norm, czyli kodeksami zawodowymi.".

Kodeks etyczny – jest utrwalonym na piśmie zespołem działań, których przestrzegania wymaga się od członków korporacji czy pracowników, i norm postępowania (nakazów i zakazów) oraz wartości, standardów i zasad, jakimi się kierują[24]. Kodeks etyczny zawiera normy postępowania ustanowione przez zakład, ale nie są to normy prawne. Taki status osiągają one dopiero, gdy stają się elementem stosowanego przez pracodawcę układu zbiorowego pracy, regulaminu pracy lub umowy o pracę. Obowiązywanie kodeksów etycznych jest dwustronne – dotyczy zarówno pracownika, jak i pracodawcy, stąd można mówić o kodeksie etyki pracodawcy (czyli określonym odgórnie przez pracodawcę zespole działań i norm postępowania, do których przestrzegania zobowiązuje się pracownik przy podjęciu pracy dla danego przedsiębiorstwa) oraz o kodeksie pracownika, rozumianym jako wytyczne określające jego sposób postępowania i funkcjonowania w danym zawodzie, profesji.

3.3. Etyczne aspekty relacji przedsiębiorca – konsument[25]

Zaufanie stanowi zasadniczą jakość zdrowych relacji pomiędzy ludźmi – odnosi się to również do relacji klient – przedsiębiorstwo. Przedsiębiorstwa muszą zdobywać zaufanie poprzez swoje postępowanie, muszą zyskać na rynku wiarygodność. Wiarygodność to zespół czterech przenikających się i nieredukowalnych cech: **prawość, uczciwość, dotrzymywanie obietnic, lojalność**.

Na gruncie tychże relacji pojawia się wiele problemów i trudności o charakterze etycznym i moralnym. Za najważniejsze zobowiązania przedsiębiorców wobec konsumentów uznać można:

- **uczciwe postępowanie** – przedsiębiorstwo przestrzega reguł zasad rynkowych bez oszukiwania, bez uchylania się od obowiązków bądź innych form nieczystego postępowania;
- **uczciwą konkurencję** – przedsiębiorstwo powinno przestrzeganie praw (w szczególny sposób praw antymonopolowych i prawa o ochronie konkurencji), a pracownikom nie wolno angażować się w działania ograniczające konkurencję, naruszające prawa antymonopolowe lub prawo o ochronie konkurencji. Pracownicy i współpracownicy oraz właściciele zakładów nie mogą w sposób nieuczciwy

24 Informacje pochodzą ze stron - http://www.poia.pl/view.php?art=382, 20.03.2013.
25 Więcej informacji znajdziesz w rozdziale VIII Konsument.

wykorzystywać klientów, dostawców, konkurentów ani innych osób (manipulacje, ukrywanie informacji, błędne przedstawianie faktów). Przedsiębiorstwo powinno traktować klientów w sposób jednakowy. Wiarygodne przedsiębiorstwo działa wyłącznie w zalegalizowanych stowarzyszeniach, celach biznesowych, naukowych lub branżowych;
- **uczciwą reklamę** – firma zobowiązana jest do zapewnienia zgodności działań reklamowych i promocyjnych z obowiązującym prawem. Prezentacje produktów i ich porównania muszą być przedstawione w sposób uczciwy, całościowy, autentyczny i zgodny z prawdą, tak by dostarczyć odbiorcy możliwie pełnej wiedzy o produkcie, co umożliwi odbiorcy przekazu (reklamy, prezentacji, itp.) wyrobienie sobie własnej, obiektywnej opinii o wartości użytkowej produktu lub usługi.

<u>Czego nie wolno stosować w reklamie</u>: nakłaniać do rozwijania uzależnień, kłamać, atakować wprost inne towary lub usługi, naruszać dobre obyczaje, naruszać godność człowieka pod jakimkolwiek względem, nakłaniać do przemocy, dyskryminować, wywoływać szkody w środowisku naturalnym.

- **dotrzymywanie zobowiązań;**
- **zachowywanie tajemnicy handlowej i zasady poufności** – podczas działań przedsiębiorstwa wszystkie informacje poufne pozyskane o klientach, współpracownikach lub konkurencji powinny być objęte tajemnicą, a ich wykorzystanie powinno ograniczać się wyłącznie do działań przedsiębiorstwa bezpośrednio skierowanych do tychże podmiotów;
- **przestrzeganie praw konsumenta.**

Nad bezpieczeństwem konsumenta oraz przestrzeganiem jego praw czuwa wiele organów (między innymi Rzecznik Praw Konsumenta, Urząd Ochrony Konkurencji Konsumentów[26], Federacja Konsumentów[27]), istnieje też szereg uregulowań w polskim i unijnym prawodawstwie.

W Polsce ochrona praw konsumentów zapisana jest w Konstytucji RP w artykule 76: *Władze publiczne chronią konsumentów, użytkowników i najemców przed działaniami zagrażającymi ich zdrowiu, prywatności i bezpieczeństwu oraz przed nieuczciwymi praktykami rynkowymi. Zakres tej ochrony określa ustawa*. Uregulowania prawne oraz właściwe organy nadzorcze mają za zadanie ochronę zbiorowych interesów konsumentów poprzez przeciwdziałanie nieuczciwym praktykom rynkowym oraz zwalczanie niedozwolonych postanowień umownych. Do podstawowych praw konsumenta zaliczyć można: prawo do zwrotu zakupionego towaru, gwarancje, reklamacje, prawo do rzetelnej informacji o produkcie.

Zagrożenia wynikające z nieprzestrzegania zasad etyki w relacjach biznesowych:
- osłabienie lub utrata dobrych relacji z klientami;
- utrata wiarygodności i zaufania klientów;
- nadszarpnięcie lub utrata reputacji;
- utrudnienia w realizacji ważnych celów, między innymi poprzez brak zaufania i niewiarygodność przedsiębiorstwa.

3.4. Etyczne aspekty relacji przedsiębiorca – państwo

Oferowanie korzyści to jeden z przejawów **korupcji**, czyli zachowań lub sytuacji społecznych, w których doszło do naruszenia systemu wartości akceptowanego przez dane społeczeństwo (np. złamania zasady uczciwości, rzetelności, praworządności). Zgodnie z art.1 ust. 3 ustawy o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym[28] **korupcja** to czyn polegający na obiecywaniu, proponowaniu, wręczaniu, żądaniu, przyjmowaniu przez jakąkolwiek osobę, bezpośrednio lub pośrednio, jakiejkolwiek nienależnej korzyści majątkowej, osobistej lub innej, dla niej samej lub jakiejkolwiek innej osoby. Korupcją jest również przyjmowanie propozycji

26 www.uokik.gov.pl
27 www.federacja-konsumentow.org.pl
28 Ustawa z dnia 9 czerwca 2006 r. o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym , Dz. U. z 2012 poz. 621

lub obietnicy takich korzyści w zamian za działanie lub zaniechanie działania w wykonywaniu funkcji publicznej lub w toku działalności gospodarczej.

Aby uznać dane działanie za korupcję, spełnione muszą być następujące warunki: wzajemna umowa stron („dający", „otrzymujący") oraz konkretne korzyści wynikające z tej transakcji. Do najczęstszych spotykanych form korupcji zaliczamy:

- przekupstwo (łapownictwo);
- protekcję, kumoterstwo oraz nepotyzm (obsadzanie stanowisk publicznych członkami własnej rodziny);
- świadome, niezgodne z prawem dysponowanie środkami z budżetu państwa lub majątkiem, będącym dobrem publicznym;
- stronniczość w przyznawaniu uprawnień (np. przyznawanie koncesji);
- nieuczciwe rozstrzyganie kontraktów, zamówień publicznych, przetargów;
- uchylanie się przez osobę publiczną od płacenia zobowiązań wynikających z przepisów;
- kradzież dobra publicznego;
- defraudację, czyli wykorzystywanie publicznych pieniędzy lub majątku publicznego dla własnych korzyści.

Ze zjawiskiem korupcji możemy spotkać się w różnych sferach życia publicznego:

- **korupcja polityczna** – na pograniczu polityki i biznesu. W zamian za poparcie konkretnego przedsiębiorstwa urzędnik państwowy jest „nagradzany" w jakiejś formie finansowej bądź niefinansowej (stanowisko pracy);
- **korupcja legislacyjna –** wpływanie na kształt ustawodawstwa prowadzące do tego, że parlamentarzysta otrzymuje dodatkowe dobra od osób zainteresowanych konkretnym brzmieniem ustawy, rozporządzenia;
- **korupcja gospodarcza** – zapewnienie przychylnych decyzje urzędników drogą przekupstwa;
- **korupcja administracyjna** – ta forma występuje w różnych działach administracji publicznej: oświacie, służbie zdrowia, opiece społecznej.

Innym zjawiskiem o nieetycznym wymiarze w zakresie relacji przedsiębiorstwo – państwo są oszustwa podatkowe.

Oszustwo podatkowe polega na wprowadzeniu w błąd organu podatkowego przez niezgodne z rzeczywistością przedstawienie lub zatajenie okoliczności mających wpływ na wysokość podatku. Oszustwa podatkowe mogą przybierać różne formy takie, jak: podrabianie towarów akcyzowych (alkohol i wyroby tytoniowe) czy wprowadzanie do obrotu paliw z zaniżoną akcyzą Zdecydowanie najpowszechniejsze są oszustwa podatkowe związane z zatrudnieniem pracowników (pracownicy tzw. szarej strefy), zaś kolejną istotną grupę stanowią oszustwa związane z ukrywaniem obrotu i/lub dochodu. Przestępstwa takie są przedmiotem zainteresowania organów ścigania i służb specjalnych.

Aby mówić o popełnieniu przestępstwa w postaci oszustwa podatkowego koniecznych jest zaistnienie kilku warunków:

- niezgodny ze stanem faktycznym sposób przedstawienia faktów;
- istotne znaczenie tego czynu;
- ukryty cel;
- brak jawności działania;
- działanie ze świadomym zamiar oszukania;
- strona poszkodowana podjęła jakieś działanie na podstawie fałszywych informacji (na podstawie błędnych danych jedna ze stron wyciągnęła nieprawdziwe wnioski).

3.5. CSR – społeczna odpowiedzialność biznesu

Dbałość o środowisko naturalne to jedno z najważniejszych kryteriów społecznej odpowiedzialności biznesu. Odpowiedzialne i wiarygodne przedsiębiorstwo to takie, które jest zaangażowane w działania na rzecz oszczędnego wykorzystywania zasobów środowiskowych i stosujące rozwiązania zapobiegające degradacji tegoż środowiska. Niezależnie od deklaracji każde przedsiębiorstwo jest zatem zobowiązane prawnie do przestrzegania wymagań dotyczących ochrony środowiska, w zakresie odpowiednim do jego wielkości i charakteru działania.

ISO 14001 – to uznawana w skali międzynarodowej norma określająca metody wdrażania efektywnych systemów zarządzania środowiskowego. Określa ona zasady nadzoru nad tymi działaniami, które mają wpływ na środowisko, m.in. nad wykorzystaniem zasobów naturalnych, ściekami i odpadami przemysłowymi, zużyciem energii.

Wdrożenie systemu zarządzania środowiskowego jest metodą rozpoznania i kontroli oddziaływań zakładu na środowisko naturalne. System ten przynosi również oszczędności związane ze zwiększeniem efektywności i produktywności, a ponadto pozwala na weryfikację, czy zakład spełnia wymagania przepisów związanych z ochroną środowiska.

Dbałość o środowisko naturalne jest tylko jednym z elementów odpowiedzialnego biznesu – odpowiedzialność społeczną należy traktować bowiem jako odpowiedzialność organizacji za wpływ jej decyzji i działań na społeczeństwo i środowisko. Stosowanie przejrzystych i etycznych zachowań przyczynia się do zrównoważonego rozwoju (włączając w to zdrowie i dobrobyt społeczeństwa), uwzględnia oczekiwania interesariuszy (osób lub grup, które są zainteresowane decyzjami lub działaniami organizacji) oraz, dodatkowo, jest zgodne z mającym zastosowanie prawem i spójne z międzynarodowymi normami zachowania.

Społeczna Odpowiedzialność Biznesu (CSR, *ang. Corporate Social Responsibility*) to koncepcja zakładająca dobrowolne uwzględnianie w działalności przedsiębiorstw celów społecznych (czyli zmierzających do zaspokojenia potrzeb bytowych i rozwojowych szerokich warstw społecznych) i kwestii ochrony środowiska naturalnego, przy czym aktywność ta wykracza poza zobowiązania wynikające z powszechnie przyjętych norm prawnych (EC 2001).

Społeczna Odpowiedzialność biznesu obejmuje zatem szereg działań skierowanych do pracowników przedsiębiorstwa (np.: poprawa warunków pracy, możliwości rozwoju zawodowego, równe traktowanie itp.), skierowanych na rynek (np.: terminowe regulowanie zobowiązań, dotrzymywanie warunków umów handlowych, poprawa jakości i zwiększanie bezpieczeństwa produktów, uczciwa reklama itp.), działania na rzecz społeczeństwa (np.: poprawa lokalnej infrastruktury, wsparcie finansowe lub materialne lokalnych instytucji użyteczności publicznej, działania na rzecz integracji społecznej itp.) czy też środowiska naturalnego (np.: stosowanie przyjaznych dla środowiska produktów i procesów produkcyjnych, efektywne wykorzystywanie zasobów, stosowanie „ekologicznej oceny" dostawców, ograniczenie ilości wytwarzanych odpadów i zanieczyszczeń itp.). Zwiększone zaangażowanie w zakresie tworzenia pożytecznych społecznie rozwiązań, co prowadzi do jednoczesnego polepszaniu swojej pozycji rynkowej, jest dla wielu zakładów fundamentem budowy i umacniania pozytywnego wizerunku zewnętrznego.

Przykłady narzędzi realizacji odpowiedzialnego biznesu:

- **kampanie społeczne** – działania zmierzające do zwiększania świadomości społeczeństwa na temat problemów wybranych obszarów życia społecznego, aktywności społecznej i obywatelskiej, problemów grup społecznych (np. kampania na temat problemów osób bezdomnych;
- **marketing zaangażowany społecznie** – łącznie interesów przedsiębiorstwa z interesami społeczności (np. lokalnej);
- **programy etyczne dla pracowników** (np. tworzenie kodeksów pracowniczych, wyznaczanie standardów postępowań w relacjach z klientem);
- **nadzór korporacyjny** – zasady systemu kontroli nad przedsiębiorstwem pełnionej przez jej właścicieli, akcjonariuszy, pracowników;
- **eko-znakowanie i znakowanie społeczne** –polega na umieszczaniu na opakowaniach lub etykietach produktów dodatkowych informacji z zakresu ekologicznej lub społecznej odpowiedzialności;

- **inwestycje społecznie odpowiedzialne** – czyli takie inwestowanie, którego celem nie jest wyłącznie maksymalizacji zysku, ale również dobra społeczne.

Korzyści z wdrożenia CRS w zakładzie:

- wzrost zainteresowania inwestorów;
- zwiększenie lojalności konsumentów i interesariuszy;
- poprawa relacji ze społecznością i władzami lokalnymi;
- wzrost konkurencyjności;
- podnoszenie poziomu kultury organizacyjnej firmy;
- kształtowanie pozytywnego wizerunku firmy wśród pracowników;
- pozyskanie i utrzymanie najlepszych pracowników.

Obok zwolenników idei CSR funkcjonuje również podejście krytyczne. Główne Argumenty przeciwników CSR brzmią: "*business of business is business*", społeczna odpowiedzialność biznesu polega na generowaniu zysków, CSR to socjalizm, który jest zaprzeczeniem wolności gospodarczej, przeznaczanie pieniędzy akcjonariuszy na cele społeczne jest jednoznaczne z kradzieżą, menedżer nie jest reformatorem społecznym i nie ma mandatu społecznego do pełnienia takiej funkcji, instytucja nie ma sumienia, nie może więc ponosić odpowiedzialności moralnej, CSR to należący do public relations kamuflaż, za którym skrywa się prawdziwe motywy uprawiania biznesu

Podejście pro-CSR akcentuje, obok bezpośrednich korzyści dla środowiska obywatelskiego oraz środowiska naturalnego, szereg pozytywnych aspektów stosowania tegoż podejścia do prowadzenia interesów. Są to między innymi argumenty akcentujące, że: przedsiębiorstwo wykorzystuje społeczeństwo, jest mu zatem coś winne w zamian, biznes przyczynia się do powstania wielu problemów społecznych, skutki prowadzonej działalności często trwają znacznie dłużej niż istnienie organizacji, redystrybucja dochodów wymaga zaangażowania odpowiednich środków, skoro społeczeństwo oczekuje odpowiedzialności, to w najlepszym interesie firmy jest ją na siebie wziąć.

Społeczny odbiór działań z obszaru społecznej odpowiedzialności biznesu jest niejednorodny. Dla części konsumentów każde działanie podejmowane przez przedsiębiorstwo ma u podstaw wizję zysku, jaki z tej działalności osiągnie. Część społeczeństwa uważa natomiast, że tego typu działania mają charakter niefinansowy i związane są z szerszą perspektywą, w której przedsiębiorstwo postrzega swoją misję. Rozbieżności w postrzeganiu zjawiska są naturalną konsekwencją różnych stylów myślenia, działania i postrzegania świata przez ludzi.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Na podstawie przedstawionych sposobów definiowania terminu *etyka* (etyka prawa naturalnego, etyka utylitarystyczna, etyka deontologiczna) wskaż, jakie mogą być pozytywne i negatywne skutki przyjęcia każdego z tych sposób rozumienia pojęcia.
2. Jakie mogą być konsekwencje podjęcia procedury whistleblowingu przez pracownika przedsiębiorstwa? Wskaż na pozytywne i niekorzystne skutki takiego postępowania.
3. Podaj przykłady reguł etycznych stosowanych w wybranych przez Ciebie zawodach.
4. Zaproponuj, jak mógłby wyglądać kodeks etyczny w grupie, do której przynależysz (w klasie, w drużynie sportowej, w kółku zainteresowań).
5. Podaj przykłady działań państwa zmierzających do zlikwidowania zjawiska korupcji.
6. Na przykładzie znanego Ci przedsiębiorstwa przeanalizuj, czy działania, jakie prowadzi przedsiębiorstwo można uznać za etycznie właściwe. Podaj przykłady nieetycznej działalności przedsiębiorstwa.

Bibliografia:

Baggini J., Fost, *Przybornik etyka*, Warszawa 2012.

Bieńkiewicz M., *Społeczna odpowiedzialność biznesu (CRS) jako narzędzie budowy przewagi konkurencyjnej przedsiębiorstw*, Łódź 2008.

Ciupak-Zarzycja M., RzaczkowskaE., Kowalska M., Kozioł M., Majewska K., Sroka R., Syczewska B., Majdrowicza M., Tycner P., Tyczkowska-Kochańska K., *Firma = etyka. Przedsiębiorcy, dostawcy, społeczeństwo*, Warszawa 2009.

Czaplewski W., *Filozofia z przyległościami*, Bydgoszcz 2000.

Drucker P., *Menedżer skuteczny*, Warszawa 1994.

Godziek M., *Etyka Przedsiębiorczości*, Chorzów 2005.

Hołub G., Duchliński P. (red.), *Oblicza natury ludzkiej*, Kraków 2010.

Kunzmnn P., Burkard F., Wiedmann F., *Atlas filozofii*, Warszawa 1999.

Lipman M., Sharp A., Oscanyan F., *Filozofia w szkole*, Warszawa 2008.

MacGregor B. J., *Władza i społeczeństwo*, Warszawa 1994.

Przybył B., Swianiewicz J., *Krytyczne myślenie, Edukacja filozoficzna*, Kielce 2002.

Reichel J. (red.), Oczyp P. (praca zbiorowa), *Jak uczyć o społecznej odpowiedzialności i zrównoważonym rozwoju. Podręcznik dla nauczycieli*, Warszawa 2011.

Wojtysiak J. *Pochwała ciekawości*, Kraków 2003.

Akt prawa:

Ustawa z dnia 9 czerwca 2006 r. o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym, nr 104, poz. 708).

Netografia:

Green Paper: Promoting a European framework for Corporate Social Responsibility, Brussels, 18.7.2001, COM(2001) 366 final (http://ec.europa.eu/green-papers/index_pl.htm).

4. Gospodarka rynkowa

4.1. Podstawowe pojęcia ekonomiczne

Potrzeby ekonomiczne i czynniki wytwórcze

Wyznacznikiem skali potrzeb jest poziom cywilizacyjny społeczeństwa. Zmieniają się one wraz z rozwojem społeczeństwa. Im jest on wyższy, tym zakres ich jest większy. Kolejność ich zaspokajania określa prawo nasycalności potrzeb Gossena (P. Urbaniak, 1996). Zgodnie z nim potrzeby ludzkie zaspokajane są w kolejności swej wielkości, co jest wynikiem realizacji procesu konsumpcji, aż osiągają stan pełnego nasycenia, czyli saturacji.

Potrzeby ludzkie są nieograniczone, to znaczy nie można ich całkowicie zaspokoić. Wynika to z rzadkości (ograniczoności) zasobów w świecie. Cechą charakterystyczną jest również to, iż zaspokojenie potrzeb na niższych poziomach zawsze wywołuje nowe potrzeby. Warunkiem realizacji potrzeb na wyższym poziomie jest zaspokojenie potrzeb na poziomie niższym.

Ludzie odczuwają różnorakie potrzeby i dążą do ich zaspokojenia. Związek różnorodnych potrzeb z biologicznym bytem człowieka oraz ich znaczenie dla tego bytu są podstawą podziału potrzeb na:

- naturalne, nazywane podstawowymi lub elementarnymi;
- wyższego rzędu, nazywane wtórnymi lub kulturalnymi.

Potrzeby naturalne wynikają z biologicznych cech organizmu człowieka. Do tych potrzeb, których zaspokojenie jest niezbędne do życia, zalicza się potrzebę jedzenia, ubierania się, ciepła, mieszkania.

Potrzeby wyższego rzędu są wtórne względem potrzeb naturalnych. Wynikają one z rozwoju społeczeństwa, a ich zakres stale się powiększa ze względu na ciągły rozwój gospodarczy i postęp techniczny. Można tu wymienić potrzebę nauki, rozrywki, uczestnictwa w obrzędach religijnych czy podróżowania.

Potrzeby można również podzielić na (Z. Mielczarczyk, B. Urbańska, 2002):

- **potrzeby teraźniejsze,** bieżące (np. zaspokojenie głodu) i potrzeby przyszłe, które są zaspokajane w dłuższym czasie (np. wybudowanie domu);
- **potrzeby jednorazowe** (zaspokajane zwykle jeden raz w życiu lub najwyżej kilkakrotnie, np. wybudowanie domu) i potrzeby powtarzalne (np. zaspokajanie głodu, zakup odzieży, odpoczynek;
- **potrzeby indywidualne** (zaspokajane indywidualnie przez każdego człowieka) i potrzeby zbiorowe (zaspokajane w sposób zbiorowy przez odpowiednie instytucje, np. bezpieczeństwo publiczne, korzystanie z dróg publicznych).

Można też wyróżnić potrzeby realne, możliwe do zaspokojenia na danym etapie życia człowieka, i nierealne, czyli marzenia.

Cechami charakterystycznymi potrzeb człowieka jest ich:

- zmienność;
- rozwojowość;
- nieograniczoność;
- odnawialność.

Zmienność wynika z czasu, miejsca i warunków występowania potrzeb, ponieważ zależne są one na przykład od wieku człowieka, płci, warunków życia, poziomu kultury, czyli od elementów podlegających stałym przeobrażeniom. Rozwojowość jest konsekwencją postępu cywilizacyjnego społeczeństwa. Nieograniczoność wynika z coraz wyższego poziomu rozwoju gospodarczego i wzrostu dobrobytu społeczeństwa, które powodują pojawianie się nowych rodzajów potrzeb i ich zwiększenie. Odnawialność związana jest na przykład z potrzebą zaspokajania głodu, wypoczynku czy ubrania.

Potrzeby ludzkie można zaspokoić środkami materialnymi, nazywanymi dobrami, lub korzystając z usług wykonywanych przez różnych specjalistów. Dobrami nazywa się wszelkie środki materialne, którym można przyporządkować odpowiednie cechy fizyko-chemiczne (masę, skład chemiczny, kolor, zapach, kształt, wymiar itp.) (J. Mierzejewska-Majcherek, 2005).

Podobnie jak potrzeby również środki zaspokojenia potrzeb ludzkich mają różnorodny charakter. Najogólniej można je podzielić na materialne i niematerialne. Środki materialne obejmują naturalne zasoby przyrody oraz rzeczy będące wynikiem działalności człowieka. Środki niematerialne to na przykład przekazywanie wiedzy i informacji, dostarczanie rozrywek, porady lekarskie czy prawne (R. Milewski, 2002). Są one często określane mianem usług niematerialnych.

▶ **Niektóre dobra dostarczane przez przyrodę są ilościowo nieograniczone i niemal zawsze dostępne dla człowieka, np.: powietrze, woda w morzach i rzekach, światło i ciepło słoneczne. Dobra te nie są wytworem pracy ludzkiej i naszą nazwę dóbr wolnych. W praktyce zasoby tego typu się wyczerpują, zachodzi więc potrzeba racjonalnego ich wykorzystywania. Korzystanie z nich jest obecnie coraz bardziej zagrożone.**

Inne dobra, które występują w ilości ograniczonej w stosunku do potrzeb i są przez ludzi wytwarzane, noszą nazwę dóbr gospodarczych lub dóbr ekonomicznych. Dobra te stanowią przedmiot gospodarowania, nie tylko są wytwarzane przez człowieka, ale mogą być gromadzone i przekazywane, przemieszczane, wymieniane oraz dzielone w określony sposób w społeczeństwie (D. Dębski, 2006).

Dobra gospodarcze można podzielić, ze względu na ich przeznaczenie, na dobra konsumpcyjne oraz dobra produkcyjne (środki produkcji). **Dobra konsumpcyjne** służą bezpośrednio do zaspokojenia potrzeb ludzkich, np.: artykuły żywnościowe, odzież, samochody osobowe, telewizory. **Dobra produkcyjne** pośrednio zaspokajają potrzeby ludzkie, ponieważ służą do wytwarzania nowych dóbr gospodarczych, np.: maszyny i urządzenia produkcyjne, surowce, materiały, narzędzia. Dobra te określa się dwie zatem również jako dobra bezpośrednie i dobra pośrednie.

Ze względu na to, czy dobra przynoszą korzyść pojedynczym osobom, czy dużym grupom ludności dobra gospodarcze można podzielić na dobra prywatne oraz dobra publiczne.

Z **dóbr publicznych** korzystać mogą wszyscy, zaś dostęp do dóbr prywatnych jest w różny sposób ograniczony. Cechą dóbr publicznych jest to, że korzystanie z nich przez jedną osobę nie wyklucza jednoczesnego pożytku z nich dla innych ludzi. Bardzo trudno jest pozbawić kogokolwiek możliwości korzystania z dóbr publicznych. Dobra publiczne to m.in. budynki szkolne, drogi i chodniki, oświetlenie ulic (D. Dębski, 2006).

Dobro prywatne użytkowane przez jedną osobę nie może być jednocześnie użytkowane przez kogoś innego. Do dóbr prywatnych zalicza się m.in. żywność, odzież, samochody.

Dobra gospodarcze dzieli się również na dobra trwałe, np.: lodówka, pralka, oraz dobra zużywające się jednorazowo w procesie konsumpcji, np.: żywność czy lekarstwa, lub w procesie produkcji, np. węgiel w elektrowni.

Usługą jest działalność służąca zaspokojeniu potrzeb ludzkich, która nie znajduje żadnego ucieleśnienia w nowych dobrach materialnych (L. Garbarski, J. Rutkowski, W. Wrzosek, 2000).

Efekty działalności gospodarczej zależą od umiejętności i stopnia wykorzystania zasobów nazywanych czynnikami produkcji. Są to materialne i niematerialne środki, które służą do produkcji towarów bądź świadczenia usług. **Czynniki produkcji** to (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011):

- **ziemia** – obejmuje zasoby naturalne, czyli ziemię w ścisłym znaczeniu tego słowa oraz wszelkie zawarte w niej bogactwa naturalne;
- **praca określana często jako kapitał ludzki** – obejmuje te środki, które są związane z człowiekiem oraz jego umiejętnościami i wykształceniem, np. określone kwalifikacje i predyspozycje zawodowe;
- **kapitał** – obejmuje środki wytwarzane przez ludzi w celu tworzenia innych dóbr i świadczenia usług. Wyróżnia się kapitał rzeczowy (budynki, maszyny, urządzenia, środki transportu, narzędzia, surowce) oraz kapitał finansowy (środki pieniężne, papiery wartościowe);
- **wiedza** – obejmuje innowacyjne pomysły, projekty i rozwiązania, których wdrożenie ułatwia funkcjonowanie przedsiębiorstw;
- **przedsiębiorczość** – obejmuje między innymi zdolności organizacyjne oraz umiejętność wyszukiwania innowacyjnych rozwiązań pozwalających na efektywne wykorzystanie czynników produkcji;
- **technologie** – techniki wytwarzania rozumiane jako dostępna wiedza i metody łączenia zasobów w sposób produkcyjny.

Techniki wytwarzania to połączenie środków produkcji z pracą ludzi dysponujących odpowiednimi umiejętnościami. Na przestrzeni wieków techniki wytwarzania ulegały zmianom, zmieniały się narzędzia pracy, surowce, a także umiejętności i kwalifikacje siły roboczej (M. Żukowski, 2005).

Przedmiot i zakres ekonomii

Ekonomia jest jedną z dziedzin nauk społecznych zajmującą się badaniem prawidłowości i działaniem mechanizmów rozwoju społeczno-ekonomicznego (M. Żukowski, 2005).

Ekonomia jest nauką o procesach gospodarczych, tzn. procesach produkcji, podziału, wymiany i konsumpcji środków zaspokajania potrzeb ludzkich. Wytycza i opisuje pewne ogólne prawidłowości rządzące tymi procesami. Prawidłowości te określane są mianem praw ekonomicznych.

Prawa ekonomiczne określają stałe zależności między występującymi zjawiskami ekonomicznymi. Związane są ściśle z zachowaniem ludzi, które można przewidzieć, ponieważ główną zasadą, jaką ludzie kierują się w swoim postępowaniu jest racjonalność.

We współczesnej ekonomii najczęściej wyróżnia się dwa podejścia do procesu analizy ekonomicznej, dwa podstawowe kierunki metodologiczne: ekonomię pozytywną (opisową) oraz normatywną (postulatywną) (S. Marciniak, 2001).

Ekonomia pozytywna oznacza opis istniejącej rzeczywistości. Przedmiotem analizy są konsekwencje zmian warunków ekonomicznych oraz kierunków polityki ekonomicznej. Celem badań i opisów zwolenników tego podejścia jest ustalenie wpływu zmian wielkości ekonomicznych (cen, płac, kursów walutowych) na efektywność działalności gospodarczej.

Ekonomia normatywna dokonuje ocen wartościujących, stwierdzających, jakie powinny być ceny, płace, zatrudnienie czy poziom produkcji oraz jaka polityka gospodarcza jest sprawiedliwa. Zwolennicy tego podejścia dokonują ocen wartościujących i postulują pożądane kierunki polityki cen, płac, rozwoju gospodarczego, ustalają więc normy postępowania. Podejście to określane jest niekiedy mianem ekonomii postulatywnej.

Ekonomia jest nauką społeczną badającą, w jaki sposób można wykorzystać ograniczone zasoby ekonomiczne w celu najpełniejszego zaspokojenia nieograniczonych potrzeb społeczeństwa. Podkreśla ograniczoność zasobów i możliwości wyboru ekonomicznego, który zapewniłby efektywność gospodarowania.

Wybór ekonomiczny występuję zarówno między konkurującymi dobrami materialnymi, zaspokajającymi nasze potrzeby, jak i między alternatywnymi użyciami zasobów niezbędnych do ich wytworzenia. Stąd też mówi się, że ekonomia sprowadza się do ciągłego dokonywania wyborów.

Mikroekonomia zajmuje się badaniem racjonalnego postępowania podmiotów gospodarczych i konsumentów. Podstawowym przedmiotem badań mikroekonomii są:

- mikroekonomia rynku;
- teoria zachowania konsumenta;
- racjonalność wyboru w przedsiębiorstwie.

Do analizy mikroekonomicznej służą instrumenty rynkowe: popyt, podaż, koszty, zysk i czynniki wpływające na kształtowanie się tych kategorii.

Makroekonomia zajmuje się analizą gospodarki jako całości. Bada między innymi czynniki wpływające na poziom i zmiany takich wielkości ekonomicznych, jak np.:

- całkowita produkcja i konsumpcja w danej gospodarce;
- globalna podaż produktów i usług;
- globalny popyt na nie;
- ogólny (średni) poziom ich cen;
- globalne zatrudnienie i inwestycje;
- dochody i wydatki budżetu państwa.

Makroekonomia zajmuje się więc badaniem agregatowych, czyli dotyczących całej gospodarki, wielkości ekonomicznych.

Ekonomia – stanowiąc genezę polityki ekonomicznej, pełni równocześnie rolę instrumentalną w dziedzinie sprawowania władzy. Teorie ekonomiczne i polityczne stanowią podstawę ustrojową państwa (ustroju społecznego i gospodarczego). Funkcjonowanie systemu gospodarczego winno reagować na impulsy rynku. Jeśli jednak impulsy te zawodzą, konieczna jest reakcja władzy zgodna z interesem publicznym.

Ścisłe związki występują również pomiędzy polityką ekonomiczną a polityką społeczną. **Polityka ekonomiczna** zajmuje się działaniem w sferze wytwarzania dóbr, a polityka społeczna ich racjonalnym wykorzystaniem. W całościowym kompleksie społeczno-gospodarczym dużą rolę odgrywa gospodarowanie zasobami pracy, procesy demograficzne, polityka ludnościowa.

Przedmiotem oddziaływania polityki ekonomicznej jest gospodarka narodowa. W całej gospodarce można wyróżnić:

- **procesy realne –** obejmujące produkcję, transport, magazynowanie, obrót towarami;
- **procesy regulacyjne –** obejmujące czynności polegające na zbieraniu i przetwarzaniu informacji, przygotowywaniu i podejmowaniu decyzji, kontrolowaniu ich wykonania.

W przedsiębiorstwach przemysłowych, handlowych, gospodarstwach rolnych i gospodarstwach domowych przeważają czynności zaliczane do sfery procesów realnych. Funkcje banków, zakładów ubezpieczeniowych, organizacji zrzeszających przedsiębiorstwa, a także organów państwowych i samorządowych wkraczających w sferę gospodarki polegają głównie na czynnościach regulacyjnych.

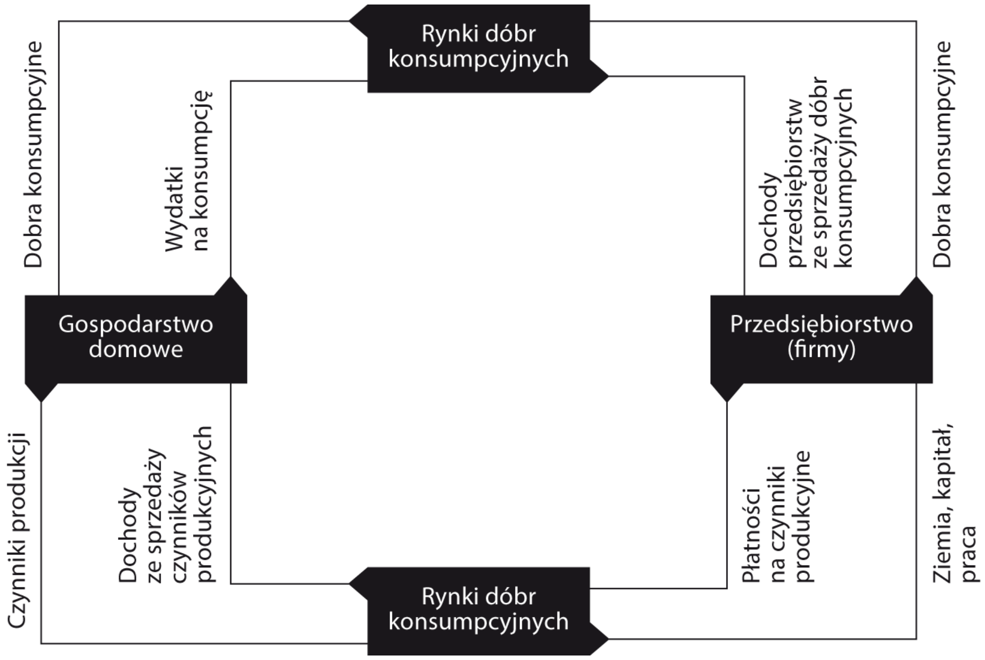
Podmioty i cele gospodarowania

Ekonomia zajmuje się zachowaniem ludzi w procesie gospodarowania. W każdej gospodarce rynkowej występują dwa główne podmioty gospodarujące: gospodarstwa domowe i przedsiębiorstwa. Poza tym samodzielnym podmiotem jest państwo (S. Marciniak, 2001).

Gospodarstwo domowe składające się z członków rodziny (lub z jednej osoby) jest konsumentem oraz właścicielem zasobów, przedsiębiorstwo – producentem i użytkownikiem zasobów.

Własność i kontrola ziemi, pracy i kapitału jest bezpośrednią podstawą funkcjonowania gospodarstw domowych. Ostateczne decyzje o tym, jak i które zasoby zastosować w produkcji, opierają się na potrzebach gospodarstw domowych. Użycie zasobów jest możliwe po ich sprzedaży przez gospodarstwa domowe przedsiębiorstwom na rynku. Wpływy ze sprzedaży zasobów przedsiębiorstwa zużywają do produkcji dóbr i usług. Dobra te i usługi są następnie przez przedsiębiorstwa sprzedawane na rynku gospodarstwom domowym i wymieniane na pieniądze. Cały ten proces obejmuje dwa rodzaje strumieni między gospodarstwami domowymi oraz przedsiębiorstwami (S. Marciniak, 2001):

- **strumienie finansowo-pieniężne**, które przepływają od gospodarstw domowych za pośrednictwem rynku, w formie opłaty za dobra i usługi, do firm, następnie ma miejsce ponowny przepływ płatności od firm przez rynek do gospodarstw domowych;
- **przepływy realne, niepieniężne** – ziemia, praca i kapitał przepływają od gospodarstw za pośrednictwem rynku czynników produkcji do przedsiębiorstw, natomiast realne dobra i usługi przepływają od przedsiębiorstw za pośrednictwem rynku dóbr konsumpcyjnych do gospodarstw. Ilustracją tych przepływów jest schemat przedstawiony na rysunku:



Schemat 13. Uproszczony schemat cyrkulacji strumieni finansowych (krąg wewnętrzny) i przepływów realnych (krąg zewnętrzny)

Źródło: S. Marciniak, Mikro i makroekonomia, Warszawa 2001, s. 56

Gospodarstwo domowe jest najstarszym i najtrwalszym podmiotem gospodarczym. Gospodarstwo domowe to ludzie wspólnie zamieszkujący i podejmujący różne decyzje, w tym przede wszystkim ekonomiczne. Odwiecznym celem jest zaspokojenie potrzeb członków rodziny. Gospodarstwa domowe w gospodarce rynkowej mają określone możliwości i spełniają pewne funkcje, np. każde gospodarstwo domowe, niezależnie od wielkości, ma możliwości decydowania o tym, jak i gdzie zastosować zasoby, które posiada. Każde gospodarstwo domowe w gospodarce rynkowej ma też możliwości decydowania o tym, co i ile konsumować. Każde gospodarstwo dąży do maksymalizacji swojego zadowolenia, czyli satysfakcji, i tym kieruje się przy podejmowaniu decyzji. Można stwierdzić, że (M. Żukowski, 2005):

- gospodarstwa domowe są decydującym odbiorcą wytwarzanych towarów i usług – przesądzają o celowości ich wytwarzania;
- gospodarstwa domowe zasilają gospodarkę w siłę roboczą;
- skala podaży płacy zależy od tego, jakie są możliwości uzyskania przez nie środków dla zaspokojenia potrzeb członków rodziny.

Gospodarstwo domowe jako podmiot gospodarczy jest ważną częścią gospodarki narodowej, podlega ono tym samym procesom racjonalizacji, jakie zachodzą w gospodarce. Racjonalizacja gospodarowania wiąże się ze stosowaniem rachunku ekonomicznego. Pod wpływem otoczenia zewnętrznego gospodarstwa domowe w procesie podejmowania niektórych decyzji coraz częściej opierają się na rachunku ekonomicznym, np.: przy podejmowaniu pracy, lokacie oszczędności, nabywaniu dóbr i usług. Na ten aspekt zachowań gospodarstw domowych duży wpływ mają procesy cywilizacyjne i społeczne, które zmieniają ich warunki materialne (np. zmiany związane z upowszechnieniem się elektroniki), jak również zmieniają na przykład status społeczno-ekonomiczny kobiet czy związki między rodzicami a dziećmi.

Obok wymienionych kryteriów podejmowania decyzji istnieje ogromny wachlarz zachowań gospodarstw domowych, które są zwykłą niegospodarnością. Niegospodarność może przejawiać się w nieprzemyślanym wykorzystaniu zasobów pracy członków rodziny, nieracjonalnych zakupach dóbr i usług, nieefektywnym wykorzystaniu posiadanych zasobów. W tym zakresie na zachowanie gospodarstw oddziaływają czynniki trudno mierzalne, takie jak na przykład efekt demonstracji (efekt snobizmu), czyli chęć wyróżniania się, nabywanie dóbr rzadko nabywanych przez innych czy efekt naśladownictwa, czyli naśladowanie innych wzorców zachowań i konsumpcji (M. Żukowski, 2005).

Gospodarstwa domowe to najliczniejszy i najważniejsze podmioty gospodarcze. W praktyce podmioty te wykorzystują częściowo rachunek ekonomiczny dla określenia swojego zachowania, obok tego ogromny wpływ na ich decyzje ma tradycja, intuicja, naśladownictwo czy przyzwyczajenia.

Przedsiębiorstwo to jednostka gospodarcza wyodrębniona pod względem techniczno-produkcyjnym, organizacyjnym, ekonomiczno-prawnym, terytorialnym i kadrowym, wykorzystująca czynniki produkcji do wytwarzania dóbr lub świadczenia usług. Jako samodzielna jednostka ukształtowała się w pełni w warunkach kapitalistycznej gospodarki rynkowej. Początkowo były to firmy małe, powstałe w formie warsztatów rzemieślniczych, manufaktur lub biur nakładczych.

Główną cechą przedsiębiorstwa jest jego samodzielność ekonomiczno-finansowa. Polega ona na możliwości dysponowania posiadanymi zasobami środków trwałych i obrotowych, pokrywaniu wydatków z własnych przychodów, posiadaniu rachunku rozliczeniowego w banku czy zaciąganiu kredytów. Decyzje ekonomiczno-finansowe podejmują przedsiębiorstwa na własny koszt i ryzyko, instrumentem wyboru jest rachunek ekonomiczny umożliwiający ocenę każdego wariantu zachowania się tak, by osiągnąć nadwyżkę finansową z punktu widzenia kosztów przychodów i opłacalności. Przedsiębiorstwa są zasadniczym podmiotem wykorzystującym usługi czynników wytwórczych – kapitału i pracy. Elementami procesu gospodarowania w przedsiębiorstwach jest majątek trwały i obrotowy oraz pracownicy. Ich wielkość i struktura określają zdolność produkcyjną przedsiębiorstwa, czyli potencjalne możliwości produkcji dóbr czy świadczenie usług (M. Żukowski, 2005).

Przedsiębiorstwa są zróżnicowane pod względem wielkości i form własności. Za przedsiębiorstwo uważana jest również jednoosobowa firma (np. usługowa). Tradycyjnie w charakterystyce przedsiębiorstwa akcentuje się jego **odrębność techniczno-produkcyjną** oraz **organizacyjno-prawną**. Pierwsza oznacza, że przedsiębiorstwo posiada środki trwałe i obrotowe umożliwiające prowadzenie działalności. Druga odrębność polega na oparciu działalności przedsiębiorstwa na jasno zdefiniowanej strukturze organizacyjnej, w której określone są kompetencje i zakres powiązań poszczególnych członków załogi oraz na jej osobowość prawnej, którą uzyskuje z chwilą wpisania do rejestru przedsiębiorców. **Osobowość prawna** oznacza, że firma ma prawo zawierania umów z kontrahentami, ponoszenia odpowiedzialności majątkowej, zaciągania zobowiązań finansowych.

Każde przedsiębiorstwo ma określone możliwości oraz spełnia pewne funkcje. Zakres tych funkcji zależy od ustroju społecznego, w którym ono działa oraz od systemu funkcjonowania gospodarki.

Inny jest zakres swobody działania przedsiębiorstw w warunkach **gospodarki rynkowej**, w której realizowane są założenia polityki neoliberalnej –państwo zapewnia jedynie warunki bezpieczeństwa i porządku działania przedsiębiorstw, jak ma to miejsce na przykład w Stanach Zjednoczonych, a inne w państwie opiekuńczym, z dużym zakresem interwencji państwa w sprawy społeczno-gospodarcze, sytuacja taka ma miejsce na przykład w krajach skandynawskich. Jeszcze inaczej funkcje przedsiębiorstw kształtowały się w systemie w pełni **scentralizowanej władzy ekonomicznej**, tzn. w systemie nakazowo-rozdzielczym, w krajach takich, jak: Jugosławia, Węgry czy Polska w latach osiemdziesiątych (S. Marciniak, 2001).

Jak każdy podmiot gospodarczy przedsiębiorstwo podejmuje decyzje, uwzględniając swój cel działania. Powszechnie uważa się, że celem tym jest maksymalizacja zysku. Istnieje jednak kilka teorii zachowań się firm. Można podzielić **cele działalności** na **formalne** i **nieformalne**. Formalne cele zwarte są w ustawach o przedsiębiorstwach, statutach. Mogą to być takie cele, jak: zaspokojenie potrzeb społecznych, osiąganie wymiernych wyników (np. zysków, wskaźników rentowności) itp. Historia rozwoju przedsiębiorstwa wykazała, że cele formalne nie zawsze są jedynymi, jednostki gospodarcze dążą bowiem do realizacji własnych interesów wyrażonych przez cele nieformalne, np.: wzrost wynagrodzenia, opanowanie rynku, eliminacja konkurentów (M. Żukowski, 2005).

Państwo w charakterze podmiotu gospodarczego występuje samodzielnie jako potężna siła ekonomiczna m.in. w dziedzinie produkcji.

Państwo jest właścicielem wielu ważnych, kluczowych gałęzi i udziałowcem we własności kapitału bankowego i przemysłowego, systemu łączności, transportu, systemu energetycznego, przemysłu górniczo-wydobywczego, hutniczego i gospodarki komunalnej.

Tradycyjnie przyjmuje się, że funkcje są wewnętrzne i zewnętrzne. Obejmują one przede wszystkim działania typowe dla państwa, a więc zabezpieczenie ładu wewnętrznego i zewnętrznego, oraz działania, które mogą lub muszą być podejmowane pod wpływem ogólnego rozwoju społeczeństwa. Rola państwa jest ściśle związana ze stanem gospodarki (M. Żukowski, 2005), polityką społeczno-gospodarczą oraz zmianami ustrojowymi. Można powiedzieć, że:

- Działalność państwa powstała na tle trudności w przebiegu procesów reprodukcji. Zadaniem państwa jest zatem takie oddziaływanie na wybory podejmowane przez podmioty sfery realnej, aby ograniczyć anarchię gospodarczą i żywiołowość rozwoju. Zewnętrznym tego wyrazem jest formułowanie przez państwo polityki przemysłowej, finansowej, podatkowej, prawnej itp.
- Z różnych względów państwo stara się złagodzić konflikty interesów w stosunkach zachodzących między podmiotami gospodarczymi, np. między pracownikami i pracodawcami, rolnictwem i jego otoczeniem. Środkami działania mogą być: państwowa polityka cen, dotacje, subwencje, ingerencje w sprawie poziomu płac, ich indeksacji itp.
- Państwo może dokonywać zmian proporcji podziału nowo wytworzonej wartości na przykład dla realizacji celów socjalnych związanych z funkcjonowaniem tzw. państwa opiekuńczego.
- Istnieje konieczność ochrony gospodarki wewnętrznej przed niekorzystnymi destrukcyjnymi wpływami zewnętrznymi przez kształtowanie procesów integracyjnych, politykę rolną.. Jeżeli władze nie są gotowe prowadzić aktywnej polityki w tym zakresie, to istnieją wszelkie powody do obaw przed skutkami tych wpływów, np.: nieufność robotnika wobec groźby bezrobocia czy obawa przedsiębiorcy przed ogólnym kryzysem, zaniepokojenie rolników brakiem ochrony rodzimego rynku rolnego.

Głównym celem prowadzenia działalności gospodarczej jest osiąganie maksymalnych korzyści finansowych. Inne ekonomiczne cele to:

- poszerzanie rynków zbytu;
- podnoszenie konkurencyjności przedsiębiorstwa;
- maksymalizacja wartości rynkowej przedsiębiorstwa;
- utrwalanie własnej pozycji na rynku itp.

Społeczne cele gospodarowania zgodne z koncepcją społecznej odpowiedzialności biznesu to:

- dbałość o ochronę środowiska naturalnego;
- dobre relacje z partnerami biznesowymi;
- dobre relacje z pracownikami;
- dbałość o prawa człowieka i prawa pracownicze;
- wspieranie inicjatyw społecznych;
- wspieranie projektów edukacyjnych itp.

Systemy gospodarcze

W praktyce gospodarczej system ekonomiczny (gospodarczy) jest prezentowany jako zespół instytucji i organizacji związanych z podejmowaniem i realizacją decyzji ekonomicznych. Sposób działania instytucji i formą realizacji decyzji ekonomicznych określa się jako funkcjonowanie danego systemu gospodarczego.

Wszystkie teoretycznie możliwe oraz istniejące realnie systemy ekonomiczne (gospodarcze) można podzielić na trzy grupy (S. Marciniak 2001):

1. Gospodarkę wolnorynkową – najpełniej rozwinęła się w Europie zachodniej w drugiej połowie XIX w. Zasoby są w posiadaniu prywatnym, ich alokacja odbywa się jedynie i wyłącznie w wyniku działania mechanizmu rynkowego. W czystej postaci dziś nie istnieje. Zakres gospodarki rynkowej historycznie i ustrojowo jest różny. Gospodarka rynkowa wyłoniła się z gospodarki naturalnej.

2. Gospodarkę naturalną – jest to taka organizacja działalności gospodarczej, w której produkcja i podział (dystrybucja) są nastawione na bezpośrednie zaspokojenie potrzeb producentów. Podstawą gospodarki naturalnej są zwyczaje i tradycja. Zmiany w technice gospodarowania oraz w stosunkach gospodarczych dokonują się powoli. W społeczeństwie pierwotnym była jedyną formą gospodarowania. W starożytności i w średniowieczu była podstawową formą gospodarowania i istniała obok rozwijającej się gospodarki wymiennej (rynkowej).

Początki gospodarki rynkowej związane są z:

- rozwojem społecznego podziału pracy;
- specjalizacją producentów;
- wzrostem roli własności prywatnej.

3. Wymianę – wprowadza do gospodarki naturalnej zasadnicze zmiany, spowodowane podziałem pracy i specjalizacją, które wywołują wzajemną zależność wszystkich uczestników procesu produkcyjnego. Wymiana powoduje podział społeczeństwa na grupy i podgrupy społeczno-zawodowe oraz warstwy.

Pierwsze zalążki gospodarki rynkowej zaistniały u schyłku społeczeństwa pierwotnego. W starożytności i w średniowieczu nastąpił dalszy rozwój gospodarki wymiennej. Jednakże dopiero w kapitalizmie gospodarka towarowo-pieniężna stała się jedyną, lub dominującą, formą gospodarowania. Dziś tylko w niektórych słabo rozwiniętych krajach Afryki, Ameryki Łacińskiej i Oceanii występują znaczne enklawy, w których istnieją pozostałości gospodarki naturalnej. W krajach realnego socjalizmu zakres gospodarki towarowo-pieniężnej był ogólnie niewielki i różny. Występował w pewnym zakresie, w dziedzinie produkcji i podziału dóbr i usług konsumpcyjnych. Zupełnie nie istniały takie rynki, jak: walutowy, kredytów krótkoterminowych, papierów wartościowych oraz pracy.

Gospodarka wolnorynkowa jest zwykle kojarzona z czystym kapitalizmem, czyli systemem, w którym ziemia i kapitał są własnością prywatną. Wszystkie decyzje gospodarcze są podejmowane przez gospodarstwa domowe i przedsiębiorstwa działające według własnego interesu. Nie występuje ingerencja państwa w sprawy gospodarcze.

Do opisu tej gospodarki przyjmuje się następujące założenia (J. Sloman, 2001):

- przedsiębiorstwa dążą do maksymalizacji rynku;
- konsumenci dążą do tego, aby z wydatków na zakupy uzyskać maksymalną użyteczność (korzyść);
- pracownicy dążą do maksymalizacji swych płac z uwzględnieniem odczuwalnych przez nich kosztów pracy na danym stanowisku;
- jednostki mają pełną swobodę w podejmowaniu decyzji ekonomicznych – konsumenci decydują sami, na co wydać dochody;
- pracownicy decydują, gdzie i ile pracować;
- przedsiębiorstwa ustalają, co produkować i sprzedawać oraz jakie stosować metody produkcji.

Wyniki decyzji przedsiębiorstw i gospodarstw domowych są przekazywane za pośrednictwem cen. Działanie mechanizmu rynkowego polega na reakcji cen na występujące na rynku niedobory i nadwyżki.

Gospodarka rynkowa mieszana. W tym systemie dominuje własność prywatna oraz rynkowa alokacja zasobów. Są one jednak modyfikowane przez następujące fakty:

- część zasobów znajduje się w posiadaniu państwa i samorządów;
- istnieje ingerencja państwa w sprawy gospodarcze korygująca i uzupełniająca mechanizm rynkowy.

Gospodarka mieszana nie jest w ekonomii jednoznacznie zdefiniowana. Najczęściej sformułowanie to odnosi się do systemu funkcjonowania gospodarki narodowej. System funkcjonowania gospodarki narodowej to sposób działania obejmujący mechanizm działania praw ekonomicznych oraz sposób i środki wykorzystania tych praw w procesach ekonomicznych przez podstawowe podmioty gospodarcze.

Gospodarka rynkowa mieszana jest to taka gospodarka, w której oprócz podstawowego mechanizmu napędowego (rozwojowego) istnieje i odgrywa istotną rolę mechanizm wspomagający (korygujący). Taka gospodarka występuje w wielu współczesnych rozwiniętych gospodarkach kapitalistycznych, np.: w krajach skandynawskich, Francji, Wielkiej Brytanii, a także w Korei Południowej.

Większość ludności świata żyje jednak w krajach Trzeciego Świata. Należy do nich większość narodów Ameryki Łacińskiej, Afryki i Azji. Gospodarka w znacznej ich części opiera się w przeważającej mierze na tradycji. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat nastąpiły jednak daleko idące zmiany społeczne, polityczne i ekonomiczne, kraje te zaczęły przyswajać sobie nowy system ekonomiczny. Mają one duże zaufanie do mechanizmu rynkowego, który powinien zapewnić właściwe rozwiązanie ich problemów. Wielu ekonomistów i przywódców uważa jednak, że mechanizm rynkowy nie jest najlepszym środkiem na problemy ekonomiczne krajów Trzeciego Świata. Znalazło to wyraz w projektach wprowadzania gospodarki centralnie planowanej i centralnie zarządzanej. Obecnie nadal istnieje znaczna grupa krajów, w których obok enklaw gospodarki rynkowej funkcjonuje gospodarka rynkowa korygowana centralnie.

Gospodarka centralnie kierowana. W tym systemie zasoby są własnością państwa i samorządów terytorialnych. Alokacja zasobów określona jest planem centralnym rządu. W praktyce w okresie 1918–1989 w Europie obserwować można było dwa warianty takiego systemu:

- socjalizm planowy, w którym zasoby były własnością państwa, a ich alokacja odbywała się zgodnie z centralnym planem państwa (np. ZSRR, NRD, Rumunia);
- socjalizm rynkowy, w którym zasoby były własnością państwa lub w dyspozycji realnej samorządów i innych podmiotów gospodarczych; alokację zasobów determinował w pewnym stopniu mechanizm rynkowy(np. Jugosławia, Węgry, Polska a obecnie także Chiny).

Zasadnicze cechy systemu gospodarki centralnie planowanej to:

- centralizacja zarządzania gospodarką i planowania;
- administracyjne kształtowanie cen produktów i czynników produkcji;
- brak konkurencji między jednostkami gospodarczymi;
- hierarchiczna podległość kierownictwa organizacji gospodarczych i instytucji wobec biurokracji partyjno-państwowej;
- nakazowo-rozdzielczy charakter systemu;
- regulowanie i finansowanie działalności przedsiębiorstw przez państwo;
- duży stopień izolacji gospodarki od gospodarki światowej.

Najistotniejsze wady tej gospodarki to:

- brak mechanizmów rynkowych;
- nieefektywne wykorzystywanie czynników produkcji;
- brak efektywnych systemów motywacyjnych;
- niska efektywność i innowacyjność gospodarki;
- niedobór dóbr konsumpcyjnych na rynku.

CIEKAWOSTWA!

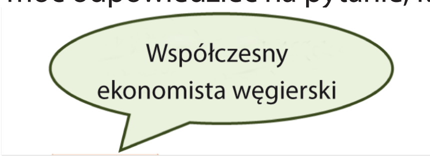
W znacznej grupie państw europejskich głównym mechanizmem napędowym w latach 1949–1989 był system centralnego sterowania, zwany systemem nakazowo-rozdzielczym. System ten polegał na wykorzystywaniu przez administrację państwową nakazów prawno-organizacyjnych do sterowania gospodarką. Oprócz nakazów i zakazów administracja centralna w bardzo szerokim zakresie stosowała rozdzielnictwo wszelkiego rodzaju towarów, tzn. zarówno czynników produkcji, jak i środków konsumpcji. Jednocześnie aparat ten wykorzystywał mechanizm rynkowy do sterowania gospodarką narodową. Część gospodarki podległa bezpośrednio prawom rynkowym. Tak było m.in. w Polsce, gdzie istniał rynek produktów rolno-spożywczych w części nie sterowany centralnie, rządzący się prawem popytu i podaży. Działanie tego rynku w Polsce było możliwe, gdyż w rolnictwie dominującą formą własności była drobna prywatna gospodarka chłopska. Należy dodać, że rynek rolno-spożywczy był opanowany przez państwowy monopol skupu i działania scentralizowanego aparatu spółdzielczego.

Pod koniec lat 70-tych XX w. gospodarka polska znalazła się w głębokim kryzysie. Zasadnicze zmiany ustroju państwa, początek demokracji umożliwiły wprowadzenie zasadniczych zmian gospodarczych. W 1989 roku Wicepremier i Minister Finansów Leszek Balcerowicz przygotował plan działań mających na celu transformację polskiej gospodarki.

Do głównych działań w ramach tego planu można zaliczyć:

- uwolnienie cen;
- wprowadzenie dyscypliny w polityce budżetowej państwa;
- restrykcyjna polityka pieniężna;
- prywatyzacja przedsiębiorstw państwowych,;
- zmiana systemu podatkowego polegająca na wprowadzeniu podatku od dochodów osobistych PIT i podatku od wartości dodanej VAT;
- tworzenie rynku kapitałowego przez powołanie Giełdy Papierów Wartościowych;
- zmiana zasad funkcjonowania banku centralnego i systemu bankowego;
- wprowadzenie wymienialności złotego na inne waluty;
- liberalizacja handlu zagranicznego.

Dla gospodarki i społeczeństwa nie jest obojętne, jaki system gospodarczy istnieje w danym kraju. Od tego, jaka jest jego efektywność, zależy osiągnięty poziom gospodarki oraz, w decydującym stopniu, poziom życiowy ludności. Teoria ekonomii zajmuje się sprawnością systemów gospodarczych między innymi dlatego, żeby móc odpowiedzieć na pytanie, który z istniejących systemów jest lepszy.



J. Karnai proponuje ocenianie systemów gospodarczych za pomocą cech ogólnych, wywierających zasadniczy wpływ na ludzi w nich żyjących.

Są to (S. Marciniak, 2001):

1) realny wzrost systemu gospodarczego, tzn. wzrost produkcji do dochodu narodowego, konsumpcji;

2) postęp techniczny – system powinien stymulować wprowadzanie nowych technologii, nowych produktów;

3) przystosowawcze własności systemu, które oznaczają zdolność adaptacyjną systemu do koniecznych zmian produkcji i konsumpcji oraz sposobu funkcjonowania systemu;

4) selekcyjne właściwości systemu w odniesieniu do nowo pojawiających się organizacji oraz osób zajmujących kierownicze stanowiska w organizacji (np. przedsiębiorczość, zdolności organizacyjne);

5) podział dochodu i zatrudnienia, czyli sprzeczność między bodźcowym a egalitarnym podziałem oraz konieczność zapewnienia zatrudnienia dla wszystkich chcących pracować;

6) rozwój kulturalny i społeczny – dotyczy to m.in. zapewnienia rozwoju nauki i poprawy usług służby zdrowia;

7) własność, władza i decyzje, czyli sprzeczności jakie mogą występować, problem decentralizacji i centralizacji zarządzania gospodarką, sposób wyrażania woli społeczeństwa, zakres wolności.

Inni ekonomiści wymieniają takie kryteria oceny sprawności systemów gospodarczych, jak: efektywność alokacji, tempo wzrostu gospodarczego, satysfakcja konsumenta, rozkład dochodów, stabilność gospodarki, jej cele rozwojowe oraz bezpieczeństwo narodowe. Trudno jednocześnie przesądzić, który z systemów jest lepszy – ten, który gwarantuje wyższą efektywność ekonomiczną, ale powoduje duże bezrobocie, czy ten z mniejszą efektywnością i mniejszym bezrobociem. W kontekście omawianych kryteriów oceny systemów gospodarczych warto przytoczyć pojęcie określane umownie jako **kryterium Pareta** (S. Marciniak, 2001). Kryterium to mówi, że jeżeli dostępne dla społeczeństwa zasoby zostały rozdzielone pomiędzy aktualne cele, a dobrobyt ekonomiczny przynajmniej jednego członka społeczeństwa zwiększył się, bez jednoznacznego zmniejszenia dobrobytu pozostałych, to zwiększył się dobrobyt całego społeczeństwa. **Optimum Pareta** istnieje więc wtedy, gdy niemożliwa jest taka realokacja zasobów, która powiększa dobrobyt pewnej jednostki bez jednoczesnego zmniejszenia dobrobytu innych jednostek.

Gospodarowanie odbywa się zawsze w określonych warunkach materialnych, instrumentalnych, społecznych, politycznych. Całokształt tych warunków oraz reguł i mechanizmów gospodarowania składa się na pojęcia: **gospodarka i system gospodarczy**.

System gospodarczy, według P. A. Samuelsona i W. D. Nordhausa, to układ stosunków i organizacji, który kształtuje prawa i regulacje rządzące działalnością gospodarczą, determinuje prawa własności czynników produkcji, rozdziela uprawnienia do podejmowania decyzji w zakresie produkcji i konsumpcji, determinuje bodźce motywujące różne podmioty gospodarcze, a w ostateczności rozstrzyga kwestie, co, jak i dla kogo ma być produkowane (R. Milewski, 2002).

Na podstawie kryterium własności czynników produkcji wyróżnia się w ramach danego kraju gospodarkę prywatną i publiczną, a w skali międzynarodowej – gospodarkę kapitalistyczną i socjalistyczną (lub komunistyczną). Pojęcia te łączy się często z charakterem systemu politycznego (kto i jak rządzi w danym kraju) oraz z modelem podziału (jak dzielone są dobra).

W zależności od tego, który mechanizm regulowania i koordynacji procesów gospodarczych dominuje, można wyodrębnić gospodarkę rynkową (system rynkowy) i gospodarkę nakazową (system nakazowy).

Gospodarka rynkowa – to gospodarka, w której procesy gospodarcze regulowane są głównie za pomocą różnego rodzaju nakazów, zakazów i dyrektyw wydawanych przez biurokrację państwową (zwłaszcza szczebla centralnego). Gospodarka centralnie planowana lub system nakazowo-rozdzielczy.

Mechanizm regulacji gospodarki w praktyce jest powiązany z własnością czynników produkcji.

Mechanizm rynkowy jest dominującym regulatorem procesów gospodarczych w tych krajach, w których dominuje własność prywatna, a biurokracja państwa i plan centralny w krajach, w których dominuje własność publiczna (w szczególności państwowa).

Na podstawie kryterium podziału uprawnień do podejmowania decyzji można wyodrębnić systemy mniej lub bardziej zdecentralizowane (czy scentralizowane).

System gospodarczy byłby całkowicie zdecentralizowany, gdyby uprawnienia do podejmowania decyzji gospodarczych należały wyłącznie do poszczególnych producentów i konsumentów (np. kapitalizm wolnokonkurencyjny Europy Zachodniej i Ameryki Północnej), zaś całkowicie scentralizowane – gdyby należały one wyłącznie do centralnej biurokracji państwowej (np. system panujący w Związku Radzieckim i innych krajach „realnego socjalizmu").

4.2. Istota funkcjonowania gospodarki rynkowej

Pojęcie i funkcje rynku

Gospodarka rynkowa swoją nazwę zawdzięcza przede wszystkim temu, że podstawowym regulatorem i koordynatorem procesów gospodarczych jest w niej **rynek**. Pod pojęciem rynku rozumie się ogół warunków ekonomicznych, w których dochodzi do zawierania transakcji wymiennych między sprzedawcami oferującymi towary i usługi, a nabywcami reprezentującymi potrzeby poparte określonymi funduszami nabywczymi (S. Marciniak, 2001).W węższym znaczeniu przez rynek rozumie się określone miejsce kupna i sprzedaży, gdyż obejmuje ono całokształt warunków, w jakich dokonuje się wymiana towarów i usług. Obecnie obok rynków tradycyjnych istnieją również takie, które nie mają swojej siedziby i na których nie ma bezpośrednich kontaktów między sprzedawcami a nabywcami. Transakcje wymienne na tych rynkach zawierane są listownie lub za pomocą różnych środków łączności i przetwarzania danych, takich jak:. telefony, teleksy, telefaksy lub odpowiednio zaprogramowane komputery.

Najważniejsze funkcje rynku to (R. Milewski, 2002):

1. Rynek dokonuje wyceny różnych dóbr (produktów, usług i zasobów gospodarczych). We współczesnej gospodarce rynkowej występuje tendencja do przekształcania się wszystkich dóbr w towary, których ceny ustalają się na rynku.

2. Rynek jest podstawowym źródłem informacji dla podmiotów gospodarczych. Dokonując wyceny różnych produktów, usług i zasobów, rynek dostarcza podmiotom najbardziej obiektywnej informacji o ich cenach i relacjach cen.

3. Rynek jest niezbędnym warunkiem racjonalnego wykorzystania zasobów gospodarczych, zarówno produktów, jak i czynników produkcji (pracy, ziemi i kapitału).

4. Rynek umożliwia ustalanie się stanów równowagi w gospodarce. Parametry rynkowe (ceny, stawki płac, stopy procentowe itp.) dostarczają podmiotom gospodarczym ważnych sygnałów. Reakcją na te sygnały są działania uczestników rynku, których efektem może być powstawanie, przywracanie i utrzymywanie się stanów równowagi w gospodarce.

5. Rynek jest weryfikatorem społecznej przydatności produkcji i zarazem mechanizmem dostosowania produkcji do potrzeb. Na rynku okazuje się, czy dana produkcja znalazła uznanie potencjalnych nabywców.

Rynek jest równocześnie podstawowym mechanizmem rozwiązywania trzech kluczowych problemów gospodarki: co, jak i dla kogo produkować. Przy rozwiązywaniu pierwszego z tych problemów (**co produkować?**) istotne znaczenie mają przede wszystkim zachowania konsumentów. Nabywając takie a nie inne produkty, uczestniczą oni w nieustannym akcie wyborczym.

Przy rozwiązywaniu drugiego z wymienionych problemów (**jak produkować?**) istotne jest istnienie efektywnej konkurencji między producentami. Aby sprostać konkurencji, producenci muszą produkować dużo i sprzedawać tanio. Muszą utrzymywać koszty produkcji na możliwie najniższym poziomie. Informacji potrzebnych im do podejmowania tego typu decyzji dostarcza rynek, a szczególnie ukształtowane na rynku ceny poszczególnych produktów oraz ceny czynników produkcji.

Trzeci z problemów(**dla kogo produkować?**) rozwiązywany jest przede wszystkim dzięki kształtowaniu się relacji popytu i podaży na rynkach czynników produkcji. Rynki te determinują ceny czynników produkcji, od których z kolei uzależnione są przychody z tych czynników.

Klasyfikacja rynków według różnych kryteriów

Całokształt transakcji, czyli rynek, można klasyfikować według różnych kryteriów podziału (R. Milewski, 2002):

1. **Według przedmiotu wymiany** rynek dzieli się na:

- **rynek dóbr i usług konsumpcyjnych**, na którym przedmiotem obrotu są towary i usługi zaspokajające potrzeby konsumentów;
- **rynek czynników produkcji**, na którym przedmiotem obrotu są towary wykorzystywane do produkcji innych towarów i świadczenie usług, a także ziemia, praca, kapitał, wiedza i informacja;
- **rynek finansowy**, na którym dokonywane są transakcje w formie pieniężnej i który pozwala na znajdowanie przez przedsiębiorców środków finansowych na rozwój przedsiębiorstwa, w zależności od rodzaju transakcji wyróżnia się rynek pieniężny, kapitałowy, obrót papierami wartościowymi, walutowy.

2. **<u>Według zasięgu geograficznego</u>** można wyodrębnić:

- **rynek lokalny**, obejmujący obszar jednego miasta lub jednej wsi;
- **rynek regionalny**, obejmujący jeden region (np. obszar jednego województwa w Polsce);
- **rynek krajowy**, obejmujący obszar całego kraju;
- **rynek międzynarodowy**, obejmujący grupę krajów należących do jednej organizacji (np. Unii Europejskiej czy Europejskiego Stowarzyszenia Wolnego Handlu);
- **rynek światowy** (globalny), obejmujący wszystkie kraje i dotyczący producentów standardowych dóbr dla masowych odbiorców.

3. **<u>W zależności od sytuacji rynkowej</u>** można mówić o:

- **rynku producenta**, który charakteryzuje się długotrwałą przewagą popytu nad podażą, co stawia sprzedawcę w bardzo korzystnej sytuacji przetargowej, zapotrzebowanie kupujących jest o wiele większe niż ilość produktów oferowanych do sprzedaży, mówi się o nim w sytuacji niedoboru rynkowego, ponieważ nabywcy kupują wszystkie oferowane przez niego towary i usługi;
- **rynku konsumenta**, który charakteryzuje się nadwyżką podaży nad popytem, co oznacza uprzywilejowaną pozycję nabywcy, występuje nadwyżka rynkowa.

4. **<u>W zależności od stopnia jednorodności przedmiotu transakcji</u>** można wyróżnić:

- **rynek homogeniczny** (jednorazowy), na przykład rynek ropy lub pszenicy;
- **rynek heterogeniczny**, np. rynek pracy – występują na nim różne zawody, wymagające odmiennych zdolności i kwalifikacji, niekonkurujące między sobą;

5. **<u>W zależności od stopnia wyrównywania się ceny</u>** wyróżnia się:

- **rynek doskonały**, który charakteryzuje się rozproszeniem po stronie popytu i podaży, brakiem barier wejścia na rynek, przejrzystością i jednorodnością dóbr;
- **rynek niedoskonały**, który jest przeciwieństwem rynku doskonałego, czyli rynek monopolistyczny, przy najwyższym stopniu monopolizacji na rynku występuje jedno przedsiębiorstwo, które w pełni kontroluje sytuację rynkową, ma możliwość ustalania podaży i cen, dla monopolisty cena zatem nie jest parametrem branym z rynku, bo to on jest jej „dawcą".

6. **<u>Ze względu na warunki konkurencji</u>** można wyróżnić:

- **konkurencję doskonałą** – ma miejsce wtedy, gdy funkcjonuje bardzo dużo producentów i konsumentów podobnych produktów (np. rynek płodów rolnych);
- **konkurencję monopolistyczną** – występuje tam, gdzie jest wielu producentów i nabywców, producenci konkurują ze sobą głównie na płaszczyźnie reklamy oraz pod względem jakości wyrobów(np. rynek odzieżowy);
- **oligopol** – występuje tam, gdzie jest niewielka liczba produktów i każdy z nich ma znaczący udział w zysku, z czego wynika współzależność między nimi, co oznacza, że firmy oligopolistyczne mogą zawrzeć porozumienia cenowe (np. rynek usług pocztowych i telekomunikacyjnych w Polsce);
- **monopol** – oznacza istnienie na rynku jednego producenta, zazwyczaj unikatowego dobra, nie występuje konkurencja, a ceny ustalane są przez monopolistę.

7. **<u>W zależności od zakresu kontroli</u>** wyróżnia się:

- **rynek wolny** to taki, nad którym władze gospodarcze nie sprawują bezpośredniej kontroli, sprzedawcy i nabywcy mają swobodę w określaniu ilości sprzedawanych i nabywanych dóbr oraz cen, po jakich dokonują wymiany;
- **rynek regulowany** to taki, nad którym władze gospodarcze sprawują bezpośrednią kontrolę, narzędziami tej kontroli mogą być licencje udzielane uczestnikom wymiany, ustalenie obowiązujących cen minimalnych i maksymalnych, określenie minimalnych lub maksymalnych kwot wymiany.

Konkurencja jest ważnym elementem rynku. Konkurencja jest to proces, za pomocą którego uczestnicy rynku, dążąc do realizacji swych interesów, próbują przedstawić oferty korzystniejsze od innych pod względem ceny, jakości lub innych cech wpływających na decyzję zawarcia transakcji. Konkurencja występuje zarówno między nabywcami, jak i między sprzedawcami. Nabywcy konkurują z innymi nabywcami o ograniczoną ilość dóbr znajdujących się na rynku, natomiast sprzedawcy konkurują z innymi sprzedawcami o pozyskanie konsumentów. Konkurencja odbywa się w formie cenowej i poza cenowej. Może dotyczyć ceny, jakości, wagi, objętości, wyglądu, mody, trwałości zapachu czy warunków wymiennych (S. Marciniak, 2001).

Korzyści i koszty gospodarki rynkowej

Analizując cechy gospodarki rynkowej, można wskazać niektóre istotne jej zalety. Są to m.in. (R. Milewski, 2002):

- tendencja do racjonalnego wykorzystania zasobów gospodarczych;
- efektywny system motywacyjny;
- duża innowacyjność gospodarki;
- dyscyplina finansowa przedsiębiorstw, związana z konkurencją i zasadą samofinansowania działalności gospodarczej;
- tendencje do samoczynnego ustalana się równowagi rynkowej;
- duża elastyczność gospodarki;
- dobre zaopatrzenie sklepów.

Jak dotychczas kraje z rozwiniętą gospodarką rynkową zapewniają swoim obywatelom najwyższy przeciętny poziom dobrobytu, gwarantując im równocześnie najwyższy zakres swobód obywatelskich.

Gospodarka rynkowa ma też słabe strony. Wiążą się one przede wszystkim z pewnymi niedomaganiami ryku, wykorzystywanymi często w argumentacji na rzecz aktywnej roli państwa w gospodarce. W teoretycznej analizie słabości gospodarki rynkowej wskazuje się zwykle na kwestie, których rynek nie rozwiązuje wcale bądź rozwiązuje je źle.

Chodzi tu głównie o następujące kwestie (R. Milewski, 2002):

1. Czynniki ograniczające działanie rynku w praktyce. W praktyce konkurencja ograniczona jest przez takie czynniki, jak: procesy monopolizacji gospodarki, (czyli powstawanie dużych przedsiębiorstw mających istotny wpływ na łączną podaż dóbr, a tym samym także na ich ceny), niedoskonała informacja, bariery wejścia na rynek (czyli utrudniony dostęp do rynku dla nowych podmiotów) oraz ograniczona przenośność czynników produkcji. W rezultacie zalety systemu rynkowego nie ujawniają się w pełni.

2. Występowanie negatywnych efektów zewnętrznych. Z efektami zewnętrznymi mamy do czynienia wtedy, gdy pewne podmioty gospodarcze przerzucają na inne podmioty bądź na całe społeczeństwo część skutków lub kosztów swej działalności (negatywne efekty zewnętrzne) albo bez ponoszenia odpowiednich wydatków korzystają z rezultatów działalności innych podmiotów (pozytywne efekty zewnętrzne). Tego typu efekty mogą występować zarówno w sferze produkcji, jak i sferze konsumpcji. Negatywne efekty zewnętrzne w sferze produkcji, zwane też czasami zewnętrznymi kosztami produkcji, to na przykład towarzyszące produkcji pewnych dóbr zanieczyszczenia środowiska naturalnego w postaci szkodliwych ścieków, pyłów, gazów, wzrostu natężenia hałasu. Tego rodzaju efekty dotyczą całego społeczeństwa, a związane z nimi koszty, dotyczące na przykład ochrony środowiska, są z reguły pokrywane tylko w części przez firmy produkujące dane dobro. W takich przypadkach społeczny koszt produkcji dóbr jest wyższy niż koszt prywatny. Pozytywne efekty zewnętrzne w sferze produkcji, zwane też zewnętrznymi korzyściami z produkcji, to na przykład wybudowanie przez daną firmę drogi dojazdowej, z której korzystają również inni użytkownicy. W tych przypadkach społeczny koszt produkcji dóbr jest niższy niż ich koszt prywatny. Przykładem negatywnych efektów zewnętrznych w sferze konsumpcji, zwanych też zewnętrznymi kosztami konsumpcji, może być sytuacja w której hałaśliwe radio słuchane przez kogoś przeszkadza innym ludziom. W takich przypadkach korzyści (pożytki) społeczne związane z konsumpcją dóbr są mniejsze niż korzyści (pożytki) prywatne. Przykładem pozytywnych efektów zewnętrznych w sferze konsumpcji, zwanych też zewnętrznymi korzyściami z konsumpcji, może być sytuacja,

w której podróżowanie przez część ludzi autobusami, tramwajami, metrem lub koleją zwiększa korzyści z podróżowania przez innych ludzi własnymi samochodami (zwiększony komfort jazdy mniej zatłoczonymi drogami). W takich przypadkach społeczne korzyści związane z konsumpcją dóbr są większe niż korzyści prywatne. Ogólną prawidłowością jest, że występowanie negatywnych efektów zewnętrznych będzie prowadzić do nadmiernej produkcji lub konsumpcji pewnych dóbr, występowanie zaś pozytywnych efektów zewnętrznych będzie prowadzić do zbyt małej produkcji lub konsumpcji tych dóbr.

3. Istnienie tzw. dóbr publicznych. Przykładem tego typu dóbr są: chodniki i oświetlenie ulic, latarnie morskie oraz usługi dostarczone przez armię, policję i straż pożarną. Cechą szczególną dla dóbr publicznych jest to, że korzyści z nich płynące nie mogą być ograniczone tylko do jednej osoby czy jednego gospodarstwa domowego. Przynoszą one więc duże korzyści (pożytki) społeczne w porównaniu z korzyściami prywatnymi, co powoduje, że są społecznie pożądane, a prywatnie – mało opłacalne (nikt nie chciałby pokrywać samodzielnie kosztów instalacji i utrzymania oświetlenia ulicznego, a tym bardziej funkcjonowania armii czy policji). Czyste dobra publiczne odróżniają od dóbr prywatnych dwie cechy:

a) korzystanie z nich przez jedną osobę nie wyklucza korzystania z nich przez inne osoby – tzw. nierywalizacyjność;

b) gdy są one już dostarczone, w praktyce nie ma możliwości wyłączenia kogokolwiek z korzystania z nich, w tym także takich osób, które nie chcą wnosić za to żadnych opłat (byłoby na przykład niepraktycznym pomysłem ogrodzenie prywatnie zbudowanego chodnika ulicznego wysokim parkanem tylko po to, aby móc pobierać opłaty od tych, którzy zechcą nim przejść) – tzw. niewyłączalność. Przykładami dóbr zawierających w sobie pewien element dobra publicznego jest oświata i służba zdrowia, w związku z czym płynące z nich korzyści społeczne prawdopodobnie przewyższą korzyści prywatne. To dziedziny, które zapewniają prywatne korzyści poszczególnym jednostkom, ale korzysta na tym także całe społeczeństwo – pracodawcy na przykład z reguły chętniej zatrudniają ludzi wykształconych i zdrowych, gdyż łatwiej się z nimi porozumieć, łatwiej w ich przypadku prowadzić szkolenie zawodowe itp. Chociaż w interesie społecznym jest profilaktyka zdrowotna i powszechność wykształcenia na pewnym poziomie, nie oznacza to, że społeczeństwo ma pokrywać komuś koszty upiększających operacji plastycznych czy gwarantować bezpłatne doktoraty.

4. Występowanie zjawisk destabilizacyjnych gospodarkę, takich jak: duże wahania aktywności gospodarczej, bezrobocie, niepełne wykorzystanie mocy wytwórczych i inflacja, które wywołują negatywne skutki ekonomiczne (np. straty w produkcji i dobrobycie społecznym) oraz sprzyjają nasilaniu się negatywnych zjawisk społecznych (poczucie niepewności, konflikty, przestępczość).

5. Tendencja do powstawania dużych, nie zawsze akceptowanych społecznie, różnic dochodowych i majątkowych. Duże zróżnicowanie społeczeństwa pod względem dochodu i majątku, nawet jeśli jest korzystne z czysto ekonomicznego punktu widzenia, na przykład ze względu na silną motywację ludzi przedsiębiorczych i inne czynniki, może powodować narastającą frustracje i protesty szerokich grup społecznych oraz prowadzić do powiększania się obszarów ubóstwa i nasilania się innych negatywnych zjawisk społecznych. Związane z tym zjawiskami straty mogą przewyższyć wspomniane korzyści ekonomiczne.

Tabela 10. Wady i zalety gospodarki rynkowej

Zalety gospodarki rynkowej:	Słabości gospodarki rynkowej:
• tendencja do racjonalnego wykorzystania zasobów gospodarczych; • efektywny system motywacyjny; • dyscyplina finansowa przedsiębiorstw; • tendencje do samoczynnego ustalania się równowagi rynkowej; • duża elastyczność gospodarki; • dobre zaopatrzenie sklepów.	• czynniki ograniczające działanie rynku w praktyce; • występowanie negatywnych efektów zewnętrznych; • istnienie tzw. dóbr publicznych; • występowanie zjawisk destabilizujących gospodarkę. • tendencja do powstawania dużych, nie zawsze akceptowalnych społecznie różnic dochodowych i majątkowych.

Źródło: Opracowanie własne

Struktury rynkowe

Sytuacja rynkowa, w której działa przedsiębiorstwo, determinuje jego zachowanie. Przedsiębiorstwa małe działające w warunkach konkurencyjnych będą zachowywały się zupełnie inaczej niż duże przedsiębiorstwa monopolistyczne dominujące na rynku. Zachowanie się przedsiębiorstw na rynku znajduje odzwierciedlenie m.in. w ich decyzjach dotyczących wielkości i struktury produkcji, wysokości cen itp., które rzutują z kolei na poziom osiągniętego przez nie zysku i inne wyniki ekonomiczne.

W zależności od intensywności konkurencji na poszczególnych rynkach w literaturze ekonomicznej wyróżnia się zazwyczaj cztery typy struktur rynkowych: **konkurencję doskonałą, monopol, konkurencję monopolistyczną** i **oligopol**. Jako kryteria wyodrębniania różnych typów rynku przyjmuje się: liczbę firm działających na rynku, możliwość czynników produkcji (swobodę wejścia nowych przedsiębiorstw na rynek), cechy produktów (stopień ich zróżnicowania) oraz stopień kontroli cen przez firmę.

Konkurencja doskonała istnieje wtedy, gdy spełnione są następujące warunki (R. Milewski, 2002):

1. Na rynku doskonale konkurencyjnym występuje **duża liczba producentów**. Każdy z producentów wytwarza znikomą część łącznej produkcji, zwiększenie czy zmniejszenie przez nią produkcji nie wywiera wpływu na całkowitą podaż produktu, a więc i na jego cenę. Cena produktu jest niezależna od producenta. Podmiot nie ma na nią wpływu, może się jedynie do niej dostosować. Natomiast wszystkie firmy razem mogą wpływać na cenę, która może rosnąć lub spadać w wyniku zmian całkowitego popytu lub całkowitej podaży.
2. Istnieje **doskonała mobilność czynników produkcji** (swobodny ich przepływ między poszczególnymi gałęziami produkcji) oraz możliwość zakładania nowych przedsiębiorstw. Nowe firmy zawsze mogą wejść na rynek danego produktu, a firmy działające na danym rynku mogą się z niego wycofać, ponieważ koszty wejścia i wycofania się z rynku są znikome. Nie ma barier wejścia na rynek.
3. Oferowane do sprzedaży towary mają jednakowe cechy użytkowe. Wszyscy producenci wytwarzają i sprzedają wyroby homogeniczne, co oznacza, że dobra jednego wytwórcy są nie do odróżnienia od dóbr wszystkich pozostałych producentów. Nie ma konkurencji niecelowej. Reklama i marka firmowa nie odgrywają żadnej roli

4. Kupujący i sprzedający posiadają doskonałą znajomość rynku, dysponują pełną informacją. Oznacza to, że producenci mają pełne rozeznanie dotyczące cen, kosztów i możliwości sprzedaży na rynku, konsumenci zaś mają pełną informację o cenach, jakości i dostępności dóbr i jest im obojętne, u którego z nich dokonują zakupu.

W warunkach konkurencji doskonałej przedsiębiorstwo jest jednym z licznych podmiotów na rynku. Zwiększenie podaży przez przedsiębiorstwo nie wpływa na poziom ceny. Podejmując decyzje dotyczące rozmiarów produkcji, przedsiębiorstwo kieruje się kryterium maksymalizacji zysku. Na rynku doskonale konkurencyjnym cena jest wielkością niezależną od producenta, jest ukształtowana przez rynek i poszczególni producenci nie mają na nią wpływu.

Monopol jest to porozumienie, zrzeszenie, związek lub zjednoczenie przedsiębiorstw albo pojedyncze przedsiębiorstwo skupiające całą albo znaczną część produkcji lub usług, dzięki czemu może ustalać korzystne dla siebie warunki wytwarzania i ceny oraz osiągać wysokie zyski (R. Milewski, 2002).

Monopol pełny występuje wówczas, gdy spełnione są następujące warunki:

1. Istnieje jeden producent (sprzedawca) i wielu kupujących.

2. Nie ma możliwości wejścia na rynek opanowany przez jedynego producenta-monopolistę, co może wynikać z barier technologicznych (wymagany patent), ekonomicznych (wysokie nakłady finansowe potrzebne na budowę nowej firmy, np. fabryki samochodów) lub administracyjno-prawnych (ustalony przez państwo monopol spirytusowy, tytoniowy itp.).

3. Produkty są nieporównywalne, unikatowe, nie mają bliskich substytutów.

4. Istnieje doskonała informacja o rynku.

5. Monopolista może podejmować działalność reklamową lub nie.

Wiele przyczyn może sprawić, że produkcją danego dobra zajmuje się jeden producent, posiadający 100% udziału na danym rynku. Najczęściej wymienia się następujące źródła monopolu (R. Milewski, 2002):

- Rząd lub władze lokalne przyznają firmie prawo do wyłącznej produkcji danego produktu lub świadczenia określonej usługi.
- Przedsiębiorstwo może wejść w posiadanie patentu, praw autorskich lub znaków firmowych uniemożliwiających powielanie technologii lub produktów przez innych producentów. Dzięki temu zdobywa monopolistyczną pozycję na rynku.
- Monopol może wynikać z prawa własności do specyficznych niepowtarzalnych, występujących w niewielkiej ilości zasobów naturalnych potrzebnych do produkcji danego dobra. Specyficznymi monopolistami są też wybitni artyści, których dzieła są niepowtarzalne.
- Monopol może być związany z rosnącymi korzyściami skali.

Monopol związany z korzyściami skali występuje wówczas, gdy jeden producent, wytwarzający taniej niż pewna liczba mniejszych firm, jest w stanie zaspokoić całkowity popyt rynkowy. W tej sytuacji przedsiębiorstwo ma tak duże korzyści ze swej ekspansji, że konkurencja nie może się utrzymać. Sytuacja taką określa się jako monopol naturalny. Monopol naturalny jest to taki monopol, który osiąga wielkie korzyści skali (B. Czarny, R. Czarny, R. Bartkowiak, R. Rapacki).

Monopole naturalne pojawiają się najczęściej tam, gdzie koszt uruchomienia produkcji jest bardzo duży, co ma miejsce na przykład w gałęziach, w których dostawa produktu wymaga ciągłego fizycznego kontaktu z odbiorcą, czyli kosztownej sieci wodociągowej, energetycznej, gazowej, telewizji kablowej itp. Rozkładanie się kosztu uruchomienia produkcji na kolejne pozycje wytwarzanego dobra jest wtedy przyczyną ogromnych korzyści skali. Z tego powodu działalność więcej niż jednego przedsiębiorstwa w gałęzi jest bardzo utrudniona i ekonomicznie nieuzasadniona. Bariery wejścia na rynek wywołują tutaj czynniki ekonomiczne a nie administracyjno-prawne czy techniczne.

Przedsiębiorstwa zajmujące pozycję monopolisty mają wpływ na podaż i ceny. Kontrolując sytuację na rynku mogą one ograniczać rozmiary podaży i sprzedawać towary po wyższych cenach. Oznacza to jednocześnie, że podejmując decyzję o zwiększeniu rozmiarów produkcji, monopolista musi się liczyć z koniecznością obniżenia ceny. Budowa ogólnokrajowej sieci telefonicznej jest na przykład bardzo droga, kiedy jednak sieć jest już gotowa, koszt podłączenia kolejnych abonentów, a także koszt rozmów, jest stosunkowo niski. „Telekomy" w różnych krajach bywają uznawane za monopole naturalne.

Monopolista, jako jedyny producent na rynku, nie bierze pod uwagę zachowania innych firm, gdyż nie ma konkurentów. Musi on jednak liczyć się z istniejącym popytem. Oznacza to, że z jednej strony monopolista nie może zwiększyć rozmiarów sprzedaży bez równoczesnego obniżenia ceny, z drugiej zaś może sprzedawać mniej po wyższej cenie.

Na rynku konkurencji monopolistycznej i na rynku oligopolistycznym, a niekiedy na rynku wolnokonkurencyjnym, przedsiębiorcy mogą uzgodnić takie zachowanie, jak gdyby były jednolitym monopolem, tworząc w ten sposób kartel.

Kartel jest organizacją niezależnych producentów zmierzających do wykluczenia konkurencji między sobą poprzez wspólną regulację udziałów w rynku, poziomów produkcji i cen w celu podnoszenia cen i zysków ponad poziomy wyznaczone przez konkurencję.

Trust jest połączeniem przedsiębiorstw w jedno nowe przedsiębiorstwo, w wyniku czego następuje centralizacja produkcji i kapitału. Władzą jest rada wykonawcza. Dotychczasowi właściciele przedsiębiorstw wchodzących w skład trustu, przekształcając się w akcjonariuszy (udziałowców), otrzymują zaświadczenia (certyfikaty) trustowe opiewające na uprzednio posiadany majątek, które stanowią podstawę do podziału zysków.

Koncern jest zespołem odrębnie działających przedsiębiorstw, należących jednak do wspólnego właściciela. Duże, silne kapitałowo przedsiębiorstwo wykupuje akcje innych spółek lub doprowadza do fuzji organizacyjnych, uzyskując nad nimi kontrolę. Poszczególne przedsiębiorstwa wchodzące w skład koncernu działają samodzielnie, opierając się na rachunku ekonomicznym. Długofalowe strategie rozwoju przedsiębiorstw oraz zasięg rynków ich zbytu określa jednak centrala koncernu, eliminując konkurencję między tymi przedsiębiorstwami.

Konglomerat polega na przyłączeniu do monopolu przedsiębiorstw niezmonopolizowanych działających w różnych gałęziach gospodarki. Monopol, inwestując swoje zyski, dywersyfikuje w ten sposób rodzaje produkcji i rynki zbytu. Dzięki temu osiąga zyski z dodatkowych dziedzin, jak również rozkłada ryzyko na większą liczbę różnorodnych sfer działania.

Holding jest spółką dysponującą pakietem kontrolnym akcji innych spółek. Teoretycznie wystarczy posiadać nieco więcej niż 50% akcji innych spółek, aby można było je kontrolować. Spółki akcyjne wchodzące w skład holdingu dysponują kapitałem własnym i uzyskanym ze sprzedaży obligacji oraz kontrolują inne przedsiębiorstwa, dlatego też holding może kontrolować kapitał wielokrotnie przewyższający jego własny. Przykładami holdingów w Polsce są spółki węglowe, a w skali międzynarodowej – General Motors.

W wielu krajach ekspansja monopoli jest ograniczona działalnością antymonopolową państwa, zakazującą jakichkolwiek form zmowy i starań o monopolizację rynku oraz nieuczciwych metod konkurencji.

Konkurencja monopolistyczna występuje w gałęziach, które charakteryzują się następującymi cechami (R. Milewski, 2002):

1. Na rynku działa wielu producentów i wielu nabywców.
2. Istnieje nieograniczona swoboda wejścia nowych przedsiębiorców na rynek danej gałęzi.
3. Produkty wytwarzane przez różne zakłady nie są jednorodne, są one zróżnicowane pod względem cech użytkowych oraz mają bliskie substytuty.
4. Producenci i konsumenci mają doskonałe informacje o rynku i postępują racjonalnie.
5. Dążąc do utrzymania lub umocnienia swojej pozycji na rynku, przedsiębiorcy stosują różne formy walki konkurencyjnej. Mogą one zaoferować na przykład cenę niższą od cen oferowanych przez konkurentów. Tę formę walki konkurencyjnej określa się jako konkurencję cenową. Dla konkuren-

cji monopolistycznej bardziej charakterystyczna jest jednak konkurencja niecenowa, zmierzająca do zróżnicowania produktów poprzez wprowadzanie zmian jakościowych, popularyzację marki produktów i usług, uatrakcyjnienie form sprzedaży, wliczając reklamę umożliwiającą dotarcie do nowych klientów (R. Milewski, 2002).

6. Pojedyncze zakłady, wykorzystując niejednorodność oferowanych produktów, dysponują pewnym stopniem siły monopolowej pozwalającym im często na utrzymanie istniejącego poziomu cen, a w pewnych szczególnych warunkach nawet na niewielkie podniesienie cen bez ryzyka utraty klientów. Równocześnie są jednak świadome tego, że nie mają szans na opanowanie rynku i przejęcie nad nim kontroli. Muszą się też liczyć z tym, że wysokie zyski, jakie osiągają, mogą przyciągać nowe firmy, które w długim okresie pomniejszą ich udziały w rynku, a tym samym wpłyną na możliwości kształtowania cen i poziomów zysku.

Jako typowe przykłady firm działających w warunkach konkurencji monopolistycznej podawane są zazwyczaj małe sklepiki spożywcze na osiedlu, które mogą wykorzystywać swoje dogodne położenie i ustalać ceny do pewnego stopnia wyższe niż w supermarkecie. Należą do nich również restauracje, zróżnicowane pod względem wystroju wnętrza i atrakcyjności potraw, salony fryzjerskie i kosmetyczne oraz innego rodzaju usługi.

Oligopol jest kolejną formą niedoskonałej konkurencji. Charakteryzuje się tym, że (R. Milewski, 2002):

1. Na rynku występuje niewielka liczba producentów, którzy opanowali rynek danego produktu oraz duża liczba kupujących.

2. Swoboda wejścia na rynek jest ograniczona względami technologicznymi lub ekonomicznymi.

3. Produkty wytwarzane przez oligopol mogą być zarówno jednakowe, jak i zróżnicowane. W praktyce częściej można spotkać oligopole zajmujące się produkcją wyrobów zróżnicowanych, które są dość bliskimi substytutami, (np. rynek samochodów, obrabiarek czy komputerów).

4. Producenci i konsumenci mają doskonałą informację o rynku.

Ponieważ na rynku oligopolistycznym funkcjonuje niewielu producentów i każdy z nich ma znaczący udział w rynku, istnieje między nimi silna **współzależność**. Decyzja cenowa jednego przedsiębiorcy może znacząco wpływać na sprzedaż pozostałych przedsiębiorców. Jeżeli dany przedsiębiorca obniży cenę, to w wyniku wzrostu sprzedaży zwiększy swoje zyski kosztem konkurencji. Konkurenci mogą także obniżyć ceny do poziomu cen tego przedsiębiorcy albo jeszcze niżej, aby zwiększyć swoją sprzedaż. Wynikiem takiego postępowania może być wojna cenowa, przynosząca straty wszystkim przedsiębiorcom (S. Marciniak, 2001). Gdy jakiś przedsiębiorca podniesie cenę, to ponosi ryzyko utraty rynku, natomiast pozostali przedsiębiorcy zyskują na utrzymaniu dotychczasowej ceny. Stąd bierze się ograniczona skłonność do częstej zmiany cen na rynku oligopolistycznym.

W celu niedopuszczenia do wojny cenowej przedsiębiorstwa oligopolistyczne mogą zawierać porozumienia czasowe, zgodnie z którymi mogą razem podnosić lub obniżać cenę. Przy braku porozumień cenowych może być stosowana zasada przywództwa cenowego, polegająca na tym, że najsilniejszy spośród dominujących na rynku kilku wielkich przedsiębiorców odgrywa rolę przywódcy w zakresie kształtowania cen, pozostali natomiast dostosowują się do cen przez niego ustalonych.

Podsumowując rozważania dotyczące struktur rynkowych, należy podkreślić, że we współczesnej gospodarce rynkowej występuje sfera gospodarki niezmonopolizowanej oraz sfera gospodarki zmonopolizowanej. Istnieje konieczność walki z monopolem poprzez ustawodawstwo antymonopolistyczne, ponieważ tam, gdzie istnieje monopol, nie ma konkurencji. Konkurencja jest zaletą gospodarki rynkowej.

W sferze niezmonopolizowanej ceny kształtuje mechanizm popytu i podaży, a więc są one wypadkową działań żywiołowych sił rynku. W sferze zmonopolizowanej natomiast ceny ustalane są przez przedsiębiorstwa monopolistyczne lub oligopolistyczne, które regulując rozmiary podaży, ustalają ceny na poziomie dla nich najkorzystniejszym, zapewniając maksymalizację zysku.

Tabela 8. Cechy charakterystyczne struktur rynkowych

Cechy rynku	Modele rynku			
	rynek doskonały	**rynki niedoskonałe**		
	konkurencja doskonała	konkurencja monopolistyczna	oligopol	monopol
Liczba przedsiębiorców	**bardzo dużo**	**dużo (wiele)**	**kilka**	**jeden**
swoboda wejścia na rynek	nieograniczona	nieograniczona	ograniczona	bardzo ograniczona lub zerowa
cechy produktów	jednorodne (niezróżnicowane)	zróżnicowane	niezróżnicowane lub niezbyt zróżnicowane	nieporównywalne, unikatowe
wpływ na cenę	cena niezależna od przedsiębiorcy	firma ma pewien wpływ na cenę	znaczący wpływ producenta na cenę	bardzo duży wpływ producenta na cenę
przykłady rynków	kapusta, marchew, ziemniaki	restauratorzy, architekci	cementownie, cukrownie, samochody	sieć wodociągowa, PKP

Źródło: Opracowanie własne, na podstawie: Marciniak S., Mikro- i makroekonomia, Warszawa, 2001, s. 168

4.3. Czynniki rynku: popyt, podaż, cena

Popyt rynkowy i pozacenowe determinanty popytu

Fundamentem mikroekonomii jest prawo popytu i podaży, które przedstawią prawidłowości, jakie istnieją między popytem, podażą oraz ceną dóbr i usług. Pojęcia *popytu* i *podaży* są kluczowymi terminami w nauce ekonomii. Pojęcie *popyt* jest związane z zachowaniem się na rynku konsumentów, którzy określają ilość i rodzaje nabywanych dóbr i usług.

Popyt –to ilość dóbr i usług, jaką nabywcy są w stanie nabyć po określonej cenie i w określonym czasie. Tak zdefiniowany popyt jest popytem efektywnym, co oznacza, że chęć nabycia dobra poparta jest posiadaniem przez konsumenta odpowiednich dochodów. Wyróżnia się również **popyt potencjalny**, który wyraża potrzebę zakupu określonego dobra niemającą pokrycia w realnej sile nabywczej konsumenta.

Cena –to wartość jednostki produktu wyrażona w pieniądzu, jest pieniężnym wyrazem wartości wymiennej towaru, określa, ile warte jest jedno dobro w przeliczeniu na inne.

Prawo popytu – mówi, że gdy cena rośnie, to wielkość popytu maleje, a gdy cena spada, to wielkość popytu rośnie.

Ekonomista angielski.

Zależność ta została wprowadzona do ekonomii przez A. Marshalla (1842–1924).

Im wyższa jest cena jakiegoś dobra, *ceteris paribus* (przy założeniu niezmienności pozostałych czynników), tym mniejszą jego ilość konsumenci będą skłonni nabyć.

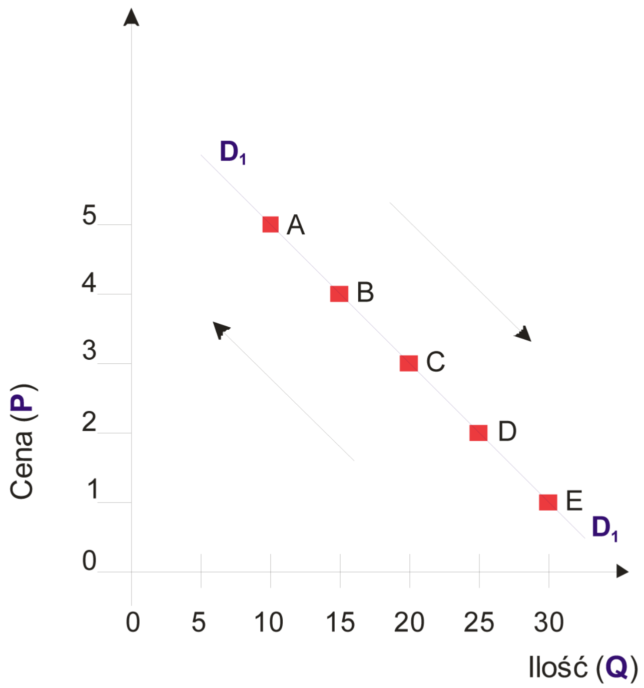
Wraz ze spadkiem ceny rynkowej dobra, *ceteris paribus*, konsumenci będą zwiększać liczbę nabywanych jednostek tego dobra.

Zestawienie wielkości popytu na określone dobro dla różnych wysokości ceny pozwala wykreślić krzywą popytu (W. Caban, 2001).

Tabela 11. Wielkości popytu na pomarańcze

Cena 1 kg [zł] (P)	Wielkość popytu tygodniowo [kg] (Q)	Symbol kombinacji
5	10	A
4	15	B
3	20	C
2	25	D
1	30	E

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 8. Krzywa popytu na pomarańcze

Źródło: Opracowanie własne

Wielkość popytu odnosi się do szczególnego zestawienia ceny (P) i ilości (Q), jest więc wybranym punktem na krzywej popytu (np.: A, B, C, D, E, F). Zmiana wielkości popytu odpowiada ruchowi po krzywej popytu i jest wywoływana zmianą ceny.

Zmiana wielkości popytu to termin oznaczający ruch po krzywej popytu z jednego punktu do innego. Następuje on w wyniku zmian cen.

Rysunek 7 przedstawia zmianę wielkości popytu na pomarańcze będącą wynikiem zmiany ceny pomarańczy. Oznacza to ruch wzdłuż tej samej krzywej popytu, na przykład z punktu A do punktu B.

Krzywa popytu opada od lewej ku prawej stronie, przy założeniu *ceteris paribus*. Jest więc malejącą funkcją ceny.

Zmiana ceny powoduje dwojaki efekt: substytucyjny i dochodowy.

Efekt substytucyjny zmiany ceny polega na tym, że wzrost ceny jednego dobra czyni to dobro relatywnie droższym, co skłania nabywcę do rezygnacji z dobra relatywnie droższego i zastępowania go (substytucji) innym dobrem, relatywnie tańszym. Przy obniżce ceny danego dobra staje się ono relatywnie tańsze i konsumenci mogą zastąpić nim inne dobra.

Istota efektu dochodowego zmiany ceny sprowadza się do tego, że wzrost ceny dobra wpływa na możliwości nabywcze konsumenta – obniża jego dochód realny. Przy obniżce ceny danego dobra siła nabywcza konsumenta wzrasta – przy stałym dochodzie nominalnym konsumenci mogą zwiększać swoje zakupy taniejącego dobra.

Pozacenowe determinanty popytu

Cena jest ważnym, ale nie jedynym czynnikiem determinującym popyt. Najistotniejszymi pozacenowymi czynnikami wpływającymi na rozmiary popytu są (W. Caban, 2001):

- moda i gusty (preferencje) nabywców;
- dochody konsumentów;
- ceny dóbr substytucyjnych i komplementarnych;
- przewidywanie zmian cen i dochodów;
- efekty naśladownictwa i demonstracji;
- liczba i struktura ludności;
- podział dochodu.

Moda i gusty (preferencje) nabywców. Im bardziej pożądane przez ludzi jest dane dobro, tym większy zgłaszają na nie popyt. Popyt na niektóre dobra podlega dużym i częstym zmianom. Decydują o tym zmiany mody, gustów i przyzwyczajeń konsumentów.

Klasycznymi przykładami takich dóbr są: odzież, obuwie, usługi przemysłu rozrywkowego. Zmiany trendów mody w kierunku zwiększenia zainteresowania danym asortymentem odzieży damskiej powodują wzrost popytu na ten produkt i na odwrót. W ciągu ostatnich lat w krajach wysoko rozwiniętych nastąpiły istotne zmiany w świadomości wielu konsumentów, które dotyczą zdrowego stylu życia. Spowodowało to ogromne konsekwencje w zmianach popytu na pewne rodzaje żywności: spadł popyt na mięso i tłuszcze zwierzęce, wzrósł natomiast popyt na ryby, owoce i warzywa. Zmianie diety towarzyszy wzrost popytu na usługi rekreacyjno-sportowe.

Preferencje i gusta konsumentów trudno określić ilościowo, dlatego ich wpływ na wielkość popytu przedstawia się w formie opisowej. Zmiana preferencji i gustów w kierunku zwiększenia zainteresowania danym towarem powoduje wzrost popytu i na odwrót. Zwiększone zakupy danego towaru mogą spowodować niedobór na rynku, co prowadzi do wzrostu cen. Zmniejszenie zakupów powoduje natomiast nadwyżkę dóbr danego rodzaju, co wywołuje obniżkę cen. Zmiany cen wpływają na opłacalność produkcji danego dobra, która zmienia się w tym samym kierunku co cena. Producenci przestawiają się z produkcji mniej opłacalnej na bardziej opłacalną. Zmiana struktury produkcji wywołuje z kolei zmiany popytu i cen czynników produkcji. Wzrasta popyt oraz ceny czynników produkcji służących do wytwarzania dóbr, na które popyt rośnie i na odwrót. Zmiany cen czynników produkcji powodują następnie zmiany dochodów producentów[29] (S. Marciniak, 2001).

Dochody konsumentów. Wyróżnia się minimalne i realne dochody ludności. Dochody minimalne są wyrażone w jednostkach pieniężnych i nie uwzględniają zmian poziomu cen. Dochody realne wyrażają natomiast to, co można nabyć za dochód nominalny przy istniejącym poziomie cen. Zależność między poziomem realnych dochodów ludności, a popytem jest na ogół dodatnia, tzn. im wyższe są dochody realne ludności, tym wyższy jest zwykle popyt na dany towar i odwrotnie (S. Marciniak, 2001). Niekiedy przy większych dochodach konsumenci mogą nabywać mniejsze ilości pewnych dóbr, a większe innych, mogą na przykład kupować mniej odzieży z włókien syntetycznych, więcej zaś z włókien naturalnych. Wzrost dochodów wywołuje spadek popytu na dobra niższego rzędu, takie jak ziemniaki czy mięso niskiej jakości. Wraz z podnoszeniem się

29 http://opracowania24.com.pl/articles.php?article_id=2655, 15.03.2013.

poziomu życia konsumenci ograniczają zakupy tych dóbr na rzecz dóbr lepszej jakości. Zmiany dochodów realnych powodują więc zmiany struktury konsumpcji[30].

Ceny dóbr substytucyjnych i komplementarnych. Z obserwacji zjawisk rynkowych wynika, że na rynku istnieją liczne powiązania między cenami i popytem na różne dobra. Zmiany ceny jednego dobra oddziałują na rozmiary popytu na inne dobra. Kierunek tego oddziaływania zależy od tego, czy analizowane dobra należą do kategorii substytutów czy dóbr komplementarnych. **Dobra substytucyjne** to takie dobra, które mogą się zastępować w zaspokajaniu określonej potrzeby (np. pomarańcze i mandarynki, ryby i mięso, masło i margaryna). **Dobra komplementarne** natomiast uzupełniają się w zaspokajaniu określonej potrzeby, tzn. są konsumowane łącznie (np. herbata i cukier, benzyna i samochód, aparat fotograficzny i film do niego) (W. Caban, 2001). Im wyższe są ceny dóbr substytucyjnych względem danego dobra, tym wyższy będzie popyt na to dobro, ponieważ nabywcy będą „odchodzić" od droższych substytutów. Im wyższe są ceny dóbr komplementarnych względem danego dobra, tym mniej dóbr komplementarnych będzie kupowane, a to oznacza mniejszy popyt na dane dobro.

Przewidywanie cen i dochodów. Na wielkość popytu określony wpływ wywierają również oczekiwania konsumentów dotyczące zmian cen i dochodów. Nabywcy mogą antycypować (wyprzedzać w czasie) zakupy pewnych dóbr, przewidując znaczące podwyżki ich cen. Antycypacja w tym zakresie występuje szczególnie mocno w okresach długotrwałej i wysokiej inflacji. Inflacyjny wzrost cen powoduje postępujący spadek siły nabywczej pieniądza, skłania ludzi do dokonywania zakupów możliwie jak najszybciej i w zwiększonych, często nienormalnych, ilościach. Wynika to z dalszych oczekiwań inflacyjnych, powodując tzw. ucieczkę w wartości rzeczowe. W odwrotnej sytuacji, gdy spodziewany jest spadek ceny jakiegoś dobra, konsumenci mogą zmniejszać swój bieżący popyt, aby móc nabyć więcej danego dobra w przyszłości. Ze względu na swój kierunek relacja popytu do zmiany cen nazywana jest efektem (paradoksem) spekulacyjnym (S. Marciniak, 2001). Podobny wpływ na wielkość popytu wywierają oczekiwania dotyczące zmian przyszłych dochodów. Przewidywany wzrost dochodów może skłaniać konsumentów do większych zakupów na raty, które będą spłacane z przyszłych dochodów. Natomiast przewidywany spadek dochodów może spowodować ograniczenie popytu (S. Marciniak, 2001).

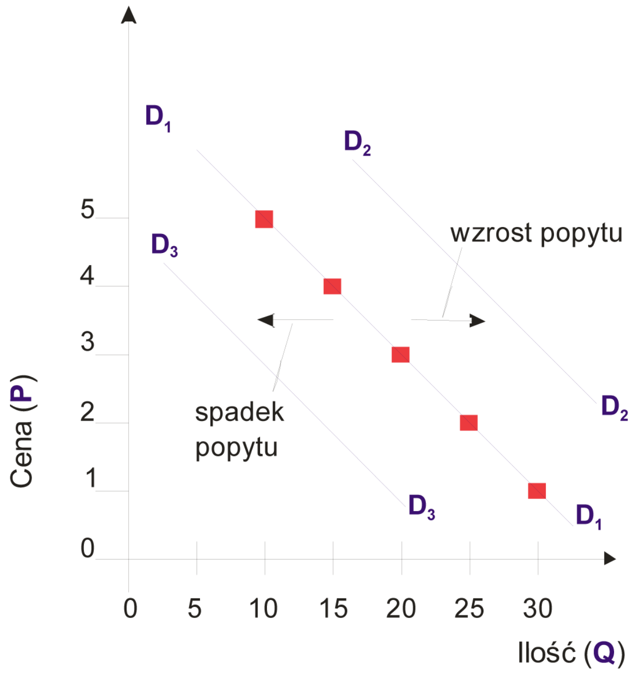
Efekty naśladownictwa i demonstracji. Znajduje odzwierciedlenie w zachowaniach tych konsumentów, którzy ponad indywidualność przedkładają chęć dostosowania i „wpasowania się" w upodobania innych ludzi, co określane jest mianem **efektu naśladownictwa**. Uogólniając, efekt naśladownictwa (**efekt owczego pędu**) występuje wtedy, gdy popyt indywidualnych konsumentów jest zgodny z popytem większości. Efekt demonstracji (**efekt snobizmu**) to nabywanie dóbr rzadko nabywanych przez innych, połączony jest z ograniczeniem czy zupełną rezygnacją z dóbr masowo nabywanych przez przeciętnego konsumenta. Korzyść konsumpcyjna, jaką osiągają ci ekskluzywni konsumenci, wyraża się przede wszystkim w demonstrowaniu olbrzymich możliwości finansowych i bogactwa materialnego, dążeniu do podkreślania swojego prestiżu (W. Caban, 2001).

Liczba i struktura ludności. Zmiany liczby ludności oraz jej struktury w różnych przekrojach, np.: według wieku, płci, wykształcenia, miejsca mieszkania, powodują zmiany wielkości i struktury popytu. Wzrost liczby urodzeń spowoduje na przykład wzrost popytu na odżywki dla dzieci, zabawki, ubiory dziecięce. Analogicznie, w miarę dorastania tej grupy, nastąpi wzrost popytu na przykład na książki, a w późniejszym etapie – na mieszkania. Na zmianę struktury popytu wpływają również zmiany nawyków konsumpcyjnych i ruchy migracyjne ludności (S. Marciniak, 2001).

Podział dochodu jest również istotnym czynnikiem wpływającym na popyt. Jeżeli dochód podlega redystrybucji (podziałowi) od ludzi ubogich do zamożnych, to popyt na dobra luksusowe będzie wzrastać. W miarę jak ubodzy biednieją, mogą jeszcze bardziej zwiększać zakupy dóbr niższego rzędu.

30 http://opracowania24.com.pl/articles.php?article_id=2655, 15.03.2013.

W odróżnieniu od ceny, której zmiany powodują ruchy popytu wzdłuż krzywej, czynniki pozacenowe oddziałują na krzywą popytu inaczej. Przesuwają one całą krzywą w prawo lub w lewo, w zależności od tego, czy w wyniku ich działania popyt rośnie, czy maleje.



Rysunek 9. Przesunięcia krzywej popytu na pomarańcze

Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 9 obrazuje przesunięcie krzywej popytu pod wpływem czynników pozacenowych. Wzrost popytu przejawia się przesunięciem krzywej popytu na zewnątrz z D_1D_1 do D_2D_2, co oznacza, że przy każdej cenie pomarańczy ilość popytu jest większa niż poprzednio. Natomiast spadek popytu powoduje przesunięcie krzywej popytu w lewo, do wewnątrz, z D_1D_1 do D_3D_3, co odpowiada spadkowi ilości popytu przy każdej cenie.

Wzrost popytu przy rosnących cenach może w pewnych warunkach wystąpić niezależnie od przewidywań dalszego wzrostu cen. Poza efektem spekulacyjnym wyróżnia się dwa przypadki, kiedy wzrost cen może powodować nie spadek, a wzrost popytu i odwrotnie, które ze względu na nietypowość nazwane zostały paradoksami. Są to nietypowe (paradoksalne) reakcje popytu na zmiany cen, tzn. zmiany cen i popytu są jednokierunkowe.

CIEKAWOSTKA

Angielski ekonomista K. Giffen opisał paradoks, jaki wystąpił w Irlandii w 1844 r. Zauważył on, że niskie zbiory wywołały wzrost cen chleba, nie spowodowało to jednak spadku jego konsumpcji, a wręcz przeciwnie, nastąpił wzrost popytu na chleb wśród ubogiej ludności robotniczej. Tłumaczy się to tym, że przy skromnych budżetach rodzinnych wzrost ceny chleba uniemożliwił zakup innych artykułów żywnościowych, chleb konsumowany w większych ilościach zastępował te artykuły ze względu na wartości odżywcze, przy czym ciągle jeszcze miał relatywnie niską cenę w porównaniu z innymi artykułami. Wywołany wzrostem cen chleba spadek dochodów realnych zmusił ubogą ludność do zmiany struktury konsumpcji w kierunku ograniczenia zakupów i spożywania droższych artykułów żywnościowych na rzecz tańszych artykułów, czyli chleba, który mimo wzrostu cen nadal był najtańszym źródłem pożywienia. Uogólniając, można stwierdzić, że w przypadku dóbr podstawowych pomimo wzrostu ich ceny, nawet przy niskich dochodach, popyt na nie wzrasta, gdyż inne produkty są nieosiągalne ze względu na jeszcze wyższe ceny. Zjawisko to w literaturze ekonomicznej nosi nazwę paradoksu Giffena.Współcześnie może on wystąpić w odniesieniu do dóbr niższego rzędu, takich jak: mąka, ziemniaki, chleb, gorsze gatunki mięsa, i dotyczyć grup ludności o niskich dochodach, w których wydatki na żywność stanowią znaczną część budżetów rodzinnych (S. Marciniak, 2001).

Ekonomista amerykański,
przełom XIX i XX w.

Paradoks Veblena, zwany również efektem prestiżowym, jest drugim przypadkiem zwiększania się popytu na dane dobro mimo wzrostu jego ceny. Dotyczy on dóbr luksusowych, takich jak: biżuteria, drogie samochody, jachty, luksusowe domy, które są przedmiotem pokazowej konsumpcji, wynikającej z chęci demonstracji, nie zaś ich wartości użytkowych. Posiadanie tych dóbr zapewnia odpowiedni prestiż i jest wyznacznikiem wysokiego statusu majątkowego i społecznego.

Podaż rynkowa i pozacenowe determinanty podaży

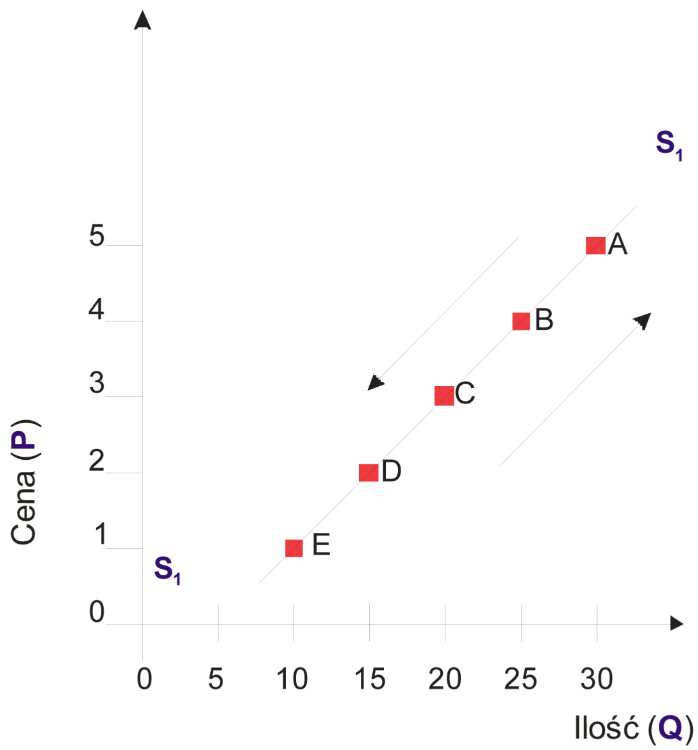
W odniesieniu do podaży analiza rynku dotyczy producenta (sprzedawcy). Podaż jest zdefiniowana jako ilość dobra, jaką producenci zamierzają sprzedać po danej cenie i w danym czasie. Podobnie jak w przypadku popytu również podaż jest ściśle związana z ceną. Prawo podaży głosi, że gdy cena rośnie, wielkość podaży wzrasta, a gdy cena spada, wielkość podaży maleje. Wielkość podaży danego dobra zmienia się w tym samym kierunku, co jego cena. Podobnie jak w odniesieniu do popytu przyjmuje się formułę *ceteris paribus,* tzn. że wszystkie czynniki określające podaż – poza ceną – są niezmienne. Wzrost ceny określonego dobra powoduje poprawę opłacalności jego produkcji, co zachęca wytwórców do odpowiedniego przestawienia produkcji i wytwarzania większej ilości tego dobra. W efekcie zwiększa się wielkość podaży. Natomiast obniżka ceny, przy niezmienionych kosztach wytwarzania, zmniejsza opłacalność, powodując spadek wielkość produkcji i podaży (S. Marciniak, 2001).

Graficzną interpretacją prawa podaży jest krzywa podaży, przedstawiająca zależności między ceną a podażą. Krzywa podaży powstaje przez zestawienie wielkości podaży z różnymi poziomami ceny w danym okresie.

Tabela 13. Wielkości podaży na pomarańcze

Cena 1 kg [zł] (P)	Wielkość podaży zgłaszana tygodniowo [kg] (Q)	Symbol kombinacji
5	30	A
4	25	B
3	20	C
2	15	D
1	10	E

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 12. Krzywa podaży na pomarańcze

Źródło: Opracowanie własne

Krzywa podaży **S_1S_1** wznosi się w miarę przesuwania się w prawo, jest więc rosnącą funkcją ceny. Wielkość podaży odnosi się do szczególnego zestawienia ceny i ilości, jest więc wybranym punktem na krzywej podaży (np. punkt: **A, B, C, D, E, F**). Zmiana wielkości podaży odpowiada ruchowi po krzywej podaży i z jednego punktu do drugiego i jest wynikiem zmiany ceny (Rysunek 12). Każdy punkt na krzywej stanowi jakieś zestawienie ilości i ceny.

- **Podaż** – ilość dóbr i usług zaoferowanych do sprzedaży po określonej cenie i w określonym czasie.
- **Prawo podaży** – gdy cena rośnie, wielkość podaży wzrasta, a gdy cena spada, wielkość podaży maleje.
- **Krzywa podaży** – wskazuje ilość dobra, jaką producenci zamierzają sprzedać przy danej cenie w danym okresie.
- **Prawo malejących przychodów** – w miarę wzrostu cen przyrosty podaży są coraz mniejsze. Wzrost nakładów czynnika zmiennego powoduje początkowo więcej niż proporcjonalny, a od pewnego punktu mniej niż proporcjonalny, przyrost produkcji.

Z analizy krzywej podaży wynikają wnioski:

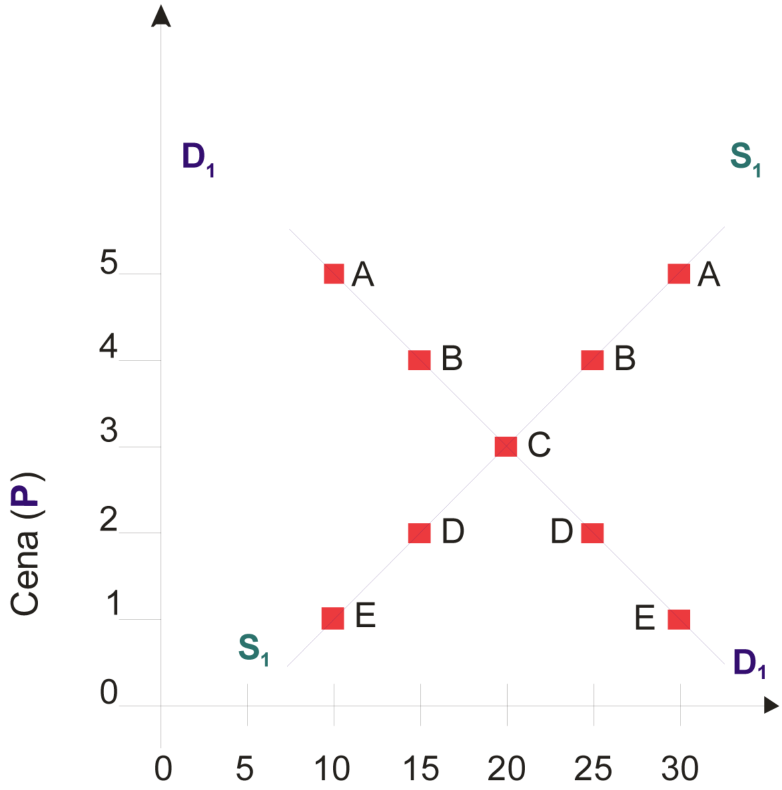
- zmiany ceny i podaży są jednokierunkowe;
- w odróżnieniu od opadającej krzywej popytu krzywa podaży wzrasta ku prawej stronie;
- wzrost ceny powoduje ruch po krzywej podaży w górę;
- obniżenie ceny wywołuje ruch po krzywej w dół.

Pozacenowe determinanty podaży:

- koszty produkcji;
- postęp techniczny;
- podatki i subsydia;
- przewidywane zmiany cen;
- liczba przedsiębiorstw w branży;
- interwencja państwa;
- warunki klimatyczne;
- wypadki losowe i inne nieprzewidziane zdarzenia;
- opłacalność innych produktów;
- opłacalność dóbr o współzależnej podaży.

Definicje:

- **Koszty produkcji** – im wyższe koszty produkcji, tym niższy zysk przy każdej cenie. Podniesienie ich poziomu prowadzi do wzrostu płac, opłat za energię, wydatków na surowce i materiały. Krzywa podaży przesuwa się w górę, powoduje to spadek podaży.
- **Postęp techniczny** – wprowadzenie nowoczesnych technologii umożliwia wytwarzanie dóbr przy mniejszych nakładach czynników produkcji, co powoduje obniżenie kosztów wytwarzania i wzrost zyskowności produkcji. Postęp techniczny przesuwa krzywą podaży w dół, co oznacza wzrost produkcji.
- **Podatki i subsydia** – nałożenie na dobro podatku VAT (podatek od wartości dodanej) powoduje takie skutki, jak wzrost kosztów produkcji, co przesuwa krzywą podaży w górę i oznacza spadek podaży. Subsydia wywołują efekt zmniejszenia kosztów produkcji.
- **Przewidywane zmiany cen** – przewidywany wzrost cen danego dobra w przyszłości może zmniejszyć bieżącą ofertę rynkową.
- **Liczba przedsiębiorstw w branży** – zwiększenie liczby przedsiębiorstw w branży powoduje wzrost podaży i odwrotnie, zmniejszenie liczby przedsiębiorstw wywołuje spadek podaży.
- **Interwencja państwa** – niektóre decyzje podejmowanie przez instytucje państwowe mogą rzutować na rozmiary podaży, np.: przepisy dotyczące ochrony środowiska naturalnego i bezpieczeństwa pracy.
- **Warunki klimatyczne** – zmiana pogody powoduje silny wpływ na podaż produktów rolnych. Korzystne warunki klimatyczne powodują przesunięci krzywej podaży w dół, złe warunki klimatyczne natomiast przesuwają ją w górę.
- **Wypadki losowe i inne nieprzewidziane zdarzenia** – w tej kategorii czynników można wymienić: czynniki atmosferyczne, zarazy lub epidemie wpływające na produkcję rolną, wojny zakłócające import surowców, awarie maszyn i urządzeń, konflikty pracownicze, trzęsienia ziemi, powodzie, pożary.
- **Opłacalność innych produktów** – produkcja innych dóbr może stawać się bardziej zyskowna, np.: gdy wzrasta cena marchwi, gdy maleją koszty jej produkcji, rolnicy mogą zwiększać produkcję marchwi. Może wywołać to spadek podaży ziemniaków.
- **Opłacalność dóbr o współzależnej podaży** – czasem produkcja jednego dobra pociąga za sobą jednocześnie wytarzanie innego. Przykładem może być rafinacja ropy naftowej i produkcja benzyny.



Rysunek 13. Przesunięcie krzywej podaży na pomarańcze

Źródło: Opracowanie własne

Wzrost podaży wyraża się przesunięciem krzywej podaży z S_1S_1 do S_2S_2.

Spadek podaży powoduje przesunięcie krzywej podaży z S_1S_1 do S_3S_3.

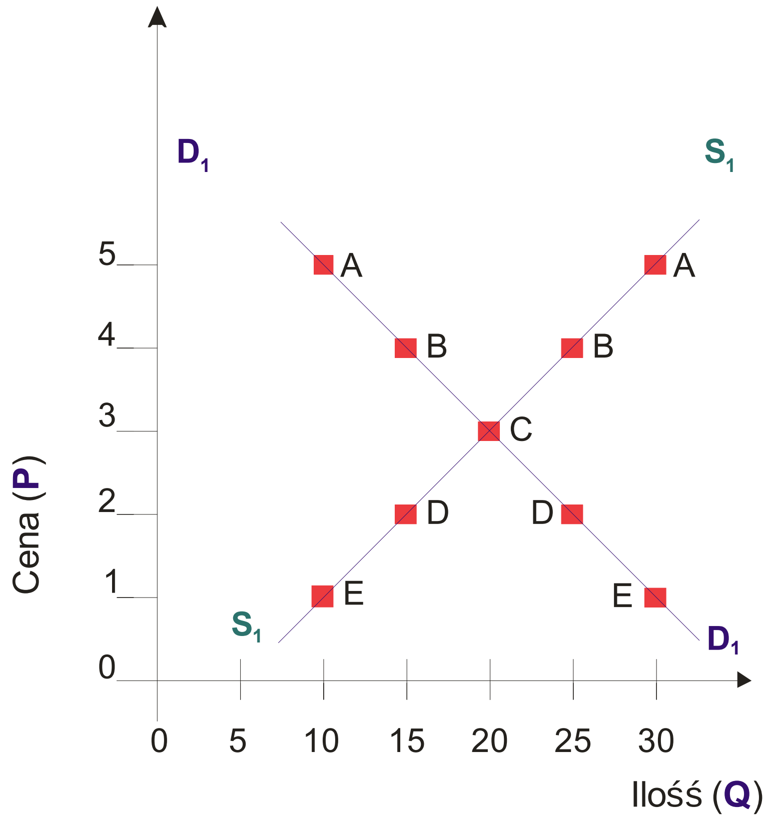
Przesunięcie krzywej podaży nazywamy zmianą podaży. Ruch po krzywej podaży określamy zmianą oferowanej ilości, czyli zmianą wielkości podaży.

Równowaga rynkowa

Tabela 14. Popyt i podaż pomarańczy

Cena 1 kg [zł] (P)	Wielkość podaży zgłaszana tygodniowo [kg] (Q)	Wielkość popytu zgłaszana tygodniowo [kg] (Q)
5	30	10
4	25	15
3	20	20
2	15	25
1	10	30

Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 14. Równowaga rynkowa na pomarańcze

Źródło: Opracowanie własne

Przy cenie równowagi rynkowej wielkość podaży oferowanej przez sprzedających odpowiada dokładnie wielkości popytu zgłaszanego przez nabywców, czyli ilość dóbr dostarczanych na rynek równa się ilości dóbr pożądanych.

Ilość tę nazywa się **ilością równowagi**.

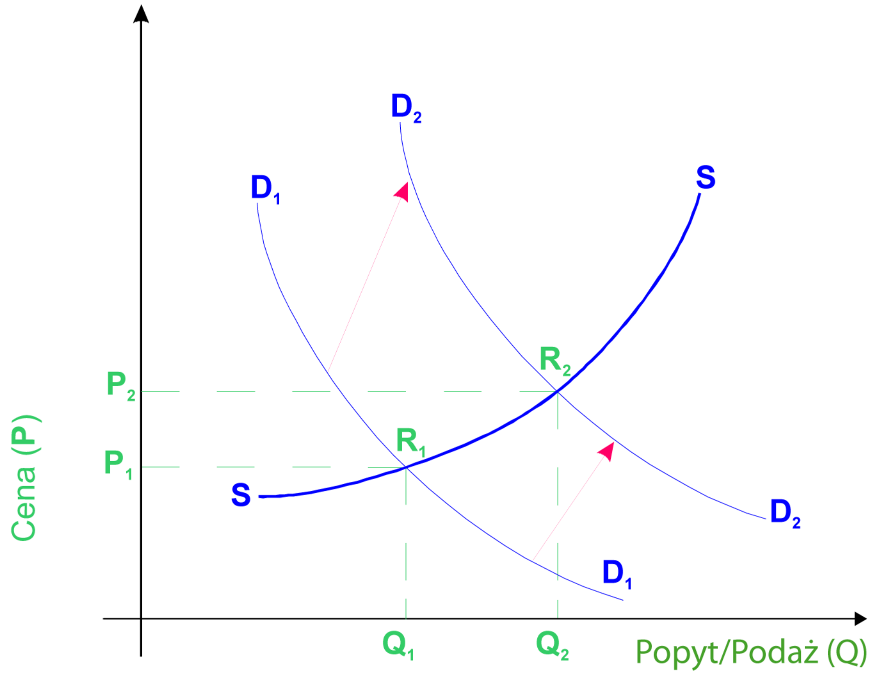
- **Nadwyżka rynkowa** – ilość towaru, o którą wielkość podaży przewyższa wielkość popytu przy danym poziomie ceny.

W tej sytuacji producenci (sprzedawcy) będą zmuszeni konkurować między sobą, oferując sprzedaż po niższej cenie, aby pozbyć się nadwyżki podaży. Spowoduje to zmniejszenie dostaw na rynek przez producentów, a jednocześnie zachęci nabywców do zwiększenia zakupów. Skutkiem tego będzie zmniejszenie nadwyżki, aż do jej całkowitej redukcji.

- **Niedobór rynkowy** – wielkość popytu przewyższa wielkość podaży.

Konkurencja między nabywcami będzie „pchała” cenę w górę, w kierunku punktu równowagi rynkowej. Rosnąca cena zacznie zachęcać producentów do zwiększenia rozmiarów podaży, a jednocześnie będzie eliminowała z rynku nabywców, których nie stać na zakup dóbr po wyższej cenie. W efekcie będzie zmniejszał się niedobór rynkowy, aż do jego całkowitej redukcji.

Zmiany równowagi rynkowej

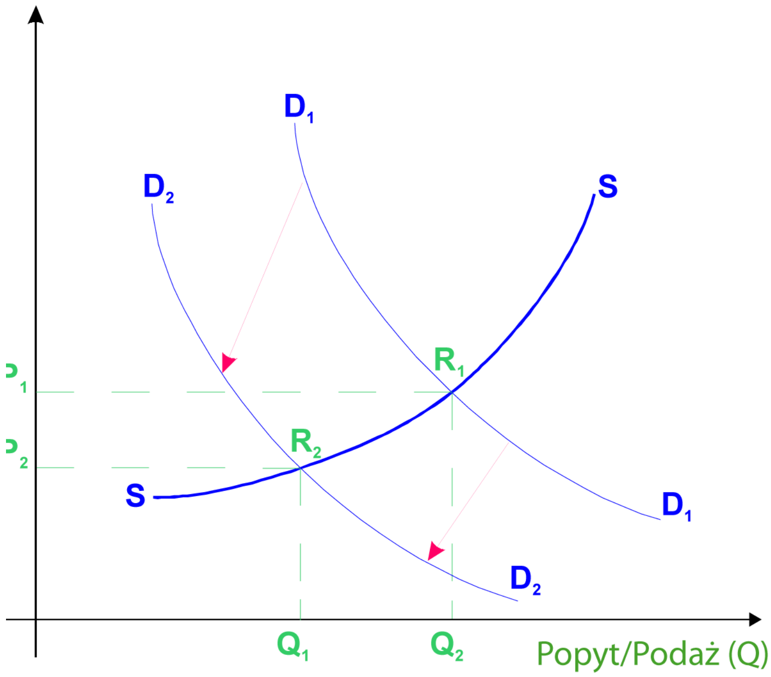


Rysunek 15. Skutki zmiany popytu –– wzrost popytu

Źródło: Opracowanie własne

Wpływ działania czynników pozacenowych na cenę i ilość równowagi. Wpływ zmiany popytu na cenę i ilość równowagi przy założeniu stałości podaży.

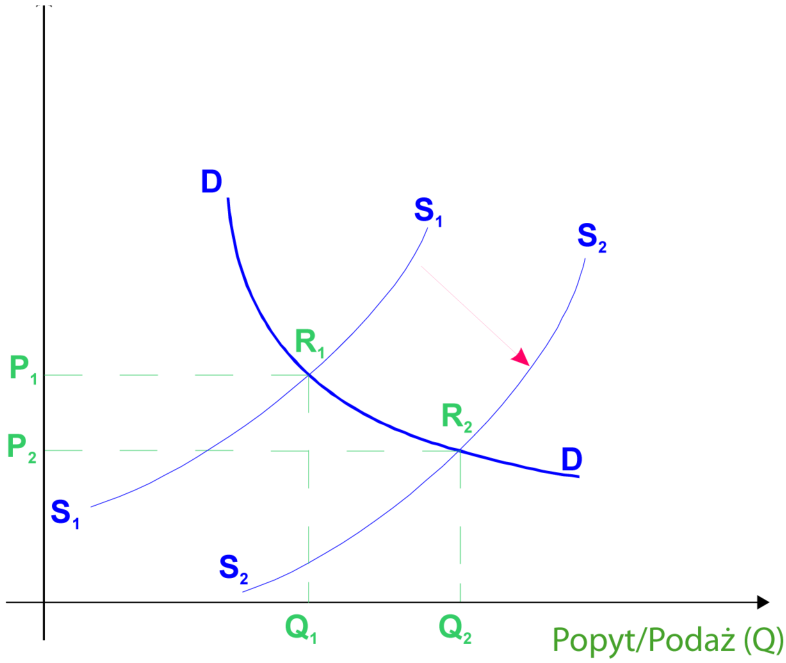
Zmiana jakiegoś czynnika pozacenowego determinującego popyt na dane dobra, na przykład wzrost realnych dochodów konsumentów, powoduje, że przy danej cenie wzrasta na nie popyt. Następuje przesunięcie krzywej popytu w górę (z **D_1D_1** do **D_2D_2**) i zmiana warunków równowagi przejawiająca się we wzroście zarówno ceny równowagi (z **P_1** do **P_2**), jak i ilości równowagi (**Q_1** do **Q_2**) (W. Caban, 2001).



Rysunek 16. Skutki zmiany popytu – Spadek popytu

Źródło: Opracowanie własne

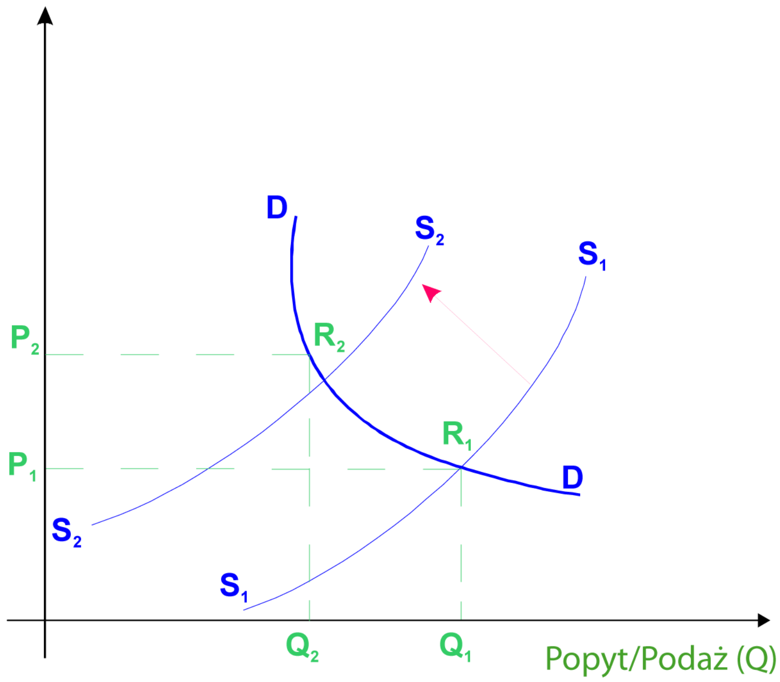
Przesunięcie krzywej popytu w dół, spowodowane na przykład spadkiem dochodów realnych konsumentów. Następuje przesunięcie krzywej popytu w dół (**z D_1D_1** do **D_2D_2**) i zmiana warunków równowagi przejawiająca się w spadku zarówno ceny równowagi z **P_1** do **P_2**, jak i ilości równowagi z **Q_1** do **Q_2**.



Rysunek 17. Skutki zmiany podaży – Wzrost podaży

Źródło: Opracowanie własne

Poprawa warunków wytwarzania w wyniku postępu technicznego spowoduje wzrost podaży. Krzywa podaży przesunie się w dół z **S_1S_1** do **S_2S_2**. Jej przecięcie się z krzywą popytu w punkcie **R_2** określi nową, niższą cenę równowagi **P_2** i nowe, większe ilości równowagi **Q_2**.



Rysunek 18. Skutki zmiany podaży – Spadek podaży

Źródło: Opracowanie własne

Pogorszenie warunków wytwarzania związane ze wzrostem cen czynników produkcji spowoduje spadek podaży. Krzywa podaży **S_1S_2** przesunie się w górę na pozycję **S_2S_2**. W punkcie przecięcia się z krzywą popytu zostanie wyznaczony nowy punkt równowagi **R_2**, jak również odpowiadająca mu nowa, wyższa cena **P_2** oraz nowe, mniejsze ilości równowagi **Q_2**.

Zgodnie z istotą działania mechanizmu rynkowego każda zmiana parametrów rynkowych (ceny, popytu, podaży) wywołuje określone procesy adaptacyjne i samoczynne równoważenie rynku. Jakakolwiek nierównowaga między tymi parametrami uruchamia reakcje producentów i nabywców, które doprowadzają popyt i podaż do stanu równowagi rynkowej.

Elastyczność popytu i podaży

Wielkość popytu na dobra i usługi zależy głównie od trzech czynników:

- cen na te dobra i usługi;
- dochodów konsumentów;
- cen innych dóbr i usług, które mogą je uzupełniać (są komplementarne) lub zastępować (są substytucyjne).

Siłę reakcji popytu na powyższe czynniki określa się mianem **elastyczności popytu**. Jest to stosunek procentowy zmiany wielkości popytu do procentowej zmiany czynnika wpływającego na popyt.

Wyróżniamy następujące **rodzaje elastyczności popytu** (E. Adamowicz, S. Grzegorczyk, A. Romanowska, A. Sopińska, P. Wachowiak, 2003):

- **cenowa elastyczność popytu** – wskazuje, jak zmienia się popyt na dane dobro pod wpływem zmiany ceny;
- **dochodowa elastyczność popytu** – wskazuje, jak zmienia się popyt na dane dobro pod wpływem zmiany dochodu;
- **mierzona elastyczność popytu** –– wskazuje, jak zmienia się popyt na dane dobro pod wpływem zmiany ceny dobra do niego substytucyjnego lub komplementarnego.

Cenowa elastyczność popytu jest to stosunek procentowy zmiany wielkości popytu do procentowej zmiany ceny.

Cenowa elastyczność popytu określa stopień reakcji popytu na zmianę cen. Wielkość tej reakcji można mierzyć za pomocą współczynnika cenowej elastyczności popytu. Obliczamy go, posługując się następującym wzorem (W. Caban, 2001):

$$E_{PD} = \frac{procentowa\ \ zmiana\ \ wielko\acute{s}ci\ \ popytu}{procentowa\ \ zmiana\ \ ceny\ \ (P)} = \frac{\dfrac{D_1 - D_0}{D_0}}{\dfrac{P_1 - P_0}{P_0}} = \frac{\dfrac{\Delta D}{D_0}}{\dfrac{\Delta P}{P_0}} = \frac{\dfrac{\mathrm{D_1 - D_0}}{\mathrm{D_0}}}{\dfrac{\mathrm{P_1 - P_0}}{\mathrm{P_0}}} = \frac{\Delta D}{D_0} : \frac{\Delta P}{P_0}$$

Gdzie:

E_{PD} – współczynnik elastyczności cenowej popytu;

D_0 i **D_1** – wielkość popytu początkowa i w okresie obliczeniowym;

P_0 i **P_1** – cena danego dobra początkowa i w okresie obliczeniowym;

ΔD – przyrost (zmiana elastyczna) popytu;

ΔP – przyrost ceny.

Ze względu na fakt, że między wielkością popytu a ceną istnieje zależność ujemna (tzn. gdy cena rośnie, wielkość popytu maleje i odwrotnie, gdy cena spada, wielkość popytu rośnie) cenowa elastyczność popytu w typowych sytuacjach przyjmuje wartość ujemną (W. Caban, 2001).

W analizie ekonomicznej, w której podstawą klasyfikacji jest wartość współczynnika elastyczności wyróżnia się pięć podstawowych kategorii (rodzajów) elastyczności cenowej popytu.

Jeżeli współczynnik elastyczności cenowej popytu jest równy jedności $|EPD| = 1$, taki popyt określa się jako proporcjonalny lub o elastyczności wzorowej. Oznacza to, że określonej procentowej zmianie ceny odpowiada dokładnie taka sama procentowa zmiana wielkości popytu, dokonująca się jednak w przeciwnym kierunku.

Przykład 1

Sprzedaż konfitury (dżemu) po cenie 10 zł za słoik wynosi w danym okresie 200 sztuk, po podwyższeniu ceny do 12 zł za sztukę – 160 sztuk.

$D_0 = 200$ szt. $P_0 = 10$ zł

$D_1 = 160$ szt. $P_1 = 12$ zł

$\Delta D = D_1 - D_0$

$\Delta P = P_1 - P_0$

$$\text{EPD} = \frac{\frac{D_1 - D_0}{D}}{\frac{P_1 - P_0}{P_0}} = -\frac{\frac{\Delta D}{D_0}}{\frac{\Delta P}{P_0}}$$

$$\text{EPD} = \frac{\frac{160-200}{200}}{\frac{12-10}{10}} = -\frac{\frac{-40}{200}}{\frac{2}{10}} = \frac{-40}{200} : \frac{2}{10} = -1$$

$|E_{PD}| = 1$ popyt proporcjonalny (wzorcowy)

Procentowa zmiana wielkości popytu jest równa procentowej zmianie ceny (popyt zmienia się o tyle samo procent, co cena). Obliczony wskaźnik cenowej elastyczności popytu wynosi 1 i oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 10%, to popyt spadnie o 10% • 1 = 10%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 1%,to popyt wzrośnie o 1% • 1 – 1%.

Popytem proporcjonalnym wyróżniają się np.: lepsze gatunki żywności i dobra trwałego użytku (pralki, lodówki).

Jeżeli współczynnik elastyczności cenowej popytu jest większy od jedności $|E_{PD}| > 1$ to popyt określa się jako elastyczny lub o elastyczności wysokiej. Procentowa zmiana popytu jest wówczas większa niż procentowa zmiana ceny danego dobra.

Przykład 2

Sprzedaż samochodów po cenie 100.000 zł za sztukę wynosi w danym okresie 200 sztuk, po podwyższeniu ceny do 120.000 zł za sztukę – 150 sztuk.

D_0 = 200 szt. P_0 = 100.000 zł

D_1 = 150 szt. P_1 = 120.000 zł

$\Delta D = D_1 - D_0$

$\Delta P = P_1 - P_0$

$$E_{PD} = \frac{\frac{150-200}{200}}{\frac{120.000-100.000}{100.000}} = -\frac{\frac{-50}{200}}{\frac{20.000}{100.000}} = \frac{-50}{200} : \frac{20.000}{100.000} = \frac{-50}{40} = -1,25$$

$$\left|E_{PD}\right| > 1$$

Procentowa zmiana wielkości popytu jest większa od procentowej zmiany ceny (popyt zmienia się szybciej niż cena, rośnie lub maleje o więcej procent niż cena).

Obliczany wskaźnik cenowy elastyczności popytu wynosi 1,25 i oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 10%, to popyt spadnie o 10% • 1,25 = 12,5%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 1% to popyt wzrośnie o 1% • 1,25 = 1,25%.

Popytem elastycznym wyróżniają się przede wszystkim dobra luksusowe (drogie samochody, sprzęt sportowy do tenisa).

W przypadku gdy współczynnik elastyczności cenowej popytu jest mniejszy od jedności i większy od zera $0 < \left|E_{PD}\right| < 1$ popyt określa się jako nieelastyczny lub o elastyczności niższej. W tym przypadku procentowa zmiana popytu jest mniejsza niż procentowa zmiana ceny. Popyt jest relatywnie niewrażliwy na zmianę ceny (popyt zmienia się wolniej niż cena).

Przykład 3

Sprzedaż mięsa po cenie 10 zł za kilogram wynosi w danym okresie 200 kilogramów, po podwyższeniu ceny do 12 zł za kilogram – 180 kilogramów.

D_0 = 200 kg P_0 = 10 zł

D_1 = 180 kg P_1 = 12 zł

$\Delta D = D_1 - D_0$

$\Delta P = P_1 - P_0$

$$E_{PD} = \frac{\frac{180-200}{200}}{\frac{12-10}{10}} = \frac{\frac{-20}{200}}{\frac{2}{10}} = -\frac{20}{200} : \frac{2}{10} = -0,5$$

Procentowa zmiana wielkości popytu jest mniejsza od procentowej zmiany ceny. Popyt zmienia się wolniej niż cena (o mniej procent).

Obliczony wskaźnik cenowej elastyczności popytu wynosi 0,5 i oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 10%, to popyt spadnie o 10% • 0,5% = 5%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 1%, to popyt wzrośnie o 1% • 0,5 = 0,5%.

Niską elastycznością cenową popytu charakteryzują się dobra pierwszej potrzeby: mleko, pieczywo, mąka, gorsze gatunki mięsa, powszechnie używana odzież. Nawet znaczna zmiana cen tych dóbr powoduje tylko niewielkie zmiany popytu.

W przypadku gdy zmiana ceny nie wywołuje żadnej zmiany wielkości popytu, czyli $\left|E_{PD}\right| = 0$, popyt jest doskonale nieelastyczny lub sztywny. Dla dowolnej zmiany ceny zmiana popytu jest równa zeru, co oznacza, że współczynnik elastyczności cenowej popytu też jest równy zeru.

Przykład 4

Sprzedaż atramentu po cenie 10 zł za słoik wynosi w danym okresie 200 sztuk, po podwyższeniu ceny do 12 zł za sztukę – także 200 sztuk.

D_0 = 200 szt. P_0 = 10 zł

D_1 = 160 szt. P_1 = 12 zł

$$E_{PD} = \frac{\frac{200-200}{200}}{\frac{12-10}{10}} = 0$$

$$\left|E_{PD}\right| = 0$$

Wielkość popytu jest taka sama – niezależna od zmiany ceny (popyt nie reaguje na zmianę ceny).

Obliczony wskaźnik cenowej elastyczności popytu wynosi 0 i oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 10%, to popyt spadnie o 10% • 0 = 0%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 1%, to popyt wzrośnie o 1% • 0 = 0%.

Przykładem dóbr o elastyczności sztywnej są dobra, które nie mają substytutów, np.: sól, atrament, oraz dobra, których nabycie bywa konieczne, np. leki.

Gdy współczynnik elastyczności cenowej popytu zmierza do nieskończoności $\left|E_{PD}\right| \to \infty$, to popyt jest doskonale elastyczny. Oznacza to, że dla danej ceny popyt może przybierać dowolne rozmiary. Przy danym poziomie ceny producent sprzeda całą wielkość swojej produkcji, a przy niewielkiej zmianie ceny w górę – przez tego producenta, który ceny nie zmienił. Występują wówczas warunki tzw. konkurencji doskonałej, w której żaden uczestnik wymiany handlowej nie ma wpływu na poziom ceny (W. Caban, 2001).

Przykładem dobra o popycie doskonale elastycznym może być woda mineralna określonej marki. Nawet niewielka zmiana jej ceny wywołuje zmianę wielkości popytu na nią.

Elastyczność cenowa popytu jest kategorią bardzo przydatną dla przedsiębiorstw. Znajomość cenowej elastyczności popytu umożliwia przedsiębiorstwom przewidywanie wpływu zmian ceny na rozmiary sprzedaży danego dobra.

Ustalenie współczynnika elastyczności cenowej może stanowić dla przedsiębiorstw cenną informację w podejmowaniu decyzji cenowych prowadzących do maksymalizacji zysku.

Zależnie od wielkości współczynnika elastyczności cenowej popytu podniesienie lub obniżenie ceny w różny sposób wpływa na utargi całkowite przedsiębiorstwa.

Kształtowanie się utargów to następujące przypadki:

- jeżeli $\left|E_{PD}\right|$ = 1, to zmiana ceny nie powoduje zmiany utargów ze sprzedaży (popyt wzorcowy);
- jeżeli $\left|E_{PD}\right|$ > 1, to obniżka ceny przyczynia się do wzrostu utargów ze sprzedaży, wzrost ceny powoduje natomiast spadek utargów (popyt jest elastyczny);
- jeżeli $\left|E_{PD}\right|$ < 1, to obniżka ceny powoduje zmniejszenie utargów, wzrost ceny wpływa natomiast na zwiększenie utargów (popyt jest nieelastyczny).

Inną powszechnie stosowaną miarą elastyczności jest elastyczność wiążąca zmiany popytu na dane dobro ze zmianami cen dobór pokrewnych (substytucyjnych i komplementarnych).

Reakcją popytu na dobro **X** na zmianę ceny dobra **Y** nazywa się **elastycznością mieszaną popytu**. Miarą tej elastyczności jest współczynnik elastyczności mieszanej popytu:

$$E_{X,Y} = \frac{\textit{procentowa zmiana wielkości popytu na jedno dobro}}{\textit{procentowa zmiana ceny jednego dobra subiektywnego lub komplementarnego}}$$

$$= \frac{\Delta X}{D_X} : \frac{\Delta P_Y}{P_Y} = \frac{D_{1X} - D_X}{D_X} : \frac{P_{1Y} - P_Y}{P_Y}$$

$\frac{\Delta D_X}{D_X}$ – procentowa zmiana popytu na dobro **X**

$\frac{\Delta P_Y}{P_Y}$ – procentowa zmiana ceny dobra **Y**, które w stosunku do dobra **X** jest substytucyjne bądź komplementarne.

Przykład 5

Przy cenie roweru równej 1.000 zł popyt na skutery wynosił 50 sztuk Wzrost ceny roweru do 1.500 zł wywołał wzrost popytu na skutery do 75 sztuk.

D_X = 50 szt.

D_{1X} = 75 szt.

P_Y = 1.000 zł

P_{1Y} = 1.500 zł

$$E_{X,Y} = \frac{\Delta D_X}{D_X} : \frac{\Delta P_Y}{P_Y} = \frac{D_{1X} - D_X}{D_X} : \frac{P_{1Y} - P_Y}{P_Y} = \frac{75-50}{50} : \frac{1500-1000}{1000} = \frac{25}{50} : \frac{500}{1000} = +1$$

$\left|E_{PD}\right| > 0$

W przypadku gdy współczynnik elastyczności mieszanej popytu jest dodatni, dwa dobra są substytutami. Dobra **X**, **Y** to substytuty.

Przykład 6

Przy cenie laptopa równej 1.000 zł popyt na oprogramowanie wynosił 200 sztuk. Wzrost ceny laptopa do 1.500 zł spowodował spadek popytu na oprogramowanie do 100 sztuk.

D_X = 200 szt.

D_{1X} = 100 szt.

P_Y = 1.000 zł

P_{1Y} = 1.500 zł

$$P_{X,Y} = \frac{\Delta D_X}{D_X} : \frac{\Delta P_Y}{P_Y} = \frac{D_{1X} - D_X}{D_X} : \frac{P_{1Y} - P_Y}{P_Y} = \frac{100 - 200}{200} : \frac{1500 - 1000}{1000} = \frac{100}{200} : \frac{1000}{500} = -1$$

$$\left| E_{PD} \right| < 0$$

W przypadku gdy współczynnik elastyczności mieszanej popytu jest ujemny, dwa dobra są w stosunku do siebie komplementarne. Podwyżka ceny dobra komplementarnego wpłynie ujemnie na wielkość popytu na dane dobro. Dla dóbr całkowicie niezależnych od siebie współczynnik przyjmuje wartość równą zeru.

Współczynnik $\mathbf{E_{XY}}$ określa stopień reakcji popytu na dane dobro (usługę) na skutek zmian cen innych dóbr (usług).

W przypadku dóbr (usług) substytucyjnych wzrost ceny jednego dobra (usługi) powoduje wzrost popytu na drugie dobro (usługę).

W przypadku dóbr komplementarnych wzrost ceny jednego dobra powoduje spadek popytu na drugie dobro.

Miarą reakcji popytu na zmiany realnych dochodów konsumentów jest współczynnik **elastyczności dochodowej popytu**. **Dochodowa elastyczność popytu** jest to stosunek procentowej zmiany wielkości popytu nabywcy na dane dobro (usługę) do procentowej zmiany dochodów nabywcy danego dobra. Wartość współczynnika informuje, jakie znaczenie ma określone dobro dla konsumenta, tzn. czy jest dobrem wyższego rzędu czy dobrem podstawowym.

$$E_M = \frac{procentowa\ \ zmiana\ \ wielkosci\ \ popytu}{procentowa\ \ zmiana\ \ dochodów}$$

$$E_M = \frac{\Delta D}{D_0} : \frac{\Delta M}{M_0} = \frac{D_1 - D_0}{D_0} : \frac{M_1 - M_0}{M_0}$$

$\frac{\Delta D}{D_0}$ – procentowa zmiana popytu

$\frac{\Delta M}{M_0}$ – procentowa zmiana dochodu

D_0 – wielkość popytu przed zmianą dochodów

D_1 – wielkość popytu po zmianie dochodów

M_0 – wielkość dochodów przed zmianą

M_1 – wielkość dochodów po zmianie

Przykład 7

Wzrost dochodów konsumenta z 4 tysięcy złotych do 6 tysięcy złotych wywołał wzrost popytu na dane dobro **X** z 200 jednostek do 250 jednostek.

M_0 – 4 tys. zł

M_1 – 6 tys. zł

D_0 – 200 jednostek

D_1 – 250 jednostek

$$E_M \frac{250-200}{200} : \frac{6000-4000}{4000} = \frac{50}{200} : \frac{2000}{4000} = 0,5$$

Współczynnik $\left|0 < E_M < 1\right|$ wynosi 0,5 i oznacza, że:

- jeśli dochód wzrośnie na przykład o 1%, to popyt wzrośnie o 1% • 0,5 = 0,5%
- jeśli dochód spadnie na przykład o 10%, to popyt spadnie o 10% • 0,5 = 5%

Sytuacja, w której $\left|0 < E_M < 1\right|$ dotyczy generalnie wydatków na dobra podstawowe – pierwszej potrzeby (np. żywności). Wydatki te rosną w niewielkim stopniu w stosunku do przyrostu dochodu.

Wartość dodatnia współczynnika $\left|0 < E_M < 1\right|$ oznacza, że dochód i popyt zmieniają się w tych samych kierunkach.

Przykład 8

Wzrost dochodów konsumenta z 4 tysięcy do 6 tysięcy złotych wywołał wzrost popytu na dane dobro **X** z 200 jednostek do 400 jednostek.

M_0 – 4 tys. zł

M_1 – 6 tys. zł

D_0 – 200 jednostek

D_1 – 400 jednostek

$$E_M \frac{400-200}{200} : \frac{6000-4000}{4000} = \frac{200}{200} : \frac{2000}{4000} = 2$$

$\left|E_M > 1\right|$

Sytuacja, w której $\left|E_M > 1\right|$ występuje w przypadku wydatków na dobra, które zaspokajają potrzeby wyższego rzędu, np.: luksusowe samochody, wykształcenie. Ich udział rośnie wraz ze wzrostem dochodów.

Przykład 9

Wzrost dochodów konsumenta z 2 tysięcy złotych do 3 tysięcy złotych wywołał spadek popytu na dobro **X** ze 100 sztuk do 75 sztuk.

M_0 – 2 tys. zł

M_1 – 3 tys. zł

D_0 – 100 szt.

D_1 – 75 szt.

$$E_M \frac{75-100}{100} : \frac{3000-2000}{2000} = \frac{-25}{100} : \frac{1000}{2000} = -0,5$$

$|E_M < 0|$

Ujemną elastycznością dochodową popytu $|E_M < 0|$ charakteryzują się dobra niższego rzędu, np.: ziemniaki czy chleb. Wzrost dochodów powoduje spadek popytu na te dobra, ponieważ wraz ze wzrostem zamożności nabywcy przestawiają się na lepsze jakościowo substytuty.

Znajomość **elastyczności cenowej podaży** ma istotne znaczenie w procesie analizy zjawisk rynkowych i podejmowania decyzji produkcyjnych. **Elastyczność cenowa podaży** wyraża relację podaży danego dobra na zmianę jego ceny. Jest to stosunek procentowej zmiany wielkości podaży do procentowej zmiany ceny. Wielkość tej reakcji można mierzyć za pomocą współczynnika cenowej elastyczności podaży.

$$E_s = \frac{\text{procentowa zmiana wielkości podaży}}{\text{procentowa zmiana ceny}}$$

$$E_S = \frac{\Delta S}{S_0} : \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0} : \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

$\frac{\Delta S}{S_0}$ – procentowa zmiana popytu

$\frac{\Delta P}{P_0}$ – procentowa zmiana dochodu

S_0 – wielkość podaży przed zmianą ceny

S_1 – wielkość podaży po zmianie ceny

P_0 – cena początkowa

P_1 – cena po zmianie

Klasyfikacja elastyczności cenowej podaży jest podobna do klasyfikacji elastyczności popytu. Ponieważ podaż zmienia się w tym samym kierunku, co cena, współczynniki elastyczności cenowej podaży przyjmują wartości dodatnie.

Przykład 10

Przy cenie dobra **X** równej 50 zł podaż tego dobra wynosiła 150 jednostek. Wzrost ceny do 75 zł spowodowała wzrost podaży do 250 jednostek.

S_0 – 150 jednostek

S_1 – 250 jednostek

P_0 – 50 zł

P_1 – 75 zł.

$$E_M \frac{250-150}{150} : \frac{75-50}{50} = \frac{100}{150} : \frac{25}{50} = 1\frac{1}{3}$$

$E_S > 1$ podaż elastyczna

Obliczona wartość wskaźnika oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 1%, to podaż wzrośnie o 1% • $1\frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}\%$;
- jeśli cena spadnie na przykład o 10%, to popyt spadnie o 10% • $1\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}\%$.

Podaż jest elastyczna, gdy ilość dobra (usługi) oferowana do sprzedaży może być łatwo i szybko zmieniana.

Przykład 11

Przy cenie dobra **X** równej 15 zł podaż tego dobra wynosiła 100 jednostek. Spadek ceny do 10 zł spowodował wzrost podaży do 150 jednostek.

S_0 – 4 tys. zł

S_1 – 6 tys. zł

P_0 – 200 jednostek

P_1 – 400 jednostek

$$E_M \frac{150-100}{100} : \frac{10-15}{15} = \frac{50}{100} : \frac{-5}{15} = -1,5$$

$|E_S < 1|$ podaż nieelastyczna

Obliczona wartość wskaźnika oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 1%, to podaż spadnie o 1% • 1,5 = 1,5%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 10%, to podaż wzrośnie o 10% • 1,5 = 15%.

Podaż jest nieelastyczna, gdy nie można danego dobra łatwo i szybko wyprodukować lub dostarczyć na rynek, dotyczy to na przykład niektórych produktów rolnych, których cykl produkcyjny może trwać nawet kilka lat.

Przykład 12

Przy cenie dobra **X** równej 20 zł podaż tego dobra wynosiła 100 jednostek. Wzrost ceny do 30 zł za sztukę spowodował wzrost podaży do 150 jednostek.

S_0 – 100 jednostek

S_1 – 150 jednostek

P_0 – 20 zł.

P_1 – 30 zł.

$$E_S \frac{150-100}{100} : \frac{30-20}{20} = \frac{50}{100} : \frac{10}{20} = 1$$

$|E_S| = 1$ podaż proporcjonalnie elastyczna

Obliczona wartość wskaźnika oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 1%, to podaż wzrośnie o 1% • 1 = 1%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 10%, to podaż spadnie o 10% • 1 = 10%

Podaż jest proporcjonalnie elastyczna, gdy procentowa zmiana wielkości podaży jest równa procentowej zmianie ceny.

Przykład 13

Przy cenie dobra **X** równej 15 zł podaż tego dobra wynosiła 100 jednostek. Spadek ceny do 10 zł spowodował zmiany w sprzedaży.

S_0 – 100 jednostek

S_1 – 100 jednostek

P_0 – 15 zł.

P_1 – 10 zł.

$$E_M \frac{100-100}{100} : \frac{10-15}{15} = 0$$

$|E_S = 0|$ podaż doskonale nieelastyczna (sztywna)

Obliczona wartość wskaźnika oznacza, że:

- jeśli cena wzrośnie na przykład o 1%, to podaż wzrośnie o 1% • 0 = 0%;
- jeśli cena spadnie na przykład o 10%, to podaż spadnie o 10% • 0 = 0%.

Podaż jest doskonale nieelastyczna, gdy procentowa zmiana wielkości podaży jest równa procentowej zmianie ceny. Przykładem dobra o cenowej elastyczności podaży może być obraz J. Matejki „Bitwa pod Grunwaldem" – niezależnie od zmiany ceny jest tylko jeden taki obraz, a zatem podaż nie może ulec zmianie (E. Adamowicz, S. Grzegorczyk, M. Romanowska, A. Sopińska, P. Wachowiak, 2003).

Podaż jest doskonale elastyczna $|E_S \to \infty|$, gdy przy danej cenie osiąga dowolne rozmiary, tzn. jest nieograniczona. Sytuacja taka jest czysto teoretyczna (występuje jedynie w przypadku zysku doskonale konkurencyjnego) i oznacza, że producenci przy danej cenie zapewnią taką ilość dobra, na jaką jest zgłoszony popyt.

Cenowa elastyczność podaży danego dobra (usługi) zależ od wielu czynników, z których najważniejsze to (E. Adamowicz, S. Grzegorczyk, M. Romanowska, A. Sopińska, P. Wachowiak, 2003):

- **Rodzaj dobra, możliwość jego magazynowania i składowania**. Im możliwości magazynowania i składowania są większe, tym elastyczność podaży jest większa.
- **D**ługość cyklu produkcyjnego. Im dłuższy jest cykl produkcyjny, tym elastyczność podaży jest mniejsza. W przypadku niektórych dóbr cykl produkcyjny może trwać nawet kilka lat, np. niektórych produktów rolnych.
- **Rodzaj technologii produkcji**. Im bardziej złożona jest technologia, tym niższa jest elastyczność podaży, ponieważ zmiana wielkości podaży wymaga skomplikowanych procesów technologicznych.
- **Dostęp do zasobów niezbędnych do produkcji dobra**. Im wyższa jest dostępność do zasobów surowców i półfabrykatów niezbędnych do wytworzenia dobra, tym elastyczność podaży tego dobra jest wyższa.
- **Istnienie rezerw mocy wytwórczych**. Im większa możliwość wykorzystania nie w pełni wykorzystanych mocy produkcyjnych, tym większa elastyczność podaży.

4.4. Rola państwa w gospodarce rynkowej

Funkcje i instrumenty oddziaływania państwa na gospodarkę

Rola państwa w gospodarce rynkowej sprowadza się do korygowania niedoskonałości rynku, czyli kwestii, których rynek nie rozwiązuje wcale bądź rozwiązuje je źle. Do najważniejszych kwestii należy zaliczyć występowanie (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011):

- **monopoli** – przyjmuje się, że bez ingerencji z zewnątrz wolny rynek wcześniej lub później doprowadzi do powstania monopoli i zaniku konkurencji;
- **asymetryczności informacji**, czyli sytuacji, w której dwie strony transakcji rynkowej nie posiadają jednakowej wiedzy na przykład na temat danego produktu, co może prowadzić do błędnych decyzji;
- **negatywnych efektów zewnętrznych** – nieuwzględnienia przez system rynkowy pewnych kosztów ponoszonych przez podmioty gospodarcze, np.: społecznych kosztów przedsięwzięć;
- **dóbr publicznych**, które z jednej strony są powszechnie pożądane, a z drugiej – nie ma chętnych do ich finansowania.

Istotną dla prawidłowego funkcjonowania gospodarki rolą państwa jest tworzenie odpowiednich norm prawnych umożliwiających przeciwdziałanie korupcji. **Korupcja** polega między innymi na wręczaniu korzyści majątkowych nieuczciwym urzędnikom, wspieraniu finansowym polityków podczas kampanii wyborczej – po to, by później uzyskać od nich na przykład ulgę podatkową, koncesję na działalność gospodarczą czy zezwolenie na budowę lub by wygrać przetarg. Zjawisko korupcji destabilizuje państwo i uniemożliwia uczciwą konkurencję w gospodarce. Jest także zagrożeniem dla praw człowieka, ponieważ narusza zasadę równości wszystkich obywateli wobec prawa.

W celu zniwelowania niedoskonałości rynku państwo podejmuje działania interwencyjne w ramach polityki gospodarczej. Polityka gospodarcza to całokształt działań państwa, których celem jest oddziaływanie państwa na gospodarkę.

Pojęcie *państwa* ujmowane jest dość szeroko i służy określeniu złożonej, wieloszczeblowej struktury administracyjnej społeczeństwa zamieszkującego określone terytorium. Struktura ta dysponuje władzą ustawodawczą, wykonawczą i sądowniczą, których działalność związana jest z funkcjonowaniem systemu społeczno-gospodarczego.

Polityka finansowa to działalność podmiotu, który dąży do osiągnięcia określonych celów za pomocą narzędzi pieniężnych. Ze względu na fakt, że tylko państwo jest podmiotem posiadającym pełną suwerenność, polityka finansowa jest domeną państwa. Pozostałe podmioty zmuszone są do tego, aby traktować politykę finansową państwa jako uwarunkowanie zewnętrzne swojej działalności. Czynniki te to np.: stopy procentowe, stawki podatkowe czy celne. W gospodarce głównym regulatorem procesów gospodarczych jest rynek. Zadaniem państwa jest tworzenie poprzez realizację odpowiedniej polityki finansowej najkorzystniejszych warunków dla funkcjonowania tego rynku (S. Owsiak, 2002).

Zestaw uniwersalnych, obiektywnych celów realizowanych z wykorzystaniem polityki finansowej to (M. Żukowski, 2005)**:**

1. **Wzrost gospodarczy**. Polityka finansowa powinna służyć podnoszeniu poziomu życia społeczeństwa, a warunkiem jest osiągany wzrost gospodarczy. Z procesem wzrostu gospodarczego związana jest kwestia wykorzystania zasobów pracy.

2. **Tworzenie i ochrona miejsc pracy**. Jeżeli w gospodarce występuje bezrobocie wykraczające poza rozmiary naturalnej stopy bezrobocia, celem polityki finansowej powinno być dostarczenie bezrobotnym niezbędnych środków finansowych w postaci zasiłków dla bezrobotnych.

3. **Stabilizowanie gospodarki**, czyli ograniczanie amplitudy wahań cyklu koniunkturalnego, następujące z wykorzystaniem różnych instrumentów.

4. **Wspieranie konkurencyjności gospodarki**. W związku z postępującym procesem liberalizacji i globalizacji gospodarki światowej coraz większe znaczenie przypisuje się wspieraniu konkurencyjności gospodarki krajowej na rynkach światowych. Dzisiejsza polityka finansowa wyklucza bezpośrednie dopłaty do towarów eksportowych czy sztuczne zaniżanie kosztów ich wytwarzania. Powinna natomiast koncentrować się na narzędziach o charakterze pośrednim, takich jak: udzielanie gwarancji kredytowych, wspieranie ubezpieczeń finansowych handlu zagranicznego, wspieranie postępu technicznego i technologicznego w rodzimych przedsiębiorstwach, pomoc w zakresie promocji towarów na wiodących rynkach.

5. Zachowanie realnej wartości pieniądza, czyli **walka z inflacją**. Cel ten jest obecnie domeną polityki pieniężnej, prowadzonej w większości państw przez autonomiczne władze monetarne.

6. **Zapewnienie wewnętrznego i zewnętrznego bezpieczeństwa systemu finansowego**. Realizowany jest ono poprzez nadzór nad działalnością bankową, ubezpieczeniową, obrotem papierami wartościowymi, funduszami inwestycyjnymi i emerytalnymi. W wymiarze zewnętrznym bezpieczeństwo systemu finansowego oznacza osiągniecie takiej pozycji walutowej, która sprzyja regulowaniu zobowiązań zarówno przez rząd, jak i podmioty prywatne.

Realizacja celów polityki finansowej oznacza, że państwo włącza się w realne i regulacyjne procesy zachodzące w gospodarce.

Procesy realne mają charakter rzeczowy i oznaczają kreowanie zmian w wielkości oraz strukturze: produkcji, konsumpcji, techniki, nauki itp. Procesy regulujące wyrażają się w sposobach zbierania informacji o zjawiskach gospodarczych, podejmowanych na tej podstawie decyzji gospodarczych, przekazywaniu decyzji podmiotom wykonawczym oraz kontroli ich realizacji. Istnienie sfery regulacyjnej związane jest ściśle z instytucjami i mechanizmami, za pomocą których oddziałują się na zachowanie podmiotów gospodarczych (A. Pakuła, 2003).

Interwencja państwa w gospodarkę związana jest z pełnieniem przez państwo funkcji ekonomicznych:

- **Alokacyjna funkcja państwa** – polega na podejmowaniu takich działań, które sprzyjają optymalnej alokacji rozdysponowania zasobów gospodarczych. Dotyczy to takich zasobów, których rozdział w warunkach współczesnej gospodarki rynkowej bez interwencji państwa mógłby być niekorzystny dla społeczeństwa. Do zasobów tych należą między innymi tak zwane dobra publiczne: infrastruktura, ochrona praw własności czy obrona narodowa. Funkcja ta przejawia się m.in. w uzupełnianiu lub korygowaniu mechanizmu rynkowego, np.: poprzez nakładanie podatków czy dostarczanie określonej podaży dóbr publicznych (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011).
- **Stabilizacyjna funkcja państwa** – polega na podejmowaniu przez państwo działań stabilizujących gospodarkę przez realizację takich celów, jak: osiąganie wysokiego tempa wzrostu gospodarczego, ograniczenie inflacji i bezrobocia, zmniejszenie amplitudy wahań poziomu aktywności gospodarczej. Efekty długofalowe można osiągnąć, rozwijając szkolnictwo (wzrost gospodarczy poprzez podniesienie kwalifikacji pracowników), promując rozwój nauki i techniki (wzrost gospodarczy dzięki

nowoczesnym technologiom), tworząc dogodne warunki finansowania działalności gospodarczej (stabilne i niewysokie podatki, niskie stopy oprocentowania kredytów). Krótkookresowe skutki daje zwykle regulacja popytu przez państwo, na przykład przez zwiększenie podaży pieniądza lub podniesienie wydatków państwa (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

- **Redystrybucyjna funkcja państwa** – sprowadza się do działań zmierzających do niwelowania zbyt dużych nierówności społecznych wynikających z regulowanych przez rynek proporcji podziału dochodu. W naturze gospodarki rynkowej leży powstawanie różnic dochodowych, premiowane są bowiem te jednostki, które wykazują się większa sprawnością i przedsiębiorczością. Wpływając na zmniejszenie różnic dochodowych, państwo wpływa na strukturę konsumpcji oraz dostęp do takich produktów, jak: kultura, oświata, infrastruktura mieszkaniowa, służba zdrowia czy szkolnictwo wyższe. Funkcja ta przejawia się w ustaleniu płacy minimalnej, rodzaju i wysokości podatków czy udostępnianiu dóbr bezpłatnych (oświata, opieka lekarska). W przypadku wypełniania funkcji redystrybucyjnej może się pojawić sprzeczność pomiędzy zasadą sprawiedliwości społecznej a efektywnością ekonomiczną. Państwo szczególnie zaangażowane w redystrybucję dóbr jest nazywane państwem opiekuńczym. Jego finansowanie wymaga poważnych wydatków budżetowych. Środki finansowe na pokrycie tych wydatków pochodzą głównie z podatków progresywnych, które wzrastają wraz z dochodami podatników.
- **Funkcja regulacyjna –** dotyczy gospodarki. Państwo odgrywa ważną rolę w tworzeniu i utrzymywaniu warunków konkurencji w gospodarce. Największym zagrożeniem są monopole, które mogą się pojawić nawet w najlepiej zorganizowanej gospodarce rynkowej. Monopolista narzuca innym producentom niekorzystne dla nich warunki. Ceny produktów lub usług są wówczas z reguły zawyżone i powodują wzrost inflacji. Monopole mogą więc nie być zainteresowane wprowadzaniem innowacji, a jakość ich produktów może być relatywnie niska. W takich sytuacjach państwo interweniuje, wprowadzając odpowiednie uregulowania prawne, lub korzysta z pomocy specjalnych instytucji, na przykład Urzędu Ochrony Konkurencji i Konsumentów. Interwencja państwa jest również konieczna w przypadku pojawienia się wad strukturalnych w gospodarce, na przykład systemu nadmiernych ubezpieczeń społecznych, niskiej wydajności pracy, wykorzystywania przez przedsiębiorstwa swoich zasobów na nieopłacalną produkcję (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

Tabela 15. Argumenty za i przeciw ekonomicznej roli państwa

Ekonomiczna rola państwa	
Argumenty „za":	**Argumenty „przeciw":**
• konieczność zabezpieczenia systemu gospodarczego od strony instytucjonalno-prawnej; • występowanie w praktyce niedoskonałości systemu rynkowego i konkurencji; • występowanie negatywnych efektów zewnętrznych; • istnienie dóbr publicznych; • istnienie dóbr szczególnie niekorzystnych lub korzystnych społecznie; • występowanie wahań aktywności gospodarczej i związane z tym występowanie zjawisk negatywnych takich jak: bezrobocie i inflacja; • istnienie pozbawionych opieki ludzi starych, niedołężnych, upośledzonych, chorych; • powstawanie zbyt dużych, nieakceptowanych społecznie, różnic dochodowych i majątkowych.	• pojawienie się w wyniku regulacji państwowych stanów nierównowagi na rynku; • zniekształcenie informacji płynących z rynku; • zmniejszona elastyczność systemu gospodarczego na skutek nadmiernej ingerencji państwa oraz biurokracji; • wysokie koszty interwencjonizmu przy jednocześnie niewielkiej skuteczności wielu działań; • osłabienie bodźców związanych z funkcjonowaniem systemu rynkowego; • niereprezentatywność państwa (organów władzy); • ograniczanie wolności jednostki i ograniczanie oddolnej inicjatywy.

Źródło: Milewski R., Podstawy ekonomii, Warszawa 2001, s. 386-388

W literaturze można spotkać szereg różnorodnych argumentów zarówno za uczestnictwem państwa w procesach gospodarczych, jak i przeciw tej ingerencji. **Najważniejsze argumenty za ekonomiczną rolą państwa to** (M. Żukowski, 2005):

1. Istnieje obiektywna konieczność zabezpieczenia systemu gospodarczego od strony instytucjonalno-prawnej, czyli państwo musi tworzyć system, norm prawnych i instytucji chroniących na przykład prawo własności. Obecności państwa może być również uzasadniona występującymi w praktyce niedoskonałościami systemu rynkowego i konkurencji.

2. Argumentem potwierdzającym konieczność ingerencji państwa są efekty zewnętrzne, występujące zarówno w sferze produkcji, jak i konsumpcji. Korzystne efekty zewnętrzne związane są na przykład z oświatą – korzystają z niej uczący się i producenci, doskonalone są bowiem umiejętności produkcyjne ludzi.

3. Kolejny argument to istnienie dóbr publicznych. Dobra oraz usługi można podzielić na konsumowane indywidualnie i zbiorowo. Dobra konsumpcji zbiorowej, czyli dobra publiczne to na przykład: środki obrony państwa, usługi służby zdrowia, obiekty oświatowe. Podmioty konsumpcji zbiorowej nie mogą powstać ani być likwidowane na podstawie sygnałów rynkowych.

4. Jako argument należy wskazać na istnienie dóbr szczególnie niekorzystnych lub korzystnych społecznie. Przykładem dóbr niekorzystnych są: narkotyki, alkohol, czy tytoń, dóbr pożądanych społecznie zaś na przykład szczepionki.

5. Argumentem powszechnie przyjętym jest występowanie w wyniku wahań rozmiarów działalności gospodarczej zjawisk niepożądanych w postaci bezrobocia czy inflacji. Państwo, dysponując odpowiednimi instrumentami, może podejmować działania stabilizacyjne ograniczające natężenie tego typu zjawisk oraz towarzyszących im skutków negatywnych.

6. Problemem gospodarki rynkowej jest istnienie grup ludzi wymagających opieki, na przykład chorych, upośledzonych, starych, wobec których państwo jest zobowiązane do niesienia pomocy.
7. Istotne jest powstawanie zbyt dużych, nieakceptowanych społecznie różnic dochodowych i majątkowych. Państwo może podejmować działania zmierzające do wtórnej redystrybucji dochodu i wyrównywania warunków startu życiowego.

Zestaw argumentów przemawiających przeciwko ekonomicznej roli państwa (R. Milewski, 2000):

- **pojawienie się stanów nierównowagi na rynku** (niedoborów lub nadwyżek) w wyniku regulacji państwowych, zwłaszcza wtedy, gdy regulacje te rzutują bezpośrednio lub pośrednio na ceny produktów i usług;
- **zniekształcone informacje** – im większy zakres państwowych regulacji, tym bardziej zniekształcone, mniej obiektywne są informacje;
- **zmniejszona elastyczność systemu gospodarczego wywołana biurokratyzacją i usztywnieniem procesów decyzyjnych**, czyli im większy rozrost biurokracji państwowej i zasięg ingerowania w gospodarkę, tym mniejsza elastyczność systemu;
- **wysokie koszty interwencjonizmu państwowego przy równocześnie niewielkiej skuteczności wielu działań**;
- **niereprezentatywność państwa** (rządu) – funkcjonariusze państwa mogą działać przede wszystkim w interesie własnym, a nie w interesie obywateli;
- **ograniczanie wolności jednostki i hamowanie oddolnej inicjatywy**.

Wyróżnia się zwykle **dwa zasadnicze rodzaje polityki makroekonomicznej państwa**: politykę fiskalną (budżetową) oraz politykę monetarną (pieniężną).

Polityka budżetowa (fiskalna) obejmuje decyzje rządu w zakresie dochodów i wydatków budżetowych. Duży wpływ na gospodarkę ma zwłaszcza polityka podatkowa państwa. Obniżenie podatków może przyczynić się do pobudzenia popytu. Konsumenci, ponieważ płacą niższe podatki, dysponują większą ilością pieniędzy, którą zwykle wydają na dobra konsumpcyjne. Niższe podatki dla przedsiębiorstw powodują wzrost inwestycji i zapotrzebowania na dobra inwestycyjne (maszyny, urządzenia, nowe technologie). Skutki takiej polityki fiskalnej są jednak widoczne dopiero po dłuższym czasie (J. Korba, Z. Smutek, 2012). Wcześniej odczuwa się następstwa zmniejszonych dochodów budżetowych, a zwłaszcza wydatków budżetowych, np.: obniżenie płac realnych w sferze budżetowej, mniejsze wydatki na bezpieczeństwo. Polityka fiskalna może mieć charakter:

- polityki restrykcyjnej (wysokie podatki, niski deficyt budżetowy);
- polityki ekspansywnej (wspieranie szybkiego wzrostu gospodarczego poprzez niskie stawki podatkowe i dopuszczenie do większego deficytu budżetowego).
- **Polityka pieniężna** (monetarna) polega na regulowaniu podaży pieniądza przez bank centralny w celu jej dostosowania do aktualnych potrzeb gospodarki. Może mieć ona charakter:
- łagodny (ekspansywny) – zwiększający podaż pieniądza w celu pobudzenia popytu i wzrostu zatrudnienia (obniżenie stóp procentowych, co powoduje, że tanieją kredyty);
- twardy (restrykcyjny) – zmniejszający podaż pieniądza w celu ograniczenia popytu i wzrostu inflacji (wzrost stóp procentowych w bankach komercyjnych, a w konsekwencji podrożenie kredytów).

Narzędzia polityki pieniężnej (M. Żukowski, 2005):

- wskaźnik rezerw obowiązkowych;
- kwota udzielanych kredytów refinansowych przy odpowiedniej stopie redyskontowej;
- kupno lub sprzedaż obligacji.

Obniżenie stóp procentowych zwiększa podaż pieniądza. Większy wypływ pieniędzy powoduje pobudzenie koniunktury: wzrost popytu, a w konsekwencji także produkcji, oraz spadek bezrobocia. Taki mechanizm regulacji rynku stwarza jednak niebezpieczeństwo zbyt gwałtownego wzrostu cen (wartość pieniądza przekracza wartość towarów i usług na rynku) i wzrostu inflacji. Równie niebezpieczne może się okazać schładzanie koniunktury, czyli zmniejszanie podaży pieniądza poprzez podwyżkę stóp procentowych, podniesienie podatków, emisję papierów wartościowych (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

Polityka ekonomiczna państwa wymaga stosowania różnorodnych instrumentów. Przez **instrumenty polityki ekonomicznej** rozumie się zmienne pozostające pod kontrolą państwa (rządu), które mogą wpływać na realizację założonych celów. Można je podzielić na:

- bezpośrednie (np.: administracyjny nakaz ograniczenia jakiejś produkcji lub przeniesienia jej w inne miejsce, norma zanieczyszczenia powietrza, kontyngent importu danego produktu itp.);
- pośrednie (np.: obniżenie lub podwyższenie przez bank centralny stopy redyskontowej – stopy kredytu zaciąganego w banku centralnym, zmiana stopy opodatkowania dochodów, zmiana kursu walutowego itp.) (R. Milewski, 2000).

Polityka ekonomiczna (finansowa) państwa powinna służyć osiąganiu wzrostu gospodarczego, tworzeniu miejsc pracy, stabilizacji gospodarki, wspieraniu konkurencyjności gospodarki.

Cele polityki gospodarczej to (M. Żukowski, 2005):

- osiąganie wzrostu gospodarczego;
- tworzenie miejsc pracy;
- stabilizacja gospodarki;
- wspieranie konkurencyjności gospodarki.

Wskaźniki wzrostu i rozwoju gospodarczego

Wzrost gospodarczy to proces ilościowego powiększana się podstawowych wielkości ekonomicznych, charakteryzujących daną gospodarkę narodową (PKB i związanego z nim dochodu narodowego, konsumpcji, inwestycji, produkcji, zatrudnienia itp.). Wzrost gospodarczy oznacza rozszerzanie się zdolności gospodarki do wytwarzania towarów i usług pożądanych przez ludzi (M. Żukowski, 2005). W procesie tym szczególną rolę odgrywa akumulacja kapitału, doskonalenie ludzkich umiejętności oraz postęp techniczny.

Rozwój gospodarczy jest pojęciem szerszym. Jest to proces zmian w gospodarce, których istotą są przekształcenia jakościowo-strukturalne w procesie rozbudowy gospodarki narodowej. Na rozwój gospodarczy składają się więc zmiany zarówno ilościowe, jak i jakościowe w strukturze społeczno-ekonomicznej kraju (M. Żukowski, 2005).

Gospodarka może wykazywać wzrost gospodarczy bez gospodarczego rozwoju.

Z uwagi na wzajemną współzależność procesów **wzrostu i rozwoju gospodarczego** formułuje się kilka **warunków wstępnych** ich występowania, Najważniejsze z nich to (M. Żukowski, 2005):

1. **Odpowiednia ilość i jakość pracy**. Siła robocza powinna posiadać odpowiednie wykształcenie, umiejętności zawodowe i nawyki pracy produkcyjnej, aby mogła być wykorzystana do posługiwania się nową techniką oraz technologią. Mówi się o tzw. „kapitale ludzkim".
2. **Odpowiednia ilość i jakość kapitału w postaci maszyn, wyposażenia i surowców**. Podaż kapitału zależy od oszczędności, które stanowią różnicę między dochodem a konsumpcją.
3. **Odpowiednia ilość i jakość zasobów naturalnych**. Czynnik ten jest istotny, ale niedecydujący. Na przykład Japonia, która posiada skromne zasoby naturalne, osiągnęła wysoki poziom wzrostu i rozwoju gospodarczego dzięki oszczędnościom oraz jakości posiadanej siły roboczej.
4. **Odpowiednio wysoki poziom techniki i technologii**. Technologia to wiedza o tym, jak przekształcać zasoby w dobra i usługi. O jej poziomie decyduje rozwój nauki. Technologia ma na ogół większe znaczenie dla efektywności produkcji niż dla wprowadzania nowych produktów lub ulepszania już istniejących. Odmienne kombinacje ziemi, pracy i kapitału wymagają jedynie odmiennego poziomu oraz rodzajów technologii, badania naukowe tworzą podstawy do podnoszenia poziomu techniki i technologii.

Socjolog niemiecki.

5. **Sprzyjające czynniki socjokulturowe**. M. Weber twierdzi, że protestancka etyka pracy, nagradzająca trud, sumienność oraz zapobiegliwość, w istotny sposób przyczyniła się do ekonomicznego sukcesu państw Europy Zachodniej i USA.

Wzrost gospodarczy ujmowany jest jako proces zwiększania zasobu dóbr i usług służących zaspokajaniu potrzeb społecznych. Dlatego odpowiednimi miernikami tego procesu są zmiany realnego produktu narodowego brutto (PNB) lub produktu krajowego brutto (PKB) oraz związanego z nimi dochodu narodowego.

Wzrost PKB jest istotnym celem polityki gospodarczej państwa. Przedmiotem teorii wzrostu gospodarczego jest próba odpowiedzi na pytania:

- Jakie czynniki sprawiają, że gospodarka się rozwija?
- Czy wzrost ma jakiś kres?
- Skąd biorą się różnice w rozwoju gospodarczym różnych krajów?

Gospodarka narodowa jest podsystemem wyodrębnionym z większego systemu, jakim jest społeczeństwo. Składa się ona z określonych elementów wzajemnie od siebie zależnych, np.: gałęzie przemysłu, rolnictwa, łączności. Związki i zależności między elementami systemu „gospodarka narodowa" mają charakter sprzężeń zwrotnych. System taki jest zbiorem elementów powiązanych ze sobą łańcuchem oddziaływań przyczynowo-skutkowych.

Gospodarka jako całość składa się z milionów podmiotów gospodarczych: gospodarstw domowych, przedsiębiorstw oraz jednostek aparatów państwa, tak na szczeblu centralnym, jak i lokalnym. Ich indywidualne decyzje wyznaczają łącznie całkowite wydatki w gospodarce, całkowity dochód i ogólny poziom produkcji dóbr i usług. Wszystkie wydatki jednych osób stają się dochodami innych. Można przedstawić to jako okrężny obieg dochodów pomiędzy przedsiębiorstwami, gospodarstwami domowymi a aparatem państwowym (M. Żukowski, 2005).

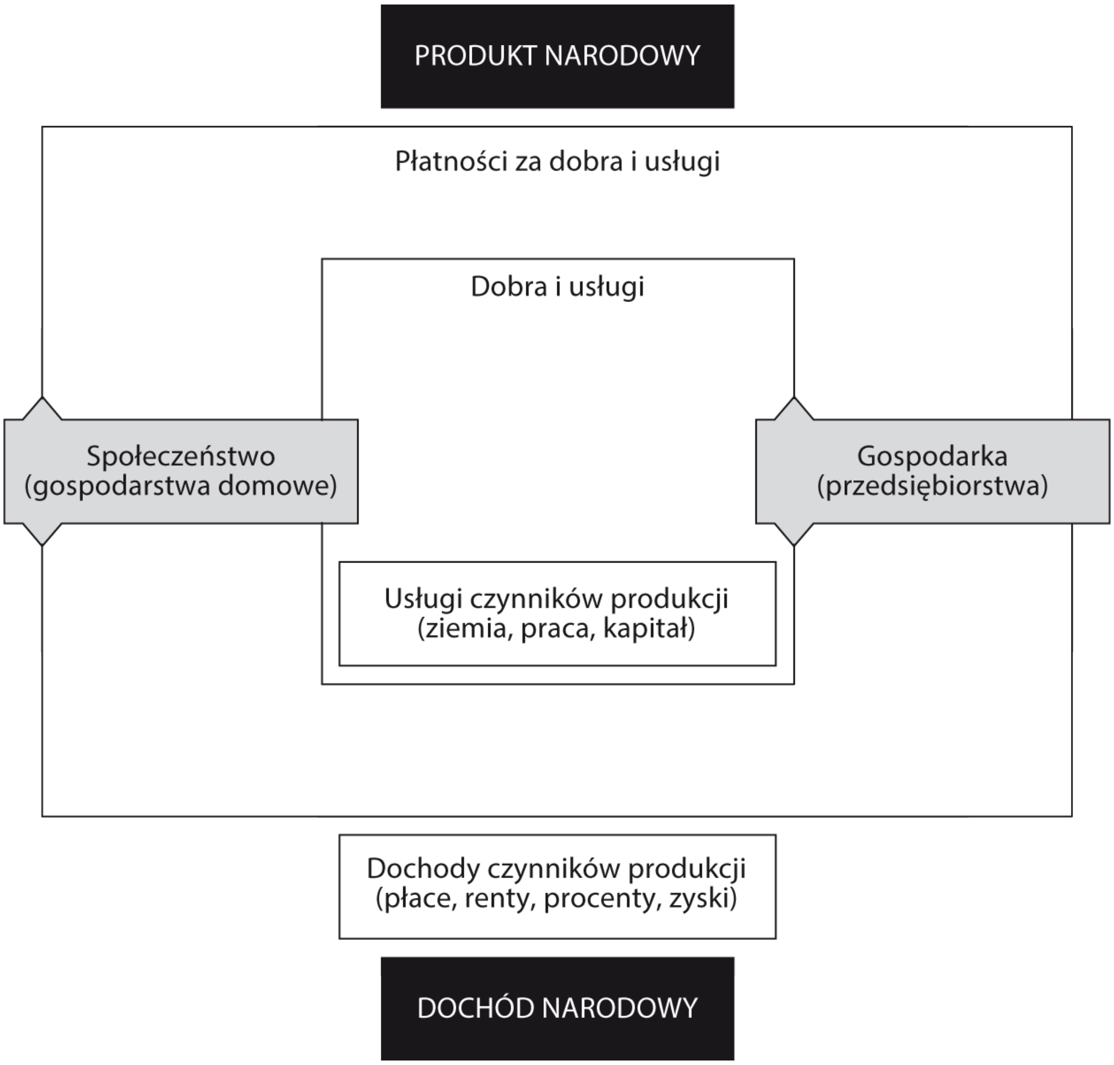
Gospodarstwa domowe otrzymują dochody od pracodawców, od rządu – w formie świadczeń socjalnych oraz z inwestycji, na przykład w papiery wartościowe. Uzyskane dochody przeznaczają na konsumpcję dóbr i usług, na płatności podatkowe oraz na oszczędności.

Przedsiębiorstwa czerpią dochody ze sprzedaży dóbr i usług gospodarstwom domowym, z inwestycji oraz subwencji rządowych. Wydają swoje dochody na płace pracowników, inwestycje, podział zysków i płatności podatkowe.

Rząd otrzymuje dochody z podatków, z działalności przedsiębiorstw państwowych i z pożyczek. Wydatkuje swoje dochody, kupując bezpośrednio dobra i usługi, na pensje pracowników sfery budżetowej, przekazując pieniądze jako subsydia oraz spłacając pożyczki.

Gospodarka, w której występują tylko zależności między gospodarkami domowymi a przedsiębiorstwami to **model gospodarki zamkniętej**. Gospodarstwa domowe otrzymują dochody z tytułu świadczonych usług (płace, czynsze, zyski), wypłacane przez przedsiębiorstwa za dostarczone i wykorzystane czynniki wytwórcze. Następnie gospodarstwa domowe wydają swoje dochody na zakupu od przedsiębiorstw dóbr i usług, dając tym samym przedsiębiorstwom pieniądze potrzebne do zapłacenia za usługi czynników wytwórczych w produkcji.

Ruch okrężny pomiędzy gospodarstwami domowymi i przedsiębiorstwami, ujętymi jako podstawowe składniki gospodarki narodowej, obrazuje Rysunek 19.



Rysunek 19. Schemat okrężnych przepływów w gospodarce

Źródło: M. Żukowski, Ekonomia. Zarys wykładu, Lublin 2005, s. 150

Krąg wewnętrzny oznacza transfery zasobów rzeczowych pomiędzy obydwoma grupami podmiotów, natomiast krąg zewnętrzny odzwierciedla odpowiadające im przepływy pieniężne.

Dla oceny efektywności gospodarowania czynnikami wytwórczymi w skali makroekonomicznej można stosować dwie miary: produkt narodowy i dochód narodowy. Na rysunku część górna obrazuje wartość **produktu narodowego**, czyli płatności pieniężne za dobra i usługi powstałe w wyniku wykorzystania czynników produkcji. Część dolna prezentuje **dochód narodowy**, czyli sumę wynagrodzenia za wykorzystanie czynników wytwórczych w postaci płac, zysków itp.

Wartości produkcji wytworzonej w gospodarce kraju wyrażana jest za pomocą produktu krajowego brutto. **Produkt krajowy brutto** (PKB) jest miarą produkcji wytworzonej przez czynniki wytwórcze zlokalizowane na terytorium danego kraju. PKB jest wystarczającym miernikiem wartości produkcji w przypadku gospodarki zamkniętej. W przypadku gospodarki otwartej od PKB należy odróżnić **produkt narodowy brutto** (PNB).

Produkt krajowy brutto (PKB) to pieniężny odpowiednik strumienia finalnych dóbr i usług wytwarzanych w gospodarce w ciągu roku wyrażony w cenach rynkowych.

Produkt narodowy brutto (PNB) to wartość PKB powiększona o saldo dochodów obywateli danego kraju z tytułu własności za granicą oraz pomniejszona o dochody cudzoziemców posiadających własność w danym kraju.

Podmiot narodowy obejmuje następujące płatności (M. Żukowski, 2005):

- wydatki konsumpcyjne gospodarstw domowych (C);
- rządowe zakupy dóbr i usług (G);

- krajowe inwestycje prywatne (I);
- eksport netto (X–M)

Wydatki konsumpcyjne gospodarstw domowych obejmują kupowane przez społeczeństwo: konsumpcyjne dobra trwałego użytku (np. samochody, telewizory), dobra nietrwałe (np. żywność, odzież) oraz usługi.

Produkcję netto stanowią dobra i usługi nabywane przez rząd, na przykład wydatki na usługi edukacyjne czy budowę infrastruktury (drogi, mosty itp.).

Jednocześnie do PNB nie wlicza się państwowych płatności transferowych (emerytury, renty, zasiłki dla bezrobotnych, subwencje dla firm państwowych i prywatnych), które nie są związane z koniecznością odwrotnego świadczenia jakichkolwiek dóbr i usług.

Krajowe inwestycje prywatne obejmują trzy kategorie: wydatki przedsiębiorstw na zakup narzędzi, maszyn i urządzeń, wydatki na wszelkie budowle oraz na przyrost zapasów.

Czwartym elementem składowym produktu narodowego jest eksport netto, czyli różnica pomiędzy eksportem a importem dóbr i usług.

PNB = C+G+I+(X-M)
PKB = C+G+I

Produkt narodowy brutto obliczany w bieżących cenach rynkowych dóbr i usług finalnych wchodzących w jego skład określa się jako nominalny PKB. W konsekwencji, jeśli tempo wzrostu produkcji jest stałe (bądź spada), a ceny rosną wówczas wzrost PKB ma wyłącznie nominalny charakter, wynikający ze wzrostu cen (inflacji).

Dla uzyskania realnej wielkości PKB stosowane są ceny stałe. Realny PKB koryguje nominalny PKB o skutki inflacji i wyraża go w cenach istniejących w pewnym okresie, określonym jako rok bazowy albo podstawowy. W ten sposób, eliminując wpływ wzrostu cen na wartość PKB, uzyskuje się informacje, o ile wzrosły lub spadły fizyczne rozmiary produkcji dóbr i usług w badanym okresie. Aby przejść od nominalnego do realnego PKB, należy zastosować wskaźnik odzwierciedlający zmiany cen wszystkich dóbr. Wskaźnik ten nazywa się **deflatorem PKB**. Deflator (zwany też indeksem cen) informuje o zmianie cen w kolejnych latach w stosunku do roku wyjściowego (bazowego). Deflator PKB jest to stosunek nominalnego PKB (w cenach bieżących) do PKB w ujęciu realnym (w cenach stałych), wyrażony w postaci wskaźnika (w tym celu należy stosunek ten pomnożyć przez 100).

$$\text{Deflator PKB} = \frac{\text{nominalny PKB}}{\text{realny PKB}} \bullet 100$$

stąd:

$$\text{Realny PKB} = \frac{\text{nominalny PKB}}{\text{deflator PKB}} \bullet 100$$

Indeks cen (deflator PKB) wyraża zmiany cen wszystkich dóbr i usług składających się na produkt krajowy. Produkt krajowy brutto w rzeczywistości składa się z wielu towarów. Ich waga (udział w łącznej wartości) w PKB jest różna. Należy uwzględnić różne ich udziały (wagi) w całym PKB.

$$\text{Indeks cen} = \frac{\text{cena towaru x w danym roku}}{\text{cena towaru x w roku bieżącym}} \cdot 100$$

$$\text{Indeks cen PKP} = \frac{\text{suma iloczynów indeksów cen i wag}}{\text{suma wag}}$$

(deflator)

Zastosowanie tak wyliczonego indeksu cen PKB (delatora) pozwala na ustalenie realnego produktu krajowego w poszczególnych latach, a więc na ustalenie jego rzeczywistego wzrostu, tj. po wyeliminowaniu deformującego wpływu zmian cen (M. Żukowski, 2005).

Przykład 14 (M. Żukowski, 2005)

Przyjmując, że produkt narodowy składa się z dwóch dóbr (**X** oraz **Y**):

$$Indeks\ cen\ \boldsymbol{X} = \frac{400\ zł}{200\ zł} \bullet 100 = 200$$

$$Indeks\ cen\ \boldsymbol{Y} = \frac{150\ zł}{100\ zł} \bullet 100 = 150$$

Indeks cen towaru **X** = 200 oraz towaru **Y** = 150 nie oznacza, że ceny całego produktu narodowego wzrosły ze 100 do 175.

Indeks cen stosowany dla ustalenia realnego produktu narodowego nie może więc być średnią indeksów cen poszczególnych dóbr i usług. Tak byłoby tylko wtedy, gdyby oba towary miały równy udział w całym produkcie narodowym. Jeśli natomiast waga towaru **X** wynosi 12, a waga towaru **Y** wynosi 3, to indeks cen PNB wylicza się według formuły:

$$Indeks\ cen\ PKB = \frac{(200 \times 12) + (150 \times 3)}{15} = \frac{2850}{15} = 190{,}0$$

$(deflator)$

Deflator PNB jest wskaźnikiem ogólnego poziomu cen. W praktyce stosowane są także indeksy cenowe odnoszące się do poszczególnych grup towarów czy usług. Najbardziej znany to indeks cen dóbr i usług konsumpcyjnych CPI.

Wyraża on zmiany cen podstawowych dóbr i usług wchodzących w skład tzw. koszyka. Koszyk dóbr i usług zawiera podstawowe, najczęściej kupowane dobra i usługi, decydujące o poziomie życia poszczególnych grup rodzin (gospodarstw domowych). Przy obliczaniu bierze się pod uwagę procentowy udział (wagę) danego dobra w wydatkach przeciętnego gospodarstwa domowego zaliczanego do określonej grupy. Analogicznie interpretuje się indeks cen towarów produkcyjnych. Jest on miernikiem zmian cen towarów zakupionych przez przedsiębiorstwa (producentów).

Realny PNB jest prostym miernikiem fizycznych rozmiarów produkcji wytworzonej w gospodarce, a roczna zmiana procentowa jego poziomu informuje o tempie wzrostu gospodarczego. Aby uzyskać informacje na temat stopy życiowej przeciętnego obywatela w danym kraju, należy uwzględnić również przyrost demograficzny. Realny PNB *per capita* (na 1 mieszkańca) jest to realny PNB podzielony przez liczbę mieszkańców kraju.

Analogicznie, gdy chcemy uzyskać przeciętny dochód na 1 mieszkańca – to dochód narodowy dzielimy przez liczbę ludności. Miernikami wzrostu gospodarczego są PKB, PNB czy DN, zaś do oceny poziomu rozwoju gospodarczego państwa oraz poziomu życia wykorzystuje się m.in. PKB, PNB czy DN na mieszkańca kraju.

Wskaźniki rozwoju społecznego ONZ

HDI (Human Development Index)

Od 1990 roku w ramach Programu Rozwoju ONZ oblicza się tzw. **wskaźnik rozwoju społecznego,** jako miarę dobrobytu alternatywną w stosunku do produktu krajowego brutto (PKB).

HDI szereguje kraje według kombinacji **trzech wskaźników**:

1. **Skorygowanego realnego PKB na 1 mieszkańca** – poprzez skorygowany PKB. HDI wyznacza koszty utrzymania ludności w zakresie szczęśliwego życia, komunikowanie się między ludźmi oraz partycypację w życiu społeczności.
2. **Długowieczności** – poprzez wskaźnik długowieczności HDI wyznacza zakres długiego i szczęśliwego życia. Długowieczność jest określona jako przeciętna, oczekiwana długość życia w momencie urodzin.
3. **Poziomu wiedzy ludności** – HDI wyznacza poprzez wskaźnik wykształcenia posiadanie wiedzy, komunikację i uczestnictwo w życiu społeczności.

Wiedza jest mierzona poziomem wykształcenia obliczanym w $\frac{2}{3}$ odsetkiem dorosłej ludności mającej co najmniej wykształcenie podstawowe, a w $\frac{1}{3}$ przeciętną liczbę lat spędzonych w szkole.

Wskaźniki te wyrażone są w przedziale 0 – 1. Następnie, metodą dalszej agregacji, ustala się wartość ogólnego wskaźnika rozwoju społecznego zamykającego się podobnie w przedziale 0 – 1.

Kraje w rankingu podzielono na trzy kategorie:

do 0,500 – kraje zacofane, słabo rozwinięte;

od 0,501 do 0,800 – kraje średnio rozwinięte;

0,801 – 1 – kraje wysoko rozwinięte.

Cykl koniunkturalny

Słowo **koniunktura** pochodzi z astrologii i oznacza współwystępowanie różnych zjawisk. Koniunktura może być dobra lub zła.

Zjawisko ciągłych zmian poziomu aktywności gospodarczej nazywane jest **cyklem koniunkturalnym**, gdyż charakteryzuje je powtarzalność następujących po sobie okresów wzrostu i spadku, a co najmniej wahania wzrostu.

Agregatowe wielkości gospodarcze, takie jak: dochód narodowy, PNB, produkcja, zatrudnienie, inwestycje, nie rosną równomiernie, lecz tempo ich wzrostu charakteryzuje się periodycznymi wahaniami. W życiu gospodarczym każdego kraju okresy boomu przeplatają się z okresami załamań.

Roczne wskaźniki wzrostu realnego produktu narodowego brutto (PNB) kształtują się nieregularnie, wahając się wokół ogólnego trendu, który wyraża długoterminowy ruch aktywności gospodarczej (M. Żukowski, 2005).

Trend –przejaw długookresowej zmiany, w górę lub w dół, jakiejś zmiennej ekonomicznej, najczęściej PNB. Trend rozwojowy gospodarki zazwyczaj wyraża długookresowy wzrost podstawowych wielkości ekonomicznych danej gospodarki narodowej, co związane jest z rosnącymi zasobami podstawowych czynników wytwórczych (pracy, kapitału i ziemi) oraz z ich lepszym wykorzystaniem. Ponieważ są to zmiany długookresowe, przebieg trendu może być zaciemniony małymi nieregularnościami – wahaniami wskaźników działalności gospodarczej w górę lub w dół.

Takie zmiany w ramach ogólnego trendu określa się mianem cykli gospodarczych.

Cykl gospodarczy –powracające, lecz nieregularne wahnięcie poziomu ogólnej działalności gospodarczej lub zestaw krótkookresowych wahnięć w górę lub w dół w ramach głównego, długookresowego trendu.

Procesy gospodarcze przebiegają w sposób nierównomierny i cechują się pewną regularnością wahań. Wahania te mogą być różnego rodzaju:

- **wahania sezonowe** – powtarzające się rytmicznie w określonych porach każdego roku lub miesiąca;
- **wahania przypadkowe** – spowodowane przez zdarzenia losowe, takie jak: wojna, klęski żywiołowe, epidemie itp.;
- **wahania cykliczne** – periodyczne wahania wielkości makroekonomicznych, takich jak: dochód narodowy, inwestycje, produkcja, zatrudnienie, oznaczające zmiany poziomu aktywności gospodarczej i nazywane **cyklem koniunkturalnym** (W. Caban, 2001).

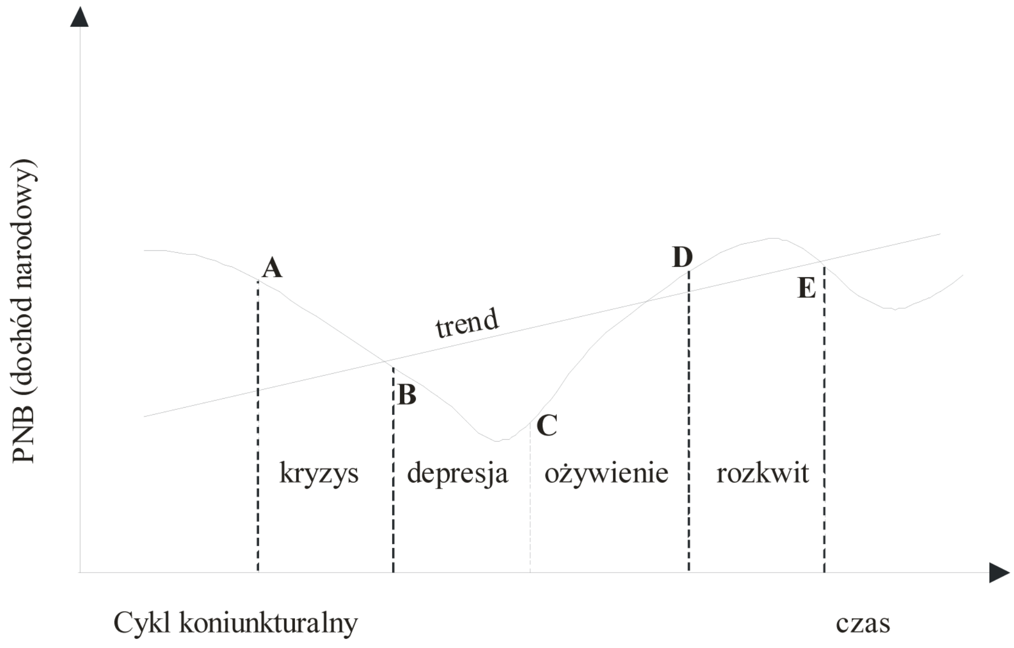
Cykle koniunkturalne nie przebiegają identycznie i, zależnie od długości, noszą nazwy od nazwisk badaczy, którzy wnieśli największy wkład w ich poznanie. Z punktu widzenia przeciętnej długości trwania cyklu wyróżniamy (W. Caban, 2001):

- **Cykl Kitchina**, **tzw. krótki**, trwający około 3,5 roku. Został on zaobserwowany i potwierdzony danymi statystycznymi, głównie w Stanach Zjednoczonych.
- **Cykl Juglara**, inaczej nazywany klasycznym lub typowym. Jego nazwa pochodzi od nazwiska francuskiego ekonomisty C. Juglara, który, badając załamania gospodarcze, zwrócił uwagę, że powtarzają się one z zadziwiającą regularnością co 8–10 lat.
- **Cykl Kondratiewa**, nazywany teorią długich fal, która została oparta na analizie ruchów cen i innych wskaźników ekonomicznych oraz wydarzeń politycznych w długim okresie. Długość cyklu Kondratiewa wynosi od 50 do 60 lat i występują w nim okresy wzrostu i spadku.

W tradycyjnym (neoklasycznym) ujęciu dokonuje się analizy **czterech faz cyklu koniunkturalnego**. Analiza przebiegu różnorodnych cykli gospodarczych w ciągu XIX i XX w. pozwala na wyodrębnienie pewnych wspólnych cech poszczególnych faz cyklu. Graficzna ilustracja przebiegu cyklu umożliwia charakterystykę jego poszczególnych faz. Wyróżnia się cztery fazy cyklu: kryzys, depresję, ożywienie, rozkwit. Przebieg tych faz jest wzajemnie uwarunkowany, co pozwala na uchwycenie pewnych prawidłowości rozwoju cyklicznego.

AB – kryzys
BC – depresja
} recesja gospodarcza

CD – ożywienie (poprawa)
DE – rozkwit (prosperita)
} ekspansja gospodarcza



Rysunek 20. Klasyczny cykl koniunkturalny

Źródło: M. Żukowski, Ekonomia. Zarys wykładu, Lublin 2005, s. 300

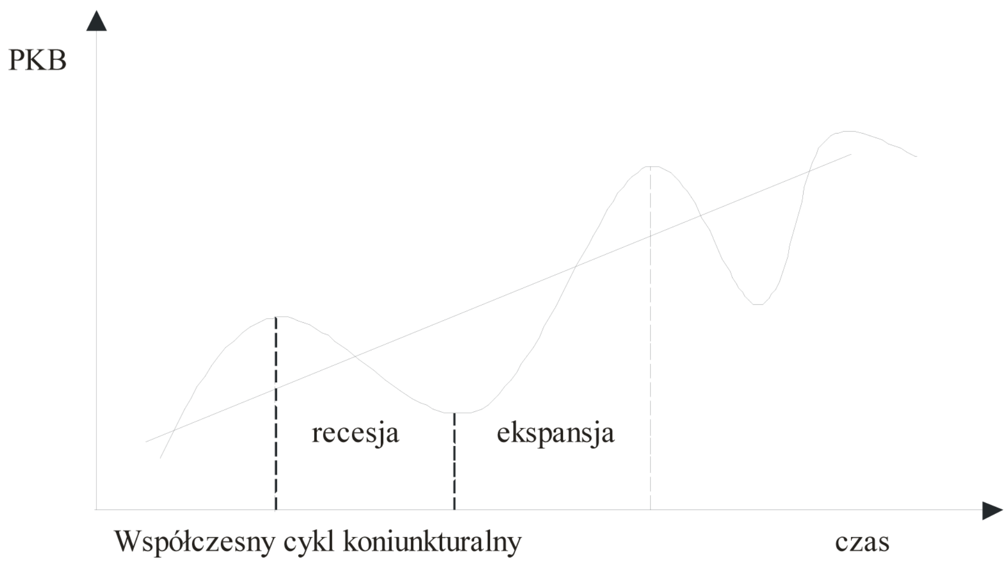
Kryzys oznacza załamanie gospodarcze, co wyraża się spadkiem poszczególnych wielkości gospodarczych. Szczególną cechą kryzysu jest względna nadprodukcja, tzn. nadmiar towarów w stosunku do efektywnego popytu. Spadają ceny, a w ślad za nimi stopa zysku, co pociąga za sobą decyzje o ograniczaniu produkcji. Pojawia się kolejna cecha szczególna kryzysu – rosnące bezrobocie. Oznaką zbliżającego się kryzysu jest zwykle spadek kursów papierów wartościowych na giełdzie. Punkt zwrotny w szczytowym okresie koniunktury zaczyna się od spadku zamówień na dobra inwestycyjne i wycofywanie się z wielu zawartych kontraktów budowlanych. Jest to wynik zahamowania wzrostu cen i spadku rentowności. Banki ograniczają kredyt inwestycyjny i żądają spłat istniejących zobowiązań. Rozpoczyna się ograniczenie wydatków inwestycyjnych. Gospodarka wchodzi w fazę depresji.

Dno kryzysu określa się mianem **depresji**. Charakteryzuje się ona zahamowaniem spadku produkcji, stabilizacją zatrudnienia i cen, zyskiem na niskim poziomie. Gospodarka osiąga równowagę na niskim poziomie. W tej fazie rentowne są tylko przedsiębiorstwa o najniższych kosztach produkcji. Stwarza to sprzyjające warunki dla postępu technicznego i wykorzystania w produkcji nowych urządzeń oraz technologii. Konieczność modernizacji zużytego aparatu wytwórczego i wyczerpywanie się zapasów stwarzają bodźce do inwestowania, które są głównymi przesłankami ożywienia.

Faza ożywienia jest okresem wychodzenia z depresji, co znajduje wyraz we wzroście produkcji. Zwiększający się popyt na dobra inwestycyjne prowadzi do koniunkturalnego wzrostu ich cen i poprawy rentowności produkcji u ich producentów. Zwiększa się zatrudnienie, a w wyniku tego rośnie popyt na środku spożycia. W gospodarce reprodukcja prosta przekształca się w reprodukcję rozszerzoną.

Rozkwit (boom) to ostatnia faza cyklu koniunkturalnego, w której wszystkie istotne wielkości gospodarcze: produkcja, zatrudnienie, płace, ceny, inwestycje, stopa zysku, osiągają poziom wyższy od poziomu sprzed kryzysu, co stanowi charakterystyczną cechę tej fazy. Najszybciej rosną ceny dóbr inwestycyjnych. Słabszą dynamikę wykazują ceny dóbr konsumpcyjnych oraz płace. Owa nierównomierność rozwoju narusza warunki niezbędne do utrzymania równowagi. Wzrost cen środków produkcji i płac oraz wykorzystywanie przestarzałych maszyn i urządzeń w celu sprostania rosnącemu popytowi oznacza ekspansję przy rosnących kosztach. Pod wpływem popytu na kredyt rośnie jego cena (stopa procentowa). Tym samym w fazie rozkwitu dojrzewają przesłanki kryzysu nadprodukcji.

Obecnie wyróżnia się dwie fazy cyklu: fazę spadku (recesji), która łączy fazę kryzysu i depresji, oraz fazę ekspansji, łączącą ożywienie i rozkwit.



Rysunek 21. Współczesny cykl koniunkturalny

Źródło: M. Żukowski, Ekonomia. Zarys wykładu, Lublin 2005, s. 300

Faza spadku (recesji) – jej objawem może być brak wzrostu lub tylko zwolnienie tempa wzrostu. Recesja to wynik przemian we współczesnej gospodarce, głównie jej monopolizacji i interwencjonizmu państwowego. Dotychczas fazom spadku towarzyszył spadek cen. Proces spadku cen poprzez zwiększenie popytu ułatwia samoczynne wejście w ożywienie.

Procesy monopolizacyjne umożliwiające administrowanie cenami doprowadzają do tego, że ceny wykazują tylko jeden kierunek zmian – w górę.

Faza ekspansji – oznacza poprawę koniunktury gospodarczej charakteryzują się stosunkowo szybkim wzrostem podstawowych wielkości makroekonomicznych.

Przyczyny cykliczności rozwoju

Na początku XIX w. opracowano teorię ogólnego przesycenia. W niektórych okresach handel towarami napotykał trudności, kupcy nie mogli sprzedać swoich towarów w takiej samej ilości po zwykle dotąd uzyskiwanych cenach. Ich zdaniem przyczyna leżała w nadprodukcji. Wynikające stąd trudności w produkcji powodowały bezrobocie.

Ekonomista francuski
(1767–1832)

Teoria przesycenia została zakwestionowana przez J. B. Saya Dowodził on, że w gospodarce wymiennej produkcja jednych dóbr na sprzedaż jest równoważona z zapotrzebowaniem na inne, ponieważ ich produkcja jest środkiem powiększania siły nabywczej.

Zgodnie z tzw. **prawem Saya** podaż tworzy swój własny popyt, tzn. tworzenie podaży produktów wywołuje taki sam popyt na inne dobra i usługi. Wzrost ilości wyprodukowanych dóbr powoduje, że ludzie zaczynają zgłaszać popyt na większą ilość innych dóbr.

Angielski ekonomista, twórca teorii interwencjonizmu państwowego w dziedzinie ekonomii i finansów państwowych
(1889–1946)

J. M. Keynes spowodował zwrot w ekonomicznym spojrzeniu na recesję i bezrobocie. **Prawo Keynesa** głosi:**„popyt tworzy własną podaż”,** tzn. popyt na dobra i usługi wywołuje równą sobie produkcję tych dóbr i usług. Teza ta sugeruje, że przyczyn cykliczności rozwoju należy szukać w czynnikach określających poziom dochodu narodowego. Czynnikiem decydującym o rozmiarach produkcji i dochodu jest efektywny popyt. Wydatki dzielą się na konsumpcyjne (C) i inwestycyjne (I). Wydatki konsumpcyjne są względnie stabilne przy danym poziomie dochodu, co jest zrozumiałe, gdyż ludzie mają skłonność do utrzymywania swojego poziomu konsumpcji. Głównej przyczyny zmian w rozmiarach efektywnego popytu, a więc wahań w poziomie produkcji, należy szukać w zmianach rozmiarów inwestycji. Faktycznie, w okresach kryzysowych zasadniczemu ograniczeniu ulegają przede wszystkim wydatki inwestycyjne, stając się przyczyną zmniejszenia rozmiarów efektywnego popytu, spadku rentowności i w konsekwencji ograniczenia produkcji.

Metody oddziaływania państwa na przebieg cyklu koniunkturalnego są określone przez cele tej interwencji. **Interwencjonizm antycykliczny** oznacza przeciwdziałanie bieżącym wahaniom koniunktury i poziomu zatrudnienia. Rząd może oddziaływać stabilizująco na gospodarkę za pośrednictwem (M. Żukowski, 2005):

- polityki fiskalnej;
- polityki pieniężnej.

W przypadku prowadzenia **ekspansywnej polityki fiskalnej** następuje zmniejszenie przychodów budżetu (np. jako skutek obniżki stopy podatkowej) oraz wzrost wydatków, w wyniku czego wzrasta zazwyczaj deficyt budżetowy. Tego rodzaju polityka prowadzi do wzrostu wydatków konsumpcyjnych i inwestycyjnych. Jej rezultatem jest zwiększenie produkcji i poziomu zatrudnienia.

W przypadku hamowania koniunktury rząd dąży do zwiększenia przychodów budżetu oraz ograniczenia wydatków, co przyczynia się do zmniejszenia konsumpcji i inwestycji. W rezultacie obniża się poziom zatrudnienia i produkcji oraz następuje zahamowanie wzrostu cen. Oznacz to prowadzenie **polityki restrykcyjnej**, trudniejszej do realizacji niż polityka fiskalna.

Odwrotnie jest przy stabilizacji za pośrednictwem **polityki pieniężnej**. Lepsze rezultaty daje oddziaływanie restrykcyjne (polityka drogiego pieniądza). Polega ona na zwiększaniu stopy rezerw obowiązkowych banków, stopy dyskontowej sprzedaży papierów wartościowych na otwartym rynku. Działania te zmniejszają podaż pieniądza i powodują wzrost stopy procentowej. Podwyżka stopy procentowej prowadzi do zmniejszenia kredytów, a następnie do zmniejszenia inwestycji, popytu globalnego, poziomu produkcji i zatrudnienia.

Natomiast w przypadku prowadzenia przez rząd **ekspansywnej polityki pieniężnej** (polityka taniego kredytu) zwiększają się możliwości udzielania przez banki kredytów. Jest to skutek obniżenia stopy rezerw obowiązkowych i stopy dyskontowej oraz skupowania przez bank centralny państwowych papierów wartościowych. Obniżenie stopy procentowej wywołuje ożywienie kredytowe, wzrost inwestycji i popytu globalnego, a następnie zwiększenie zatrudnienia i produkcji.

Polityka gospodarcza państwa wypracowała również tzw. **automatyczne stabilizatory koniunktury**. Są one wynikiem przemian w strukturze społeczno- gospodarczej państw najwyżej gospodarczo rozwiniętych. Do automatycznych stabilizatorów koniunktury zalicza się (M. Żukowski, 2005):

- **Wysokie zatrudnienie w szeroko rozumianych usługach**. Nie jest ono bezpośrednio związane z wahaniami produkcji materialnej, a dochody z działalności usługowej nie zmieniają się w rytmie zmian produkcji.
- **Aktywna polityka rynkowa oligopoli**. Dążą one do kształtowania wielkości i struktury popytu przez wprowadzanie na rynek nowych produktów, nowych modeli znanych towarów oraz prowadzą akcje reklamowo-promocyjne, co uniezależnia w pewnym stopniu popyt efektywny od wahań produktu społecznego.
- **Wydatki na badania naukowe i rozwojowe oraz postęp techniczny**. Są one ponoszone w dużej mierze przez rząd niezależnie od bieżącej koniunktury gospodarczej i w ten sposób wpływają stabilizująco na gospodarkę kraju.
- **Rozwój systemu ubezpieczeń społecznych**. Spadek dochodów z pracy w okresie załamania gospodarczego jest częściowo rekompensowany przez wzrost dochodów z ubezpieczenia społecznego (renty, zasiłki).
- **Progresywny system podatkowy**. Działa stabilizująco na popyt efektywny, gdyż hamuje zarówno wzrost, jak i spadek dochodów. Ważnymi automatycznymi stabilizatorami są: podatek dochodowy, podatek od wartości dodanej VAT, zasiłek dla bezrobotnych.

Automatyczne stabilizatory wspomagają działania państwa prowadzone w ramach: polityki pieniężnej, polityki fiskalnej oraz polityki cen i dochodów.

Budżet państwa

Budżet państwa jest planem finansowym zawierającym nowe zestawienie dochodów i wydatków państwa związanych z realizacją podstawowych zadań, na przykład z. zapewnieniem bezpieczeństwa i porządku publicznego. Budżet zatwierdzany jest przez władzę ustawodawczą. W Polsce ustala go parlament w formie ustawy budżetowej.

Budżet państwa składa się:

- **budżetu centralnego** – dochody i wydatki centralnych władz państwowych;
- **budżetów lokalnych** – budżety gmin, powiatów i województw;
- **ubezpieczeń społecznych**.

W Polsce projekt budżetu opracowuje minister finansów, a uchwala Rada Ministrów. Rząd jest zobowiązany przedstawić Sejmowi i Senatowi uchwalany prze siebie projekt najpóźniej 3 miesiące przed rozpoczęciem roku budżetowego. W szczególnych przypadkach, na przykład trudna sytuacja finansowa państwa, Rada Ministrów może ten termin przesunąć lub przedłożyć tak zwane prowizorium budżetowe. Posłowie i senatorowie mają prawo dokonywania zmian w projekcie rządowym, jeśli jednak zaproponują wzrost wydatków, muszą wskazać źródła ich sfinansowania. Uchwaloną przez Sejm i Senat ustawę budżetową marszałek Sejmu przedstawia Prezydentowi do podpisu. Prezydent w ciągu siedmiu dni podpisuje budżet lub zwraca się do Trybunału Konstytucyjnego z prośbą o ocenę jego zgodności z konstytucją. Jeżeli przed upływem czterech miesięcy od chwili złożenia projektu w Sejmie ustawa budżetowa nie zostanie przedstawiona do podpisu Prezydentowi, może on skrócić kadencję Sejmu i zarządzić nowe wybory (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

Funkcje budżetowe są związane z podstawowymi funkcjami państwa w gospodarce. Są to (J. Korba, Z. Smutek, 2012):

- **funkcja fiskalna** – polega na gromadzeniu dochodów, pochodzących głównie z różnego rodzaju podatków;
- **funkcja redystrybucyjna** – oznacza pożądany podział dochodu narodowego, uwzględniający między innymi potrzebę stworzenia obywatelom warunków bezpiecznego bytu socjalnego poprzez zmniejszanie nadmiernego zróżnicowania dochodów różnych grup społecznych;
- **funkcja stymulacyjna** – polega na dokonywaniu pożądanych zmian w gospodarce przy zastosowaniu środków budżetowych, np.: wzrost lub ograniczenie wydatków państwa, zmiana strukturalnych wydatków czy zmiana wysokości podatków.

Podczas konstrukcji budżetu przestrzega się określonych **zasad budżetowych**. Do najważniejszych z nich należą zasady (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011):

- **rocznego okresu budżetowego** – plan dochodów i wydatków budżetowych obejmuje okres jednego roku (w Polsce okres ten trwa od 1 stycznia do 31 grudnia);
- **jedności i zupełności** – budżet jest jedynym planem obejmującym wszystkie wydatki i dochody państwa, pozwala to na pełną orientację w całości gospodarki finansowej państwa;
- **jawności** – budżet powinien być przedstawiany opinii publicznej, dzięki temu wszystkie wydatki rządu są jawne i mogą być poddawane bieżącej kontroli;
- **szczegółowości** – polega na określeniu źródeł dochodów oraz celów wydatków, oznacza to, że w trakcie roku budżetowego nie można zmieniać dochodów oraz wydatków;
- **zrównoważenia budżetu** – oznacza pełne sfinansowanie wydatków państwa z jego dochodów, w Polsce oraz w większości krajów świata zasada ta jest od wielu lat nieprzestrzegana.

Podstawowe źródło dochodów budżetowych to podatki (około 90%). Pozostałe dochody to:

- dochody z własności publicznej;
- zysk Narodowego Banku Polskiego;
- opłaty administracyjne i celne;
- sprzedaż majątku państwowego.

Wydatki budżetu państwa można podzielić na dwie grupy:

1. **Prawnie zdeterminowane** (tzw. wydatki sztywne) – na ich pokrycie bezwzględnie musi być przeznaczona określona kwota w budżecie. Należą do nich m.in:
   - subwencje dla jednostek samorządu terytorialnego, które wynikają z przepisów dotyczących finansów samorządu gminnego, powiatowego i wojewódzkiego;
   - dotacje na ubezpieczenia społeczne;
   - wydatki związane z obsługą długu publicznego.
2. **Elastyczne**, które obejmują m.in.:
   - wynagrodzenia pracownicze;
   - wydatki bieżące jednostek budżetowych.

W układzie zadaniowym najważniejszą grupę wydatków stanowią środki przeznaczone na wypłatę świadczeń na ubezpieczenia społeczne oraz wydatki o charakterze socjalnym (obowiązkowe ubezpieczenia społeczne, pomoc społeczna).

Druga grupa wydatków dotyczy finansowania podstawowych zadań państwa, takich jak: utrzymanie sił zbrojnych, zapewnienie ładu i bezpieczeństwa publicznego, spłata zaciągniętych przez państwo długów i zobowiązań. **Trzecia grupa wydatków** to te wydatki inwestycyjne, które obejmują środki przeznaczone na ochronę zdrowia, kulturę, naukę i oświatę, kulturę fizyczną i sport. **Czwarta grupa wydatków** jest przeznaczona na cele gospodarcze. Obejmuje między innymi środki na infrastrukturę (drogi, szlaki kolejowe), ochronę środowiska, gospodarkę, rolnictwo oraz gospodarkę mieszkaniową. Od maja 2004 roku można również wyodrębnić wydatki związane z integracją Polski z Unią Europejską. Składa się na nie między innymi wpłata (coroczna składka) do budżetu Unii Europejskiej oraz finansowanie projektów z udziałem środków europejskich (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

Wydatki państwa, zwłaszcza na cele społeczne, stale wzrastają. Rządy wielu państw pod naciskiem społeczeństwa zwiększają nakłady na ochronę zdrowia, ubezpieczenia społeczne, oświatę, nie znajdując dodatkowych źródeł finansowania. W sytuacji, gdy wydatki państwa są mniejsze niż jego dochody, pojawia się **nadwyżka budżetowa**. Jednak częściej występuje nadwyżka wydatków nad wpływami, czyli **deficyt budżetowy** (dziura budżetowa). Zaciąganie przez państwo pożyczek na pokrycie deficytu budżetowego prowadzi do powstania **długu publicznego**. Zobowiązania państwa wobec podmiotów krajowych składają się na dług publiczny krajowy, a zagranicznych – na dług publiczny zagraniczny. Zgodnie ze standardami Unii Europejskiej dłub publiczny nie powinien przekraczać 60% PKB. Dodatkowo poważną część wydatków budżetowych stanowią wydatki państwa na obsługę długu, czyli spłatę odsetek i kredytów. Za niebezpieczny dla finansów państwa przyjmuje się deficyt budżetowy przekraczający 6% produktu krajowego brutto (PKB). Prawo obowiązujące w Unii Europejskiej nakazuje państwom członkowskim utrzymanie deficytu w granicach maksimum 3% PKB.

Krótkotrwały i niewielki deficyt budżetowy może być korzystny dla gospodarki. Poprzez zwiększenie popytu w gospodarce prowadzi on do wzrostu dochodu. Jednak przy długim okresie występowania deficytu pojawia się problem wysokich kosztów obsługi długu publicznego. Deficyt budżetowy, jak i dług publiczny, może stać się poważnym problemem gospodarczym i politycznym. Ich wpływ na funkcjonowanie gospodarki może przejawiać się m.in. (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011):

- **koniecznością spłaty odsetek od długu**, co zabiera rocznie sporą część budżetu i powoduje trudności w jego zrównoważeniu;
- **podniesieniem stóp procentowych** – pożyczając pieniądze, rząd wywołuje wzrost popytu na kredyt, a tym samym wzrost jego oprocentowania, co dotyczy zarówno kredytu dla firm, jak też osób prywatnych;
- **potrzebą podniesienia podatków** – w celu sfinansowania kosztów obsługi długu publicznego, co m.in. ogranicza konsumpcję, zniechęca do aktywności zawodowej i przedsiębiorczości, a w konsekwencji wpływa niekorzystnie na tempo rozwoju gospodarczego.

Wpływ długu publicznego i deficytu budżetowego może być **dodatni**, gdy deficytem budżetowym finansowano przedsięwzięcia zwiększające zdolności produkcyjne kraju i (lub) podnoszące jakość tych zdolności produkcyjnych.

Korzyści z tego odnoszą obecne i przyszłe pokolenia. Gdy deficytem budżetowym finansowano konsumpcję bieżącą i (lub) chybione inwestycje, koszty obsługi długu (odsetki i spłaty rat kapitałowych) obciążają obecne i przyszłe pokolenia. Ponadto **krajowy dług publiczny** wywołuje określone konsekwencje redystrybucyjne (W. Caban, 2001). Korzyści – w postaci relatywnie wysokich odsetek – odnoszą osoby zakupujące obligacje rządowe. Koszt obsługi długu obciąża wszystkich podatników, a w szczególności tych, którym ubóstwo nie pozwala na zakup obligacji rządowych. W konsekwencji krajowy dług publiczny powoduje redystrybucję zasobów w obrębie danego społeczeństwa. W przypadku **zagranicznego** długu publicznego następuje odpływ części zasobów z tytułu spłaty rat kapitałowych i odsetek z kraju pożyczkobiorcy do kraju kredytodawcy.

Inflacja

Określenie inflacja zapożyczone zostało z medycyny i oznacza nadęcie, wzdymanie (po łacinie *inflatio*), co w ekonomii oznacza nadmierny, w stosunku do potrzeb, wzrost ilości pieniądza w obiegu. Inflacja jest to proces przejawiający się we wzroście ilości pieniądza w obiegu, który wywołuje podwyższenie ogólnego poziomu cen.

D. Begg w swojej definicji inflacji kładzie nacisk na element czasu – „**inflacja** to wzrost ogólnego poziomu cen w pewnym okresie czasu" – a więc pewien trwający w czasie wzrost cen (M. Żukowski, 2005).

Termin *inflacja* w ekonomii pojawił się w XIX w., zjawisko to ma jednak znacznie dłuższą historię. Z problemem inflacji borykał się już starożytny Rzym, w którym inflacja doprowadziła do osłabienia, a potem upadku imperium.

Inflacja była zjawiskiem powszechnym także w Europie w XVI i XVII w., a jej początki związane były z wielkimi odkryciami geograficznymi (odkrycie Ameryki i Indii) oraz napływem do Europy pieniądza kruszcowego.

Przyczyny inflacji

Istnieją cztery podstawowe teorie przyczyn inflacji (M. Żukowski, 2005):

- ilościowa teoria pieniądza;
- teoria monetarystyczna (powiązana z teorią ilościową);
- teoria kosztowa;
- teoria popytowa (dochodowa).

Ilościowa teoria pieniądza – zwiększona podaż pieniądza wywołuje, poprzez wzrost dochodów poszczególnych uczestników rynku, wzrost globalnego popytu, co przy niezmienionej podaży dóbr i usług prowadzi do wzrostu cen. Wzrost ilości pieniądza w obiegu powoduje wzrost cen.

Monetaryści uważają podobnie, ale wskazują jednocześnie na przyczyny tego zjawiska. Ich zdaniem to instytucje są odpowiedzialne za kreowanie podaży pieniądza (rząd i bank centralny). Monetaryści uważają, że państwo nie jest w stanie precyzyjnie sterować podażą pieniądza, szczególnie gdy preferuje stosowanie środków polityki fiskalnej dla pobudzania koniunktury gospodarczej. Praktycznie oznaczać to musi zmniejszenie wydatków państwa oraz prowadzenie restrykcyjnej polityki pieniężnej przez bank centralny („politykę twardego pieniądza"). Zależność między podażą pieniądza a wzrostem cen można zobrazować za pomocą formuły nazywanej równaniem wymiany:

$$M \times V = P \times Y .$$

Gdzie:

M – ilość pieniądza w obiegu;

V – szybkość obiegu pieniądza;

P – przeciętny poziom cen;

Y – poziom dochodu narodowego w cenach stałych (realny dochód).

Globalna ilość pieniądza wydanego w ciągu roku przez nabywców (MxV) powinna się równać globalnej ilości pieniądza otrzymanego przez sprzedawców (PxY)**.**

Po stronie globalnych wydatków:

M – to podaż pieniądza dostępną w ciągu roku, tj. masę przeciętnej ilości gotówki i przeciętnego stanu otwartych w bankach depozytów.

V – to szybkość obiegu, czyli informacja o tym, ile razy w ciągu roku jednostka pieniężna jest kierowana na zakupy dóbr i usług wchodzących w skład produktu narodowego netto.

Kosztowna teoria inflacji – pojawiła się w latach 50-tych XX w. Jako przyczynę wzrostu cen w tym okresie podawano wzrost kosztów produkcji wywołany wzrostem cen. Wzrost cen dokonywał się w wyniku działania coraz silniejszych związków zawodowych i wzrostu cen monopolistów (np. ropy naftowej). Teoria ta akcentuje znaczenie rosnących kosztów produkcji, wymuszających wzrost ogólnego poziomu cen. Wzrost kosztów produkcji może wynikać z różnorodnych przesłanek: wzrost płac związany z działalnością związków zawodowych, wzrost cen narzuconych przez organizacje monopolistyczne, dewaluacja waluty krajowej powodująca wzrost cen importowanych surowców i półproduktów, wzrost stawek podatku od obrotu, wzrost stopy procentowej. Wskazane przyczyny uruchamiają spiralę inflacji: wzrost cen zwiększa koszty utrzymania oraz nasilają się żądania płacowe.

Inflacja popytowa (dochodowa) – ma miejsce wtedy, gdy w gospodarce pojawia się nadwyżka popytu pieniężnego. Źródła tego typu inflacji to: zwiększone wydatki publiczne, inwestycje, wzrost wartości eksportu i dodatniego salda bilansu handlowego.

Zwalczanie przyczyn inflacji dochodowej (polityka inflacyjna) powinno być domeną państwa (częściowe kontrole cen, ograniczanie wydatków państwa). Walka z inflacją w tej sytuacji powinna polegać na łagodzeniu konfliktów na tle podziału dochodu narodowego, przy czym szczególna rola przypada tu państwu. Państwo zatem powinno kontrolować tempo wzrostu wynagrodzeń, zysków, a także częściowo cen, poprzez odpowiednią politykę fiskalną i pieniężną.

Pomiar inflacji

Znajomość poziomu inflacji ma ogromne znaczenie, gdyż znajomość skali zjawiska może być podstawą na przykład indeksacji płac, ustalania oprocentowania kredytów, depozytów bankowych itp., stąd potrzeba jej pomiaru.

Ogólny poziom cen nie jest ceną jakiegoś jednego dobra, ale jest konstrukcją statystyczną, która przedstawia średnią cen określonego zestawu towarów (tzw. koszyka dóbr) w jakimś czasie. Powszechnie stosowanym miernikiem inflacji są wskaźniki zmiany cen dóbr określonego rodzaju: konsumpcyjnych, produkcyjnych lub innego zestawu dóbr.

Podstawowym miernikiem inflacji jest wskaźnik cen dóbr konsumpcyjnych **(CPI)** i wskaźnik cen dóbr produkcyjnych **(PPI)**. W skład koszyka dóbr konsumpcyjnych kształtujących wskaźnik cen, w Polsce liczonego przez GUS, wchodzą dobra, które pochłaniają istotną część wydatków gospodarstw domowych (mają duże znaczenie dla wysokości kosztów utrzymania).

Obok tego do pomiaru inflacji stosuje się korektor **(deflator)** PKB, który jest wskaźnikiem cen dla całego Produktu Krajowego Brutto. W statystycznych analizach procesów inflacyjnych powszechnie wykorzystuje się wskaźnik stopy inflacji, czyli procentowy wzrost ogólnego poziomu cen w ciągu roku:

1) porównując ogólny poziom cen z roku bieżącego t_1 z analogicznym poziomem cen w roku t_0, ale bierze się pod uwagę wskaźniki przeciętne dla każdego z 12 miesięcy roku poprzedniego.

2) porównując ogólny poziom cen z grudnia roku bieżącego t_1 z ogólnym poziomem cen z grudnia roku poprzedniego t_0 (M. Żukowski, 2005).

W zależności od przejawów i skutków wyróżniamy wiele **odmian inflacji** (M. Żukowski, 2005):

a) **otwartą**, gdy ceny rosną w sposób nieskrępowany;

b) **tłumioną**, gdy wzrost cen ograniczony (tłumiony) jest przez administracyjne ograniczenia ze strony rządu;

c) **shortageflation** – występuje w gospodarkach okresu przejściowego (od gospodarki planowej do rynkowej), gdy równocześnie ma miejsce wzrost ogólnego poziomu cen (typowego dla gospodarki rynkowej) i niedobory (braki) dóbr i usług (typowe dla gospodarki centralnie planowanej);

d) **cywilizowaną** – ma miejsce wtedy, gdy przy normalnie funkcjonującym rynku dóbr oraz gospodarki jako całości, rosną ceny, ale stopa inflacji nie jest zbyt wysoka (poniżej 100%);

e) **barbarzyńską** –dezorganizuje życie gospodarcze kraju i zakłóca sprawny przebieg procesu gospodarowania;

f) **klasyczną** – to sytuacja, gdy w gospodarce mimo wzrostu ogólnego poziomu cen dokonuje się wzrost gospodarczy;

g) **stagflację** – to sytuacja, gdy w warunkach wysokiej inflacji gospodarka doświadcza stagnacji gospodarczej (nie ma wzrostu produkcji, zatrudnienia, często w konsekwencji zwiększa się bezrobocie);

h) **slumpflację** – to występowanie łącznie dwu procesów: inflacji i recesji, tj. spadku produkcji i zatrudnienia;

i) **sekularną** – występuje jako trwałe zjawisko niepoddające się eliminacji w długim czasie, co oznacza, że rząd nie radzi sobie z określeniem i usunięciem przyczyn inflacji w gospodarce

j) **okresową** – występuje w krótkim czasie, a po ustąpieniu określonych przyczyn ceny już nie wzrastają;

k) **kontrolowaną** – może być administrowaną przez rząd (państwo), wobec tego sterowanie inflacją przez rząd może pozwolić wykorzystywać pozytywne oddziaływania inflacji, a eliminować negatywne jej reperkusje;

l) **żywiołową** – nie poddaje się regulacji rządu (np. hiperinflacja).

Inflacja oczekiwana to taka, której uczestnicy rynku spodziewają się na początku analizowanego okresu i przed którą będą się asekurować, wkalkulowując ją w ceny dóbr i usług, w tym płace, stopy procentowe i inne koszty działalności.

Inflacja rzeczywista to wzrost ogólnego poziomu cen, stwierdzony po upływie pewnego okresu, najczęściej roku, a jej miarą jest na przykład. deflektor. Często jest powiększana przez oczekiwania inflacyjne.

Inflacja nieoczekiwana pojawia się niespodziewanie i jest zaskoczeniem dla uczestników rynku – nie towarzyszą jej oczekiwania inflacyjne.

Inflacja zrównoważona – oznacza, że ceny większości dóbr rosną proporcjonalnie, ale nie zmieniają się relacje cenowe, w konsekwencji ludzie i instytucje dostosowują się do inflacji. Nie jest ona dla nich zaskoczeniem ani zjawiskiem szkodliwym i jest przez nich akceptowana (antycypowana).

Inflacja i jej przyczyny

Braki równowagi między popytem a podażą nazywamy stanem nierówności gospodarczej. Towarzyszy jej zjawisko inflacji (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

- **Inflacja** – wzrost cen połączony ze spadkiem wartości pieniądza.

Proces wzrostu przeciętnego poziomu cen

- Proces wzrostu cen oznacza, że wzrost cen nie ma charakteru jednoznacznego, lecz jest względnie trwały i utrzymuje się w dłuższym okresie.
- Nie chodzi o wzrost cen poszczególnych dóbr czy usług, ale o przeciętny poziom cen. Ceny wykazują ogólny trend wzrostowy.

Stopa inflacji – jej poziom można wyliczyć według wzoru:

$$\textit{Stopa inflacji} = \frac{\textit{cena obecna - cena poprzednia}}{\textit{cena poprzednia}} \textit{ x 100\%}$$

Nie powoduje większych zakłóceń, jeśli utrzymuje się na poziomie 1–3%.

Ze względu na wysokość inflacji wyróżnia się:

- inflację pełzającą – poniżej 1% miesięcznie, czyli od 1–9% w skali roku;
- inflację galopującą – od 10–15% miesięcznie;
- megainflację – od 15–50% miesięcznie;
- hiperinflację – powyżej 50% miesięcznie.

Przyczyny powstawania zjawisk inflacyjnych:

1. **Nadmierna emisja pieniądza** (inflacja popytowa) – **wzrost podaży pieniądza ponad potrzeby gospodarki,** podaż pieniędzy na rynku przekracza wartość towarów i usług, w efekcie popyt znacznie przewyższa podaż. Ceny rosną a wartość pieniądza spada.
2. **Brak konkurencji** – działający na rynku monopoliści, niezagrożeni konkurencją, mogą podnosić ceny swoich towarów i usług.
3. **Nadmierne wydatki z budżetu państwa** – prowadzące do deficytu budżetowego i długu publicznego.
4. **Wzrost cen surowców** (inflacja kosztowa) – duży wzrost cen surowców, zwłaszcza energetycznych (ropa naftowa, gaz ziemny), powoduje podrożenie kosztów produkcji, a w rezultacie podniesienie cen towarów i usług.
5. **Dewaluacja waluty krajowej** – która powoduje wzrost kosztów produkcji i cen będących skutkiem podrożenia (przez efekt przeliczeniowy) importowanych surowców i materiałów.
6. **Nadmierne zwiększenie obciążeń podatkowych** – podatki wliczane w ceny powodują ich nadmierny wzrost.
7. **Zbyt tanie kredyty** – zakłócające równowagę na rynku pieniężnym. Większość przedsiębiorstw finansuje swoje inwestycje, zaciągając kredyty, których koszty wliczone są następnie w ceny towarów i usług. Zbyt duży poziom inwestycji może w konsekwencji doprowadzić do gwałtownego wzrostu cen.
8. **Wzrost poziomu płac powodujący zjawisko spirali inflacyjnej.** Wzrost płac, który nie ma związku ze wzrostem wydajności pracy powoduje napływ na rynek pieniędzy, ale bez równoczesnego wzrostu podaży towarów i usług. Pracodawcy pod presją załóg lub nacisków związków zawodowych na wzrost płac podnoszą wynagrodzenia wyprzedzający wzrost cen.

Zjawisko iluzji inflacyjnej – ludzie ulegają iluzji inflacyjnej wtedy, gdy nie rozróżniają zmian realnych od nominalnych. W rzeczywistości zmiany poziomu ich dochodów zależą od wielkości realnych, a nie nominalnych. Gdyby wszystkie zmienne nominalne rosły w tym samym tempie, siła nabywcza konsumentów nie ulegałaby zmianie, gdyż w zamian za zmieniające się dochody mogliby nabywać te same (fizycznie) wielkości dóbr. Jeżeli konsumenci uwzględniają tylko nominalne zmiany swoich wydatków, a nie biorą pod uwagę faktu, iż ich nominalne dochody także wzrosły, ulegają iluzji inflacyjnej. Informacje o rzeczywistej zmianie sytuacji nabywców dają dopiero dochody realne, a więc dochody nominalne odniesione do cen.

Deflacja – zjawisko przeciwne inflacji (inflacja ujemna), czyli spadek poziomu cen w gospodarce przy równoczesnym wzroście wartości pieniądza. Zazwyczaj deflacja związana jest z fazą kryzysu cyklu koniunkturalnego i towarzyszy spadkowi produkcji i zatrudnienia (Hongkong 1999 r. ujemna inflacja – 4%, Japonia 1999 r. – 0,8%).

Określając skutki inflacji rzutujące na funkcjonowanie całej gospodarki, należy stwierdzić (M. Żukowski, 2005):

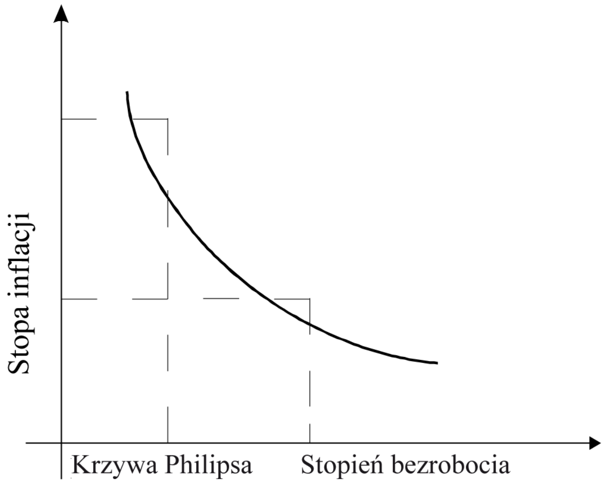
- **spadek siły nabywczej pieniądza** – to podstawowy i najbardziej widoczny negatywny skutek inflacji, w jego efekcie powstaje dążenie do zamiany gotówki (tracącej wartość w efekcie inflacji) na aktywa o stabilnej wartości, negatywne skutki takich zabiegów to strata czasu koniecznego na zabezpieczenie majątku i dochodów, „ucieczka od pieniądza" i przechodzenia na wymianę naturalną, spadek poziomu inwestycji rzeczowych i finansowych, a w ostatecznym rozrachunku – spadek produkcji i wzrost bezrobocia;
- **spadek znaczenia i skuteczności stóp procentowych** jako instrumentu oddziaływania na rynek pieniężny, spadek poziomu depozytów bankowych w efekcie zakłóceń na rynku pieniężnym;
- **przypadkowa i niekontrolowana redystrybucja dochodów i majątku** – umowy zawierane są w kwotach nominalnych, wraz ze wzrostem cen maleje w ujęciu realnym wielkość zadłużenia, stąd wierzyciele tracą, natomiast na inflacji zyskują dłużnicy, następuje transfer od pożyczkodawców do pożyczkobiorców;
- **koszty podatkowe** – ponoszone przez ludzi, gdy dochody nominalne rosną, (podczas, gdy realne utrzymują się na stałym poziomie lub obniżają się), a rząd nie podwyższa (nie indeksuje) progów podatkowych, przy których faktyczna stopa opodatkowania jest coraz wyższa;
- **szum informacyjny** – zakłócenia w przepływie informacji pomiędzy uczestnikami rynku utrudniające podejmowanie racjonalnych decyzji w procesie gospodarowania, ceny nie zmieniają się w jednakowej proporcji, a nawet nie w jednakowym kierunku, trudno więc określić, czy te zmiany cen są wywołane czynnikami „inflacyjnymi", czy też są następstwem zmian istotnych warunków gospodarowania, takich jak zmiany technologiczne czy zmiana preferencji konsumentów;
- silne procesy inflacyjne zwiększają **niepewność w zakresie przewidywań zmian cen** i w konsekwencji osłabia się aktywność inwestorów i obniża się produkcja;
- **obniża się społeczna efektywność procesu gospodarowania,** pojawiają się dodatkowe koszty w tym procesie, takie jak: koszty drukowania nowych cenników w związku ze wzrostem cen, przeróbek automatów telefonicznych, liczników parkingowych itp.

Sposoby przeciwdziałania inflacji (polityka antyinflacyjna):

- zamrożenie cen i redystrybucja dóbr (np. system kartkowy w Polsce w latach osiemdziesiątych);
- ograniczenie deficytu budżetowego,. prywatyzując na przykład przedsiębiorstwa państwowe lub wprowadzając odpowiednie regulacje prawne;
- obniżenie kosztów produkcji poprzez ograniczenie wzrostu płac oraz zmniejszenie obciążeń podatkowych, ceł i akcyz na surowce;
- podniesienie stóp procentowych przez bank centralny – podraża kredyty, przez co ich atrakcyjność spada, wzrasta natomiast zainteresowanie oszczędzaniem, w efekcie zmniejsza się ilość pieniędzy na rynku, powodując zahamowanie wzrostu cen.

Zależność między inflacją a bezrobociem wyraża **krzywa Philipsa**. Jest to zależność odwrotna, wyższej stopie inflacji towarzyszy więc niższa stopa bezrobocia i odwrotnie.

Okresy, w których gospodarkę cechuje wysoka stopa bezrobocia i inflacji oraz niski poziom aktywności gospodarczej nazywa się stagflacją (zjawisko obserwowane w latach 70-tych XX w.).



Rysunek 22. Krzywa Philipsa

Źródło: M. Żukowski, Ekonomia. Zarys wykładu, Lublin 2005, s. 266

Wskaźniki cen – za miarę inflacji przyjmuje się najczęściej wskaźnik cen. Jego konstrukcja jest bardzo złożona i opiera się na tzw. koszyku dóbr i usług konsumpcyjnych o największym udziale w wydatkach społeczeństwa. W polskim koszyku znalazło się 260 grup towarowych, obejmujących 1470 dóbr i usług.

Walka z inflacją wyrażająca się w ograniczaniu popytu globalnego (przy pomocy wybranych instrumentów) wywołuje skutki uboczne, którymi są recesja i bezrobocie.

Coraz większego znaczenia nabierają antyinflacyjne zabezpieczenia instytucjonalne. Polegają one na (M. Żukowski, 2005):

- ustawowym ograniczaniu możliwości wymuszania przez rząd na władzach banku centralnego zwiększania nominalnej podaży pieniądza;
- prawnym uniezależnianiu banku centralnego od rządu i parlamentu;
- zobowiązaniu banku centralnego do dbania o stabilność cen (stabilność waluty krajowej w Polsce), a minimalizowanie troski banku centralnego o rozwój gospodarczy i ograniczanie bezrobocia, co eliminuje część przyczyn inflacji;
- publiczne ogłaszanie przewidywanego poziomu inflacji w celu antycypowania pożądanego (niskiego) poziomu inflacji i kształtowania oczekiwań inflacyjnych.

4.5. Instytucje gospodarki rynkowej

Rola pieniądza w gospodarce

Z gospodarką rynkową nierozerwalnie związany jest pieniądz. **Za pieniądz** w gospodarce uważa się powszechnie akceptowany środek wymienny, w którym wyraża się wartość dóbr oraz gromadzi i przechowuje oszczędności (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

Analiza istoty pieniądza jest punktem wyjścia do zrozumienia funkcjonowania systemu finansowego w gospodarce rynkowej. System finansowy obejmuje: system bankowy, rynek kapitałowy, rynek dewizowy, budżet centralny i budżety terenowe. Za pośrednictwem systemu finansowego prowadzona jest polityka pieniężna, dochodowa i fiskalna.

W procesie rozwoju gospodarki pieniądz początkowo występował w formie towaru. Początkowo stosowano handel wymienny, czyli towar za towar. Obecnie taka forma nosi nazwę barteru. Pojawienie się towaru-pieniądza jako powszechnego ekwiwalentu usprawniło proces wymiany i przyśpieszyło przekształcenie się wymiany bezpośredniej w wymianę pośrednią, w której produkty sprzedawane są na rynku w zamian za ogólny ekwiwalent (M. Żukowski, 2005).

Funkcję powszechnego ekwiwalentu spełniały różne towary: bydło, metale, zboże, płaty płótna, miód, itp. Wady większości ekwiwalentów, takie jak: niejednorodność, duża waga czy niepodzielność, spowodowały, że funkcję ogólnego ekwiwalentu zaczęły pełnić kruszce szlachetne (srebro, złoto). Posiadały one bowiem ważne cechy, jak: duża wartość, podzielność, trwałość. Z chwilą, gdy kruszce wyparły z wymiany mniej wygodne ekwiwalenty, stały się pieniądzem.

Pierwszą formą pieniądza były sztaby (kruszce) –najczęściej grudki mało dostępnych metali (np. srebra i złota), którymi płacono za towary. W Polsce taką funkcję pełnił także bursztyn. Kruszce były odporne na działanie wody i powietrza, co gwarantowało ich trwałość. Miały niewielką wagę, a dużą wartość. Trudności związane z ich ważeniem, dzieleniem itp. spowodowały, że zaczęto wprowadzać inną formę pieniądza, a mianowicie monety (pieniądz kruszcowy) o określonej wadze i zawartości kruszcu. Wybijanie monet ze złota w miarę upływu czasu zostało zmonopolizowane przez państwo. Władza państwowa określała tzw. parytet monetarny, czyli ilość złota, która stanowiła jednostkę pieniężną. To one stały się pierwotną formą współczesnego pieniądza. Ze względu na niewielką wagę i trwałość szybko wyparły inne sposoby płatności i stały się podstawową formą rozliczeń przy wymianie towarów.

Pieniądz papierowy (banknoty). Początkowo był wprowadzany przez instytucje prywatne, a następnie państwowe, jako pokwitowanie za złożony w banku pieniądz kruszcowy. Banknot stanowił papierowe zapewnienie dla banku, świadczące o tym, że pokwitowanie jest wymienialne na kruszec, najczęściej złoto lub srebro. Zmiany w systemach pieniężnych spowodowały zwiększenie roli dewiz (dolary, funty), które obok złota stały się podstawą rezerw, jednocześnie wprowadzono możliwość wymiany pieniądza papierowego na dewizy zamiast na złoto. W praktyce płatności między krajami realizowane przy użyciu dewiz stały się łatwiejsze, szybsze, tańsze niż przekazywania złota. Relacje wymienne różnych walut nazywamy kursami walut (M. Żukowski, 2005).

Współczesny pieniądz funkcjonuje w postaci banknotów papierowych niewymienialnych na kruszec, monet zdawkowych (bilonu) czy też elektronicznego zapisu wartości (pieniądz elektroniczny).

Powstanie i upowszechnienie się w gospodarce różnego typu instrumentów finansowych spowodowało, że funkcje pieniądza mogą pełnić inne środki znajdujące się w gestii podmiotów gospodarczych. Są one substytutami pieniądza, np. weksle, czeki, obligacje, akcje.

Funkcje i cechy pieniądza

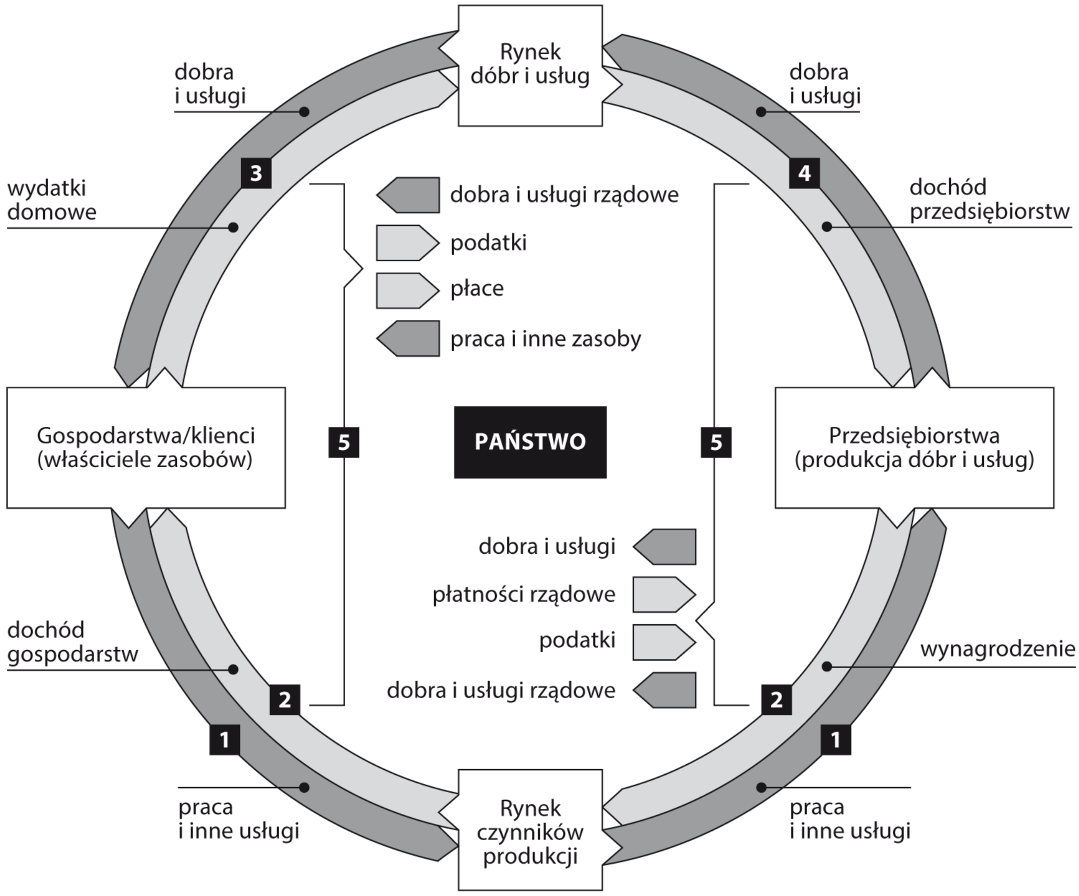
Tradycyjnie wymienia się pięć funkcji pieniądza jako: miernika wartości, środka cyrkulacji, środka płatniczego, środka gromadzenia wartości i pieniądza światowego (M. Żukowski, 2005).

Funkcja pieniądza **jako miernika wartości** pozwala sprowadzić wartość wszystkich towarów do jednej porównywalnej podstawy. Porównujemy wartość towaru z wartością jednostki pieniężnej i w ostatecznym rachunku otrzymujemy cenę. Pieniądz jako miernik wartości służy więc do porównywania towarów. Wartość towaru jest bowiem przedstawiana w cenie wyrażonej w pieniądzu. Jednostka pieniądza papierowego posiada odpowiednią wyrażającą się w wartości towarów siłą nabywczą.

Wartość pieniądza nie zależy wyłącznie od jego nominału, ale także od **jego siły nabywczej,** określonej ilością dóbr, które za niego można kupić.

Jako środek wymiany (cyrkulacji) pieniądz występuje w charakterze pośrednika umożliwiającego sprawny przebieg wymiany towarów i usług. Ta funkcja spowodowała wykształcenie się transakcji kupna-sprzedaży. W tej funkcji pieniądz występuje krótko, tylko w momencie zapłaty, później następuje zmiana właściciela.

Pieniądz jako środek wymiany znajduje się cały czas w obiegu między poszczególnymi podmiotami. Strumień pieniądza w gospodarce płynie w przeciwną stronę niż strumień dóbr i usług.



1 Gospodarstwa domowe dostarczają przedsiębiorstwom czynników produkcji, wykorzystywanych do produkcji dóbr i świadczenia usług.

2 Za dostarczone przedsiębiorstwom czynniki produkcji gospodarstwa domowe otrzymują zapłatę (w formie płac, zysków lub czynszów), która staje się ich dochodem.

3 Gospodarstwa przeznaczają uzyskane dochody na zakup dóbr i usług dostarczanych przez przedsiębiorstwa.

4 Pieniądze ze sprzedaży dóbr i usług trafiają jako przychód do przedsiębiorstw.

5 Z podatków oraz innych opłat otrzymanych od gospodarstw domowych i przedsiębiorstw państwo finansuje tzw. dobra i usługi publiczne oraz ponosi wydatki na emerytury, renty i inne świadczenia socjalne. Przesyła także płatności za usługi dostarczane przez członków gospodarstw domowych zatrudnionych np. w instytucjach publicznych oraz za zakupy rządowe dokonywane w przedsiębiorstwach.

Schemat 14. Obieg pieniądza w gospodarce

Źródło: Z. Makieła, T. Rachwał, Krok w przedsiębiorczość, Warszawa 2012, s. 66

Zakłócenia mogą powstać w sytuacji, gdy występuje brak stabilności siły nabywczej pieniądza. Utrata zaufania do pieniądza może spowodować powrót do wymiany barterowej (towar za towar) lub tzw. substytucji walutowej, co oznacza, że w transakcjach wymiennych obok pieniądza krajowego s używa się stabilnych walut zagranicznych (M. Żukowski, 2005).

Nadmierna ilość pieniądza w obiegu prowadzi do wzrostu popytu na dobra i usługi do poziomu przewyższającego możliwości jego zaspokojenia. W efekcie następuje wzrost ogólnego poziomu cen **(inflacja)**.

Transakcje kupna-sprzedaży w przeważającej liczbie przypadków dokonywane są bez użycia pieniądza. Towary mogą być nabywane na kredyt, płaci się za nie po upływie określonego czasu pieniędzmi, które pełnią funkcję środka płatniczego. Umożliwiają więc zapłatę za dobro kupione na kredyt lub za towar w późniejszym terminie.

Regulacja zobowiązań odbiorcy w stosunku do dostawcy oznacza, że pieniądz zwalnia zgodnie z normami prawa i zaciągniętych zobowiązań płatniczych.

W pieniądzu gromadzone i przekazywane są oszczędności – pełni on wtedy funkcję środka gromadzenia wartości – bogactwa (tezauryzacji). Przechowywanie bogactwa w innej postaci niż pieniądze ma uzasadnienie w przypadku spadku wartości pieniądza w czasie. Takie zjawisko nosi nazwę **deprecjacji pieniądza** i występuje powszechnie w gospodarkach światowych.

Możliwość inwestowania pieniędzy można umownie podzielić na giełdowe i pozagiełdowe. Najbardziej cenione formy pozagiełdowe to: złoto, srebro, platyna, kosztowności, nieruchomości. Formy giełdowe to lokowanie w papiery wartościowe: akcje i obligacje.

Wymienione przykładowo kierunki inwestowania pieniądza nie wyczerpują wszystkich możliwości. Zależą one od kraju, zwyczajów, istnienia instytucji inwestujących, programów, na przykład emerytalnych.

Realizację tej funkcji pieniądza może cechować duży stopień niepewności co do oczekiwanych korzyści. Realizację tej funkcji pieniądza może cechować duży stopień niepewności co do oczekiwanych korzyści, np.: gromadzenie wartości w postaci depozytów zagrożone jest procesami inflacyjnymi i spadkom siły nabywczej pieniądza, lokaty w papierach wartościowych zależą od rentowności firm emitujących akcje czy obligacje, nieruchomości charakteryzuje trudność w szybkiej zamianie na pieniądz.

Funkcją pieniądza jest także funkcja **pieniądza światowego**. Obecnie nie wszystkie pieniądze krajowe występują w charakterze pieniądza światowego, tzn. pieniądza, który wszystkie wskazane wyżej funkcje realizują na rynku światowym. Funkcje te pełnią waluty kluczowe, np.: dolar, funt, euro.

Pieniądze, aby mogły pełnić swoje funkcje, muszą być:

- **powszechnie akceptowane** – można zamieniać je na towary;
- **poręczne** – forma powinna umożliwiać łatwe ich przenoszenie i przechowywanie;
- **dobrze zabezpieczone przed próbami fałszowania** – powoduje to większe zaufanie do danej waluty;
- **podzielne na mniejsze jednostki** – ułatwia to dokonywanie zarówno małych, jak i dużych transakcji;
- **rozpoznawalne** – poszczególne nominały powinny różnić się od siebie, na przykład rozmiarem lub kolorem. Obecnie stosuje się wiele zabezpieczeń przed fałszowaniem pieniędzy, między innymi: odpowiedni rodzaj papieru, wypukły druk, znaki wodne oraz elementy widoczne jedynie w świetle ultrafioletowym (J. Korba, Z. Smutek, 2012).

Różne możliwości wykorzystania pieniądza stanowią problem jego związku z czasem. Generalną zasadą jest, że im później dana kwota zostanie wykorzystana, tym jej realne wartość jest mniejsza (M. Żukowski, 2005). Utrata wartości pieniądza zależy więc od czasu i tempa utraty wartości.

Zasady funkcjonowania banków

Bank jest osobą prawną utworzoną zgodnie z przepisami ustaw, działającą na podstawie zezwoleń uprawniających do wykonywania czynności bankowych obciążających ryzykiem środki powierzone pod jakimkolwiek tytułem zwrotnym[31].

System bankowy obejmuje ogół instytucji oraz norm prawnych określających organizację, zakres i zasady działania banków, w tym ich wzajemne powiązania oraz stosunki z otoczeniem.

Podstawą do określenia systemu bankowego stanowi istnienie wielopoziomowego układu, złożonego z banku centralnego oraz banków uniwersalnych i specjalistycznych, a także pozostałych instytucji oddziałujących na strukturę i funkcjonowanie banków.

Zróżnicowanie systemu bankowego stanowi bezpośrednią konsekwencję przyjęcia określonego modelu – **zorientowanego na banki (model niemiecko-japoński)** lub **zorientowanego na rynki finansowe (model anglosaski)**.

31 Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. Prawo bankowe, Dz. U. z 2012 r. poz. 1376, ze zm.)

Model niemiecko-japoński zakłada, że podstawową rolę w sektorze finansowym odgrywają banki o charakterze uniwersalnym. Uniwersalizm oznacza przy tym brak ograniczeń w działalności bankowej, obejmującej zarówno tradycyjne transakcje depozytowo-kredytowe, jak i transakcje z obszaru rynku kapitałowego, czyli lokowanie i pozyskiwanie środków, m.in. na rynku papierów wartościowych. Bank uniwersalny dysponuje również swobodą realizowania swoich celów w zakresie ilościowym, terytorialnym, branżowym, cenowym i wskazywania docelowych grup klientów. Wykonuje więc wszystkie czynności dozwolone przez prawo bankowe.

W modelu anglosaskim banki oferują przede wszystkim operacje depozytowo-kredytowe, inwestycyjne, rozliczeniowe i płatnicze. Istotną rolę odgrywają zatem różnego rodzaju fundusze inwestycyjne, tworzone m.in. przez korporacje przemysłowe, oraz banki specjalne (inwestycyjne, komunalne, hipoteczne).

Model polskiego rynku bankowego bliższy jest modelowi z dominującą rolą banków **uniwersalnych** niż modelowi z dominującą rolą giełdy i banków inwestycyjnych.

Struktura systemu bankowego w Polsce ma charakter dwupoziomowy: Narodowy Bank Polski jako bank emisyjny, centralna instytucja kredytowa, rozliczeniowa i centralna bankowa instytucja dewizowa oraz banki operacyjne i instytucje wspierające działalność banków (Komisja Nadzoru Finansowego, Bankowy Fundusz Gwarancyjny, Krajowa Izba Rozliczeniowa, Związek Banków Polskich).

Do podstawowych funkcji banków należy (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011)**:**

- tworzenie pieniądza przez bank emisyjny (w Polsce prawo emisji pieniądza ma wyłącznie bank centralny);
- tworzenie pieniądza jako środka płatniczego przez banki operacyjne;
- zaspokajanie za pomocą kredytów i pożyczek;
- zapotrzebowanie podmiotów gospodarczych na pieniądze;
- pośredniczenie pomiędzy posiadaczami środków pieniężnych i ich użytkownikami (lokaty, kredyty).

System bankowy w Polsce ogniskuje się wokół Narodowego Banku Polskiego, jako banku centralnego.

W stosunkach z bankami komercyjnymi **bank centralny** występuje w dwojakiej pozycji: jako jednostka zwierzchnia, co oznacza, że w swoich decyzjach ma nadrzędną pozycję w stosunku do pozostałych banków, jako równorzędny podmiot rynkowy, która wpływa na zachowanie banków komercyjnych. Możliwość oddziaływania NBP na banki komercyjne jako jednostki zwierzchniej wynika z regulacji prawnych (Konstytucja RP i ustawa o NBP).

Celem wiodącym Narodowego Banku Polskiego jest dbanie o stabilność polskiej waluty (jej siły nabywczej), co oznacza zwalczanie inflacji oraz stabilizację systemu bankowego jako całości.

W Polsce nadzór bankowy sprawuje **Komisja Nadzoru Finansowego**, która z ramienia polskiego banku centralnego czuwa nad bezpieczeństwem systemu bankowego, udziela licencji na prowadzenie banków, kontroluje banki pod względem przestrzegania prawa w ich działalności (M. Żukowski, 2005).

Obok sprawowania nadzoru bankowego bank centralny realizuje szeroko zakrojone **cele ekonomiczne i społeczne,** takie jak:

- utrzymanie równowagi pieniężnej;
- popieranie wzrostu gospodarczego i dobrobytu społeczeństwa;
- dążenie do pełnego zatrudnienia i zapewnienia dochodów społeczeństwa.

Wiele instytucji wspiera NBP w realizacji jego zadań. Obok Komisji Nadzoru Finansowego są to takie instytucje, jak:

- **Krajowa Izba Rozliczeniowa** – prowadząca rozliczenia pieniężne w skali całego kraju;
- **Bankowy Fundusz Gwarancyjny** – gwarantujący depozyty bankowe;
- **Biuro Informacji Kredytowej** – gromadzące informacje o kredytobiorcach;
- **Związek Banków Polskich** – zrzeszający wszystkie banki komercyjne.

Zadania banku centralnego w gospodarce i polityce pieniężnej wynikają z jego trzech zasadniczych funkcji: banku emisyjnego, banku banków i centralnego banku państwa.

Tabela 16. Opis funkcji banku centralnego

Funkcja banku centralnego	Zadania banku centralnego w ramach danej funkcji
Funkcja banku emisyjnego	Emitowanie znaków pieniężnych do obiegu.
	Organizowanie obiegu pieniężnego, tj. organizowanie i kontrola rozliczeń w systemie bankowym.
	Regulowanie ilości pieniądza w obiegu rynkowym (tak, aby nadmiar pieniądza nie powodował inflacji a niedobór nie utrudniał obsługi procesów gospodarczych).
Funkcja banku banków	Oddziaływanie na system bankowy w celu realizacji przyjętej polityki pieniężnej.
	Nadzór nad działalnością banków zmierzający do bezpieczeństwa depozytów bankowych i legalizmu działalności banków.
	Tworzenie regulacji zapewniających płynność systemu bankowego.
	Kredytodawca ostatniej instancji dla banków komercyjnych poprzez udzielanie kredytów refinowanych (zaciąganych przez banki komercyjne w banku centralnym).
	Prowadzenie operacji otwartego rynku regulujących płynność banków.
Funkcja banku gospodarki narodowej i banku państwa, w tym funkcja centralnej instytucji dewizowej	Formułowanie i realizacja polityki pieniężnej.
	Obsługa kasowo-rozliczeniowa instytucji rządowych i samorządowych.
	Kredytowanie (w ograniczonym zakresie) budżetu państwa.
	Gromadzenie i analizowanie informacji o kondycji finansowej sektora finansowego.
	Programowanie i ocena przebiegu procesów gospodarczych.
	Prowadzenie gospodarki rezerwami dewizowymi kraju.
	Odpowiedzialność za politykę kursu walutowego.
	Sporządzanie zestawienia należności i zobowiązań danego kraju z zagranicą.

Źródło: M. Żukowski (red.), Ekonomia. Zarys wykładu, Lublin 2005, s. 285

Funkcja emisyjna banku centralnego polega na emisji pieniądza gotówkowego na podstawie posiadanej w tym względzie wyłączności. Bank centralny jednocześnie wyznacza i kontroluje rozmiary całego obiegu pieniężnego. W oparciu o wyemitowany pieniądz gotówkowy, korzystając z przyznanych mu narzędzi i pełnomocnictw, pośrednio decyduje o rozmiarach pieniądza bezgotówkowego kreowanego przez inne banki (M. Żukowski, 2005).

Funkcja banku centralnego **jako banku banków** polega na sterowaniu płynnością i nadzorowaniu wszystkich banków w kraju. Polega na sprawowaniu nadzoru bankowego, refinansowaniu banków poprzez udzielanie im kredytów, prowadzenie dla banków komercyjnych rachunków w banku centralnym, na których utrzymują swoje rezerwy gotówkowe. Banki, chcąc zwiększyć rozmiary udzielanych kredytów, muszą bowiem dysponować odpowiednimi rezerwami gotówkowymi. Bank centralny jest więc kredytodawcą ostatniej instancji w stosunku do banków komercyjnych, tzn. udziela bankom kredytów, gdy zawiodą inne sposoby zdobycia przez nie środków pieniężnych.

Funkcja banku centralnego **jako banku państwa** polega na prowadzeniu wszystkich rachunków rządowych oraz przeprowadzaniu zleconych przez rząd operacji finansowych w kraju i za granicą. Bank centralny prowadzi rachunki państwa, gromadzi dochody budżetowe i realizuje wydatki. Administruje długiem publicznym, sprzedaje, skupuje państwowe papiery wartościowe (weksle skarbowe i obligacje państwowe).

Polski bank centralny zajmuje się również międzynarodowymi stosunkami pieniężno-kredytowymi. Niektóre banki centralne ustalają kursy waluty i dbają o jej utrzymanie poprzez interwencyjne zakupy i sprzedaż walut obcych na rynku krajowym oraz waluty własnej na rynkach zagranicznych.

Prawo bankowe wskazuje klasyfikację banków ze względu na status prawny, tzn.: banki w formie spółki akcyjnej, banki państwowe oraz banki spółdzielcze.

Bank w formie spółki akcyjnej może być utworzony po uzyskaniu zezwolenia Komisji Nadzoru Finansowego. Musi on spełnić określone kryteria, w tym zgromadzić kapitał założycielski na poziomie co najmniej równowartość 5 mln EUR. Banki tego typu to podmioty, których zasadniczym celem funkcjonowania jest podnoszenie wartości dla akcjonariuszy, czyli nastawienie na zysk.

Bank spółdzielczy to jednostka bankowa funkcjonująca w formie spółdzielni, której działanie określa odrębna ustawa, a w kwestiach w niej nieuregulowanych – prawo bankowe oraz prawo spółdzielcze. Warunkiem utworzenia banku spółdzielczego jest spełnienie określonych wymogów, w tym zgromadzenie wymaganego kapitału (co najmniej równowartości 1 mln EUR) oraz uzyskanie zezwolenia Komisji Nadzoru Finansowego. Banki spółdzielcze prowadzą działalność na ograniczonym terytorialnie obszarze, a zakres ich działania uzależniony jest od wartości posiadanych funduszy własnych. Mają one obowiązek zrzeszania się z bankiem zrzeszającym, a jedynym bankiem spółdzielczym działającym samodzielnie jest Krakowski Bank Spółdzielczy. Banki te mogą wykonywać prawie wszystkie czynności wskazane w prawie bankowym. Jednak niektóre produkty i usługi mogą być oferowane wyłącznie osobom i podmiotom mającym siedzibę na obszarze funkcjonowania banku.

Bank państwowy może zostać utworzony przez Radę Ministrów w drodze rozporządzenia dla realizacji określonych celów w zakresie i trybie uzgodnionym z bankiem centralnym. Jest to więc bank specyficzny, który obok działalności komercyjnej może również prowadzić działalność zleconą przez państwo. Obecne w Polsce funkcjonuje jeden bank o statusie banku państwowego (Bank Gospodarstwa Krajowego), którego podstawowym celem jest wspieranie rządowych programów społeczno-gospodarczych, w tym programów pobudzania przedsiębiorczości i innowacyjności realizowanych z wykorzystaniem funduszy publicznych.

Wszystkie banki działające w formie spółki akcyjnej należy traktować, jako tzw. **banki komercyjne**. Dla ich właścicieli głównym celem działalności pozostaje bowiem osiąganie jak najwyższego zysku, który stanowi z kolei drogę do zwiększania siły i pozycji banku, a także wzrostu jego wartości, mającej bezpośrednie przełożenie na stopę wzrostu z kapitału zaangażowanego w działalność bankową. Nie są natomiast podmiotami komercyjnymi banki spółdzielcze, których organizacja w formie spółdzielni oznacza dobrowolne zrzeszanie osób fizycznych prowadzących wspólną działalność gospodarczą w interesie lub na rzecz swoich członków oraz ich środowiska (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011). Nie znaczy to jednak, że nie dążą one do osiągania zysków, tyle że wzrost wartości banku nie stanowi podstawowego celu ich funkcjonowania.

Tabela 17. Podział banków ze względu na dominującą działalność

Banki uniwersalne	**Banki wyspecjalizowane**			
	Hipoteczne	**Inwestycyjne**	**Depozytowe**	**Samochodowe**
Banki wykonujące wszystkie podstawowe czynności bankowe (czasem koncentrują się na wybranych dziedzinach), np. Kredyt Bank, PKO BP.	Koncentrują się na udzielaniu kredytów zabezpieczonych hipoteką na nieruchomościach (zabezpieczeniem kredytu jest dom lub mieszkanie), np. BRE Bank Hipoteczny.	Specjalizują się w finansowaniu długoterminowych inwestycji. Obsługują głównie przedsiębiorstwa i nieliczną grupę bardzo zamożnych ludzi, np. Raiffeisen Bank Polska.	Specjalizują się w przyjmowaniu depozytów (wkładów pieniężnych) na dłuższe terminy. Mają zazwyczaj liczną rzeszę klientów, np. Eurobank, Lukas Bank.	Specjalizują się w udzielaniu kredytów na zakup nowego lub używanego samochodu. Tworzą je koncerny motoryzacyjne, np. Toyota Bank, Volkswagen Bank.

Źródło: Z. Makieła, T. Rachwał, Krok w przedsiębiorczość, Warszawa 2011, s. 71

Instrumenty i charakter polityki pieniężnej banku centralnego

Organem NBP odpowiedzialnym za ustalanie założeń polityki monetarnej jest Rada Polityki Pieniężnej. W jej kompetencjach pozostaje wyłączne stosowanie dwóch spośród instrumentów polityki pieniężnej (ustalanie stop procentowych i stopy rezerw obowiązkowych) oraz ustalanie zasad stosowania operacji otwartego rynku. Natomiast ustalanie zasad i trybu przeprowadzania operacji depozytowo-kredytowych oraz przeprowadzanie tych operacji i operacji otwartego rynku przypisane zostało Zarządowi NBP (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011).

Polityka pieniężna polega na kształtowaniu podaży pieniądza w celu utrzymywania produkcji, zatrudnienia i cen na pożądanym poziomie.

Bank centralny realizuje politykę pieniężną państwa i wykorzystuje w tym celu takie instrumenty (narzędzia), jak: stopę rezerw obowiązkowych, operacje na otwartym rynku (wolnym rynku i stopę procentową).

Rezerwa obowiązkowa

Bank centralny nakłada na banki komercyjne obowiązek utrzymywania rezerwy obowiązkowej. Rezerwa obowiązkowa jest to ułamkowa część depozytów wkładów zgromadzonych przez bank, która jest obowiązkowo odprowadzana na rachunek danego banku w banku centralnym. Rezerwy obowiązkowe są więc przymusowymi lokatami, nieprzynoszącymi bankom komercyjnym dochodu.

Wysokość rezerw, jaką banki muszą utrzymywać, wyrażoną jako procent ich całkowitych depozytów, to stopa rezerw obowiązkowych.

Bank centralny wyznacza stopę rezerw obowiązkowych, tzn. określa, jaką część każdego depozytu banki komercyjne muszą przeznaczyć na rezerwę obowiązkową.

Rezerwa obowiązkowa zwiększa bezpieczeństwo funkcjonowania poszczególnych banków komercyjnych. Wynika z tego, że banki komercyjne płacą właścicielom depozytów (wkładów) oprocentowanie. Rezerwa obowiązkowa nie przynosi bankowi dochodu, a bank płaci odsetki od depozytów, od lokat komercyjnych (w tym kredytów) pobiera więc odpowiednio wyższy procent (M. Żukowski, 2005).

Gdy stopa rezerw rośnie, musi też rosnąć stopa procentowa.

Zmiana wysokości stopy rezerw obowiązkowych wpływa też bezpośrednio na liczbę udzielonych kredytów. Im większy procent powierzonych wkładów bank przeznacza na rezerwę obowiązkową, tym mniej może przeznaczyć na kredyty.

Bank centralny, chcąc zmniejszyć rozmiary kredytów udzielanych przez banki, podnosi stopę rezerw obowiązkowych, dążąc natomiast do wywoływania ekspansji kredytowej, obniża wymagane rezerwy obowiązkowe (M. Żukowski, 2005).

Operacje otwartego rynku

Istota operacji otwartego rynku polega na zakupie lub sprzedaży papierów wartościowych przez bank centralny w celu zmiany wielkości bazy monetarnej (ilości pieniędzy w obiegu).

Przedmiotem kupna, sprzedaży przez bank centralny są bony pieniężne NBP, weksle skarbowe i obligacje państwowe.

W sytuacji zagrożenia inflacją bank centralny dąży do zmniejszenia skłonności do udzielania kredytów przez banki depozytowo-kredytowe. Dokonuje więc sprzedaży pewnej ilości posiadanych papierów wartościowych. Gdy banki nabywają te papiery, zmniejszają się ich rezerwy gotówkowe, co ogranicza możliwości udzielania kredytów. Kredyt staje się trudniej dostępny, co ogranicza jego rozmiary i wywołuje tendencję do wzrostu stopy procentowej. Kredytu jest mniej i jest on droższy, a to ogranicza ekspansję inwestycyjną przedsiębiorstw.

W okresie stagnacji czy recesji (spadku tempa wzrostu gospodarczego) bank centralny, chcąc pobudzić aktywność gospodarczą, zwiększa kreację pożyczek i kredytów przez banki. Dokonuje więc zakupu weksli skarbowych i obligacji państwowych na rynku finansowym. Zwiększa się więc możliwość udzielania kredytów przez bank. Kredyt staje się łatwiej dostępny, co wywołuje tendencję do obniżania stopy procentowej, wzrostu zatrudnienia i PKB (M. Żukowski, 2005).

Stopy procentowe

Bank centralny może wpływać na cenę kredytu, czyli na stopę procentową banków komercyjnych, nie tylko przez regulowanie podaży pieniądza przy pomocy stopy rezerw obowiązkowych i operacji na otwartym rynku, ale też przez podnoszenie kosztów ich działalności, a więc przez ustalanie swojej stopy procentowej.

Podstawowe stopy procentowe to te, które wyznacza bank centralny dla kredytów udzielanych bankom komercyjnym.

Refinansowanie banków polega na udzielaniu kredytów przez bank centralny pozostałym bankom.

Najczęściej wykorzystywana jest stopa kredytu redyskontowego, która uważana jest za podstawową stopę procentową banku centralnego.

Zadaniem polityki regulowania stopy redyskontowej jest wywoływanie popytu na kredyt przez jego oprocentowanie. Gdy banki depozytowo-kredytowe zwracają się do banku centralnego o kredyt redyskontowy, to sprzedają mu weksle handlowe przyjęte do dyskonta przez swoich klientów. Sprzedaż weksli następuje po cenie, którą jest stopa redyskontowa (M. Żukowski, 2005).

Wysokość stopy redyskontowej decyduje o stopie dyskontowej, tzn. stopie procentowej ustalonej przez banki komercyjne, przy skupie weksli handlowych od swoich klientów, czyli od kredytów udzielanych klientom przez banki handlowe związanych z wykupem weksli. Skutkiem wzrostu stopy redyskontowej banku centralnego jest zwykle wzrost stopy dyskontowej banków komercyjnych, a to oznacza wzrost ceny kredytu dla kredytobiorcy. Zniechęca to kredytobiorców do ich zaciągania. Spadek stopy dyskontowej oznacza obniżenie oprocentowania kredytów dla bezpośredniego kredytobiorcy.

Rosnąca stopa dyskontowa powinna doprowadzić do ograniczenia rozmiarów udzielonych kredytów przez banki depozytowo-kredytowe, obniżenie zaś stopy kredytu redyskontowego ma na celu rozszerzenie ekspansji kredytowej.

W zależności od sytuacji gospodarczej stosowana jest restrykcyjna bądź ekspansywna polityka monetarna.

Polityka restrykcyjna prowadzona jest w sytuacji nadmiernego wzrostu gospodarczego, kiedy grozi wzrost inflacji. Bank centralny w ramach polityki monetarnej zmniejsza nadmiar pieniądza w obiegu i ogranicza ekspansję inwestycyjną.

Polityka ekspansywna wywołuje odwrotne skutki niż restrykcyjna. Jeżeli gospodarka jest w stanie recesji, dla ożywienia koniunktury bank centralny stosuje politykę ekspansywną. Obniża stopę procentową i rozszerza akcję kredytową. Tanie kredyty zachęcają do inwestowania, a tym samym do wzrostu produkcji i zatrudnienia.

Tabela 18. Instrumenty polityki pieniężnej banku centralnego

W okresach dekoniunktury lub recesji gospodarczej bank centralny może:	W okresach wzrostu inflacji i groźby załamania gospodarczego bank centralny może:
obniżyć wskaźnik rezerw obowiązkowych;	podwyższyć wskaźnik rezerw obowiązkowych;
zwiększyć kwotę udzielonych kredytów refinansowych przy odpowiednio obniżonej stopie redyskontowej;	ograniczyć pulę środków na kredyty refinansowe i podnieść stopę redyskontową;
zakupić papiery wartościowe na otwartym rynku kapitałowym.	sprzedać obligacje rządowe będące w posiadaniu banku centralnego

Źródło: M. Żukowski (red.), Ekonomia. Zarys wykładu, Lublin 2005, s. 294

Aktywne i pasywne operacje bankowe

Klasyfikacja czynności bankowych oparta o kryterium podmiotowe

Ustawa Prawo bankowe w art. 5 pkt. 1 wymienia czynniki bankowe stwierdzające, że działalność gospodarcza, której przedmiotem są wskazane czynności, może być wykonywania wyłącznie przez banki. Inne przedmioty mogą być upoważnione do ich wykonywania, jeżeli odrębne ustawy uprawniają je do tego. Usługi określone we wskazany sposób traktuje się jako czynności bankowe rozumiane w ścisłym znaczeniu, czyli inaczej – czynności bankowe **sensu stricte** Ustawa Prawo bankowe w art. 5 pkt. 2 wymienia czynności, które nabierają charakteru bankowego, gdy są wykonywane przez banki, co oznacza, że mogą być również wykonywane przez inne podmioty, ale nie są wówczas traktowane jako czynności bankowe. Szersze niż w przypadku czynności bankowych sensu stricte zastosowanie wymienionych działań i usług powoduje, że nazywane są czynnościami bankowymi w szerokim znaczeniu, czyli inaczej – czynnościami bankowymi **sensu largo** (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011).

Klasyfikacja czynności bankowych oparta na kryterium przedmiotowym

W odniesieniu do tego podziału częściej używa się określenia „operacja bankowa". Istotą omawianej klasyfikacji jest odniesienie poszczególnych operacji do bilansu banku.

Według kryterium bilansu wyróżnia się **operacje bankowe**:

- .**Aktywne (czynne)** – ewidencjonowane są w aktywach bilansu. Bank staje się w nich wierzycielem, wykonywane są na rachunek i ryzyko banku, przynoszą przychody (głównie odsetkowe), polegają na lokowaniu środków w celu osiągania korzyści, np.: udzielanie kredytów i pożyczek, zakup papierów wartościowych do własnego portfela aktywów, lokaty w innych bankach, lokaty międzybankowe (czynne) i w NBP, zakup udziałów i wnoszenie udziałów do innych podmiotów.
- **Pasywne (bierne)** – polegają na pozyskiwaniu źródeł finansowania działalności i są ewidencjonowane w pasywach bilansu. Bank staje się dłużnikiem, np.: gromadzenie depozytów i lokat, pozyskanie środków w wyniku emisji i sprzedaży papierów wartościowych (obligacji, certyfikatów depozytowych, bankowych papierów wartościowych), pozyskiwanie lokat z innych banków i zaciąganie kredytu refinansowego w NBP.
- **Usługowe (pośredniczące, pozabilansowe)** – prowadzone na zlecenie i rachunek klientów, nie mają odzwierciedlenia w bilansie banku, przynoszą przychody (głównie pozaodsetkowe), np.: udzielanie gwarancji i poręczeń, wynajem skrytek i sejfów, doradztwo finansowe, pośrednictwo w obrocie papierami wartościowymi.

Aktywne operacja bankowe – udzielanie kredytów

Klasyczną formę operacji aktywnych jest udzielanie kredytów i pożyczek. Oprócz tego banki mogą lokować wolne środki w banku centralnym i na rynku międzybankowym oraz inwestować w papiery wartościowe i udziały.

Kredyt a pożyczka

Zgodnie z art. 69, ust. 1 ustawy Prawo bankowe przez **umowę kredytową** bank zobowiązuje się oddać do dyspozycji kredytobiorcy na czas oznaczony w umowie kwotę środków pieniężnych z przeznaczeniem na określony cel, a kredytobiorca zobowiązuje się do korzystania z niej na warunkach określonych w umowie, zwrotu kwoty wykorzystanego kredytu łącznie z odsetkami w wyznaczonych terminach oraz do zapłaty prowizji od udzielonego kredytu. Z definicji tej wynikają najważniejsze cechy kredytu; tj.: celowość, odpłatność i zwrotność.

Zgodnie z kodeksem cywilnym przez **umowę pożyczki** dający pożyczkę zobowiązuje się przenieść na własność pożyczkobiorcy określoną ilość pieniędzy albo rzeczy oznaczonych tylko co do gatunku, a pożyczkobiorca zobowiązuje się zwrócić tę samą ilość pieniędzy albo rzeczy tego samego gatunku i tej samej jakości. W przypadku pożyczek udzielanych przez banki przedmiotem są wyłącznie środki pieniężne, a sama pożyczka jest zawsze odpłatna (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011).

Podstawowe różnice między kredytem a pożyczką bankową

- Kredyt oznacza postawienie środków do dyspozycji kredytobiorcy, a więc właścicielem środków pozostaje nadal bank. Pożyczka prowadzi do przeniesienia środków na własność pożyczkobiorcy.
- Kredy jest udzielany na konkretne cele, pożyczka – niekoniecznie. Stąd wszelkie udostępnienie środków bez ustalonego ich przeznaczenia powinno nosić nazwę pożyczki, a nie kredytu.
- Bank ma prawo do kontroli wykorzystania kredytu zgodnie z umową, natomiast pożyczki warunek ten nie dotyczy.
- Kredyt, jak wynika z definicji, jest odpłatny zaś pożyczka – niekoniecznie. W praktyce jednak pożyczka jest zwykle odpłatna.
- Zgodnie z prawem bankowym umowa kredytowa powinna być zawarta na piśmie. Zgodnie z kodeksem cywilnym umowa pożyczki powinna być stwierdzona pismem tylko wtedy, gdy kwota przekracza 500 zł. W praktyce banki zawierają na piśmie każdą umowę pożyczki, niezależnie od kwoty.

Kredyt i pożyczka istotnie więc się od siebie różnią. W praktyce pojęcia te są jednak często stosowane zamiennie, nawet przez same banki (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011).

Klasyfikacja kredytów według różnych kryteriów

1. **Kredyt w rachunku bieżącym**, to kredyt, którego wykorzystanie następuje poprzez przekroczenie salda na rachunku bieżącym kredytobiorcy o kwotę ustaloną w umowie. W danym banku mogą z niego korzystać klienci, którzy posiadają w nim rachunki bieżące. Udzielony jest w związku z przejściowym brakiem środków, więc jest to zwykle kredyt krótkoterminowy, którego spłata następuje z bieżących wpływów na rachunek.

2. **Kredyt w rachunku kredytowym**, to kredyt, którego wykorzystanie i spłata ewidencjonowane są na specjalnie aktywowanym rachunku kredytowym. Rachunek ten nie może być wykorzystywany do żadnych innych celów, po spłacie kredytu jest automatycznie zamykany.

3. **Kredyty wekslowe** są udzielane w powiązaniu z wekslami, które są bezwarunkowym zobowiązaniem do zapłaty określonej sumy środków pieniężnych w określonym czasie i miejscu.

Ze względu na pochodzenie i przeznaczenie weksla wyróżnia się:

- weksel finansowy – wystawiony jako zabezpieczenie uzyskanej pożyczki czy zaciągniętego kredytu;
- weksel towarowy – wystawiony w obrotach handlowych na pokrycie zobowiązania za nabyty towar.

Ustawa Prawo wekslowe wyodrębnia następujące rodzaje weksli:

- własny (**sola**) – wystawiony przez dłużnika jako zobowiązanie do zapłaty;
- obcy (**trata**) – wystawiony przez wierzyciela (**trasanta**), który poleca swojemu dłużnikowi (**trasatowi**) dokonanie zapłaty na rzecz wskazanej osoby trzeciej (**beneficjent**).

4. **Kredyt obrotowy i inwestycyjny**

- Kredyty obrotowe są przeznaczone na finansowanie bieżących potrzeb kredytobiorcy związanych z prowadzoną przez niego działalnością gospodarczą. Mogą być udzielone na spłatę zobowiązań, zakup surowców i materiałów, zapłatę wynagrodzeń. Powiększają środki obrotowe kredytobiorcy
- Kredyty inwestycyjne przeznaczone są na finansowanie nakładów, których celem jest stworzenie nowego lub powiększenie istniejącego majątku trwałego, np. na wyposażenie (zakup sprzętu, budowa majątku trwałego) albo zakup lub budowa całych obiektów przemysłowych czy rolnych.

5. **Kredyt konsumencki** –rodzaj kredytu obejmującego ochroną konsumentów. To kredyt zaciągnięty na cele niezwiązane bezpośrednio z prowadzeniem działalności gospodarczej. Ustawa o kredycie konsumenckim określa, że jego kwota wynosi więcej niż 500 zł i mniej niż 255.550 zł, a okres spłaty trwa dłużej niż 3 miesiące. Obejmuje on także kredyty walutowe oraz pożyczki udzielane przez SKOK-i i instytucje parabankowe.

Umowa kredytu konsumenckiego zapewnia kredytobiorcy m.in. (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011):

- prawo do pełnej informacji na temat kredytu (umowa kredytowa powinna być sporządzona na piśmie i zawierać wszystkie warunki, pod jakimi kredyt jest przyznawany);
- prawo do odstąpienia od umowy – konsument ma prawo dokonać tego w ciągu 14 dni od daty zawarcia umowy;
- prawo do wcześniejszej spłaty bez wcześniejszego zawiadomienia o tym kredytodawcy.

6. **Kredyt hipoteczny** to kredyt zabezpieczony hipoteką na nieruchomości, czyli zabezpieczone w formie wpisu w księdze wieczystej roszczenie kredytodawcy w stosunku do właściciela nieruchomości.

Cechy kredytu hipotecznego (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011):

- długi okres spłaty (zazwyczaj 25–30 lat) przy niewielkiej wartości raty kapitałowej;
- zabezpieczenie hipoteczne na nieruchomości;
- powiązanie przedmiotu kredytu z przedmiotem zabezpieczenia;
- relatywnie niskie oprocentowanie ze względu na niski stopień ryzyka kredytowego;
- możliwość sprzedaży wierzytelności zabezpieczonych hipotecznie bezpośrednio na rynku kapitałowym lub za pomocą długoterminowych papierów wartościowych;
- zwykle jest spłacany w sposób annuitetowy (stałe raty spłaty);
- powinien być oprocentowany według stałej stopy procentowej, co pozwala kredytobiorcy łatwiej zaplanować wydatki.

Umowa kredytowa

Zgodnie z art. 69, ust. 2 ustawy Prawo bankowe, **umowa kredytowa** jest sporządzana na piśmie i powinna określać w szczególności: kwotę i walutę kraju, cel, na który kredyt został udzielony, zasady i termin spłaty kredytu, wysokość oprocentowania kredytu i warunki jego zmiany, sposób zabezpieczenia spłaty kredytu, zakres uprawnień baku związanych z kontrolą wykorzystania i spłaty kredytu, terminy i sposób postawienia do dyspozycji kredytobiorcy środków pieniężnych, wysokość prowizji, jeśli umowa ją przewiduje, oraz warunki dokonywani zmian i rozwiązywania umowy.

Umowa o **kredyt konsumencki** zawiera więcej wymaganych elementów, szczególnie w odniesieniu do kosztów, prawa do wcześniejszej spłaty czy odstąpienia od umowy. W przypadku umów o kredyt niepodlegający pod działanie ustawy o kredycie konsumenckim prawo bankowe nie wymienia na przykład prawa kredytobiorcy do wcześniejszej spłaty kredytu. Kwestie te są zwykle przedmiotem zapisów w regulacjach bankowych.

Jednym z elementów umowy kredytowej jest wybór spłaty kredytu. Banki oferują najczęściej spłatę kredytu w równych ratach kapitałowo-odsetkowych lub w ratach malejących. Bardziej korzystne dla kredytobiorcy są raty malejące, ponieważ oznacza to konieczność zapłaty niższych odsetek (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011).

Przykład 15

Przedsiębiorstwo zaciągnęło kredyt w wysokości 20.000 zł (S), przy stałym oprocentowaniu 8% rocznie (r). Kredyt ma być spłacony w ciągu 4 lat (liczba lat n = liczba rat N).

1. W ratach kapitałowych o równej wysokości płatnych na koniec roku **T = const**
2. W jednakowych kwotach płatności na koniec każdego roku **A = const**

Pierwszy sposób oznacza równe raty kredytu, do których doliczane będą malejące odsetki (bo maleje sukcesywnie kwota zadłużenia, a oprocentowanie jest z założenia stałe), czyli spłata kredytu następuje w malejących ratach kapitałowo-odsetkowych.

W drugim przypadku raty kapitałowo-odsetkowe są stałe.

$$\textit{rola kapitałowa } (T) = \frac{\textit{kwota zaciągniętego kredytu } (S)}{\textit{ilość rat } (N)}$$

$T = \frac{200.000}{4} = 50.000\ j.p.$ Kwota kredytu pozostałego do spłaty po **n** latach wynosi $(n \leq N)$:

$$S_n = S - \frac{S}{N} - \frac{S}{N} \ldots = S\ (\frac{n}{N})$$

$$S_1 = 200.000\ (1-\frac{1}{4}) = 150.000$$

$$S_2 = 200.000\ (1-\frac{1}{2}) = 100.000$$

$$S_3 = 200.000\ (1-\frac{3}{4}) = 50.000$$

$$S_4 = 200.000\ (1-1) = 0$$

Z każdą ratą związane są odsetki (od kredytu do spłaty):

$$O_1 = S \bullet r = 200.000 \bullet 0{,}08 = 16.000$$

$$O_2 = (S - T) \bullet r = S_1 \bullet r = 150.000 \bullet 0{,}08 = 12.000$$

$$O_3 = (S - 2T) \bullet r = S_2 \bullet r = 100.000 \bullet 0{,}08 = 8.000$$

$$O_4 = (S - 3T) \bullet r = S_3 \bullet r = 50.000 \bullet 0{,}08 = 4.000.$$

Wysokość odsetek związanych z ratą = $O_n = \left[S - (n-1)T\right] \bullet r$

$$O = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 40.000$$

Kwota płatności $A_n = t + O_n$:

$$A_1 = 50.000 + 16.000 = 66.000$$

$$A_2 = 50.000 + 12.000 = 62.000$$

$$A_3 = 50.000 + 8.000 = 58.000$$

$$A_4 = 50.000 + 4.000 = 54.000$$

$$240.00 \quad \frac{kredyt\ 200.00}{odsetki\ 40.000}$$

$$efektywny\ koszt\ kredytu\ \frac{40.000}{200.000} \bullet 100 = 20\%$$

Tabela 19. Plan spłaty kredytu – malejące raty kapitałowo-odsetkowe

Rata	K_r na K_{P1} początek okresu	Odsetki 0_n	Rata kapit. $T = \frac{S}{N}$	Kwota płatności $A_n = T + 0_n$	Kwota kr. na koniec roku $K_P - T$
1	200.000	0_1 = 16.000	50.000	66.000	150.000
2	150.000	0_2 = 12.000	50.000	62.000	100.000
3	100.000	0_3 = 8.000	50.000	58.000	50.000
4	50.000	0_4 = 4.000	50.000	54.000	–
Razem	X	40.000	200.000	240.000	X

Rzeczywiste oprocentowanie kredytu za cały okres wynosi 20%

Aby ustalić stałą kwotę płatności, czyli ratę kapitałowo-odsetkową (A), zastosujemy wzór:

$$A = \frac{S\left(1 + \frac{n}{100}\right)^{N} \frac{r}{100}}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{N} - 1} = \frac{200.000\ (1 + 0{,}08)^{4}\ 0{,}08}{(1 + 0{,}08)^{4} - 1} = 60.384$$

Tabela 20. Plan spłaty kredytu – stałe raty kapitałowo-odsetkowe

Rata	Kredyt na początek okresu	Odsetki 0_n	Rata kapit. $T_N = A - 0_N$	Kwota płatności/ rata kapitałowo-odsetkowa A	Kwota kr. na koniec roku $K_P - T_N$
1	200.000	0,08 x 200.000 = 16.000	44.384	60.384	155.616
2	155.616	0,08 x 155.616 = 12.449	47.935	60.384	107.682
3	107.682	0,08 x 107.682 = 8.615	51.769	60.384	55.911
4	55.911	0,08 x 55.911 = 4.473	55.911	60.384	0
X	X	41.536	200.000	241.536	X

Źródło: Opracowanie własne

Rzeczywiste oprocentowanie kredytu za cały okres wynosi:

$\frac{41.537}{200.000} \times 100 = 20{,}77\%$, czyli jest wyższe niż poprzednio.

Efektywna stopa kredytu umożliwia porównanie kredytów w różnych bankach ze względu na ich koszt. Uwzględnia ona częstotliwość płacenia odsetek:

$$Set = (1 + \frac{n}{100})^n - 1$$

Set – efektywna stopa kredytu

Przykład 16

Bank A oferuje nową stopę oprocentowania kredytu na poziomie 18% i konieczność płacenia odsetek co miesiąc

Bank B oferuje stopę 19% i konieczność płacenia odsetek co pół roku.

Który z banków oferuje lepsze warunki?

$$\text{Bank A} \;\; \text{Sef} = (1 + 0{,}015)^{12} - 1 = 0{,}195618173 = 19{,}56\%$$

$$\text{Bank B} \;\; \text{Sef} = (1 + 0{,}095)^{2} - 1 = 0{,}199025 = 19{,}90\%$$

Efektywna stopa procentowania kredytu w banku A jest o 0,34 pkt. proc. niższa niż w banku B.

Istotnym elementem umowy kredytowej jest oprocentowanie kredytu.

Aby obliczyć należne odsetki od kapitału za kolejne okresy, należy skorzystać z wzoru:

$$0 = \frac{k \times s \times t}{100 \times 360}.$$

0 – odsetki od kredytu należne po t dniach

k – kwota zaciągniętego kredytu

s – stopa procentowa

t – czas (okres między kolejnymi płatnościami odsetek

Powyższy wzór ma zastosowanie tylko wówczas, gdy oprocentowanie kredytu naliczane jest jednokrotnie, na końcu analizowanego okresu.

Przykład 17

Przedsiębiorstwo zaciągnęło krótkoterminowy kredyt na sumę 700 tys. zł i zwróciło po 105 dniach przy stopie procentowej 24%. Należy wyliczyć odsetki proste.

k – 700 tys.

t – 105 dni

s – 24%

$$0 = \frac{k \times s \times t}{100 \times 360}$$

$$0 = \frac{700.00 \times 24 \times 105}{1 \times 36} = 49.000 \;\; zl$$

Wysokość należnych odsetek od kredytu w wysokości 700 tys. zł zaciągniętego na okres 105 dni wynosi 49.000 zł.

Na **wybór właściwej oferty kredytu** (najbardziej korzystnej) wpływają (Z. Makieła, T. Rachwał, 2011):

- stopa procentowa (w przypadku zmiennej – sposób wyliczenia oprocentowania kredytu);
- opłaty i prowizje (za rozpatrzenie wniosku, wcześniejszą spłatę kredytu itp.);
- wymagany przez bank sposób zabezpieczenia kredytu, na przykład **zastaw hipoteczny** (dobra kredytobiorcy, do których prawo własności ma bank do momentu, gdy kredytobiorca spłaci cały zaciągnięty na nie kredyt wraz z odsetkami);
- długość okresu promocyjnego oprocentowania (jeśli takie występuje, później z reguły oprocentowanie wzrasta);
- dostępność kredytu w interesującej kredytobiorcę walucie i wysokość **spreadu walutowego** (różnica między kupnem a sprzedażą danej waluty).

Zdolność kredytowa

Zgodnie z prawem bankowym bank może przyznać kredyt osobie posiadającej zdolność kredytową, tj. zdolność do spłaty zaciągniętego kredytu wraz z odsetkami w ter-minach określanych w umowie (art. 70, ust. 1 Prawa bankowego).

Najczęściej wyróżnia się dwie podstawowe **kategorie zdolności kredytowej** (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011):

1. pod względem formalnoprawnym, tzn. **wiarygodnoś**ć **prawną kredytobiorcy**, czyli jego zdolności do podejmowania czynności prawnych z bankiem (nie mają jej na przykład osoby małoletnie lub ubezwłasnowolnione);

2. pod względem merytorycznym, tj. **wiarygodność ekonomiczną kredytobiorcy**;

- w aspekcie personalnym – obejmuje badanie elementów determinujących zaufanie do osoby kredytobiorcy, np.: stan rodzinny i majątkowy, kwalifikacje zawodowe, doświadczenie, solidność, zdolności menedżerskie (aspekt ten dominuje przy ocenie zdolności kredytowej w przypadku kredytów konsumpcyjnych);
- w aspekcie ekonomicznym – obejmuje analizę zobiektywizowanych elementów charakteryzujących dotychczasową i perspektywiczną sytuację ekonomiczno-finansową oraz jakość zabezpieczeń (te aspekty obowiązują w przypadku kredytów na działalność gospodarczą przedsiębiorstw).

Pasywne operacje bankowe

Przyjmowanie wkładów pieniężnych od ludności, podmiotów gospodarczych i pozostałych instytucji stanowi podstawowe źródło finansowania działalności bankowej, przy czym największe znaczenie mają wkłady oszczędnościowe gospodarstw domowych.

W szerokim rozumieniu określenie **„depozyt bankowy**" odnosi się do inwestycji finansowej realizowanej przez inwestora (deponenta), polegającej na czasowym powierzeniu bankowi środków finansowych. Jest to instrument wierzycielski, co w pewnym znaczeniu można potraktować jako udzielenie bankowi „kredytu" przez deponenta (M. Zaleska 2007).

W węższym rozumieniu pojęcie „**depozytu bankowego**" ograniczone jest do środków powierzonych bankom i utrzymywanych w różnej formie na różnych warunkach na rachunkach bankowych. Utożsamiany jest on **z lokatą bankową** lub wkładem oszczędnościowym.

Najistotniejsze **cechy depozytu** obejmują:

- **okres, na jaki została zawarta umowa** – czas, na jaki deponent powierza środki finansowe bankowi;
- **rodzaj (stałe, zmienne) i poziom oprocentowania**, czyli stopy procentowej w skali roku, określającej wysokość wynagrodzenia naliczanego od środków powierzonych bankowi;
- **rodzaj i okres kapitalizacji** – sposób i częstotliwość naliczania odsetek od powierzonych środków,

które decydują o rzeczywistej stopie dochodu uzyskanej przez deponenta (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011).

Rodzaje depozytów bankowych:

1. **Depozyty bieżące (a vista)** – zdeponowane są rachunkach rozliczeniowych podmiotów gospodarczych oraz na rachunkach oszczędnościowo-rozliczeniowych osób fizycznych. Depozytami bieżącymi są również środki na rachunkach pieniężnych bankowych domów maklerskich przeznaczone na finansowanie zakupu papierów

   W przypadku przedsiębiorstw depozyty bieżące stanowią tzw. pieniądz transakcyjny, z jednej strony wykorzystywany do finansowania wydatków związanych z bieżącą działalnością gospodarczą (np.: wypłata wynagrodzeń, regulowanie faktur i rachunków), z drugiej zaś powiększany przez płatności realizowane przez kontrahentów.

2. **Depozyty terminowe** osób fizycznych, podmiotów gospodarczych lub innych instytucji i organizacji zdeponowane na rachunkach kont terminowych, rachunkach terminowych kont oszczędnościowych, lokaty bankowe i wkłady oszczędnościowe gospodarstw domowych.

   Wśród depozytów terminowych wyróżnia się następujące rodzaje lokat (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011):

- **lokata rentierska** – właściciel rachunku zobowiązuje się do oddania do depozycji banku na określony czas znaczącej sumy środków pieniężnych w zamian za możliwość dysponowania odsetkami naliczonymi w odstępach czasu określonych w umowie;
- **lokata dynamiczna** – rodzaj krótkoterminowego depozytu, którego oprocentowanie wzrasta wraz z wydłużaniem się okresu utrzymywania lokaty, środki z lokaty dynamicznej można wycofać po upływie dowolnego terminu i zachować oprocentowanie proporcjonalnie do okresu utrzymania lokaty;
- **lokata progresywna** – umożliwia zwiększanie środków, jakie były zdeponowane na koncie w momencie jej zakładania poprzez dopłaty dokonywane z dowolną częstotliwością, ale w wysokości ustalonej przez banki, oprocentowanie najczęściej wzrasta wraz z wysokością zdeponowanego wkładu;
- **lokata automatyczna** – po przekroczeniu określonego w umowie minimalnego salda środki pieniężne powyżej tego limitu są przez banki blokowane jako wyżej oprocentowana lokata automatyczna bez dodatkowej dyspozycji klienta, limity, oprocentowanie oraz terminy są ustalane indywidualnie;
- **lokata negocjowana** – szczególna forma depozytu terminowego oferowanego klientom dysponującym znacznymi środkami pieniężnymi na warunkach indywidualnych;
- **e-lokata** – forma lokaty, którą mogą założyć osoby posiadające rachunek z dostępem do Internetu, ze względu na niższe koszty obsługi ich oprocentowanie bywa z reguły wyższe od lokat zakładanych w tradycyjny sposób;
- **lokata call** – tzw. lokata za wypowiedzeniem, w której nie określa się terminu zdeponowania środków finansowych, oprocentowana jest według zmiennej stopy procentowej.

Wysokość oprocentowania depozytów terminowych ustalana jest w umowie, przy czym banki mają możliwość swobodnego kształtowania poziomu, zasad i rodzajów naliczania odsetek. Odsetki mogą być naliczane według zasad kapitalizacji prostej lub złożonej (składanej, przy czym dla deponenta istotne znaczenie ma częstotliwość ich naliczania).

Czynniki wpływające na wybór depozytu bankowego (K. Jajuga, 2009):

- stopa dochodu;
- ryzyko;
- płynność (w tym przypadku oznacza możliwość wycofania środków przed upłynięciem okresu umowy bez znacznej obniżki lub utraty odsetek):
- czynniki zewnętrzne (w stosunku do samego depozytu) – zaliczyć do nich można: dostępność placówek banku, możliwość obsługi depozytu przez Internet, dodatkowe usługi związane z depozytem (np. kartę do bankomatu) itp.

Tabela 21. Wybrane rodzaje lokat bankowych

Lokaty terminowe (zwykłe)	• zakładane na określony czas, najczęściej z kapitalizacją odsetek po ukończeniu okresu umowy lub z roczną kapitalizacją w przypadku dłuższych umów • w razie wycofania wkładu przed upływem określonego w umowie terminu następuje utrata części lub całości odsetek
Lokaty rentierskie	• zazwyczaj długoterminowe • odsetki od depozytu nie są kapitalizowane, lecz wypłacane właścicielowi lokaty lub wskazanej przez niego osobie (rentierowi) w ustalonych odstępach czasu (np. co miesiąc)
Lokaty progresywne	• oprocentowanie rośnie wraz z każdym miesiącem przetrzymywania środków w banku • istnieje możliwość wycofania wkładu w dowolnym momencie wraz z malejącymi odsetkami, proporcjonalnie do okresu utrzymania lokaty
Lokaty strukturyzowane	• zazwyczaj długoterminowe • zdeponowany kapitał jest dzielony na dwie części:80–90%) środków bank inwestuje w bezpieczne papiery wartościowe, a pozostałą część – w ryzykowne instrumenty finansowe, ma to na celu ochronę kapitału
Lokaty inwestycyjne	• zazwyczaj długoterminowe, łączące cechy lokaty terminowej z inwestycyjną na giełdzie; • zdeponowany kapitał dzieli się na dwie części: jedną część bank inwestuje w lokatę terminową, a drugą – w lokatę terminową na giełdzie • gdy inwestycje giełdowe przynoszą straty, bank (po upływie okresu, na jaki złożono lokatę) zwraca wpłacony kapitał wraz z gwarantowanymi odsetkami.

Źródło: Z. Makieła, T. Rachwał, Krok w przedsiębiorczość, Warszawa 2011, s. 74

Kryteria wyboru najlepszej lokaty bankowej (Z. Makieła, T. Rachwał, 2012):

- **Okres trwania lokaty** – długość trwania lokaty wpływa na wielkość jej oprocentowania (zazwyczaj jest ono wyższe dla lokat o dłuższych terminach).
- **Wysokość kwoty lokaty** – im wyższa kwota jest zdeponowana w banku, tym wyższe jest jej oprocentowanie.
- **Wysokość oprocentowania** – im wyższe oprocentowanie lokaty, tym jest ona korzystniejsza dla deponenta.
- **Rodzaj oprocentowania** – zazwyczaj banki oferują lokaty terminowe o stałym oprocentowaniu (dla lokat krótkoterminowych – do 1 roku). Oprocentowanie stałe obowiązuje przez cały okres trwania lokaty. Zmienna stopa procentowa jest zależna od zmian stóp procentowych NBP i może ulec zmianie. Pewny zysk zapewnia stała stopa procentowa.
- **Częstotliwość kapitalizacji odsetek** – odsetki ulegają kapitalizacji, gdy nie są na bieżąco wypłacane, ale powiększają pierwotny kapitał, czyli podstawę do naliczania odsetek. Im kapitalizacja jest częstsza, tym bardziej korzystna jest dla deponenta.

W zależności od podstaw i sposobu naliczania odsetek oraz częstotliwości ich wypłaty można wyodrębnić **rachunek odsetek**:

1. **prostych** – obliczane stale od tej samej kwoty pieniężnej, z reguły oznacza to, że są pobierane bieżąco po ich naliczeniu. Stosowany jest do obliczania kosztu wykorzystania obcego pieniądza w okresie nieprzekraczającym jednego roku.

2. **składanych** – odsetki ulegają kapitalizacji, tzn., nie są na bieżąco wypłacane, ale powiększają pierwotny kapitał, czyli podstawę do naliczania odsetek na następny okres. Wypłata odsetek następuje łącznie ze wzrostem kapitału.

Przykład 18

Obliczanie należnych odsetek od lokaty bankowej.

1. ***Odsetki proste.***

$$o = \frac{k \times s \times t}{100 \times 360}$$

o – odsetki proste

k – kapitał pierwotny

s – stopa procentowa

t – czas wykorzystania kapitału

Na jaki okres ulokowano w banku 20.000 zł, przy stopie 24% (dla roku bankowego), jeśli klient wycofał odsetki proste w wysokości 7.200 zł?

$$o = \frac{k \times s \times t}{100 \times 360} \text{ więc } t = \frac{0 \times 100 \times 360}{k \times s}$$

$$t = \frac{7.200 \times 100 \times 360}{20.000 \times 24} = 540 \ dni$$

W banku ulokowano 20.000 zł na okres 540 dni.

2. ***Odsetki składowe (kapitalizacje odsetek).***

Aby obliczyć należne odsetki od lokaty bankowej przy kapitalizacji częstszej niż rok, należy skorzystać z wzoru:

$$PV = FV \bullet \frac{1}{(1 + \frac{s}{100})^n}$$

FV – wartość przyszła zdeponowanej kwoty po n okresach
PV – wartość obecna zdeponowanej kwoty
s – roczna stopa procentowa
n – liczba okresów kapitalizacji

Przykład 19

Jaką kwotę należy wpłacić do banku, by po 5 latach odebrać 25.000 zł na kupno samochodu, jeśli bank oferuje stopę procentową 34% rocznie i półroczną kapitalizację odsetek.

$$PV = 25.000 \bullet \frac{1}{(1 + \frac{17}{100})^n} = 25.000 \bullet 0{,}208 = {}^{3}5.200 \ z$$

Do banku należy wpłacić 5.200 zł.

$$FV = PV \times (1 + \frac{s}{100})^n$$

Przykład 20

Klient ulokował depozyty po 1.000 zł na okres 12 miesięcy w dwu bankach. W pierwszym banku oprocentowanie w skali roku wynosi 13%, a odsetki płatne są po zakończeniu okresu lokaty. W drugim banku oprocentowanie wynosi 12,5% w skali roku, a kapitalizacja odsetek dokonywana jest w okresach miesięcznych. Która lokata jest korzystniejsza?

1. Wartość końcowa depozytu w pierwszym banku:

$$FV_1 = 1.000 \times (1 + \frac{13}{100}) = 1.130 \text{ z}$$

2. Wartość końcowa depozytu w drugim banku:

$$FV_2 = 1.000 \times (1 + \frac{0,125}{12})^{12} = 1.132,42 \text{ z}^3$$

Lokata w drugim banku jest korzystniejsza, ponieważ niższa stopa procentowa rekompensowana jest miesięczną kapitalizacją odsetek.

Inwestowanie

Inwestowanie to lokowanie przez podmioty gospodarcze lub osoby fizyczne wolnych środków pieniężnych w sposób zapewniający w przyszłości osiągnięcie zysków.

Rynek finansowy można zdefiniować jako **rynek**, na którym dokonuje się transakcji instrumentami finansowymi.

Instrument finansowy to zobowiązanie pieniężne jednego podmiotu względem innego w postaci papieru wartościowego lub zapisu księgowego niebędącego papierem wartościowym (np. uczestnictwo w funduszach inwestycyjnych).

Ze względu na przedmiot inwestycji wyróżnia się:

- inwestycje rzeczowe – przedmiot inwestycji ma charakter materialny;
- inwestycje finansowe – przedmiot inwestycji ma charakter niematerialny, to tzw. instrument finansowy.

Tabela 22. Inwestycje

Inwestycje rzeczowe:	Inwestycje finansowe:
• nieruchomości (np. dom, mieszkanie, lokal użytkowy);	• papiery wartościowe, np.: akcje, obligacje;
• ziemia;	• jednostki uczestnictwa funduszy inwestycyjnych;
• złoto, inne metale szlachetne (w formie sztabek);	• polisy ubezpieczeniowe z inwestycyjnym funduszem kapitałowym;
• wyroby jubilerskie i kamienie szlachetne;	• lokaty bankowe;
• przedmioty numizmatyczne, np. monety.	• waluty.

Źródło: Z. Makieła, T. Rachwał, Krok w przedsiębiorczość, Warszawa 2011,s. 82

Rynek kapitałowy jest segmentem rynku finansowego, który obejmuje również **rynek pieniężny** (krótkoterminowe papiery wartościowe i bony pieniężne, bony skarbowe, bony komercyjne oraz lokaty i depozyty międzybankowe) i **rynek kredytowy** (kredyty bankowe).

Rynek kapitałowy jest rynkiem szczególnych papierów wartościowych, oznaczających lokaty i kredyty długoterminowe (powyżej 1 roku).

Papiery wartościowe rynku kapitałowego są to dokumenty stwierdzające istnienie określonych praw majątkowych. Stanowią one podstawową formę lokat pieniężnych (akcje) i kredytów długoterminowych (obligacje).

Inwestycje finansowe dokonywane na rynku kapitałowym dotyczą przede wszystkim papierów wartościowych:

- dłuższych – potwierdzających wielkość zadłużenia danego podmiotu wystawiającego te papiery, np.: obligacje, bony skarbowe, weksle;
- własnościowych – będących uznaniem prawa własności, np. obligacje.

Obligacje

Obligacja jest papierem wartościowym emitowanym w serii, w którym emitent stwierdza, że jest dłużnikiem właściciela obligacji (obligatariusza) i zobowiązuje się wobec niego do spełnienia określonego świadczenia o charakterze pieniężnym lub niepieniężnym (art. 4 ust. 1–2 ustawy o obligacjach[32]).

Ze względu na emitenta obligacji wyróżnia się:

1. **Obligacje skarbowe** – emitentem jest Skarb Państwa. Ich sprzedaż często związana jest z koniecznością podniesienia deficytu budżetowego. Emisja obligacji związana jest z zaciągnięciem pożyczek u nabywców. Wielkości pożyczki to wartość nominalna, na jaką obligacja jest wystawiona (cena nominalna). Cena rynkowa obligacji, po jakiej można ją sprzedać (kupić) może odbiegać w górę lub w dół od wartości nominalnej w zależności od rynkowej stopy procentowej.

Cena rynkowa obligacji maleje wraz ze wzrostem inflacji i zbliża się do ceny nominalnej, jeżeli zbliża się termin wykupu.

Można ją wyliczyć według wzoru (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011):

$$PR_0 = PN_0 \times \frac{r_0}{r_b}$$

Gdzie:

PR_0 – cena rynkowa obligacji;

PN_0 – cena nominalna obligacji;

r_0 – roczna stopa oprocentowania obligacji (stała);

r_b – roczna stopa procentowa płacona przez banki (stała);

Z obligacjami związane są trzy kategorie stopy procentowej:

- **<u>stopa procentowa nominalna</u>** –stopa, według której dłużnik płaci odsetki. Jest to stosunek odsetek za dany rok (**O**) do wartości nominalnej obligacji (PN) wyrażony w procentach.

$$SN = \frac{0}{PN} : 100\%$$

- **<u>stopa procentowa bieżąca</u>** –stopa, według, której właściciel liczy na bieżąco odsetki. Jest to stopa realna odsetek, czyli stosunek odsetek za dany rok do ceny rynkowej obligacji.

$$SB = \frac{0}{PR} \times 100\%$$

32 Ustawa z dnia 29 czerwca 1995 r. o obligacjach, Dz. U. z 2001 r. nr 120, poz. 1300, ze zm.

- **stopa procentowa efektywna** –realna stopa dochodu z obligacji, uwzględniająca obok rocznego dochodu z odsetek ewentualny dochód z różnicy cen w przeliczeniu na rok. Jest to stopa bieżąca skorygowana o różnicę między nominalną a rynkową ceną obligacji wyrażoną w postaci rocznej stopy realnej.

$$SE = SB + \frac{(PN - PR):n}{PR} \times 100\%, \; gdy \; PN > PR$$

$$SE = SB + \frac{(PN - PR):n}{PR} \times 100\%, \; gdy \; PN < PR$$

Przykład 21 (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011):

Bank rozważa lokatę wolnych środków pieniężnych w 5-letnie obligacje, którym do wykupy pozostało 3 lata. Wartość nominalna obligacji wynosi 100.000 zł, cena kupna (aktualny kurs) 93.000 zł, stopa odsetek 16% rocznie. Oprocentowanie obligacji jest stałe, a odsetki są płacone na koniec roku. Bank uzależnia decyzję o zakupie od tego, czy transakcja zapewni zwrot zainwestowanej kwoty i zysk minimum 18%.

$$SE = SB + \frac{(PN - PR):n}{PR} \times 100\%, \; PN > PR$$

$$SB = \frac{(0)}{PR} \times 100\%$$

$$SE = \frac{0}{PR} \times 100\% + \frac{(PN - PR):n}{PR} \times 100\%$$

O = 0,16 x 100.000 = 16.000 zł

PN – 100.000 zł

PR – 93.000 zł

O = 16.000

n – 3 lata

PN > PR

$$SE = \frac{16.000}{93.000} \times 100\% + \frac{(100.000 - 93.000):3}{93.000} \times 100\% = 17,2\% + 2,5\% = 19,7\%$$

Realny dochód z obligacji (19,7%) jest większy niż żądane przez bank 18%, zwrot zainwestowanej kwoty nastąpi przy wykupie (cena kupna 93.000 zł, a cena wykupu 100.000 zł), co oznacza, że obligacje należy kupić.

2. **Obligacje komunalne (gminne)** – emitentami obligacji komunalnych są jednostki samorządu terytorialnego. Zgodnie z ustawą o finansach publicznych mogą one zaciągać kredyty i pożyczki oraz emitować papiery wartościowe (obligacje) z przeznaczeniem m.in. na: pokrycie deficytu budżetu jednostek samorządu terytorialnego czy spłatę wcześniej zaciągniętych zobowiązań z tytułu emisji papierów wartościowych oraz zaciągniętych pożyczek i kredytów.

3. **Obligacje przedsiębiorstw (korporacyjne)**

Bony skarbowe

Bony skarbowe są papierami emitowanymi w celu finansowania deficytu budżetowego na okres od 1 do 90 dni lub od 1 do 52 tygodni, a ich nominał wynosi 10.000 zł. Mogą być nabywane przez osoby prawne lub fizyczne albo spółki nieposiadające osobowości prawnej (§ 4-5 Rozp. w sprawie bonów skarbowych[33]).

Bony skarbowe są papierami dyskontowymi. Dyskonto jest to kwota, o jaką pomniejsza się wartość nominalną bonów przy zakupie lub sprzedaży.

Cenę kupna/sprzedaży można wyliczyć według wzorów:

$$C_{KS} = WN - DYSKONTO = WN \times \frac{SD}{100} \times \frac{T}{360} = WN \times (1 - \frac{SD}{100} \times \frac{T}{360}$$

gdzie:

C_{KS} – cena, kupna, sprzedaży;

WN – wartość nominalna;

SD – stopa dyskonta odpowiednio w momencie kupna lub sprzedaży (stosunek dyskonta do wartości nominalnej wyrażonej w% w skali roku);

T – liczba dni odpowiednio od momentu kupna lub sprzedaży do wykupu;

$$SD_{KS} = \frac{WN - C_{KS}}{WN} \times 100\% \times \frac{360}{T}$$

Stopa dyskonta jest stopą nominalną i nie określa, jaka jest dochodowość bonów, czyli jaka jest efektywna stopa zwrotu na kapitale, którą uzyskujemy z inwestycji (G. Białek, Warszawa 1994).

Efektywna stopa dochodu przy założeniu przetrzymywania do wykupu (rentowność kupna) jest wyliczana według wzoru:

$$R_K = \frac{WN - C_K}{C_K} \times \frac{360}{T} \times 100\%$$

WN – wartość nominalna

C_K – cena kupna

R_K – rentowność kupna

T – liczba dni od kupna do wykupu

Efektywna stopa dochodu przy sprzedaży (rentowność sprzedaży) jest wyliczona według wzoru:

$$R_S = \frac{C_S - C_K}{C_K} \times \frac{360}{T} \times 100\%$$

gdzie:

R_S – rentowność sprzedaży;

C_S – cena sprzedaży;

C_K – cena kupna;

T – liczba dni od kupna do sprzedaży.

33 Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 20 grudnia 2010 r. w sprawie warunków emitowania bonów skarbowych ,Dz. U. nr 250, poz. 1679) – dalej jako: Rozp. w sprawie bonów skarbowych.

Przykład 22

Bank nabył na przetargu 90-dniowy bon skarbowy o nominale 10.000 zł za 98.000 zł i odsprzedał go na rynku wtórnym po 40 dniach przy rynkowej stopie dyskonta 9%. Ile wynosiła stopa dyskonta w momencie nabycia, za jaką cenę bon został sprzedany i jaka była rentowność sprzedaży? Czy transakcja była opłacalna?

$$SD = \frac{WN - C_K}{WN} \times 100\% \times \frac{360}{T}$$

SD – stopa dyskonta w momencie nabycia

WN – wartość nominalna – 10.000 zł

C_K – cena kupna – 98.000 zł

T – liczba dni – 90

$$SD = \frac{10.000 - 98.000}{10.000} \times \frac{360}{90} \times 100\% = 8\%$$

$$C_S = WN \times (1 - \frac{SD}{100} \times \frac{T}{360})$$

C_S – cena sprzedaży

WN – wartość nominalna – 10.000 zł

SD – rynkowa stopa dyskonta – 9%

T – liczba dni (90-40) = 50 dni

$$C_S = 10.000 \times (1 - \frac{9}{100} \times \frac{50}{360}) = 10.000 \times 0{,}9875 = 9.875\ zl$$

$$R_S = \frac{C_X - C_K}{C_K} \times \frac{360}{T} \times 100\%$$

$$R_S = \frac{9.875 - 9.800}{9.800} \times \frac{360}{40} \times 100\% = 6{,}89\%$$

T – 40 dni

C_s – 9.875 zł

C_k – 9.800 zł

$$R_K = \frac{WN - C_K}{C_K} \times \frac{360}{T} \times 100\%$$

$$R_K = \frac{10.000 - 9.800}{9.800} \times \frac{360}{90} \times 100\% = 8{,}16\%$$

T – 90 dni

WN – 10.000 zł

C_k – 9.800 zł

Stopa dyskontowa w momencie nabycia wynosiła 8%. Bon został sprzedany za 9.875 zł. Rentowność sprzedaży wynosiła 6,89%. Transakcje sprzedaży nie była opłacalna ponieważ $(R_S < R_K)$ rentowność sprzedaży była niższa niż rentowność kupna.

Weksle

Weksel jest bezwarunkowym zobowiązaniem do zapłaty określonej sumy środków pieniężnych w określonym czasie i miejscu.

Weksel może funkcjonować w obrotach jak pieniądz, choć nim nie jest. Można nim płacić własne długi poprzez przeniesienie wierzytelności z weksla na inną osobę (tzw. **indas** – pisemne oświadczenie woli przeniesienia praw z weksla na rzecz osoby trzeciej). W oparciu o weksel można również uzyskać kredyt dyskontowy lub redyskontowy (T. Galbarczyk, J. Świderska, Warszawa 2011).

Dyskonto jest to odsprzedaż weksla przed terminem płatności bankowi komercyjnemu. Bank potrąca odsetki według stopy dyskonta za okres od dnia dyskonta włącznie do dnia wykupu (licząc za rok – 360 dni, za miesiąc – 30 dni) oraz prowizję.

Kredyt dyskontowy uzyskuje osoba dyskontująca weksel (podawca), a spłaca go dłużnik wekslowy w momencie wykupu weksla w terminie płatności.

Kredyt dyskontowy udzielany jest w wysokości równej sumie wekslowej pomniejszonej o odsetki dyskontowe, które wylicza się według wzoru[34]:

$$D = \frac{d \times t}{360} \times \frac{S}{100}.$$

D – kwota odsetek dyskontowych

d – stopa dyskontowa obowiązująca w dniu uruchomienia kredytu wekslowego

t – liczba dni od dnia zdyskontowania weksla, do dnia kończącego okres, na który został udzielony kredyt wekslowy

S – suma wekslowa (kwota weksla)

360 – liczba dni w roku przyjęcia do obliczania odsetek

Przykład 23

Należy wyliczyć kwotę kredytu dyskontowego, jeżeli klient sprzedaje weksel w banku w dniu 7.11.2010 r. przy zastosowaniu stopy dyskonta 6% i prowizji 1,5%. Weksel został wystawiony na sumę 15.000 zł, z terminem płatności 10.01.2011 r. Liczba dni od momentu dyskonta do dnia płatności – 63.

$$D = \frac{6 \times 63}{360} \times \frac{15.000}{100} = 157,5\ zl$$

Suma kredytu:

$$15.000 - 15.000 \times (6 \times 63 / 100 \times 360) - 15.000 \times 1,5 / 100 = 15.000 - 157,5 - 225 = 14.617,5\ zl$$

Suma kredytu wynosi 14.617,5 zł

34 Uchwała nr 45/2006 Zarządu NBP z dnia 22 grudnia 2006 r., Dalla NBP nr 14, poz. 18, §10.

Akcje

Akcja jest papierem uprawniającym do tzw. dywidendy oraz do majątku spółki w razie jej likwidacji.

Dywidenda jest to udział w zyskach spółki akcyjnej. Nie jest ona dochodem stałym. Spółka wypłaca dywidendę tylko wtedy, gdy osiąga zyski. Poza tym decyzję o podziale podejmuje walne zgromadzenie akcjonariuszy (art. 395, §2, pkt. 2 KSH[35]).

Rodzaje akcji i prawa z nich wynikające

Ze względu na sposób przenoszenia własności (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011):

1. **Imienne – w treści zawierają nazwisko nabywcy (właściciela)**. Musi ono być również wpisane do księgi akcyjnej prowadzonej przez zarząd spółki. Występują pewne ograniczenia ze zbywalnością. Ich zbycie wymaga oświadczenia woli posiadania, zgłoszenia nowego właściciela do zarządu w celu wpisania go do księgi akcyjnej i zgody organów spółki.

2. **Na okaziciela** – muszą być opłacone w całości przed pobraniem. Stanowią większość akcji występujących w publicznym obrocie. Ich zbywanie odbywa się poprzez zwykłe wręczenie dokumentu, jeżeli akcja występuje w postaci materialnej, i przez odpowiednie przeksięgowanie, gdy akcja występuje w postaci niematerialnej.

Ze względu na uprawnienia właścicieli:

1. **Zwykłe** – są podstawą obrotu giełdowego i z ich posiadaniem nie wiążą się żadne dodatkowe lub szczególne uprawnienia. Ich nabycie daje posiadaczowi określone prawa.

   Prawa korporacyjne:

   - **prawo do uczestnictwa w spółce akcyjnej;**
   - **prawo do uczestniczenia w Walnym Zgromadzeniu i współdecydowania o sprawach będących przedmiotem jego obrad;**
   - **bierne prawo wyborcze** – akcjonariusz może zostać wybrany do zarządu lub do rady nadzorczej spółki, której akcje posiada;
   - **czynne prawo wyborcze** – głosowanie w wyborach członków władz spółki;
   - **prawo mniejszości** – pozwala na odpowiednie zabezpieczenie interesów tych akcjonariuszy, którzy nie dysponują większością akcji, ale posiadają ich pewną liczbę.

   Prawa majątkowe:

   - **prawo do udziału w rocznym zysku spółki (dywidendy);**
   - **prawo poboru akcji nowych emisji** – uprawnia dotychczasowych akcjonariuszy do subskrybowania określonej liczby nowych akcji, z reguły w określonym stosunku do ilości już posiadanych;
   - **prawo do części wartości majątku w przypadku likwidacji spółki po pokryciu jej zobowiązań** – proporcjonalnie do udziału akcji posiadacz powinien uzyskać część jej majątku z masy upadłościowej, ale po zaspokojeniu zobowiązań wobec innych wierzycieli.

2. **Uprzywilejowane** – z ich posiadaniem wiążą się dodatkowe uprawnienia.

   - W Polsce uprzywilejowanie akcji może dotyczyć wysokości wypłaconej dywidendy, liczby głosów przypadających na jedną akcję na zgromadzeniu akcjonariuszy oraz prawa akcjonariusza przypadającego na daną akcję majątku spółki.
   - Rodzaje i sposób uprzywilejowania określa dokładnie statut spółki natomiast KSH reguluje w nie-

35 Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych, Dz. U. nr 94, poz. 1037, ze zm.) – dalej cytowana jako: KSH.

których przypadkach zakres uprzywilejowania, np. uprzywilejowanie odnośnie liczby głosów przypadających na jedną akcję nie może przekroczyć 2 głosów na jedną akcję.
- W Polsce akcje uprzywilejowane **muszą być imienne**.
- Uprzywilejowanie co do głosu nie może być stosowane w spółkach publicznych i wygasa w przypadku zamiany takiej akcji na akcje na okaziciela lub jej zbycia wbrew zastrzeżonym warunkom w statucie.
- Akcja uprzywilejowana w zakresie dywidendy nie może upoważniać akcjonariusza do jej otrzymania przed jej wypłatą z tytułu akcji zwykłej. Dywidenda może być większa, jednakże najwyżej o 50%, od dywidendy wypłaconej z tytułu posiadania akcji zwykłej.
- Regulacji tych nie stosuje się do uprzywilejowania w zakresie dywidendy od **akcji niemych**, a więc akcji które nie mają prawa głosu. Oznacza to, że tego typu akcje mogą być uprzywilejowane co do dywidendy bez ograniczenia jej wysokości oraz że mogą korzystać w danym roku z pierwszeństwa zaspokojenia poza pozostałymi akcjami.

KSH rozróżnia jeszcze akcje pieniężne i niepieniężne (aportowe). Te pierwsze muszą mieć pokrycie w gotówce, natomiast te drugie – pokrycie rzeczowe. Akcje niepieniężne muszą mieć jednak pokrycie w całości nie później niż przed upływem roku od zarejestrowania spółki.

Innym rodzajem akcji, które nie występują w obrocie giełdowym, **są imienne akcje winkulowane**, co oznacza, że mogą być zbywalne jedynie na mocy decyzji zarządu spółki. Emitują je spółki, którym bardzo zależy na tym, aby cały czas mieć stałe grono akcjonariuszy. Akcje winkulowane są więc papierami imiennymi o znacznie utrudnionej zbywalności w porównaniu z akcjami imiennymi zwykłymi.

Jeżeli chodzi o akcje występujące w obrocie giełdowym, to warto zwrócić uwagę na następujące kwestie:

1. Na giełdach jest najwięcej akcji zwykłych. Nie stwarza się dla nich na ogół żadnych ograniczeń ani w sensie przedmiotowym ani podmiotowym. Wyjątek stanowią akcje firm mających istotne znaczenie dla gospodarki, w stosunku do których mogą zostać wprowadzone pewne ograniczenia, np. licencjonowanie maklerów (brokerów), którzy mogą handlować akcjami takiej spółki.

2. Wyróżnia się także **akcje pierwszorzędne (blue chips)**, którymi są akcje renomowanych i dobrze znanych firm. Akcje te charakteryzują się stabilnym kursem, a dywidenda jest wypłacana regularnie. Charakteryzują się wysoką płynnością.

3. W obrocie giełdowym występują tzw. **akcje groszowe**. Cechą charakterystyczną tych akcji jest to, że są sprzedawane po bardzo niskiej cenie. Są przedmiotem zainteresowania spekulantów giełdowych.

Cena (wartość) nominalna akcji wynika z podzielenia kapitału akcyjnego przez liczbę wyemitowanych akcji. Oprócz ceny nominalnej akcje posiadają cenę emisyjną, po jakiej następuje ich sprzedaż na rynku pierwotnym, oraz cenę rynkową, po jakiej obrót akcjami odbywa się na rynku wtórnym, w tym na giełdzie.

Przy wyliczaniu ceny rynkowej i stopy dywidendy można skorzystać z wzorów:

$$PR = \frac{d}{r} \times 100 \qquad PR = PN \times \frac{SD}{r}$$

$$SD = \frac{d}{PN} \times 100\% \qquad SD = \frac{d}{PR} \times 100\%$$

NOMINALNA *REALNA*

gdzie:

PR – cena rynkowa;

d – roczna dywidenda na 1 akcję;

r – roczna stopa oprocentowania wkładów w banku;

PN – cena nominalna;

SD – stopa dywidendy w skali roku.

Dla oceny efektywności inwestowania w akcje wykorzystywane są także dodatkowe informacje (W. Dębski, Warszawa 2003):

- **P/E Ratio** – stosunek ceny rynkowej do dochodu netto na 1 akcję. Im współczynnik niższy, tym kupno akcji jest lepszą lokatą.
- **Stopa dywidendy** – stosunek dywidendy na 1akcję do jej ceny rynkowej, wyrażony w procentach (stopa realna) o stałym oprocentowaniu lub z lokatami w banku.
- **Współczynnik pokrycia** – stosunek dochodów netto na 1 akcję do jednostkowej dywidendy. Obrazuje politykę w zakresie wypłat dywidend. (T. Galbarczyk, J. Świderska, 2011). Niższe dywidendy, przy gromadzeniu większej części zysku w spółce, powodują wzrost wskaźnika. Maleje wtedy bieżąca dochodowość akcji, ale pozwala to na inwestycje i rozwój oraz umożliwia wzrost dochodowości w przyszłości.

$$WP = \frac{DN/1a}{d}$$

Przykład 24

Policzyć P/E Ratio, stopę dywidendy i współczynnik pokrycia, jeżeli dochód netto spółki za ostatni rok wyniósł 3.200.000 zł, na wypłatę dywidendy przeznaczono 60% dochodu netto, spółka wyemitowała 1.200.000 akcji zwykłych, cena rynkowa akcji wynosi28 zł.

$$DN/1a = 3.200.000 : 1.200.000 = 2{,}67\ PLN\ (\text{dochód netto na 1 akcje})$$

Fundusz dywidendy = 3.200.000 x 0,60 = 1.920.000 zł

d = 1.920.000: 1.200.000 = 1,60 zł (roczna dywidenda na 1 akcję)

$$P/E\ Ratio = \frac{PR}{DN/1a} = \frac{28}{2{,}67} = 10{,}49$$

$$SD = \frac{d}{PR} \times 100\% = \frac{1{,}60}{28} \times 100\% = 5{,}71\%$$

REALNA

$$WP = \frac{DN/1akcje}{d} = \frac{2{,}67}{1{,}60} = 1{,}67$$

Fundusz inwestycyjny

Fundusze inwestycyjne służą do zbiorowego inwestowania środków pieniężnych uzyskanych od wielu, często drobnych, inwestorów. Środki te lokują oni najczęściej w papiery wartościowe.

Fundusze inwestycyjne można różnie klasyfikować, w zależności od przyjętych kryteriów.

Z punktu widzenia kręgu inwestorów wyróżnia się fundusze **publiczne** i **specjalne.**

Udziały **funduszy publicznych** nabywają z reguły inwestorzy prywatni; stanowią one najczęściej występujący rodzaj funduszy.

Fundusze specjalne tworzone są dla inwestorów instytucjonalnych (instytucje ubezpieczeniowe, fundacje).

Rodzaj zarządzanego majątku stanowi kryterium podziału funduszy na lokujące w:

- **papiery wartościowe** – majątek funduszy inwestycyjnych w papiery wartościowe stanowią głównie akcje, obligacje i papiery wartościowe rynku pieniężnego;
- **nieruchomości** – (np.: budynki, ziemia) fundusze czerpią dochody z czynszów i zysków osiągniętych ze sprzedaży. Posiadają one większe rezerwy środków płynnych niż fundusze papierów wartościowych.

Istnieją trzy rodzaje funduszy inwestycyjnych, różniące się zarówno sposobem organizacji, dopuszczalnym przedmiotem lokat, dostępnością dla inwestorów, jak i stosowaną strategią inwestowania.

Tabela 23. Rodzaje funduszy inwestycyjnych działających w Polsce

Rodzaj funduszu	Co posiadają uczestnicy?
Fundusz inwestycyjny otwarty	Jednostki uczestnictwa
Specjalistyczny fundusz inwestycyjny otwarty	Jednostki uczestnictwa
Fundusz inwestycyjny zamknięty	Certyfikaty inwestycyjne

Źródło: P. Biernacki, P. Szulc, Pierwsze kroki na rynku kapitałowym, Warszawa 2009, s. 42

- **Fundusze inwestycyjne otwarte** zbywają i odkupują jednostki uczestnictwa na żądanie uczestników. Jednostki uczestnictwa są tytułem do udziału w dochodach funduszu zgodnie z jego regulaminem. Fundusze inwestycyjne otwarte są najbardziej powszechne i najłatwiej do nich przystąpić – nie ma w tym zakresie żadnych ograniczeń. Obowiązują je jednak ścisłe ograniczenia dotyczące tego, w co mogą inwestować powierzone środki.
- **Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte** również zbywają i odkupują jednostki uczestnictwa na żądanie uczestników, z tą różnicą, że fundusz może określać warunki, w tym termin w którym uczestnik może żądać odkupienia jednostki uczestnictwa przez fundusz. Fundusze tego rodzaju mają mniejsze ograniczenia w zakresie możliwych do prowadzenia inwestycji. Jednocześnie statut funduszu może stanowić, że jego uczestnikami mogą być na przykład osoby prawne, a nie fizyczne, a wysokość jednorazowej wpłaty może zostać ustalona na relatywnie wysokim poziomie.
- **Fundusze inwestycyjne zamknięte** emitują certyfikaty inwestycyjne – zarówno takie, które będzie można na przykład kupić i sprzedać na giełdzie, jak i niepubliczne certyfikaty inwestycyjne, w przypadku których nie ma takich możliwości. Fundusze zamknięte mają o wiele większe możliwości inwestowania niż fundusze otwarte – mogą na przykład kupować i sprzedawać waluty lub udziały w spółkach z ograniczoną odpowiedzialnością.

Fundusz inwestycyjny otwarty oraz specjalistyczny fundusz inwestycyjny udostępnia różne kategorie uczestnictwa.

Różne rodzaje funduszy i różne strategie inwestycyjne przez nie stosowane oznaczają, że poziom przypisanego ryzyka oraz oczekiwana stopa zwrotu może wahać się w dużym przedziale.

Ze względu na stosowaną politykę inwestycyjną fundusze można podzielić na kilka głównych grup (P. Biernacki, P. Szulc, Warszawa 2009).

Tabela 24. Podział funduszy inwestycyjnych

Profil funduszu	Rodzaje lokat	Oczekiwana stopa zwrotu i ryzyko
Rynku pieniężnego	Instrumenty rynku pieniężnego, depozyty.	Oczekiwany zysk niewielki, ale obarczony najmniejszym ryzykiem.
Obligacji	Obligacje Skarbu Państwa, obligacje gmin, obligacje przedsiębiorstw i bony skarbowe.	Oczekiwany wyższy zysk towarzyszy mu większe ryzyko (np. stopy procentowej i niewypłacalności).
Akcji	Akcje przedsiębiorstw.	Możliwy oczekiwany wysoki zysk, ale ryzyko najwyższe spośród funduszy (m.in. rynkowe, biznesowe, nie-wypłacalność).
Mieszane (zrównoważone, stabilnego wzrostu)	Obligacje, akcje.	Dzięki akcjom wyższy oczekiwany zysk, dzięki obligacjom, niższe ryzyko – poziom ryzyka pomiędzy funduszami akcji a funduszami obligacji.

Źródło: P. Biernacki, P. Szulc, Pierwsze kroki na rynku kapitałowym, Warszawa 2009, s. 43

- **Fundusze rynku pieniężnego** – o względnie niskim ryzyku, ale nieprzynoszące dużych zysków. Stopa zwrotu najczęściej odpowiada stopie rynku międzybankowego. Inwestują głównie w instrumenty rynku pieniężnego i depozyty.
- **Fundusze akcji** – większą część zgromadzonego w nich kapitału inwestują w akcje przedsiębiorstw. Dzięki temu w okresie dobrej koniunktury na giełdzie środki, które zainwestowane w fundusz akcji mogą przynieść znaczny zysk, jednak w przypadku spadku kursów akcji możemy ponieść znaczne straty.
- **Fundusze mieszane** – czyli zrównoważone lub stabilnego wzrostu – inwestują powierzane środki zarówno w akcje, jak i obligacje. Akcje są motorem zysku, natomiast obligacje dają pewne bezpieczeństwo inwestycji i powodują, że ewentualne straty nie będą takie duże, jakby to miało miejsce, gdybyśmy inwestowali środki tylko na rynku akcji.

Inwestowanie w jednostki uczestnictwa funduszy inwestycyjnych nie wymaga takich umiejętności i czasu, jak samodzielne inwestowanie, np. w akcje poszczególnych spółek.

Ocena ryzyka inwestycji

Jedną z podstawowych charakterystyk każdej inwestycji jest **dochód**. **Podstawową miarą dochodu** jest stopa dochodu, zwana również stopą zwrotu. Stopa ta jest zazwyczaj podawana w skali rocznej, dotyczyć zaś może dowolnego okresu inwestowania.

Najprostszym sposobem wyznaczania stopy dochodu jest zastosowanie koncepcji prostej stopy dochodu według wzoru (K. Jajuga, Warszawa 2009):

$$r = \frac{1}{n} \frac{F_V - P_V}{P_V}.$$

Gdzie:

r – stopa dochodu inwestycji, w okresie jednego roku;

F_V – wartość końcowa inwestycji;

P_V – wartość początkowa inwestycji;

n – liczba lat trwania inwestycji.

Ocena ryzyka jest bardzo istotna przy podejmowaniu decyzji o wyborze inwestycji (K. Jajuga, 2009).

- Jednym ze sposobów oceny ryzyka jest podanie kategorii ryzyka w odniesieniu do danej inwestycji, na przykład: bardzo wysokie ryzyko, wysokie ryzyko, średnie ryzyko, niskie ryzyko, bardzo niskie ryzyko. Ta ocena jest stosowana przy niektórych rodzajach ryzyka, takich jak ryzyko niedotrzymania warunków lub ryzyko polityczne.
- Innym często stosowanym sposobem oceny ryzyka jest ocena ilościowa poprzez podanie konkretnych wartości, czyli miary ryzyka.

Im większe zmienności ceny lub stopy dochodu instrumentu finansowego, tym większe ryzyko inwestycji w ten instrument.

Im większa wrażliwość ceny lub stopy dochodu instrumentu finansowego na czynniki ryzyka, tym większe ryzyko inwestycji ten instrument.

Do koncepcji mierzenia ryzyka za pomocą zmienności stóp dochodu (ewentualnie zmienności cen) odnosi się najpopularniejsza miara ryzyka (będąca jednocześnie miarą zmienności) zwana odchyleniem standardowym stopy zwrotu, określona jest na podstawie odchyleń stóp zwrotu od przeciętnej stopy zwrotu za pomocą następującego wzoru (K. Jajuga, Warszawa 2009):

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \times (R_1 - R)^2 + (R_2 - R)^2 + (R_3 - R)^2 \ldots + (R_n - R)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - R)^2}{n-1}}$$

gdzie:

S – odchylenie standardowe;

R – przeciętna stopa zwrotu;

R_t – stopa zwrotu realizowana w tym okresie;

n – liczba danych z przeszłości, wziętych do oszacowania.

Odchylenie standardowe stopy zwrotu ma u podstaw sumę kwadratów różnic między zrealizowanymi stopami zwrotu a przeciętną stopą zwrotu (oznaczoną na podstawie danych z przeszłości). Różnice te świadczą o ryzyku – im są one większe, tym większe ryzyko. Nie ma przy tym znaczenia, czy dana różnica jest ujemna (tzn. realizowana stopa zwrotu jest niższa od przeciętnej) czy dodatnia (tzn. zrealizowana stopa zwrotu jest wyższa od przeciętnej)

Odchylenie standardowe stopy zwrotu wskazuje, o ile przeciętnie, w typowych warunkach rynkowych, zrealizowana stopa zwrotu może różnić się od przeciętnej stopy zwrotu (K. Jajuga, 2009).

Przykład 25

Na przykładzie poniższych danych wyliczyć oczekiwaną stopę zysku i oszacować ryzyko obu akcji.

Okresy sytuacji gospodarczej (I)	Stopy zysku z akcji [%]	
	A	B
1	3	2
2	4	3
3	5	4
4	6	7
5	10	9
6	7	5
7	6	4
8	4	2
9	1	8
10	2	3

Źródło: Opracowanie własne

$$R_A = \frac{\sum_{t=1}^{10} Z_b}{10} = \frac{3 + 4 + 5 + 8 + 10 + 7 + 6 + 4 + 1 + 2}{10} = \frac{50}{10} = 5\%$$

$$R_A = \frac{\sum_{t=1}^{10} Z_b}{10} = \frac{2 + 3 + 4 + 7 + 9 + 5 + 4 + 2 + 8 + 3}{10} = \frac{47}{10} = 4{,}7\%$$

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (R_t - R)^2}{n - 1}} =$$

$$\sqrt{\frac{(3^{-2} - 5)^2 + (4^{-1} - 5)^2 + (4^{0} - 5)^2 + (8^{3} - 5)^2 + (10^{5} - 5)^2 + (7^{2} - 5)^2 + (6^{1} - 5)^2 + (4^{-1} - 5)^2 + (1^{-4} - 5)^2 + (2^{-3} - 5)^{-3}}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 1 + 0 + 9 + 25 + 4 + 1 + 1 + 16 + 9}{9}} = \sqrt{\frac{70}{9} = \sqrt{7{,}78}}$$

$$S_A = \sqrt{7{,}78} = 2{,}789 \text{ » } 2{,}79$$

$$S_B = \sqrt{\frac{(2^{-2,7} - 4,7)^2 + (3^{-1,7} - 4,7)^2 + (4^{-0,7} - 4,7)^2 + (7^{2,3} - 4,7)^2 + (9^{4,3} - 4,7)^2 + (5^{0,3} - 4,7)^2 + (4^{-0,7} - 4,7)^2 + (2^{-2,7} - 4,7)^2}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{(8^{3,3} - 4,7)^2 + (8^{-4,7} - 4,7)^2}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{7,29 + 2,89 + 0,49 + 5,29 + 18,49 + 0,09 + 0,49 + 7,29 + 10,89 + 2,89}{9}} = \sqrt{\frac{56,1}{9}} = \sqrt{6,23}$$

$$S_B = \sqrt{6,23} = 2,496 \approx 2,50$$

Z powyższych obliczeń wynika, że ryzyko inwestycji w akcje spółki A jest wyższe od ryzyka inwestycji w akcje spółki B, ponieważ odchylenie standardowe akcji A jest większe niż akcji B, tzn. że ryzyko związane z tym papierem jest większe.

Giełda Papierów Wartościowych

Na rynku finansowym, zwłaszcza na rynku kapitałowym (obejmującym głównie akcje i obligacje), można wyróżnić następujące segmenty:

- **rynek pierwotny** –segment rynku kapitałowego, na którym wyemitowany instrument finansowy jest sprzedawany po raz pierwszy w ofercie publicznej;
- **rynek wtórny** –ten segment rynku kapitałowego, na którym dokonuje się obrotu uprzednio wyemitowanym i nabytym przez jakiegoś inwestora instrumentem finansowym;
- **rynek regulowany** – działający w sposób stały, zorganizowany system obrotu instrumentami finansowymi, który podlega nadzorowi właściwego organu (w Polsce KNF), zapewnia inwestorom powszechny i równy dostęp do informacji rynkowej oraz jednakowe warunki nabywania i zbywania tych instrumentów.

Giełda

Giełda jest to regularne, odbywające się w określonym miejscu i czasie, podporządkowane określonym zasadom spotkanie kupujących i sprzedających mające na celu zawieranie transakcji kupna-sprzedaży (K. Jajuga, 2009).

Istnieją różne rodzaje giełd, w zależności od tego, co jest przedmiotem transakcji. Do najważniejszych należą:

- **giełdy papierów wartościowych**, na których przedmiotem obrotu są papiery wartościowe, głównie akcje i obligacje;
- **giełdy towarowe**, na których obraca się dokumentami wiązkości towarów.

Instytucje rynku kapitałowego

W Polsce nadzór nad rynkiem kapitałowym spełnia Komisja Nadzoru Finansowego (KNF). Zgodnie z prawem KNF jest organem nadzoru nad obrotem instrumentami finansowymi, jak również funkcjonowaniem rynku regulowanego. Do zadań KNF należy między innymi:

- podejmowanie działań służących prawidłowemu funkcjonowaniu rynku finansowego;
- podejmowanie działań mających na celu rozwój rynku finansowego i jego konkurencyjności;
- udział w przygotowywaniu projektów aktów prawnych w zakresie nadzoru nad rynkiem finansowym.

Ważnym podmiotem na rynku kapitałowym jest **Krajowy Depozyt Papierów Wartościowych SA (KDPW)**. Jest to instytucja depozytowo-rozliczeniowa, do której zadań należy m.in.:

- rejestrowanie instrumentów finansowych dopuszczonych w ofercie publicznej;
- rozliczanie transakcji zawieranych na rynku regulowanym.

Transakcje na rynku kapitałowym nie byłyby możliwe bez istnienia instytucji pośredniczących między stronami transakcji.

Są to: domy maklerskie, Krajowy Depozyt Papierów Wartościowych, fundusze inwestycyjne oraz banki, których zadaniem jest przeprowadzanie transakcji na rynku kapitałowym, w tym na giełdzie. Domy maklerskie działają jako pośrednicy inwestorów.

Najważniejszymi usługami realizowanymi przez domy maklerskie są:

- przyjmowanie i realizacja na giełdzie zleceń kupna i sprzedaży instrumentów finansowych;
- organizowanie oferty publicznej sprzedaży instrumentów finansowych;
- zarządzanie portfelem instrumentów finansowych na zlecenie;
- usługi doradcze.

Fundusze inwestycyjne – instytucje finansowe zarządzające pieniędzmi powierzonymi przez indywidualnych inwestorów.

Zlecenia transakcji giełdowych składane są przez doradców inwestycyjnych, maklerów, asystentów maklera. Formalnie **transakcja giełdowa** to umowa zobowiązująca do przeniesienia własności dopuszczonych do obrotu instrumentów finansowych.

Makler giełdowy – osoba zawodowo zajmująca się pośredniczeniem w transakcjach kupna i sprzedaży papierów wartościowych. Aby wykonywać ten zawód, trzeba mieć licencję.

Istotnych informacji przy podejmowaniu decyzji o zakupie lub sprzedaży papierów wartościowych dostarczają wskaźniki notowań giełdowych. Do najczęściej stosowanych, należą: stopa dywidendy, price/earning ratio wartość księgowa na akcję (*book value*), kurs (*book value*) i stopa pokrycia (*cover*) (M. Żukowski, Lublin 2003).

Stopa dywidendy wyraża się stosunkiem dywidendy na akcję do aktualnego kursu akcji:

$$S_d = \frac{D_a}{K_b} \times 100$$

Gdzie:

S_d – stopa dywidendy;

D_a – dywidenda przypadająca na 1 akcję zwykłą;

K_b – kur bieżący.

Informuje ona potencjalnego akcjonariusza o rentowności lokaty kapitału.

Wskaźnik price/earning ratio powstaje przez podzielenie aktualnego kursu akcji przez zysk przypadający na akcję:

$$PER = \frac{K_b}{Za} \times 100$$

gdzie:

PER – price/earning ratio;

K_b – kur bieżący;

Z_a – zysk na akcję zwykłą (EPS).

Określa on, czy akcja jest tania, czy droga. Akcje o wysokim PER są to akcje drogie i odwrotnie, akcje o niskim PER należą do relatywnie tanich, pierwsze charakteryzują się jednak znacznie niższym ryzykiem.

Wartość księgowa na akcję jest to iloraz wartości księgowej (majątek trwały netto i majątek obrotowy pomniejszony o zobowiązania) do ilości akcji. Podzielenie aktualnego kursu akcji przez wartości księgową na akcję stanowi tzw. kurs wartości księgowej:

$$KBV = \frac{K_b}{BV_a}$$

gdzie:

KBV – kurs do wartości księgowej (kurs book value);

K_b – kur bieżący;

BV_a – wartość księgowa na akcję zwykłą.

Wysoka wartość tego wskaźnika świadczy o braku pokrycia kursu akcji w majątku spółki.

Przy niskiej wartości tego wskaźnika inwestor może prowadzić spekulację, licząc na bankructwo spółki, jeśli akcje tej spółki są równocześnie bardzo tanie. Spekulacja taka jest jednak obarczona dużym stopniem ryzyka.

Stopa pokrycia wyraża się stosunkiem zysku na akcję do dywidendy na akcję:

$$CR = \frac{z_a}{D_a}$$

gdzie:

CR – cover ratio;

Z_a – zysk na akcję zwykłą;

D_a – dywidenda na akcję zwykłą.

Stopa pokrycia informuje akcjonariuszy o polityce spółki akcyjnej w zakresie podziału zysków, np.: stopa pokrycia równa 2 oznacza, że spółka akcyjna przeznacza dokładnie 50% zysku na wypłatę dywidend. Wskaźnik ten jest szczególnie ważny w przypadku lokat długoterminowych.

Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie – ogólna charakterystyka

Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW) organizuje obrót instrumentami finansowymi oraz odpowiada za jego bezpieczeństwo, rozwój i promocję.

GPW zapewnia koncentrację podaży i popytu na instrumenty finansowe, bezpieczny i sprawny przebieg transakcji oraz upowszechnianie informacji o kursach i obrotach instrumentami finansowymi.

Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie to spółka akcyjna, założona przez Skarb Państwa. Udziałowcami tej spółki są: Skarb Państwa, banki i domy maklerskie (prawo dopuszcza możliwość występowania innych udziałowców). Działalność giełdy regulowana jest poprzez następujące akty prawne (K. Jajuga, Warszawa 2009):

- Kodeks spółek handlowych;
- Ustawa o obrocie instrumentami finansowymi;
- Statut GPW;
- Regulamin GPW;
- Szczegółowe Zasady Obrotu Giełdowego;
- Regulamin Sądu Giełdowego.

Najważniejszymi organami GPW są:

- Walne Zgromadzenie Giełdy;
- Rada Giełdy;
- Zarząd Giełdy.

Statut giełdy określa: warunki dopuszczania papierów wartościowych do obrotu, sposób i tryb rozstrzygania sporów, organizację władz giełdy itp.

Regulamin giełdy określa prawa i warunki przebywania na giełdzie, dni otwarcia i godziny sesji giełdowych, sposób ustalania kursów, przyczyny zawieszania i zaprzestania notowań kursów, rodzaje zleceń maklerskich, stosowane dodatki kursowe zawieranych transakcji.

Walne Zgromadzenie Giełdy dokonuje zmian w Statucie GPW i zatwierdza Regulamin Rady GPW.

Rada GPW uchwala zmiany Regulaminu GPW, a zatwierdza je **Komisja Nadzoru Finansowego**.

Zarząd Giełdy kieruje bieżącą działalnością giełdy.

Stronami transakcji zwieranych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie są wyłącznie członkowie giełdy.

Członkiem giełdy może być podmiot prowadzący działalność maklerską, będący akcjonariuszem giełdy i dopuszczony do działania na giełdzie.

Członkowie giełdy są w transakcjach giełdowych pośrednikami inwestorów, zaś ci, którzy są animatorami, działają również na własny rachunek.

Animator rynku to członek giełdy, który zawarł z Giełdą Papierów Wartościowych w Warszawie mowę na stałe zgłaszanie ofert kupna lub sprzedaży danego instrumentu finansowego na własny rachunek (K. Jajuga, 2009).

Systemy notowań na GPW

Na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie istnieją dwa podstawowe sposoby ustalania cen w poszczególnych transakcjach (K. Jajuga, Warszawa 2009):

- system notowań jednolitych z dwukrotnym ustalaniem kursu w trakcie sesji;
- system notowań ciągłych.

System notowań jednolitych polega na tym, że w pewnym przedziale czasowym składane są zlecenia kupna i zlecenia sprzedaży, a następnie na podstawie tych zleceń ustala się kurs, po którym zawierane są transakcje, na które zostały złożone zlecenia. W celu ustalenia kursu jednolitego stosowany jest precyzyjnie określony algorytm. Procedura ta na GPW w Warszawie stosowana jest dwa razy dziennie, przed południem i po południu. Obecnie dotyczy niewielkiej liczby spółek, których akcje charakteryzują się małą płynnością.

System notowań ciągłych polega na tym, że kurs może się zmieniać od transakcji do transakcji. Transakcji dokonuje się wówczas, gdy złożone zlecenie kupna może być zrealizowane, ponieważ istnieje przeciwstawne zlecenie sprzedaży oraz wtedy, gdy złożone zlecenie sprzedaży może być zrealizowane, gdyż istnieje odpowiednie zlecenie kupna. Jest to dominujący system notowań na GPW.

Metoda ustalania kursu, zwana potocznie **fixingiem**, polega na tym, że kurs ustalony jest na podstawie zleceń złożonych w określonym przedziale czasowym poprzedzającym tę operację.

Ustalanie kursu (**fixing**) ma istotne znaczenie, ponieważ kurs ustala się na podstawie zleceń złożonych w pewnym przedziale czasowym, poprzez stosowanie **fixingu** unika się możliwości przypadkowego ustalenia kursu na podstawie pojedynczej transakcji dokonanej w danym momencie.

Po zakończeniu każdej sesji giełdowej (transakcji kupna-sprzedaży z danego dnia) publikowana jest **ceduła giełdowa**.

Ceduła giełdowa – oficjalny wykaz kursów akcji oraz innych papierów wartościowych, a także kursów walut i cen towarów będących przedmiotem transakcji zawieranych na giełdzie papierów wartościowych lub giełdzie towarowej.

Indeksy GPW

Na rynku akcji wyznaczony jest indeks giełdowy.

Wartość indeksu określana jest na podstawie cen akcji oraz innych wielkości charakteryzujących akcje (np.: liczba akcji, wielkości dywidend) i zmienia się w trakcie obrotów na giełdzie. Indeks giełdowy spełnia kilka ważnych funkcji:

- informuje w sposób syntetyczny o sytuacji na giełdzie;
- stanowi punkt odniesienia przy ocenie efektywności inwestowania na rynku akcji; gdyż inwestorzy porównują stopę zwrotu własnych inwestycji ze stopą zwrotu indeksu giełdowego;
- jest instrumentem bazowym dla instrumentów pochodnych, takich jak kontrakty terminowe i opcje.
- Istnienie wiele możliwych sposobów konstrukcji indeksu giełdowego, w szczególności indeksu akcji.

Formalnie **indeks giełdy akcji** jest portfelem akcji, zwanym portfelem indeksu, tzn. zawiera pewną liczbą akcji wybranych spółek (K. Jajuga, Warszawa 2009).

Przy rozróżnianiu indeksów giełdowych pod uwagę bierze się kilka kryteriów:

- **liczba spółek uwzględnionych w konstrukcji indeksu;**
- **sposób ważenia w konstrukcji indeksu** – istnieją trzy sposoby ważenia:
  - wagi zależne od cen akcji spółki;
  - wagi zależne do kapitalizacji spółki (wartości rynkowej spółki, czyli ceny akcji pomnożonej przez liczbę występujących akcji;
  - jednakowe wagi dla każdej spółki;
- **uwzględnianie dochodów z tytułu dywidend i praw poboru** – indeks typu dochodowego.

Nieuwzględnianie wspomnianych dochodów – to indeks typu cenowego;

- **sposób uzasadniania w konstrukcji indeksu** – we wszystkich indeksach podawanych przez GPW w Warszawie stosuje się średnią arytmetyczną z zastosowaniem wag.

Każdy indeks giełdowy należy traktować jako wielkość względną, która odnosi się do pewnego wybranego dnia bazowego.

Dzień bazowy – jest to dzień, do którego odnosi się dzisiejszą wartość indeksu.

W odniesieniu do każdego indeksu wyróżnia się też:

- **wartość bazową** – jest to umownie przyjęta wartość indeksu w dniu bazowym;
- **kapitalizację bazowa** – jest to wartość rynkowa portfela indeksu w dniu bazowym,

GPW publikuje kilkanaście indeksów, m.in.:

- indeksy całego rynku – WIG (Warszawski Indeks Giełdowy) i WIG – PL;
- indeksy dużych, średnich i małych przedsiębiorstw – WIG – 20, m WIG – 40, WIG – 80;
- subindeksy sektorowe, np.: WIG – BANKI, WIG – MEDIA, WIG – PALIWA, WIG – TELEKOMUNIKACJA.

Generalnie konstrukcja prawie wszystkich indeksów jest podobna:

$$I(t) = \frac{M(t)}{M(0)} \times \frac{I(0)}{K(t)}.$$

gdzie:

I(t) – wartość indeksu w dniu **t**;

I(0) – wartość bazowa indeksu, określania w dniu wprowadzenia indeksu;

M(t) – kapitalizacja spółek wchodzących w skład indeksu w dniu **t**;

M(0) – kapitalizacja spółek wchodzących w skład indeksu w dniu wprowadzenia indeksu;

K(t) – współczynnik korygujący indeksu w dniu **t**.

Współczynnik korygujący umożliwia porównanie wartości indeksu w różnych dniach w przypadku, gdy w indeksie zachodzą zmiany inne niż zmiany cen, np. zmiana składu indeksu.

Giełda jest źródłem między innymi dochodów od kapitału zainwestowanego w instrumenty finansowe. Panująca na giełdzie **hossa,** czyli długotrwały wzrost kursów na giełdzie papierów wartościowych, a także cen towarów lub kursów walut, zwiastuje poprawę stanu gospodarki. **Bessa** natomiast, czyli długotrwały spadek kursów na giełdzie papierów wartościowych, zapowiada osłabienie stanu gospodarki.

4.6. Instytucje ubezpieczeniowe

Ubezpieczenie jest umową, dzięki której otrzymuje się od ubezpieczyciela gwarancję wypłacenia świadczenia pieniężnego (odszkodowania) w razie wystąpienia zdarzenia, na wypadek którego się ubezpieczyło.

Ubezpieczyciel to instytucja ubezpieczeniowa (np. zakład ubezpieczeń), która w zamian za opłacaną przez ubezpieczającego składkę zobowiązuje się spełnić określone świadczenie w razie wystąpienia zdarzenia określonego w umowie.

Ubezpieczający to osoba fizyczna, prawna lub jednostka organizacyjna nieposiadająca osobowości prawnej opłacająca składkę ubezpieczeniową w zamian za objęcie ubezpieczeniem.

Ubezpieczony to osoba objęta ochroną z tytułu ubezpieczenia.

Tabela 26. Ważniejsze obowiązki ubezpieczonego i ubezpieczyciela

Obowiązki	
Ubezpieczonego:	**Ubezpieczyciela:**
• zapłata składki ubezpieczeniowej w terminie wynikającym z umowy; • podanie wszystkich okoliczności istotnych dla oceny ryzyka; • obowiązek zawiadomienia o zaistniałym zdarzeniu losowym (wypadku ubezpieczeniowym) w odpowiednim (wynikającym z umowy) terminie; • podjęcie działań na rzecz ograniczenia skutków wypadku ubezpieczeniowego; • przedstawienie zakładowi ubezpieczeń odpowiedniej dokumentacji wypadku i umożliwienie zbadania okoliczności wystąpienia szkody oraz jej rozmiaru.	• potwierdzenie umowy i dostarczenie odpowiedniego dokumentu potwierdzającego jej zawarcie na piśmie (np. polisy ubezpieczeniowej); • dostarczenie ogólnych warunków ubezpieczenia (OWU) jako integralnej części umowy; • realizacja podstawowego obowiązku, czyli wypłaty odszkodowania (przy ubezpieczeniu majątkowym) lub sumy pieniężnej, renty czy innego świadczenia (przy ubezpieczeniu osobowym), jeśli wystąpi wypadek ubezpieczeniowy).

Źródło: Z. Makieła, T. Rachwał, Krok w przedsiębiorczość, Warszawa 2011, s. 120

Rodzaje ubezpieczeń według kryterium stopnia swobody nawiązywania **stosunku ubezpieczeń**:

- **ubezpieczenia obowiązkowe** – wynikają z przepisów prawa, tzn. decyzji o przystąpieniu do ubezpieczenia nie podejmuje sam ubezpieczający;
- **ubezpieczenia dobrowolne** – decyzję o objęciu ubezpieczeniem podejmuje sam ubezpieczający zawierając umowę z ubezpieczycielem;

Rodzaje ubezpieczeń według kryterium **przedmiotu ubezpieczenia**:

- **ubezpieczenia osobowe** – obejmują ochroną ubezpieczeniową człowieka:
    - obowiązkowe: zdrowotne, społeczne (emerytalne, rentowe, chorobowe, wypadkowe);
    - nieobowiązkowe (dobrowolne): od następstw nieszczęśliwych wypadków, na życie, inne prywatne typu emerytalnego i zdrowotnego.
- **ubezpieczenia majątkowe** – obejmują ochroną ubezpieczeniową mienie lub odpowiedzialność cywilną ubezpieczonego za szkody wyrządzone osobom trzecim:
    - obowiązkowe: budynków wchodzących w skład gospodarstwa rolnego, OC posiadaczy pojazdów mechanicznych, OC rolników z tytułu prowadzenia gospodarstwa rolnego, inne obowiązkowe ubezpieczenia OC związane głównie z działalnością gospodarczą i wykonywaną pracą;
    - nieobowiązkowe (dobrowolne): inne OC, np. prywatne (zalanie mieszkania osobie trzeciej z naszej winy) lub gospodarcze (szkoda wyrządzona działalnością gospodarczą, mienie (AC, od kradzieży ruchomości, od zdarzeń losowych).
- **ubezpieczenia typu assistance** – obejmują ochroną ubezpieczeniową człowieka oraz jego mienie. Rodzaj ubezpieczenia polegający na udzielaniu pomocy finansowej w razie wystąpienia określonych zdarzeń losowych, np. assistance samochodu – holowanie pojazdu.

Ubezpieczenia można podzielić również na:

- **ubezpieczenia publiczne** – ubezpieczenia państwowe, wchodzące w skład przymusowego systemu zabezpieczenia społecznego.
- **System zabezpieczenia społecznego** to system przymusowego zabezpieczenia, którego celem jest zapewnienie obywatelom bezpieczeństwa socjalnego.
- **ubezpieczenia prywatne** – tworzone na podstawie umowy między ubezpieczycielem a ubezpieczającym.

Dokumentem potwierdzającym zawarcie umowy ubezpieczenia jest **polisa ubezpieczeniowa**.

Karencja – okres wyczekiwania. Określony w umowie ubezpieczeniowej okres, w którym towarzystwo ubezpieczeniowe nie ponosi odpowiedzialności za powstałe w tym czasie szkody określone w umowie ubezpieczeniowej. Ma na celu wyeliminowanie sytuacji zawierania umowy ubezpieczeniowej już po powstaniu szkody i próby wyłudzenia za nią pieniędzy (Z. Makieła, T. Rachwał, 2012).

Instytucją powołaną w celu ochrony poszkodowanych, tzn. tych osób, które nie mogą otrzymać pieniędzy za szkody powstałe nie z ich winy, ponieważ sprawca zdarzenia nie był ubezpieczony lub nie można ustalić danych osoby odpowiedzialnej za szkodę, jest **Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny (UFG)**.

Przykładowe prywatne ubezpieczenia majątkowe i osobowe

- **Ubezpieczenia na życie:**
  - występuje w formie ochronnej (na wypadek śmierci), zapewnia wypłatę odszkodowania osobom wskazanym w umowie na wypadek śmierci ubezpieczonego;
  - występuje w formie oszczędnościowej i służy gromadzeniu oszczędności w celu zwiększenia przyszłej emerytury;
  - występuje w formie ochronno-oszczędnościowej, których celem jest z jednej strony zgromadzenie określonej wielkości środków, a z drugiej – zapewnienie odszkodowania w przypadku przedwczesnej śmierci ubezpieczonego.
- **Ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej:**
  - ubezpieczenie za błędy popełnione w pracy zawodowej (np. doradcy podatkowego, lekarza);
  - ubezpieczenie w życiu prywatnym (np. za szkody spowodowane przez dziecko).
- **Ubezpieczenie casco:**
  - ubezpieczenie na wypadek uszkodzenia lub kradzieży (np. samochodu);
  - ubezpieczenie umożliwia również wypłatę odszkodowania (np. za zniszczony samochód z winy ubezpieczonego).
- **Ubezpieczenie od następstw nieszczęśliwych wypadków (NNW):**
  - ubezpieczenie z tytułu uszkodzenia ciała, pogorszenia zdrowia lub śmierci na skutek nieszczęśliwego wypadku.
- **Ubezpieczenie od chorób:**
  - prywatne ubezpieczenie zdrowotne w wypadku poważnego zachorowania (np. zawał serca, udar mózgu);
  - sfinansowanie ponadstandardowych świadczeń zdrowotnych (np. pobyt w prywatnej klinice).
- **Ubezpieczenia domów lub mieszkań:**
  - kompleksowe ubezpieczenie majątkowe umożliwiające pokrycie szkód w mieszkaniu powstałych w wyniku włamania, zalania czy pożaru itp.
- **Ubezpieczenia typu assistance:**
  - ubezpieczenie w razie wystąpienia określonych zdarzeń losowych (np. assistance samochodu – holowanie zepsutego pojazdu).

Tabela 27. Ubezpieczenia społeczne

Emerytalne	• Polegają na comiesięcznej wypłacie określonej kwoty osobom, które osiągnęły wiek emerytalny. • Składkę w wysokości 19,52% podstawy wymiaru (wynagrodzenia brutto) pokrywają po połowie pracodawca i pracownik (tj. po 9,76%).
Rentowe	• Polegają na comiesięcznej wypłacie określonej kwoty (np. osobom niezdolnym do pracy) w okresie wyznaczonym przez specjalną komisję. Mogą być też wypłacane rodzinie pracownika. • Składkę w wysokości 8% podstawy wymiaru (wynagrodzenia brutto) pokrywa pracownik (1,5%) oraz pracodawca (6,5%).
Chorobowe	• Polegają na wypłacie określonej kwoty (zasiłku) w razie choroby oraz za urlopy macierzyńskie. • Składkę w wysokości 2,45% podstawy wymiaru (wynagrodzenia bruttu) pokrywa pracownik.
Wypadkowe	• Polegają na wypłacie określonej kwoty w postaci odszkodowań i zasiłków z tytułu wypadków przy pracy i chorób zawodowych. • Składki na ubezpieczenia społeczne (20,74%) obciążające pracodawcę mogą mieć różną wysokość ze względu na ubezpieczenia wypadkowe. Płatnicy podlegający wpisowi do rejestru REGON zgłaszający do ubezpieczenia wypadkowego nie więcej niż 9 pracowników płacą ubezpieczenie wypadkowe w wysokości 50% najwyższej stopy procentowej na dany rok składkowy dla grup działalności czyli 50% z 3,86% podstawy wymiaru. Powyżej tej liczby pracowników ubezpieczenie wypadkowe mieści się w granicach (1,93%–3,86%)
Fundusz Pracy	• Pokrywa pracodawca w wysokości 2,45% od wynagrodzenia brutto pracownika.
Fundusz Gwarantowanych Świadczeń Pracowniczych	• Pokrywa pracodawca w wysokości 0,10% od wynagrodzenia brutto pracownika.

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 28. Ubezpieczenie zdrowotne

Składka zdrowotna pobrana	• Pokrywana przez pracownika w wysokości 9% od wynagrodzenia brutto (pomniejszonego o składki ubezpieczeń społecznych).
Składka zdrowotna odliczona	• 7,75% składki zdrowotnej można odliczyć od podatku dochodowego

Źródło: Opracowanie własne

Przykład 26

Obliczenie składek na ubezpieczenia społeczne i zdrowotne z części pokrywanej przez pracownika od wynagrodzenia brutto 1.950 zł.
Składki na ubezpieczenia społeczne:

emerytalna – 1950 zł x 9,76% = 190.32 zł;

rentowa – 1950 zł x 1.5% = 29,25 zł;

chorobowa – 1950 zł x 2,45% = 47,78 zł.

Razem składki na ubezpieczenia społeczne – 190,32 zł + 29,25 zł +47,78 zł = 267,35 zł.

Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne:

1.950 zł – 267,35 zł (składki ZUS) =1.682,65zł (podstawa wymiaru składki ubezpieczenia zdrowotnego).

Składka zdrowotna pobrana (9% od podstawy wymiaru);

1.682,65 zł x 9% = 151,44 zł.

Składka zdrowotna odliczona od podatku (7,75% od podstawy wymiaru):

1.682,65 zł x 7,75% = 130,41 zł.

System emerytalny (Z. Makieła, T. Rachwał, 2012)

Aktualny kształt systemu emerytalnego w Polsce został ustalony podczas reformy w 1999 roku. W starym systemie emerytura zależała wyłącznie od stażu pracy oraz pewnych przyjętych przez rząd wskaźników. Główną wadą tego systemu, zwanego **repartycyjnym (dystrybutywnym**), było to, że w całości opierał się na umowie międzypokoleniowej, tzn. emerytury były finansowane ze składek wpłacanych przez osoby aktualnie pracujące. Taki sposób wypłacania emerytur doprowadziłby w niedługim czasie do kryzysu finansów publicznych, gdyż liczba osób w wieku produkcyjnym (tych, którzy osiągają dochody z pracy i płacą podatki) wciąż maleje, a zwiększa się liczba osób uprawnionych do otrzymywania świadczeń emerytalnych. Proces ten, zwany starzeniem się społeczeństw, występuje obecnie w większości rozwiniętych państw.

Aby zapobiec kryzysowi finansów publicznych, wprowadzono system emerytalny złożony z **trzech filarów**, z których **tylko pierwszy oparty jest na umowie międzypokoleniowej**. **Pozostałe dwa systemy kapitałowe**, w których składka gromadzona jest na indywidualnych kontach i inwestowana w jednostki uczestnictwa. Wysokość emerytury zależy przede wszystkim od tego, jak wiele pieniędzy zgromadzi uprawniony do otrzymywania świadczeń emerytalnych na swoim rachunku. System ten zachęca więc do odkładania pieniędzy na emeryturę. Ponieważ widoczny jest ścisły związek pomiędzy wysokością składki opłaconej, a wysokością świadczenia, które otrzyma uprawniony w wieku emerytalnym.

I filar

Poza wprowadzeniem dwóch kapitałowych filarów, zreformowano również filar pierwszy. Mechanizm jego działania nie uległ radykalnym zmianom, nadal jest to system repartycyjny, ale teraz każdy z uprawnionych ma założone w Zakładzie Ubezpieczeń Społecznych własne, wirtualne konto. Oznacza to, że pomimo iż składki przeznaczone są na wypłatę świadczeń obecnym emerytom, to ZUS „zapisuje”, ile środków uzbiera osoba uprawniona przez lata pracy. Z 19,52% składki emerytalnej 17,22% trafia do I filaru na indywidualne konto ubezpieczonego. Pozostała część składki, czyli 2,30%, zostaje przekazana do drugiego filaru systemu ubezpieczeniowego, czyli tzw. otwartych funduszy emerytalnych.

II filar

Otwarte fundusze inwestycyjne działają na podobnej zasadzie jak fundusze inwestycyjne. Za składki kupowane są jednostki uczestnictwa, których wartość w kolejnych okresach się zmienia. Zazwyczaj wartość ta umiarkowanie wzrasta, gdyż OFE muszą – ze względu na ograniczenia ustawowe – stosować bezpieczną strategię inwestycyjną, zapewniającą stałe lecz umiarkowane zyski. To jednak, jak szybko zwiększa się wartość zainwestowanego kapitału, zależy od umiejętności osób nim zarządzającymi oraz sytuacji na rynku finansowym.

III filar

Oparty jest podobnie jak drugi na systemie kapitałowym. Tutaj również wpłaca się składkę na indywidualne konto, a następnie jest ona pomnażana zgodnie z zasadami rynku finansowego. Na trzeci filar ubezpieczeń składają się pracownicze programy emerytalne (PPE) oraz indywidualne konta emerytalne (IKE). Oszczędzanie w nich jest dobrowolne i ma stanowić dodatek do emerytury wypłacanej z obowiązkowych filarów.

Możliwości oszczędzania w ramach III filaru są bardzo zróżnicowane. W ramach PP może to być na przykład grupowe ubezpieczenie na życie albo odprowadzanie składek do funduszu inwestycyjnego. IKE jest jeszcze bardziej zróżnicowane, może być zarówno lokatą, jak i funduszem lub polisą ubezpieczeniową.

Wysokość emerytury

Reforma emerytalna podzieliła uprawnionych do świadczeń emerytalnych na (L. Kostrzewski, P. Miączyński, P. Skwirowski, 2012):

- urodzonych przed końcem 1948 roku;
- urodzonych między 1 stycznia 1949 a 31 grudnia 1968 roku;
- urodzonych po 1 stycznia 1969 roku.

Urodzeni przed końcem 1948 roku

Należą do starego systemu. Świadczenia otrzymują tylko z ZUS. Mogą przejść na ustawową emeryturę po ukończeniu co najmniej 60 roku życia (kobiety) i 65 roku życia (mężczyźni) oraz udowodnieniu okresu składkowego i nieskładkowego wynoszącego co najmniej 20/25 lat dla kobiet/mężczyzn. Okresy składkowe – od wynagrodzenia były odprowadzane składki, a nieskładkowe – np. urlop wychowawczy, studia, praca w gospodarstwie rolnym.

Wysokość świadczenia zależy od:

- wysokości tzw. podstawy wymiaru;
- okresów składkowych i nieskładkowych;
- tzw. kwoty bazowej.

Jeżeli uprawniony zarabiał na przykład o 20% więcej niż wynosiło przeciętne wynagrodzenie, to jego **wskaźnik podstawy wymiaru** wynosi 120%, jeśli zarabiał o 20% mniej niż przeciętna krajowa, będzie miał podstawę w wysokości 80%.

Kwota bazowa – ogłasza ją ZUS (obowiązuje od 1 marca do końca lutego następnego roku). Wysokość kwoty bazowej zależy od wysokości przeciętnego wynagrodzenia (z poprzedniego roku) i wynosi 100% przeciętnego wynagrodzenia pomniejszonego o składki na ubezpieczenie społeczne (L. Kostrzewski, P. Miączyński, P. Skwirowski, 2012).

Kwota emerytury to:

- 24% kwoty bazowej (tzw. część socjalna);
- 1,3% podstawy wymiaru za każdy rok okresów składkowych;
- 0,7% podstawy wymiaru za każdy rok okresów nieskładkowych.

Przykład 27

Pani Barbara ma w sumie 39 lat pracy (35 lat okresów składkowych i 4 lata okresów nieskładkowych). Jej wskaźnik podstawy wymiaru wynosił 68,64%. Przeszła na emeryturę, gdy wysokość kwoty bazowej wynosiła 1.903,03 zł. Podstawa wymiaru wyniesie więc:

68,64% x 1.903,03 zł = 1.306,24 zł

Wyliczenie emerytury:

- 24% ówczesnej kwoty bazowej = 24% x 1.903,03 zł = 456,73 zł;
- 35 lat (420 miesięcy) x 1,3% x 1.306,24 = 594,34 zł;
- 4 lata (48 miesięcy) x 0,7%x 1.306,24 zł = 36,57 zł.

W sumie: 456,73 zł + 594,34 zł + 36,57 zł = 1.087,64 zł.

Osoby urodzone przed 1949 rokiem mają też możliwość liczenia emerytury „po nowemu".

Przykład 28

Pan Roman zebrał 864 tys. kapitału. Jako 70-latek według GUS (Głównego Urzędu Statystycznego) będzie żył jeszcze około 12 lat (144 miesiące). W nowym systemie zebrane składki dzieli się przez przewidywaną średnią długość życia.

Wyliczenie emerytury:

864.000 zł: 144 miesiące = 6.000 zł brutto;

To 110% jego ostatniej pensji. Gdyby zdecydował się na stary system, dostałby 4.900 zł emerytury, o 1.100 zł mniej.

Druga grupa: urodzeni między 1 stycznia 1949 a 31 grudnia 1968 roku

Należą do nowego systemu. Oni musieli wybrać, czy chcą ulokować całą składkę emerytalną na indywidualnym koncie obsługiwanym przez ZUS (I filar), czy też zapisać się do jednego z otwartych funduszy emerytalnych (OFE – II filar). Ich emerytury mogą być o 25–30% niższe od obecnie wypłacanych. W momencie przejścia na emeryturę suma składek zgromadzonych na indywidualnych kontach emerytalnych zostanie podzielona przez statystyczną długość życia w miesiącach. Wynikiem podziału będzie otrzymywana emerytura.

Reguła ta obowiązuje zarówno te osoby, które należą tylko do ZUS, jak i te, które oprócz odprowadzania składek do ZUS wybrały też OFE. W nowym systemie opłaca się pracować dłużej, ponieważ więcej kapitału możemy odłożyć i kapitał ten będzie dzielony przez mniej miesięcy. Od 2013 roku rząd będzie zrównywał i podwyższał wiek emerytalny co roku o 3 miesiące (co 4 miesiące o 1 miesiąc), aż osiągnie 67 lat dla kobiet i dla mężczyzn. Począwszy od startu nowego systemu, przez pięć lat uprawnieni mają dostawać emeryturę z ZUS, której część będzie liczona na starych zasadach, a część na nowych. Od 2014 roku emerytura będzie już w 1005 liczona na podstawie zgromadzonych składek.

Przykład 29

Pani Wiesława uzbierała na koncie emerytalnym 200 tys. zł. Chce odejść na emeryturę w wieku 62 lat. Według GUS statystycznie będzie żyła jeszcze 209 miesięcy.

Wyliczenie emerytury:

200.000 zł: 209 miesięcy = 956,94 zł.

Pani Wiesława należała tylko do ZUS, nie zapisała się do OFE.

Osoby, które należą też do OFE będą miały niższą emeryturę niż z ZUS, ponieważ rząd zmniejszył składkę do OFE z 7,3% do 2,3%. Pozostałe 5% trafiło na specjalne subkonto w ZUS.

Waloryzowana, czyli podwyższana w zależności od wzrostu cen i płac, będzie tylko część emerytury wypłacana przez ZUS Waloryzacji nie będą stosowały OFE. To nie znaczy, że fundusze nie będą podwyższać świadczenia. Będą je podwyższać, ale tylko wtedy, gdy obracane przez nie papiery, np. akcje zyskają na wartości.

Uprawnieni, począwszy od wejścia w życie nowego systemu (styczeń 2009 roku), przez pięć lat mają dostawać emeryturę z ZUS, której część będzie liczona na starych zasadach, a część na nowych:

- w 2009 roku uprawniony dostaje 80% emerytury na zasadach dotychczasowych, a 20% na nowych;
- w 2010 roku – odpowiednio 70% i 30%;
- w 2011 roku – odpowiednio 55% i 45%;
- w 2012 roku – odpowiednio 35% i 65%;
- w 2013 roku – odpowiednio 20% i 80%.

W 2014 roku emerytura liczona będzie już tylko na nowych zasadach.

Trzecia grupa: urodzeni po 31 grudnia 1968 roku

Oni muszą ulokować część składki emerytalnej na koncie obsługiwanym przez ZUS, a część w jednym z OFE. Emerytury będą im wypłacały i ZUS, i OFE. Całość emerytury będzie liczona według nowych zasad.

Emerytura liczona według nowych zasad opłaca się przede wszystkim **osobom, które dłużej pracują**. W starym systemie nie miało to wielkiego znaczenia. W nowym już tak. Im bowiem później odchodzimy na emeryturę, tym nasz kapitał jest dzielony przez mniejszą liczbę miesięcy. Tym samym emerytura jest wyższa. W nowym systemie o wysokości emerytury decyduje też **wysokość kapitału zgromadzonego** w okresie aktywności zawodowej. Im wyższe zarobki, tym wyższy zgromadzony kapitał i wyższa emerytura. W systemie **dystrybutywnym (repartycyjnym),** opartym na umowie pokoleniowej, wysokość świadczenia emerytalnego w niewielkim stopniu była związana z zapłaconymi składkami.

Aby zwiększyć wysokość przyszłej emerytury, należałoby więc oszczędzać w ramach III filaru.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Omów proces transformacji polskiej gospodarki.

2. Wyjaśnij potrzebę wspierania konkurencji i walki z monopolem.

3. Wyjaśnij zależności zachodzące pomiędzy popytem, podażą i ceną.

4. Wyjaśnij zjawisko elastyczności cenowej popytu.

5. Określ cele polityki gospodarczej, a w jej ramach – polityki fiskalnej i monetarnej.

6. Określ przyczyny ingerencji państwa w gospodarkę.

7. Jakie argumenty przemawiają za ingerencją państwa w gospodarkę a jakie przeciw niej?

8. Scharakteryzuj zjawiska recesji i dobrej koniunktury w gospodarce.

9. Oceń wpływ deficytu budżetowego i długu publicznego na gospodarkę.

10. Omów znaczenie pieniądza w gospodarce.

11. Wymień i omów kryteria wyboru najlepszego kredytu i najlepszej lokaty bankowej.

12. Wyjaśnij rolę banków w gospodarce.

13. Wyjaśnij rolę, jaką w gospodarce odgrywają fundusze inwestycyjne.

14. Określ miejsce GPW w systemie rynku kapitałowego.

15. Scharakteryzuj filary systemu emerytalnego w Polsce.

16. Określ, jaką rolę w gospodarce odgrywają fundusze emerytalne.

17. Wskaż związek pomiędzy swoją przyszłą aktywnością zawodową a wysokością emerytury.

Bibliografia:

Adamowicz E., Grzegorczyk S., Romanowska A., Sopińska A., Wachowiak P., *Ekonomia bez tajemnic*. Warszawa 2003, Część 1,

Białek G., *Podstawy zarządzania pieniądzem w banku komercyjnym*, Warszawa 1994.

Biernacki, P. Szulc P., *Pierwsze kroki na rynku kapitałowym*, Warszawa 2009.

Caban W., *Ekonomia*, Warszawa 2001.

Czarny B., Czarny R., Bartkowiak R., Rapacki R., *Podstawy ekonomii*, Warszawa, 2000.

Dębski D., *Ekonomika i organizacja przedsiębiorstw,* Warszawa 2006, Część 1.

Dębski W., *Rynek finansowy i jego mechanizmy. Podstawy teorii i praktyki*, Warszawa 2003.

Galbarczyk T., Świderska J., *Bank komercyjny w Polsce*, Warszawa 2011.

Garbarski L., Rutkowski J., Wrzosek W., *Marketing, Punkt zwrotny nowoczesnej firmy*, Warszawa, 2000.

Jajuga K., *Podstawowe strategie inwestowania*, Warszawa 2009.

Jajuga K., *Rynek wtórny papierów wartościowych*, Warszawa 2009.

Korba, J. Smutek Z., *Podstawy przedsiębiorczości*, Gdynia 2012.

Makieła Z., Rachwał T., *Krok w przedsiębiorczość*, Warszawa 2011.

Marciniak S., *Makro i mikroekonomia*, Warszawa 2001.

Mielczarczyk Z., Urbańska B., *Gospodarka i rachunkowość w gastro*nomii, Warszawa 2002.

Mierzejewska-Majcherek J., *Podstawy ekonomii*, Warszawa 2005.

Milewski R., *Podstawy ekonomii*, Warszawa 2002.

Owsiak S., *Podstawy nauki finansów*, Warszawa 2002.

Pakuła A., *Rola państwa w gospodarce rynkowej* [w:] *Zarys ekonomii*, Lublin 2003.

Sloman J., *Podstawy ekonomii*, PWE, Warszawa 2001.

Urbaniak P., *Podstawy ekonomii. Mikroekonomia*, Poznań 1996.

Zaleska M. (red.), *Współczesna bankowość*, Tom I, Warszawa 2007.

Żukowski M., *Ekonomia. Zarys wykładu*, Lublin 2005.

Akty prawa:

Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 20 grudnia 2010 r. w sprawie warunków emitowania bonów skarbowych, Dz. U. nr 250, poz. 1679.

Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych, Dz. U. nr 94, poz. 1037, ze zm.

Ustawa z dnia 29 czerwca 1995 r. o obligacjach, Dz. U. z 2001 r., nr 120, poz. 1300, ze zm.

Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. Prawo bankowe, Dz. U. z 2012 r. poz. 1376 ze zm.

Uchwała nr 45/2006 Zarządu NBP z dnia 22 XII 2006 r., Dalla NBP, nr 14, poz. 18.

5. Zasady podejmowania i wykonywania działalności gospodarczej

5.1. Ewidencja Działalności Gospodarczej

Przedsiębiorca może podjąć działalność gospodarczą w dniu złożenia wniosku o wpis do Centralnej Ewidencji i Informacji o Działalności Gospodarczej (CEIDG) albo po uzyskaniu wpisu do rejestru przedsiębiorców w Krajowym Rejestrze Sądowym (KRS). Wpisowi do CEIDG podlegają przedsiębiorcy będący osobami fizycznymi, w tym wspólnicy spółki cywilnej, a do KRS m.in. spółki prawa handlowego i przedsiębiorstwa państwowe. Podstawowe zagadnienie dotyczące działalności gospodarczej – jej podejmowanie, wykonywanie i zakończenie – reguluje ustawa o swobodzie działalności gospodarczej[36].

Ważne pojęcia
Przedsiębiorcą jest osoba fizyczna, osoba prawna i jednostka organizacyjna nieposiadająca osobowości prawnej, prowadząca we własnym imieniu działalność gospodarczą lub zawodową. **Przedsiębiorstwo** jest zorganizowanym zespołem składników niematerialnych i materialnych przeznaczonym do prowadzenia działalności gospodarczej. Obejmuje ono w szczególności: • oznaczenie indywidualizujące przedsiębiorstwo lub jego wyodrębnione części (nazwa przedsiębiorstwa); • własność nieruchomości lub ruchomości, w tym urządzeń, materiałów, towarów i wyrobów, oraz inne prawa rzeczowe do nieruchomości lub ruchomości; • prawa wynikające z umów najmu i dzierżawy nieruchomości lub ruchomości oraz prawa do korzystania z nieruchomości lub ruchomości wynikające z innych stosunków prawnych; • wierzytelności, prawa z papierów wartościowych i środki pieniężne; • koncesje, licencje i zezwolenia; • patenty i inne prawa własności przemysłowej; • majątkowe prawa autorskie i majątkowe prawa pokrewne; • tajemnice przedsiębiorstwa; • księgi i dokumenty związane z prowadzeniem działalności gospodarczej. **Działalność gospodarcza** jest to zarobkowa działalność wytwórcza, budowlana, handlowa, usługowa oraz poszukiwanie, rozpoznawanie i wydobywanie kopalin ze złóż, a także działalność zawodowa, wykonywana w sposób zorganizowany i ciągły.

36 Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej, Dz. U. z 2010 r. nr 220, poz. 1447.

Osoba fizyczna składa wniosek o wpis do CEIDG za pośrednictwem formularza elektronicznego dostępnego na stronie internetowej CEIDG (www.firma.gov.pl, znajduje się tam również instrukcja jego wypełniania), w Biuletynie Informacji Publicznej ministra właściwego do spraw gospodarki oraz za pośrednictwem elektronicznej platformy usług administracji publicznej (ePUAP).

Wniosek o wpis do CEIDG może być również złożony na formularzu CEIDG-1[37] (do pobrania ze strony www.firma.gov.pl) w wybranym przez przedsiębiorcę urzędzie gminy, osobiście, bądź poprzez nadanie listem poleconym.

Nadmienić należy, iż formularz CEIDG-1, stanowiąc podstawę wpisu do CEIDG, służy jednocześnie do zgłoszeń aktualizacyjnych (w przypadku zmiany danych zmiany stanu faktycznego i prawnego odnoszących się do przedsiębiorcy i wykonywanej przez niego działalności gospodarczej), zawieszenia i wznowienia wykonywania działalności gospodarczej, a także – w przypadku zaprzestania wykonywania działalności gospodarczej – wykreślenia przedsiębiorcy z CEIDG.

Ważne jest, że zakładanie działalności gospodarczej, składanie wniosków, jest bezpłatne.

Wpisowi do CEIDG podlegają m.in.[38]:

- firma przedsiębiorcy, jego numer PESEL, data urodzenia, adres;
- numer identyfikacyjny REGON przedsiębiorcy oraz jego NIP;
- data rozpoczęcia wykonywania działalności gospodarczej;
- określenie przedmiotów wykonywanej działalności gospodarczej, zgodnie z Polską Klasyfikacją Działalności (PKD);
- informacja o zawieszeniu i wznowieniu wykonywania działalności gospodarczej;
- informacja o zakazie prowadzenia działalności gospodarczej;
- informacja o wykreśleniu wpisu w CEIDG.

Wpis do CEIDG polega na wprowadzeniu do systemu teleinformatycznego danych podlegających wpisowi. Jest dokonany z chwilą zamieszczenia danych w CEIDG, nie później niż następnego dnia roboczego po dniu wpływu do CEIDG poprawnego wniosku.

Do CEIDG wpisów dokonuje się na wniosek, chyba że przepis szczególny przewiduje wpis z urzędu. Wpisem do CEIDG jest również wykreślenie albo zmiana wpisu.

<u>Integralną częścią wniosku o wpis do CEIDG jest żądanie:</u>

- wpisu albo zmiany wpisu do krajowego rejestru urzędowego podmiotów gospodarki narodowej (REGON);
- zgłoszenia identyfikacyjnego albo aktualizacyjnego, o którym mowa w przepisach o zasadach ewidencji i identyfikacji podatników i płatników;
- zgłoszenia płatnika składek albo jego zmiany w rozumieniu przepisów o systemie ubezpieczeń społecznych albo zgłoszenia oświadczenia o kontynuowaniu ubezpieczenia społecznego rolników w rozumieniu przepisów o ubezpieczeniu społecznym rolników;
- przyjęcia oświadczenia o wyborze przez przedsiębiorcę formy opodatkowania podatkiem dochodowym od osób fizycznych albo wniosku o zastosowanie opodatkowania w formie karty podatkowej.

Do wniosku o wpis do CEIDG przedsiębiorca może dołączyć zgłoszenie rejestracyjne lub aktualizacyjne, o których mowa w przepisach o podatku od towarów i usług.

Wraz z wnioskiem o wpis do CEIDG składa się oświadczenie o braku orzeczonych –wobec osoby, której wpis dotyczy – zakazów prowadzenia działalności gospodarczej, wykonywania określonego zawodu bądź prowadzenia działalności związanej z wychowaniem, leczeniem, edukacją małoletnich lub z opieką nad nimi. Oświadczenie takie przedsiębiorca składa pod rygorem odpowiedzialności karnej za złożenie fałszywego oświadczenia.

Przedsiębiorca jest obowiązany złożyć wniosek o zmianę wpisu w terminie 7 dni od dnia zmiany danych stanu faktycznego i prawnego odnoszących się do niego i wykonywanej przez niego działalności gospodarczej, powstałej po dniu dokonania wpisu do CEIDG, bądź o wykreślenie wpisu – najpóźniej w terminie 7 dni od dnia trwałego zaprzestania wykonywania działalności gospodarczej.

37 Obecnie obowiązujący od 1 lipca 2011 roku formularz wniosku CEIDG-1 zastąpił dotychczasowy formularz EDG.

38 Pełny katalog zawiera art. 25 ust. 1 ustawy o swobodzie działalności gospodarczej.

W przypadku, gdy wpis zawiera dane niezgodne z rzeczywistym stanem rzeczy, minister właściwy do spraw gospodarki wzywa przedsiębiorcę do dokonania odpowiedniej zmiany wpisu w terminie 7 dni od dnia doręczenia wezwania. Jeżeli, mimo wezwania, przedsiębiorca nie dokona odpowiedniej zmiany swojego wpisu, minister właściwy do spraw gospodarki może wykreślić, w drodze decyzji administracyjnej, przedsiębiorcę z CEIDG. Nadto minister z urzędu, w formie postanowienia, sprostuje wpis zawierający oczywiste błędy, niezgodności z treścią wniosku przedsiębiorcy lub stanem faktycznym wynikającym z innych rejestrów publicznych.

Przedsiębiorca niezatrudniający pracowników może zawiesić wykonywanie działalności gospodarczej na okres od 30 dni do 24 miesięcy (w przypadku zawieszenia działalności w miesiącu luty przyjmuje się odpowiednio 28 lub 29 dni). W przypadku wykonywania działalności gospodarczej w formie spółki cywilnej zawieszenie wykonywania działalności gospodarczej jest skuteczne pod warunkiem jej zawieszenia przez wszystkich wspólników.

Przedsiębiorca wykonujący działalność gospodarczą jako wspólnik w więcej niż jednej spółce cywilnej bądź w różnych formach prawnych może zawiesić wykonywanie działalności gospodarczej w jednej lub kilku takich spółkach bądź, odpowiednio, w jednej z tych form.

W okresie zawieszenia wykonywania działalności gospodarczej przedsiębiorca nie może wykonywać działalności gospodarczej i osiągać bieżących przychodów z pozarolniczej działalności gospodarczej. Natomiast w okresie zawieszenia przedsiębiorca:

- ma prawo wykonywać wszelkie czynności niezbędne do zachowania lub zabezpieczenia źródła przychodów;
- ma prawo przyjmować należności lub obowiązek regulować zobowiązania, powstałe przed datą zawieszenia wykonywania działalności gospodarczej;
- ma prawo zbywać własne środki trwałe i wyposażenie;
- ma prawo albo obowiązek uczestniczyć w postępowaniach sądowych, postępowaniach podatkowych i administracyjnych związanych z działalnością gospodarczą wykonywaną przed zawieszeniem wykonywania działalności gospodarczej;
- wykonuje wszelkie obowiązki nakazane przepisami prawa;
- ma prawo osiągać przychody finansowe, także z działalności prowadzonej przed zawieszeniem wykonywania działalności gospodarczej;
- może zostać poddany kontroli na zasadach przewidzianych dla przedsiębiorców wykonujących działalność gospodarczą.

Zawieszenie oraz wznowienie wykonywania działalności gospodarczej następuje na wniosek przedsiębiorcy. Wniosek o zawieszenie wykonywania działalności gospodarczej przedsiębiorca musi złożyć najpóźniej w dniu, w którym zawiesza wykonywanie działalności, może jednakże określić dzień późniejszy. Okres zawieszenia trwa do dnia określonego we wniosku o zawieszenie bądź do dnia złożenia wniosku o wpis informacji o wznowieniu wykonywania działalności gospodarczej.

W stosunku do zobowiązań o charakterze publicznoprawnym (m.in.: rozliczeń podatków, składek na ubezpieczenia społeczne) zawieszenie wykonywania działalności gospodarczej wywiera skutki prawne od dnia, w którym rozpoczyna się zawieszenie wykonywania działalności gospodarczej i trwa do dnia poprzedzającego dzień wznowienia wykonywania działalności gospodarczej.

5.2. Krajowy Rejestr Sądowy

Krajowy Rejestr Sądowy to rejestr składający się z trzech części:

- rejestru przedsiębiorców;
- rejestru stowarzyszeń, innych organizacji społecznych i zawodowych, fundacji oraz samodzielnych publicznych zakładów opieki zdrowotnej;
- rejestru dłużników niewypłacalnych.

Rejestr prowadzą w systemie informatycznym sądy rejonowe (sądy gospodarcze) obejmujące swoją właściwością obszar województwa lub jego część[39].

KRS jest jawny. Każdy ma prawo dostępu do danych zawartych w rejestrze za pośrednictwem Centralnej Informacji Krajowego Rejestru Sądowego, z oddziałami przy sądach rejestrowych. Każdy ma prawo otrzymać, również drogą elektroniczną, poświadczone odpisy, wyciągi, zaświadczenia i informacje z Rejestru.

Informacje zawarte o rejestrze oraz dotyczące figurujących w nim podmiotów można samodzielnie sprawdzić na stronach internetowych:

www.ems.ms.gov.pl/start

www.bip.ms.gov.pl/pl/rejestry-i-ewidencje/okrajowy-rejestr-sadowy/

Rejestr przedsiębiorców zawiera dane dotyczące m.in.: spółek prawa handlowego (jawnych, partnerskich, komandytowych, komandytowo-akcyjnych, z ograniczoną odpowiedzialnością, spółek akcyjnych), spółdzielni, przedsiębiorstw państwowych, instytutów badawczych, towarzystw ubezpieczeń wzajemnych.

Wniosek o wpis do KRS powinien być złożony nie później niż w terminie 7 dni od dnia zdarzenia uzasadniającego dokonanie wpisu, chyba że przepis szczególny stanowi inaczej.

Sąd rejestrowy bada, czy dołączone do wniosku dokumenty są zgodne pod względem formy i treści z przepisami prawa. Bada również, czy dane – wskazane we wniosku o wpis do Rejestru dane dotyczące osoby fizycznej, w tym numer PESEL, bądź nazwa lub firma oraz numer REGON, a jeżeli podmiot jest zarejestrowany w KRS, także numer KRS – są prawdziwe. W pozostałym zakresie sąd rejestrowy bada, czy zgłoszone dane są zgodne z rzeczywistym stanem, jeżeli ma w tym względzie uzasadnione wątpliwości.

W razie stwierdzenia, że wniosek o wpis do rejestru lub dokumenty, których złożenie jest obowiązkowe, nie zostały złożone pomimo upływu terminu, sąd rejestrowy wzywa obowiązanych do ich złożenia, wyznaczając dodatkowy 7-dniowy termin, pod rygorem zastosowania grzywny. W razie niewykonania obowiązków w tym terminie sąd rejestrowy nakłada grzywnę na obowiązanych. Grzywnę sąd może ponowić. Jeżeli środki te nie spowodują złożenia wniosku o wpis lub dokumentów, których złożenie jest obowiązkowe, a w KRS jest zamieszczony wpis niezgodny z rzeczywistym stanem rzeczy, sąd rejestrowy wykreśla ten wpis z urzędu. W szczególnie uzasadnionych przypadkach sąd rejestrowy może dokonać z urzędu wpisu danych odpowiadających rzeczywistemu stanowi rzeczy, o ile dokumenty stanowiące podstawę wpisu znajdują się w aktach rejestrowych, a dane te są istotne.

Podmiot wpisany do KRS ponosi odpowiedzialność za szkodę wyrządzoną zgłoszeniem do rejestru nieprawdziwych danych, jeżeli podlegały obowiązkowi wpisu na jego wniosek, a także niezgłoszeniem danych podlegających obowiązkowi wpisu do KRS w ustawowym terminie, chyba że szkoda nastąpiła wskutek siły wyższej albo wyłącznie z winy poszkodowanego lub osoby trzeciej, za którą nie ponosi on odpowiedzialności.

Wniosek o wpis informacji o zawieszeniu wykonywania działalności gospodarczej oraz wniosek o wpis informacji o wznowieniu wykonywania działalności gospodarczej powinien zawierać:

- nazwę lub firmę;
- numer KRS;
- numer NIP;
- siedzibę i adres przedsiębiorcy;
- datę rozpoczęcia zawieszenia wykonywania działalności gospodarczej albo
- datę wznowienia wykonywania działalności gospodarczej.

Do wniosku o wpis informacji o zawieszeniu wykonywania działalności gospodarczej przedsiębiorca załącza oświadczenie o niezatrudnianiu pracowników.

39 Ustawa z dnia 20 sierpnia 1997 r. o Krajowym Rejestrze Sądowym, Dz. U. z 2007r., nr 168 poz. 1186.

Wpisy do KRS podlegają obowiązkowi ogłoszenia w Monitorze Sądowym i Gospodarczym, chyba że ustawa stanowi inaczej[40].

5.3. Ograniczenia swobody prowadzenia działalności

Zasadą jest swoboda w podejmowaniu, prowadzeniu oraz wyborze rodzaju działalności gospodarczej. Oznacza to, że każdy może prowadzić działalność gospodarczą dowolnie obraną. Wynika to z ustawy o swobodzie działalności gospodarczej, która doprecyzowuje wytyczne określone w akcie nadrzędnym – Konstytucji RP[41]. Według Konstytucji społeczna gospodarka rynkowa oparta jest na wolności działalności gospodarczej, a ograniczenie wolności działalności gospodarczej jest dopuszczalne tylko w drodze ustawy i tylko ze względu na ważny interes publiczny.

Wyjątki od zasady swobody gospodarczej są enumeratywnie określone przepisami prawa. Takimi ograniczeniami są koncesje, a także działalność gospodarcza regulowana te zezwolenia, licencje, zgody.

Ustawa o swobodzie działalności gospodarczej definiuje działalność regulowaną jako działalność gospodarczą, której wykonywanie wymaga spełnienia szczególnych warunków określonych przepisami prawa.

Koncesja

Koncesja jest decyzją odpowiedniego organu administracji, stanowi publicznoprawne uprawnienie do prowadzenia określonej działalności gospodarczej w dziedzinach mających szczególne znaczenie ze względu na bezpieczeństwo państwa lub obywateli albo inny ważny interes publiczny, przyznane określonemu podmiotowi.

Uzyskania koncesji wymaga wykonywanie działalności gospodarczej w zakresie:

- poszukiwania, rozpoznawania złóż węglowodorów oraz kopalin stałych objętych własnością górniczą, wydobywania kopalin ze złóż, podziemnego bezzbiornikowego magazynowania substancji oraz podziemnego składowania odpadów;
- wytwarzania i obrotu materiałami wybuchowymi, bronią i amunicją oraz wyrobami i technologią o przeznaczeniu wojskowym lub policyjnym;
- wytwarzania, przetwarzania, magazynowania, przesyłania, dystrybucji i obrotu paliwami i energią;
- ochrony osób i mienia;
- rozpowszechniania programów radiowych i telewizyjnych, z wyłączeniem programów rozpowszechnianych wyłącznie w systemie teleinformatycznym, które nie są rozprowadzane naziemnie, satelitarnie lub w sieciach kablowych;
- przewozów lotniczych;
- prowadzenia kasyna gry.

Szczegółowy zakres i warunki wykonywania działalności gospodarczej podlegającej koncesjonowaniu określają przepisy odrębnych ustaw.

Obowiązek uzyskania zezwolenia dotyczy innych dziedzin działalności gospodarczej niż objętych wyłącznością państwa (jak w przypadku koncesji). Zezwolenia wymaga się w dziedzinach działalności gospodarczej, w których jej prowadzenie może powodować zagrożenie dla życia, zdrowia, interesu publicznego.

40 Monitor Sądowy i Gospodarczy jest ogólnokrajowym dziennikiem urzędowym przeznaczonym do zamieszczania obwieszczeń lub ogłoszeń. Ogłasza się w nim wpisy do KRS, ogłoszenia wymagane przez Kodeks spółek handlowych, ogłoszenia przewidziane przepisami Kodeksu postępowania cywilnego, o ile obowiązek ich ogłaszania wynika z tej ustawy, inne obwieszczenia i ogłoszenia, jeżeli ich ogłoszenie jest wymagane lub dopuszczone przez ustawy.

41 Konstytucja Rzeczypospolitej Polskiej z dnia 2 kwietnia 1997 r., Dz. U. z 1997 r. nr 78, poz. 483, ze zm.

Zezwolenie

Zezwolenie jest środkiem reglamentacji działalności gospodarczej. Definiując zezwolenie, często wskazuje się na zwykle występujący zakaz podjęcia i wykonywania działalności gospodarczej, który na mocy decyzji administracyjnej może zostać uchylony w stosunku do zindywidualizowanego adresata te przedsiębiorcy (M. Sieradzka, 2012).

Zezwolenie to decyzja administracyjna wydana przez właściwy organ uprawniająca przedsiębiorcę do wykonywania określonego rodzaju działalności gospodarczej, dla której prowadzenia przepisy prawa wymagają takiego uprawnienia.

Dziedziny działalności gospodarczej, na podjęcie której niezbędne staje się uzyskanie zezwolenia są odmienne od dziedzin, w których prawo wymaga uzyskania koncesji. Nie negując oczywiście znaczenia tych dziedzin, należy wskazać, iż cechuje je „mniejsze znaczenie" ze względu na bezpieczeństwo państwa lub obywateli albo inny ważny interes publiczny. Dziedziny te są jednak na tyle istotne, że spełnione zostały przesłanki ograniczenia wolności działalności gospodarczej (wszelkie ograniczenia wolności działalności gospodarczej mają charakter wyjątku, co sprawia, iż podstawa musi wynikać z ustawy, a przesłanką jest ważny interes publiczny), a zatem możliwe stało się objęcie pewnych dziedzin działalności gospodarczej przymusem – zezwoleń, licencji, zgód (M. Sieradzka, 2012).

Dziedziny działalności gospodarczej wymagających uzyskania zezwolenia określa ustawa o swobodzie działalności gospodarczej. Zezwolenie wymagane jest na przykład do prowadzenia działalności w zakresie:

- sprzedaży napojów alkoholowych przeznaczonych do spożycia w miejscu lub poza miejscem sprzedaży oraz obrót hurtowy w kraju napojami alkoholowymi;
- wykonywania czynności bankowych obciążających ryzykiem środki powierzone pod jakimkolwiek tytułem zwrotnym – działalność banku;
- prowadzenia salonu gry bingo;
- wykonywania działalności ubezpieczeniowej;
- urządzania zakładów wzajemnych;
- opróżniania zbiorników bezodpływowych i transportu nieczystości ciekłych;
- prowadzenia schronisk dla bezdomnych zwierząt, a także grzebowisk i spalarni zwłok zwierzęcych i ich części;
- wytwarzania produktu leczniczego lub import takich produktów;
- wykonywania przewozów regularnych i przewozów regularnych specjalnych.

Licencja

Licencja to decyzja administracyjna wydana przez Głównego Inspektora Transportu Drogowego lub określony w ustawie organ samorządu terytorialnego (bądź, odpowiednio, przez Prezesa Urzędu Transportu Kolejowego), uprawniająca do podejmowania i wykonywania działalności gospodarczej w zakresie transportu drogowego (odpowiednio: kolejowego). Uzyskania licencji wymaga m.in.: wykonywanie transportu drogowego taksówką, wykonywanie przewozów kolejowych, świadczenie usługi trakcyjnej

Uzyskania zgody natomiast wymaga prowadzenie systemu płatności lub systemu rozrachunku papierów wartościowych w zakresie określonym w przepisach ustawy z dnia 24 sierpnia 2001 r. o ostateczności rozrachunku w systemach płatności i systemach rozrachunku papierów wartościowych oraz zasadach nadzoru nad tymi systemami.

Organy zezwalające, udzielające licencji i udzielające zgody oraz wszelkie warunki wykonywania działalności objętej zezwoleniami, licencjami oraz zgodami, a także zasady i tryb wydawania decyzji w sprawie zezwoleń, licencji i zgód określają przepisy odrębnych ustaw.

5.4. Kontrola działalności gospodarczej przedsiębiorcy

Ustawa o swobodzie działalności gospodarczej reguluje również zagadnienia dotyczące kontroli działalności gospodarczej przedsiębiorców. Określa ona zasady wykonywania kontroli, chyba że zasady i tryb kontroli wynikają z bezpośrednio stosowanych przepisów powszechnie obowiązującego prawa wspólnotowego albo z ratyfikowanych umów międzynarodowych. W kwestiach, których nie normuje, w szczególności dotyczących zakresu przedmiotowego kontroli oraz organów upoważnionych do jej przeprowadzenia, ustawa odsyła do przepisów szczególnych.

Co do zasady, organy kontroli zawiadamiają przedsiębiorcę o zamiarze wszczęcia kontroli. Zawiadomienia o zamiarze wszczęcia kontroli nie dokonuje się jednak w ściśle określonych przypadkach, np. gdy przeprowadzenie kontroli jest niezbędne dla przeciwdziałania popełnieniu przestępstwa lub zabezpieczenia dowodów jego popełnienia.

Jeżeli w toku prowadzonej kontroli, na skutek przeprowadzenia czynności kontrolnych z naruszeniem przepisów prawa przedsiębiorca, poniesie szkodę, może dochodzić odszkodowania. Dowody przeprowadzone w toku kontroli przez organ kontroli z naruszeniem przepisów prawa, jeżeli miały istotny wpływ na wyniki kontroli, nie mogą stanowić dowodu w żadnym postępowaniu administracyjnym, podatkowym, karnym lub karno-skarbowym dotyczącym kontrolowanego przedsiębiorcy.

Z zastrzeżeniem wyjątków w ustawie przewidzianych, czas trwania wszystkich kontroli organu kontroli u przedsiębiorcy w jednym roku kalendarzowym nie może przekraczać:

- w odniesieniu do mikroprzedsiębiorców – 12 dni roboczych;
- w odniesieniu do małych przedsiębiorców –18 dni roboczych;
- w odniesieniu do średnich przedsiębiorców – 24 dni roboczych;
- w odniesieniu do pozostałych przedsiębiorców – 48 dni roboczych.

ZUS

Kontrolę wykonywania zadań i obowiązków w zakresie ubezpieczeń społecznych przez płatników składek przeprowadzają inspektorzy kontroli ZUS. Kontrola może obejmować w szczególności zgłaszanie do ubezpieczeń społecznych czy też prawidłowość i rzetelność obliczania, potrącania i opłacania składek oraz innych składek i wpłat, do których pobierania zobowiązany jest ZUS.

Urząd Skarbowy

Naczelnicy urzędów skarbowych przeprowadzają kontrolę podatkową podatników oraz płatników, której celem jest sprawdzenie, czy wywiązują się oni z obowiązków wynikających z przepisów prawa podatkowego. Ordynacja podatkowa[42] również przewiduje zawiadomienie przedsiębiorcy przed wszczęciem kontroli, jednakże zawiera szereg wyjątków pozwalających na wszczęcie kontroli bez wcześniejszego informowania kontrolowanego, np.: gdy kontrola dotyczy zasadności zwrotu różnicy podatku lub zwrotu podatku naliczonego w rozumieniu przepisów o podatku od towarów i usług, gdy ma być wszczęta na żądanie organu prowadzącego postępowanie przygotowawcze o przestępstwo lub przestępstwo skarbowe, gdy dotyczy opodatkowania przychodów nieznajdujących pokrycia w ujawnionych źródłach lub pochodzących ze źródeł nieujawnionych, gdy ma być podjęta w oparciu o informacje uzyskane na podstawie przepisów o przeciwdziałaniu praniu pieniędzy oraz finansowaniu terroryzmu.

42 Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Ordynacja podatkowa, z. U. z 2012 r. poz. 74,9 ze zm.

Państwowa Inspekcja Pracy

Przedsiębiorca zatrudniający pracowników może zostać skontrolowany przez Państwową Inspekcję Pracy[43]. Jest ona organem powołanym do sprawowania nadzoru i kontroli przestrzegania prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, a także przepisów dotyczących legalności zatrudnienia i innej pracy zarobkowej.

Państwowa Inspekcja Sanitarna

Państwowa Inspekcja Sanitarna[44] jest powołana do realizacji zadań z zakresu ochrony zdrowia publicznego, w szczególności poprzez sprawowanie nadzoru (w tym kontroli) nad warunkami:

- higieny środowiska;
- higieny pracy w zakładach pracy;
- higieny radiacyjnej;
- higieny procesów nauczania i wychowania;
- higieny wypoczynku i rekreacji;
- zdrowotnymi żywności, żywienia i przedmiotów użytku;
- higieniczno-sanitarnymi, jakie powinien spełniać personel medyczny, sprzęt oraz pomieszczenia, w których są udzielane świadczenia zdrowotne.

Wykonywanie zadań określonych powyżej polega na sprawowaniu zapobiegawczego i bieżącego nadzoru sanitarnego oraz prowadzeniu działalności zapobiegawczej i przeciwepidemicznej w zakresie chorób zakaźnych i innych chorób powodowanych warunkami środowiska, a także na prowadzeniu działalności oświatowo-zdrowotnej.

5.5. Mikro-, mali- i średni przedsiębiorcy

Mikroprzedsiębiorcą jest przedsiębiorca, który w co najmniej jednym z dwóch ostatnich lat obrotowych:

- zatrudniał średniorocznie mniej niż 10 pracowników oraz
- osiągnął roczny obrót netto ze sprzedaży towarów, wyrobów i usług oraz operacji finansowych nieprzekraczający równowartości w złotych 2 milionów euro lub sumy aktywów jego bilansu sporządzonego na koniec jednego z tych lat nie przekroczyły równowartości w złotych 2 milionów euro.

Małym przedsiębiorcą jest przedsiębiorca, który w co najmniej jednym z dwóch ostatnich lat obrotowych:

- zatrudniał średniorocznie mniej niż 50 pracowników oraz
- osiągnął roczny obrót netto ze sprzedaży towarów, wyrobów i usług oraz operacji finansowych nieprzekraczający równowartości w złotych 10 milionów euro lub sumy aktywów jego bilansu sporządzonego na koniec jednego z tych lat nie przekroczyły równowartości w złotych 10 milionów euro.

Za średniego przedsiębiorcę uważa się przedsiębiorcę, który w co najmniej jednym z dwóch ostatnich lat obrotowych:

- zatrudniał średniorocznie mniej niż 250 pracowników oraz
- osiągnął roczny obrót netto ze sprzedaży towarów, wyrobów i usług oraz operacji finansowych nieprzekraczający równowartości w złotych 50 milionów euro lub sumy aktywów jego bilansu sporządzonego na koniec jednego z tych lat nie przekroczyły równowartości w złotych 43 milionów euro.

43 Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy, Dz. U. z 2012 r. poz. 404, poz. 769.
44 Ustawa z dnia 14 marca 1985 r. o Państwowej Inspekcji Sanitarnej, Dz. U. z 2011 r. poz. 1263, ze zm.

Jeżeli przedsiębiorca nie spełnia jednej z wyżej wymienionych przesłanek w ciągu badanych ostatnich dwóch lat obrotowych, jest zaliczany do wyższej kategorii. Na przykład: przedsiębiorca, który w ciągu co najmniej jednego roku obrotowego zatrudniał średniorocznie mniej niż 10 pracowników, ale osiągnął roczny obrót netto ze sprzedaży towarów o równowartości w złotych 2,5 milionów euro, jest małym przedsiębiorcą, gdyż nie spełnia przesłanki wysokości obrotu, by zaliczyć go do kategorii mikroprzedsiębiorców.

Tabela 1. Charakterystyka przedsiębiorców

	Średnioroczna liczba pracowników	Obrót netto	**Suma aktywów**
Mikroprzedsiębiorca	mniej niż 10	do 2 mln €	do 2 mln €
Mały przedsiębiorca	10– 49	do 10 mln €	do 10 mln €
Średni przedsiębiorca	50–249	do 50 mln €	do 43 mln €

Źródło: Opracowanie własne na podstawie ustawy o swobodzie działalności gospodarczej

5.6. Formy prawne prowadzenia działalności gospodarczej

Decydując się na prowadzenie własnej działalności gospodarcze należy zastanowić się na odpowiednią do potrzeb formą prawną przedsięwzięcia. Przedsiębiorstwa funkcjonujące na rynku można podzielić na następujące kategorie:

- przedsiębiorstwa państwowe;
- spółdzielnie;
- spółki;
- jednoosobowa działalność gospodarcza.

<table>
<tr><th colspan="6">Przedsiębiorstwa</th></tr>
<tr><th colspan="3">Spółki</th><th rowspan="2">Przedsiębiorstwa państwowe</th><th rowspan="2">Spółdzielnie</th><th rowspan="2">Jednoosobowa działalność gospodarcza</th></tr>
<tr><th>Osobowe</th><th>Kapitałowe</th><th>Cywilna</th></tr>
<tr><td>jawna</td><td>z ograniczoną odpowiedzialnością</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>partnerska</td><td>akcyjna</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>komandytowa</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>komandytowo-akcyjna</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Schemat 1. Rodzaje przedsiębiorstw.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Kodeks cywilny, Kodeks spółek handlowych, Ustawa o przedsiębiorstwach państwowych, Prawo spółdzielcze

Przedsiębiorstwa państwowe

Przedsiębiorstwo państwowe[45] jest samodzielnym, samorządnym i samofinansującym się przedsiębiorcą posiadającym osobowość prawną. Przedsiębiorstwo państwowe działa zawsze w pewnym, z góry określonym, celu, przykładem takiego przedsiębiorstwa jest Poczta Polska[46].

Przedsiębiorstwa państwowe tworzą: naczelne oraz centralne organy administracji państwowej oraz Narodowy Bank Polski i banki państwowe. Organami przedsiębiorstwa państwowego są: ogólne zebranie pracowników (delegatów), rada pracownicza i dyrektor przedsiębiorstwa.

Spółdzielnie

Spółdzielnia jest dobrowolnym zrzeszeniem nieograniczonej liczby osób, o zmiennym składzie osobowym i zmiennym funduszu udziałowym, które w interesie swoich członków prowadzi wspólną działalność gospodarczą. Spółdzielnia może prowadzić działalność społeczną i oświatowo-kulturalną na rzecz swoich członków i ich środowiska[47].

Osoby zamierzające założyć spółdzielnię (założyciele) uchwalają statut spółdzielni, potwierdzając jego przyjęcie przez złożenie pod nim swoich podpisów, oraz dokonują wyboru organów spółdzielni, których wybór należy, w myśl statutu, do kompetencji walnego zgromadzenia lub komisji organizacyjnej w składzie co najmniej trzech osób. Spółdzielnia podlega obowiązkowi wpisu do Krajowego Rejestru Sądowego.

Członkiem spółdzielni może być każda osoba fizyczna o pełnej zdolności do czynności prawnych, która odpowiada wymaganiom określonym w statucie. Warunkiem przyjęcia na członka jest złożenie deklaracji. Deklaracja powinna być złożona pod rygorem nieważności w formie pisemnej. Podpisana przez przystępującego do spółdzielni deklaracja powinna zawierać jego imię i nazwisko oraz miejsce zamieszkania, a jeżeli przystępujący jest osobą prawną – jej nazwę i siedzibę, ilość zadeklarowanych udziałów, dane dotyczące wkładów, jeżeli statut ich wnoszenie przewiduje, a także inne dane przewidziane w statucie.

Organami spółdzielni są:

- walne zgromadzenie lub zebrania grup członkowskich – najwyższy organ spółdzielni;
- rada nadzorcza – sprawuje kontrolę i nadzór nad działalnością spółdzielni;
- zarząd – kieruje działalnością spółdzielni oraz reprezentuje ją na zewnątrz.

Osoba fizyczna prowadząca działalność gospodarczą

Jedną z form prowadzenia aktywności gospodarczej jest jednoosobowa działalność gospodarcza prowadzona przez osobę fizyczną, która w największym stopniu umożliwia samodzielne działanie i daje największą możliwość zarządzania przedsiębiorstwem.

Osoba fizyczna, prowadząc działalność w tej formie, indywidualnie zaciąga zobowiązania w swoim imieniu a także na swoją rzecz. Działalność gospodarcza jest jednocześnie prowadzona i reprezentowana przez właściciela. Za wszelkie zobowiązania przedsiębiorca odpowiada w sposób wyłączny i bez żadnych ograniczeń, zarówno majątkiem przedsiębiorstwa, jak majątkiem osobistym.

45 Ustawa z dnia 25 września 1981 r. o przedsiębiorstwach państwowych, Dz. U. z 2002 r. nr 112, poz.981.
46 Wykaz przedsiębiorstw państwowych według stanu na dzień 31.12.2012 r., http://nadzor.msp.gov.pl/portal/nad/import/11/, 10.03.2013.
47 Ustawa z dnia 16 września 1982 r. Prawo spółdzielcze, Dz. U. z 2003 r. nr 188, poz. 1848.

Tabela 2. Zalety i wady prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej

Zalety prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej	Wady prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej
zadowolenie z tworzenia nowych rzeczy i poczucie realizacji podjętego celu	ryzyko niepowodzenia przedsięwzięcia i konieczność nieustannego zabiegania o utrzymanie odpowiedniego poziomu sprzedaży usług/produktów
gwarancja zatrudnienia – dopóki firma będzie istniała, to nikt nas z niej nie wyrzuci	konieczność pracy w wymiarze wyższym niż etat, czyli więcej niż 8 godzin dziennie
autonomia i elastyczność w wyborze sposobu wykonywania określonych i wymaganych przez charakter pracy działań	konieczność prowadzenia dodatkowej dokumentacji podatkowej, ZUS konieczność stałego monitorowania zmian przepisów kodeksu pracy, zasad bezpieczeństwa i higieny pracy
większa satysfakcja niż wówczas, gdy pracuje się dla kogoś innego	podjęcie odpowiedzialności finansowej i prawnej, zarówno za siebie, jak i za pracowników

Źródło: www.twoja-firma.pl/artykuly/2,zalety-i-wady-prowadzenia-wlasnej-firmy.html, 7.03.2013

Spółka cywilna

Spółka cywilna stanowi najpopularniejszą formą prowadzenie działalności gospodarczej. Wykonywanie działalności gospodarczej w formie spółki cywilnej reguluję Kodeks Cywilny[48].

Zgodnie z ustawową definicją umowa spółki cywilnej może łączyć wyłącznie przedsiębiorców i musi mieć ona na celu osiągnięcie określonego celu gospodarczego. Umowa spółki cywilnej może być zawarta w celu prowadzenia każdej dopuszczalnej prawem działalności gospodarczej. Umowa spółki powinna być stwierdzona pismem. Niezachowanie takiej formy nie pociąga za sobą żadnych ujemnych skutków w zakresie powstania spółki, skutkuje jedynie ograniczeniami w zakresie dowodzenia faktu zawarcia umowy czy też jej treści. Umowa spółki powinna szczegółowo wskazywać wspólny cel gospodarczy, a także zawierać określenie sposobu działania każdego ze wspólników dla osiągnięcia zamierzonego celu (W. Nowakowski, 2011).

Umowa spółki cywilnej w szczególności powinna określać:

- imiona i nazwiska wspólników;
- miejsce i zakres działalności;
- obszar działania;
- wysokość wnoszonych kapitałów;
- zakres odpowiedzialności wspólników;
- uczestnictwo w zyskach i stratach spółki;
- czas trwania spółki;
- sposób rozwiązania spółki;
- spółka cywilna nie posiada osobowości prawnej.

Wkład wspólnika może polegać na wniesieniu do spółki własności lub innych praw albo na świadczeniu usług. Domniemywa się, że wkłady wspólników mają jednakową wartość. Wspólnik nie może rozporządzać udziałem we wspólnym majątku wspólników ani udziałem w poszczególnych składnikach tego majątku. W czasie trwania spółki:

- wspólnik nie może domagać się podziału wspólnego majątku wspólników;
- wierzyciel wspólnika nie może żądać zaspokojenia z jego udziału we wspólnym majątku wspólników ani z udziału w poszczególnych składnikach tego majątku.

Za zobowiązania spółki wspólnicy odpowiedzialni są solidarnie.

48 Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. – Kodeks cywilny, Dz. U. z 1964, nr 16, poz. 93, ze zm.

Każdy wspólnik jest uprawniony i zobowiązany do prowadzenia spraw spółki. Każdy wspólnik bez uprzedniej uchwały wspólników może:

- prowadzić sprawy, które nie przekraczają zakresu zwykłych czynności spółki – jeżeli jednak przed zakończeniem takiej sprawy chociażby jeden z pozostałych wspólników sprzeciwi się jej prowadzeniu, potrzebna jest uchwała wspólników;
- wykonać czynność nagłą, której zaniechanie mogłoby narazić spółkę na niepowetowane straty.

W braku odmiennej umowy lub uchwały wspólników każdy wspólnik jest umocowany do reprezentowania spółki w takich granicach, w jakich jest uprawniony do prowadzenia jej spraw.

Każdy wspólnik jest uprawniony do równego udziału w zyskach i w tym samym stosunku uczestniczy w stratach, bez względu na rodzaj i wartość wkładu. W umowie spółki można inaczej ustalić stosunek udziału wspólników w zyskach i stratach. Można nawet zwolnić niektórych wspólników od udziału w stratach. Natomiast nie można wyłączyć wspólnika od udziału w zyskach.

Ustalony w umowie stosunek udziału wspólnika w zyskach odnosi się w razie wątpliwości także do udziału w stratach.

Spółki osobowe i kapitałowe

Tworzenie, organizację, funkcjonowanie, rozwiązywanie, łączenie, podział i przekształcanie spółek osobowych i kapitałowych reguluje Kodeks spółek handlowych[49].

Podstawowe kryterium odróżniające spółki osobowe od kapitałowych to fakt, że w spółkach osobowych wspólnicy angażują zarówno swój majątek, jak i osobistą pracę, w spółce kapitałowej zaś wspólnicy są wyłączeni z osobistej odpowiedzialności za zobowiązania spółki.

Spółki osobowe to:	Spółki kapitałowe to:
• spółka jawna;	• spółka z ograniczoną odpowiedzialnością;
• spółka partnerska;	• spółka akcyjna.
• spółka komandytowa;	
• spółka komandytowo-akcyjna.	

Spółki osobowe

Spółką jawną jest spółka osobowa, która prowadzi przedsiębiorstwo pod własną firmą. Firma spółki jawnej powinna zawierać nazwiska lub firmy (nazwy) wszystkich wspólników albo nazwisko albo firmę (nazwę) jednego albo kilku wspólników oraz dodatkowe oznaczenie „spółka jawna". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp. j."

49 Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych ,Dz. U. z 2000 r. nr 94, poz. 1037, ze zm.

Spółką partnerską jest spółka osobowa utworzona przez wspólników (partnerów) w celu wykonywania wolnego zawodu w spółce prowadzącej przedsiębiorstwo pod własną firmą. Spółka może być zawiązana w celu wykonywania więcej niż jednego wolnego zawodu. Partnerami w spółce mogą być wyłącznie osoby fizyczne, uprawnione do wykonywania następujących zawodów: adwokat, aptekarz, architekt, inżynier budownictwa, biegły rewident, broker ubezpieczeniowy, doradca podatkowy, makler papierów wartościowych, doradca inwestycyjny, księgowy, lekarz, lekarz dentysta lekarz weterynarii, notariusz, pielęgniarka, położna, radca prawny, rzecznik patentowy, rzeczoznawca majątkowy i tłumacz przysięgły.

Firma spółki partnerskiej powinna zawierać nazwisko co najmniej jednego partnera, dodatkowe oznaczenie „i partner" bądź „i partnerzy" albo „spółka partnerska" oraz określenie wolnego zawodu wykonywanego w spółce. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp.p."

Spółką komandytową jest spółka osobowa mająca na celu prowadzenie przedsiębiorstwa pod własną firmą, w której wobec wierzycieli za zobowiązania spółki co najmniej jeden wspólnik odpowiada bez ograniczenia (komplementariusz), a odpowiedzialność co najmniej jednego wspólnika (komandytariusza) jest ograniczona.

Firma spółki komandytowej powinna zawierać nazwisko jednego lub kilku komplementariuszy oraz dodatkowe oznaczenie „spółka komandytowa". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp.k.". Jeżeli komplementariuszem jest osoba prawna, firma spółki komandytowej powinna zawierać pełne brzmienie firmy (nazwy) tej osoby prawnej z dodatkowym oznaczeniem „spółka komandytowa". Nie wyklucza to zamieszczenia nazwiska komplementariusza, który jest osobą fizyczną. Nazwisko komandytariusza nie może być zamieszczane w firmie spółki.

Spółką komandytowo-akcyjną jest spółka osobowa mająca na celu prowadzenie przedsiębiorstwa pod własną firmą, w której wobec wierzycieli za zobowiązania spółki co najmniej jeden wspólnik odpowiada bez ograniczenia (komplementariusz), a co najmniej jeden wspólnik jest akcjonariuszem.

Firma spółki komandytowo-akcyjnej powinna zawierać nazwiska jednego lub kilku komplementariuszy oraz dodatkowe oznaczenie „spółka komandytowo-akcyjna". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „S.K.A." Jeżeli komplementariuszem jest osoba prawna, firma spółki komandytowo-akcyjnej powinna zawierać pełne brzmienie firmy (nazwy) tej osoby prawnej z dodatkowym oznaczeniem „spółka komandytowo-akcyjna". Nie wyklucza to zamieszczenia nazwiska komplementariusza, który jest osobą fizyczną. Nazwisko albo firma (nazwa) akcjonariusza nie może być zamieszczane w firmie spółki.

Tabela 3. Charakterystyka porównawcza spółek osobowych

Kryterium	spółka jawna	Spółka partnerska	spółka komandytowa	spółka komandytowo- akcyjna
Dokument założycielski	Umowa spółki powinna być zawarta na piśmie pod rygorem nieważności.	Umowa spółki powinna być zawarta na piśmie pod rygorem nieważności.	Umowa spółki powinna być zawarta w formie aktu notarialnego.	Statut spółki powinien być sporządzony w formie aktu notarialnego.
Min. wysokość kapitału zakładowego	Nieokreślona	Nieokreślona	Nieokreślona	50 000 zł
Odpowiedzialność za zobowiązania	Każdy wspólnik odpowiada za zobowiązania spółki bez ograniczenia całym swoim majątkiem i solidarnie z pozostałymi wspólnikami oraz ze spółką.	Partner nie ponosi odpowiedzialności za zobowiązania spółki: 1. powstałe w związku z wykonywaniem przez pozostałych partnerów wolnego zawodu w spółce; 2. będące następstwem działań lub zaniechań osób zatrudnionych przez spółkę na podstawie umowy o pracę lub innego stosunku prawnego, które podlegały kierownictwu innego partnera przy świadczeniu usług związanych z przedmiotem działalności spółki.	Komandytariusz odpowiada za zobowiązania spółki wobec jej wierzycieli tylko do wysokości sumy komandytowej.	Co najmniej jeden wspólnik –komplementariusz – za zobowiązania spółki odpowiada bez ograniczenia Akcjonariusz nie odpowiada za zobowiązania spółki.
Prowadzenie spraw i reprezentacja	Każdy wspólnik ma prawo reprezentować spółkę. Każdy wspólnik ma prawo i obowiązek prowadzenia spraw spółki.	Każdy partner ma prawo reprezentować spółkę samodzielnie, chyba że umowa spółki stanowi inaczej. Umowa spółki partnerskiej może przewidywać, że prowadzenie spraw i reprezentowanie spółki powierza się zarządowi	Spółkę reprezentują komplementariusze, których z mocy umowy spółki albo prawomocnego orzeczenia sądu nie pozbawiono prawa reprezentowania spółki. Komandytariusz może reprezentować spółkę jedynie jako pełnomocnik. Komandytariusz nie ma prawa ani obowiązku prowadzenia spraw spółki, chyba że umowa spółki stanowi inaczej.	Spółkę reprezentują komplementariusze, których z mocy statutu lub prawomocnego orzeczenia sądu nie pozbawiono prawa reprezentowania spółki. W spółce można ustanowić radę nadzorczą – jeżeli liczba akcjonariuszy przekracza dwadzieścia pięć osób, ustanowienie rady nadzorczej jest obowiązkowe. Rada nadzorcza sprawuje stały nadzór nad działalnością spółki we wszystkich dziedzinach jej działalności. Akcjonariusz może reprezentować spółkę jedynie jako pełnomocnik. Każdy komplementariusz ma prawo i obowiązek prowadzenia spraw spółki.
Podział zysku i strat	Każdy wspólnik ma prawo do równego udziału w zyskach i uczestniczy w stratach w tym samym stosunku bez względu na rodzaj i wartość wkładu. Określony w umowie spółki udział wspólnika w zysku odnosi się, w razie wątpliwości, także do jego udziału w stratach. Umowa spółki może zwolnić wspólnika od udziału w stratach.	Każdy wspólnik ma prawo do równego udziału w zyskach i uczestniczy w stratach w tym samym stosunku bez względu na rodzaj i wartość wkładu. Określony w umowie spółki udział wspólnika w zysku odnosi się, w razie wątpliwości, także do jego udziału w stratach. Umowa spółki może zwolnić wspólnika od udziału w stratach.	Komandytariusz uczestniczy w zysku spółki proporcjonalnie do jego wkładu rzeczywiście wniesionego do spółki, chyba że umowa spółki stanowi inaczej. Zysk przypadający komandytariuszowi za dany rok obrotowy jest przeznaczany w pierwszej kolejności na uzupełnienie jego wkładu rzeczywiście wniesionego do wartości umówionego wkładu. W razie wątpliwości komandytariusz uczestniczy w stracie jedynie do wartości umówionego wkładu.	Komplementariusz oraz akcjonariusz uczestniczą w zysku spółki proporcjonalnie do ich wkładów wniesionych do spółki, chyba że statut stanowi inaczej.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Kodeksu spółek handlowych

Spółki kapitałowe

Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością może być utworzona przez jedną albo więcej osób w każdym celu prawnie dopuszczalnym. Firma spółki może być obrana dowolnie, powinna jednak zawierać dodatkowe oznaczenie „spółka z ograniczoną odpowiedzialnością". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „spółka z o.o." lub „sp. z o.o.".

Zawiązać **spółkę akcyjną** może jedna albo więcej osób. Spółka akcyjna nie może być zawiązana wyłącznie przez jednoosobową spółkę z ograniczoną odpowiedzialnością. Firma spółki może być obrana dowolnie, powinna zawierać dodatkowe oznaczenie „spółka akcyjna". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „SA".

Tabela 4. Charakterystyka porównawcza spółek kapitałowych

Kryterium	Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością	Spółka akcyjna
Dokument założycielski	Umowa spółki powinna być zawarta w formie aktu notarialnego.	Statut spółki powinien być sporządzony w formie aktu notarialnego.
Minimalna wysokość kapitału zakładowego	Kapitał zakładowy spółki powinien wynosić co najmniej 5 000 złotych. Wartość nominalna udziału nie może być niższa niż 50 złotych. Kapitał zakładowy spółki dzieli się na udziały o równej albo nierównej wartości nominalnej.	Kapitał zakładowy spółki powinien wynosić co najmniej 100 000 złotych. Wartość nominalna akcji nie może być niższa niż 1 grosz. Statut spółki może określać minimalną lub maksymalną wysokość kapitału zakładowego. Kapitał zakładowy spółki dzieli się na akcje o równej wartości nominalnej.
Odpowiedzialność za zobowiązania	Za zobowiązania spółki odpowiada spółka całym swoim majątkiem Jeżeli egzekucja przeciwko spółce okazała się bezskuteczna, członkowie zarządu odpowiadają solidarnie za jej zobowiązania.	Za zobowiązania spółki odpowiada spółka całym swoim majątkiem Akcjonariusze nie odpowiadają za zobowiązania spółki.
Prowadzenie spraw i reprezentacja	Walne zgromadzenie akcjonariuszy – organ uchwałodawczy Zarząd – organ zarządzający Umowa spółki może ustanowić radę nadzorczą lub komisję rewizyjną albo oba te organy. W spółkach, w których kapitał zakładowy przewyższa kwotę 500 000 złotych, a wspólników jest więcej niż dwudziestu pięciu, powinna być ustanowiona rada nadzorcza lub komisja rewizyjna.	Walne zgromadzenie akcjonariuszy – organ uchwałodawczy Rada nadzorcza – organ nadzorujący Zarząd – organ zarządzający
Podział zysku i strat	Wspólnik ma prawo do udziału w zysku wynikającym z rocznego sprawozdania finansowego i przeznaczonym do podziału uchwałą zgromadzenia wspólników. Jeżeli umowa spółki nie stanowi inaczej, zysk przypadający wspólnikom dzieli się w stosunku do udziałów.	Akcjonariusze mają prawo do udziału w zysku wykazanym w sprawozdaniu finansowym, zbadanym przez biegłego rewidenta, który został przeznaczony przez walne zgromadzenie do wypłaty akcjonariuszom.

Źródło: Opracowanie na podstawie Kodeksu spółek handlowych

5.7. Podmioty ekonomii społecznej

W ramach ekonomii społecznej wyodrębnić można zbiór instytucji nazywany przedsiębiorstwami ekonomii społecznej (PES) lub po prostu przedsiębiorstwami społecznymi. Przedsiębiorstwo społeczne może być zdefiniowane jako prywatna, autonomiczna organizacja dostarczająca produktów lub usług na rzecz szerszej społeczności (ang. *community*), której założycielem albo zarządzającym jest grupa obywateli i w której zakres korzyści materialnych podlega ograniczeniom. Przedsiębiorstwo społeczne przywiązuje dużą wagę do swej autonomii i gotowości do przyjmowania ekonomicznego ryzyka związanego z prowadzoną w sposób ciągły działalnością społeczno-ekonomiczną (J. Wygnański, 2009).

Stowarzyszenie

Stowarzyszenie to podmiot dobrowolnie tworzony (najczęściej przez grono przyjaciół, znajomych, ludzi skupionych wokół jakiegoś tematu, celu), który jest niezależny od innych podmiotów i działa non-profit, czyli nie dla zysku (P. Szczyrski, 2009).

Stowarzyszenie jest dobrowolnym, samorządnym, trwałym zrzeszeniem o celach niezarobkowych[50].

Stowarzyszenie to:

- samodzielnie określa swoje cele, programy działania i struktury organizacyjne;
- uchwala akty wewnętrzne dotyczące jego działalności;
- opiera swoją działalność na pracy społecznej członków.

Stowarzyszenie mogą założyć osoby pełnoletnie, które posiadają pełną zdolność do czynności prawnych. Osoby małoletnie (czyli od 16 do 18 roku życia), chociaż nie mogą samodzielnie zakładać stowarzyszenia, mogą do nich należeć. Mogą samodzielnie wybierać władze stowarzyszenia uczestnicząc w walnym zgromadzeniu członków stowarzyszenia.

▶ **Tworzenie stowarzyszeń przyjmujących zasadę bezwzględnego posłuszeństwa ich członków wobec władz stowarzyszenia jest zakazane.**

Stowarzyszenie zwykłe może utworzyć co najmniej trzech obywateli, którzy wspólnie chcą prowadzić działalność. Stowarzyszenie takie nie ma możliwości tworzenia oddziałów, zrzeszania osób prawnych, łączenia się w związki stowarzyszeń, prowadzenia działalności gospodarczej, korzystania z ofiarności publicznej, przyjmowania darowizn, dotacji, spadków i zapisów.

Środki na działalność mogą pochodzić wyłącznie ze składek członkowskich. Aby utworzyć stowarzyszenie zwykłe, założyciele muszą uzgodnić regulamin działalności, wskazać siedzibę oraz osobę do reprezentacji. Komplet dokumentów należy złożyć do starosty powiatu właściwego ze względu na siedzibę organizacji. W ciągu 30 dni od daty złożenia wniosku stowarzyszenie zwykłe może rozpocząć działalność, o ile starosta powiatu nie zakaże jego działalności (P. Szczyrski, 2009). Stowarzyszenie zwykłe nie może:

- powoływać terenowych jednostek organizacyjnych;
- łączyć się w związki stowarzyszeń;
- zrzeszać osób prawnych;
- prowadzić działalności gospodarczej;
- przyjmować darowizn, spadków i zapisów oraz otrzymywać dotacji;
- korzystać z ofiarności publicznej.

Stowarzyszenie rejestrowe może utworzyć co najmniej piętnaście osób posiadających pełną zdolność do czynności prawnych i niepozbawionych praw publicznych. Osoby te uchwalają statut stowarzyszenia i wybierają komitet założycielski.

50 Ustawa z dnia 7 kwietnia 1989 r. Prawo o stowarzyszeniach, Dz. U. z 2001 r. nr 79, poz.855.

Statut stowarzyszenia określa w szczególności:

- nazwę stowarzyszenia, odróżniającą je od innych stowarzyszeń, organizacji i instytucji;
- teren działania i siedzibę stowarzyszenia;
- cele i sposoby ich realizacji;
- sposób nabywania i utraty członkostwa, przyczyny utraty członkostwa oraz prawa i obowiązki członków;
- władze stowarzyszenia, tryb dokonywania ich wyboru, uzupełniania składu oraz ich kompetencje;
- sposób reprezentowania stowarzyszenia oraz zaciągania zobowiązań majątkowych, a także warunki ważności jego uchwał;
- sposób uzyskiwania środków finansowych oraz ustanawiania składek członkowskich;
- zasady dokonywania zmian statutu;
- sposób rozwiązania się stowarzyszenia.

Stowarzyszenie podlega wpisowi do KRS i z chwilą wpisu uzyskują osobowość prawną. Komitet założycielski składa do sądu rejestrowego wniosek o rejestrację wraz ze statutem, listą założycieli zawierającą imiona i nazwiska, daty i miejsca urodzenia, miejsca zamieszkania oraz własnoręczne podpisy założycieli, protokół z wyboru komitetu założycielskiego, a także informację o adresie tymczasowej siedziby stowarzyszenia.

Najwyższą władzą stowarzyszenia jest walne zebranie członków. W sprawach, w których statut nie określa właściwości władz stowarzyszenia, podejmowanie uchwał należy do walnego zebrania członków. Stowarzyszenie jest obowiązane posiadać zarząd i organ kontroli wewnętrznej.

Nadzór nad działalnością stowarzyszeń należy do:

- wojewody właściwego ze względu na siedzibę stowarzyszenia – w zakresie nadzoru nad działalnością stowarzyszeń jednostek samorządu terytorialnego;
- starosty właściwego ze względu na siedzibę stowarzyszenia – w zakresie nadzoru nad innymi niż wymienionymi wyżej stowarzyszeniami.

Organ nadzorujący ma prawo:

- żądać dostarczenia przez zarząd stowarzyszenia, w wyznaczonym terminie, odpisów uchwał walnego zebrania członków (zebrania delegatów);
- żądać od władz stowarzyszenia niezbędnych wyjaśnień.

Majątek stowarzyszenia powstaje ze składek członkowskich, darowizn, spadków, zapisów, dochodów z własnej działalności, dochodów z majątku stowarzyszenia oraz z ofiarności publicznej. Stowarzyszenie może przyjmować darowizny, spadki i zapisy oraz korzystać z ofiarności publicznej.

Stowarzyszenie może prowadzić działalność gospodarczą. Dochód z działalności gospodarczej stowarzyszenia służy realizacji celów statutowych i nie może być przeznaczony do podziału między jego członków.

Fundacja

Podstawą prawną działania fundacji jest ustawa o fundacjach[51].Fundacja może być ustanowiona dla realizacji zgodnych z podstawowymi interesami Rzeczypospolitej Polskiej celów społecznie lub gospodarczo użytecznych, w szczególności takich, jak: ochrona zdrowia, rozwój gospodarki i nauki, oświata i wychowanie, kultura i sztuka, opieka i pomoc społeczna, ochrona środowiska oraz opieka nad zabytkami.

Fundację mogą ustanowić osoby fizyczne niezależnie od ich obywatelstwa i miejsca zamieszkania bądź osoby prawne mające siedzibę w Polsce lub za granicą. Oświadczenie woli o ustanowieniu fundacji powinno być złożone w formie aktu notarialnego.

Fundator ustala statut fundacji określający jej nazwę, siedzibę i majątek, cele, zasady, formy i zakres działalności, skład i organizację zarządu, sposób powoływania oraz obowiązki i uprawnienia tego organu i jego członków. Statut może zawierać również inne postanowienia, w szczególności dotyczące prowadzenia przez fundację działalności gospodarczej, dopuszczalności i warunków jej połączenia z inną fundacją, zmiany celu lub statutu, a także przewidywać tworzenie obok zarządu innych organów fundacji.

51 Ustawa z dnia 6 kwietnia 1984 r. o fundacjach, Dz. U. z 1991 r. nr 46, poz.203.

Fundacja uzyskuje osobowość prawną z chwilą wpisania do Krajowego Rejestru Sądowego.

Działalnością fundacji kieruje jej zarząd, który również reprezentuje fundację na zewnątrz. Fundacja może prowadzić działalność gospodarczą w rozmiarach służących realizacji celów, przy czym postanowienie o prowadzeniu działalności gospodarczej musi być zawarte w statucie i uwidocznione w rejestrze.

Spółdzielnie socjalne

Przedmiotem działalności spółdzielni socjalnej jest prowadzenie wspólnego przedsiębiorstwa w oparciu o osobistą pracę członków. Spółdzielnia socjalna działa na rzecz:

- społecznej reintegracji jej członków, przez co należy rozumieć działania mające na celu odbudowanie i podtrzymanie umiejętności uczestniczenia w życiu społeczności lokalnej i pełnienia ról społecznych w miejscu pracy, zamieszkania lub pobytu;
- zawodowej reintegracji jej członków, przez co należy rozumieć działania mające na celu odbudowanie i podtrzymanie zdolności do samodzielnego świadczenia pracy na rynku pracy.

Spółdzielnia socjalna może prowadzić działalność społeczną i oświatowo-kulturalną na rzecz swoich członków oraz ich środowiska lokalnego, a także działalność społecznie użyteczną w sferze zadań publicznych określonych w Ustawie o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie[52].

Spółdzielnię socjalną mogą założyć m.in.:

- osoby bezrobotne;
- osoby niepełnosprawne.

Ponadto członkami spółdzielni socjalnej mogą zostać również inne osoby, nienależące do grup zagrożonych wykluczeniem, o ile liczba tych osób nie stanowi więcej niż 50% ogólnej liczby założycieli. Liczba założycieli spółdzielni socjalnej nie może być mniejsza niż pięć, jeżeli założycielami są osoby fizyczne, i dwa, jeżeli założycielami są osoby prawne. Spółdzielnia socjalna liczy nie mniej niż pięciu i nie więcej niż pięćdziesięciu członków.

5.8. Pozyskiwanie kapitału na założenie i prowadzenie działalności gospodarczej

Praktyka gospodarcza przewiduje wiele możliwości finansowania działalności firmy, które różnią się przed wszystkim źródłem pochodzenia funduszy, kosztem pozyskania kapitału oraz pozycją prawną kapitałodawcy (M. Ciechan-Kujawa, 2007).

Tabela 5. Finasowanie przedsiębiorstwa

Kapitał		
Wewnętrzny	**Zewnętrzny własny**	**Zewnętrzny obcy**
Kapitał pochodzący z wypracowanych zysków	Kapitał pozyskiwany w różny sposób w zależności od formy prawnej przedsiębiorstwa	Kapitał pozyskany na rynku finansowym
Akumulowany zysk	Emisja akcji	Kredyty i pożyczki
Odpisy amortyzacyjne	Subwencje i dotację	Faktoring
Rezerwy	Venture capital	Leasing

Źródło: M. Ciechan-Kujawa, Biznesplan, Toruń 2007

52 Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie, Dz. U. z 2010 r. nr 234, poz. 1536.

Kredyt i pożyczka

Prawo bankowe[53] definiuje umowę kredytową jako zobowiązanie się banku do oddania w dyspozycję kredytobiorcy, na czas oznaczony w umowie, określonej kwoty środków pieniężnych z przeznaczeniem na ustalony cel, a kredytobiorca zobowiązuje się do korzystania z niej na warunkach określonych w umowie, do zwrotu kwoty wykorzystanego kredytu wraz z odsetkami w umownym terminie spłaty oraz do wpłaty prowizji od udzielonego kredytu.

Bank uzależnia przyznanie kredytu od zdolności kredytowej kredytobiorcy. Przez zdolność kredytową rozumie się zdolność do spłaty zaciągniętego kredytu wraz z odsetkami w terminach określonych w umowie. Kredytobiorca jest obowiązany przedłożyć na żądanie banku dokumenty i informacje niezbędne do dokonania oceny tej zdolności.

Umowa kredytu powinna być zawarta na piśmie i określać w szczególności:

- strony umowy;
- kwotę i walutę kredytu;
- cel, na który kredyt został udzielony;
- zasady i termin spłaty kredytu;
- wysokość oprocentowania kredytu i warunki jego zmiany;
- sposób zabezpieczenia spłaty kredytu;
- zakres uprawnień banku związanych z kontrolą wykorzystania i spłaty kredytu;
- terminy i sposób postawienia do dyspozycji kredytobiorcy środków pieniężnych;
- wysokość prowizji, jeżeli umowa ją przewiduje;
- warunki dokonywania zmian i rozwiązania umowy.

W czasie obowiązywania umowy kredytu kredytobiorca jest obowiązany przedstawić – na żądanie banku – informacje i dokumenty niezbędne do oceny jego sytuacji finansowej i gospodarczej oraz umożliwiające kontrolę wykorzystania i spłaty kredytu. W przypadku niedotrzymania przez kredytobiorcę warunków udzielenia kredytu albo w razie utraty przez kredytobiorcę zdolności kredytowej bank może obniżyć kwotę przyznanego kredytu albo wypowiedzieć umowę kredytu.

Przez umowę **pożyczki** dający pożyczkę zobowiązuje się przenieść na własność biorącego określoną ilość pieniędzy albo rzeczy oznaczonych tylko co do gatunku, a biorący zobowiązuje się zwrócić tę samą ilość pieniędzy albo tę samą ilość rzeczy tego samego gatunku i tej samej jakości.

Tabela 6. Porównanie kredytu bankowego i pożyczki bankowej

Kryterium	Kredyt	Pożyczka
Prawo do środków pieniężnych	do dyspozycji kredytobiorcy stawiana jest określona kwota środków pieniężnych w postaci bezgotówkowego pieniądza bankowego	na pożyczkobiorcę przenoszona jest własność określonej ilości pieniędzy
Cel i przeznaczenie	dokładnie sprecyzowany we wniosku kredytowym i umowie	brak wymogu sprecyzowania celu
Zdolność kredytowa	wymóg posiadania zdolności kredytowej	brak wymogu posiadania zdolności kredytowej
Wykorzystanie środków	na zasadach i warunkach wynikających z umowy	brak wymogu odkreślenia sposobu wykorzystania środków
Odpłatność	odpłatny	może być nieodpłatny
Spłata kapitału	w ratach kapitałowych	zazwyczaj jednorazowo

Źródło: L. Pawłowicz (red.), Ekonomika przedsiębiorstw. Zagadnienia wybrane, Gdańsk2001

53 Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. –Prawo bankowe, Dz. U. z 2012 r. poz. 1376, 1385, 1529.

Venture capital

Venture capital jest jednym z nowoczesnych źródeł finansowania działalności przedsiębiorstw. Można go zdefiniować jako kapitał własny wnoszony na ograniczony okres przez inwestorów zewnętrznych do przedsiębiorstw dysponujących innowacyjnym produktem, metodą produkcji bądź usługą, które nie zostały zweryfikowane jeszcze przez rynek, a więc stwarzają wysokie ryzyko niepowodzenia inwestycji, ale jednocześnie w przypadku sukcesu przedsięwzięcia, wspomaganego w zarządzaniu przez inwestorów, zapewniają znaczny przyrost wartości zainwestowanego kapitału, który jest realizowany poprzez sprzedaż udziałów (J. Węcławski, 1997).

Leasing

Przez umowę leasingu finansujący zobowiązuje się, w zakresie działalności swego przedsiębiorstwa, nabyć rzecz od oznaczonego zbywcy na warunkach określonych w tej umowie i oddać tę rzecz korzystającemu do używania albo używania i pobierania pożytków przez czas oznaczony, a korzystający zobowiązuje się zapłacić finansującemu w uzgodnionych ratach wynagrodzenie pieniężne równe co najmniej cenie lub wynagrodzeniu z tytułu nabycia rzeczy przez finansującego.

Faktoring

Faktoring określany jest jako rodzaj działalności polegającej na bezpośrednim zakupie przez banki lub instytucje finansowe wierzytelności klientów przypadających im z tytułu dostaw towarów lub usług dla odbiorców, z jednoczesnym świadczeniem na rzecz klientów co najmniej dwóch usług[54] spośród wymienionych: inkasowych, księgowych, doradczych, marketingowych. Istotą faktoringu jest zatem krótkoterminowe finansowanie dostaw towarów przez podmiot, który pośredniczy w procesie rozliczeń finansowych pomiędzy dostawcą a odbiorcą.

Faktoring jest to transakcja, w której przedsiębiorca przenosi bądź może przenieść wierzytelności na instytucję finansową albo pożycza pieniądze pod zastaw wierzytelności jako zabezpieczanie dla tej pożyczki. W obu tych przypadkach firma zyskuje gotówkę, nie czekając aż należności zostaną ściągnięte od dłużnika (B. Kłosowska, 1996).

Dotacja z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Osoby zamierzające założyć działalność gospodarczą mogą starać się o jej dofinansowanie, korzystając z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, którego elementem jest Działanie 6.2 – „Wsparcie oraz promocja przedsiębiorczości i samozatrudnienia". Portretowym celem tego programu jest promocja, a także wsparcie inicjatyw i działań dążących do tworzenia miejsc pracy oraz budowania postaw kreatywnych służących nie tylko rozwojowi przedsiębiorczości ale i samozatrudnienia.

Wsparcie obejmuje szereg działań i instrumentów dających możliwość skorzystania z:

- doradztwa i szkoleń umożliwiających zdobycie wiedzy i umiejętności potrzebnych do założenia i prowadzenia działalności gospodarczej;
- przyznanie środków finansowych na rozwój przedsiębiorczości do wysokości do 40 tys. zł.;
- wsparcia pomostowego w okresie pierwszych 6 do 12 miesięcy od rozpoczęcia działalności gospodarczej, obejmującego finansowe wsparcie pomostowe wypłacane miesięcznie w kwocie nie większej niż

54 Zgodnie z art. 1 Jednolitej Konwencji dotyczącej faktoringu międzynarodowego, przyjętej w trakcie konferencji dyplomatycznej w sprawie przyjęcia zarysu jednolitych przepisów dotyczących międzynarodowego faktoringu i międzynarodowego leasingu finansowego, która miała miejsce w Ottawie w dniach 9-28 maja 1988 roku.

równowartość minimalnego wynagrodzenia obowiązującego na dzień wypłacenia dotacji i połączone z doradztwem oraz pomocą w efektywnym wykorzystaniu dotacji.

- **Szczegółowe i aktualne informację dostępne są na stronie Portalu Funduszy Europejskich http://www.funduszeeuropejskie.gov.pl/PoradnikBeneficjenta/Strony/poradnik.aspx**

Dotacja z Funduszu Pracy

Osobom bezrobotnym jednorazowo mogą być przyznane środki z Funduszu Pracy na podjęcie działalności gospodarczej, w tym na pokrycie kosztów pomocy prawnej, konsultacji oraz doradztwa, związanych z podjęciem przez niego planowanej działalności[55].

Bezrobotny zamierzający podjąć działalność gospodarczą może złożyć do starosty właściwego ze względu na miejsce zamieszkania lub pobytu albo ze względu na miejsce prowadzenia działalności wniosek o dofinansowanie. We wniosku należy określić kwotę wnioskowanej pomocy oraz rodzaj działalności gospodarczej, którą wnioskodawca zamierza podjąć, ponadto dokonać należy kalkulacji kosztów związanych z rozpoczęciem działalności, wskazać źródła ich finansowania oraz działania podjęte w związku z podjęciem działalności. Dodatkowo we wniosku należy przedstawić specyfikację i harmonogram zakupów w ramach wnioskowanej dotacji oraz wskazać formę zabezpieczenia zwrotu refundacji (weksel z poręczeniem wekslowym, gwarancję bankową, zastaw na prawach lub rzeczach, blokadę rachunku bankowego, akt notarialny o poddaniu się egzekucji przez dłużnika).

Przyznanie dofinansowania jest dokonywane na podstawie umowy zawartej przez Urząd Pracy z bezrobotnym.

Wysokość przyznanej dotacji określona w umowie nie może być wyższa niż 6-krotność wysokości przeciętnego wynagrodzenia w poprzednim kwartale, które obowiązuje od pierwszego dnia następnego miesiąca po ogłoszeniu przez Prezesa GUS w Monitorze Polskim. Aktualna wysokość dotacji z Powiatowego Urzędu Pracy to 21.061 zł.

Osoba zainteresowana dotacją dodatkowo składa oświadczenie, że nie podejmie zatrudnienia w okresie 12 miesięcy po dniu rozpoczęcia prowadzenia działalności.

W trakcie trwania umowy o dofinansowanie Starosta dokonuje oceny prawidłowości wykonania umowy[56]

Szczegółowe informację na temat warunków uzyskania wsparcia i aktualny wzór wniosku wraz z szczegółowym regulaminem przyznawania dotacji dostępne są na stronach poszczególnych urzędów pracy.

- **Szkolenia internetowe Akademii PARP www.akademiaparp.gov.pl**
- **Zapisz się na szkolenie z Pozyskiwanie funduszy UE**

55 Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy, Dz. U. z 2008 r. nr 69, poz. 415.

56 Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 23 kwietnia 2012 r. w sprawie dokonywania z Funduszu Pracy refundacji kosztów wyposażenia lub doposażenia stanowiska pracy dla skierowanego bezrobotnego oraz przyznawania środków na podjęcie działalności gospodarczej, Dz. U. z 2012 r. poz. 457.

5.9. Biznesplan

Istotą biznesplanu jest sformułowanie zamierzeń na bliższą lub dalszą przyszłość, z ustaleniem zadania podstawowego (konkretnego przedsięwzięcia, interesu) lub zestawu zadań do wykonania, celów, środków i sposobów (metod) działania (A. Korczyn, 2009).

Biznesplan jest to element planowania strategicznego. Jest to podstawowe narzędzie planistyczne w organizacji, wykorzystywane m. in. przy ocenie opłacalności przedsięwzięć gospodarczych.

Biznesplan ma odpowiadać na podstawowe pytania

KTO? CO? JAK? ZA ILE?

Najogólniej rzecz ujmując, można stwierdzić, iż jest to średnioterminowy i kompleksowy spis celów oraz zadań, jakie stawia przed sobą przedsiębiorstwo, ujęty w formie pisemnej.

Fundamentem budowy biznesplanu jest określenie jego celów, które jednocześnie stają się zasadami sporządzania biznesplanu.

Tabela 7. Cele sporządzania biznesplanu

Wewnętrzne	Zewnętrzne

przewodnik dla działań strategicznych i operacyjnych firmy

element komunikacji przedsiębiorstwa z otoczeniem, m. in. z bankami, inwestorami, instytucjami państwowymi, w celu pozyskania źródeł finansowania inwestycji

zdefiniowanie słabych i silnych strony działalności gospodarczej

wytycza cele, metody działań

……

przedstawia analizę stanu obecnego firmy

Źródło: opracowanie własne na podstawie M. Ciechan-Kujawa, Biznesplan, Toruń 2007 i A. Korczyn, Jak opracować biznesplan?, Skierniewice 2009

Zasady konstrukcji biznesplanu

Konieczność opracowania biznesplanu w przedsiębiorstwie może wynikać z różnych czynników, które prowadzą do uruchomienia procesu planowania biznesowego, składającego się z trzech kluczowych elementów:

- przeglądu aktualnej sytuacji przedsiębiorstwa;
- opracowanie biznesplanu;
- ustalenie sposobu wdrążenia biznesplanu.

Etap 1 **Przegląd aktualnej sytuacji przedsiębiorstwa**	Potrzeba opracowanie biznesplanu	
	Oszacowanie możliwości wprowadzenia zmian i określenia celów zmian	Wstępna koncepcja
Etap 2 **Opracowanie biznesplanu**	Sformułowanie założeń funkcjonalnych, wykonawczych i prawnych	
	Przeprowadzenie szczególnej diagnozy i analizy sytuacji	
	Przygotowanie wstępnych prognoz i scenariuszy	
	Przegląd i weryfikacja projektu	
	Zatwierdzenie ostatecznej wersji biznesplanu	Biznesplan
Etap 3 **Ustalenie sposobu wdrążenia biznesplanu**	Określenie planów krótkookresowych i powołanie zespołów odpowiedzialnych za realizacje biznesplanu	Plan wdrążenia
Przekazanie do realizacji		
REALIZACJA PLANU → **MONITORING** **KONTROLA** **KOREKTY**		

Schemat 2. Procedura i etapy opracowania biznesplanu

Źródło: M. Ciechan-Kujawa, Biznesplan, Toruń 2007

Cechą charakterystyczną biznesplanu jest jego konstrukcja, składająca się z czterech podstawowych części (E. Filar, J. Skrzypek, 2002).

Wprowadzenia – na które składa się:

- streszczenie – krótko informuje o treści biznes planu;
- ogólna charakterystyka przedsięwzięcia/przedsiębiorstwa – przedstawia przedsiębiorstwo i cele, jakie przedsiębiorca chce osiągnąć.

Planu strategicznego – składającego się z:

- analizy strategicznej – obejmującej analizę mikrootoczenia i otoczenia konkurencyjnego, analizę przedsiębiorstwa, analizę przewidywanych zmian elementów otoczenia i zasobów organizacji oraz analizę celów i oczekiwań zainteresowanych stron;
- określenia misji i wizji przedsiębiorstwa –wskazanie klientów, produktów i usług, pola działania, techniki, pomysł na przetrwanie, publicznego wizerunku.

Planów szczegółowych – obejmujących:

- plan marketingowy – wskazanie kluczowych kryteriów strategii marketingowej, polityki cenowej, działań w zakresie dystrybucji, reklamy i promocji, a także prognozy sprzedaży;
- plan działalności operacyjnej – opisuje proces i technologię wytwarzania wyrobu/usługi, infrastrukturę techniczną, konieczne inwestycje, zakupy materiałów i usług, zdolności wytwórcze, kosztorys produkcji i usług, oddziaływanie na środowisko;
- plan organizacji i zarządzania – obejmuje swoim zakresem wskazanie posiadanych zasobów ludzkich i kosztów zatrudnienia, zasad, metod zarządzania w przedsiębiorstwie, harmonogramu głównych zamierzeń;
- plan finansowy – informuje o bieżącej kondycji finansowej przedsiębiorstwa, ustala szansę osiągnięcia zamierzonego wyniku finansowego, wyjaśnia zależności pomiędzy kosztami, określa rentowność zamierzonej działalności oraz wskazuje źródła pozyskania kapitału (M., Ciechan-Kujawa, 2007).

Załączników – które stanowią element szerszego przedstawienia kluczowych treści istotnych z punktu widzenia osoby piszącej biznes plan, będą to w szczególności: schematy organizacyjne, ekspertyzy, pozwolenia, koncesje, fotografie, rysunki, CV kadry kierowniczej i pracowników itp.

- **Szkolenia internetowe Akademii PARP www.akademiaparp.gov.pl**
- **Zapisz się na szkolenie z Biznes planu**

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Jakie są cele działania przedsiębiorstwa oraz sposoby ich realizacji?
2. Jakie są procedury i wymagania związane z zakładaniem przedsiębiorstwa?
3. Czym rożni się koncesja od zezwolenia i licencji?
4. Jakie kryteria odróżniają mikro- przedsiębiorców od małych i średnich przedsiębiorców?
5. Jakie są podstawowe formy prawno-organizacyjne przedsiębiorstwa?
6. Kto może założyć stowarzyszenie zwykłe?
7. Za pomocą poradnika beneficjenta dostępnego na stronie http://www.funduszeeuropejskie.gov.

pl/PoradnikBeneficjenta/Strony/poradnik.aspx wyszukaj, jakie są możliwości pozyskania środków na realizację Twojego projektu, a następnie omów etapy oraz zaplanuj działania zmierzające do jego realizacji.

Bibliografia:

Barowicz M., *Jak prowadzić działalność gospodarczą?,* Warszawa 2008.

Ciechan-Kujawa M., *Biznesplan*, Toruń 2007.

Filar E., Skrzypek J., *Biznesplan*, Warszawa 2002.

Heropolitańska I., Jagodzińska-Serafin E., Kruglak J., Ryżewska S., *Kredyty, pożyczki i gwarancje bankowe,* Warszawa 1999.

Juraszek-Kopacz B., Piekut D. (red.), *Ekonomia społeczna i biznes – partnerstwo sukcesu*, Warszawa 2008.

Kłosowska B., *Obsługa bankowa przedsiębiorstw*, Toruń 1996.

Korczyn A., *Jak opracować biznesplan*?, Skierniewice 2009.

Nowakowski W., *Prawne aspekty działalności gospodarczej*, Szczecin 2011.

Pawłowicz L. (red.), *Ekonomika przedsiębiorstw. Zagadnienia wybrane*, Gdańsk 2001.

Powałowski A. (red.) *Prawo gospodarcze publiczne*, Warszawa 2012.

Sieradzka M. *Komentarz do art. 75 ustawy o swobodzie działalności gospodarczej*, publ. el., LEX, 2012.

Sieradzka M., *Swoboda działalności gospodarczej. Komentarz*, publ. el., System Informacji Prawnej LEX, 2010.

Snażyk Z., Szafrański A., *Publiczne prawo gospodarcze*, Warszawa 2012.

Strzyczkowski K., *Prawo gospodarcze publiczne*, Warszawa 2010.

Szczyrski P., *Jak założyć stowarzyszenie? Jak założyć fundację? Jak zostać z OPP?*, Szczecin 2009.

Węcławski J., *Venture capital. Nowy instrument finansowanie przedsiębiorstw*, Warszawa 1997.

Wygnański J., *O ekonomii – podstawowe pojęcia, instytucje i kompetencje*, Szczecin 2009.

Akty prawne:

Konstytucja Rzeczypospolitej Polskiej z dnia 2 kwietnia 1997 r., Dz. U. nr 78, poz. 483 ze zm.

Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 23 kwietnia 2012 r. w sprawie dokonywania z Funduszu Pracy refundacji kosztów wyposażenia lub doposażenia stanowiska pracy dla skierowanego bezrobotnego oraz przyznawania środków na podjęcie działalności gospodarczej, Dz. U. poz. 457, ze zm.

Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych, Dz. U. z 2000 r. nr 94, poz. 1037 ze zm.

Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy, Dz. U. z 2012 r. poz. 404, ze zm.

Ustawa z dnia 14 marca 1985 r. o Państwowej Inspekcji Sanitarnej, Dz. U. z 2011 r. nr 212, poz. 1263 ze zm.

Ustawa z dnia 16 września 1982 r. Prawo spółdzielcze, Dz. U. z 2003 r. Nr 188, poz. 1848.

Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej, Dz. U. z 2010 r. nr 220, poz. 1447.

Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy, Dz. U. z 2008 r. nr 69, poz. 415.

Ustawa z dnia 20 sierpnia 1997 r. o Krajowym Rejestrze Sądowym, Dz. U. z 2007 r. nr 168, poz. 1186.

Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny, Dz. U. n16, poz. 93 ze zm.

Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie, Dz. U. z 2010 r. nr 234, poz. 1536.

Ustawa z dnia 25 września 1981 r. o przedsiębiorstwach państwowych, Dz. U. z 2002 r. nr 112, poz.981.

Ustawa z dnia 27 kwietnia 2006 r. o spółdzielniach socjalnych, Dz. U. z 2006 r. nr 94, poz. 651, ze zm.

Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Prawo bankowe (Dz. U. z 2002 r. nr 72, poz. 665 ze zm.

Ustawa z dnia 6 kwietnia 1984 r. o fundacjach, Dz. U. z 1991 r. nr 46, poz. 203.

Ustawa z dnia 7 kwietnia 1989 r. Prawo o stowarzyszeniach, Dz. U. z 2001 r. nr 79, poz.855.

Ustawa z dnia z dnia 29 sierpnia 1997 r. Ordynacja podatkowa, Dz. U. z 2005 r. nr 8, poz. 60.

Netografia:

Huczko P., *Jak założyć własną firmę?* www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna--firme.html, 7.03.2013.

Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, *Jak zostać i pozostać przedsiębiorcą*? www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/, 7.03.2013.

Centrum Innowacji i Transferu Technologii, *Przewodnik krok po kroku do własnej firmy,* http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki_do_pobrania/publikacje/layout_zmiana_wysylka.pdf, 8.03.2013

Przydatne strony:

www. firma.gov.pl

www.zus.pl

www.pip.gov.pl

www.gis.gov.pl

www.twoja-firma.pl

www.ekonomiaspoleczna.pl

www.ngo.pl

www.bankier.pl

www.efs.gov.pl

www.kapitalludzki.gov.pl

www.mpips.gov.pl

6. Prowadzę biznes

Prowadzenie własnego biznesu wymaga poznania zasad organizacji i zarządzania. Zarządzanie przedsiębiorstwem to proces niezwykle skomplikowany i odpowiedzialne zajęcie, które nie powinno opierać się tylko na działaniu intuicyjnym. Obecnie otoczenie biznesowe jest bardzo złożone, a dodatkowo zmienia się w niezwykle szybkim tempie. By nadążyć za ciągłą zmianą niezbędne jest zastosowanie fachowej wiedzy poświęconej zarządzaniu firmą. Aby zarządzać w sposób kompletny i odpowiedzialny należy przyswajać sobie nową wiedzę z zakresu zarządzania i twórczo ją stosować w praktyce, pamiętając o tym, że najprzydatniejszą dla praktyki rzeczą jest dobra teoria.

Ciekawostki

Za najsłynniejszego menedżera na świecie uważany jest Jack Welch. Sławę i rozgłos zyskał dzięki niekonwencjonalnemu stylowi zarządzania i biznesowej intuicji, dzięki którym w ciągu 20 lat rządów Welcha w General Electric wartość rynkowa tej firmy wzrosła o ponad 400 miliardów dolarów

6.1. Zarządzanie własnym biznesem

Nowoczesne zarządzanie to ukierunkowany na przyszłość proces wyboru celów i dróg rozwoju, a więc proces decydowania kształtujący przyszłe wydarzenia i przyszłą pozycję firmy w otoczeniu oraz przyszłą jej strukturę i kulturę. Taki proces musi być więc procesem twórczym, wymagającym zaangażowania dużej wiedzy, wyobraźni, pomysłowości, elastyczności i odwagi. Aby sprostać takim wymaganiom, menedżerowie muszą dobrze opanować sztukę zarządzania: procesy, środki i metody oraz umieć je stosować do rozwiązywania zagadnień praktycznych w sposób innowacyjny. Muszą oni opracowywać różne warianty rozwiązań dotyczących przyszłych, możliwych sytuacji, uwzględniając zmiany zachodzące wewnątrz firmy i w otoczeniu jej działania, pamiętając o tym, że „wiele dróg wiedzie do Rzymu, niestety o wiele więcej dróg Rzym omija”.[57]

Zarządzanie[58] – zbiór działań zmierzających do osiągnięcia określonego celu związanego z interesem (potrzebą) danego przedmiotu zarządzania.

Działania składające się na proces zarządzania to **funkcje zarządzania.** Wyróżnia się wśród nich:

- planowanie i podejmowanie decyzji;
- organizowanie;
- przewodzenie;
- kontrolowanie (stała obserwacja postępów i podejmowanie korygujących decyzji).

57 www.referaty1.pl/technologie-informatyczne/4/, 13-02-2013.
58 www.biznes.pwn.pl/haslo/4000464/zarzadzanie.html, 02.02.2013.

Planowanie

Planowanie to wybór celów, określenie sposobów ich osiągania, precyzowanie stosownych zadań i terminów ich wykonania oraz uruchomienie niezbędnych do tego zasobów – ludzkich, rzeczowych i finansowych. W efekcie powstaje plan działalności przedsiębiorstwa (W. R. Griffin, 1997).

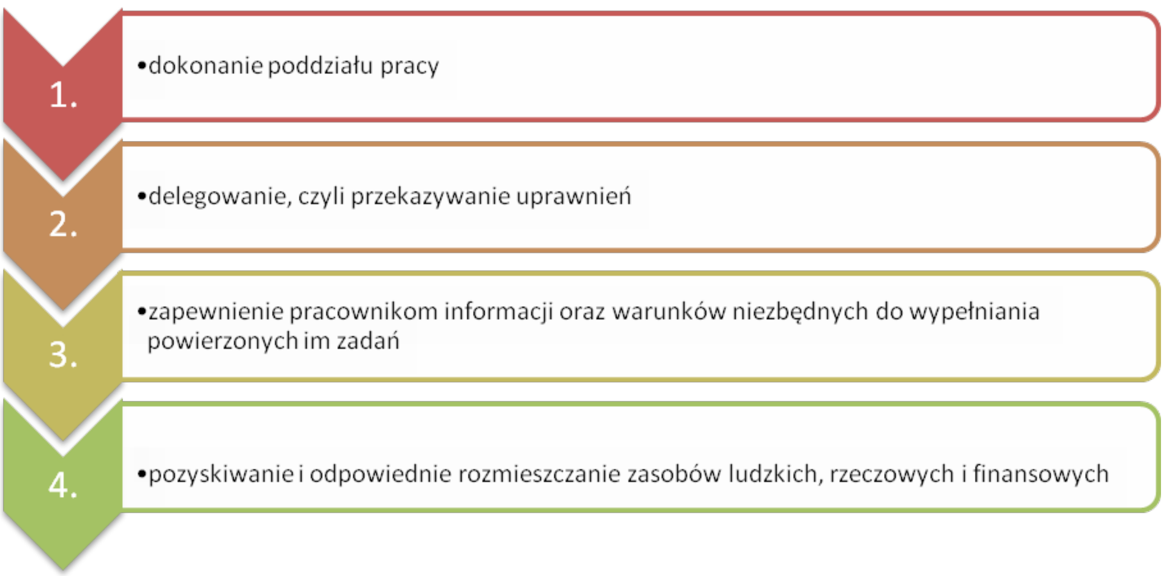
Rodzaje planowania z uwagi na czas realizacji:

- **strategiczne** (powyżej 5 lat) –plan przyszłości, dzięki któremu o wiele łatwiej wytyczyć ścieżki postępowania i realizacji (co zamierza się osiągnąć w życiu, lista wartości);
- **długoterminowe** (od 2 do 5 lat) – konkretne przedsięwzięcia służące realizacji nadrzędnego celu;
- średnioterminowe (od kilku miesięcy do roku) – to odpowiedź na pytanie, co należy zrobić, aby zrealizować plan długoterminowy;
- **krótkoterminowe** (do trzech miesięcy) – krótkie zadania do wykonania;
- **bieżące** – codziennie lub w skali tygodnia (godziny i terminy spotkań, spraw do załatwienia).

Organizowanie

Organizowanie to przydzielanie i zapewnianie zasobów niezbędnych do realizacji zaplanowanych działań w sposób gwarantujący skuteczność i sprawność zarządzania. Plan działalności przedsiębiorstwa pomaga ukształtować strukturę organizacyjną, która zapewnia realizację przyjętych założeń.

Działania podejmowane na etapie organizowania pracy:



Schemat 18. Etapy organizowania pracy

Źródło: Opracowanie własne

Staranny i odpowiedni dobór personelu jest kluczem do sukcesu każdej organizacji. Często można usłyszeć stwierdzenie, że największym kapitałem firmy są ludzie. Dlatego też ważny jest właściwy dobór pracowników. Rekrutację firma powinna zacząć od określenia prawidłowego profilu stanowiska oraz osoby spełniającej wymogi na to stanowisko.

Najważniejsze cechy, które należy brać pod uwagę przy wyborze pracowników to:

- wykształcenie;
- referencje z poprzedniego miejsca pracy;
- dodatkowe kwalifikacje i uprawnienia;
- staż pracy na podobnym stanowisku oraz zdobyte doświadczenie zawodowe;
- kompetencje społeczne związane z umiejętnościami w zakresie komunikacji interpersonalnej i pracą zespołową;
- kompetencje osobiste związane z umiejętnością samodzielnego myślenia i podejmowania decyzji, przedsiębiorczością;
- organizacja pracy własnej;
- znajomość języków obcych.

Przewodzenie

Przewodzenie, czyli kierowanie ludźmi, motywowanie do współpracy w trakcie realizacji zadań. Polega na podejmowaniu działań mających na celu współpracę pracowników w interesie przedsiębiorstwa. Obejmuje cały szereg różnych procesów i czynności: motywowanie pracowników, wywieranie wpływu na innych, kierowanie działaniami ludzkimi, zarządzanie procesami interpersonalnymi i grupowymi, komunikowanie się w organizacji.

W procesie przewodzenia ważną rolę odgrywa **menadżer** (kierownik, dyrektor), powoływany na stanowisko w wyniku awansu, bądź **lider** – z reguły wyłoniony przez zespół.

Zachowanie się kierownika w stosunku do podwładnych określane jest **stylem kierowania**. Styl kierowania uzależniony jest od specyfiki pracy, sytuacji w przedsiębiorstwie oraz od osobowości kierownika.

Tabela 32. Podstawowe style kierowania

Styl kierowania		
Autokratyczny	**Demokratyczny**	**Liberalny**
Zakłada, że przeciętny człowiek ma chwiejny stosunek do pracy, stara się uchylać od obowiązków i odpowiedzialności oraz dąży do minimalizacji wysiłku wkładanego w pracę. W związku z tym kierownicy powinni być surowi i wymagający, gdyż tylko taka postawa zapewni realizację zadań. Na sposób działania menedżerów, którzy preferują autokratyczny styl kierowania, składają się następujące elementy: • menedżer sam określa cele grupowe i czynności, które należy wykonać, aby te cele osiągnąć; • arbitralnie decyduje o podziale pracy, przydzielając pracownikom określone działania według własnego uznania; • jego zachowanie organizacyjne sprowadza się do wydawania rozkazów i poleceń; • oceniając prace podwładnych wydaje arbitralne oceny zarówno negatywne, jak i rzadziej – pozytywne; • wobec pracowników stosuje raczej kary niż nagrody czy pochwały. **Skuteczność.** Autokratyczny styl kierowania prowadzi do bardzo wysokiej efektywności pracy w danej grupie roboczej. Jej jakość i oryginalność jest jednak niska. Niska jest również motywacja do pracy. Przejawia się to najczęściej tym, że pracownicy są efektywni jedynie w sytuacji, gdy podlegają bezpośredniemu nadzorowi, czyli pracują z zaangażowaniem, jeśli menedżer jest w pobliżu.	Zakłada, że przeciętny pracownik chętnie poświęca swoje umiejętności i energię na realizację celów, które uzna za własne. Potrafi być twórczy i odpowiedzialny w wykonywaniu swoich zadań organizacyjnych. Podwładni mają więc prawo udziału w podejmowaniu decyzji, a menedżer określa jedynie cel działania, który pracownicy realizują, wybierając sposób uważany za najbardziej odpowiedni. Rolą kierownika, który preferuje styl demokratyczny jest: • zachęcanie zespołu do podejmowania decyzji dotyczących celu i sposobu wykonywania pracy; • proponowanie alternatywnych form rozwiązywania problemów, przy czym ostateczna ich akceptacja zależy od grupy; • pozostawianie podziału pracy samym pracownikom; • formułowanie pochwał i uwag krytycznych pod adresem podwładnych na podstawie obiektywnych kryteriów; • zachęcanie pracowników do wyrażania swoich pomysłów i opinii; • udział w pracy grupy. **Skuteczność.** Demokratyczny styl kierowania sprzyja lepszej jakości pracy, jej efektywność jest jednak mniejsza niż w przypadku zarządzania autokratycznego. Przy tym sposobie przewodzenia grupie pracownicy wykazują dużą motywację do pracy.	Zakłada pozostawienie pracownikom niemal całkowitej swobody w wyborze celów zawodowych i sposobów ich realizacji. Menedżer preferujący taki sposób zarządzania: • pozostawia pracownikom całkowitą swobodę decyzji grupowych i indywidualnych; • nie uczestniczy w pracy swoich podwładnych, nie ingeruje w nią; • udziela informacji dotyczących celów i zadań tylko wtedy, gdy zostanie o to poproszony; • nie komentuje i nie ocenia pracy zespołu. **Skuteczność.** Przyjęcie liberalnego stylu kierowania prowadzi do nieefektywnej pracy zespołu. Jej wyniki są na ogół bardzo niskiej jakości.

Źródło: Opracowanie własne

Umiejętność dopasowania stylu zarządzania do aktualnych potrzeb zespołu i przedsiębiorcy to niezwykle cenna przewaga dobrego menadżera. Dla pracownika wiedza na temat tego, jaki styl zarządzania preferuje szef, jest też ważna, pozwala mu bowiem określić zarówno sposób pracy w danym zespole, jak i to, czego może się po szefie spodziewać. Dobry menadżer umie dobrać styl zarządzania do potrzeb zespołu oraz zadania. Oczywiście, na preferowany przez niego styl zarządzania wpływ mają: jego doświadczenia oraz osobowość. Dlatego też z reguły wykorzystuje się dwa – trzy style, choć najlepsi liderzy umiejętnie łączą je wszystkie. Menadżer, który nie potrafi dopasować sposobu pracy z ludźmi do potrzeb zespołu i zadań najczęściej będzie osiągał kiepskie wyniki w pracy bądź też będzie miał trudności z prowadzeniem zespołu (demotywacja, rotacja).

Współcześnie do zasobów ludzkich (HR – *human resources)* stosuje się zarządzanie oparte na przywództwie. Polega ono na motywowaniu pracowników, opierającym się na zaufaniu i wierze w ich potencjał. W tym modelu kierowania kontrolę oraz stosowanie kar ogranicza się do minimum, zastępując je samodyscypliną.

Motywowanie

Motywowanie to wpływanie na postawy i zachowania człowieka za pośrednictwem określonych bodźców. Polega ono na takim wykorzystywaniu mechanizmów motywacji, by zapewniały zaangażowanie pracowników na rzecz sukcesu organizacji, zachęcały do podnoszenia kwalifikacji i dawały satysfakcję z pracy (A. Kozdrój, 1990).

Istnieją trzy podstawowe sposoby motywowania pracowników:

1. **Przymus** – zakłada podporządkowanie zachowań pracowniczych interesom i woli motywującego. Opiera się na strachu i karach. Może przyjmować formę nakazu, zakazu, polecenia, zalecenia, normy, regulaminu, instrukcji.

2. **Zachęta** – środki zachęty mają charakter długotrwałego działania. Należą do najczęściej stosowanych w procesie motywacyjnym. Wzbudzają zainteresowanie pracą, skłaniają do aktywności. Wśród wielu instrumentów oddziaływania motywacyjnego najbardziej klasycznym pozostaje wynagrodzenie będące finansową zapłatą, jaką organizacja oferuje swoim pracownikom w zamian za świadczoną przez nich pracę. Środki zachęty dzielimy na:

   a) ekonomiczne:

   - pieniężne – płaca zasadnicza, premie, nagrody pieniężne, dodatki, dopłaty;
   - pozapieniężne – deputaty, szkolenia, rozwój, świadczenia o charakterze socjalnym, ubezpieczenie, wczasy, opieka nad dziećmi, akcje, przywileje (np. samochód służbowy).

   b) pozaekonomiczne:

   - w obszarze organizacyjnym – awanse, władza, dostęp do informacji, elastyczny czas pracy;
   - w obszarze psychologicznym – pochwały, wyróżnienia, praca w zakładzie o wysokim prestiżu, praca w „dobrym” zespole, pewność zatrudnienia;
   - w obszarze technicznym – możliwość pracy na nowoczesnej aparaturze, maszynach.

3. **Perswazja** – jest instrumentem oddziaływania na sferę umysłową człowieka. Wiąże się ona ze zmiana postaw, nawyków i odczuć. Zakłada partnerstwo kierującego i podwładnego. Cele i zadania są uwzględniane, a nie narzucane z góry. Perswazja pozbawiona jest elementu nakazu. Odwołuje się do motywacji wewnętrznej. Ma charakter emocjonalny lub racjonalny. Jest zazwyczaj środkiem dopełniającym inne narzędzia motywowania.

Wśród środków perswazji wyróżniamy: konsultacje, negocjacje, stawianie celów, współudział w zarządzaniu, komunikację.

W motywowaniu najskuteczniejsze jest umiejętne łączenie sposobów motywowania, polegające na odpowiednim dostosowywaniu ich do sytuacji oraz do osobowości podwładnych.

Praca zespołowa – praca stanowiąca podstawową i zarazem wyższą formę organizacji pracy. Polega na powierzeniu określonej grupie pracowników czynności lub operacji wydzielonych z procesów pracy[59]. Efektywność pracy zespołowej zależy w dużej mierze od lidera, jego umiejętności budowania zespołu oraz kierowania nim. Dobrze dobrany zespół, uzupełniające się kompetencje członków oraz odpowiedni podział zadań powodują tzw. **efekt synergii**[60].

DO ZAPAMIĘTANIA

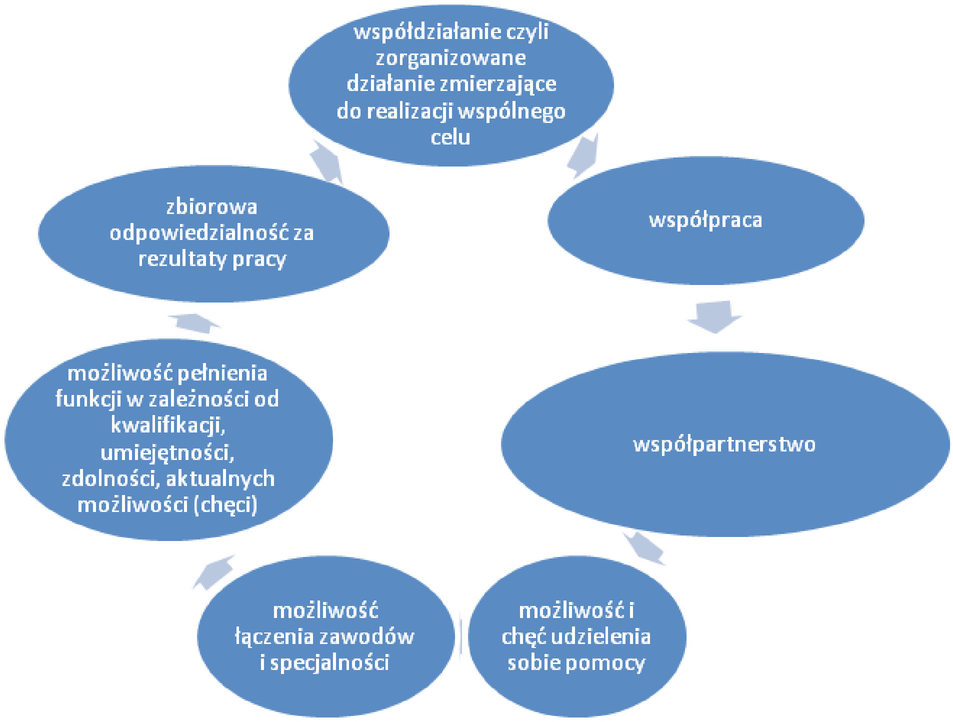
Efekt synergii – to zasada, którą można potocznie zapisać jako „2+2=5", czyli uzyskanie zwielokrotnionych korzyści dzięki umiejętnemu połączeniu części składowych całości

Każda grupa, aby właściwie funkcjonować, musi być zintegrowana. Integracja może mieć charakter kulturowy lub normatywny. Aby grupa funkcjonowała właściwie, powinna istnieć w niej właściwa komunikacja. Skuteczność pracy zespołu jest największa, gdy między zachowaniami zadaniowymi i zespołowymi zachodzi czy istnieje właściwa proporcja, a zachowania indywidualne są ograniczone do minimum.

Tworzenie i organizacja zespołu przebiega etapowo, tj.:

1. **etap formowania** – dominuje niepokój, zależność od przywódcy zespołu, testowanie zadania;
2. **etap ścierania się** – dominuje atmosfera konfliktu, rodzi się emocjonalny opór wobec lidera, wobec stawianych zadań, metod, opór wobec wszystkiego;
3. **etap normowania się** – daje możliwość kształtowania spójności grupy, norm i zasad współżycia, współdziałania, choć ciągle jeszcze występuje otwarta i dynamiczna wymiana poglądów, wyodrębnia się tożsamość grupy, pojawia się wsparcie;
4. **działanie** –wszystkiego rodzaju problemy interpersonalne zostały rozwiązane, cele i zadania zostały zaakceptowane, zespół podejmuje działanie.

59 www:pl.wikipedia.org, 15.03.2013.
60 www:mfiles.pl, 15.03.2013.



Schemat 19. Cechy pracy zespołowej

Źródło: Opracowanie własne

Aby przedstawić zalety i wady pracy posłużymy się Tabelą 33.

Tabela 33. Zalety i wady pracy zespołowej

Praca zespołowa	
Zalety (mocne strony):	**Wady (słabe strony):**
– działanie, praca zespołowa pozwala uzyskiwać lepsze rezultaty niż praca jednostek (synergiczny efekt działania zespołowego); – podniesienie wydajności pracy; – stworzenie warunków do wykorzystania indywidualnych umiejętności w interesie zespołu; – każdemu członkowi zespołu pozwala na wykonywanie tego, co jest dla niego odpowiednie, dzięki temu wzrasta zadowolenie z pracy; – zmniejsza się poczucie zależności od przełożonego; – wzmacniają się więzy pomiędzy poszczególnymi członkami zespołu (integracja), grupa staje się całością; – prowadzi do osłabienia fluktuacji, a przez to obniża się koszty z tym związane; – odciąża aparat kierowniczy od wykonywania zadań w miarę prostych, rutynowych, o niskim stopniu odpowiedzialności; – umożliwia dokonanie korzystnego podziału pracy i daje możliwość wzajemnej pomocy, grupowego rozwiązywania problemów; – ułatwia, przyspiesza, udrażnia przepływ informacji i proces komunikowania się, wymianę doświadczeń, ułatwia pokonywanie różnic wynikających z indywidualnych postaw, umożliwia wspólne tempo pracy, uaktywnia proces wzajemnej kontroli i samokontroli.	– może prowadzić do konformizmu; – w zespole może pojawić się lider-samozwaniec wymuszający na członkach grupy przyjęcie postaw negatywnych; – zmusza do częściowej rezygnacji z własnych ambicji na rzecz norm i wartości obowiązujących w zespole; – zespół potrzebuje więcej czasu na podjęcie decyzji lub rozwiązanie danego problemu niż indywidualny pracownik.

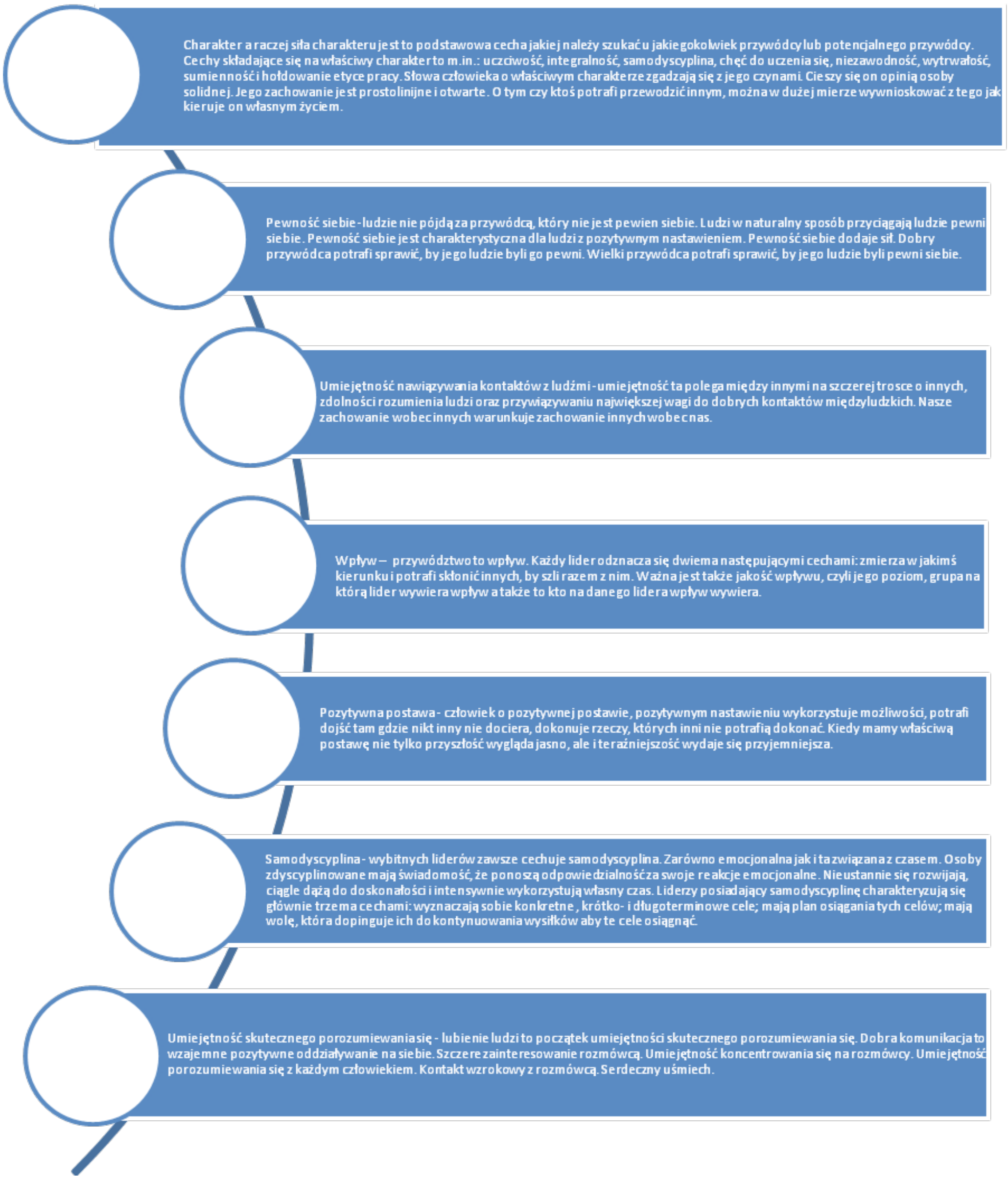
Źródło: Opracowanie własne

Aby grupa mogła sprawnie funkcjonować, musi posiadać lidera, czyli osobę, która przejmie przywództwo i będzie kierowała pracą. By dobrze kierować grupą, lider powinien wyróżniać się wieloma istotnymi cechami.

Niezadowolenie ze status quo – przywódcy widzą to nie tylko to, co jest, ale też **–** co ważniejsze **–** mają wizję tego, co mogłoby być. Nigdy nie są zadowoleni z rzeczy takich, jakimi one są. Niezadowolenie ze status quo nie oznacza negacji albo narzekania, łączy się bardziej z pragnieniem odmiany i podejmowaniem ryzyka. Osoba, która broni się przed zaryzykowaniem zmiany, nie rozwija się.

Menedżer sprawujący pieczę nad ludźmi ma obowiązek cenić ich za to, kim są, wierzyć, że chcą dać z siebie wszystko, chwalić ich osiągnięcia i, jako ich przywódca, zgadzać się ponosić za nich odpowiedzialność. Najważniejszym zadaniem menedżera jest pozyskiwanie i utrzymywanie przy sobie wartościowych ludzi. Ludzie, jeśli mają przywódcę, który dostrzega ich wartość, mogą się rozwijać, doskonalić i zwiększać swą efektywność. Osoba, która chce odnosić sukcesy jako lider, musi wychowywać innych liderów. Stworzyć zespół. Skala sukcesu lidera zależy od ludzi z jego najbliższego otoczenia, dlatego zadaniem lidera jest znaleźć najlepszych ludzi, by następnie uczynić z nich najlepszych przywódców, jakimi potrafią być. Bez sukcesorów nie ma sukcesu.[61]

Najważniejsze cechy lidera grupy[62]**:**



Schemat 20. Cechy lidera

Źródło: Opracowanie własne

61 www.biurocentrum.pl/?strona=toptemat&action=pokaz&id=2799, 20-04-2013.
62 www.manager.wieszjak.pl/przywodztwo-w-zespole/253397,2,Jakie-sa-pozadane-cechy-lidera.html, 01.03.2013.

Kontrolowanie

Kontrolowanie polega na kontroli wykonanych zadań i jest ostatnią fazą procesu zarządzania. Celem kontroli jest weryfikacja rzeczywistego działania z działaniami zaplanowanymi. Kontrola jest konieczna do sprawdzenia, czy następuje rozwój przedsiębiorstwa w wyznaczonym kierunku, czy osiągane są założone cele, czy realne jest wykonanie zaplanowanych zadań. Prowadzenie kontroli pozwala również wykryć niekorzystne tendencje i zmiany w działalności przedsiębiorstwa. Kontrola dostarcza również całego szeregu informacji, które mogą być wykorzystywane w bieżącym zarządzaniu przedsiębiorstwem, w procesach organizowania i motywowania pracowników, jak i w kolejnych cyklach planistycznych.

6.2. Rachunkowość przedsiębiorstwa

Księgowość jest jednym z ważniejszych działów występujących zwłaszcza w dużych przedsiębiorstwach. To właśnie w dziale księgowości zapadają bardzo ważne decyzje dotyczące m.in.: zwiększenia zatrudnia, wdrożenia kolejnych innowacyjnych rozwiązań lub rozpoczęcia bardzo ważnych inwestycji. Dlatego funkcja głównego księgowego jest zazwyczaj uważna za bardzo prestiżową, a osoba, którą ją pełni, bierze udział w posiedzeniach zarządu oraz może mieć decydujący głos w niektórych kwestiach. Przedsiębiorcy mają świadomość tego, jak duży wpływ na podejmowane przez nich decyzję mają informacje spływające właśnie z tego działu. Nie można bowiem zacząć realizować planów inwestycyjnych, bez uzyskania wcześniejszego zapewniania z księgowości, że firmę stać na sfinansowanie takiej właśnie inwestycji lub też na ponoszenie innych, bardzo wysokich kosztów. Bardzo często to właśnie z działu księgowości napływają pierwsze niepokojące informacje dotyczące nie tylko kondycji finansowej firmy, ale także te, na podstawie, których można przewidzieć możliwość powstania określonych komplikacji. Przedsiębiorcy dużą uwagę przywiązują zatem do informacji otrzymywanych z tego działu, a zwłaszcza do tych, które są bardzo niepokojące i mogą sygnalizować problemy finansowe firmy.

Rachunkowość stanowi specyficzny obszar zarządzania przedsiębiorstwem z racji wysoce rozwiniętych regulacji prawnych dotyczących prawidłowego prowadzenia ksiąg rachunkowych, zasad i terminów rozliczeń, sposobów kalkulacji i amortyzacji. **Przedmiotem rachunkowości** są określone zjawiska i procesy gospodarcze występujące w podmiotach gospodarczych (M. Dobija, 1997).

Podmiotami rachunkowości są jednostki prowadzące rachunkowość, czyli osoby prawne, jednostki organizacyjne nieposiadające osobowości prawnej oraz osoby fizyczne prowadzące działalność gospodarczą (B. Gierusz, 2003).

▶ **Rachunkowość – system ewidencji gospodarczej, który w formie pieniężnej odzwierciedla zjawiska i procesy gospodarcze zachodzące w danej jednostce i pozwalające na przedstawienie jej sytuacji majątkowej, finansowej oraz wynik finansowy (Z. Mesner, 2003).**

Rachunkowość jednostki obejmuje:

1. przyjęte zasady (politykę) rachunkowości;
2. prowadzenie ksiąg rachunkowych ujmujących zapisy zdarzeń w porządku chronologicznym i systematycznym;
3. okresowe ustalenie lub sprawdzenie drogą inwentaryzacji rzeczywistego stanu aktywów i pasywów;
4. wycenę aktywów i pasywów oraz ustalenie wyniku finansowego;
5. sporządzenie sprawozdań finansowych;
6. gromadzenie i przechowywanie dowodów księgowych oraz pozostałej przewidzianej ustawą dokumentacji;
7. badanie i ogłaszanie sprawozdań finansowych.

Prowadzenie księgowości wymaga przestrzegania zasad, które określone są w Ustawie o rachunkowości[63]. **Najważniejsze zasady rachunkowości** (B. Micherda, 2005)**:**

1) **zasada memoriału** – polega na ujęciu w księgach rachunkowych oraz sprawozdaniu finansowym operacji gospodarczych dotyczących danego okresu;
2) **zasada współmierności** – w księgach rachunkowych i wyniku finansowym należy ująć wszystkie osiągnięte przychody i współmierne z przychodami koszty ich osiągnięcia;
3) **zasada periodyzacji** – wymaga podziału zdarzeń gospodarczych na okresy i ujmowania wyników działalności za te okresy;
4) z**asada istotności** – wyodrębnienie w rachunkowości wszystkich zdarzeń istotnych dla oceny sytuacji majątkowej i finansowej oraz wyniku finansowego jednostki;
5) **zasada ciągłości** – polega na stosowaniu w kolejnych latach przyjętego sposobu postępowania (dotyczy to głównie sposobów wyceny składników majątku);
6) **zasada ostrożnej wyceny** – sposób wyceny składników majątkowych oraz zaliczenie przychodów, kosztów, strat i zysków do wyników danego okresu;
7) **zasada wyższości treści nad formą** – określone operacje muszą być ujęte w księgach i wykazane w sprawozdaniach finansowych zgodnie z ich treścią i rzeczywistością ekonomiczną;
8) **zasada kontynuacji działalności** – przyjmuje się założenie, że jednostka będzie dalej prowadzić działalność gospodarczą.

Funkcje rachunkowości

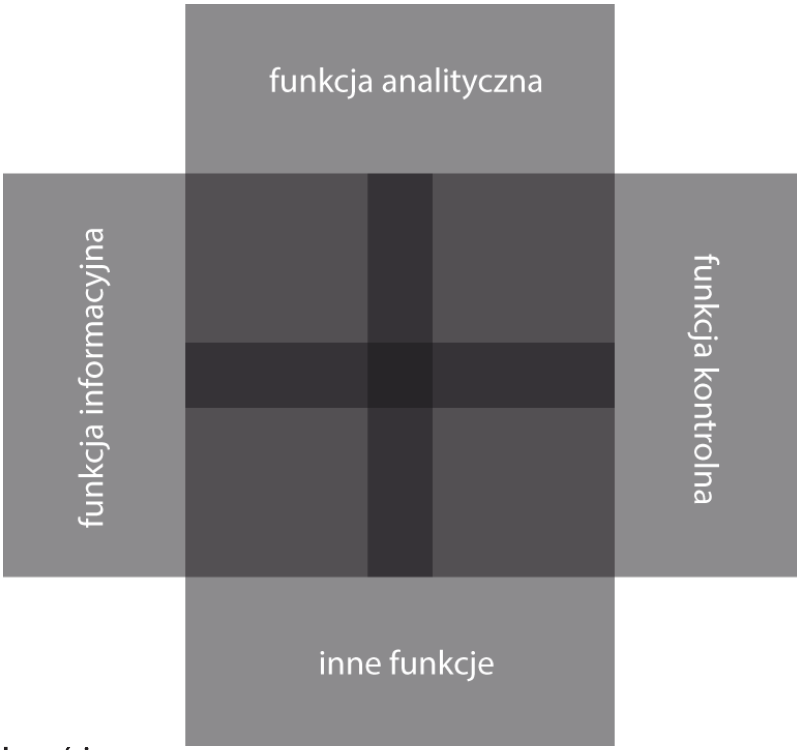
Rachunkowość prowadzona zgodnie z zasadami ma do spełnienia wiele ważnych funkcji. Do podstawowych możemy zaliczyć (A. Dyduch, 2004):

1. **funkcję informacyjną** – dostarcza informacji potrzebnych do zarządzania finansami firmy;
2. **funkcję kontrolną** – umożliwia wykrycie w majątku firmy niedoborów powstałych na skutek złego zarządzania lub kradzieży;
3. **funkcję analityczną** – pozwala na weryfikację wyników finansowych firmy poprzez analizy finansowe.

Inne funkcje rachunkowości to na przykład: funkcja rozliczeniowa, dowodowa, statystyczna czy stymulacyjna.

Wszystkie funkcje rachunkowości są pełnione równocześnie. Prowadzą one do efektywnego wykorzystania zasobów i właściwego wykonywania zadań przez podmioty gospodarcze.

63 Ustawa z dnia 29 września 1994 r. o rachunkowości, Dz. U. z 2013 r. poz. 330.



Schemat 21. Funkcje rachunkowości

Źródło: www:mfiles.pl, 12-03-2013

Dokumenty księgowe przedsiębiorstwa

Księgowość każdej firmy prowadzona jest na podstawie dokumentów, które są podstawą zapisów w księgach rachunkowych. Prawidłowość ksiąg rachunkowych zależy od tego, czy zapisy księgowe są udokumentowane prawidłowymi dowodami księgowymi, spełniającymi wymogi określone w przepisach. Każdy dokument przed **zaksięgowaniem (zaewidencjonowaniem**) powinien być sprawdzony, zatwierdzony i opisany, powinien posiadać własny numer księgowy. Dokumenty powinny być zatwierdzane pod względem formalnym, rachunkowym i merytorycznym przez osobę upoważnioną do tego rodzaju czynności.

Dokumentację finansową należy przechowywać w miejscu niedostępnym dla osób nieupoważnionych. Dokumentację finansową przechowuje się w porządku chronologicznym przez okres co najmniej pięciu lat od zakończenia danego roku obrotowego. Dokumentacja związana z zatrudnieniem powinna być przechowywana przez pięćdziesiąt lat od zakończenia pracy w organizacji przez pracownika.[64]

Dowód księgowy powinien zawierać co najmniej (art. 31 Ustawy o rachunkowości):

1. określenie rodzaju dowodu i jego numeru identyfikacyjnego;
2. określenie stron (nazwy, adresy) dokonujących operacji gospodarczej;
3. opis operacji oraz jej wartość, jeżeli to możliwe, określoną także w jednostkach naturalnych;
4. datę dokonania operacji, a gdy dowód został sporządzony pod inną datą – także datę sporządzenia dowodu;
5. podpis wystawcy dowodu oraz osoby, której wydano lub od której przyjęto składniki aktywów;
6. stwierdzenie sprawdzenia i zakwalifikowania dowodu do ujęcia w księgach rachunkowych przez wskazanie miesiąca oraz sposobu ujęcia dowodu w księgach rachunkowych (dekretacja), podpis osoby odpowiedzialnej za te wskazania.

64 www.newseria.pl/news/prawo/resort_pracy_chce_50_lat,p209823480, 20-04-2013.

Dowody księgowe powinny być sporządzane:

1. w języku polskim, chyba że stroną operacji gospodarczej jest kontrahent zagraniczny;
2. w walucie polskiej, posiadając dowód sporządzony w walucie obcej należy przeliczyć wartość waluty obcej na walutę polską po obowiązującym w dniu przeprowadzenia operacji gospodarczej kursie. Wynik przeliczenia powinien być umieszczony w wolnym polu dowodu lub w załączniku;
3. w sposób staranny i czytelny;
4. w sposób trwały (pismem ręcznym, maszynowym, wydruk komputerowy);
5. w sposób jasny i zrozumiały (pełna i zrozumiała treść odzwierciedlająca przebieg operacji gospodarczej).

Rodzaje księgowości

Księgowość musi prowadzić każda firma. Forma prowadzenia księgowości uzależniona jest od formy organizacyjnej przedsiębiorstwa, przyjętej formy opodatkowania podatkiem osiąganych przychodów oraz od wielkości osiąganych przychodów. Wyróżniamy **księgowość (rachunkowość) pełną** oraz **księgowość uproszczoną** (księgowość podatkową).

Księgowość (rachunkowość) pełna – to skomplikowany i sformalizowany system ewidencji księgowej. Polega na ujmowaniu operacji gospodarczych na odpowiednich kontach księgowych. Podmioty gospodarcze zobowiązane do prowadzenia ksiąg rachunkowych zostały określone w ustawie o rachunkowości. Jako podstawowy wymóg stosowania ustawy jest lokalizacji siedziby lub miejsce sprawowania zarządu, tj. terytorium Rzeczypospolitej Polskiej.

Osoby prawne od dochodu ustalonego na zasadach ogólnych płacą podatek według stawki liniowej 19%.

Podmioty gospodarcze obowiązane do prowadzenia księgi rachunkowej:

1. **bez względu na limit przychodów** – spółki handlowe definiowane w Kodeksie spółek handlowych, czyli spółki kapitałowe zawiązane w formie spółek akcyjnych i spółek z ograniczoną osobowością, spółki osobowe, takie jak: spółki komandytowe, spółki komandytowo-akcyjne;
2. **inne osoby prawne**, do których zaliczają się stowarzyszenia, fundacje, spółdzielnie, przedsiębiorstwa państwowe itp.;
3. **państwowe i samorządowe jednostki budżetowe**, samorządowe zakłady budżetowe, państwowe fundusze celowe oraz jednostki samorządu terytorialnego i ich związki;
4. **jednostki organizacyjne** działające na podstawie ustawy Prawo bankowe, regulacji obrotu papierami wartościowymi oraz przepisów o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej lub przepisów o organizacji i funkcjonowaniu funduszy emerytalnych.

Obowiązek prowadzenia ksiąg rachunkowych dotyczy również osób zagranicznych i przedstawicielstwa przedsiębiorców zagranicznych.

Ustawa o rachunkowości rozszerza zakres podmiotów zobowiązanych do prowadzenia ksiąg rachunkowych, wprowadzając limit przychodów netto ze sprzedaży towarów, produktów oraz operacji finansowych osiągnięty za poprzedni rok obrotowy co najmniej w równowartości wyrażonej w walucie polskiej 1.200.000 euro[65].

Kwota zobowiązująca do prowadzenia ksiąg rachunkowych w 2013 r. wynosi 4 936 560 zł:

(1.200.000 euro x 4,1138 zł/euro) = 4.936.560 zł.

Ustawa zezwala również na fakultatywne stosowanie przepisów ustawy o rachunkowości przez wymienione podmioty nawet wtedy, gdy przychody netto ze sprzedaży towarów, produktów i operacji finansowych za poprzedni rok obrotowy były niższe niż równowartość 1.200.000 euro wyrażonej w walucie polskiej.

Księgowość uproszczona

Jest podstawową formą księgowości, której celem jest przede wszystkim ustalenie podstawy opodatkowania podatkiem dochodowym. Formę tą mogą wybrać jednoosobowe firmy osób fizycznych, spółki cywilne osób fizycznych, spółki jawne osób fizycznych oraz spółki partnerskie, pod warunkiem, że wysokość osiągniętych przez nie przychodów za poprzedni rok obrotowy nie przekroczy równowartości w kwoty 1,2 mln euro wyrażonej w złotych.

Do form księgowości uproszczonej zalicza się:

1. Kartę podatkowa;
2. Ryczałt ewidencjonowany;
3. Podatkowa księgę przychodów i rozchodów.

Karta podatkowa jest uproszczoną metodą wymiaru i poboru należności podatkowych bez ustalania konkretnej podstawy wymiaru podatku, a w szczególności wielkości dochodu. Przy tej formie opodatkowania znaczenie ma rodzaj wykonywanej działalności zarobkowej oraz następujące kryteria: liczba mieszkańców miejscowości, w której jest prowadzona działalność czy liczba zatrudnionych osób. Opodatkowanie w tej formie wybrać mogą osoby fizyczne prowadzące działalność gospodarczą oraz spółki cywilne osób fizycznych, których działalność polega w szczególności na świadczeniu usług dla ludności, przy niewielkiej liczbie pracowników i zleceniobiorców. **Podstawą płatności podatku jest indywidualna decyzja urzędu skarbowego wydana na wniosek podatnika**.[66]

Obowiązki dokumentacyjne ograniczają się do gromadzenia wystawionych przez podatnika dokumentów sprzedaży (faktur lub rachunków), ewidencji zatrudnienia oraz prowadzenia kart przychodów pracowników. W związku z faktem, że w decyzji określona jest wielkość podatku, podatnik nie składa deklaracji podatkowych, dokonuje jedynie – bez wezwania urzędu skarbowego – miesięcznej płatności podatku, w terminie do 7 dnia każdego miesiąca za miesiąc ubiegły, a za grudzień – do 28 grudnia.

Aby można było skorzystać z rozliczenia w formie karty podatkowej, należy:

1. złożyć wniosek o zastosowanie opodatkowania w tej formie (druk PIT-16);
2. zgłosić we wniosku prowadzenie działalności wymienionej w jednej z 12 części tabeli;
3. w ramach prowadzenia działalności nie korzystać z usług osób niezatrudnionych przez siebie na podstawie umowy o pracę oraz z usług innych przedsiębiorstw i zakładów, z wyjątkiem usług specjalistycznych;
4. nie prowadzić (poza jednym z rodzajów działalności wymienionej w art. 23 PDOFU[67]) innej pozarolniczej działalności gospodarczej;

65 Wyrażoną w euro wielkość przelicza się na walutę polską po średnim kursie ogłoszonym przez Narodowy Bank Polski, na dzień 30 września 2012 r. wyniósł on 4,1138 zł/euro – zgodnie z tabelą kursów NBP z dnia 28 września 2012 r., nr 189/A/NBP/2012.

66 www:pl.wikipedia.org/wiki/Karta_podatkowa, 18.03.2013.

67 Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych, Dz. U. 2012 poz. 361 – dalej cytowana jako: PDOFU.

5. małżonek podatnika nie powinien prowadzić działalności w tym samym zakresie;
6. nie wytwarzać wyrobów opodatkowanych, na podstawie odrębnych przepisów, podatkiem akcyzowym;
7. pozarolnicza działalność gospodarcza zgłoszona we wniosku, o którym mowa w pkt. 1, nie powinna być prowadzona poza terytorium Rzeczypospolitej Polskiej.

Podatnicy opłacający podatek w formie karty są zwolnieni z podatku VAT – z tym, że ze zwolnienia tego mogą zrezygnować i wybrać opodatkowanie na zasadach ogólnych czynności podlegających regulacjom ustawy o podatku od towarów i usług oraz ustawy o podatku akcyzowym.

Ryczałt – to forma księgowości, która posiada wiele ograniczeń. Ponadto nie jest dostępna dla wszystkich podatników. Mogą z niego skorzystać tylko przedsiębiorcy, których roczne przychody nie przekraczają równowartości 150 tys. euro (limit dotyczy przedsiębiorców już funkcjonujących na rynku).

W 2013 roku z tej formy opodatkowania będą więc mogli skorzystać przedsiębiorcy, których przychody w 2012 roku nie przekroczyły 615.300 zł.

Stawki ryczałtu ewidencjonowanego są bardzo zróżnicowane – jest ich pięć i wynoszą od 3 do 20%, a zależą od wykonywanej działalności gospodarczej.

Stawki ryczałtu ewidencjonowanego[68]:

1. **3%** – m.in. przychody z działalności gastronomicznej (z wyjątkiem sprzedaży napojów o zawartości powyżej 1,5% alkoholu) oraz usługowej w zakresie handlu, ze świadczenia usług związanych z produkcją zwierzęcą;
2. **5,5%** – m.in. przychody z działalności wytwórczej i budowlanej;
3. **8,5%** – m.in. przychody z działalności usługowej, w tym gastronomicznej w zakresie sprzedaży napojów o zawartości alkoholu powyżej 1,5%, ze świadczenia usług wychowania przedszkolnego;
4. **17%** – przychody ze świadczenia niektórych usług niematerialnych, m.in. wynajmu samochodów osobowych, usług związanych z zakwaterowaniem, usług związanych z doradztwem w zakresie sprzętu komputerowego, usług fotograficznych, pośrednictwa w sprzedaży hurtowej;
5. **20%** – przychody z działalności gospodarczej wykonywanej osobiście, w ramach tzw. wolnych zawodów (lekarze, stomatolodzy, weterynarze, technicy dentystyczni, położne, pielęgniarki, tłumacze, nauczyciele udzielający lekcje na godziny).

Stawki ryczałtu mogą więc być bardzo atrakcyjne dla przedsiębiorców, biorąc pod uwagę, że najniższe z nich (3% i 5,5%) są aż o kilkanaście punktów procentowych niższe od podstawowej, 18%, stawki podatku obliczanego według skali podatkowej, dostępnej dla wszystkich przedsiębiorców, czy od 19% podatku liniowego. Ryczałt jest najczęściej wybierany przez tych podatników, którzy mogą skorzystać właśnie z kilkuprocentowych stawek podatku, natomiast z wyższych – firmy rzadko korzystają.

Ryczałtowcy płacą podatki do 20 dnia każdego miesiąca (w niektórych przypadkach możliwe jest także opłacanie zaliczek raz na kwartał), przy czym podatek za grudzień należy zapłacić do końca stycznia następnego roku podatkowego. Do końca stycznia ryczałtowcy muszą również złożyć roczne zeznanie podatkowe (PIT-28). Jeśli ryczałtowiec ma także dochody z innego źródła, na przykład z etatu, musi złożyć odrębny PIT (w przypadku etatu będzie to PIT-37, który należy złożyć do końca kwietnia).

68 Ustawa z dnia 20 listopada 1998 r. o zryczałtowanym podatku dochodowym od niektórych przychodów osiąganych przez osoby fizyczne, Dz. U. nr 144, poz. 930, ze zm.

Ryczałtowcy, w przeciwieństwie do przedsiębiorców rozliczających się z fiskusem za pomocą skali podatkowej lub podatku liniowego, nie mają prawa do odliczania kosztów uzyskania przychodów. Jeśli zatem firma ponosi duże koszty, na przykład na inwestycje, może się okazać, że ryczałt będzie dla niej nieopłacalny. Ryczałtowcy mogą odliczyć tylko składki na ubezpieczenia społeczne i zdrowotne. Nie mają możliwości wspólnego rozliczenia z małżonkiem lub samotnie wychowywanym dzieckiem, nie skorzystają również z popularnej ulgi na dzieci (choć są dla nich dostępne inne ulgi wynikające z ustawy o PIT, m.in. ulga rehabilitacyjna czy dla osób osiągających dochody za granicą). Ryczałtowiec może jedynie rozliczyć ulgę na dzieci w sytuacji, gdy osiąga wystarczające dochody z innego źródła, np. z etatu (w dalszym ciągu jednak nie może skorzystać ze wspólnego rozliczenia z małżonkiem lub samotnie wychowywanym dzieckiem).

Podatkowa księga przychodów i rozchodów

Podatkowa księga przychodów prowadzona jest przez przedsiębiorców, będących osobami fizycznymi, którzy wybrali opodatkowanie na zasadach ogólnych czyli według skali podatkowej lub opodatkowanie podatkiem liniowym według stawki 19%. Księgi te prowadzą także spółki osobowe (cywilna, jawna, partnerska), które wykonują działalność gospodarczą.

Tabela 34. Skala podatkowa w 2013 roku

Podstawa		Podatek
Ponad	Do	
	85 528 zł	18% minus kwota zmniejszająca podatek 556 zł 02 gr
85 528 zł		14.839 zł 02 + 32% nadwyżki ponad 85 528 zł

Źródło: www.wskazniki.gofin.pl/8,95,2.html

Zasady prowadzenia PKPIR (skrót od: podatkowa księga przychodów i rozchodów) są uregulowane w Ustawie z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych oraz Rozporządzeniu Ministra Finansów w sprawie prowadzenia podatkowej księgi przychodów i rozchodów.[69]

Zaprowadzenie PKPiR jest możliwe, o ile dany podmiot nie został obowiązany do zaprowadzenia ksiąg rachunkowych, to znaczy, w uproszczeniu mówiąc, gdy wartość jego przychodu nie przekroczyła limitu 1 200 000 euro. O zaprowadzeniu tego urządzenia trzeba powiadomić właściwego naczelnika urzędu skarbowego. Zawiadomienie takie składa się w terminie 20 dni od dnia założenia księgi. Dotyczy to sytuacji, w której przedsiębiorca rozpoczyna prowadzenie działalności i zaprowadza księgę po raz pierwszy. Zmiana podatkowej księgi przychodów na inne urządzenia ewidencyjne (tj. księgi rachunkowe, ewidencję przychodów) powinna być dokonana w terminie do 20 stycznia roku, w którym chcemy dokonać zmiany. W przypadku prowadzenia działalności w formie spółki zawiadomienie takie składają swoim naczelnikom urzędów skarbowych wszyscy wspólnicy. W przypadku powierzenia prowadzenia księgi przychodów i rozchodów biurowi rachunkowemu należy o tym zawiadomić naczelnika urzędu skarbowego w terminie 7 dni od dnia zawarcia umowy z biurem rachunkowym.

Podatkowa księga przychodów i rozchodów składa się z 16 kolumn. Kolumny od 1 do 6 dotyczą opisania danego zdarzenia gospodarczego, np. zakupu czy sprzedaży. Podaje się tutaj jego datę, numer dowodu, na podstawie którego wpis zostaje dokonany, a także dane kontrahenta oraz krótki opis powstałego zdarzenia. Kolumny od 7 do 9 zostały zarezerwowane dla wpisywania kwot uzyskanych przychodów z tytułu prowadzonej działalności gospodarczej, zaś kolumny 10-15 – dla kosztów w rozbiciu na: zakup towarów handlowych i materiałów, uboczne koszty zakupu, wynagrodzenia oraz pozostałe wydatki. Kolumna 16 służy do wpisywania uwag.

69 Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 26 sierpnia 2003 r. w sprawie prowadzenia podatkowej księgi przychodów i rozchodów, Dz. U. nr 152, poz. 1475.

W księdze podatkowej co do zasady wpisuje się jedynie te zdarzenia gospodarcze, które wywierają wpływ na wysokość podatku dochodowego.

Cechą charakterystyczną tej księgowości jest zatem brak kontroli kapitału jednostki i zmian w nim zachodzących (ustalanie majątku jest możliwe tylko za pomocą spisu inwentarza). Wszelkie operacje gospodarcze są rejestrowane chronologicznie i klasyfikowane według poszczególnych pozycji wymienionych w księdze rozchodów i przychodów.

Obowiązek prowadzenia księgi nie dotyczy osób, które: prowadzą księgi rachunkowe, opłacają podatek dochodowy w formach zryczałtowanych, wykonują wyłącznie usługi przewozu osób i towarów taborem konnym, wykonują wolny zawód adwokata wyłącznie w zespole adwokackim, dokonują sprzedaży środków trwałych po likwidacji działalności, a także rolników prowadzących gospodarstwo rolne bez zatrudnienia w nim pracowników, członków rolniczych spółdzielni produkcyjnych oraz pracowników rolnych wykonujących – osobiście lub z udziałem członków rodziny pozostających we wspólnym gospodarstwie domowym – działalność gospodarczą, jeżeli łączny przychód osiągany z tej działalności nie przekracza 820 zł w roku podatkowym.

Prowadzenie księgi przychodów i rozchodów wyłącza stosowanie opodatkowania w formie zryczałtowanej (ryczałt od przychodów ewidencjonowanych i karta podatkowa).

Rozważając wybór formy opodatkowania należy wziąć pod uwagę:

- poziom planowanych przychodów oraz kosztów - przy niskich kosztach najkorzystniej wypadają uproszczone formy opodatkowania tj. karta i ryczałt.
- poziom dochodu - przy wysokich dochodach lepiej wybrać podatek liniowy zamiast opodatkowania wg skali podatkowej
- obowiązki ewidencyjne - dla części podatników obowiązki ewidencyjne są bardzo kłopotliwe. Skorzystanie z uproszczonych form opodatkowania uwalnia podatników z konieczności prowadzenia ksiąg i ewidencji podatkowych, nie ponoszą oni kosztów obsługi finansowo-księgowej.

Schemat 22. Kryteria wyboru formy opodatkowania

Źródło: Opracowanie własne

Podatek od towarów i usług - VAT

Podatek VAT (*Value Added Tax*) – podatek od towarów i usług, zwany inaczej podatkiem od wartości dodanej, wprowadzony w Polsce ustawą o podatku od towarów i usług[70] oraz ustawą o podatku akcyzowym[71]. Jako podatek od wartości dodanej, zwiększa wartość towaru na każdym etapie obrotu. Podstawową zasadą VAT-u jest prawo do potrącania go z wartości podatku należnego w danej fazie obrotu podatku naliczonego. W konsekwencji przedsiębiorca płaci jedynie podatek od wartości dodanej, jaka powstała w jego fazie obrotu, obciążając nim kolejnego nabywcę swojego towaru. Dopiero konsument, płacąc cenę, płaci cały zawarty w niej podatek, bez możliwości jego odliczenia lub zwrotu.

Podatek VAT jest podatkiem:

1. **powszechnym** – ponieważ podatnikami są wszystkie podmioty dokonujące opodatkowanych czynności, niezależnie od statusu cywilnoprawnego;
2. **pośrednim** – jego ciężar ponoszą osoby trzecie, najczęściej finalni konsumenci, będący nabywcami określonego towaru;
3. **wielofazowym** –- jest pobierany w każdej fazie produkcji i obrotu towarowego.

Przedmiotem podatku VAT jest:

1. sprzedaż towarów;
2. odpłatne świadczenie usług na terenie kraju;
3. odpłatna dostawa towarów;
4. import towarów;
5. eksport towarów;
6. wewnątrzwspólnotowe nabycie towarów;
7. wewnątrzwspólnotowa dostawa towarów.

Podstawą opodatkowania jest obrót. Obrotem jest kwota należna z tytułu sprzedaży pomniejszona o kwotę należnego podatku. Kwota należna obejmuje całość świadczenia należnego od nabywcy lub osoby trzeciej. Obrót zwiększa się o otrzymane dotacje, subwencje i inne dopłaty o podobnym charakterze, mające bezpośredni wpływ na cenę (kwotę należną) towarów dostarczanych lub usług świadczonych przez podatnika, pomniejszone o kwotę należnego podatku.[72]

Stawki podatku VAT są podane procentowo w stosunku do ceny netto. W okresie od 1 stycznia 2011 roku do 31 grudnia 2013 roku przepisy określą następujące stawki podatku VAT:

1. stawka podstawowa – 23%;
2. stawka obniżona 8% – stosowana do sprzedaży żywności przetworzonej, usług związanych z rolnictwem, leśnictwem, usuwania odpadów, transportu, zakwaterowania, usług radiowo-telewizyjne, wstępu na imprezy sportowe, rekreacyjne, kulturalne;
3. stawka obniżona 5% – obejmuje produkty żywnościowe, książki na wszystkich nośnikach fizycznych oraz czasopisma;
4. stawka zerowa 0% – stosowana przy eksporcie oraz wewnątrzwspólnotowej sprzedaży i nabyciu towarów.

70 Ustawa dnia 11 marca 2004 r. o podatku od towarów i usług, Dz. U. z 2011 r. nr 177, poz. 1054, ze zm.

71 Ustawa z dnia 6 grudnia 2008 r. o podatku akcyzowym, Dz. U. z 2011 r. nr 108, poz. 626, ze zm.

72 Od 2014 r. zmianie ulegają zupełnie zasady ustalania podstawy opodatkowania podatkiem VAT tj. podstawą opodatkowania jest wszystko, co stanowi zapłatę, którą dokonujący dostawy towarów lub usługodawca otrzymał lub ma otrzymać z tytułu sprzedaży od nabywcy, usługobiorcy lub osoby trzeciej, włącznie z otrzymanymi dotacjami, subwencjami i innymi dopłatami o podobnym charakterze mającymi bezpośredni wpływ na cenę towarów dostarczonych lub usług świadczonych przez podatnika.

W podatku VAT wyróżniamy kilka grup podatników:

1. **podatnicy VAT czynni** – podatnicy, którzy płacą podatek;
2. **podatnicy VAT zwolnieni** – podatnicy, którzy sprzedają na tyle mało, że obejmuje ich limit zwolnienia z VAT, tzw. zwolnienia podmiotowego;
3. **podatnicy dokonujący wyłącznie sprzedaży zwolnionej od VAT** – podatnicy wykonujący specyficzne czynności, które zawsze są zwolnione z VAT, niezależnie czy wykona je podatnik VAT czynny czy zwolniony – w obu przypadkach będą one czynnościami zwolnionymi.

Ustawa od podatku VAT przewiduje dwa rodzaje zwolnień z podatku VAT. Pierwsze z nich – **podmiotowe** – dotyczy konkretnych towarów i usług wymienionych w Ustawie, natomiast drugie **– przedmiotowe** – odnosi się do podatników świadczących dane usługi.

Zwolnienia podmiotowe

Zwolnienie podmiotowe przysługuje osobom prowadzącym działalność gospodarczą. Podatnicy zwolnieni podmiotowo z VAT nie mają obowiązku wystawienia faktur VAT, rozliczania czy składania deklaracji VAT. Podatnicy zwolnieni mają jednak obowiązek prowadzenia ewidencji sprzedaży oraz instalowania kasy fiskalnej**. Zwolnieni z opodatkowania mogą być podatnicy, u których wartość sprzedaży w ubiegłym roku nie przekroczyła określonej w ustawie kwoty, tj. 150.000 zł.** Ze statusu podatnika VAT zwolnionego i podatnika dokonującego wyłącznie sprzedaż zwolnioną od VAT można zrezygnować. Niektórzy stwierdzają bowiem, że nawet przed przekroczeniem limitu warto się zarejestrować i płacić VAT jako podatnik VAT czynny. Rejestracja następuje wówczas przed pierwszym dniem miesiąca rezygnacji ze zwolnienia.

Zwolnienia przedmiotowe

Wybrane usługi i sprzedaż wyszczególnionych towarów nie podlega opodatkowaniu **podatkiem** od towarów i usług VAT. Lista produktów i usług zwolnionych od VAT jest bardzo długa i dostępna w całości w treści ustawy o podatku od towarów i usług.

Poniżej kilka przykładowych usług zwolnionych z VAT:

1. dostawa produktów rolnych przez rolnika ryczałtowego oraz świadczenie przez niego usług rolniczych;
2. dostawa złota do NBP;
3. dostawa terenów niezabudowanych innych niż tereny budowlane oraz przeznaczone pod zabudowę;
4. czynności wykonywane na rzecz członków spółdzielni, którym przysługują spółdzielcze prawa do lokali mieszkalnych;
5. usługi zarządzania funduszami inwestycyjnymi i zbiorczymi portfelami papierów wartościowych;
6. świadczenie usług przez techników dentystycznych w ramach wykonywania ich zawodu;
7. usługi pocztowe oraz dostawa towarów ściśle z tymi usługami związana;
8. usługi w zakresie opieki medycznej służące profilaktyce, zachowaniu, ratowaniu, przywracaniu i poprawie zdrowia oraz dostawa towarów i świadczenie usług ściśle z tymi usługami związane wykonywane przez zakłady opieki zdrowotnej.

Zgłoszenie rejestracyjne dla celów podatku VAT

Podatnicy prowadzący działalność gospodarczą, która podlega podatkowi od towarów i usług, zobowiązani są do złożenia stosownej deklaracji – zgłoszenia rejestracyjnego w postaci druku **VAT-R**. Wszyscy przedsiębiorcy, przed dokonaniem pierwszej czynności podlegającej opodatkowaniu podatkiem od towarów i usług, zobowiązani są do złożenia stosownej deklaracji w celu rejestracji dla celów podatku VAT.

Rejestracja podatnika jest niezwykle istotna, ponieważ jej brak pozbawia go prawa do odliczenia naliczonego podatku VAT. Zapis ustawy o podatku VAT mówi: „Obniżenia kwoty lub zwrotu różnicy podatku należnego nie stosuje się do podatników, którzy nie są zarejestrowani jako podatnicy VAT czynni".

Trzeba zwrócić uwagę, że obowiązek ów nie dotyczy podatników zwolnionych podmiotowo lub przedmiotowo z podatku VAT. Nie zmienia to faktu, że mogą tego dokonać dobrowolnie. Pozostając podatnikiem zwolnionym z VAT, prowadzący sprzedaż może jeszcze przed przekroczeniem powyżej wskazanej kwoty zgłosić się do organu podatkowego z wnioskiem o rejestrację jako podatnik VAT czynny (posiadający prawo odliczania VAT oraz obowiązek naliczania tego podatku). Zgłoszenia dokonuje się ze skutkiem na pierwszy dzień miesiąca następującego po miesiącu zgłoszenia. Jeżeli natomiast podatnik dokonuje sprzedaży w dużej wartości, to zgłoszenie dokonane powinno być nie później niż przed dniem przekroczenia tej kwoty.

Sposoby obliczania podatku VAT

W związku z obowiązkiem doliczania podatku VAT rozróżniamy:

1. cenę netto – nie zawiera podatku VAT;
2. cenę brutto się do której doliczony jest podatek VAT.

cena netto + podatek VAT = cena brutto
cena brutto – podatek VAT = cena netto
podatek VAT = cena brutto – cena netto

Obliczanie podatku VAT od ceny netto:

podatek VAT = cena netto x stawka podatku/100.

Obliczanie podatku VAT od ceny brutto:

podatek VAT = cena brutto x stawka podatku /100.

Przy świadczeniu usług w handlu i gastronomii podatnik może obliczać kwotę VAT od wartości brutto towaru, stosuje wówczas stawki:

- 18,70% wartości brutto dla towarów i usług objętych stawką 23%;
- 7,41% wartości brutto dla towarów i usług objętych stawką 8%;
- 4,76% wartości brutto dla towarów i usług objętych stawką 5%.

Zasadą prawa podatkowego jest, że o tym, kto jest podatnikiem podatku VAT, decyduje rodzaj czynności, jakie podmiot wykonuje. Dlatego w odniesieniu do każdej czynności opodatkowanej podatkiem VAT wykonywanej przez dany podmiot należy badać, czy występuje on jako podatnik. Co ważne, o byciu podatnikiem VAT nie decyduje fakt rejestracji dla celów VAT (jest to bowiem czynność wyłącznie administracyjna). Zgodnie z art. 15 ust. 1 ustawy o podatku od towarów i usług podatnikami są osoby prawne, jednostki organizacyjne niemające osobowości prawnej oraz osoby fizyczne wykonujące samodzielnie działalność gospodarczą. Działalność gospodarcza z kolei obejmuje wszelką działalność producentów, handlowców lub usługodawców, w tym podmiotów pozyskujących zasoby naturalne oraz rolników, a także działalność osób wykonujących wolne zawody, również wówczas, gdy czynność została wykonana jednorazowo w okolicznościach wskazujących na zamiar wykonywania czynności w sposób częstotliwy. Działalność gospodarcza obejmuje również czynności polegające na wykorzystywaniu towarów lub wartości niematerialnych i prawnych w sposób ciągły dla celów zarobkowych. Z takiego brzmienia przepisu wynika, że pojęciem „podatnik" obejmuje się bardzo szeroki krąg podmiotów – w zasadzie wszystkich uczestników profesjonalnego obrotu gospodarczego.

Określenie, czy dany podmiot jest podatnikiem VAT, jest istotne, gdyż jedynie podatnikowi przysługuje prawo do obniżenia kwoty podatku należnego o kwotę podatku naliczonego

Kreatywna księgowość

Określenie „kreatywna księgowość" pojawiło się w 2002 roku w USA, po wykryciu wielkich skandali finansowych.[73] Określeniem tym nazwano przypadki ukrywania strat i przedstawiania w pozytywnym świetle wyników przedsiębiorstwa celu mające na celu przyciągnięcie inwestorów. Z czasem kreatywną księgowością zaczęto nazywać wszelkie przypadki księgowania operacji finansowych przedsiębiorstwa sprzeczne z zasadami księgowania, czy też ze stanem faktycznym. Najczęstszym sposobem jest zawyżanie wyceny posiadanych zasobów.

W Polsce najbardziej znanym przedsiębiorstwem stosującym kreatywną księgowość był BIG Bank Gdański, który w 2002 roku zawyżył swój wynik finansowy, tj. wykazał 44,7 mln zysku, podczas gdy powinien ujawnić 820 mln strat [74].

6.3. Sprawozdania finansowe

Celem przedsiębiorstwa jest osiąganie przez nie zysków poprzez efektywne zarządzanie. Aby realizować ten cel, niezbędne są informacje pozyskiwane z działu księgowości. Firmy sporządzają dokumentacje, w której przedstawiona jest ich sytuacja majątkowa i finansowa. Do najważniejszych dokumentów firmy należą: bilans oraz rachunek zysków i strat.

Bilans

Bilans to dwustronne zestawienie wartości środków gospodarczych, czyli aktywów, oraz źródeł ich pochodzenia, czyli pasywów, sporządzony w określonej formie i na określony dzień (B. Gierusz, 2011).

Prawidłowo sporządzony bilans zawiera:

1. Słowo *bilans*;
2. oznaczenie momentu bilansowego, czyli daty, na którą bilans jest sporządzony;
3. dokładne oznaczenie podmiotu, dla którego jest sporządzany;
4. wyszczególnienie nazw i wartości poszczególnych grup aktywów i pasywów;
5. podpis osoby odpowiedzialnej za prowadzenie dokumentacji finansowej przedsiębiorstwa oraz podpis kierownika jednostki;
6. datę sporządzania bilansu.

73 www: pl.wikipedia.org, 26.02.2013.
74 www.notowany.pl/analiza/523/kreatywna-rachunkowosc-polskich-spolek, 12.02.2013.

Tabela 35. Podstawowe składniki bilansu

AKTYWA	PASYWA
Aktywa trwałe	**Kapitał własny**
I. Rzeczowe aktywa trwałe Środki trwałe – maszyny, urządzenia, grunty, środki transportu.	**Kapitał podstawowy** Równowartość środków wniesionych bezterminowo do jednostki przez jej właścicieli, pochodzących ze źródeł zewnętrznych. Wniesienie wkładów kapitałowych przez właścicieli jest warunkiem powstania jednostki i uruchomienia przez nią działalności.
II. Wartości niematerialne i prawne Niematerialne składniki majątku, np.:. licencje, znaki towarowe, prawa autorskie.	**Kapitał zapasowy** Jeden z kapitałów własnych jednostki, przeznaczony przede wszystkim na pokrycie strat. Zasady jego tworzenia określone są, w zależności od formy prawnej jednostki, w ustawie, umowie spółki lub jej statucie. Głównym jego źródłem są odpisy z wygospodarowanego zysku.
III. Należności długoterminowe Środki pieniężne, różnego rodzaju pożyczki i kredyty o terminie spłaty przekraczającym rok	**Zysk/strata z lat ubiegłych** Wynik finansowy, czyli wyrażony w pieniądzach rezultat działalności gospodarczej, który nie został rozliczony w poprzednich latach.
IV. Inwestycje długoterminowe Różnego rodzaju aktywa finansowe, nieruchomości i wartości niematerialne i prawne, które nie są użytkowane przez jednostkę, lecz zostały nabyte w celu osiągnięcia korzyści ekonomicznych wynikających ze wzrostu ich wartości, np.: akcje, obligacje, nieruchomości.	**Zysk/strata netto** Wynik finansowy z danego roku obrotowego.
Aktywa obrotowe	**Kapitał obcy**
Zapasy Zapasy obejmują: materiały, surowce, produkcję w toku, produkty gotowe, towary oraz zaliczki na poczet przyszłych dostaw, wszystkich wymienionych rodzajów zapasów	**Rezerwy na zobowiązania** Tworzy się je, aby w sprawozdaniu finansowym uwzględnić koszty, które dotyczą danego roku obrachunkowego, ale jeszcze nie powstały, można je jednak przewidzieć z dużym prawdopodobieństwem oraz oszacować ich wielkość. Rezerwy tworzy się na przykład z tytułu oczekiwanych strat wynikających ze zwrotów gwarancyjnych towarów i produktów czy też strat wynikających z udzielonych poręczeń i operacji kredytowych lub skutków toczącego się postępowania sądowego
Należności krótkoterminowe Do należności krótkoterminowych zalicza się wszystkie należności z tytułu dostaw i usług oraz inne należności wymagalne w okresie krótszym niż 12 miesięcy od dnia bilansowego.	**Zobowiązania długoterminowe** Zobowiązania długoterminowe obejmują zobowiązania o terminie zapadalności powyżej 12 miesięcy. Zalicza się tu przede wszystkim długoterminowe kredyty i pożyczki, obligacje i inne zobowiązania z tytułu emisji długoterminowych dłużnych papierów wartościowych
Inwestycje krótkoterminowe W bilansie wykazuje się tu między innymi środki pieniężne w kasie oraz na rachunkach bankowych, jak również inne odpowiedniki pieniężne, takie jak weksle i czeki. W pozycji tej ujęte są również inwestycje firmy w krótkoterminowe papiery wartościowe, jak również akcje i papiery dłużne o okresie zapadalności powyżej roku, jeśli firma zakupiła je z zamiarem dalszej odsprzedaży w krótkim czasie (poniżej 12 miesięcy).	**Zobowiązania krótkoterminowe** Zobowiązania o terminie spłaty poniżej jednego roku zaliczane są do zobowiązań krótkoterminowych. Jest to obszerna grupa obejmująca zobowiązania z tytułu: dostaw i usług, wynagrodzeń, podatków, ceł, ubezpieczeń, kredytów i pożyczek, emisji krótkoterminowych papierów wartościowych, zobowiązań wekslowych, otrzymanych zaliczek na dostawy oraz innych zobowiązań

Źródło: Opracowanie własne

Aktywa w binasie

ktywa to zasoby majątkowe o wiarygodnie określonej wartości powstałe w wyniku przeszłych zdarzeń i mające spowodować w przyszłości wpływ do jednostki korzyści ekonomicznych. Ich podstawowy podział to podział na **aktywa trwałe** i **aktywa obrotowe**. Głównym kryterium ich odróżniania jest czas, przez jaki firma planuje wykorzystywać dane składniki. Ogólnie przyjętą graniczną długością okresu, od którego zależy klasyfikacja aktywów do jednej z grup, jest 12 miesięcy (A. Rutkowski, 2003).

Pasywa w bilansie

Pasywa to inaczej źródła finansowania majątku. Ich podstawowy podział to podział na własne źródła finansowania – kapitał własny, oraz obce źródła finansowania – zobowiązania (kapitał obcy). Zobowiązania dzielą się tak jak aktywa: na długo i krótkoterminowe, zależnie od tego, czy zostaną spłacone w ciągu 12 miesięcy czy później.

Rachunek zysków i strat

Z prowadzoną działalnością gospodarczą wiążą się działania stanowiące przedmiot jej działalności oraz czynności towarzyszące, służące realizacji tych działań. Rezultaty działania przedsiębiorstwa w kategoriach przychodów, kosztów oraz zysków i strat nadzwyczajnych wyraża rachunek zysków i strat (rachunek wyników) stanowiący dokumentację działań przedsiębiorstwa w pewnym okresie (najczęściej 12miesięcznym). Rachunek zysków i strat to część sprawozdania finansowego, w której znajduje się zestawienie wszystkich przychodów oraz kosztów danej spółki wynikających z jej działalności.

Przychody – Koszty = Wynik finansowy

Przychody

Przychody, według art. 3 ust. 2 PDOFU, to uzyskany lub należny wpływ wartości, korzyści materialnych w ramach prowadzonej działalności gospodarczej. W rachunkowości przychody to przypływy aktywów albo inne zwiększenie aktywów danego podmiotu lub zmniejszenie jego zobowiązań (lub kombinacja powyższych) wynikające z dostarczenia lub produkcji dóbr, świadczenia usług lub innych czynności będących podstawową działalnością danego podmiotu.

Koszty

W związku z prowadzoną działalnością gospodarczą przedsiębiorstwo ponosi koszty.

Koszty dzielimy na:

1. **Koszty stałe** – koszty przedsiębiorstwa, których nie da się zmienić w krótkim okresie bez wprowadzenia radykalnych zmian w firmie, a ich wysokość nie zależy od wielkości produkcji.

   Przykładem kosztów stałych jest amortyzacja budynków fabrycznych lub koszt ich dzierżawy.
2. **Koszty zmienne** – koszty, jakie przedsiębiorca ponosi na działania związane bezpośrednio z produkcją. Poziom tych nakładów zależny jest wprost od wielkości produkcji, a zatem w przypadku zwiększenia produkcji koszty zmienne rosną, zmniejszają się natomiast wraz ze spadkiem produk-

cji. Koszty zmienne wynoszą zero, gdy przedsiębiorca nic nie produkuje. Do kosztów zmiennych związanych z produkcją zaliczamy: nakłady na surowce, towar, roboczogodziny itp. oraz energię lub paliwo.[75]

koszty całkowite= koszty stałe + koszty zmienne

koszty jednostkowe = koszty całkowite/ilość wyprodukowanych sztuk

Miernikiem rentowności działań jednostki gospodarczej jest wypracowany przez nią wynik finansowy. Aby obliczyć ten wynik, należy od przychodów odjąć koszty ich uzyskania oraz inne zmniejszenia przychodów. W rachunkowości przedsiębiorstwa przychody i koszty pokazane są w rachunku zysków i strat. Dzięki niemu można obliczyć zysk netto, który jest różnicą pomiędzy przychodami a kosztami (A. Wiśniewski, 1995).

Działalność gospodarczą jednostki można przyporządkować do następujących obszarów:

1. działalność operacyjna (podstawowa);
2. pozostała działalność operacyjna;
3. działalność finansowa;
4. straty i zyski nadzwyczajne.

W zakresie obszaru operacyjnego jednostki realizują swą podstawową działalność oraz każdą inną działalność pośrednio z nią związaną, która nie ma charakteru działalności inwestycyjnej ani finansowej. Za działalność podstawową uważa się tę działalność, do której prowadzenia jednostka została powołana i zarejestrowana w sądzie, czyli jest to jej działalność statutowa, która może mieć charakter: wytwórczy, handlowy, usługowy lub mieszany, na przykład handlowo wytwórczy. W ramach tej działalności jednostki realizują przychód podstawowy, sprzedając swoje produkty (wyroby gotowe i usługi) i towary, oraz ponoszą koszty ich uzyskania.

Pozostała działalność jest pośrednio związana z działalnością podstawową (operacyjną). W jej ramach ponoszone są koszty i przychody związane na przykład z działalnością socjalną, sprzedażą środków trwałych, wartości niematerialnych i prawnych, odszkodowaniami, karami.

Działalność finansowa obejmuje przychody i koszty związane z gospodarowaniem majątkiem finansowym jednostki, może zwłaszcza dotyczyć: obrotu papierami wartościowymi, zaciągania i udzielania kredytów i pożyczek, dodatnich i ujemnych różnic kursowych.

Straty i zyski nadzwyczajne są to zdarzenia i transakcje, które można odróżnić od działalności operacyjnej jednostki. Nie są one związane z ryzykiem jej prowadzenia oraz nie powtarzają się często ani regularnie. Do zdarzeń takich można zaliczyć: trzęsienie ziemi, pożar, powódź, nieoczekiwaną likwidację wydziału produkcyjnego, przypadkowe odkrycie złóż mineralnych.

75 www:pl.wikipedia.org/wiki/Koszty_zmienne, 08-05-2013.

W rachunku zysków i strat końcowy wynik finansowy oblicza się globalnie, a procedura jego ustalania jest następująca:

Tabela 36. Ustalanie wyniku finansowego

(+) Przychody z działalności podstawowej (statutowej)
(–) Koszty działalności podstawowej
= Wynik operacji sprzedaży (zysk lub strata)
(+) Przychody z pozostałej działalności operacyjnej
(–) Koszty pozostałej działalności operacyjnej
= Wynik operacyjny (zysk lub strata)
(+) Przychody działalności finansowej
(–) Koszty działalności finansowej
= Wynik działalności gospodarczej (zysk lub strata)
(+) Zyski nadzwyczajne
(–) Straty nadzwyczajne
= Wynik brutto (zysk lub strata)
(–) Obowiązkowe obciążenia wyniku finansowego
= Wynik netto (zysk lub strata)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie ustawy o rachunkowości

Wskaźniki analizy finansowej

Oceny działalności przedsiębiorstwa możemy dokonać, stosując różnego rodzaju wskaźniki. Do oceny efektów finansowych działalności przedsiębiorstwa stosuje się wskaźniki rentowności, inaczej zyskowności.

1. **Wskaźnik rentowności sprzedaży – określa, ile zysku generuje firma z 1 zł przychodu netto.**

ROS = zysk netto/sprzedaż netto*100%

Im jest on wyższy, tym wyższa jest efektywność dochodów, co oznacza, że dla osiągnięcia określonej kwoty zysku przedsiębiorstwo musi zrealizować niższą sprzedaż niż wówczas, gdy rentowność sprzedaży byłaby niższa.

2. **Wskaźnik rentowności aktywów – określa, ile zysku netto przyniosły aktywa o wartości 1 zł**

ROA= zysk netto/ aktywa * 100%

Im wyższy poziom rentowności aktywów, tym lepsza sytuacja finansowa przedsiębiorstwa. Wielkością ROA zainteresowani są szczególnie kredytodawcy firmy, gdyż stanowi on cenne źródło informacji o zdolności majątku do przynoszenia dochodów będących źródłem rat i odsetek od zaciągniętych kredytów. Od swoich klientów banki oczekują, aby w ich firmach wskaźnik ten osiągał poziom 2–6%, przy czym w małych firmach powinien on być wyższy niż w dużych. Osiąganie niskiego poziomu wskaźnika na tle przedsiębiorstw z tej samej branży zazwyczaj oznacza niewykorzystanie pełnych mocy wytwórczych firmy.

3. **Wskaźnik rentowności kapitałów własnych – pokazuje, jaki zysk generuje zaangażowany kapitał własny.**

ROE = zysk netto/kapitał własny * 100%

Wzrastający poziom tego wskaźnika świadczy o wyższej efektywności zaangażowanego kapitału. Jest to sygnał dla udziałowców, że przedsiębiorstwo właściwie wykorzystuje posiadane zasoby. Dlatego właśnie, w przypadku nowej emisji udziałów (akcji), szczególną uwagę należy zwrócić na poziom tego wskaźnika oraz jego zmiany w czasie. Trzeba jednak pamiętać, że wielkość tego wskaźnika będzie podlegała znacznym zaburzeniom, szczególnie tuż po przeprowadzeniu nowej emisji akcji (wówczas w mianowniku będzie już zawarta wielkość „świeżego" kapitału, który nie został jeszcze wykorzystany w działalności przedsiębiorstwa).

Rentowność, inaczej dochodowość, opłacalność, zyskowność – to zdolność kapitału do wytworzenia dochodu i jest mierzona różnymi wskaźnikami. Liczy się ją jako stosunek wyniku finansowego przedsiębiorstwa do ogółu kosztów uzyskania przychodu.

Próg rentowności (BEP –ang. break even point) jest odzwierciedleniem sytuacji, w której przychody ze sprzedaży pokrywają koszty stałe i zmienne przedsiębiorstwa[76], informuje nas, kiedy sprzedaż zacznie przynosić zyski. Nazywany też **punktem krytycznym,** ze względu na jego wagę dla rachunku ekonomicznego przedsiębiorstwa**.** Wskaźnik BEP możemy wyliczyć, stosując metodę ilościową i wartościową.

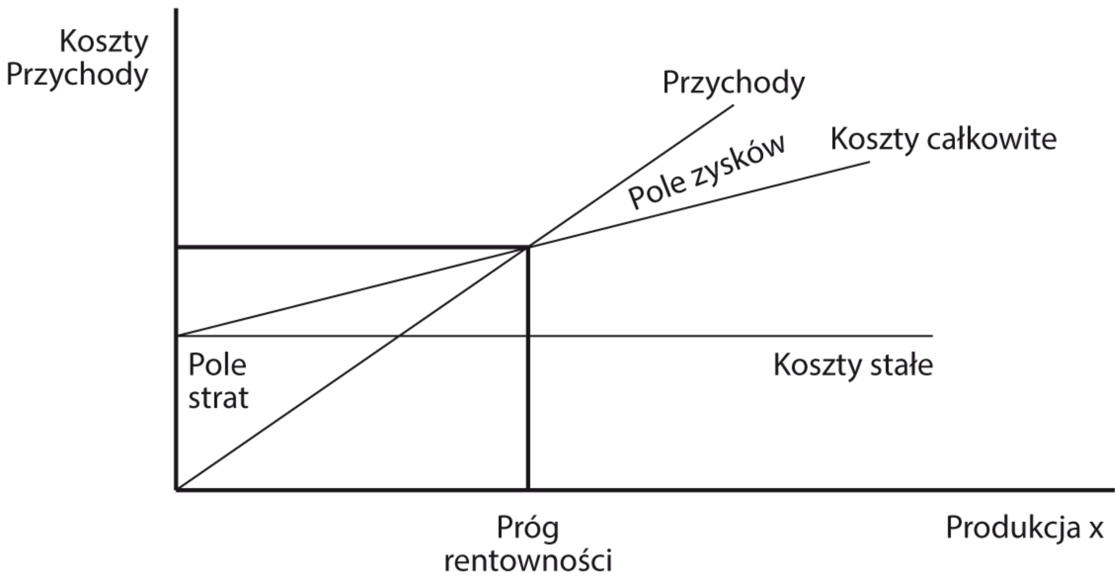
BEP ilościowy – pokazuje, przy jakiej ilości wyprodukowanych towarów przychody zrównoważą się z kosztami.

BEP ilościowy = koszty stałe/cena – koszty jednostkowe zmienne

BEP wartościowy – informuje, przy jakiej cenie sprzedaży przedsiębiorstwo zacznie przynosić zyski.

BEP wartościowy = koszty stałe/cena – koszty jednostkowe zmienne.

GRAFICZNE UJĘCIE PROGU RENTOWNOŚCI



Schemat 24. Graficzne ujęcie progu rentowności

Źródło: www.mba.edu.pl/Mis/Prog3.gif, 18.03.2013

76 www.slownikekonomiczny.pl, 02.03.2013.

6.4. Marketing

W zarządzaniu własną firmą bardzo ważna jest wiedza o tym, co robić i jak to robić, by osiągnąć zysk, czyli wiedza z zakresu podstawowych zasad marketingu. Znajomość marketingu we współczesnym świecie stała się kluczem do sukcesu. Sukces działalności gospodarczej opartej na marketingowym sposobie myślenia to dostarczenie klientowi tego, czego pragnie, w odpowiedniej cenie, ilości i jakości. Dla wszelkich działań marketingowych punktem wyjścia jest zawsze człowiek-konsument. Człowiek, odczuwając potrzeby, dąży do ich zaspokojenia w drodze zakupu produktów lub usług. Duże znaczenie mają także osiągane dochody oraz ceny produktów. Nie mniejszy wpływ na decyzje zakupów ma najbliższe otoczenie, rodzina, przyjaciele czy grupa, w której się znajdujemy. Nabywca ulega presji otoczenia, która lansuje określony styl życia. Zadaniem marketingu jest poznanie motywacji zakupu nabywców oraz pobudzenie, a nawet stworzenie, w nich potrzeby zakupu danego dobra czy usługi. Dla przedsiębiorstwa najważniejszym celem jest «stworzenie klienta», który zdecyduje o przyszłości przedsiębiorstwa i jego podstawach egzystencji (E. Michalski, 2009).

Marketing (według Kotlera) to proces zarządczy, którego celem jest wymiana produktów na konkurencyjnym rynku, zapewniająca wzajemne korzyści sprzedającym i kupującym.[77]

Marketing to również nowoczesny styl myślenia ekonomicznego o sposobie prowadzenia rynkowej działalności gospodarczej. Działalność gospodarcza nastawiona jest na osiągnięcie maksymalnego zysku. Można to zadanie zrealizować, jeżeli działalność ukierunkowana jest na klienta (nabywcę, odbiorcę, użytkownika, konsumenta). Temu właśnie sprzyja marketing, który obejmuje działania rozpoczynające i kończące się na kliencie, ustalając i zaspokajając jego potrzeby. Działania marketingowe zmierzają do zaspokojenia potrzeb konsumentów i tym samym osiągnięcia celów przedsiębiorstwa.

Działania marketingowe służą temu, by (E. Michalski, 2009)**:**

1. pozyskać nowych klientów;
2. sprawić, by klienci więcej kupowali;
3. sprawić, by klienci częściej kupowali.

Do podstawowych działań marketingu należą:

1. określenie potrzeb;
2. kształtowanie produktu;
3. tworzenie i utrzymywanie popytu;
4. ustalenie polityki rynkowej;
5. finansowanie obrotu towarowego;
6. działanie związane z fizycznym ruchem towaru;
7. analiza rynku.

Marketing zajmuje się, w ogólnym rozumieniu, potrzebami konsumenckimi pod różnymi kątami. Na przestrzeni lat i rozwoju technologicznego powstało mnóstwo nowych metod marketingowych (J. Penc, 1995).

Rodzaje metod marketingowych:

1. marketing bezpośredni, zwany medialnym;
2. marketing internetowy, który korzysta z sieci internetowej;
3. marketing młodzieżowy, wychodzący naprzeciw potrzebom dzieci i młodzieży;

77 www.ekonom.info/1722-definicja_marketingu_wg_kotlera/, 20-04-2013.

4. marketing mobilny, związany m.in. z telefonią komórkową, czyli bardzo nowoczesnym medium informacji;
5. marketing polityczny, który przedstawia metody zdobywania poparcia i budowania wizerunku kandydatów i partii;
6. marketing niestandardowy, który wykorzystuje różne techniki niekonwencjonalne, czasami nawet kontrowersyjne;
7. marketing szeptany, związany z buzz marketing i marketingiem plotki;
8. marketing wirusowy, który ma za zadanie rozpowszechniać się w codziennych sytuacjach;
9. e-mailmarketing, związany z pocztą elektroniczną;
10. marketing afiliacyjny, wykorzystujący sieci afiliacyjne i programy partnerskie;
11. marketing-mix, czyli słynne formuły i koncepcje 4P, 7P i 4C.

Marketing-mix

Marketing-mix to specyficzna kompozycja marketingowa składająca się z zależnych od siebie elementów, które jako zintegrowany system mogą oddziaływać na różnego rodzaju zjawiska rynkowe. Wyróżnia się kilka koncepcji marketingu-mix: 4P, 4C, marketing-mix dla usług, 7P.[78]

Koncepcja 4P – zaproponowana przez McCarthy'ego:

1. **Produkt** (ang. *product*) – ważna jest jakość produktu, marka, opakowanie, gwarancja, postrzeganie go przez konsumentów oraz czy zaspokaja potrzeby klientów. Produkt musi spełniać określone funkcje oraz jest rozpatrywany pod różnymi aspektami: rynkowym, cyklu życia, technologicznym itp.
2. **Cena** (ang. *price*) – jest wydatkiem, który musi być poniesiony przez konsumentów, aby nabyć produkt, natomiast dla producenta jest wynagrodzeniem za poniesione nakłady. Charakteryzuje się ją pod kątem polityki cenowej, wskaźnika elastyczności cenowej popytu, progów rentowności, rabatów i warunków płatności.
3. **Dystrybucja** (ang. *place*) – zajmuje się sposobem rozmieszczenia produktów na rynku w celu ich sprzedaży. Ważne są kanały dystrybucyjne, czyli układy wzajemnie zależnych organizacji zaangażowanych w sprzedaż produktu.
4. **Promocja** (ang. *promotion*) – zaliczamy do niej: reklamę, public relations, sponsorowanie, sprzedaż osobistą, kampanie, techniki marketingowe.

Rozszerzona formuła 7P

5. **Ludzie** (ang. *people*) – personel i klienci.
6. **Proces** (ang. *process*) – cała procedura marketingowa: od zainteresowania klienta, aż do obsługi posprzedażowej.
7. Świadectwo materialne (ang. *physical evidence*) – elementy, które świadczą o jakości produktu lub usługi, m.in. logo, wyposażenie, budynki.

78 www.mfiles.pl/pl/index.php/Marketing_mix, (20-04-2013)

Koncepcja 4C – występują te same elementy co w formule 4P, ale z punktu widzenia klienta.[79]

Strategie marketingu „pull" i „push"[80]

Strategia „pull" zakłada bezpośrednie oddziaływanie na nabywcę poprzez stosowanie inwazyjnych działań promocyjnych. Przekaz reklamowy atakuje odbiorcę, który nie ma możliwości podjęcia decyzji o tym, czy chce się z nim zapoznać. Przykładem takiego przekazu są banery.

Strategia „push" polega na wzbudzeniu u odbiorcy potrzeby lub chęci do dobrowolnego zapoznania się z przekazem reklamowym. Narzędzia stosowane w ramach tej strategii nie są inwazyjne, a konsument sięga po nie z własnej, nieprzymuszonej woli. Przykładem takiego narzędzia jest newsletter[81]. Użytkownik, który chce go otrzymywać, dobrowolnie podaje swoje dane osobowe, aby subskrybować wysyłkę elektroniczną, która zawiera treści komercyjne, a często też treści merytoryczne.

Promocja a reklama

Jednym z elementów marketingu-mix jest promocja. Jest ona pojęciem szerszym niż reklama. Prócz reklamy ma za zadanie przedstawienie i utrwalenie w umyśle potencjalnych klientów pozytywnego i niezapomnianego obrazu firmy. Firma wchodząca na rynek swe działania rozpoczyna od promocji znaku firmy, prezentuje we wszystkich mediach swoje osiągnięcia. Reklama produktu danej firmy rozpoczyna się znacznie później. Niewielkie firmy, których fundusze na reklamę są niewielkie, muszą dokładnie przemyśleć swoją kampanię reklamową.

Narzędzia promocji

Promocja marketingowa sprowadza się do poinformowania nabywcy, że właściwy produkt, po właściwej cenie, dostępny jest we właściwym miejscu. Odbywa się to za pośrednictwem niżej wymienionych środków--narzędzi promocji.

Reklama – każda płatna forma nieosobistej prezentacji i promocji pomysłów, dobra lub usługi poprzez określonego sponsora.[82]

Promocja sprzedaży – jej celem jest zwiększenie sprzedaży produktów lub usług poprzez stosowanie krótkookresowych bodźców stymulujących zakupy przez konsumentów oraz zwiększenie działania pośredników handlowych.

Public relations – to wzajemne relacje między daną jednostką gospodarczą a jej otoczeniem pośrednim i bezpośrednim. Skierowany na otoczenie przedsiębiorcy (zewnętrzne), czyli: kontakty ze środkami masowego przekazu, doradztwo, konferencje prasowe, seminaria naukowe, wystawy, konkursy, jubileusze, monografie i opracowania, gazetki specjalistyczne.

Sprzedaż osobista –to system komunikowania się przedsiębiorcy z rynkiem oraz wspierania sprzedaży, które polegają na bezpośrednim kontakcie sprzedawcy z potencjalnym nabywcą, opiera się na bezpośrednim dialogu w sklepach, magazynach handlowych, biurach i salonach sprzedaży, w mieszkaniach nabywców i ich miejscach pracy, w specjalnie wynajętych na czas sprzedaży pomieszczeniach, podczas wystaw, targów, degustacji.

79 Szerzej na temat koncepcji marketingowych zob. B. Rozwadowska, *Public Relations –teoria, praktyka, perspektywy*, Warszawa 2002.
80 www:portalwiedzy.onet.pl, 02.03.2013.
81 www:pl.wikipedia.org, 02.03.2013.
82 Na temat reklamy w relacji przedsiębiorca–konsument zob. rozdział 8.2. niniejszego podręcznika.

Tabela 36. Narzędzia promocji

Reklama	Sprzedaż osobista	Promocje sprzedaży	Public relations (PR)
✓ reklama w środkach masowego przekazu, takich jak: prasa, radio, telewizja, kino ✓ reklama w Internecie, np. e-mailing ✓ billbordy, lightboardy, plakaty oraz reklama pneumatyczna ✓ wydawnictwa reklamowe, takie jak: ulotki, foldery, prospekty ✓ reklama pocztowa	✓ telesprzedaż ✓ prezentacja na targach, wystawach ✓ telemarketing ✓ sprzedaż wysyłkowa ✓ sprzedaż w domu klienta ✓ sprzedaż z wykorzystaniem przedstawicieli firmy (np. konsultantów i akwizytorów)	✓ próbki produktów ✓ kupony ✓ rabaty ilościowe ✓ premie ✓ okresowe obniżki cen ✓ konkursy, gry, loterie promocyjne ✓ karty stałego klienta ✓ upominki	✓ wywiady w środkach masowego przekazu ✓ wykłady, seminaria, konferencje ✓ wydawnictwa propagandowe ✓ relacje prasowe ✓ sponsoring ✓ lobbing ✓ finasowanie akcji harytatywnych

Źródło: Opracowanie własne

Reklama, jako główny element promocji, stanowi również część składową marketingu. (A. Komsta, 2002) Celem reklamy jest przyciągniecie konsumenta do przedsiębiorstwa. Nie może jednak zbytnio odbiegać to od celów, jakie chce osiągnąć dana organizacja na rynku. Cele reklamy muszą być zatem dopasowane do strategii danego biznesu.

Cele działań reklamowych:

1. **uświadomienie marki** – cel ten jest do osiągnięcia, gdy reklama jest zbudowana na zasadzie luźnej i przyjaznej pogawędki z odbiorcą;
2. **budowanie w kliencie poczucia lojalności wobec marki** – lojalny klient staje się odporny na działania konkurencji, reklamy konkurencji nie przemawiają do niego, lojalny klient poszerza ponadto grono klientów przedsiębiorcy, opowiadając o swoim zadowoleniu ze współpracy z organizacją;
3. **edukacja klienta** – polega na uświadamianiu odpowiedniej grupie ludzi, jak posługiwać się i po co są dane towary bądź usługi;
4. **walka z konkurencją** – ten cel jest oczywisty, przedsiębiorcy przeznaczają ogromne kwoty pieniędzy po to, by uniemożliwić nowym firmom wejście na rynek, jak również osłabić pozycję już istniejących przedsiębiorstw;
5. **tworzenie image firmy** – duże zakłady produkują czasem tysiące różnych towarów, dlatego też zdecydowały, by doskonale znana była jedynie sama marka ich produktów.

Skuteczność każdej reklamy możemy zbadać, stosując **model AIDA** (E. Michalski, 2009).

Tabela 37. Model skuteczności działań promocyjnych AIDA

A	**Attention**	**zwrócenie uwagi – O co chodzi?**
I	**Interest**	**wzbudzenie zainteresowania – Chcę wiedzieć więcej!**
D	**Desire**	**chęć zakupu – Chcę to mieć!**
A	**Action**	**akcja, działanie –Planuję zakup. kupuję**

Źródło: E. Michalski, Marketing podręcznik akademicki, Warszawa 2009

Wdrażanie kampanii reklamowej wymaga opracowania precyzyjnego terminarza działań. Kampania powinna być przeprowadzona w określonym czasie, zgodnie z zaplanowanym harmonogramem. W trakcie jej realizacji nieodzowne jest prowadzenie oceny efektywności pod względem skuteczności reklamy, czyli stopnia w jakim zamierzone cele zostały osiągnięte.

Skuteczność reklamy jest czymś odmiennym od efektywności reklamy, czyli relacji między efektami a kosztami jakie należało ponieść dla uzyskania tych efektów.

Skuteczność reklamy można mierzyć w różny sposób, ale punktem wyjścia zawsze będą określone na początku kampanii cele reklamy. Badając skuteczność reklamy, wyróżnia się kilka etapów osiągania celów pośrednich, a w rezultacie – celu końcowego reklamy. Im większy stopień osiągania celów pośrednich, tym większa szansa zrealizowania celu głównego.

Etapy badania skuteczności reklamy:

1. dotarcie reklamy do adresatów (pod względem częstotliwości i zasięgu);
2. dotarcie reklamy do świadomości grupy docelowej;
3. zmiana stosunku odbiorców reklamy do produktu i przedsiębiorcy;
4. wpływ na wielkość sprzedaży.

Przygotowanie profesjonalnej kampanii reklamowej, a następnie zbadanie jej skuteczności, wymaga zaangażowania specjalistów. Dlatego, planując budżet reklamowy w firmie, należy pamiętać o regule: że nie należy robić samemu tego, na czym inni znają się dużo lepiej.

Obserwując rynek, można zobaczyć wiele nieudanych przykładów kampanii reklamowej, które były efektem amatorskiego podejścia przedsiębiorcy i w rezultacie, mimo dużego zaangażowania środków finansowych, ale zaoszczędzeniu na profesjonalnym.

Marka przedsiębiorcy

Zarządzając przedsiębiorstwem musimy pamiętać o budowaniu marki przedsiębiorcy, czyli dobrego jej wizerunku. Ważny jest wybór odpowiedniego znaku firmowego oraz dobór właściwych kolorów. Klient często kojarzy danego przedsiębiorcę z konkretnym znakiem lub kolorem. Na przykład: Play – kolor fioletowy, Orange – pomarańczowy, Plus – zielony, T-mobile – czerwony.[83] Kreując wizerunek przedsiębiorcy, produktu,

83 Właściwe dobranie kolorów do charakteru produktu lub usługi oraz do typu odbiorców to połowa sukcesu. Projektant musi zdawać sobie sprawę z istnienia ogromnych różnic w postrzeganiu znaczenia barw, nie tylko w ogólny i szeroko przyjęty sposób, ale także w sposób subiektywny i uzależniony od rodzaju specjalizacji firmy lub wyrobu. Ta sama barwa w odczuciach osoby pracującej np. w banku może mieć inny wydźwięk niż u osoby pracującej w przychodni

usługi, procesu lub osoby, staramy się zadziwić ich wyjątkowymi właściwościami. Podstawowym celem budowania marki jest zakodowanie w ogólnej świadomości pożądanego wizerunku przedsiębiorcy, produktu, usługi, procesu czy osoby. Najpopularniejsze marki mają zwykle proste, konsekwentnie promowane przez lata przesłanie. Najznakomitsze z nich są łatwo rozpoznawalne przez konsumentów, a swój sukces opierają na charakterystycznych, niepowtarzalnych cechach, co określa się jako budowanie marki poprzez wartości. Marki światowej sławy nie wymagają promocji, już dawno bowiem wypracowały w świadomości klientów określone skojarzenia. Podobnie jak ludzie, produkty mają szczególne właściwości, które określają ich osobowość: Coca-Cola jest orzeźwiająca i dostępna dla wszystkich, frytki w McDonald's zawsze są świeżo usmażone, bez względu na porę, Rolex, wprawdzie kosztowny, niezmiennie zachwyca klasą i niezawodnością. Inaczej jest postrzegany człowieka, który jeździ nowym Volkswagenem Beetle, nosi garnitur kupiony w Marks&Spencer czy zegarek marki Swatch. Co innego pomyślimy o osobie ubranej w garnitur od Armaniego, buty od Prady, z Rolexem na ręku niż o kimś, nawet o tej samej osobie, gdy założy dżinsy firmy Levi's, w ręku będzie trzymał Coca-Colę lub hamburgera z McDonald's. Jak postrzegane są przez nas te osoby, zależy w dużej mierze od tego, jakie skojarzenia budzą w nas marki poszczególnych producentów.

Przypisywanie kolorów do określonych branż lub produktów czasami zawodzi, z marketingowego punktu widzenia. Czasami bardziej opłaca się złamać zasady, oczywiście w sposób kontrolowany i bardzo przemyślany, aby zwrócić na siebie uwagę i znacząco odróżnić się od konkurencji.

W gospodarce rynkowej marka ma swoją cenę. „Dobra marka" jest podstawą sukcesu biznesowego. Przeciwieństwem wyrobów markowych są wyroby bezmarkowe (ang. *no-name*), uważane (chociaż nie musi to być regułą) za tandetę.

6.5. Zarządzanie innowacyjne

Przedsiębiorstwa w obecnych czasach powinny być zorientowane na innowacje, gdyż właśnie innowacje stanowią esencję sukcesu firmy, bez nich firma skazana jest na stagnację i upadek.

Zarządzanie innowacyjne ma na celu stworzenie warunków sprzyjających wykorzystaniu możliwości pracowników w generowaniu, a następnie rozwijaniu innowacji produktowych, technologicznych, ekologicznych, organizacyjnych. W obszarze zarządzania zwiększenie ilości wdrożonych w firmie innowacji zwiększa jej pozycję konkurencyjną na rynku i w większym stopniu umożliwia spełnienie oczekiwań klientów

Według J.A. Schumpetera **innowacją** jest[84]:

1. wprowadzanie nowych produktów;
2. wprowadzanie nowych metod produkcji;
3. otwarcie nowych rynków zbytu;
4. ukształtowanie nowych źródeł dostaw surowców oraz innych środków;
5. tworzenie nowych struktur rynkowych w ramach danego rodzaju działalności.

lekarskiej. Nie bez znaczenia jest fakt, iż jaskrawoczerwone oznaczenia mają karetki pogotowia, a w stonowanych i bladych odcieniach niebieskiego są najczęściej ulotki reklamowe firm zajmujących się finansami. Warto dodać, że każdy kolor może być interpretowany w podwójny sposób — negatywny i pozytywny. Używając barw w sposób nieświadomy i nieprzemyślany, łatwo o pomyłkę i narażenie się na niemałe straty, np. barwa zielona symbolizuje naturę, ekologię, witalność, młodość, ale może również oznaczać szaleństwo i nieporządek (J. Sarzyńska-Putowska, 2002).

84 www:pl.wikipedia.org/wiki/Model_powstania_innowacji_wg_J.A._Schumpetera, 20-04-2013.

Rodzaje innowacji:

1. produktowa (np. aparaty komórkowe w telefonach cyfrowych);
2. procesowa (np. automatyzacja linii produkcyjnej);
3. organizacyjna (np. nowe programy szkoleniowe);
4. marketingowa (np. nowe opakowanie).

6.6. Sukces i niepowodzenie w biznesie

Obserwując nasze otoczenie, często zastanawiamy się, dlaczego jedni przedsiębiorcy odnoszą sukces, a inni są skazani na porażkę. Prowadząc działalność gospodarczą, musimy zawsze wziąć pod uwagę ryzyko związane z prowadzeniem działalności oraz nieprzewidziane sytuacje, które mogą wystąpić w gospodarcze.

Ryzyko, w stwierdzeniu ogólnym, oznacza ocenę zagrożenia czy niebezpieczeństwa wynikającego albo z prawdopodobnych zdarzeń od nas niezależnych, albo z możliwych konsekwencji podjęcia decyzji. Jest ono wskaźnikiem stanu lub zdarzenia, które może prowadzić do strat.

Kryzys – pojęcie to pojawia się na gruncie wszystkich dziedzin życia człowieka i społeczeństw. Może być rezultatem jakiegoś zdarzenia, na przykład krachu na giełdzie, kłótni w rodzinie czy wewnątrz koalicji, incydentu, wypadku, katastrofy, ale może on być również symptomem wydarzeń o znacznej skali, np. masowych demonstracji czy wojny. W naukach społecznych można mówić m.in. o kryzysie politycznym, rządowym, kryzysie państwa, kryzysie wartości, kryzysie ekonomicznym, kryzysie międzynarodowym[85].

Skutki kryzysu:

1. koszty finansowe;
2. utrata zaufania, pogorszenie wizerunku firmy i wizerunku marki (marek) jej produktów;
3. strata czasu;
4. utrata motywacji, trudności w pozyskaniu nowej kadry;
5. wysokie koszty sądowe;
6. ewentualnie zmiany polityczne i prawne.

W czasie trwania kryzysu następują bankructwa instytucji finansowych i banków, dochodzi do upadłości wielu firm i przedsiębiorstw, w wyniku czego następują zwolnienia grupowe, utrata miejsc pracy i redukcja etatów. Ogólnie kryzys objawia się nagłym pogorszeniem stanu gospodarki. Pierwszym sygnałem nadchodzącego kryzysu są spadki indeksów giełdowych lub krach giełdowy przeradzający się w długoterminową bessę.

Restrukturyzacja – są to gwałtowne zmiany w aktywach, pasywach lub organizacji firmy. Celem restrukturyzacji jest stworzenie przesłanek do wzrostu wartości przedsiębiorstwa. Restrukturyzacja jest równoważna z transformacją.

Przyczyny wewnętrzne:

1. zbyt energochłonna produkcja;
2. zbyt materiałochłonna produkcja;
3. państwo musi dokładać do produkcji;
4. spadek zainteresowania produktami/usługami.

85 www:portalwiedzy.onet.pl, 02.03.2013.

Wyróżniamy 4 typy restrukturyzacji:

1. **restrukturyzacja kreatywna –** polega kreowaniu pewnych zmian w czasie, tzn. wprowadza się w przedsiębiorstwie jakieś określone zmiany, a efekty tego wprowadzenia widać dopiero po jakimś czasie. Jeśli firma chce wprowadzić jakiś nowy produkt na rynek, wtedy go kreuje;
2. **restrukturyzacja antycypacyjna –** przewidywania, predykcja. Oparta jest na benchmarkingu. Przedsiębiorstwa często dokonują porównania się z innymi firmami tego samego typu, aby natychmiast zająć rynek i być najlepszym. Restrukturyzacja ta dotyczy organizacji pracy, zatrudnienia, wyników finansowych, wskazań marketingowych;
3. **restrukturyzacja dostosowawcza –** ma pewien charakter naprawczy. Jest inicjowana, gdy przedsiębiorstwo zaczyna osiągać niezadowalające wyniki, tzn. zysk jest mały bądź ujemny. Restrukturyzacja tego typu polega na natychmiastowej zmianie działalności, funkcjonowania przedsiębiorstwa po to, by ustabilizować przedsiębiorstwo;
4. **restrukturyzacja naprawcza** – polega na wprowadzaniu zmian, które mają naprawić przedsiębiorstwo w celu ustabilizowania jego funkcjonowania oraz osiągnięcia dodatniego bilansu. Jest to najtrudniejszy do przeprowadzenia rodzaj restrukturyzacji.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Wymień i scharakteryzuj funkcje zarządzania.
2. Określ, jakimi cechami powinien charakteryzować się dobry kierownik.
3. Scharakteryzuj czynniki wpływające na sukces i niepowodzenie przedsiębiorstwa. Rola marketingu na podstawie wybranych firm.
4. Omów style kierowania.
5. Wymień środki motywowania i wskaż według Ciebie najlepsze?
6. Jaki wpływ na społeczeństwo odgrywa reklama?
7. Dlaczego praca zespołowa jest tak ważna?
8. Wymień formy opodatkowania – omów ich zalety i wady.
9. Jakie znasz formy opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej podatkiem dochodowym od osób fizycznych?
10. Wymień i omów zwolnienia podatkowe.
11. Wyliczy wybrane wskaźniki rentowności – ROA i ROS.
12. Przedstaw rolę marketingu w budowaniu marki, np.: Coca-Cola, IBM.
13. Omów podstawę opodatkowania.

Bibliografia:

Adair J, *Zespoły – anatomia biznesu*, Warszawa 2001

Altkorna J., *Podstawy marketingu*, Kraków 2003.

Dobija M., *Rachunkowość zarządcza i controlling*, Warszawa 1997.

Dyduch, J. Sawicka, Stronczek A., *Rachunkowość finansowa – wybrane zagadnienia*, Warszawa 2004.

Gierusz B., *Podręcznik samodzielnej nauki księgowania*, Gdańsk 2003.

Griffin W. R., *Podstawy zarządzania organizacjami*, Warszawa 1997.

Komosa A., Szkolny słownik ekonomiczny, *Ekonomik*, 2002.

Kozdrój A., *Podstawy zarządzania organizacjami*, Warszawa 1990.

Messner Z., *Podstawy rachunkowości*, Katowice 2003.

Michalski E., *Marketing podręcznik akademicki*, Warszawa 2009.

Micherda B., *Podstawy rachunkowości. Aspekty teoretyczne i praktyczne*, Warszawa 2005.

Penc J., *Strategie zarządzania*, Warszawa 1995.

Rutkowski A., *Zarządzanie finansami*, Warszawa 2003.

Sarzyńska-Putowska J., *Komunikacja wizualna – wybrane zagadnienia*, Kraków 2002.

Akty prawne:

Ustawa z dnia 29 września 1994 r. o rachunkowości, Dz. U. z 2013 r. poz. 330.

Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych, Dz. U. z 2012 r. poz. 361.

Ustawa dnia 11 marca 2004 r. o podatku od towarów i usług, Dz. U. z 2011 r. nr 177, poz. 1054, ze zm.

Ustawa z dnia 6 grudnia 2008 r. o podatku akcyzowym, Dz. U. z 2011 r. nr 108, poz. 626, ze zm.

Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 26 sierpnia 2003 r. w sprawie prowadzenia podatkowej księgi przychodów i rozchodów, Dz. U. nr 152, poz. 1475.

Netografia:

www.referaty1.pl/technologie-informatyczne/4/, 13-02-2013.

www.biznes.pwn.pl/haslo/4000464/zarzadzanie.html, 02.02.2013.

www:pl.wikipedia.org/wiki/Praca_zespo%C5%82owa, 14-03-2013.

www:mfiles.pl/pl/index.php/Efekt_synergii, 15-03-2013.

www.manager.wieszjak.pl/przywodztwo-w-zespole/253397,2,Jakie-sa-pozadane-cechy-lidera.html, 01-03-2013.

www.biurocentrum.pl/?strona=toptemat&action=pokaz&id=2799, 20-04-2013.

www.newseria.pl/news/prawo/resort_pracy_chce_50_lat,p209823480, 20-04-2013.

www:pl.wikipedia.org/wiki/Karta_podatkowa, 18.03.2013.

www.notowany.pl/analiza/523/kreatywna-rachunkowosc-polskich-spolek, 12.02.2013.

www.slownikekonomiczny.pl, 02.03.2013.

www.ekonom.info/1722-definicja_marketingu_wg_kotlera/, 20-04-2013.

www.mfiles.pl/pl/index.php/Marketing_mix, 20-04-2013.

www:portalwiedzy.onet.pl, 02.03.2013.

www:pl.wikipedia.org, 02.03.2013.

www:pl.wikipedia.org/wiki/Model_powstania_innowacji_wg_J.A._Schumpetera, 20-04-2013.

www:portalwiedzy.onet.pl, 02.03.2013.

7. Rynek pracy

7.1. Charakterystyka rynku pracy

Rynek pracy, to rynek na którym przedmiotem transakcji między kupującymi a sprzedającymi jest praca, kształtowany poprzez podaż pracy oraz popyt na pracę.

Podaż pracy to zasób siły roboczej – ogół osób już pracujących bądź poszukujących zatrudnienia za określoną płacę.

Popyt na pracę to zgłaszane przez pracodawców zapotrzebowanie na pracę, czyli liczba osób, którą pracodawcy gotowi są zatrudnić, oferując określone wynagrodzenie. Najważniejszymi czynnikami wpływającymi na popyt na pracę są: koszty i wydajność pracy oraz zapotrzebowanie na dobra i usługi. Popyt na pracę jest więc popytem pochodnym – wynikającym z popytu na produkty lub usługi, do wytworzenia których potrzebna jest praca[86].

7.2. Pojęcie i rodzaje bezrobocia

Bezrobocie

Bezrobocie jest przeciwieństwem zatrudnienia. Jest zjawiskiem polegającym na tym, że pewna część ludzi zdolnych do pracy, poszukujących pracy i akceptujących istniejący poziom wynagrodzenia nie znajduje zatrudnienia. Bezrobocie można rozpatrywać w skali makro i mikro. O bezrobociu w skali makro mówimy w sytuacji, gdy na danym obszarze geograficznym określona liczba osób zdolnych do podjęcia pracy pozostaje poza zatrudnieniem. Bezrobociem w skali mikro jest natomiast utrata pracy z powodu braku kwalifikacji lub innych umiejętności pozwalających objąć i utrzymać dane stanowisko.

Do podstawowych **przyczyn bezrobocia** zaliczyć można: niedostosowane do potrzeb rynku wykształcenia pracowników, brak informacji o miejscach pracy, brak mobilności, likwidację niektórych gałęzi przemysłu, zmniejszenie popytu na konkretne dobra czy usługi, ograniczanie produkcji, przeniesienie zakładu do innego rejonu, zmiany w technologii, wysokie obciążenia fiskalne, brak odpowiednich proporcji miedzy wysokością płac a świadczeniami dla bezrobotnych. Miarą zjawiska bezrobocia jest stopa bezrobocia[87].

Zadania państwa w zakresie promocji zatrudnienia, łagodzenia skutków bezrobocia oraz aktywizacji zawodowej określa ustawa o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy[88].

86 Definicja pojęcia „rynek pracy" – słownik www.rynekpracy.pl.

87 Definicja pojęcia „bezrobocie" – słownik www.rynekpracy.pl..

88 Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy, Dz. U. z 2008 r. nr 69, poz. 415.

Jako bezrobotnego możemy określić osobę, która ukończyła 18 lat, jest niezatrudniona i niewykonująca innej pracy zarobkowej, ale zdolna i gotowa do podjęcia zatrudnienia w pełnym wymiarze czasu pracy obowiązującym w danym zawodzie lub służbie albo innej pracy zarobkowej. Może to być również osoba niepełnosprawna, ale zdolna i gotowa do podjęcia zatrudnienia co najmniej w połowie wymiaru czasu pracy. Bezrobotny musi być jednak osobą nieuczącą się w szkole, z wyjątkiem szkoły dla dorosłych lub osobą przystępującą do egzaminu eksternistycznego z zakresu tej szkoły lub w szkole wyższej, w której studiuje w formie studiów niestacjonarnych (zaocznych), zarejestrowaną we właściwym dla miejsca zameldowania powiatowym urzędzie pracy (lub niezarejestrowaną) oraz poszukującą zatrudnienia lub innej pracy zarobkowej. Do tego **bezrobotnym nie może być osoba, która** (m.in.):

- osiągnęła wiek emerytalny w rozumieniu odrębnych przepisów[89];
- jest właścicielem nieruchomości rolnej o powierzchni użytków rolnych przekraczającej 2 ha przeliczeniowe lub podlega ubezpieczeniu emerytalnemu i rentowemu z tytułu stałej pracy jako współmałżonek lub domownik w gospodarstwie rolnym o powierzchni użytków rolnych przekraczającej 2 ha przeliczeniowe;
- prowadzi działalność gospodarczą, chyba że zawiesiła wykonywanie działalności gospodarczej i okres zawieszenia jeszcze nie upłynął;
- uzyskuje miesięcznie przychody w wysokości przekraczającej połowę minimalnego wynagrodzenia za pracę, z wyłączeniem przychodów uzyskanych z tytułu odsetek lub innych przychodów od środków pieniężnych zgromadzonych na rachunkach bankowych.

Rejestrowaniem osób bezrobotnych zajmują się powiaty w ramach zadań zleconych przez ustawę. Zadanie to jest wykonywane przez Urzędy Pracy (UP) i to tam powinien skierować się bezrobotny. Rejestracja pozwala bezrobotnemu korzystać z publicznej służby zdrowia, gdyż UP opłaca za bezrobotnych składkę zdrowotną. Nadto po spełnieniu określonych przesłanek bezrobotny może otrzymać zasiłek dla bezrobotnych i inne świadczenia, a także uzyskać pomoc w znalezieniu zatrudnienia, z zakresu szkoleń i konsultacji zwiększających szansę na rynku pracy.[90]

Zasiłek mogą otrzymać bezrobotni zarejestrowani w UP po upływie 7 dni od dnia zarejestrowania się we właściwym powiatowym urzędzie pracy, jeżeli:

- nie ma dla nich propozycji odpowiedniej pracy, propozycji stażu, przygotowania zawodowego dorosłych, szkolenia, prac interwencyjnych lub robót publicznych oraz
- w okresie 18 miesięcy poprzedzających dzień zarejestrowania, łącznie przez okres co najmniej 365 dni, byli zatrudnieni, osiągając wynagrodzenie w kwocie co najmniej minimalnego wynagrodzenia za pracę (bądź dochody z innych źródeł, np. z umowy zlecenia czy działalności gospodarczej, jeżeli podstawą opłacania składek na ubezpieczenia społeczne była co najmniej kwota równa minimalnemu wynagrodzeniu za pracę).

Okres pobierania zasiłku wynosi co do zasady 6 miesięcy. W niektórych przypadkach przewidziany jest okres 12-sto miesięcznego zasiłku. Dotyczy on bezrobotnych spełniających co najmniej jeden z warunków:

- w okresie pobierania zasiłku zamieszkują na obszarze powiatu, jeżeli stopa bezrobocia na jego obszarze w dniu 30 czerwca roku poprzedzającego dzień nabycia prawa do zasiłku przekraczała 150% przeciętnej stopy bezrobocia w kraju;
- ukończyli 50 rok życia oraz posiadają jednocześnie co najmniej 20-letni okres uprawniający do zasiłku;
- mają na utrzymaniu co najmniej jedno dziecko w wieku do 15 lat, a małżonek bezrobotnego jest także bezrobotny i utracił prawo do zasiłku z powodu upływu okresu jego pobierania po dniu nabycia prawa do zasiłku przez tego bezrobotnego.

Wysokość zasiłku wynosi 717 zł miesięcznie przez pierwsze 3 miesiące oraz 563 zł w kolejnych miesiącach. Dla osób posiadających mniej niż 5 lat stażu pracy wysokość zasiłku wynosi 80% wyżej wymienionych kwot, a dla osób ze stażem pracy co najmniej 20 lat – 120% tychże kwot.

89 Ustawa z dnia 17 grudnia 1998 r. o emeryturach i rentach z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych, Dz. U. z 2009 r. nr 153, poz.1227.
90 E. Bartoszyńska, J. Białas, R. Kowalski, A. Kuć, *Bezrobotni – pomoc, rejestracja, uprawnienia, aktywizacja*, http://pomocspoleczna.ngo.pl/x/71696, 20.03.2013.

BAEL (Badanie Aktywności Ekonomicznej Ludności)

BAEL stanowi podstawowe źródło informacji o sytuacji na rynku pracy. Jest przeprowadzane celem uzyskania informacji o wielkości i strukturze siły roboczej. W efekcie ustalona zostaje liczba osób aktywnych zawodowo (pracujących) oraz bezrobotnych, jak również liczba osób biernych zawodowo, czyli osób niepracujących i niezainteresowanych podjęciem pracy.

Podstawowym kryterium podziału ludności, z punktu widzenia aktywności ekonomicznej, na pracujących, bezrobotnych i biernych zawodowo jest praca, a dokładniej: fakt wykonywania, posiadania bądź poszukiwania pracy w badanym tygodniu. Badaniem objęta jest próba osób w wieku od 15 roku życia. Dzięki zastosowaniu metody reprezentacyjnej możliwe jest uogólnienie uzyskanych wyników na całą populację osób w wieku 15 lat i więcej. Metodologia badania oparta jest na definicjach zalecanych przez Międzynarodową Organizację Pracy[91] i Eurostat. W związku z czym wyniki Badania Aktywności Ekonomicznej Ludności można odnieść do sytuacji w innych krajach. Stosowane w badaniu definicje zostały przyjęte na XIII Międzynarodowej Konferencji Statystyków Pracy w 1982 roku i różnią się od powszechnie stosowanych na przykład w krajowych urzędach pracy. W Polsce Badanie Aktywności Ekonomicznej Ludności prowadzone jest przez Główny Urząd Statystyczny w cyklu kwartalnym od maja 1992 roku.[92]

Międzynarodowa Organizacja Pracy (MOP), przyjęła (m.in. na potrzeby BAEL), że osobą bezrobotną jest osoba niepracująca, poszukująca aktywnie pracy i gotowa ją podjąć w ciągu dwóch tygodni po tygodniu badanym.

7.3. Przyczyny i skutki bezrobocia

Mierniki bezrobocia

Stopa bezrobocia jest podstawowym miernikiem bezrobocia. Określa procentowy udział liczby bezrobotnych w liczbie osób aktywnych zawodowo (tzn. sumy pracujących i bezrobotnych). W przypadku bezrobocia rejestrowanego definicja odnosi się do osób bezrobotnych zarejestrowanych w PUP (Powiatowy Urząd Pracy) i aktywnych zawodowo będących sumą zarejestrowanych osób bezrobotnych i pracujących w jednostkach sektora publicznego i prywatnego. Z tym że liczba pracujących nie uwzględnia osób odbywających czynną służbę wojskową oraz pracowników jednostek budżetowych prowadzących działalność w zakresie obrony narodowej i bezpieczeństwa publicznego. Wskaźnik ten jest wyrażany procentowo i możemy go ująć następującym wzorem:

$$b = \frac{U}{R} \times 100\% .$$

gdzie:

b – wskaźnik stopy bezrobocia;

U – liczba bezrobotnych;

R – zasoby siły roboczej.

Innym miernikiem jest **współczynnik aktywności zawodowej**. Określa on relację między zasobami siły roboczej a liczbą ludności w wieku produkcyjnym:

91 Z ang. ILO – International Labour Organisation, międzynarodowa organizacja odpowiedzialna za tworzenie i nadzorowanie międzynarodowych standardów pracy, stanowi trójstronną agencję ONZ, w skład której wchodzą reprezentanci rządów, pracodawców i pracowników, by wspólnie kształtować politykę i programy promujące godziwą pracę dla wszystkich. ILO gromadzi wiedzę na temat zatrudnienia i pracy.

92 www.rynekpracy.pl

$$A = \frac{R}{L}.$$

gdzie:

A – współczynnik aktywności zawodowej;

R – zasoby siły roboczej;

L – liczba ludności w wieku produkcyjnym.

Bezrobocie możemy nadto wyrazić jako różnicę między zasobami siły roboczej (liczbą osób zdolnych, gotowych podjąć pracę - zatrudnionych i bezrobotnych) a liczbą zatrudnionych, czyli liczbą osób wykonujących pracę (najemną lub na własny rachunek):

$$U = R - Z.$$

gdzie:

U – miernik bezrobocia;

R – zasoby siły roboczej;

Z – liczba osób zatrudnionych.

Tabela 38. Przyczyny i skutki występowania bezrobocia

Przyczyny bezrobocia
• Wysokie dla pracodawców koszty pracy, niepokrywające korzyści ekonomicznych płynących z zatrudnienia pracownika. • Niedopasowanie popytu i podaży na określony rodzaj pracy – bezrobocie strukturalne. • Sztywne i problematyczne dla pracodawcy prawo pracy. • Niedopasowanie terytorialne miejsc zapotrzebowania na pracę i zasobów siły roboczej. • Prawna reglamentacja pracy – konieczność uzyskiwania państwowych bądź korporacyjnych pozwoleń oraz licencji na pracę. • Między zakończeniem pracy w poprzednim miejscu pracy, a jej podjęciem w nowym mija pewien czas (bezrobocie frykcyjne). • Brak doświadczenia zawodowego wśród młodych ludzi.
Skutki bezrobocia
• Niewykorzystany, nieproduktywny potencjał ludzki – spadek PKB. • Koszty materialne, związane z utrzymaniem bezrobotnych oraz służb zajmujących się ich problemami i obsługą. • Obniżanie się stopy życiowej bezrobotnych i ich rodzin, a wraz z nią – rozszerzanie się społecznych kręgów ubóstwa. • Degradacja psychiczna i moralna osób pozostających bez pracy. • Zjawiska patologii społecznej (alkoholizm, narkomania, przestępczość). • Potencjalna baza społeczna skrajnych ruchów politycznych.

Źródło: Opracowanie własne za: A. Jaworska, Przyczyny i konsekwencje bezrobocia w Polsce.2013

7.4. Metody walki z bezrobociem

Wśród metod walki z bezrobociem możemy między innymi wymienić działania skutkujące zwiększeniem zatrudnienia i spadkiem bezrobocia dzięki bezpośredniemu oddziaływaniu na szanse znalezienia pracy przez osoby nimi objęte. Prowadzi to do zwiększania popytu na pracę (subsydiowanie zatrudnienia, roboty publiczne, inwestycje w infrastrukturę), a także usprawnione funkcjonowanie samego rynku (pośrednictwo pracy, doradztwo zawodowe) (B. Leśniak, 2011).

Działania zmierzające do ograniczenie bezrobocia możemy podzielić na pasywne i aktywne. Pasywne dotyczą wsparcia bezrobotnych poprzez zasiłki czy świadczenia przedemerytalne (nie wymagają co do zasady aktywności osób bezrobotnych). Aktywne z kolei polegają na organizowaniu: szkoleń (uzupełniających, poszerzających posiadane kwalifikacje uczestników, a także zmierzające do ich przekwalifikowania), prac interwencyjnych i robót publicznych, pożyczek (w tym bezzwrotnych) dla bezrobotnych i pracodawców, przygotowanie zawodowe młodocianych.

W doktrynie postuluje się nadto m.in.:

- obniżenie podatków i składek na ubezpieczenia społeczne (kosztów pracodawcy) – zaoszczędzone pieniądze pracodawcy mogliby przeznaczyć na większą liczbę osób pracujących;
- zmiany w systemie ubezpieczeń społecznych i prawie pracy, na przykład zmniejszenie liczby dni, za które pracodawca płaci wynagrodzenie pracownikowi w czasie zwolnienia chorobowego (obecnie do 33. dni w roku);
- skrócenie czasu pracy z jednoczesnym proporcjonalnym zmniejszeniem wynagrodzeń – by nie zwalniać pracowników (takie działania podjęto we Francji w 2000 roku, solidaryzując się z osobami potencjalnie zagrożonymi zwolnieniem, skrócono tydzień pracy z 39 do 35 godzin, z jednoczesnym proporcjonalnym obniżeniem wynagrodzeń).

Motywy podjęcia pracy bądź założenia własnej działalności gospodarczej stanowią:

- korzyści materialne;
- potrzeby uznania i prestiżu społecznego;
- potrzeby osiągnięć i samorealizacji.

Oderwanie od schematu pracy na etacie (w przypadku osób podejmujących działalność gospodarczą) stanowi dodatkowy motyw dla osób, które nie czują się dobrze, pracując w sztywnych ramach umowy o pracę, będąc podporządkowanym pracodawcy.

Wymienione wyżej motywy aktywności zawodowej wynikają z potrzeb każdego człowieka. Według Maslowa podstawowe są potrzeby fizjologiczne i bezpieczeństwa. Motywacja zaspokajania tychże potrzeb związana jest z zarobkami oraz podstawowymi potrzebami materialnymi człowieka, a także zdobyciem i utrzymaniem pracy. Potrzeby te dotyczą z reguły fundamentalnych i priorytetowych kwestii, takich jak: jedzenie, odzież, mieszkanie, regeneracja sił. Wyżej w hierarchii znajdują się potrzeby przynależności, szacunku i uznania. Związane są z dążeniem do uzyskania określonej pozycji społecznej, awansu zawodowego, bycia autorytetem w oczach innych, potwierdzeniem własnej pozycji zawodowej. Najwyżej w hierarchii znajdują się potrzeby samorealizacji i autokreacji. Przejawiają się poszerzaniem swojej wiedzy i umiejętności z czystej ciekawości poznawczej, a nie dla uzyskania jakichkolwiek uprawnień czy certyfikatów. Podejmowany wysiłek intelektualny ma przynieść zadowolenie, samospełnienie i satysfakcję.[93]

Rozróżnić można sytuację, gdy osoba poszukująca nie ma pracy, jest bezrobotna zarejestrowana w PUP bądź niezarejestrowana albo też osoba ma pracę, ale chce ją zmienić. Na korzyść bezrobotnych zarejestrowanych przemawia okoliczność, iż PUP przedstawia im dobrane względem ich profilu – wykształcenia, doświadczenia – gotowe oferty pracy. Z kolei osoba, która ma pracę, ale chce ją zmienić ma ten komfort, że jeżeli nie znajdzie odpowiedniej dla siebie oferty, nie zostanie bez środków do życia.

93 A. Wach-Kąkolewicz, *Rozwój zawodowy - motywy podejmowania aktywności uczenia się*, www.e-mentor.edu.pl.

Poszukiwanie pracy należy zacząć od szczegółowej analizy swoich zainteresowań i potrzeb. W przypadku problemów z samodzielnym ich określeniem pomóc może konsultant w biurze doradztwa zawodowego bądź doradca zawodowy lub inny pracownik urzędu pracy (PUP).

W celu określenia swoich preferencji należy zastanowić się, jakie są oczekiwania co przyszłej pracy i pracodawcy. Kandydat powinien wiedzieć, co chce robić, co osiągnąć, a także jaka praca go interesuje, sprawia mu przyjemność. Należy wziąć pod uwagę swoje wykształcenie, doświadczenie, dodatkowe umiejętności, jak również stan zdrowia – czy, oceniając dane stanowisko przez pryzmat tych przesłanek, jest ono dla nas odpowiednie.

Często najmniej istotne drobiazgi wzbogacają doświadczenie i mogą okazać się bardzo przydatne. Na przykład biegła obsługa komputera wydaje się być umiejętnością powszechną, nie każdy jednak potrafi sprawnie obsługiwać programy z pakietu MS Office.

Analizując swoją sytuację, należy być uczciwym wobec siebie. Wszelkie braki, przekłamania najczęściej ujawnią się w toku rozmowy kwalifikacyjnej lub podczas pracy na danym stanowisku. Może to skutkować rozczarowaniem zarówno dla nowego pracownika, który nie jest przygotowany do pracy, jak i dla pracodawcy, który jest zawiedziony motywacją bądź umiejętnościami nowo zatrudnionego.

Ogłoszenia o ofertach pracy możemy znaleźć w:

- Internecie – w szczególności portale związane z ofertami pracy, np.: pracuj.pl, jobrapido.com, inforpraca.pl;
- prasie – np.: Anonse, Gazeta Wyborcza;
- agencjach zatrudnienia i biurach pośrednictwa pracy;
- giełdach (targach) pracy;
- książce telefonicznej;
- wśród znajomych i członków rodziny.

Powyższy katalog nie jest zamknięty, stanowi wyłącznie przykładową listę miejsc, w których możemy znaleźć (zamieścić) oferty pracy. Warto również zamieszczać własne ogłoszenia dotyczące swojego profilu pracownika oraz woli podjęcia pracy na określonym stanowisku.

Targi pracy (giełdy pracy) stanowią przedsięwzięcie organizowane przez firmę lub organizację, mające na celu stworzenie okazji do spotkania osób poszukujących pracy z firmami poszukującymi pracowników. Najczęściej organizowane są przez urzędy pracy.

Pomocne mogą być nadto agencje zatrudnienia, działające na podstawie ustawy o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy. Mogą one funkcjonować jako agencje zatrudnienia, bądź jako agencje: pośrednictwa pracy, doradztwa personalnego, poradnictwa zawodowego, pracy tymczasowej.

Tabela 39. Wykaz usług świadczonych przez agencję zatrudnienia

Agencje zatrudnienia prowadzą działalność gospodarczą, świadczą usługi:

I. **Pośrednictwa pracy**, polegające w szczególności na:

- udzielaniu pomocy osobom w uzyskaniu odpowiedniego zatrudnienia lub innej pracy zarobkowej oraz pracodawcom w pozyskaniu pracowników o poszukiwanych kwalifikacjach zawodowych;
- pozyskiwaniu i upowszechnianiu ofert pracy;
- udzielaniu pracodawcom informacji o kandydatach do pracy, w związku ze zgłoszoną ofertą pracy;
- informowaniu kandydatów do pracy oraz pracodawców o aktualnej sytuacji i przewidywanych zmianach na lokalnym rynku pracy;
- inicjowaniu i organizowaniu kontaktów osób poszukujących odpowiedniego zatrudnienia lub innej pracy zarobkowej z pracodawcami;
- kierowaniu osób do pracy za granicą u pracodawców zagranicznych.

II. **Doradztwa personalnego**, polegające w szczególności na:

- prowadzeniu analizy zatrudnienia u pracodawców, określaniu kwalifikacji pracowników i ich predyspozycji oraz innych cech niezbędnych do wykonywania określonej pracy;
- wskazywaniu źródeł i metod pozyskania kandydatów na określone stanowiska pracy;
- weryfikacji kandydatów pod względem oczekiwanych kwalifikacji i predyspozycji.

III. **Poradnictwa zawodowego**, polegające w szczególności na:

- udzielaniu pomocy w wyborze odpowiedniego zawodu i miejsca zatrudnienia;
- udzielaniu informacji niezbędnych do podejmowania decyzji zawodowych w szczególności o zawodach, rynku pracy oraz możliwościach szkolenia i kształcenia;
- inicjowaniu, organizowaniu i prowadzeniu grupowych porad zawodowych, zajęć aktywizujących w zakresie pomocy w aktywnym poszukiwaniu pracy;
- udzielaniu pracodawcom pomocy w doborze kandydatów do pracy, w szczególności na udzielaniu informacji i doradztwie w tym zakresie.

IV. **Pracy tymczasowej**, zajmującej się w szczególności:

- zatrudnianiem pracowników tymczasowych i kierowaniem tych pracowników oraz osób niebędących pracownikami do wykonywania pracy tymczasowej na rzecz i pod kierownictwem pracodawcy użytkownika, na zasadach określonych w przepisach o zatrudnianiu pracowników tymczasowych

Źródło: Opracowanie własne na podstawie ustawy o zatrudnianiu pracowników tymczasowych

7.5 Poszukiwanie pracy

Nabór pracowników prowadzi pracodawca. Stosownie do swoich potrzeb określa, ile osób, o jakich cechach (w szczególności dotyczących wykształcenia, umiejętności, doświadczenia zawodowego) i na jakie stanowisko zatrudnia. Poniżej przedstawiono najważniejsze zagadnienia dotyczące przygotowania się do procesu rekrutacji przez osoby poszukujące zatrudnienia.

Dokumenty aplikacyjne

Każda osoba poszukująca pracy powinna mieć przygotowane CV. Jest to podstawowy dokument zawierający informacje dla pracodawcy o potencjalnym kandydacie dotyczące wykształcenia, przebiegu kariery zawodowej, umiejętności. **CV powinno zawierać**:

- imię nazwisko, adres i dane kontaktowe (telefon, e-mail);
- informacje o posiadanym wykształceniu;
- doświadczenie zawodowe;
- znajomość języków;
- dodatkowe umiejętności, przebyte kursy, uzyskane certyfikaty;
- zainteresowania, hobby;
- klauzulę wyrażającą zgodę na przetwarzanie danych osobowych zawartych w CV na cele związane z procesem rekrutacji.

Podstawowymi dokumentem aplikacyjnym jest CV lub życiorys. Zdarza się, że pracodawcy wymagają od kandydatów także listu motywacyjnego. Jednakże to nie wszystkie dokumenty, jakie mogą być potrzebne w poszukiwaniach pracy. W ogłoszeniach o pracę często konieczne jest wypełnienia formularza aplikacyjnego (w formie papierowej lub on-line), zawierające pytania i wymagające podania o sobie informacji potrzebnych z punktu widzenia pracodawcy. Pozwala to lepiej zorganizować, ujednolicić proces rekrutacji nowych pracowników, tworząc jednocześnie bazę interesujących pracodawcę danych.

Powołując się w CV na przebyte kursy, posiadane certyfikaty, na rozmowę kwalifikacyjną należy przygotować odpowiednie dokumenty, do wglądu dla osoby prowadzącej rekrutację. Nie wysyłamy ich razem z CV.

List motywacyjny nie jest podaniem o pracę. Ma zachęcić pracodawcę do zapoznania się z daną kandydaturą, zachęcić do przeczytania CV kandydata i zaproszenia go na rozmowę kwalifikacyjną. Jest formą odpowiedzi na ogłoszenie o pracy, dlatego powinien być adresowany do konkretnego pracodawcy.

Przed przystąpieniem do jego napisania należy przemyśleć, dlaczego chcemy pracować u danego pracodawcy oraz dlaczego należy zatrudnić akurat nas. Koniecznie trzeba sprawdzić, o jakie stanowisko się ubiegamy i określić swoje możliwości podjęcia pracy.

Celem listu motywacyjnego jest zaprezentowanie siebie jako najlepszego, optymalnego kandydata na dane stanowisko. Trzeba jednak pisać prawdę, być wiarygodnym i przekonującym.

List powinien być napisany na komputerze (chyba że w ogłoszeniu pracodawca określił własnoręczną formę pisemną), krótko i zwięźle – nie dłuższy niż kartka A4. Czytelność zapewni jedna ze standardowych czcionek (np. Times New Roman) w rozmiarze 12-14 punktów, nadto treść powinna być podzielona akapitami. List nie może powielać informacji zawartych w CV. Prezentowane informacje powinny być konkretne i poparte faktami.

Z treści listu motywacyjnego powinno jednocześnie wynikać, skąd kandydat dowiedział się ofercie.

Szanse w uzyskaniu pracy przekreślą m.in. błędy ortograficzne, pomyłki w nazwie (nazwisku) adresata.

Jeżeli dysponujemy referencjami od poprzednich pracodawców, również i je powinniśmy przygotować na rozmowę kwalifikacyjną.

Przygotowanie do rozmowy kwalifikacyjnej

Zapraszając kandydatów na rozmowę kwalifikacyjną, pracodawca chce poznać przyszłych pracowników. Rozmowa służy weryfikacji informacji zawartych w dokumentach aplikacyjnych, sprawdzeniu, czy posiadane kwalifikacje, doświadczenie są prawdziwe. Podczas rozmowy osobą rekrutująca może jednocześnie zbadać umiejętności interpersonalne potencjalnego pracownika, na przykład: odporność na stres, zdolności komunikacyjne, asertywność.

1. Zebranie informacji o firmie i stanowisku.

Należy zebrać informacje dotyczące firmy i stanowiska, na które aplikujemy. Kandydat powinien wiedzieć, od kiedy firma istnieje i czym się zajmuje, jaką ma pozycję na rynku i czy ma szanse rozwoju. Pozwoli to określić zakres wiedzy i umiejętności, które są potrzebne na danym stanowisku, preferowane cechy psychologiczne.

2. Zebranie i zestawienie najważniejszych informacji o swojej osobie.

Ważne jest, by podczas rozmowy móc bez problemu odpowiedzieć na pytania dotyczące samego siebie. Należy zastanowić się, jakie cechy będą przydatne w pracy, **o którą aplikujemy. Jeśli** przygotowując sobie te elementy, nie będą dla nas zaskoczeniem ewentualne pytania dotyczące na przykład mocnych czy słabych stron. Wcześniejsze przygotowanie i płynna odpowiedź zwiększy szanse na zatrudnienie, zapobiegając jednocześnie stresowi związanemu z takim pytaniem.

3. Opracowanie przykładowej listy pytań, które na pewno się pojawią.

Przykładowe pytania, które mogą zostać zadane podczas rozmowy kwalifikacyjnej przez osobę prowadzącą nabór
▸ Jakie są Pana/i mocne strony, cechy?
▸ Jakie są Pana/i słabe strony, cechy?
▸ Dlaczego chciałbyś pracować w naszej firmie?
▸ Dlaczego miałbym Pana/ią zatrudnić?
▸ Co chciałby Pan/i robić za 5, 10 lat?
▸ Co Pan/i wie o naszej firmie?
▸ Proszę wskazać 5 cech pasujących do Pana/i charakteru.
▸ Czy woli Pan/i pracować w grupie czy indywidualnie?
▸ Jakie zadania sprawiały Panu/i najwięcej a jakie najmniej satysfakcji?
▸ Jakie są Pana/i oczekiwania finansowe?

4. Przygotowanie pytań, na które my chcielibyśmy uzyskać odpowiedzi.

Zwiększymy swoje szanse na zatrudnienie, wykazując zainteresowanie przyszłą pracą, na przykład. pytając o to, jak przebiega proces szkolenia, wdrożenia na nowe stanowisko. Należy jednak pamiętać o zasadzie, że nie powinno się zadawać pytań, na które odpowiedzi są ogólnodostępne, np. na stronie internetowej firmy. W ten sposób wykażemy się brakiem odpowiedniego przygotowania do rozmowy kwalifikacyjnej (patrz pkt. 1).

5. Ocena czasu dotarcia do pracodawcy – punktualność.

Bardzo ważna jest punktualność. Jeżeli kandydat spóźnia się na rozmowę kwalifikacyjną, to świadczy to o braku właściwego zorganizowania czy wręcz lekceważącym stosunku do nowego pracodawcy. Pozwala to jednocześnie wysunąć wniosek, że skoro kandydat spóźnił się na rozmowę, to będzie się spóźniał do pracy. Często spóźnienie przekreśla szanse kandydata na zatrudnienie w danej firmie, a nawet pozbawia możliwości rozmowy.

6. Właściwy ubiór.

Pierwsze wrażenie jest ogromnie ważne. Ubranie może również świadczyć o szacunku do rozmówcy, osoby prowadzącej nabór. Na rozmowę kwalifikacyjną należy wybrać taki strój, który pasuje do danego zawodu lub branży. W razie wątpliwości lepiej ubrać się tradycyjnie, klasycznie niż swobodnie. Standardem dla mężczyzn jest ciemny garnitur, koszula i krawat. Ubiór powinien być czysty i schludny, buty wypastowane.

Kobiety nie powinny ubierać się wyzywająco, odkrywając znacznie swoje ciało, nie powinny odsłaniać swojego brzucha, dekoltu, zakładać przezroczystych bluzek i zbyt krótkich spódnic, kończących się 30 centymetrów nad kolanem.

Włosy powinny być świeżo umyte, schludnie upięte, a paznokcie pomalowane przeźroczystym, lub w stonowanym odcieniu, lakierem. W przygotowaniu makijażu na rozmowę lepiej zastosować zasadę „lepiej mniej niż więcej", zachowując umiar. Nie powinno się używać zbyt mocnych perfum.

Jakich pytań nie zadawać i jakich tematów nie poruszać?

- Dotyczących podstawowej działalności firmy, np.: Czym zajmuje się Państwa firma?
- Komplementować osobę rekrutującą, np.: Ładnie Pani w tym żakiecie.
- Negatywnych kwestii o byłym pracodawcy, oczerniania, w tym ewentualnego wypowiedzenia przez niego umowy o pracę.
- Szczegółowych kwestii dotyczącej poprzedniego pracodawcy, tajemnic firmy.
- Słabych stron, cech, chyba że zostanie zadane pytanie, a odpowiedź powinna być bardzo zwięzła.
- Polityki, religii, życia prywatnego.
- Zarobków i innych świadczeń związanych z pracą, o ile nie padnie stosowne pytanie.

Więcej informacji na temat procesu rekrutacji, przygotowania do rozmowy kwalifikacyjnej można znaleźć na stronach wortali[94] poświęconych pracy[95].

Negocjacje płacowe

Negocjacje płacy to trudny element rozmowy kwalifikacyjnej. Od ich wyniku zależy decyzja o przyjęciu kandydata do pracy, ale także satysfakcja przyszłego pracownika. Dobrze jest zrobić rozeznanie przed rozmową kwalifikacyjną w konkretnej firmie. W Internecie wortale pracy, np. pracuj.pl, a także inne media przeprowadzają co roku badania płac, tworząc listy. Zawierają on przybliżone dane dotyczące wysokości zarobków przedstawicieli różnych zawodów.

Możliwości finansowe konkretnego pracodawcy można również poznać poprzez znajomą osobę, która już tam pracuje bądź niedawno pracowała. Nadto można porozmawiać z doradcą zawodowym w PUP lub agencji zatrudnienia, który wskaże orientacyjne zarobki dla osób na określonych stanowiskach.

Rozmawiając na temat wynagrodzenia, należy sprecyzować jego wysokość, czy chodzi o pensję brutto czy netto. Brak takiego ustalenia może doprowadzić do nieporozumień, które trudno będzie wytłumaczyć później na swoją korzyść, a różnica może wynieść około 30% mniej „na rękę".

Rozważając wysokość interesującej kwoty wynagrodzenia, rozważyć czy sytuacja zmusza do przyjęcia pracy za minimalne wynagrodzenie czy nie. Trzeba ustalić kwotę, dzięki której można przeżyć miesiąc:. opłaty za czynsz i media, koszty utrzymania siebie i rodziny, dojazd na miejsce pracy i z powrotem itp.

Osoby bez lub z małym doświadczenie zawodowym nie mają dobrej pozycji do negocjacji. Dopiero pnąc się po szczeblach hierarchii firmy, zdobywając kolejne kwalifikacje, mogą żądać coraz więcej, znacząc w firmie więcej. Jednakże nawet osoby bardziej doświadczone nie mogą być zbyt roszczeniowo nastawione wobec pracodawcy, gdyż nawet wśród osób z wieloletnim stażem pracy występuje duże bezrobocie.

94 wortal - portal wertykalny (ang. vertical portal) portal wyspecjalizowany, publikujący informacje z jednej dziedziny, tematycznie do siebie zbliżone, dotyczące na przykład muzyki, filmu, programów komputerowych, motoryzacji, pracy, w przeciwstawienie do zwykłego portalu, obejmującego szeroki zakres tematyczny (horyzontalnego)

95 Zob.: pracuj.pl; monsterpolska.pl; gazetapraca.pl; praca.money.pl; praca.wp.pl.

Zaczynając negocjacje, nie powinno się od razu zdradzać oczekiwanej kwoty. Dobrze do satysfakcjonującej wysokości dodać kilkanaście procent więcej. Będziemy mieli wówczas większe szanse na to, że kwota, do której dojdziemy w negocjacjach, będzie w satysfakcjonującym nas przedziale.

Często pracodawca oferuje wyłącznie kwotę minimalnego wynagrodzenia miesięcznie bądź poniżej naszych oczekiwań. Są jednak sposoby na zrekompensowanie niższej pensji. Poza wynagrodzeniem podstawowym oraz ewentualnym premiami czy prowizjami stosownie do wyników pracy może on zapewniać inne świadczenia pozapłacowe – bonusy motywująco-wynagradzające. „Bonusem" może być telefon komórkowy, samochód służbowy, ale także prywatna opieka medyczna. Takie dodatki do pensji mają zachęcić kandydatów do wyboru oferty pracy bądź pracowników do pozostania u danego pracodawcy i do wydajniejszej pracy.[96]

7.6. Formy zatrudnienia

Zatrudnienie pracownicze

Praca to nieodzowny element naszego życia, dający możliwość zaspokojenia ekonomicznych i społecznych potrzeba każdego z nas. Szczegółowe zasady wykonywania pracy w Polsce uregulowane są w Kodeksie Pracy[97].

Podstawowe zasady prawa pracy:

- każdy ma prawo do swobodnie wybranej pracy;
- państwo określa minimalną wysokość wynagrodzenia za pracę[98];
- państwo prowadzi politykę zmierzającą do pełnego produktywnego zatrudnienia;
- nawiązanie stosunku pracy oraz ustalenie warunków pracy i płacy, bez względu na podstawę prawną tego stosunku, wymaga zgodnego oświadczenia woli pracodawcy i pracownika;
- jakakolwiek dyskryminacja w zatrudnieniu, bezpośrednia lub pośrednia, w szczególności ze względu na płeć, wiek, niepełnosprawność, rasę, religię, narodowość, przekonania polityczne, przynależność związkową, pochodzenie etniczne, wyznanie, orientację seksualną, a także ze względu na zatrudnienie na czas określony lub nieokreślony albo w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy – jest niedopuszczalna.

Przechodząc do zagadnień związanych ze stornami umowy o pracę, koniecznie należy zdefiniować podstawowe pojęcia z tym związane, mianowicie: pracownik i pracodawca.

Pracownikiem może być osoba, która ukończyła 18 lat.

Kodeks pracy dopuszcza także możliwość zatrudniania młodocianego, czyli osoby, która ukończyła 16 lat, a nie przekroczyła 18. **Zatrudnianie młodocianych** jest możliwe pod warunkiem, że dotyczy tylko tych, którzy:

- ukończyli co najmniej gimnazjum;
- przedstawią świadectwo lekarskie stwierdzające, że praca danego rodzaju nie zagraża ich zdrowiu.

Młodociany nieposiadający kwalifikacji zawodowych może być zatrudniony tylko w celu przygotowania zawodowego. **Umowa o pracę** w celu przygotowania zawodowego powinna określać w szczególności:

- rodzaj przygotowania zawodowego (nauka zawodu lub przyuczenie do wykonywania określonej pracy);
- czas trwania i miejsce odbywania przygotowania zawodowego;
- sposób dokształcania teoretycznego;
- wysokość wynagrodzenia.

96 J. Pęczek, *Jak negocjować wynagrodzenie*?, http://wynagrodzenia.pl/artykul.php/typ.1/kategoria_glowna.591/wpis.226, 20.03.2013.
97 Ustawa z dnia 26 czerwca 1974 r. Kodeks pracy, Dz. U. z 1998 r. nr 21, poz. 94.
98 Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 14 września 2012 r. w sprawie wysokości minimalnego wynagrodzenia za pracę w 2013 r. (Dz. U. poz. 1026.

Pracodawcą jest jednostka organizacyjna, choćby nie posiadała osobowości prawnej, a także osoba fizyczna, jeżeli zatrudniają one pracowników.

Umowa o pracę

Umowę o pracę, zgodnie z obowiązującym prawem, możemy zawrzeć:
- na czas nieokreślony;
- na czas określony;
- na okres próbny – nieprzekraczający 3 miesięcy;
- na czas zastępstwa nieobecnego pracownika;
- na czas wykonania określonej pracy.

Umowa o pracę określa strony umowy, rodzaj umowy, datę jej zawarcia oraz warunki pracy i płacy, w szczególności:
- rodzaj pracy;
- miejsce wykonywania pracy;
- wynagrodzenie za pracę odpowiadające rodzajowi pracy, ze wskazaniem składników wynagrodzenia;
- wymiar czasu pracy;
- termin rozpoczęcia pracy.

Umowę o pracę zawiera się na piśmie. Jeżeli umowa o pracę nie została zawarta z zachowaniem formy pisemnej, pracodawca powinien, najpóźniej w dniu rozpoczęcia pracy przez pracownika, potwierdzić pracownikowi na piśmie ustalenia co do stron umowy, rodzaju umowy oraz jej warunków.

Pracodawca informuje pracownika na piśmie, nie później niż w ciągu 7 dni od dnia zawarcia umowy o pracę, o:
- obowiązującej pracownika dobowej i tygodniowej normie czasu pracy;
- częstotliwości wypłat wynagrodzenia za pracę;
- wymiarze przysługującego pracownikowi urlopu wypoczynkowego;
- obowiązującej pracownika długości okresu wypowiedzenia umowy o pracę;

Wszelkie zmiany umowy wymagają formy pisemnej.

Pracodawca ma prawo żądać od osoby ubiegającej się o zatrudnienie podania danych osobowych obejmujących:
- imię (imiona) i nazwisko;
- imiona rodziców;
- datę urodzenia;
- miejsce zamieszkania (adres do korespondencji);
- wykształcenie;
- przebieg dotychczasowego zatrudnienia.

Rozwiązaniu umowy o pracę może nastąpić:
- na mocy porozumienia stron;
- przez oświadczenie jednej ze stron z zachowaniem okresu wypowiedzenia (rozwiązanie umowy o pracę za wypowiedzeniem);
- przez oświadczenie jednej ze stron bez zachowania okresu wypowiedzenia (rozwiązanie umowy o pracę bez wypowiedzenia);
- z upływem czasu, na który była zawarta;
- z dniem ukończenia pracy, dla której wykonania była zawarta.

Organem powołanym do sprawowania nadzoru i kontroli przestrzegania prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, a także przepisów dotyczących legalności zatrudnienia i innej pracy zarobkowej, jest **Państwowa Inspekcja Pracy**[99].

Do **zadań Państwowej Inspekcji Pracy** należy:

- nadzór i kontrola przestrzegania przepisów prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, przepisów dotyczących stosunku pracy, wynagrodzenia za pracę i innych świadczeń wynikających ze stosunku pracy, czasu pracy, urlopów, uprawnień pracowników związanych z rodzicielstwem, zatrudniania młodocianych i osób niepełnosprawnych;
- kontrola legalności zatrudnienia, innej pracy zarobkowej, wykonywania działalności;
- kontrola legalności zatrudnienia, innej pracy zarobkowej oraz wykonywania
- pracy przez cudzoziemców;
- kontrola wyrobów wprowadzonych do obrotu lub oddanych do użytku pod względem spełniania przez nie zasadniczych lub innych wymagań dotyczących bezpieczeństwa i higieny pracy, określonych w odrębnych przepisach;
- podejmowanie działań polegających na zapobieganiu i ograniczaniu zagrożeń w środowisku pracy;
- współdziałanie z organami ochrony środowiska w zakresie kontroli przestrzegania przez pracodawców przepisów o przeciwdziałaniu zagrożeniom dla środowiska;
- opiniowanie projektów aktów prawnych z zakresu prawa pracy;
- prawo wnoszenia powództw, a za zgodą osoby zainteresowanej – uczestnictwo w postępowaniu przed sądem pracy, w sprawach o ustalenie istnienia stosunku pracy.

Państwowa Inspekcja Pracy udziela bezpłatnie porad w zakresie prawa pracy.[100]

Zatrudnienie niepracownicze

Umowy o pracę to nie jedyna forma podejmowania pracy zarobkowej. Kodeks cywilny[101] i przepisy wykonawcze do Kodeksu Pracy dają możliwość zatrudnienia w oparciu o: umowę zlecenie, umowę o dzieło, umowę agencyjną oraz umowę o pracę nakładczą.[102]

99 Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy, Dz. U. z 2012 r. poz. 404, poz. 769.
100 http://www.bip.pip.gov.pl/pl/bip/porady_wszystkie, 10.03.2013.
101 Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. – Kodeks cywilny, Dz. U. z 1964 nr 16, poz. 93, ze zm.
102 Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 31 grudnia 1975 r. w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą, Dz. U z 1976 r. nr 3, poz.19.

Kluczowe elementy rozróżniające te poszczególne typy umów zawarte zostały w poniższej tabeli:

Tabela 40. Porównanie umów cywilnoprawnych

Kryteria	Umowa zlecenia	Umowa o dzieło	Umowa agencyjna	Umowa o pracę nakładczą
Podstawa prawna	art. 734 - 751 KC	art. 627 - 646 KC	art. 758 - 764 KC	Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą
Przedmiot umowy	dokonanie określonej czynności prawnej dla dającego zlecenie	zobowiązanie do wykonania oznaczonego dzieła	zobowiązanie do stałego pośrednictwa lub przedstawicielstwa.	wykonanie pracy zgodnie z warunkami umowy zleconej przez nakładcę
Trwałość umowy	zlecenie wykonane w konkretnym czasie lub bezterminowo	charakter jednorazowy	charakter ciągły	charakter ciągły
Strony umowy	zleceniodawca i zleceniobiorca	przyjmujący zamówienie (wykonawca) i zamawiający	przyjmujący zlecenie (agent) i dający zlecenie – strony umowy muszą być przedsiębiorcami	nakładca i wykonawca
Sposób wykonywania pracy/ usługi	zleceniobiorca zobowiązuje się do wykonywania powtarzalnych czynności, a nie do osiągnięcia rezultatu	przyjmujący zamówienie zobowiązuje się do osiągnięcia rezultatu	pośredniczenie lub zawieranie umów oznaczonego rodzaju na rzecz dającego zlecenie lub w jego imieniu	wykonawca zobowiązuje się do osiągnięcia rezultatu wynikającego z zawartej umowy
Charakter wykonania pracy/ usługi	zleceniobiorca powinien wykonywać pracę osobiście,może powierzyć wykonanie zlecenia osobie trzeciej tylko wtedy, gdy to wynika z umowy lub ze zwyczaju albo gdy jest do tego zmuszony przez okoliczności	przyjmujący zlecenie może powierzyć wykonanie zlecenia osobie trzeciej tylko wtedy, gdy to wynika z umowy lub ze zwyczaju albo gdy jest do tego zmuszony przez okoliczności	agent może powierzyć wykonywanie zlecenia osobie trzeciej tylko za pisemną zgodą dającego zlecenie	wykonawca nie musi wykonać pracy nakładczej osobiście
Formy umowy	ustna, pisemna lub w sposób dorozumiany (np. poprzez dopuszczenie wykonywania przedmiotu zlecenia)	może być zawarta w każdej formie	może być zawarta w formie dowolnej, ale w sytuacji gdy wprowadza odpowiedzialność agenta za wykonanie zobowiązania przez klienta, powinna być zawarta w formie pisemnej	powinna być zawarta w formie pisemnej
Rodzaj odpowiedzialności	zleceniobiorca nie jest odpowiedzialny za ostateczny efekt, wykonując zlecenie musi działać z należytą starannością	zgodnie z zasadami rękojmi za wady	agent ponosi ryzyko niepowodzenia podjętych działań	wykonawca odpowiada za efekt pracy
Rozwiązanie umowy	dopuszczalność wypowiedzenia w każdym terminie	dopuszczalność wypowiedzenia w każdym terminie	szczegółowo określony tryb i terminy wypowiedzenia wynikający z ustawy	dopuszczalność rozwiązania w każdym czasie na mocy porozumienia stron lub za wypowiedzeniem

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Kodeks cywilny i Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą

Pozostałe formy zatrudnienia

Telepraca

Telepraca to forma świadczenia pracy przez pracownika, która może być wykonywana regularnie poza zakładem pracy, z wykorzystaniem środków komunikacji elektronicznej w rozumieniu przepisów o świadczeniu usług drogą elektroniczną (telepraca). Telepracownikiem jest pracownik, który wykonuje pracę, o której mowa wyżej i przekazuje pracodawcy wyniki pracy, w szczególności za pośrednictwem środków komunikacji elektronicznej.[103] **Pracodawca jest obowiązany**:

- dostarczyć telepracownikowi sprzęt niezbędny do wykonywania pracy w formie telepracy;
- ubezpieczyć sprzęt;
- pokryć koszty związane z instalacją, serwisem, eksploatacją i konserwacją sprzętu;
- zapewnić telepracownikowi pomoc techniczną i niezbędne szkolenia w zakresie obsługi sprzętu – chyba że pracodawca i telepracownik postanowią inaczej.

Praca tymczasowa

Praca tymczasowa to możliwość podjęcia zatrudnieniu za pośrednictwem agencji pracy tymczasowej przejmującej na siebie prawa i obowiązki pracodawcy i podpisującej z pracownikiem umowę o pracę.[104] Agencja pracy tymczasowej zapewnia pracownikowi warunki zatrudnienia nie mniej korzystne niż wynikające z przepisów Kodeksu pracy oraz innych przepisów regulujących prawa i obowiązki pracowników. Agencja zatrudnia pracowników tymczasowych na podstawie umowy o pracę na czas określony lub umowy o pracę na czas wykonania określonej pracy. Umowa o pracę zawarta między agencją pracy tymczasowej a pracownikiem tymczasowym powinna określać strony umowy, rodzaj umowy i datę zawarcia umowy oraz wskazywać pracodawcę użytkownika i ustalony okres wykonywania na jego rzecz pracy tymczasowej, a także warunki zatrudnienia pracownika tymczasowego w okresie wykonywania pracy na rzecz pracodawcy użytkownika pracy. Umowa o pracę pracownika tymczasowe go może trwać maksymalnie 12 miesięcy.

Job sharing

Job sharing to elastyczna forma zatrudniania polegająca na dzieleniu jednego stanowiska pracy pomiędzy kilka osób otrzymujących wynagrodzenie wprost proporcjonalne do wielkości wykonanej przez siebie pracy. Ta forma zatrudnienia umożliwia pracodawcy zatrzymanie doświadczonych pracowników, dając im przy tym poczucie stabilności zatrudnienia (B., Skowron-Milenik, 2003).

Job rotation

Job rotation polega na planowym przesuwaniu wybranych pracowników z jednego stanowiska pracy na inne. Umożliwia rozwój zawodowy dzięki poznaniu w praktyce różnorodnych czynności, ale też dostarcza szerszego spojrzenia i zrozumienia firmy jako całości, jej celów, kultury organizacyjnej oraz rozwija możliwości komunikacyjne i możliwości współpracy (K., Rogowski, 2009).

Praca na wezwanie

Praca na wezwanie to świadczenie pracy, które nie odbywa się w sposób stały i systematyczny, ale tylko i wyłącznie na wezwanie pracodawcy, w sytuacji gdy nas potrzebuje. Zawarcie umowy o pracę w tym charakterze można porównać i utożsamić z możliwością świadczenia pracy w formie dyżuru, polegającą na zobowią-

103 Szerzej zobacz: Rozdział IIb Kodeksu Cywilnego.
104 Ustawa z dnia 9 lipca 2003 r. o zatrudnianiu pracowników tymczasowych, Dz. U. nr 166, poz. 1608, ze zm.

zaniu się pracownika do pozostawania poza normalnymi godzinami pracy w gotowości do wykonywania pracy wynikającej z umowy o pracę w zakładzie pracy lub w innym miejscu wyznaczonym przez pracodawcę.[105]

Outsourcing pracowniczy

Outsourcing pracowniczy to kolejna nowoczesna forma elastycznego zatrudnienia, która eliminuje koszty związane z rekrutacją i utrzymaniem etatów. Pracownik firmy outsourcingowej to osoba, która świadomie zgadza się na to, iż zostanie zrekrutowana i zatrudniona, a następnie oddelegowana do pracy u Klienta. Tu pełną odpowiedzialność za utrzymanie pracownika, za prawidłowość prowadzenia teczek kadrowych i rozliczania płatności ponosi firma zewnętrzna, która jest realnym pracodawcą osoby outsourcowanej. Firma, która korzysta z usług, jedynie zleca wykonanie ustalonego w umowie zadania[106].

Samozatrudnienie W aktualnym stanie prawnym nie ma zdefiniowanego pojęcia samozatrudnienia. Próbując dokonać wskazania, czym jest zatrudnienie, może sięgną do praktyki wskazującej na rozumienie samozatrudnienia jako jednoosobowej działalność gospodarczej prowadzonej na podstawie wpisu do CEiDG przez osobę fizyczną – przedsiębiorcę, na własny rachunek i na własne ryzyko (M. Przybysz, 2011).

Tabela 40. Porównanie samozatrudnienia z zatrudnieniem pracowniczym

Kryteria	Samozatrudnienie	Zatrudnienie pracownicze
Regulacja prawna	Ustawa o swobodzie działalności gospodarczej	Kodeks pracy
Forma umowy	Samozatrudniony współpracuje z pozyskanymi przez siebie kontrahentami na podstawie umów cywilnoprawnych	Strony łączy stosunek pracy w oparciu o umowę o pracę
Kierownictwo	Samozatrudniony jest sam sobie kierownikiem	Pracownik zobowiązuje się do wykonywania pracy określonego rodzaju na rzecz pracodawcy i pod jego kierownictwem w miejscu i czasie wyznaczonym przez pracodawcę
Trwałość aktywności zawodowej	Do samozatrudnionych nie mają zastosowania przepisy Kodeksu pracy dotyczące okresów wypowiedzenia czy postępowania w razie odwołania się od wypowiedzenia umowy o pracę	W stosunku do pracownika mają zastosowania przepisy Kodeksu pracy dotyczące okresów wypowiedzenia i postępowania w razie odwołania się od wypowiedzenia umowy o pracę
Ciężar ryzyka	Samozatrudniony ponosi ryzyko związane z prowadzoną przez niego działalnością gospodarczą	W ramach stosunku pracy pracownik nie ponosi ryzyka związanego z prowadzoną przez pracodawcę działalnością gospodarczą
Wymiar czasu pracy	Samozatrudniony ma swobodę w wyborze miejsca wykonania usługi, jak i godzin, w których świadczy ją świadczy	Pracownik ma obowiązek świadczenia pracy przez 5 dni w tygodniu, 8 godzin na dobę
Wysokość wynagrodzenia	Nie mają zastosowania przepisy prawa pracy gwarantujące minimalny poziom płacy	Zgodnie z rozporządzeniem Rady Ministrów z dnia 14 września 2012 r. w sprawie wysokości minimalnego wynagrodzenia za pracę w 2013 r. wysokość minimalnego wynagrodzenia pracownika zatrudnionego w pełnym miesięcznym wymiarze czasu pracy nie może być niższa od kwoty 1600 zł (brutto)
Urlop wypoczynkowy	Brak prawa do urlopu wypoczynkowego	Pracownikowi przysługuje prawo do corocznego, nieprzerwanego, płatnego urlopu wypoczynkowego

Źródło: M. Przybysz, Samozatrudnienie a prawo pracy, 2011

105 Szerzej na temat dyżuru pracownika patrz Kodeks pracy art. 151^5-151^6.
106 A. Kasta-Pyz, M. Franczyk, *Outsourcing pracowników*, http://www.outsourcingportal.pl/artykuly,outsourcing-pracownikow,3,19,789,2.html, 10.03.2013.

7.7. Obowiązki pracownika i pracodawcy

Podstawowe obowiązki pracownika i pracodawcy

Prawa i obowiązki pracownika i pracodawcy to ogół norm określających zasady, których należy przestrzegać w miejscu pracy w celu osiągnięcia założonych efektów.

Tabela 41. Prawa i obowiązki pracownika i pracodawcy

Prawa pracownika:	Prawa pracodawcy:
▸ prawo do swobodnie wybranej pracy; ▸ prawo do równego traktowania mężczyzn i kobiet w zatrudnieniu; ▸ prawo godziwego wynagrodzenia za pracę; ▸ prawo do jednakowego wynagrodzenia za jednakową pracę lub za pracę o jednakowej wartości; ▸ prawo do corocznego, nieprzerwanego, płatnego urlopu wypoczynkowego; ▸ w celu reprezentacji i obrony swoich praw i interesów może tworzyć organizacje i przystępować do tych organizacji; ▸ zachowuje prawo do wynagrodzenia za czas urlopu szkoleniowego oraz za czas zwolnienia z całości lub części dnia pracy; ▸ w każdym tygodniu przysługuje mu prawo do co najmniej 35 godzin nieprzerwanego odpoczynku, obejmującego co najmniej 11 godzin nieprzerwanego odpoczynku dobowego; ▸ jeżeli dobowy wymiar czasu pracy pracownika wynosi co najmniej 6 godzin, pracownik ma prawo do przerwy w pracy trwającej co najmniej 15 minut, wliczanej do czasu pracy.	▸ w celu reprezentacji i obrony swoich praw i interesów może tworzyć organizacje i przystępować do tych organizacji; ▸ może rozwiązać umowę o pracę bez wypowiedzenia z winy pracownika; ▸ na czas przestoju może powierzyć pracownikowi inną odpowiednią pracę, za której wykonanie przysługuje wynagrodzenie przewidziane za tę pracę; ▸ może stosować karę upomnienia i nagany za nieprzestrzeganie przez pracownika ustalonej organizacji i porządku w procesie pracy, przepisów bezpieczeństwa i higieny pracy, przepisów przeciwpożarowych, a także przyjętego sposobu potwierdzania przybycia i obecności w pracy oraz usprawiedliwiania nieobecności w pracy; ▸ za nieprzestrzeganie przez pracownika przepisów bezpieczeństwa i higieny pracy lub przepisów przeciwpożarowych, opuszczenie pracy bez usprawiedliwienia, stawienie się do pracy w stanie nietrzeźwości lub spożywanie alkoholu w czasie pracy pracodawca może stosować karę pieniężną; ▸ może wprowadzić jedną przerwę w pracy niewliczaną do czasu pracy, w wymiarze nieprzekraczającym 60 minut, przeznaczoną na spożycie posiłku lub załatwienie spraw osobistych; ▸ na pisemny wniosek pracownika może ustalić indywidualny rozkład jego czasu pracy w ramach systemu czasu pracy, którym pracownik jest objęty; ▸ może zobowiązać pracownika do pozostawania poza normalnymi godzinami pracy w gotowości do wykonywania pracy wynikającej z umowy o pracę w zakładzie pracy lub w innym miejscu wyznaczonym przez pracodawcę (dyżur); ▸ może odwołać pracownika z urlopu tylko wówczas, gdy jego obecności w zakładzie wymagają okoliczności nieprzewidziane w chwili rozpoczynania urlopu; ▸ na pisemny wniosek pracownika może udzielić mu urlopu bezpłatnego.

Obowiązki pracownika:	Obowiązki pracodawcy:
▸ wykonywanie pracy określonego rodzaju na rzecz pracodawcy i pod jego kierownictwem oraz w miejscu i czasie wyznaczonym przez pracodawcę; ▸ przestrzegania czasu pracy ustalonego w zakładzie; ▸ przestrzegania regulaminu pracy; ▸ przestrzegania przepisów oraz zasad bezpieczeństwa i higieny pracy; ▸ troska o dobro zakładu pracy, ochrona jego mienia oraz zachowywanie w tajemnicy informacji, których ujawnienie mogłoby narazić pracodawcę na szkodę; ▸ przestrzeganie w zakładzie zasad współżycia społecznego; ▸ jeżeli pracodawca zawarł z pracownikiem umowę o zakazie konkurencji, nie może prowadzić działalności konkurencyjnej wobec pracodawcy ani też świadczyć pracy w ramach stosunku pracy lub na innej podstawie na rzecz podmiotu prowadzącego taką działalność.	▸ zaznajamianie pracowników podejmujących pracę z zakresem ich obowiązków, sposobem wykonywania pracy na wyznaczonych stanowiskach oraz ich podstawowymi uprawnieniami; ▸ organizowanie pracy w sposób zapewniający pełne wykorzystanie czasu pracy, jak również osiąganie przez pracowników, przy wykorzystaniu ich uzdolnień i kwalifikacji, wysokiej wydajności i należytej jakości pracy; ▸ organizowanie pracy w sposób zapewniający zmniejszenie uciążliwości pracy, zwłaszcza pracy monotonnej i pracy w ustalonym z góry tempie; ▸ przeciwdziałanie dyskryminacji w zatrudnieniu, w szczególności ze względu na płeć, wiek, niepełnosprawność, rasę, religię, narodowość, przekonania polityczne, przynależność związkową, pochodzenie etniczne, wyznanie, orientację seksualną, a także ze względu na zatrudnienie na czas określony lub nieokreślony albo w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy; ▸ zapewnienie bezpiecznych i higienicznych warunków pracy oraz prowadzenie systematycznych szkoleń pracowników w zakresie bezpieczeństwa i higieny pracy; ▸ terminowe i prawidłowe wypłacanie wynagrodzenia; ▸ ułatwianie pracownikom podnoszenie kwalifikacji zawodowych; ▸ stwarzanie pracownikom podejmującym zatrudnienie po ukończeniu szkoły prowadzącej kształcenie zawodowe lub szkoły wyższej warunków sprzyjających przystosowanie się do należytego wykonywania pracy; ▸ zaspokajanie w miarę posiadanych środków socjalnych potrzeby pracowników; ▸ stosowanie obiektywnych i sprawiedliwych kryteriów oceny pracowników oraz wyników ich pracy, ▸ prowadzenie dokumentacji w sprawach związanych ze stosunkiem pracy oraz akt osobowych pracowników; ▸ przechowywanie dokumentacji w sprawach związanych ze stosunkiem pracy oraz akt osobowych pracowników w warunkach niegrożących uszkodzeniem lub zniszczeniem, ▸ wpływanie na kształtowanie w zakładzie pracy zasad współżycia społecznego; ▸ informowanie pracowników w sposób przyjęty u danego pracodawcy o możliwości zatrudnienia w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy, a pracowników zatrudnionych na czas określony – o wolnych miejscach pracy; ▸ przeciwdziałanie mobbingowi; ▸ w związku z rozwiązaniem lub wygaśnięciem stosunku pracy pracodawca jest obowiązany niezwłocznie wydać pracownikowi świadectwo pracy; ▸ pokrywanie kosztów poniesionych przez pracownika w bezpośrednim związku z odwołaniem go z urlopu; ▸ zatrudniając pracownicę w porze nocnej, jest obowiązany na okres jej ciąży zmienić rozkład czasu pracy w sposób umożliwiający wykonywanie pracy poza porą nocną, a jeżeli jest to niemożliwe lub niecelowe, przenieść pracownicę do innej pracy, której wykonywanie nie wymaga pracy w porze nocnej; ▸ zatrudniając pracownicę w ciąży lub karmiącą dziecko piersią, jest obowiązany dostosować warunki pracy, tak ograniczyć czas pracy, aby wyeliminować zagrożenia dla zdrowia lub bezpieczeństwa pracownicy; ▸ nie może wypowiedzieć ani rozwiązać umowy o pracę w okresie od dnia złożenia przez pracownika wniosku o udzielenie urlopu wychowawczego do dnia zakończenia tego urlopu; ▸ zapewnienie młodocianym pracownikom opieki i pomocy, niezbędnych dla ich przystosowania się do właściwego wykonywania pracy.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Ustawa Kodeks pracy

Wynagrodzenie pracownicze

Wynagrodzenie za pracę powinno być tak ustalone, aby odpowiadało:

- w szczególności rodzajowi wykonywanej pracy i kwalifikacjom wymaganym przy jej wykonywaniu;
- a także uwzględniało ilość i jakość świadczonej pracy.

Pracownik nie może zrzec się prawa do wynagrodzenia ani przenieść tego prawa na inną osobę.

Wypłaty wynagrodzenia za pracę dokonuje się co najmniej raz w miesiącu, w stałym i ustalonym z góry terminie. Wynagrodzenie za pracę płatne raz w miesiącu wypłaca się z dołu, niezwłocznie po ustaleniu jego pełnej wysokości, nie później jednak niż w ciągu pierwszych 10 dni następnego miesiąca kalendarzowego. Pracodawca, na żądanie pracownika, jest obowiązany udostępnić do wglądu dokumenty, na których podstawie zostało obliczone jego wynagrodzenie. Pracodawca jest obowiązany wypłacać wynagrodzenie w miejscu, terminie i czasie określonych w regulaminie pracy lub w innych przepisach prawa pracy.[107]

Podstawowe formy wynagradzania to:

- **forma czasowa** – uzależnia wypłatę wynagradzania od przepracowanego czasu;
- **forma premiowa** – uzależnia wypłatę wynagradzania od osiągniętych wyników, właściwej i terminowej realizacji powierzonych zadań itp.,;
- **forma akordowa** – wynagrodzenie jest wypłacane proporcjonalnie do ilości wykonanej pracy;
- **forma zadaniowa** – wynagrodzenie wypłacane jest za zrealizowanie z góry wyznaczonego celu;
- **forma prowizyjna** – wynagrodzenie określone jest procentowo i uzależnione od obrotu lub zysku osiągniętego w wyniku wykonania pracy;
- **forma kafeteryjna** – wiąże się z ustaleniem katalogu sposobów wynagrodzenia i pozostawieniu pracownikowi możliwości samodzielnego wyboru świadczenia w ramach sprecyzowanej propozycji i limitu cenowego (np.: voucher na zakupy, bony Sodexo).

Z wynagrodzenia za pracę odliczane są składki na ubezpieczenia społeczne oraz zaliczki na podatek dochodowy od osób fizycznych.

Tabela 42. Poszczególne składniki wynagrodzenia

Poszczególne składnik wynagrodzenia							
Kwota brutto	Składki na ubezpieczenie społeczne (potrącane z wynagrodzenia pracownika)				Składka zdrowotna (9%)	Podatek (18%)	Netto do wypłaty
	Emerytalna (9.76%)	Rentowa (1.5%)	Chorobowa (2.45%)	Razem (13.71%)			
1600	156,16	24,00	29,20	219,36	124,26	75,00	1181,38

Źródło: http://www.kalkulatory.gofin.pl/12,Kalkulator-wynagrodzen.html, 10.03.2013

Z zagadnieniem wynagrodzenia, jako dochodu, nierozerwalnie wiąże się obowiązek zapłaty podatku dochodowego od osób fizycznych. Podatek dochodowy jest podatkiem osobistym, co oznacza, że podatnikiem jest każda osoba fizyczna osiągająca dochód.

Przychód – Koszty = Dochód

107 Patrz: Kodeks Pracy.

Nie dotyczy to tych osób (podatników), które za dany rok podatkowy uzyskały dochód przekraczającą kwotę wolną od podatku.[108]

Kwota dochodu wolna od podatku to 3091,49 zł

Obowiązujący w Polsce system podatkowy opiera się na progresji, co oznacza, że stopa oprocentowania rośnie wraz ze wzrostem dochodów – w zależności od wysokości uzyskanego dochodu zapłacimy podatek w wysokości 18% lub 32%.

Tabela 43. Skala podatku dochodowego na rok 2013

Podstawa obliczenia podatku w złotych		**Podatek wynosi**
ponad	do	
	85 528	18% minus kwota zmniejszająca podatek 556 zł 02 gr
85 528		14 839 zł 02 gr + 32% nadwyżki ponad 85 528 zł

Źródło: http://www.finanse.mf.gov.pl/pit/stawki-podatkowe, 20.03.2013

Obowiązujące przepisy prawa zobowiązują podatnika po zakończeniu roku podatkowego – w terminie do dnia 30 kwietnia roku następnego, do składania urzędom skarbowym zeznania (PIT) o wysokości osiągniętego dochodu (poniesionej straty) w roku podatkowym.

Składając zeznanie roczne (PIT), obok podstawowych danych osobowych i adresowych, należy w zeznaniu, wyszczególnić:

- **kwoty przychodów** – zsumować źródła wszystkich przychodów, np.: z umowy o pracę, umowy zlecenie i dzieło;
- **koszty uzyskania przychodu** – koszty uzyskania przychodów uzyskanych ze stosunku pracy określa się w zależności od ilości zawartych umów o pracę i miejsca zatrudnienia;
- **dochody (straty)** – czyli kwota jaka powstanie po odjęciu od przychodów kosztów uzyskania przychodu;
- **kwoty zaliczek jakie pobrał płatnik**.

Obecnie istnieje możliwość składania zeznania rocznego drogą elektroniczną poprzez stronę www.e-deklaracje.gov.pl, w dwóch formach, tj.:

- użycie formularzy interaktywnych – opatrywanych podpisem elektronicznym;
- aplikację e-Deklaracje Desktop – wspierające korzystanie z formularzy interaktywnych, bez użycia podpisu elektronicznego

108 Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych, Dz. U. z 2012 r. poz. 361.

Schemat 24. Procedura składania zeznania rocznego (e-deklaracji) drogą elektroniczną

Źródło: http://www.finanse.mf.gov.pl/systemy-informatyczne/e-deklaracje, 20.03.2013

7.8 Ubezpieczenia społeczne i ubezpieczenie zdrowotne pracowników

Zgodnie z ustawą o systemie ubezpieczeń społecznych[109] ubezpieczenia społeczne w Polsce obejmują:

- ubezpieczenie emerytalne i rentowe;
- ubezpieczenie w razie choroby i macierzyństwa, zwane ubezpieczeniem chorobowym;
- ubezpieczenie z tytułu wypadków przy pracy i chorób zawodowych, zwane ubezpieczeniem wypadkowym.

Ubezpieczenie emerytalne i rentowe

Obowiązkowo ubezpieczeniom emerytalnemu i rentowym podlegają osoby fizyczne, które są m. in.:

- pracownikami;
- osobami wykonującymi pracę nakładczą;
- osobami wykonującymi pracę na podstawie umowy agencyjnej lub umowy zlecenia albo innej umowy o świadczenie usług, do której zgodnie z Kodeksem cywilnym stosuje się przepisy dotyczące zlecenia[110].

Ubezpieczenie chorobowe

Pracownicy podlegają obowiązkowo ubezpieczeniu chorobowemu.

Dobrowolnie ubezpieczeniu chorobowemu podlegają, na swój wniosek, następujące osoby objęte obowiązkowo ubezpieczeniami emerytalnym i rentowymi:

- wykonujące pracę nakładczą;
- wykonujące pracę na podstawie umowy zlecenia, umowy agencyjnej lub innej umowy o świadczenie usług, do której zgodnie z Kodeksem cywilnym stosuje się przepisy dotyczące zlecenia oraz osoby z nimi współpracujące.[111]

Ubezpieczenie wypadkowe

Zgodnie z ustawą o systemie ubezpieczeń społecznych obowiązkowo ubezpieczeniu wypadkowemu podlegają osoby podlegające ubezpieczeniom: emerytalnemu i rentowym.

Wysokość składek na ubezpieczenia społeczne i ich płatnicy

Stopy procentowe składek na ubezpieczenia emerytalne, rentowe i chorobowe są jednakowe dla wszystkich ubezpieczonych i wynoszą:

- na ubezpieczenie emerytalne –19,52% podstawy wymiaru;
- na ubezpieczenia rentowe – 8,00% podstawy wymiaru;
- na ubezpieczenie chorobowe – 2,45% podstawy wymiaru.

▶ **Wysokość składek na ubezpieczenia społeczne znajdziesz na stronie www.zus.pl**

109 Ustawa z dnia 13 października 1998 r. o systemie ubezpieczeń społecznych, Dz.U. z 2009 r. nr 205, poz. 1585.
110 Pełny katalog osób zawiera art. 6 ustawy o systemie ubezpieczeń społecznych.
111 Pełny katalog osób zawiera art. 11 ustawy o systemie ubezpieczeń społecznych.

Zgłoszenie do ubezpieczeń i wyrejestrowanie z ubezpieczeń społecznych

Każda osoba objęta obowiązkowo ubezpieczeniem emerytalnym i rentowym podlega zgłoszeniu do ubezpieczeń społecznych w terminie 7 dni od daty powstania obowiązku ubezpieczenia.

Obowiązek zgłoszenia do ubezpieczeń społecznych należy do płatnika składek.

Osoby przystępujące do ubezpieczeń na zasadzie dobrowolności zgłaszają wniosek o objęcie ubezpieczeniem w terminie przez siebie wybranym. Termin ten nie może być jednak wcześniejszy niż dzień złożenia wniosku.

Zgłoszenie do ubezpieczeń społecznych zawiera w szczególności następujące dane dotyczące osoby zgłaszanej:

- numer PESEL;
- nazwisko, imię pierwsze i drugie;
- datę urodzenia;
- nazwisko rodowe;
- obywatelstwo i płeć,;
- tytuł ubezpieczenia;
- stopień niepełnosprawności;
- posiadanie ustalonego prawa do emerytury lub renty;
- adres zameldowania na stałe miejsce pobytu,;
- adres zamieszkania, jeżeli jest inny niż adres zameldowania na stałe miejsce pobytu;
- adres do korespondencji, jeżeli jest inny niż adres zameldowania na stałe miejsce pobytu i adres zamieszkania.

Płatnik składek jest zobowiązany powiadomić ZUS o każdej zmianie danych ubezpieczonego zawartych w dotychczasowym zgłoszeniu w terminie 7 dni od daty zaistnienia tych zmian, stwierdzenia nieprawidłowości we własnym zakresie lub otrzymania zawiadomienia o stwierdzeniu nieprawidłowości przez ZUS.

Osoba, w stosunku do której wygasł tytuł do ubezpieczeń społecznych, podlega wyrejestrowaniu z tych ubezpieczeń. Zgłoszenie wyrejestrowania płatnik składek zobowiązany jest złożyć w terminie 7 dni od daty zaistnienia tego faktu. Wyjątek dotyczy pracowników będących członkami służby zagranicznej. W stosunku do nich płatnik składek zobowiązany jest złożyć zgłoszenie wyrejestrowania w terminie 30 dni od dnia ustania stosunku pracy.

Praca w UE

Obywatelem Unii Europejskiej jest każda osoba mająca obywatelstwo Państwa Członkowskiego. Obywatelstwo Unii ma charakter dodatkowy w stosunku do obywatelstwa krajowego i nie go zastępuje. We wszystkich swoich działaniach Unia przestrzega zasady równości swoich obywateli, którzy są traktowani z jednakową uwagą przez jej instytucje, organy i jednostki organizacyjne.[112]

Unia zapewnia swoim obywatelom przestrzeń wolności, bezpieczeństwa i sprawiedliwości bez granic wewnętrznych, w której zagwarantowana jest **swoboda przepływu osób**, w powiązaniu z właściwymi środkami w odniesieniu do kontroli granic zewnętrznych, azylu, imigracji, jak również zapobiegania i zwalczania przestępczości.

Obywatele Unii korzystają z praw i podlegają obowiązkom przewidzianym w Traktatach i mają prawo **do swobodnego przemieszczania się i przebywania** na terytorium Państw Członkowskich.

Obywatelom Unii zapewnia się **swobodę przepływu pracowników** wewnątrz Unii. Swoboda ta obejmuje zniesienie wszelkiej dyskryminacji ze względu na przynależność państwową między pracownikami Państw Członkowskich w zakresie zatrudnienia, wynagrodzenia i innych warunków pracy. W szczególności swoboda ta obejmuje prawo:

- ubiegania się o rzeczywiście oferowane miejsca pracy;
- swobodnego przemieszczania się w tym celu po terytorium Państw Członkowskich;
- przebywania w jednym z Państw Członkowskich w celu podjęcia tam pracy, zgodnie z przepisami

112 Wersje skonsolidowane Traktatu o Unii Europejskiej i Traktatu o funkcjonowaniu Unii Europejskiej, Dz. Urz. UE 2012 C 326.

ustawowymi, wykonawczymi i administracyjnymi dotyczącymi zatrudniania pracowników tego Państwa;
- pozostawania na terytorium Państwa Członkowskiego po ustaniu zatrudnienia, na warunkach ustalonych przez Komisję w rozporządzeniach.

Parlament Europejski i Rada uchwalają, w drodze dyrektyw lub rozporządzeń, środki niezbędne do wprowadzenia w życie swobodnego przepływu pracowników:
- zapewniając ścisłą współpracę między organami administracji krajowej właściwymi do spraw pracy;
- znosząc takie procedury i praktyki administracyjne, jak również terminy dostępu do wolnych miejsc pracy wynikające z prawa krajowego bądź z wcześniejszych umów zawartych między Państwami Członkowskimi, których utrzymanie w mocy stanowiłoby przeszkodę w liberalizacji przepływu pracowników;
- znosząc wszelkie terminy i inne ograniczenia przewidziane w prawie krajowym lub wcześniej zawartych umowach między Państwami Członkowskimi, które ustanawiają w stosunku do pracowników z innych Państw Członkowskich odmienne warunki co do swobodnego wyboru zatrudnienia niż w stosunku do własnych pracowników;
- ustanawiając mechanizmy właściwe do zapewnienia wymiany podań o pracę i ofert zatrudnienia oraz w celu ułatwienia zachowania równowagi na rynku pracy, na warunkach, które zapobiegają poważnym zagrożeniom dla poziomu życia i zatrudnienia w różnych regionach i gałęziach przemysłu.

W związku z powyższym ustanawia się system umożliwiający migrującym pracownikom najemnym i osobom prowadzącym działalność na własny rachunek oraz uprawnionym osobom od nich zależnym:
- zaliczenie wszystkich okresów uwzględnianych w prawie poszczególnych państw, w celu nabycia i zachowania prawa do świadczeń oraz naliczenia wysokości świadczeń;
- wypłatę świadczeń osobom mającym miejsce zamieszkania na terytoriach Państw Członkowskich.

Swoboda przepływu pracowników wewnątrz Unii wiąże się nie rozerwalnie z faktem **migracji** polegającym na przemieszczaniu się osób między miejscowościami, prowadząc do stałej lub czasowej, ale długookresowej zmiany miejsca zamieszkania (J. Holzer, 2003).

Swobodne podejmowanie pracy przez Polaków w krajach UE obejmuje większość jej terenu. Zlikwidowano wiele barier utrudniających pracę w pastwach członkowskich. Przepisy dotyczące zatrudnienia Polaków ulegają jednak szybkim zmianom, dlatego przed wyjazdem do konkretnego państwa należy zawsze zweryfikować w polskich placówkach dyplomatycznych informacje o możliwości podjęcia pracy (T. Pomianek, 2011).

Ofert pracy najlepiej szukać jeszcze przed wyjazdem za granicę. Oferty znajdują się m.in. w takich miejscach, jak:
- polskie agencje zatrudnienia;
- agencje pośrednictwa pracy za granicą;
- EURES – Sieć Europejskich Ofert Pracy;
- serwisy internetowe danych państw;
- międzynarodowe serwisy o pracy.

www.eures.praca.gov.pl, www.adecco.com

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Wskaż przyczyny bezrobocia wśród ludzi dobrze wykształconych.
2. Wyjaśnij motywy aktywności zawodowej człowieka oraz wskaż sposoby poszukiwania pracy.
3. Wyjaśnij, czym są kompetencje miękkie.
4. Korzystając ze strony GUS http://www.stat.gov.pl, wskaż liczbę bezrobotnych oraz stopę bezrobocia według województw, podregionów i powiatów.
5. Czym rożni się zatrudnienie pracownicze od niepracowniczego?
6. Co to jest samozatrudnienie?
7. Czym charakteryzuje się swoboda przepływu osób?

Bibliografia:

Caban W. (red.), *Ekonomia: praca zbiorowa*, Łódź 1995.

Holzer J., *Demografia*, Warszawa 2003.

Kozioł L., *Zarządzanie czasem pracy*, Kraków 2000.

Kwiatkowski E., *Bezrobocie. Podstawy teoretyczne*, Warszawa 2009.

Leśniak B., Praca i staże w Unii Europejskiej, w: Pomianek T., *Rynek pracy w Polsce i innych krajach Unii Europejskiej*, Rzeszów 2011.

Pomianek T.,(red), *Rynek pracy w Polsce i innych krajach Unii Europejskiej*, Rzeszów 2011.

Rogowski K., *Elastyczne formy zatrudnienia*, Warszawa 2009.

Skowron-Milenik B., *Zarządzanie czasem pracy w przedsiębiorstwie. Podstawy elastycznego kształtowania czasu pracy*, Poznań 2003.

Akty prawne

Ustawa z dnia 9 lipca 2003 r. o zatrudnianiu pracowników tymczasowych, Dz. U. nr 166, poz. 1608, ze zm.

Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy, Dz. U. z 2012 r. poz. 404, poz. 769.

Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny, Dz. U. nr 16, poz. 93 ze zm.

Ustawa z dnia 26 czerwca 1974 r. Kodeks pracy, Dz. U. z 1998 r. nr 21 poz. 9).

Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy, Dz. U. z 2008 r. nr 69, poz. 415.

Ustawa z dnia 17 grudnia 1998 r. o emeryturach i rentach z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych, Dz. U. z 2009 r. nr 153, poz.1227.

Ustawa z dnia 13 października 1998 r. o systemie ubezpieczeń społecznych, Dz. U. 2009 nr 205, poz. 1585.

Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych, Dz. U. 2012 poz. 361.

Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. – Ordynacja podatkowa, Dz. U. z 2005 r. nr 8, poz. 60.

Traktat o Unii Europejskiej i Traktat o funkcjonowaniu Unii Europejskiej, Dz. Urz. UE 2012 C 326.

Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 31 grudnia 1975 r. w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą, Dz. U z 1976 r. nr 3, poz.19, ze zm.

Rozporządzeniem Rady Ministrów z 14 września 2012 r. w sprawie wysokości minimalnego wynagrodzenia za pracę w 2013 roku, Dz. U. poz. 1026, ze zm.

Netografia:

Jaworska A., *Przyczyny i konsekwencje bezrobocia w Polsce*, http://politykaadministracji.prv.pl/politykaspoleczna/przyczynyikonsekwencjebezrobocia.html, 20.03.2013.

Kasta-Pyza A., Franczyk M., *Outsourcing pracowników*, http://www.outsourcingportal.pl/artykuly,outsourcing-pracownikow,3,19,789,2.html, 10.03.2013.

Przybysz M., *Samozatrudnienie a prawo pracy*, http://mojafirma.infor.pl/raport-dnia/126792,Samozatrudnienie-a-prawo-pracy.html, 10.03.2013.

Wach-Kąkolewicz A., *Rozwój zawodowy – motywy podejmowania aktywności uczenia się*, www.e-mentor.edu.pl/, 20.03.2013.

8. Prawa konsumenta

8.1. Prawa konsumenta

Konsument to osoba kupująca produkty (np.: jedzenie, odzież, meble), nabywająca dobra lub korzystająca z jakiś usług (np.: fryzjera, kina, banku, Internetu). Nie zawsze nabywca towar jest konsumentem. Zgodnie z Kodeksem Cywilnym za konsumenta uważa się osobę fizyczną dokonującą czynności prawnej (nabywającą od przedsiębiorcy towar lub usługę) w celu bezpośrednio niezwiązanym z prowadzoną przez nią działalnością gospodarczą lub zawodową. Wszystkim konsumentom przysługują podstawowe prawa.[113]

Do podstawowych praw konsumenta należy zaliczyć:

- **Prawo do ochrony zdrowia i bezpieczeństwa –** podstawowe prawo konsumentów w Polsce. Władze publiczne chronią konsumentów, użytkowników i najemców przed działaniami zagrażającymi ich zdrowiu, prywatności i bezpieczeństwu oraz przed nieuczciwymi praktykami rynkowymi – art. 76 Konstytucji RP.
- **Odpowiedzialność za produkt** – tzw. odpowiedzialność za produkt o cechach niebezpiecznych.
- **Bezpieczeństwo produktu** – nie jest prawem roszczeniowym. Jest konsekwencją działań o organizacyjnym i prawnym charakterze, będące konsekwencją polityki gospodarczej i regulacji prawnych. Regulacje określają, jakie produkty, o jakim poziomie bezpieczeństwa mogą znajdować się na rynku. Jest to działanie prewencyjne i kontrolujące.
- **Prawo do informacji**. Ochrona konsumenta przed informacją naruszającą jego prywatność.
- **Ochrona konsumenta przed uciążliwą reklamą –** służą temu przepisy Kodeksu cywilnego, przepisy o nieuczciwej konkurencji, przepisy o niedozwolonej reklamie, zwłaszcza w postaci reklamy uciążliwej.
- **Zakaz informacji wprowadzającej w błąd –** w prawie polskim obowiązuje ogólny zakaz reklamy wprowadzającej w błąd (reklama nierzeczowa, ukryta). Oznacza to zakaz reklamy, która przez wprowadzenie w błąd klienta może wpłynąć na jego decyzję co do nabycia towaru lub usługi.
- **Informacje, do których konsument ma prawo –** w relacjach między przedsiębiorcami a konsumentami najczęściej łamane jest to prawo. Usunięciu tej nierównowagi służy obowiązek dostarczania konsumentowi odpowiednich informacji.
- **Informacje o towarze i ostrzeżenia –** w odniesieniu do wielu rodzajów produktów (np.: lekarstw, wyrobów tytoniowych, kosmetyków, substancji trujących) ogólny obowiązek ostrzeżeń przewiduje ustawa z dnia 3 kwietnia 1993 r. o badaniach i certyfikacji (Dz. U. z 2002 r. nr 166, poz. 1360). Ustawa ta zawiera ogólny obowiązek certyfikacji wyrobów krajowych i importowanych oraz usług, które mogą stwarzać zagrożenie. Dowodem poddania się certyfikacji jest posiadanie stosownego oznaczenia, tzw. znaku bezpieczeństwa.

113 www.ekonsument.pl/a151_podstawowe_prawa_konsumentow.html, 09.03.2013.

- **Prawo do ochrony interesu ekonomicznego –** w prawie wspólnotowym wskazuje się na ochronę „ekonomicznego interesu konsumenta". W praktyce w tym zakresie wyróżnia się trzy grupy regulacji (przepisów), dotyczące zagadnień:
  - ochrony przy zawieraniu umowy;
  - ochrony przed krzywdzącą treścią umowy;
  - ochrony przed niewłaściwą jakością świadczenia (rękojmia, gwarancja).

- **Prawo do reprezentacji swoich interesów – w Polsce sprowadza się ono w praktyce do szczególnej roli organizacji konsumenckich oraz do reprezentacji interesów konsumentów także przez specjalne organy, tj. Powiatowego (Miejskiego) Rzecznika Konsumentów i Prezesa Urzędu Ochrony Konkurencji i Konsumentów.**

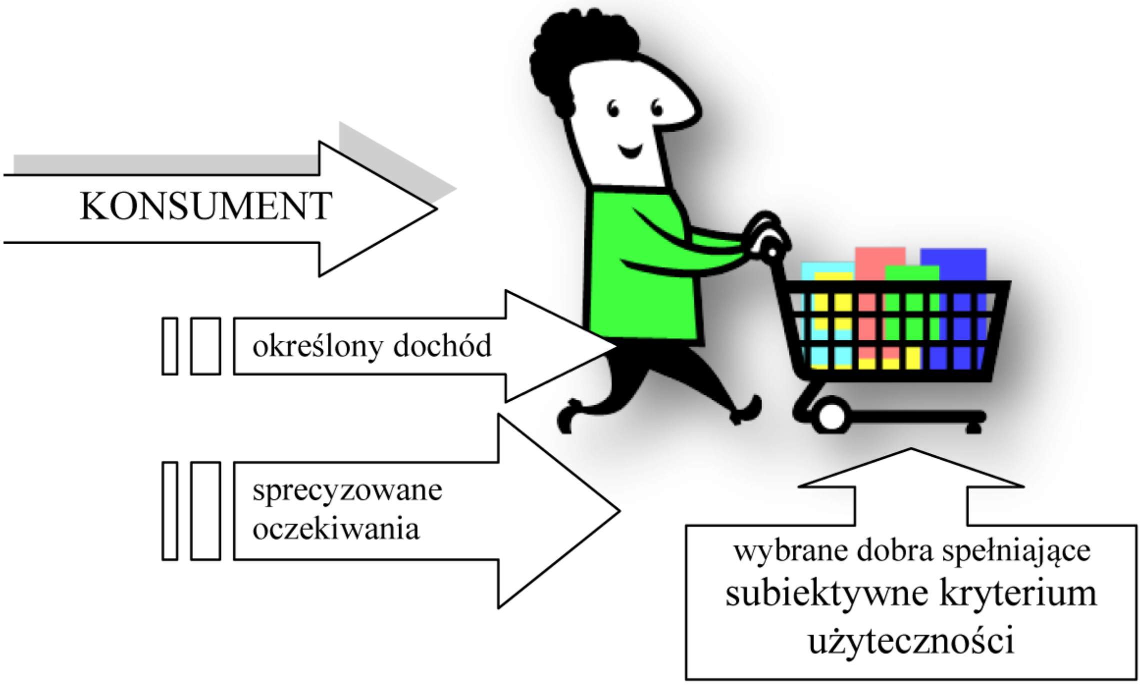
Teoria wyboru konsumentów

Zachowania indywidualnych konsumentów na rynku wyjaśnia teoria wyboru konsumentów. Przy pomocy narzędzi matematycznych i znajomości praw mikroekonomii pozwala ona opisywać zachowania indywidualnych konsumentów na rynku oraz wyjaśnić działanie mechanizmu rynkowego w zakresie dystrybucji dóbr i kształtowania cen. Pozwala zrozumieć, w jaki sposób konsumenci podejmują decyzje o zakupie danego produktu. Opracowana przez V. Pareto i F. Edgeworth w pierwszej połowie XX w. (P. Kotler, 1994; S. Marciniak, 2005).

Zasady zachowania konsumentów

Jednym z elementów pozwalających zrozumieć teorie zachowań konsumentów jest racjonalność zachowań. Ludzie dążą do maksymalizacji funkcji użyteczności, czyli do maksymalizacji satysfakcji.

Konsument – jednostka dysponująca określonym dochodem (budżetem), dokonująca zakupów dóbr zgodnie z preferencjami w celu maksymalizacji użyteczności. Dochód konsumenta decyduje o tym, jakie kombinacje dóbr są konsumentowi dostępne, a jakie pozostają poza zasięgiem jego budżetu. np.:



Schemat 1. Konsument

Źródło: Opracowanie własne

Konsument dokonuje wyboru dóbr w oparciu o swoje preferencje, które są odzwierciedleniem jego gustów, potrzeb. Konsument preferuje pewne koszyki, tzw. kombinacje dóbr. W praktyce konsumenci dokonują wyboru dóbr takich produktów, które maksymalizują ich użyteczność, czyli czerpią maksymalną satysfakcję z ich konsumpcji, posiadania. Na ogół konsumenci preferują koszyki bardziej użyteczne od mniej użytecznych. Gdy konsument dysponuje pełną wiedzą na temat dostępnego na rynku dobra i potrafi ocenić, które z dostępnych dóbr są dla niego bardziej użyteczne, mówimy o pełnej informacji klienta. Jeśli dla każdej pary koszyków dóbr: A i B, konsument jest w stanie ustalić jednoznaczną relację preferencji między nimi, to:

- konsument preferuje koszyk A nad koszykiem B;
- konsument preferuje koszyk B nad koszykiem A;
- oba koszyki posiadają taką samą użyteczność dla konsumenta, są więc dla niego wzajemnie obojętne, mówimy wtedy o jednoznaczności preferencji.

Z przechodniością mamy do czynienia, jeżeli konsument preferuje koszyk A nad koszykiem B i jednocześnie preferuje koszyk C nad koszykiem B, wtedy konsument preferuje koszyk C nad koszykiem A.

Decyzje dotyczące konsumpcji

Użyteczność jest miarą szczęścia lub zadowolenia, jakie daje konsumentowi posiadanie danego dobra. Dobro jest tym użyteczniejsze, im bardziej zaspakaja potrzebę. Potrzeby konsumenta są nieograniczone. Człowiek dąży przede wszystkim do zaspokojenia podstawowych potrzeb (niższego rzędu). Po zaspokojeniu potrzeb niższego rzędu pojawiają się potrzeby wyższego rzędu, związane z komfortem życia, kulturą, rozrywką itp. Hierarchia potrzeb bywa więc różna.

Zwolennicy teorii użyteczności formułują na tej podstawie ogólną psychologiczną prawidłowość, zgodnie z którą w miarę wzrostu zapasu lub spożycia jakiegoś dobra użyteczność całkowita rośnie wolniej niż wzrasta zapas. Sformułowanie pojęcia użyteczności całkowitej stanowi punkt wyjścia sformułowaniu pojęcia użyteczności krańcowej.

Prawo malejącej użyteczności krańcowej – opracował Gossen (Niemiecki ekonomista (1810-1858) – (S. Marciniak, 2005).

▶ **Prawo malejącej użyteczności krańcowej**
Użyteczność krańcowa dobra maleje, gdy każda dodatkowa jednostka dobra dostarcza konsumentowi coraz mniejszych przyrostów użyteczności.

W miarę wzrostu konsumpcji danego dobra całkowita użyteczność co prawda rośnie, ale wzrost jest jednak wolniejszy. Świadczy to o tym, że użyteczność krańcowa kolejnych jednostek dobra zmniejsza się wraz ze wzrostem ilości konsumowanego dobra i rosnącym poziomem zaspokojenia potrzeby. Każda potrzeba w miarę jej zaspokojenia ulega nasyceniu.

8.2. Aspekty relacji przedsiębiorca – konsument

Słowo reklama pochodzi z języka łacińskiego *reclamare* i oznacza hałasować, robić wrzawę, wrażenie.

Reklama towarzyszyła człowiekowi już w starożytności. Handlowcy zachwalali swoje produkty, wykrzykiwali ich cenę. Tak powstała reklama ustna. Następnie powstała reklama pisemna. Była ona zamieszczana na ścianach budynków, karczm (K. Grzybczyk, 2008). Spisywane były ważne informacje dotyczące wydarzeń kulturalnych i sportowych. Rewolucją w rozwoju reklamy było wynalezienie przez Gutenberga w 1450 roku Druku – ruchomej czcionki. Pojawiły się gazety, a w nich zamieszczone były reklamy. Z czasem pojawili się agenci reklamowi. V. Palmer jako pierwszy zajmował się zbieraniem ogłoszeń reklamowych i umieszczaniem ich w prasie. Uznaje się go za pierwszego agenta ds. reklamy. W 1941 roku w USA pojawiła się pierwsza reklama telewizyjna. W Polsce rynek reklamy komercyjnej zaczął rozwijać w latach 90-tych XX w. Od tego czasu reklama zmieniła się pod względem jakościowym i ilościowym i stała się niezbędnym narzędziem w walce o konsumenta.

Istnieje wiele definicji reklamy. **Reklama to**:

- **Wszelkiego rodzaju płatna forma nieosobistej prezentacji oraz promocji pomysłów, dóbr lub usług przez określonego sponsora**. Reklama jest elementem struktury marketingu, który wpływa, w formie płatnego oraz bezosobowego oddziaływania, bezpośrednio na zjawiska rynkowe, to jest przede wszystkim na motywy, postawy i sposób postępowania nabywców (P. Kotler, 1994).
- **Proces komunikowania się przedsiębiorstwa z rynkiem**. Stanowi masową, odpłatną formę nieosobowego przedstawiania i popierania idei, produktów lub usług przez określanego nadawcę. Reklama obejmuje zatem te działania, które dotyczą prezentacji odbiorcom nieosobowej, płatnej i zidentyfikowanej ze sponsorem informacji o ofercie lub organizacji (J. Łodziana-Grabowska, 1996).

O reklamie mówimy wówczas, gdy w sposób bezosobowy (bez udziału sprzedawcy) i za pieniądze (w przeciwieństwie do publicity) prezentuje się produkt lub usługę (J. Kall, 1994).

Można śmiało powiedzieć, że **reklama to wszelkie działania podjęte w celu uzyskania rozgłosu oraz zainteresowania konsumentów**.

Zadania reklamy:

- - informowanie rynku, klientów, konkurencji o nas, o produkcie;
- - oddziaływanie na odbiorcę w celu wywołania chęci zakupu, skorzystania z usługi;
- - podanie przyczyn, dlaczego warto kupić produkt;
- - zmiana postaw nabywców wobec producenta;
- - wywołanie pragnienia zakupu – utrwalenie produktu w świadomości konsumentów.

Reklama musi być wyrazista, bezpośrednia. Powinna dokładnie określać produkt, uwzględniając same jego zalety. Konsument, widząc produkt, powinien wiedzieć, do czego służy, w jaki sposób można go wykorzystać i „w czym" jest lepszy od innych konkurencyjnych produktów. Zadaniem reklamy jest także utożsamianie produktu z producentem. W tym celu przedstawia się znaki firmowe (logo) danej marki, producenta. Reklama powinna zachęcać klienta-konsumenta do zakupu danego produktu bądź skorzystania z oferowanej usługi. Funkcją reklamy jest zachęcenie klienta do zakupu produktów z nowej serii, na przykład proszku do prania o nowym zapachu. To również utożsamianie się klienta z reklamowanym produktem. Reklama powinna przyciągać uwagę klienta, zainteresować go produktem i skupić jego uwagę na korzyściach płynących z zakupu. Na końcu powinna wywołać u klienta chęć posiadania produktu i spowodować reakcję na reklamę, czyli zakup.

Na przestrzeni lat wiele osób zastanawiało się na, czym polega fenomen reklamy. W 1925 roku E.K. Strong określił model reklamowy [114] (Model AIDA).

Model AIDA przedstawia sposób oddziaływania reklamy na potencjalnego klienta, wyjaśnia psychologiczne podstawy działania. Skrót AIDA pochodzi od słów:

- **A** – *Attention* – **przyciągnij, zwróć uwagę**;

- **I** - *Interest* – **zainteresuj, wzbudź zainteresowanie;**

- **D** – *Desire* – **wywołaj pragnienie zakupu, chęć posiadania;**

- **A** – *Action* – **pobudź działanie do zakupu, nakłoń do kupna**.

114 www.mfiles.pl/pl/index.php/Model_AIDA

Pierwszym etapem (**A** –**Attention**) jest przyciągnięcie i zwrócenie uwagi na oferowany produkt. Komunikat nastawiony jest na zasygnalizowanie klientom informacji o produkcie. Kolejnym etapem (**I** – **Interest**) jest wzbudzenie zainteresowania odbiorcy oferowanym produktem, tzn. jego właściwościami, funkcjonalnością i korzyściami, jakie zostaną uzyskane po nabyciu produktu. Klient gotowy jest poszukać dodatkowych informacji o interesującym go produkcie. Wzbudzenie (**D** – **Desire**) chęci skorzystania, posiadania oferowanego produktu. Konsument powinien być przekonany, że najbardziej potrzebny jest mu ten produkt i to właśnie on najlepiej zaspokoi jego potrzeby. Działanie (**A – Action**) podjęte przez odbiorcę komunikatu kończy skutecznie zamierzony przekaz. Przekonanie konsumenta do zakupu jest swojego rodzaju sukcesem rynkowym.

Model AIDA, przyjmując postać modelu rozszerzonego **AIDACS,** może zostać wzbogacony o etapy C i S. **C – Conviction** przekonanie klienta o słuszności dokonanego wyboru. Klient jest przeświadczony, że zakupiony produkt najlepiej zaspokoi jego potrzeby. **S – Satisfaction** zadowolenie, czyli wzbudzenie długookresowego zadowolenia. Klient zadowolony będzie bardziej skłonny do ponownego skorzystania z oferty, dodatkowo poleci produkt rodzinie, znajomym (tzw. **marketing szeptany)**.

Potencjalni klienci bombardowani są ilością reklam. Dzięki wiedzy dotyczącej znajomości klasyfikacji reklam możemy jednoznacznie zidentyfikować oraz ocenić profil docelowy klienta. Reklamy kierowane są do nas – klientów, konsumentów za pośrednictwem mediów, takich jak: telewizja, prasa, radio, Internet. Możemy podzielić je na kategorie. Najbardziej charakterystycznym podziałem reklam jest podział ze względu na treść, jaką reklamy mają przekazywać. Wyróżniamy zatem przede wszystkim **reklamy podprogowe**, które należą do rodzaju reklam ukrytych, nie jesteśmy w stanie zauważyć, że się pojawiają. Mamy również **reklamy społeczne**, które mają służyć jakiemuś społecznemu, dobremu celowi. Oprócz tego znane i wykorzystywane są również **reklamy informacyjne**, uciążliwe, wprowadzające w błąd, ukryte, stabilizujące, ułatwiające wybór, perswazyjne, defensywne, prestiżowe, agresywne, reklamy różnorodnych firm, reklamy konkurencyjne, reklamy porównawcze, profesjonalne, ukierunkowane, osłonowe, wspierające czy, wreszcie, przypominające[115].

Podział reklam:

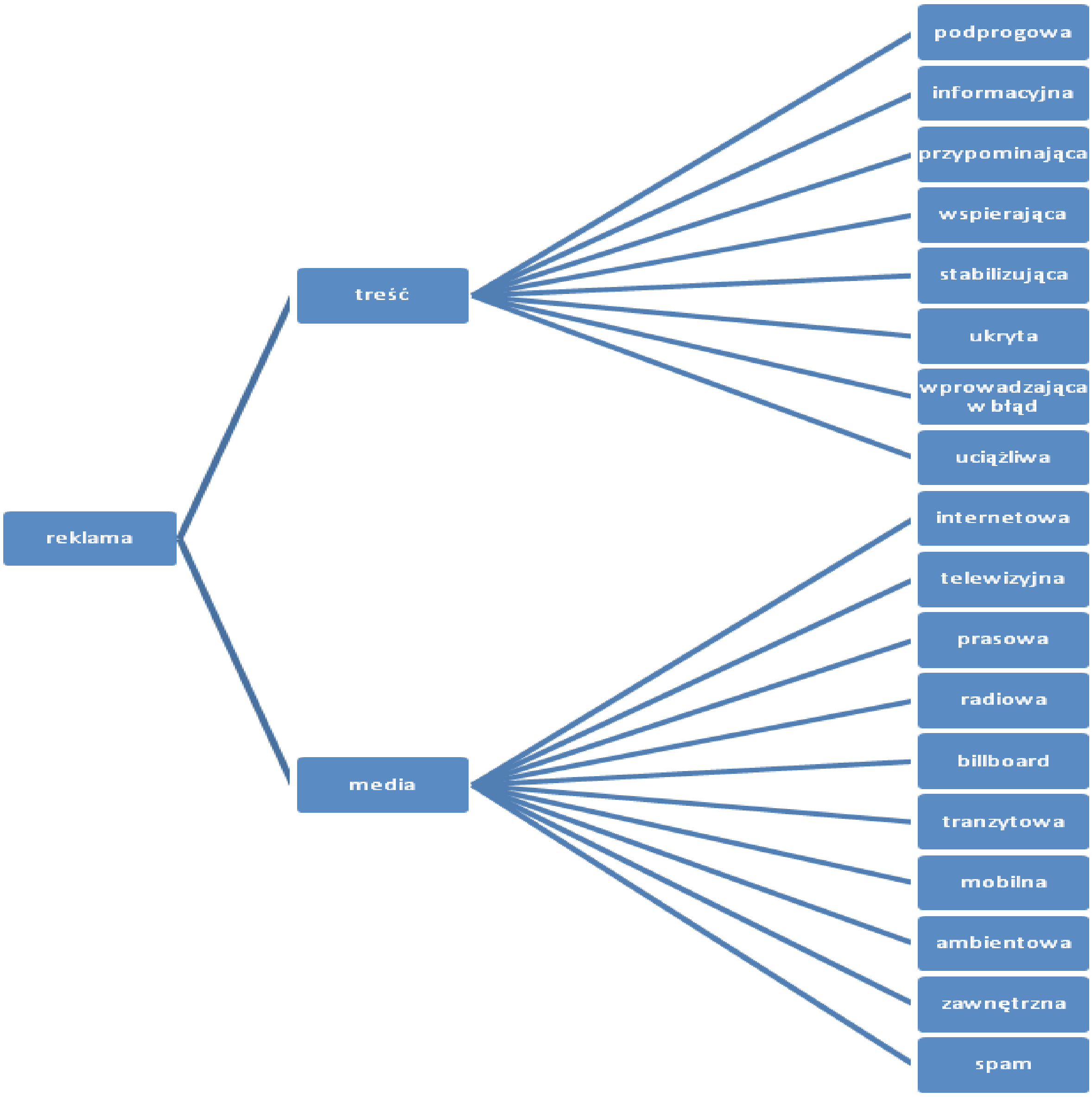
ze względu na treść:

- reklama podprogowa;
- reklama informacyjna;
- reklama przypominająca;
- reklama wspierająca;
- reklama stabilizująca;
- reklama ukryta;
- reklama wprowadzająca w błąd;
- reklama uciążliwa;

ze względu na media:

- reklama internetowa;
- reklama telewizyjna;
- reklama prasowa;
- reklama radiowa;
- billboard (reklama);
- reklama tranzytowa;
- reklama mobilna;
- reklama ambientowa;
- reklama zewnętrzna;
- spam.

115 www.postroniekonsumenta.pl/Podzial_reklam.php, 01.03.2013.



Rys. 23. Podział reklam ze względu na treść i media

Źródło: Opracowanie własne

Wpływ reklam na społeczeństwo

Reklamy oddziaływają na odbiorców w dwojaki sposób: pozytywnie i negatywnie.

Do najważniejszych korzyści płynących z reklamy jest informowanie klientów o danym produkcie, o jego właściwościach. Niewątpliwie ważną korzyścią wynikającą z reklamy jest kształtowanie określonych postaw społecznych. Reklamy są świetnym zastrzykiem pieniędzy dla mediów oraz sponsorem organizowanych imprez. Reklamy mają ogromny wpływ na społeczeństwo, kształtują pozytywne postawy społeczne (np. reklama społeczna).

Reklama może również oddziaływać negatywnie. Głównym zagrożeniem, działaniem niekorzystnym, jest podawanie błędnych, nieprawdziwych informacji lub ich zatajanie. Niekorzystnym zjawiskiem jest również wzbudzanie nadmiernych potrzeb konsumpcyjnych. Ponadto reklamy mogą manipulować dużą grupą społeczeństwa. Najbardziej podatną grupą na wpływ reklam są dzieci. Brak rzetelnych reklam może wywołać obojętność wśród odbiorców, co może mieć fatalne skutki w naszym życiu codziennym.

8.3. Sprzedaż konsumencka

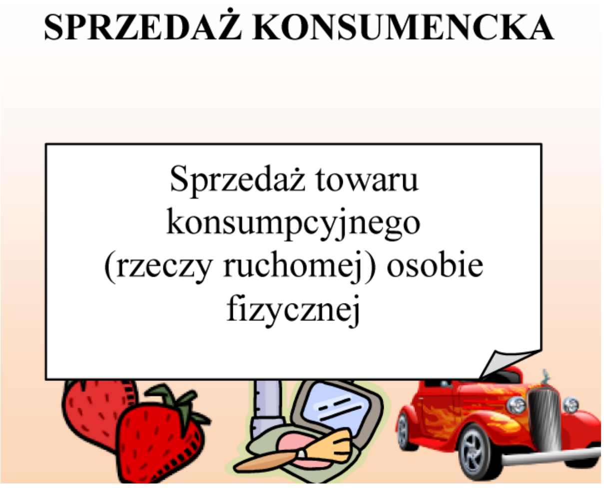
Podstawę prawną zagadnienia związanego ze sprzedażą konsumencką reguluje ustawa o sprzedaży konsumenckiej[116].

Przepisy wyżej wymienionej ustawy mają zastosowanie również do **umów na odległość** (takich jak: zakup towaru przez Internet, z katalogu wysyłkowego) oraz **umów zawartych poza lokalem przedsiębiorstwa**, na przykład za pośrednictwem akwizytora. Regulacje te odnoszą się również do **zakupów w komisie** oraz **umów o dzieło dotyczących rzeczy ruchomych**.

▶ **Sprzedaż konsumencka dotyczy sprzedaży rzeczy ruchomej osobie fizycznej, która nabywa tę rzecz w celu niezwiązanym z działalnością zawodową lub gospodarczą (towar konsumpcyjny).**

Pojęcie sprzedaży konsumenckiej nie dotyczy sprzedaży energii elektrycznej, gazu, wody, nie obejmuje także zakupu mieszkania lub innej nieruchomości. Nie obejmuje również sprzedaży egzekucyjnej i sprzedaży dokonywanej w postępowaniu upadłościowym albo innym postępowaniu sądowym.

▶ **Konsument – osoba fizyczna dokonująca czynności prawnej niezwiązanej bezpośrednio z jej działalnością gospodarczą lub zawodową. Konsumentem jest ten, kto kupuje od przedsiębiorcy (art. 22[1] k. c.)[117].**



NIE DOTYCZY:

sprzedaży energii elektrycznej,

zakupu mieszkania,

Rys. 24. Sprzedaż konsumencka

Źródło: Opracowanie własne

Obowiązki sprzedawcy przy zawieraniu umowy

Sprzedawca obowiązany jest poinformować kupującego o cenie oferowanego towaru konsumpcyjnego oraz cenie jednostkowej (cena za jednostkę miary, np.: kilogram, litr). Przy sprzedaży towaru konsumpcyjnego oferowanego luzem jest wymagane podanie jedynie ceny jednostkowej. Taki sam sposób podawania cen powinien być stosowany w reklamie. Jeżeli sprzedaż towaru odbywa się na raty, na przedpłaty, na zamówienie, według wzoru lub na próbę, sprzedawca jest obowiązany potwierdzić na piśmie wszystkie istotne postanowienia zawartej umowy, gdy cena towaru przekracza kwotę dwóch tysięcy złotych. Gdy kwota zawartych

116 Ustawa z dnia 27 lipca 2002 r. o szczególnych warunkach sprzedaży konsumenckiej oraz zmianie Kodeksu cywilnego, Dz. U. nr 141, poz. 1176, ze zm. – cytowana jako: ustawa o sprzedaży konsumenckiej.

117 Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny, Dz. U. nr 16, poz. 93, ze zm. – cytowana jako: k.c.

transakcji nie przekracza dwóch tysięcy złotych, sprzedawca wydaje na żądanie kupującego pisemne potwierdzenie zawarcia umowy zawierające oznaczenie sprawy, jego adresu, datę sprzedaży, określenie towaru konsumpcyjnego, jego cenę i ilość (art. 2 pkt.1-3 ustawy o sprzedaży konsumenckiej). Sprzedawca również jest zobowiązany udzielić jasnych, zrozumiałych informacji wystarczających do prawidłowego i pełnego korzystania ze sprzedanego towaru konsumpcyjnego. Należy podać: nazwę towaru, określenie producenta lub importera i kraj pochodzenia towaru, znaki bezpieczeństwa i zgodności wymagane przez odrębne przepisy, informacje o dopuszczeniu do obrotu w Rzeczypospolitej Polskiej oraz, stosownie do rodzaju towaru, określenie jego energochłonności. Wskazane informacje powinny znajdować się na towarze konsumpcyjnym lub być z nim trwale połączone. Do obowiązków sprzedawcy należy także zapewnienie w miejscu sprzedaży odpowiednich **warunków techniczno-organizacyjnych umożliwiających dokonanie wyboru** towaru konsumpcyjnego i sprawdzenie jego jakości, kompletności oraz funkcjonowania głównych mechanizmów i podstawowych podzespołów (art. 3 pkt. 3 ustawy o sprzedaży konsumenckiej). Sprzedawca obowiązany jest wydać kupującemu **wraz z towarem konsumpcyjnym wszystkie elementy** jego wyposażenia oraz instrukcje obsługi i konserwacji. Instrukcje powinny być sporządzone w języku polskim lub, o ile rodzaj informacji na to pozwala, w formie graficznej powszechnie zrozumiałej.

Niezgodność towaru konsumpcyjnego z umową

Sprzedawca wobec kupującego odpowiada, jeśli towar konsumpcyjny jest niezgodny z umową w chwili jego wydania. W przypadku stwierdzenia niezgodności przed upływem sześciu miesięcy od wydania towaru domniemywa się, że istniała ona w chwili wydania (art. 4 pkt. 1 ustawy o sprzedaży konsumenckiej). W przypadku indywidualnego uzgadniania właściwości towaru konsumpcyjnego domniemywa się, że jest on zgodny z umową, jeżeli odpowiada podanemu przez sprzedawcę opisowi lub ma cechy okazanej kupującemu próbki albo wzoru (art. 4 pkt. 2 ustawy o sprzedaży konsumenckiej). Uważa się też, że towar jest zgodny w umową, jeżeli nadaje się do celu, do jakiego zwykle jest używany oraz gdy jego właściwości odpowiadają właściwościom cechującym towar tego rodzaju (art. 4 pkt. 3 ustawy o sprzedaży konsumenckiej).

Za niezgodność towaru konsumpcyjnego z umową uważa się także nieprawidłowość w jego zamontowaniu i uruchomieniu, w przypadku gdy czynności te wykonane zostały w ramach umowy sprzedaży (art. 6 ustawy o sprzedaży konsumenckiej).

Sprzedawca nie odpowiada za niezgodność towaru konsumpcyjnego z umową w przypadku:

- gdy kupujący w chwili zawarcia umowy wiedział o tej niezgodności;
- gdy niezgodność wynika z przyczyny tkwiącej w materiale dostarczonym przez kupującego.

W przypadku gdy towar konsumpcyjny jest niezgodny z umową (art. 8 ustawy o sprzedaży konsumenckiej):

- kupujący może żądać doprowadzenia go do stanu zgodnego z umową przez nieodpłatną naprawę albo wymianę na nowy, chyba że naprawa albo wymiana są niemożliwe lub wymagają nadmiernych kosztów. Gdy naprawa jest niemożliwa lub wymaga nadmiernych kosztów sprzedawca wymienia towar na nowy;
- sprzedawca ponosi koszty poniesione przez konsumenta, np.: demontażu, dostarczenia, robocizny, materiałów, ponownego zamontowania i uruchomienia.

Sprzedawca odpowiada za niezgodność towaru z umową jedynie w przypadku jej stwierdzenia przed upływem dwóch lat od wydania towaru kupującemu (art. 10 ustawy o sprzedaży konsumenckiej). W razie wymiany towaru termin biegnie na nowo. W przypadku stwierdzenia niezgodności towaru z umową kupujący ma obowiązek zawiadomić o tym sprzedającego w przeciągu dwóch miesięcy, w przeciwnym razie traci prawo do naprawy lub wymiany na nowy towar.

Gwarancja konsumencka

Udzielenie gwarancji kupującemu następuje bez odrębnej opłaty przez oświadczenie gwaranta. Oświadczenie to zamieszczone jest w dokumencie gwarancyjnym lub reklamie i zawiera obowiązki gwaranta oraz uprawnienia kupującego w przypadku gdy właściwość sprzedanego towaru nie odpowiada właściwości wskazane w tym oświadczeniu. Nie uważa się za gwarancje oświadczenia, które nie kształtuje obowiązków gwaranta (art. 13 pkt.1 ustawy o sprzedaży konsumenckiej). Gwarancję (dokument gwarancyjny) wydaje kupującemu wraz z towarem sprzedawca. Sprzedawca obowiązany jest udzielić kupującemu jasnych, zrozumiałych i niewprowadzających w błąd informacji, wystarczających do prawidłowego i pełnego korzystania ze sprzedanego towaru konsumpcyjnego (art. 3 pkt. 1 ustawy o sprzedaży konsumenckiej).

W dokumencie gwarancyjnym powinny znaleźć się takie informacje, jak:

- nazwa i adres gwaranta lub jego przedstawicielstwa na terenie kraju;
- czas trwania ochrony gwarancyjnej;
- terytorialny zasięg ochrony gwarancyjnej.

Ponadto w dokumencie gwarancyjnym powinno być zawarte stwierdzenie, że gwarancja na sprzedany towar konsumpcyjny nie wyłącza, nie ogranicza ani nie zawiesza uprawnień kupującego wynikających z niezgodności towaru z umową (art. 13 pkt. 4 ustawy o sprzedaży konsumenckiej).

Cechy gwarancji[118]:

- zawsze musi być udzielona na piśmie;
- umowa gwarancyjna zostaje zawarta przez samo przyjęcie dokumentu gwarancyjnego;
- jeśli w gwarancji nie zastrzeżono inaczej, termin jej wynosi 1 rok od dnia, w którym rzecz została kupującemu wydana;
- do dochodzenia roszczeń z tytułu gwarancji nie ma zastosowania jednoroczny termin przedawnienia przewidziany dla roszczeń kupującego z tytułu rękojmi za wady fizyczne rzeczy;
- w przypadku dokonywania naprawy przez gwaranta termin gwarancji ulega przedłużeniu o czas, w ciągu którego konsument nie mógł korzystać z rzeczy;
- termin gwarancji biegnie na nowo, gdy gwarant wymienia rzecz na nową wolną od wad lub dokonuje istotnych napraw;
- jeśli gwarant wymienił część rzeczy, na przykład jakiś podzespołów, wówczas gwarancja biegnie na nowo w stosunku do tej nowej części, a okres gwarancyjny dotyczący całej rzeczy może być krótszy niż w stosunku do wymienionego podzespołu.

Gwarancja a niezgodność towaru konsumpcyjnego z umową

Należy pamiętać – gwarancja nie wyłącza uprawnień kupującego wobec sprzedawcy wynikających z niezgodności towaru z umową. Jeśli na dany towar została udzielona gwarancja, konsument ma prawo wyboru:

- czy będzie dochodził swoich roszczeń w ramach gwarancji;
- czy w ramach niezgodności towaru konsumpcyjnego z umową.

W przypadku gdy konsument wybierze na przykład korzystanie z gwarancji, to korzysta z niej w stosunku do tej jednej, konkretnej usterki. W razie ujawnienia się w zakupionym towarze innej wady ponownie ma prawo wyboru, czy korzystać z uprawnień wynikających z karty gwarancyjnej czy z instytucji niezgodności towaru z umową (z niezgodności towaru z umową można korzystać maksymalnie 2 lata od chwili wydania przez sprzedawcę zakupionego towaru oraz należy poinformować sprzedawcę o defekcie rzeczy w ciągu 2 miesięcy od stwierdzenia niezgodności towaru z umową)[119].

118 www.mfiles.pl/pl/index.php/Gwarancja, 09.03.2013.
119 www.mfiles.pl/pl/index.php/Gwarancja, 09.03.2013.

8.4. Zakupy wirtualne

Sprzedaż na odległość

Ustawa o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny[120] to podstawa prawna regulująca zagadnienia dotyczące umów zawieranych na odległość i poza lokalem przedsiębiorstwa.

Umowy na odległość są to wszelkie umowy zawierane z konsumentem bez jednoczesnej obecności obu stron, przy wykorzystaniu środków porozumiewania się na odległość, w szczególności zaś: drukowanego lub elektronicznego formularza zamówienia niezaadresowanego lub zaadresowanego, listu seryjnego w postaci drukowanej lub elektronicznej, reklamy prasowej z wydrukowanym formularzem zamówienia, reklamy w postaci elektronicznej, katalogu, telefonu, telefaksu, radia, telewizji, automatycznego urządzenia wywołującego, wizjofonu, wideotekstu, poczty elektronicznej lub innych środków komunikacji elektronicznej w rozumieniu ustawy o świadczeniu usług drogą elektroniczną[121] (art. 6 ustawy o ochronie praw konsumentów).

Z **umową zawartą poza lokalem przedsiębiorstwa** mamy do czynienia wtedy, gdy transakcja kupna-sprzedaży **nie odbywa się w miejscu przeznaczonym do obsługiwania klientów i odpowiednio oznaczonym** (zgodnie z przepisami o działalności gospodarczej), na przykład: umowy zawierane na prezentacjach, na ulicy z akwizytorami i przy innych okazjach, gdzie transakcji dokonujemy poza tradycyjnymi miejscami handlu i usług. Ustawa przewiduje, że **umową zawartą poza lokalem przedsiębiorstwa jest zawarcie jej w wyniku zorganizowanego zbierania ofert konsumentów w czasie odwiedzin w pracy, w mieszkaniach lub innych miejscach prywatnego pobytu**.

Przepisów o umowach zawieranych na odległość nie stosuje się do umów (art. 16 ustawy o ochronie praw konsumentów):

- z wykorzystaniem automatów sprzedających;
- z wykorzystaniem innych automatów umieszczonych w miejscach prowadzenia handlu;
- rent;
- zawartych z operatorami telekomunikacji przy wykorzystaniu publicznych automatów telefonicznych;
- dotyczących nieruchomości, z wyjątkiem najmu;
- sprzedaży z licytacji.

Konsument, który zawarł umowę na odległość, może od niej odstąpić bez podania przyczyn, składając stosowne oświadczenie na piśmie w terminie dziesięciu dni (art. 7 ustawy o ochronie praw konsumentów). Termin ten **liczy się od dnia wydania rzeczy**, a gdy **umowa dotyczy świadczenia usługi** – **od dnia jej zawarcia. Konsument ma obowiązek odesłać zakupiony towar**, a przedsiębiorca powinien niezwłocznie (ale nie później niż w ciągu 14 dni od dnia odstąpienia konsumenta od umowy) **zwrócić wpłacone pieniądze**.

Jeżeli strony nie umówiły się inaczej, przedsiębiorca powinien wykonać umowę zawartą na odległość najpóźniej w terminie trzydziestu dni po złożeniu przez konsumenta oświadczenia woli o zawarciu umowy (art. 12 ustawy o ochronie praw konsumentów). Jeżeli przedsiębiorca nie może spełnić świadczenia, ponieważ przedmiot świadczenia nie jest dostępny, powinien niezwłocznie, najpóźniej jednak w terminie trzydziestu dni od zawarcia umowy, zawiadomić o tym konsumenta i zwrócić całą otrzymaną od niego sumę pieniężną.

Konsument powinien być poinformowany, przy użyciu środka porozumiewania się na odległość, najpóźniej w chwili złożenia mu propozycji zawarcia umowy, o (art. 16b ustawy o ochronie praw konsumentów):

- imieniu i nazwisku (nazwie), adresie zamieszkania (siedziby) przedsiębiorcy, organie, który zarejestrował działalność gospodarczą przedsiębiorcy, a także numerze, pod którym przedsiębiorca został zarejestrowany, a w przypadku gdy działalność przedsiębiorcy wymaga uzyskania zezwolenia, danych dotyczących instytucji udzielającej zezwolenia;
- imieniu i nazwisku (nazwie), adresie zamieszkania (siedziby) na obszarze Rzeczypospolitej Polskiej przedstawiciela przedsiębiorcy, o ile taki występuje,
- imieniu i nazwisku (nazwie), adresie zamieszkania (siedziby) podmiotu innego niż przedsiębiorca

120 Ustawa z dnia 2 marca 2000 r. o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny, Dz. U. z 2012 r. poz. 1225 – cytowana jako: ustawa o ochronie praw konsumentów.

121 Ustawa z dnia 18 lipca 2002 r. o świadczeniu usług drogą elektroniczną, Dz. U. nr 144, poz. 1204, ze zm.

świadczący usługi finansowe na odległość, w tym operatora środków porozumiewania się na odległość, oraz charakterze, w jakim podmiot ten występuje wobec konsumenta;
- istotnych właściwościach świadczenia i jego przedmiotu;
- cenie lub wynagrodzeniu obejmujących wszystkie ich składniki, w tym opłaty i podatki, a w przypadku niemożności określenia dokładnej ceny, podstawie obliczenia ceny umożliwiającej konsumentowi dokonanie jej weryfikacji;
- ryzyku związanym z usługą finansową, jeżeli wynika ono z jej szczególnych cech lub charakteru czynności, które mają być wykonane, lub jeżeli cena bądź wynagrodzenie zależą wyłącznie od ruchu cen na rynku finansowym;
- zasadach zapłaty ceny lub wynagrodzenia;
- kosztach oraz terminie i sposobie świadczenia usługi;
- prawie oraz sposobie odstąpienia od umowy albo wskazaniu, że prawo takie nie przysługuje;
- dodatkowych kosztach ponoszonych przez konsumenta wynikających z korzystania ze środków porozumiewania się na odległość, jeżeli mogą one wystąpić;
- terminie, w jakim oferta lub informacja o cenie albo wynagrodzeniu mają charakter wiążący;
- minimalnym okresie, na jaki ma być zawarta umowa o świadczenia ciągłe lub okresowe;
- miejscu i sposobie składania reklamacji;
- możliwości pozasądowego rozstrzygania sporów wynikających z umowy;
- prawie wypowiedzenia umowy.

Bezpieczne kupowanie w Internecie

Robiąc zakupy za pośrednictwem Internetu, zwróć uwagę na podstawowe kwestie[122] [123]. Pamiętaj o:
- wyborze sklepu internetowego;
- korzystaj z ofert renomowanych sklepów, sprawdzonych portali;
- sprawdź dane adresowe sklepu;
- poufności przesyłanych danych, zwracaj uwagę, czy w regulaminie sklepu internetowego przestrzegane są zasady ochrony danych;
- nie kupuj w sieci, korzystając z komputera stojącego w kafejce internetowej;
- zabezpieczeniu komputera, z którego dokonywane są transakcje kupna – komputer powinien posiadać aktualizowane zabezpieczenia antywirusowe, zapory sieciowe,
- dokładnym zapoznaniu się z regulaminem sklepu internetowego; szczególną uwagę zwróć na zagadnienia związane z płatnościami, terminem dostaw, możliwością zwrotu i reklamacją towaru.
- statusie agenta rozliczeniowego, tzn. jaki podmiot obsługuje płatności za towary i usługi;
- gdy kupujesz na aukcji internetowej, przeczytaj komentarze o sprzedającym (brak komentarzy pozytywnych lub ich niewielka liczba powinny wzbudzić Twoją szczególną czujność);
- otrzymując ofertę e-mailem, nie korzystaj z linków, na stronę sklepu wejdź, wpisując adres w oknie przeglądarki, unikniesz w ten sposób stron podszywających się pod legalnie działające sklepy;
- zamawiając sprzęt, zapytaj, czy sprzedawca dołącza oryginalne oprogramowanie na płytach i instrukcję obsługi;
- kupując telefon komórkowy, zapytaj o ładowarkę i dowód zakupu, telefony kradzione sprzedawane są bez ładowarki i „dokumentacji";
- jeśli, mimo zachowania zasad ostrożności, zamiast zamówionego produktu dostaniesz puste pudełko, zadzwoń natychmiast na policję (wówczas zapisana korespondencja i przesłana przez oszusta paczka będą dowodem przestępstwa).

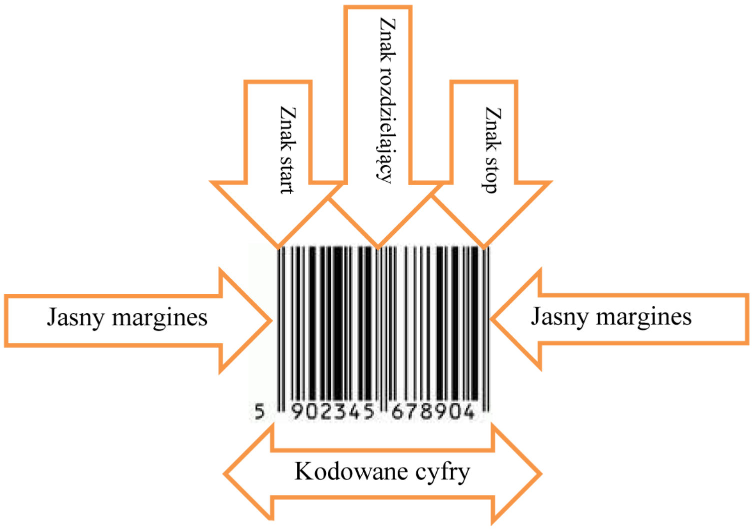
122 www.ecard.pl, 01.03.2013.
123 www.policja.pl/portal/pol/42/8282/Jak_bezpiecznie_kupowac_w_sieci.html, 01.03.2013.

Zasady bezpiecznego kupowania w Internecie przedstawia poniższy rysunek.

Rys. 25. Zasady bezpiecznego kupowania w Internecie

Źródło: Opracowanie własne

Niezamówiona przesyłka



Komu z nas nie przydarzyła się podobna „przygoda", mianowicie: zaglądamy do skrzynki pocztowej i znajdujemy przesyłkę zaadresowaną do nas, której nie zamawialiśmy. Dodatkowo otrzymujemy informację o konieczności zapłaty za dostarczoną rzecz lub odesłanie jej firmie na własny koszt. Jak powinniśmy postąpić w takiej sytuacji? W momencie, gdy jesteśmy pewni, że przesyłka nie została przez nas zamówiona, nie mamy żadnych obowiązków. Nie musimy płacić ani też zwracać przesyłki pod wskazany adres, ani też zawiadamiać przedsiębiorcy o błędnej przesyłce. Bez znaczenia jest też fakt, czy pokwitowaliśmy odbiór przesyłki czy nie. Żądanie od przedsiębiorcy zapłaty za przesyłkę, której nie zamawialiśmy, jest niezgodne z prawem i nieuczciwą praktyką rynkową. Zapis informujący o tym, że przyjęcie przesyłki jest równoznaczne z zawarciem umowy, jest bezprawny, nie rodzi żadnych skutków prawnych. Dodatkowo stosowanie takiego zapisu jest naruszeniem prawa, tj. zbiorowych interesów konsumentów, za które przedsiębiorca może zostać ukarany karą pieniężną. Art. 15 ustawy o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny informuje nas, że spełnienie świadczenia niezamówionego przez konsumenta następuje na ryzyko przedsiębiorcy i nie nakłada na konsumenta żadnych zobowiązań.

Reklamacja

Reklamacja to kierowane do sprzedawcy lub wykonawcy usługi niezadowolenie klienta z produktu lub usługi (J. Barlow i C. Moller, 2003). Jest to roszczenie klienta do naprawy, wymiany towaru, poprawy jakości usługi, obniżenia ceny, jak również zwrotu poniesionych kosztów związanych z zakupem towaru.

Reklamacja może być zarówno złożona w **formie** pisemnej, telefonicznej, ustnej, jak i poprzez e-mail.

Podstawowe dane, które powinna zawierać reklamacja to:

- data zgłoszenia;
- określenie sprzedawcy – imię nazwisko sprzedawcy, nazwa firmy, firma przedsiębiorcy lub adres sklepu;
- określenie kupującego – imię nazwisko, dane kontaktowe: adres, telefon;
- określenie reklamowanego towaru;
- data wskazująca kiedy towar został zakupiony;
- data wskazująca kiedy konsument zauważył wadę;
- opis niezgodności – krótki opis usterek, czyli wyjaśnienie, na czym polega niezgodność towaru z umową;
- roszczenia – należy określić swoje żądanie (naprawa towaru, wymiana na nowy, zwrot pieniędzy);
- należy także dołączyć kopię paragonu, jako dowodu zakupu.

Reklamacja wadliwej, uszkodzonej w transporcie paczki

eklamację taką można składać w każdym urzędzie pocztowym na terenie kraju lub w placówce firmy kurierskiej. Jeśli jednak zależy nam na jak najszybszej odpowiedzi, najlepiej reklamację składać w urzędzie pocztowym, w którym paczka została nadana lub w placówce, która paczkę wydała[124].

Reklamacja i gwarancja to nie to samo, nie są nawet ze sobą połączone, tzn. nie posiadając gwarancji, mamy prawo reklamować towar. Reklamacja to zwrócenie się do dostawcy, producenta, wykonawcy usługi w sprawie ujawnionych wad towaru, niedokładności w dostawie, w rachunku, w wykonaniu usługi itp. z żądaniem naprawienia szkód. Prawo do reklamacji jest regulowane prawnie. Każdy konsument ma prawo złożyć reklamację, a sprzedawca ma obowiązek ją przyjąć. Z kolei gwarancja to zobowiązanie producenta do bezpłatnej naprawy lub wymiany wyrobu na inny, w razie gdyby w określonym czasie ujawniły się w nim jakieś wady. Gwarancja jest zupełnie dobrowolna, zarówno po stronie producenta, który jej udziela oraz konsumenta, który może jej warunki przyjąć bądź odrzucić. W przypadku reklamacji towar jest naprawiany bądź wymieniany tylko raz, przy kolejnej reklamacji konsument otrzymuje zwrot gotówki[125].

Sprzedawca w terminie 14 dni (kalendarzowych)

ma obowiązek udzielić odpowiedzi na reklamację klienta.

Brak odpowiedzi w przeciągu 14 dni oznacza uznanie przez sprzedającego roszczeń klienta.

124 www.prawa-konsumenta.wieszjak.pl/konsument-w-sieci/250103, Zakupy-w-Internecie-reklamacja-uszkodzonej-paczki.html
125 www.reklamacjeizwroty.info/reklamacja-a-gwarancja

8.5. Oznakowanie produktów

Produkty, które są przedmiotem wymiany, sprzedaży powinny być odpowiednio oznakowane. Na etykietach produktów zamieszczane są różne ikonki, znaki, nośniki niezbędnych informacji, które świadczą o jakości, przeznaczeniu i zastosowaniu towaru. Znaki umieszczane na opakowaniach, etykietach są przedstawione w postaci napisu, litery, cyfry, rysunku. Dostarczane w ten sposób informacje ułatwiają klientom podjęcie świadomej decyzji zakupowej oraz zapewniają właściwe korzystanie z produktu. Prawidłowe oznakowanie produktu jest jednym z podstawowych elementów zapewniających bezpieczeństwo użycia, stosowania i wykorzystania produktu. Obowiązek zamieszczania informacji o produkcie regulują zarówno rozporządzenia Unii Europejskiej, jak i krajowe akty prawne. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO – International Organization for Standardization) wydała zalecenia dotyczące stosowania rysunkowych (piktograficznych) oznaczeń towarów[126].

126 www.iso.org/iso/home.html, 07.05.2013.

Oznakowanie produktów:

- musi być zrozumiałe dla klienta;
- musi być wyraziste, czytelne, nieusuwalne, umieszczone w widocznym na opakowaniu miejscu;
- nie może wprowadzać w błąd, np.: nazwa rodzaj, skład, ilość, trwałość, miejsce produkcji;
- nie może informować, że produkt posiada szczególne inne właściwości, jeśli wszystkie produkty posiadają takie właściwości na przykład
- nie może przypisywać produktowi właściwości leczniczych (jeśli oferowany produkt nie jest lekiem).

W zakresie oznakowania opakowań jednostkowych i transportowych z zawartością w Polsce obowiązują normy: PN-90/O-79251 i PN-85/O-79252. Zgodnie z nimi znaki dzielą się na: zasadnicze, informacyjne, niebezpieczeństwa i manipulacyjne. Dodatkowo na opakowaniach jednostkowych mogą być umieszczone znaki reklamowe.

Na znak zasadniczy składa się nazwa towaru i znak firmowy (logo). Znak towarowy pozwala zidentyfikować pochodzenie produktu w grupie wyrobów pokrewnych. Czasem właściciel znaku towarowego udziela cesji (licencji, franchisingu) na używanie tego znaku. Jest swoistą reklamą, oznakowaniem jakości, wywołuje pozytywne skojarzenia z określoną grupą produktów tego samego producenta.

Oznaczanie za pomocą Kodu Kreskowego

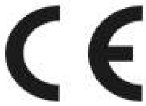
Kod kreskowy to kombinacja równolegle ułożonych, jasnych i ciemnych linii, o różnych szerokościach, odzwierciedlających w usystematyzowany sposób ciąg określonych znaków. Kody kreskowe należy zdefiniować jako specjalny, graficzny obraz znaków czytelnych wzrokowo. Międzynarodowy kod kreskowy EAN to system identyfikacji towaru, za pomocą symboli automatycznie i jednoznacznie odczytywanych.

Rys. 26. Przykład kodu kreskowego

Źródło:www.google.pl/search?q=kod+kreskowy&hl=pl&client=firefo

Pierwsze trzy cyfry kodu kreskowego to prefiks, oznacza on numer organizacji krajowej przyznającej numery producentowi. Polska na przykład ma prefiks 590.

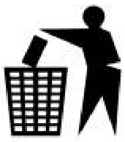
Poniżej przedstawiono przykłady znaków umieszczanych na etykietach produktów.



Wyrób zgodny z normami Unii Europejskiej, znak CE świadczy, że produkt został wykonany zgodnie ze wszystkimi wymogami.

Znak królika informuje klienta, że ani produkt, ani jego składniki nie były testowane na zwierzętach. Produkty, które nie była testowane na zwierzętach, mogą być również oznakowane napisami *Not Tested on Animals* (nietestowane na zwierzętach) czy *Animal Friendly* (przyjazne zwierzętom).

Symbol recyclingu – znak ten zamieszczany jest na opakowaniu, które podlega ponownemu wykorzystaniu. Umieszcza się je na opakowaniach z tworzyw sztucznych bądź aluminium. Cyfra i napis, które towarzyszyć mogą symbolowi, oznaczają nazwę surowca użytego do produkcji opakowania.



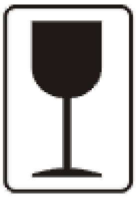
Dbaj o czystość – znak informuje o tym, że dany produkt należy wrzucić do kosza, nie zaśmiecać środowiska naturalnego i w ten sposób dbać o czystość swojego otoczenia. Znak występuje często na opakowaniach obok symbolu recyclingu.

Bezpieczny dla ozonu – produkty w ten sposób oznakowane są bezpieczne dla powłoki ozonowej, tzn. nie zawierają freonów. Znak ten może być zastępowany przez napisy: ZONE FRIENDLY, OZON FREUNDLICH, ohne FCKW, CFC free.

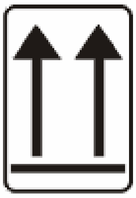
Zielony punkt – informuje, że producent wyrobu opłacił odzyskanie materiału, z którego wykonano opakowanie, zlecając to specjalistycznej firmie.

Symbol informuje, że towar nie jest przeznaczony dla dzieci poniżej 3 lat.

Materiał łatwopalny – symbol informuje, że nie wolno zbliżać produktu do ognia ani go ogrzewać. Występuje na opakowaniach dezodorantów i innych produktów w aerozolu.

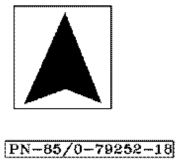


Ostrożnie, kruche



Góra, nie przewracać.

Chronić przed wilgocią.



Tu otwierać.

Ostrożnie, trucizna.

Eko znaki

OFICJALNY ZNAK EKOLOGICZNY W POLSCE – ZNAK EKO, **przyznawany przez Polskie Centrum Badań i Certyfikacji** dla produktów przemysłowych. Znak EKO przyznaje się produktom, które nie powodują negatywnych skutków dla środowiska naturalnego oraz spełniają szereg kryteriów odnoszących się do ochrony zdrowia, środowiska oraz ekonomicznego wykorzystania zasobów.

Błękitny Anioł (Der Blaue Engel). Dotyczy 4 000 różnorodnych wyrobów, począwszy od lodówek, opon, butelek zwrotnych, po wyroby papierowe i towary podlegające powtórnemu przetworzeniu.

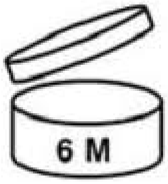
ECOLABEL – Margerytka, Stokrotka (The Flower). Znak nadawany produktom spełniającym wymagania uzgodnione przez państwa członkowskie Unii Europejskiej. Otrzymanie tego znaku jest równoznaczne ze spełnianiem najostrzejszych norm środowiskowych. Ecolabel przyznaje się w 24 kategoriach, do których między innymi należą: sprzęt AGD, detergenty, tekstylia oraz papier.

Ekoland®. Znak informujący, że gospodarstwo rolne, w którym został wytworzony produkt otrzymało atest Polskiego Stowarzyszenia Producentów Żywności Metodami Ekologicznymi.

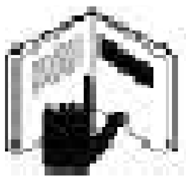
Energy Star. Oznaczenie gwarantujące, że urządzenia pozostawione w stanie spoczynku zużywają minimalną ilość energii.

Uczciwy handel (Fair Trade). Znak oceniający podłoże społeczne i etyczne produkcji towarów pochodzących z krajów ubogich. Oprócz środowiska ochroną objęci są robotnicy. Oznaczenie obejmuje produkcję kawy, herbaty, soku pomarańczowego, kakao, miodu, bananów, czekolady itp.

Znak B. Znak stwierdzający, że dany produkt, używany zgodnie z jego przeznaczeniem i zasadami określonymi przez producenta, nie stanowi zagrożenia dla życia, mienia i środowiska użytkownika. Znak zastrzeżony dla Polskiego Centrum Badań Certyfikacji.



Symbol PAO (Period After Opening) – jest to jeden z symboli obowiązkowych, symbol otwartego słoiczka z cyfrą informuje o okresie trwałości i przydatności produktu do bezpiecznego użytku po jego otwarciu.



Ręka na książce – symbol ten informuje, że na ulotce dołączonej do produktu kosmetycznego producent zawarł ważne informacje. Dotyczą składu produktu, sposobu użycia oraz ostrzeżenia związane z jego stosowaniem.

8.6. Instytucje ochrony praw konsumentów

Pierwsze instytucje powołane do ochrony interesów konsumentów powstały w drugiej połowie XIX w. Pierwszym aktem prawnym chroniącym interesy konsumenta była ustawa o czystości żywności i lekarstw uchwalona w USA w 1902 roku, a pierwszą organizacją konsumencką – powstała w Nowym Jorku Liga Konsumentów. W Europie pod koniec XIX w. nastąpił w rozwój organizacji ochrony konsumentów. Pierwsze organizacje ochrony konsumentów powstawały na bazie ruchu spółdzielczego w Wielkiej Brytanii, Francji, Skandynawii.

▶ **15 marca – ŚWIATOWY DZIEŃ KONSUMENTA**

15 marca 1962 roku J. F. Kennedy dostrzegł konsumentów jako społecznie rozproszoną, pozbawioną możliwości ochrony publicznej grupę. Współczesny wymiar ochronie konsumentów nadało posłanie przekazane przez Prezydenta Stanów Zjednoczonych Ameryki J. F. Kennedy'ego do Kongresu. W 1985 roku na Sesji Zgromadzenia Ogólnego Organizacji Narodów Zjednoczonych przyjęto Rezolucję w sprawie ochrony interesów konsumentów. Traktat o Wspólnotach Europejskich wskazuje na istotę ochrony konsumentów na rynku unijnym i wspierania interesów konsumentów oraz zagwarantowanie wysokiego poziomu konsumpcji. Wypracowano **10 podstawowych zasad ochrony konsumentów w Unii Europejskiej**[127]:

1) konsumenci mają możliwość zakupu artykułów według własnego uznania i w wybranym przez siebie miejscu;
2) konsumenci mają prawo do zwrotu niesprawnych artykułów;
3) konsumentów chronią wysokie normy bezpieczeństwa żywności i innych towarów konsumpcyjnych;
4) konsumenci mają prawo wiedzieć, co spożywają;

127 www.towarzystwo-lexus.pl/swiatowy_dzien_konsumenta.html

5) konsumentom należy zapewnić uczciwe warunki umów;
6) konsumenci mają prawo do zmiany zdania;
7) konsumentom należy ułatwiać porównanie cen;
8) konsumenci nie mogą być wprowadzeni w błąd;,
9) konsumentom należy zapewnić ochronę podczas urlopu;
10) konsumentom należy zapewnić pomoc w skutecznym rozstrzyganiu sporów trans granicznych – instytucjonalnie ochrona konsumentów w Polsce jest zadaniem wielu podmiotów.

W tabeli zamieszczono przydatne adresy instytucji ochrony praw konsumenta.

Tabela. 43. Dane adresowe instytucji ochrony konsumenta

Nazwa	Adres
Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów (UOKiK)	Pl. Powstańców Warszawy 1 00-950 Warszawa tel.: 0 22 55 60 800 e-mail: uokik@uokik.gov.pl www.uokik.gov.pl
Inspekcja Handlowa	Pl. Powstańców Warszawy 1 00-050 Warszawa tel.: 0 22 826 23 30 fax: 022 827 22 89 e-mail: sekretariat@giih.gov.plwww.giih.gov.pl
Federacja Konsumentów	Pl. Powstańców Warszawy 1 00-030 Warszawa tel.: 0 22 827 11 73 fax: 0 22 827 90 59 e-mail: sekretariat@federacja-konsumentow.org.pl www.federacja-konsumentow.org.pl
Stowarzyszenie Konsumentów Polskich	ul. Gizów 6 01-249 Warszawa tel.: 0 22 634 0668 fax: 0 22 634 0667 e-mail: sekretariat@skp.pl http://www.konsumenci.org/
Europejskie Centrum Konsumenckie	Pl. Powstańców Warszawy 1 00-950 Warszawa tel.: 0 22 556 01 18, 0 22 556 01 14 fax: 0 22 55 60 359 e-mail: info@konsument.gov.pl

Źródło: Opracowanie własne

Rzecznik konsumentów

Do Rzecznika Konsumentów (Powiatowego, Miejskiego) zwracamy się po poradę, gdy chcemy się dowiedzieć:
- czy postąpiono wobec nas (konsumentów) nieuczciwie;
- o przysługujących nam prawach;
- co możemy dalej zrobić.

Do podstawowych obowiązków Rzecznika należy udzielenie bezpłatnej porady konsumenckiej oraz informacji prawnej w zakresie ochrony interesów konsumentów. Rzecznik wykonuje zadania w zakresie ochrony interesów konsumentów, jest naszym obrońcą. Może w naszym imieniu wysyłać monity mające na celu korzystne załatwienie sprawy. W Polsce obecnie działa 369 rzeczników, którzy wspierają nas w rozwiązywaniu konfliktów. Adresy i kontakty Rzeczników Powiatowych (Miejskich) można znaleźć na stronie www.uokik.gov.pl.

Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów

Jeżeli zauważymy problem, który dotyczyć może wielu konsumentów, możemy złożyć zawiadomienie do UOKiK. Urząd, jeśli uzna za zasadne, wszczyna postępowanie, w wyniku którego podejmuje decyzje, na przykład o nakazaniu postępowania zgodnego z prawem, o nałożeniu kary pieniężnej. Nie każde zawiadomienie zobowiązuje UOKiK do wszczęcia postępowania. Niemniej jednak jest to cenny sygnał o występujących nieprawidłowościach na rynku.

Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów (podstawa prawna: Ustawa o ochronie konkurencji i konsumentów[128]) powstał w 1990 roku jako Urząd Antymonopolowy. Jest centralnym organem administracji rządowej. Powołany zostały do ochrony interesów, praw konsumentów, a także ochrony konkurencji. W skład UOKiK wchodzi centrala (z siedzibą w Warszawie) i 9 delegatur (Bydgoszcz, Gdańsk, Katowice, Kraków, Lublin, Łódź, Poznań, Warszawa, Wrocław). UOKiK działa dla dobra wszystkich konsumentów. Do tej instytucji należy się zwrócić, złożyć zawiadomienie, gdy został naruszony zbiorowy interes konsumentów, na przykład: reklama wprowadzająca w błąd, ukryte wady produktu, nieprawidłowe oznakowanie produktu. Należy pamiętać, że nie każde zawiadomienie zobowiązuje do wszczęcia postępowania. Czasem może być tylko cenną informacją o występujących nieprawidłowościach występujących na rynku.

Inspekcja handlowa

Inspekcja Handlowa powołana została do ochrony interesów konsumentów oraz interesów gospodarczych państwa. Podlega Prezesowi UOKiK.

Do zadań Inspekcji należy:

- kontrola legalności i rzetelności działania przedsiębiorstw;
- kontrola produktów i usług wprowadzonych do obrotu;
- kontrola jakości i bezpieczeństwa towarów i usług, przede wszystkim zagrażających życiu lub zdrowiu konsumentów;
- podejmowanie kontroli, mediacji i wszelkich działań interwencyjnych mających na celu ochronę indywidualnych interesów i praw konsumentów.

Do zadań Inspekcji należy również zaliczyć prowadzenie Polubownych Sądów Konsumenckich. Do sądu konsumenckiego można kierować sprawy niezależnie od wartości przedmiotu sporu, a wyroki, jak i ugoda przed nim zawarta, mają taką samą moc, jak wyroki sądów powszechnych.

Organizacje konsumenckie

Federacja Konsumentów to niezależna organizacja pozarządowa. Zarejestrowana została 7 lipca 1981 roku, od roku 2004 jest organizacją pożytku publicznego. Do zadań federacji należy zaliczyć: ochronę indywidualnego konsumenta, bezpłatne poradnictwo i pomoc prawną. Zajmuje się również edukacją konsumencką, lobbingiem na rzecz konsumentów, testami produktów. Federacja bierze czynny udział w konsultacjach społecznych dotyczących wszystkich obszarów rynku, m.in.: ubezpieczeniowego, finansowego, elektro-

128 Ustawa z dnia 16 lutego 2007 r. o ochronie konkurencji i konsumentów, Dz. U. nr 50 poz. 331, ze zm.

nicznego, telekomunikacyjnego. Jest organizacją działającą na arenie międzynarodowej poprzez działania w konsultacjach europejskich, na przykład: w sprawie nowelizacji Rozporządzenia roamingowego, w pracach BEUC nad projektem European Contract Law, w corocznym przeglądzie implementacji prawa telekomunikacyjnego. Adresy i telefony wszystkich 48 biur federacji, a także szczegółowe informacje, można uzyskać na ich stronach internetowych.[129]

Stowarzyszenie Konsumentów Polskich (SKP) utworzone zostało w 1995 roku, to niezależna, pozarządowa organizacja konsumencka. Każdy konsument poprzez Konsumenckie Centrum E-porad[130] może skorzystać z bezpłatnej porady prawnej. Stowarzyszenie organizuje Targi Wiedzy Konsumenckiej[131], których głównym celem jest edukacja konsumencka. Targi umożliwiają prezentację stosowanych praktyk pro-konsumenckich wykorzystywanych w poszczególnych firmach i stowarzyszeniach. W ramach współpracy ze szkołami i organizacjami konsumenckimi tworzone i opracowywane są programy edukacji konsumenckiej. Szczegółowe informacje na temat działalności Stowarzyszenia Konsumentów Polskich można znaleźć na stronie: www.skp.pl.

Europejskie Centrum Konsumenckie

Europejskie Centrum Konsumenckie zostało powołane na mocy porozumienia Komisji Europejskiej z Urzędem Ochrony Konkurencji i Konsumentów (UOKiK) w styczniu 2005 roku. Europejskie Centrum Konsumenckie należy do Sieci Europejskich Centrów Konsumenckich. Do zadań ECK należy informowanie konsumentów o możliwościach jednolitego rynku UE, rozpowszechnianie informacji o systemie ochrony konsumentów na wspólnym rynku europejskim oraz pomoc w polubownym rozwiązywaniu problemów konsumenckich związanych z transakcjami międzynarodowymi, dostarczanie informacji na temat krajowego i unijnego prawodawstwa i orzecznictwa, dostarczanie analiz porównawczych w zakresie cen, legislacji i innych ważnych dla konsumentów kwestii.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Czym dla Was jest reklama?
2. Jakie znacie rodzaje reklam?
3. Jaka reklama utkwiła Wam w pamięci, dlaczego?
4. Jaki wpływ na społeczeństwo odgrywa reklama?
5. Prawa konsumentów związane z gwarancją.
6. Czy znacie jakieś instytucje zajmujące się ochroną praw konsumentów?

129 www.federacja-konsumentow.org.pl
130 www.e.porady.konsumenci.org
131 www.targiwiedzykonsumenckiej.pl

Bibliografia:

Barlow J., Moller C., *Reklamacja czyli prezent. Strategia korzystania z informacji od klienta,* Warszawa 2003.

Grzybczyk K., *Prawo reklamy*, Warszawa 2008.

Kall J., *Reklama*, Warszawa 1994.

Kotler P., *Marketing. Analiza, planowanie, wdrożenie i kontrola*, Warszawa 1994.

Łodziana-Grabowska J., *Efektywność reklamy*, Warszawa 1996.

Akty prawne:

Ustawa z dnia 2 marca 2000 r. o ochronie niektórych praw konsumentów oraz o odpowiedzialności za szkodę wyrządzoną przez produkt niebezpieczny, Dz. U. z 2012 r. poz. 1225.

Ustawa z dnia 16 lutego 2007 r. o ochronie konkurencji i konsumentów, Dz. U. nr 50, poz. 331, ze zm.

Ustawa z dnia 27 lipca 2002 r. o szczególnych warunkach sprzedaży konsumenckiej oraz zmianie Kodeksu cywilnego, Dz. U. nr 141, poz.1176, ze. zm.)

Netografia:

www.ecard.pl, 01.03.2013.

www.towarzystwo-lexus.pl/swiatowy_dzien_konsumenta.html, 09.03.1013.

www.mfiles.pl/pl/index.php/Model_AIDA. 06.03.2013.

www.abckonsumenta.pl, 07.03.2013.

www.prawo.egospodarka.pl, 07.03.2013.

www.federacja-konsumentow.org.pl, 09.03.2013.

www.e.porady.konsumenci.org, 09.03.2013.

www.targiwiedzykonsumenckiej.pl, 09.03.2013.

www.policja.pl/portal/pol/42/8282/Jak_bezpiecznie_kupowac_w_sieci.html, 01.03.2013.

www.google.pl/search?q=kod+kreskowy&hl=pl&client=firefox-a&hs=ctr&rls=org.mozilla:pl:official&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=y59FUceTGIWttAaVxoCYDw&ved=0CDYQsAQ&biw=1366&bih=667#imgrc=5uwh_jZSjwl_SM%3A%3BVTylmgRIvuZLCM%3Bhttp%253A%252F%252Fforum.nysa.pl%252Ffiles%252Fkod_kreskowy_156.gif%3Bhttp%253A%252F%252Fforum.nysa.pl%252Fviewtopic.php%253Fp%253D51858%3B186%3B137, 01.03.2013.

www.postroniekonsumenta.pl/Podzial_reklam.php, 01.03.2013.

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. III

Informatyka

Podręcznik dla nauczyciela – liceum i technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drodzy Nauczyciele,

Oddaję w Państwa ręce podręcznik do *Informatyki*, będący cegiełką w większym opracowaniu, tworzonym przez interdyscyplinarny zespół ekspertów. Proponowane opracowanie adresowane jest do nauczycieli liceów ogólnokształcących i techników.

Choć przedstawiany podręcznik został napisany w oparciu o nową podstawę programową kształcenia ogólnego, a także treści poza nią wykraczające, korzysta przede wszystkim z bogatej praktyki obcowania Autora ze sprzętem i oprogramowaniem komputerowym. Jest to zbieżne z opartym na doświadczeniu charakterem nauki, jaką w znacznym stopniu jest informatyka. Tak jak nie da się uprawiać zawodu inżyniera-projektanta w oderwaniu od rzeczywistości, tak jak nawet najlepszy wykładowca kursu prawa jazdy nie zastąpi jazd próbnych, tak mija się z celem teoretyczna nauka obsługi komputera i programów bez równoległego spędzania czasu przed monitorem oraz praktycznych eksperymentów. Nie da się od komputera uciec, to narzędzie w dzisiejszych czasach towarzyszy każdemu bez wyjątku. Więcej, coraz szerszy zakres swojej aktywności człowiek przenosi się platformę wirtualną i rezygnuje z jej formy papierowej, względnie innej materialnej. Nie dość tego, musimy pamiętać, że nasze komputery od dawna przestały być samotną, anonimową wyspą, funkcjonują wraz ze swoimi operatorami w równoległym, alternatywnym świecie, z własną formą demokracji, z własnym kodeksem praw i obowiązków.

Nauczyciel, jako przewodnik młodego człowieka, razem z nim musi funkcjonować w tej rzeczywistości, oferować mu wiedzę pochodzącą zarówno z przeszłości, jak i współczesną, a wszystko to musi opakować w formę odpowiadającą kanałom komunikacji młodzieży, wykorzystywać warsztat spójny z ich urządzeniami, a nawet gadżetami zdobywającymi wśród nich szeroką popularność. Nie da się ani zatrzymać rozwoju metod przekazu, ani tym bardziej cofnąć do zanikających metod tradycyjnych.

Podręcznik ten nie ma zamiaru być kompletną encyklopedią wiedzy z zakresu informatyki, stara się jedynie uchwycić aktualną rzeczywistość świata cyfrowego i technik segmentu ICT. Bliżej mu do drogowskazu ukierunkowującego nauczyciela, do porządkowania tematów, które warto byłoby poruszyć na lekcji. Nie wyczerpuje całości wiedzy w żadnym z zakresów zagadnień, gdyż nawet próba dążenia do kompletności kończy się zejściem na poziom szczegółowy, a im bardziej takim się staje, tym łatwiej się dewaluuje i szybciej dezaktualizuje w obliczu ogromnego tempa zmian.

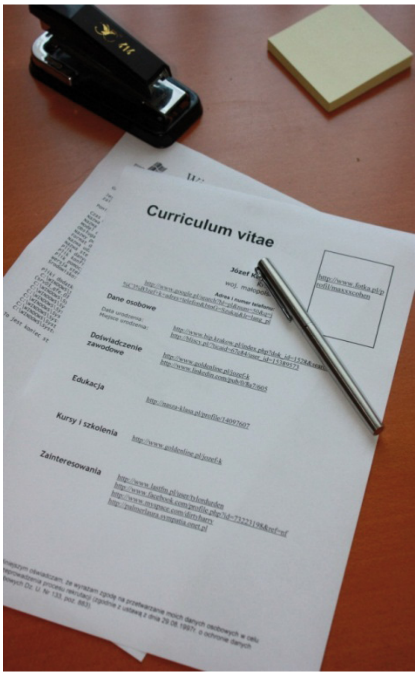
Rolą niniejszego podręcznika jest raczej uchwycenie pewnego, aktualnego na ten moment, stanu wiedzy komputerowej, w granicach wyznaczonych przez podstawę programową, a momentami – wykraczający poza nią.

Autor ma też nadzieję, że da on natchnienie przewodnikowi ludzi młodych do poszerzania jego treści o własne doświadczenia i wiedzę pochodzącą z wielu źródeł.

1. Komputer moim narzędziem pracy

Druga połowa XX w. była świadkiem rewolucji w koncepcji najistotniejszego czynnika supremacji w świecie. Od czasów starożytnych aż po rewolucję przemysłową w XIX w. główne źródło przewagi nad innymi narodami stanowiła wiedza i budowana w oparciu o nią potęga militarna, gospodarcza i kulturalna. Model ten utrzymywał się przez wieki, aż do lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, i wyparty został przez koncepcję społeczeństwa informacyjnego. Jak do tego doszło?

W 1969 roku powstała pierwsza rozproszona sieć komputerowa – ARPANET. Następnie w latach 1982-1983 pojawił się drugi podstawowy filar Internetu – system DNS, wiążący numery IP komputerów z hierarchicznie budowanymi nazwami domen internetowych. Wraz z nim stworzono dwa protokoły o połączonej nazwie TCP/IP[1].



Rys. 1 Nowoczesne CV

Źródło: Opracowanie własne

Po przejęciu w 1989 roku Internetu przez uniwersytety i organizacje naukowe oraz stworzeniu koncepcji World Wide Web, czyli sieci dokumentów hipertekstowych.

Na bazie tych wydarzeń w latach 90-tych nastąpił znaczący przełom w pojmowaniu świata. Prymat posiadanej, zgromadzonej wiedzy ustąpił miejsca w hierarchii informacji, tj. umiejętności sprawnego i szybkiego docierania do wiarygodnych źródeł wiedzy. Wobec ogromu wiedzy zdobytej przez wieki takie podejście pozwala na sprawne dysponowanie nią w znacznie szerszym zakresie i znacznie swobodniej niż gdyby ją gromadzić. Zamiast posiadać książkę lub inną rzecz, można mieć zaledwie gwarancję jej niezwłocznego udostępnienia, zaś w fizycznym wymiarze – miejsce opasłego tomu zajmuje obecnie jednolinijkowy adres, pod którym ów almanach się znajduje.

Zmiana nastąpiła także w umysłach – przede wszystkim uczniów i studentów, rówieśników jej wdrożenia, gdyż czas ich intensywnego rozwoju i poszukiwań przypadł na okres społeczeństwa już informacyjnego.

W wiekach dominacji wiedzy, model jej zdobywania wyglądał następująco: dziecko uczyło się najpierw od rodziców, potem nauczycieli, a następnie krąg źródeł poszerzał się o książki i encyklopedie.

Obecnie uczeń, po wstępnym okresie zdobywania wiedzy od rodziców, dość szybko opanowuje środowisko technik komputerowych i odkrywa Internet. Już we wczesnych latach rozwoju jego model poszukiwawczy opiera się na usługach takich jak Google i Wikipedia i tą drogą dociera do wiedzy. Pojawiło się nawet określenie na takie wyszukiwanie, mówi się„wygooglałem coś" lub „założyłem gogle (google)" – w celu znalezienia odpowiedzi na pytanie. W o wiele mniejszym stopniu takie zachowanie

1. Transmission Control Protocol i Internet Protocol. TCP to protokół kontroli transmisji, IP to protokół definiujący sposób adresowania. Dane przesyłane przez sieć komputerową rozbijane są na pakiety u nadawcy i z powrotem składane w jedną całość u odbiorcy.

dotyczy osób starszych, wytrenowanych na modelu wiedzowym (opartym na wykorzystaniu wyuczonych, czerpanych z pamięci informacji, bez sięgania za każdym razem do źródeł zewnętrznych).

Obecna infrastruktura techniczna sprzyja takiemu sposobowi odnajdywania wiedzy i właściwych rozwiązań. Otaczają nas komputery (stacjonarne, laptopy, palmtopy i tablety), smartfony i telefony komórkowe z dostępem do Internetu, w wielu instytucjach i sklepach mamy infokioski, będących niczym innym jak współczesną budką telefoniczną, telebimem i kioskiem z periodykami, tyle że oferującą usługi sieci www. Internet jest wszędzie bądź prawie wszędzie.

Dodatkowo całość sprzętu komputerowego można podzielić na komputery wraz z urządzeniami peryferyjnymi, serwery, w tym serwery dedykowane (pocztowe, internetowe, firewalle), oraz na infrastrukturę sieciową.

Przyjrzyjmy się więc składnikom tego łańcucha wzajemnych powiązań.

Hardware

Mianem hardware'u określa się całą infrastrukturę materialną, fizycznie istniejącą, taką jak: moduły, kable, obudowy. Jest to szkielet techniczny, narzędzie, umożliwiające wytworzenie i użytkowanie na nim niematerialnego wytworu myśli ludzkiej, jakim jest oprogramowanie. Tak jak sam mózg nie stanowi jeszcze o geniuszu człowieka, dopiero to, co się w nim dzieje, tak dopiero oprogramowanie stanowi o wartości sprzętu komputerowego. Komputer i wszystkie jego odmiany stanowią interfejs komunikacyjny człowieka z wirtualnym światem. On tłumaczy to, co rozumie i czego chce człowiek, na język maszyn. Poza tym osobistym asystentem człowieka korzystamy jeszcze z wielu urządzeń otwierających nas na świat, tworzących globalną sieć komputerową (WWW – World Wide Web), których zasady porozumiewania się regulują odpowiednie protokoły, a ich praktyczna strona realizowana jest przez oprogramowanie.[2]

1.1. Infrastruktura sieciowa

1.1.1. Podstawowe pojęcia związane z siecią Internet

Sieć komputerowa jest to zbiór wielu wzajemnie ze sobą połączonych komputerów. Medium transmisyjnym stanowiącym łącze pomiędzy komputerami w sieci mogą być kable, linie telefoniczne, łącza światłowodowe, satelitarne itp. Ze względu na obszar, który obejmują sieci komputerowe, możemy podzielić je na trzy grupy:

- lokalne – LAN (Local Area Network),
- miejskie – MAN (Metropolitan Area Network),
- rozlegle – WAN (Wide Area Network).

Komputery połączone w sieć muszą się ze sobą komunikować, a jest to możliwe, jeśli zostanie zdefiniowany ich wspólny język. Rolę języków komunikacji komputerów pełnią **protokoły komunikacyjne,** zgodnie z którymi odbywa się wymiana danych pomiędzy komputerami w sieci. Aby komunikacja odbywała się w sposób prawidłowy, komputery uczestniczące w wymianie danych muszą używać tego samego protokołu. We współczesnej sieci rolę tę pełnią dwa protokoły o połączonej nazwie TCP/IP.

Jak działa TCP/IP?

Wyobraźmy sobie proces przesłania kopii dokumentów z archiwum w Lublinie do archiwum w Szczecinie. Pracownicy archiwum w Lublinie kserują dokumenty, odpowiednio je oznaczają, pakują je w paczki i wrzucają na samochody. Następnie kierowcy wyruszają w drogę. Ze względu na panujące na drodze

2. Godną polecenia witryną z darmowym lub niewiele płatnym oprogramowaniem jest choćby strona www.dobreprogramy.pl lub dział download w magazynie www.chip.pl.

warunki, kategorię drogi i jakość nawierzchni, część z nich wybrała drogę przez Łódź, inni zaś pojechali przez Toruń. Jeśli wszyscy kierowcy dotarli na miejsce i przewożone paczki były w idealnym stanie (tzn. daje się z nich odtworzyć pierwotną postać dokumentów), to archiwum w Szczecinie (zgodnie z wcześniejszą umową) zatelefonuje do Lublina i potwierdzi odbiór przesyłki. W przypadku braku potwierdzenia odbioru paczki archiwum w Lublinie wykona kolejną kopię dokumentów, które były przewożone w tej paczce i wyśle kolejnego gońca, aby ją dostarczył.

Praca w sieci komputerowej polega, w dużej mierze, na wymianie danych pomiędzy komputerami. Jak już wspomniano, zasady tej komunikacji określa protokół. W przypadku TCP/IP dane przesyłane pomiędzy komputerami dzielone są na stosunkowo niewielkie porcje, zwane **pakietami**.

Każdy pakiet oprócz fragmentu przesyłanego dokumentu zawiera opis – nagłówek zawierający informacje dotyczące m.in. adresu nadawcy, adresu odbiorcy, wielkości pakietu, kodów kontrolnych oraz położenia danego fragmentu w przesyłanym dokumencie. Ostatnie dwa z wymienionych atrybutów mają szczególne znaczenie dla rekonstrukcji dokumentu po stronie odbiorcy. Po pierwsze, odbiorca chce wiedzieć, czy otrzymane dane nie zawierają błędów – weryfikuje więc poprawność otrzymanego pakietu na podstawie kodów kontrolnych. Po drugie, komputer-odbiorca musi poskładać nadchodzące fragmenty w całość – tu korzysta z informacji opisującej położenie danego fragmentu w całym dokumencie. Każdy prawidłowo odebrany pakiet jest potwierdzany przez odbiorcę. Jeżeli po ustalonym czasie nie nadchodzi potwierdzenie odebrania pakietu, nadawca ponowi próbę przesłania, co daje gwarancję poprawnego transportu całego dokumentu, niezależnie od różnych przygód, które mogą spotkać pojedyncze pakiety w drodze od nadawcy do odbiorcy.

Poszczególne przesyłane pakiety mogą docierać do odbiorcy różnymi drogami, tzn. za pośrednictwem różnych urządzeń sieciowych, zwanych **koncentratorami** (ang. *hubs*), **switchami, routerami** (ang. *routers*) i **bramkami**. Zadaniem tych maszyn jest wyszukiwanie najlepszej możliwej drogi łączącej nadawcę z odbiorcą i przesyłanie danych.

Adresy, domeny

Mówiąc o przesyłaniu pakietów, wspomniano, iż każda porcja danych opatrzona jest adresem nadawcy i adresem odbiorcy. By umożliwić bezbłędne odszukanie adresata każdego pakietu, musimy zagwarantować niepowtarzalność (w ramach całej sieci) identyfikatorów-adresów przypisanych poszczególnym komputerom. Nie powinna zatem mieć miejsca sytuacja, w której dwa lub więcej komputerów w sieci posługiwałyby się tym samym **adresem IP** (unikatowy identyfikator nadawany komputerom pracującym w sieci), gdyż byłoby to źródłem niejednoznaczności w doręczaniu przesyłanych pakietów.

Globalne adresy w sieci Internet są liczbami 32-bitowymi (4 bajty). Zapisujemy je w formie czterech trzycyfrowych liczb oddzielonych kropkami, np.: 212.77.100.101. Jeśli na początku liczby występuje 0, to można go pominąć. Ponadto większość komputerów w sieci Internet można identyfikować dwoma sposobami. Oprócz adresu numerycznego mają one też nazwę domenową, która jest znacznie łatwiejsza do zapamiętania. Nazwa określa zazwyczaj przynależność danego komputera do określonej firmy czy organizacji, np.: ecdl.miroman.lublin.pl. Aby zrozumieć tę nazwę, należy ją czytać od końca, czyli od prawej strony do lewej. Rozszyfrujmy podany poniżej adres:

ecdl.miroman.lublin.pl
pl – kraj Polska;
lublin – miasto Lublin;
miroman – nazwa firmy;
ecdl – to nazwa komputera w sieci lokalnej.

Ostatni element nazwy oznacza strefę geograficzną, czyli dwuliterowy symbol kraju. Mówimy, że wszystkie komputery mające adres kończący się symbolem **.pl** pracują w **domenie pl**. Idąc dalej tym tropem, komputery o adresie kończącym się **lublin.pl** należą do domeny **lublin.pl**, następnie widzimy nazwę skrótową instytucji, organizacji czy firmy:

Miroman oraz ostatni człon to nazwa serwera w sieci lokalnej tej firmy. Oprócz stref geograficznych wyróżniamy również domeny związane z typem zastosowań (skróty trzyliterowe) – zestawienie poniżej. Na przykład **com.pl** oznacza domenę organizacji komercyjnej zlokalizowanej w Polsce. Nie zawsze nazwa domenowa kończy się strefą geograficzną. Zwłaszcza komputery z USA oraz firmy i organizacje o charakterze międzynarodowym posiadają nazwy domenowe zakończone dziedziną zastosowań. Od 2002 roku przybyło kilka nowych domen globalnych, takich jak: .biz, .info, .name.

Oto kilka przykładów: ibm.com; irc.net; nasa.gov; unicef.org.

Tabela 1. Nazwy domen w odniesieniu do zastosowań

Nazwa	Opis
Com	zastosowanie komercyjne
gov	instytucje rządowe
org	organizacje non-profit
mil	wojskowe
edu	domeny edukacyjne
net	firma działająca w sieci
inf	serwisy promocyjne i informacyjne

Źródło: Opracowanie własne

W praktyce ludzie posługują się częściej nazwami, pozostawiając komputerom odszukiwanie odpowiadających im adresów numerycznych. Istnieje również powód, aby korzystać z adresów symbolicznych. Adresy numeryczne komputerów ulegają od czasu do czasu zmianie. Adresy symboliczne, czyli nazwy, pozostają zwykle niezmienne. Cała tajemnica polega tutaj na skojarzeniu nowego adresu (numerycznego) ze starą nazwą. Takie postępowanie pozwala użytkownikom na łatwe odszukanie danego komputera w sieci, niezależnie od zmian zachodzących w konfiguracji i adresach IP. Istnieją jednak okoliczności, w których bez znajomości adresu IP ani rusz. W sytuacji, gdy awarii ulegnie system odpowiadający za dekodowanie adresów symbolicznych na adresy numeryczne (usługa ta nazywana jest krótko DNS – Domain Name System) odnalezienie konkretnej maszyny w sieci może okazać się niemożliwe, jeśli nie będziemy znali jej adresu IP We własnym interesie należy zatem zapamiętać lub zapisać sobie adresy IP komputerów, na których mamy swoje konta, lub z których najczęściej korzystamy. Chcąc sprawdzić, czy domena, którą planujemy zarejestrować jest dostępna, możemy skorzystać z formularzy dostępnych w serwisach WWW firm oferujących rejestrację domen. W odniesieniu do domen obsługiwanych przez NASK formularz taki znajdziemy pod adresem www.dns.pl.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Czy Internet ma szansę zastąpić w przyszłości źródła książkowe, stając się „jedynym słusznym źródłem informacji"?
b) Wyjaśnij, czym jest etykieta. Czy przestrzegasz jej zasad, korzystając z różnych usług w sieci komputerowej?
c) Przedstaw i scharakteryzuj zasady administrowania siecią komputerową w architekturze klient-serwer, posługując się prawidłową terminologią.
d) Określ ustawienia sieciowe danego komputera i jego lokalizację w sieci.

1.2. Budowa komputera

Zasadniczo komputer można podzielić na dwie sfery: hardware, czyli część fizyczną, materialną, którą można dotknąć i software – cały wirtualny świat oprogramowania. Oprogramowanie dzielimy na: aplikacyjne, narzędziowe i dane. Przyjmuje się, że wiedza o bazie sprzętowej stanowi około 10% całkowitej wiedzy o komputerze, większość zaś to nadbudowana na tej infrastrukturze rzeczywistość wirtualna, programowa.

Obecnie dysponujemy wieloma urządzeniami będącymi *de facto* komputerami. Mają one zróżnicowaną budowę i możliwości, od niewielkich po duże maszyny. W toku ewolucji techniki uzyskały one swoje wyspecjalizowane funkcje, co pozwoliło podzielić je na grupy, takie jak:

- Komputery osobiste (PC) – najliczniejsze jednostki stacjonarne, spotykane we wszystkich lokalizacjach – od domów, poprzez uczelnie, po biura firm i instytucji, sklepy i dowolne miejsca, w których gromadzi się, przetwarza i wykorzystuje dane.
- Serwery – komputery łączące podległe jednostki w sieć, stanowiące także bazę do zdalnego zarządzania i wspólne miejsce gromadzenia i przechowywania danych. Pojęcie to zostało rozszerzone i obecnie obejmuje również wirtualne programy świadczące usługi na rzecz innych programów. Wynika to z definicji funkcjonalnej słowa „serwer", niemniej na płaszczyźnie sprzętowej oznacza jednostkę nadrzędną dla komputerów i innych urządzeń osobistych.
- Mainframe – wielokrotnie mocniejsze od uprzednio wymienionych jednostki lub grupy jednostek zarządzające siecią z dużą liczbą użytkowników, przetwarzają duże ilości danych na potrzeby instytucji, mogą też pełnić rolę serwerów w rozbudowanych sieciach.
- Superkomputery i komputery równoległe – największe komputery, o ogromnej mocy obliczeniowej, najczęściej używane do czasochłonnych obliczeń naukowych i symulowania skomplikowanych procesów, zjawisk i systemów, jak choćby prognozowanie pogody.
- Komputery wbudowane lub osadzone (ang. embedded) – to specjalizowane komputery do sterowania automatyką przemysłową, elektroniką użytkową. Mają kadłubową formę i często nie funkcjonują samodzielnie, bez urządzenia macierzystego.

W przeciwnym kierunku gabarytowym od komputera klasy PC możemy w obecnych czasach spotkać szereg urządzeń, których możliwości są zbliżone lub takie same jak komputera osobistego:

- Laptopy/notebooki – mniejsza i poręczniejsza wersja PC z ekranem w formie otwieranej klapki, często ze zredukowaną klawiaturą (mniej klawiszy).
- Netbooki – urządzenia, których zasadniczą rolą jest zapewnienie użytkownikowi dostępu do Internetu w każdym miejscu. Ze względu na kryterium redukcji ceny często pozostałe funkcje urządzenia są upośledzone w stosunku do poprzednio wymienionych.
- Palmtopy/PDA – jeszcze mniejsze urządzenia, wielkości dłoni lub kieszeni, w konsekwencji nieposiadające standardowej klawiatury – obsługuje się je rysikiem i klawiaturą ekranową.
- Smartphone – hybryda telefonu komórkowego i komputera typu palmtop. Często posiadają wbudowane dodatkowe funkcje, takie jak: dyktafon, odtwarzacz muzyki w formacie mp3, aparat fotograficzny i kamera.
- Tablety – przebojem zdobywające rynek urządzenia podobne do PDA i smartfonów, ale o znacznie większej przekątnej ekranu, będące *de facto* komputerami panelowymi. Ich poręczność wraz porównywalnymi z laptopami i komputerami stacjonarnymi możliwościami stały się kluczem do podbijania rynku i wypierania starszych typów konstrukcji.

W każdym z tych urządzeń można wskazać zasadnicze typy modułów charakterystycznych dla komputerów, będących ich wyznacznikiem.

1.2.1. Pięć elementów niezbędnych do działania komputera

Klasyfikację zawartości sprzętowej komputera zaczniemy od zaledwie 5 elementów niezbędnych do jego działania. Każdy z nich stanowi skomplikowaną całość i bez zamontowania któregokolwiek z nich nasz komputer nie ruszy którymkolwiek z wentylatorów umieszczonych w obudowie, całkowicie odmówi współpracy. Nie będzie reagował na przyciski i będzie zdawał się być martwy. Dla ułatwienia zapamiętywania należy dodać, że 3 spośród 5 wymaganych elementów swoją nazwę w języku polskim rozpoczyna od litery „p".

Do działania komputera niezbędne są:

1) procesor;
2) pamięć operacyjna RAM;
3) płyta główna;
4) karta grafiki;
5) obudowa z zasilaczem.

Zapewne niektórych zaskoczy tu brak dysku twardego, klawiatury czy monitora. Bez nich jednak komputer jest zdolny do pracy, ma jedynie ograniczony kontakt z człowiekiem, który go obsługuje oraz nie jest zdolny do gromadzenia i przechowywania informacji.

1.2.1.1. Procesor

Procesor nazywany jest sercem komputera (może poprzez skojarzenie jego taktowania z biciem serca), a jego rolę można porównać do mózgu człowieka. Procesor oznaczany jest często skrótem angielskim CPU, czyli Central Processing Unit. Jest on podstawowym wyznacznikiem mocy obliczeniowej komputera, niesłychanie skomplikowanym układem scalonym, mieszczącym na niewielkiej powierzchni – około 1 cm^2 – monokryształ krzemu, na który, wykorzystując technikę fotolitografii, naniesiono szereg warstw półprzewodnikowych tworzących sieć od kilku tysięcy do kilkuset milionów tranzystorów. Sam procesor umieszczony jest na laminatowej płytce, często przykryty pokrywą radiacyjną, na spodniej stronie płytki zaś znajdują się wyprowadzenia w postaci niezwykle elastycznych, miękkich nóżek pokrytych złotem. We współczesnych procesorach spotyka się 775, a nawet 939, nóżek!

Podstawową cechą procesora jest liczba bitów (długość) „słowa”, na którym wykonywane są operacje obliczeniowe. Jeśli słowo ma 32 bity mówimy, że procesor jest 32-bitowy, jeśli 64 bity – 64-bitowy. W przeszłości stosowano także procesory 8 i 16 bitowe, jak zatem widać wraz z rozwojem technologii długość słowa rośnie.

Inna cecha odróżniająca procesory od siebie to architektura CISC lub RISC, choć w obecnych popularnych procesorach łączy się je obie i programista widzi CPU jako CISC, ich rdzeń jest jednak RISC-owy. Rozkazy CISC są rozbijane na **mikrorozkazy** (ang. microops), które są następnie wykonywane przez RISC-owy blok wykonawczy.

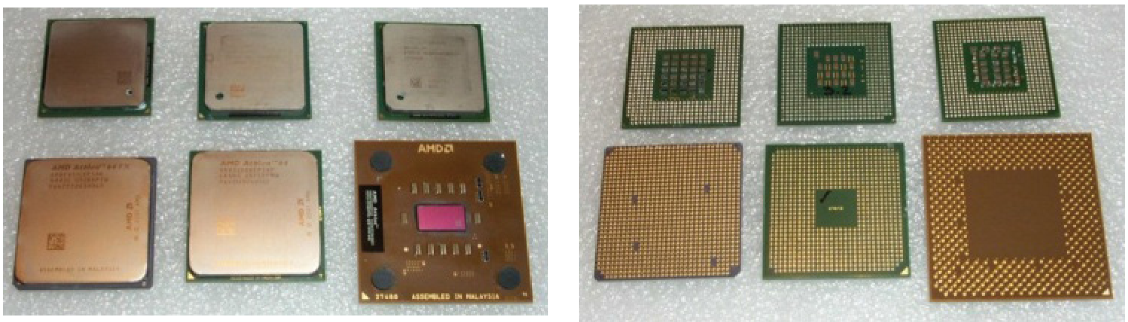
Kolejnym charakterystycznym parametrem procesora jest szybkość wykonywania rozkazów – częstotliwość taktowania. Dla danej architektury procesora, szybkość ta wynika przede wszystkim z czasu trwania pojedynczego taktu. Podaje się ją w GHz. Ze względu na problemy z odprowadzaniem ciepła powstającego podczas pracy takiej struktury maksymalne częstotliwości oscylują w granicach 3 GHz, ale pamiętać należy, że współczesna architektura komputerów umożliwia dynamiczne obniżenie się taktowania procesorów, gdy parametr ten nie jest wykorzystywany na odpowiednim poziomie.

Obecne wszystkie procesory posiadają wielordzeniową budowę, choć genezą tego zjawiska był fakt, że w czasie wojny dwóch największych wówczas producentów procesorów – firmy Intel® i AMD®, procesory pierwszego z nich obsługiwały 2–3 potoki w jednym takcie, zaś drugiego aż 6–7. Wkrótce okazało się jednak, że równoległa struktura współpracujących ze sobą rdzeni jest wydajniejsza, a przede wszystkim tańsza w produkcji i firma Intel® zdominowała ten segment rynku części komputerowych.

Obecnie (2013 rok) procesory wykonywane są w procesie technologicznym 32 nm (nanometrów, czyli 10^{-9} m), co oznacza, że odległość między tranzystorami w CPU wynosi 32 milionowe części milimetra, na co wskazują specyfikacje producentów.

Ze względu na funkcjonalną strukturę można wyróżnić w procesorze takie elementy, jak:

- **rejestry** służące do przechowywania danych oraz wyników, które mogą być ogólnego lub specjalnego przeznaczenia;
- **arytmometr** –wykonujący operacje obliczeniowe na danych;
- **układ sterujący** przebiegiem wykonywania programu;
- **inne układy**, w które producent wyposaża procesor w celu usprawnienia jego pracy (np. pamięć podręczna cache).



Rys. 2. Typowe przednie strony procesorów. Poniżej spody z widocznymi nóżkami

Źródło: Opracowanie własne

Do typowych rozkazów wykonywanych przez procesor należą:

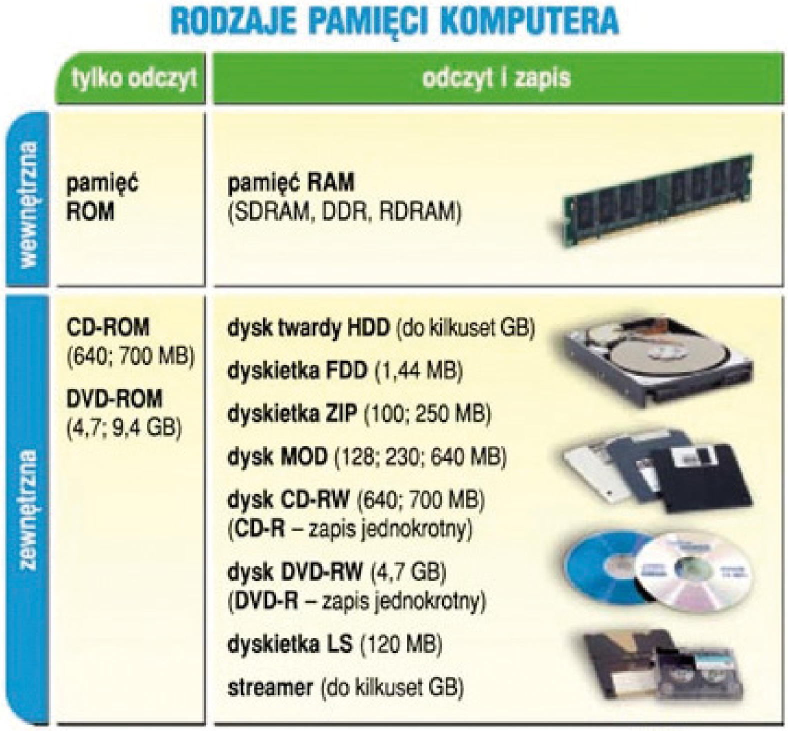
- działania arytmetyczne:
  – dodawanie,
  – odejmowanie,
  – porównywanie dwóch liczb,
  – dodawanie i odejmowanie jedności,
  – zmiana znaku liczby.
- działania na bitach:
  – iloczyn logiczny – AND,
  – suma logiczna – OR,
  – suma modulo 2 (różnica symetryczna) – XOR,
  – negacja – NOT,
  – przesunięcie bitów w lewo lub prawo.
- kopiowanie danych:
  – z pamięci do rejestru,
  – z rejestru do pamięci,
  – z pamięci do pamięci (niektóre procesory),
  – (podział ze względu na sposób adresowania danych).
- Skoki:
  – bezwarunkowe,
  – warunkowe.

1.2.1.2. Pamięć operacyjna

Pamięć operacyjna to układy logiczne wpinane za pomocą złącza krawędziowego w gniazda płyty głównej komputera. RAM (ang. Random Access Memory – pamięć o dostępie swobodnym) ma za zadanie szybką komunikację z procesorem. Poza cache (pamięcią podręczną) jest podstawowym miejscem, skąd pobiera on rozkazy i przechowuje dane na bieżąco mu potrzebne. Zaletą tej pamięci w stosunku do pamięci wirtualnej tworzonej na dysku twardym jest dziesięciokrotnie krótszy czas dostępu. Jej zawartość kasuje się wraz z odcięciem zasilania.

Parametrami odróżniającymi pamięci to ich typ, pojemność i szybkość dostępu. Handlowe oznaczenia pamięci dostępnych obecnie na rynku to: SDRAM, DDR SDRAM, DDR2, DDR3 oraz SO-DIMM używane w laptopach. W celu uniknięcia pomyłek przy montażu różnią się między sobą ilością wyprowadzeń na krawędzi oraz wcięciami w laminacie, gdyż montaż niewłaściwego modułu może doprowadzić do jego uszkodzenia (kości pamięci różnią się także elektrycznie).

Szczególną rolę w komputerze pełni pamięć nieulotna ROM. Najczęściej umieszczony jest na niej BIOS – podstawowy system wejścia/wyjścia (Basic Input/Output System), który startuje bezpośrednio po uruchomieniu komputera. Po włączeniu zasilania dowodzony przez niego komputer określa, jakie urządzenia są dostępne – poszukuje napędów, w tym dysków twardych, testuje i instaluje dostępny sprzęt (np. przydziela mu przerwania), a na koniec odczytuje rekord startowy MBR i znajduje pliki systemu operacyjnego, po czym przekazuje mu zarządzanie komputerem. Nie zawsze BIOS jest zapisywany w sposób trwały w pamięci ROM, istnieją równolegle rozwiązania, w których jest umieszczony w pamięci typu flash, przez co możliwy jest upgrade BIOSu do nowszych wersji.



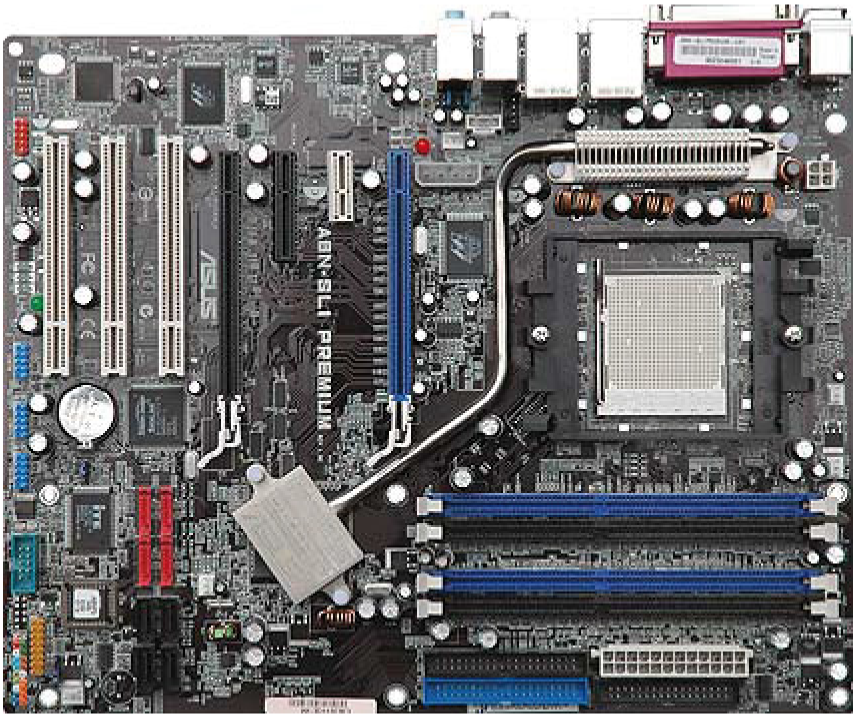
Rys. 3. Rodzaje pamięci komputera (za: www.wersus.com.pl, 07.07.2012)

Przy okazji warto wspomnieć o jednostkach pojemności pamięci. Podstawową jest jeden bit (1b), przyjmujący wartość 1 albo 0 (w praktyce oznacza to, że w danej komórce pamięci prąd jest lub go nie ma). Stąd geneza zastosowania systemu dwójkowego do obliczeń w komputerach. Ponieważ bit przyjmuje tylko dwie wartości, jest jednostką niepraktyczną i zbyt ograniczoną, wprowadzono zatem kolejną – 1 bajt (1B). 1B równy jest 2^3b, czyli 8 bitom. Za jego pomocą można już zapisać i rozróżnić 256 znaków, co wystarczy na zapis wszystkich liter alfabetu, cyfr oraz znaków specjalnych, jakich użytkownik komputera może potrzebować. Zbiór dostępnych znaków został zestandaryzowany i nosi nazwę kodów ASCII.

W praktyce także 1B okazał się jednostką zbyt małą i na co dzień mamy do czynienia z jednostkami pochodnymi, takimi jak: kilobajt, megabajt, gigabajt, terabajt. Każda z nich jest większa od poprzedniej o 2^{10} czyli 1024 razy. Przez porównanie do systemu dziesiętnego potocznie zakłada się, że każda z nich jest jednostką tysiąc razy większą. Istnieją jeszcze większe jednostki od przytoczonych, rosnące o wspomniane 2^{10}, jednak na obecnym poziomie ilości gromadzonych danych są rzadziej spotykane. Oto zestawienie jednostek pochodnych: bajt (B); kilobajt (kB); megabajt (MB); gigabajt (GB); terabajt (TB); petabajt (PB); eksabajt (EB); zettabajt (ZB); jottabajt (YB).

1.2.1.3. Płyta główna

Płyta główna jest elementem integrującym wszystkie pozostałe moduły komputera. Jej charakterystyczną cechą są wystające w prawie wszystkich kierunkach złącza i gniazda. W nią wpina się procesor z jego radiatorem i wentylatorem, pamięci, karty rozszerzeń, dyski i inne napędy, z niej też prowadzą wyprowadzenia do praktycznie wszystkich peryferiów, od monitora, klawiatury i myszki począwszy. Płyta główna w postaci wielowarstwowej płyty drukowanej oprócz złącz ma wlutowany **chipset**, układy pamięci cache i BIOS. Chipset tworzą najczęściej dwa układy scalone, nazywane mostkami – północnym i południowym. Najważniejsze elementy komputera, takie jak procesor, pamięć operacyjna i magistrala karty grafiki (AGP lub PCI-Express), są sterowane przez **mostek północny**, zawierający dodatkowo szynę systemową FSB, po której odbywa się komunikacja między tymi komponentami. Pozostałe elementy, zarówno jednostki centralnej komputera jak i urządzenia peryferyjne, obsługuje **mostek południowy**.

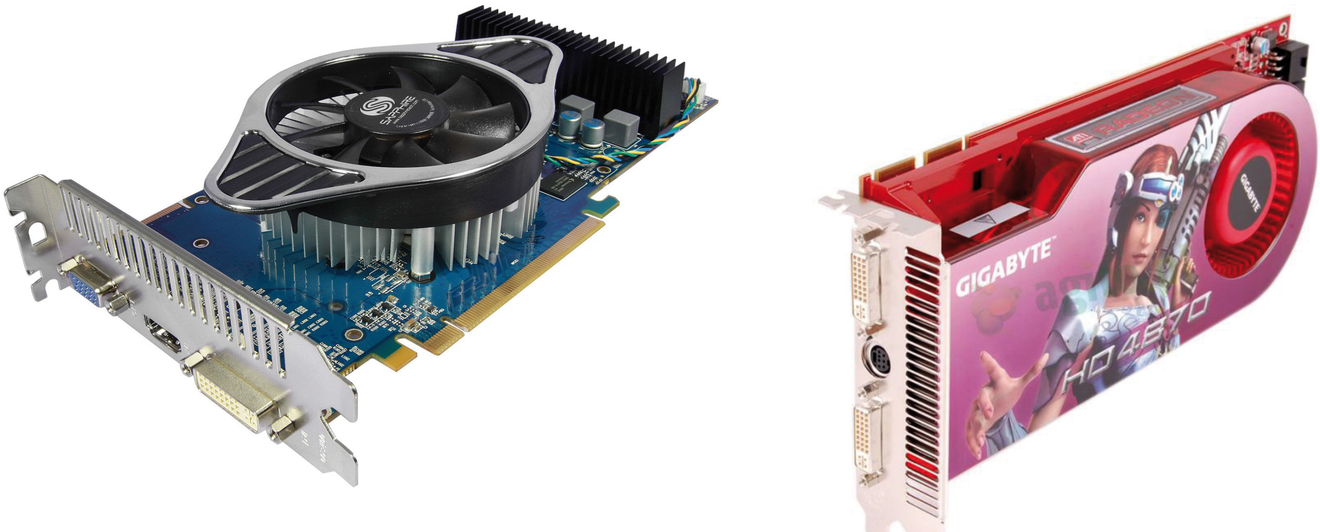


Rys. 3. Przykładowa płyta główna

Źródło: Opracowanie własne

1.2.1.4. Karta grafiki

Moduł instalowany w slot AGP lub PCI-Express płyty głównej albo układ zintegrowany z płytą i odpowiadający za zamianę przetworzonych przez komputer informacji na obraz, który poprzez złącze analogowe D-Sub (VGA), cyfrowe DVI, HDMI lub S-Video i odpowiedni przewód jest następnie wysyłany na monitor lub projektor. Obecnie można kupić jedynie karty wyświetlające wyłącznie grafikę trójwymiarową 3D, z własną pamięcią graficzną, wyświetlające minimum 16,8 mln kolorów (choć oko ludzkie tylu nie rozróżnia), a nawet kolor 16-bitowy (High Color) i 32-bitowy (True Color). W karty graficzne wbudowuje się też wiele zaawansowanych technologii poprawiających wyświetlanie na przykład obiektów we mgle, płomienia, ożywiających teksturowanie obiektów.



Rys. 4. Przykładowe karty grafiki

Źródło: Opracowanie własne na podstawie materiałów reklamowych

1.2.1.5. Obudowa z zasilaczem

Właściwie wystarczy sam zasilacz. Obudowa stanowi jednie szkielet montażowy zasilacza, napędów i płyty głównej oraz zabezpiecza wnętrze komputera przez przypadkową ingerencją, izoluje od pól magnetycznych i chroni człowieka przed porażeniem prądem.

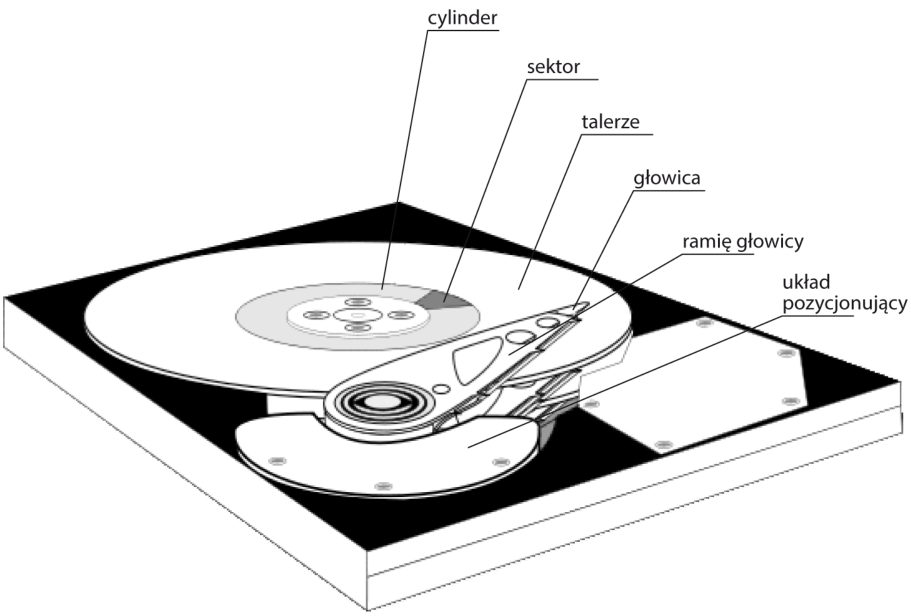
Główną rolą zasilacza jest konwersja prądu sieciowego o napięciu 230V do wartości akceptowalnych przez płytę główną, napędy i wentylatory. Napięcia jakie spotyka się wewnątrz obudowy to 3,3V, 5V i 12V, choć na przykład procesory wtórnie potrafiły pobierać zaledwie 1,65V.

1.2.2. Napędy wewnętrzne i zewnętrzne wraz z nośnikami danych

Napędy możemy podzielić na 2 grupy:

1) napędy zintegrowane z nośnikiem, stanowiące całość;

Ich głównym przedstawicielem jest dysk twardy – w skrócie HDD (hard diskdrive), którego złącze ewoluowało od ATA (IDE), poprzez Fast ATA/EIDE, Ultra ATA/UDMA 33/66/100, do Serial ATA, SATA II oraz, szczególnie ceniony w serwerach, interfejs SCSI. W ostatnich latach powstały popularne obecnie szybkie dyski zewnętrzne SSD oraz pendrive'y – niewielkie rozmiarowo pamięci wpinane do portu USB komputera.



Rys. 5. Budowa Dysku twardego – HDD

Źródło: Opracowanie własne

Na szczególną uwagę zasługują HDD wyposażone w złącze SCSI, gdyż technologia ta rozwinęła się w kierunku maksymalnej niezawodności, łączenia dysków w macierze oraz podłączania i odłączania bez konieczności wyłączania komputera – tzw. technologia hot swap.

2) napędy do odtwarzania/nagrywania zapisu na zewnętrznych nośnikach.

W tej kategorii mamy w szczególności:

a) **stację dyskietek** – FDD (floppydiskdrive), która długo panowała na rynku i w związku z tym przeszła proces ewolucyjny (od obsługi dyskietek 5,25" i pojemności 360 kB oraz 1,2 MB, do dyskietek 3,5" i 1,44 MB, z późniejszą odmianą obsługującą dyski magnetooptyczne czy dyskietki ZIP o pojemności 100 MB, 250 MB i 700 MB) – obecnie w zaniku, wyparta przez pojemniejsze i tańsze napędy optyczne, obsługujące płyty jako nośniki;

b) **napędy optyczne** – CD-ROM/CD-RW/Combo/DVD-ROM/DVD-RW, w tym DoubleLayer czy Double-Sided/Blue-Ray – obsługujące płyty CD 650 MB, 700 MB i 800 MB. W przypadku napędów DVD nośnik – płyta DVD, ma pojemność odpowiednio 4,7 GB, 8,4 GB, a w przypadku płyt Blue-Ray nawet 33 GB i 50 GB;

c) **napęd taśmowy** – streamer, popularny szczególnie w bankach, przeznaczony do tworzenia kopii zapasowych ze względu na dużą pojemność. Jego wadą jest oparcie na technologii taśmy magnetycznej – nietrwałej i o wolnym dostępie do żądanego miejsca zapisu (taśma musi być przewinięta);

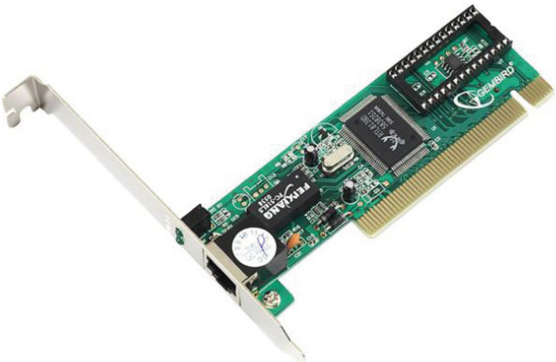
d) **czytniki kart pamięci** – niewielkich, ale bardzo pojemnych plastikowych kart w standardach: Compact Flash, SD (Secure Digital) i micro SD, MS (Memory Stick) i MS Duo, MMC. Poza nimi (które są wiodące) opracowano jeszcze kilka odmian i standardów kart, co sprawiło, że czytniki w rozbudowanych wersjach potrafią obsłużyć nawet 33 ich typy (33in1). Ten wysyp i popularność kart zawdzięczamy zastosowaniu zewnętrznych nośników pamięci w urządzeniach kompaktowych: fotograficznych aparatach cyfrowych, telefonach komórkowych, odtwarzaczach mp3 i mp4, palmtopach. Oprócz pojemności takiej karty istotna jest również szybkość transferu, który uznaje się za szybki, gdy jest w granicach 20 MBps.

1.2.3. Karty rozszerzeń

Karty zwiększają możliwości komunikacyjne komputera i dają dostęp do wielu rozszerzeń, wzbogacając zakres funkcjonalny komputera. Wpina się je w gniazda płyty głównej za pomocą złącza krawędziowego. Dawniej były to złącza ISA, następnie PCI i, osobno dla karty grafiki, AGP, a współcześnie – złącza o nazwie PCI-express.

Typowymi kartami spotykanymi w naszych komputerach są:

a) karta grafiki;
b) karta dźwiękowa;
c) karta sieciowa i modem;
d) karta telewizyjna.



Rys. 6 Karta sieciowa – przykład karty rozszerzeń (widać złącze krawędziowe służące do montażu na płycie głównej)

Źródło: Opracowanie własne, materiały reklamowe

Karta grafiki została omówiona powyżej, w części dotyczącej elementów niezbędnych do działania komputera.

1.2.3.1. Karta dźwiękowa

Umożliwia rejestrację, przetwarzanie i odtwarzanie dźwięku. Poprawna jest również nazwa „karta muzyczna". Wiodącą marką na rynku kart dźwiękowych jest seria Sound Blaster firmy Creative Labs. Składa się z generatora dźwięku, przetworników A/C i C/A, miksera i wzmacniacza oraz interfejsu MIDI – pozwalającego podłączyć zewnętrzne cyfrowe urządzenia muzyczne w tym standardzie. Podstawowym pojęciem w tej kategorii jest próbkowanie (sampling), polegające na digitalizacji dźwięków. W celu uzyskania jakości CD odbywa się ono dla częstotliwości 44,1 kHz. W podstawowych zastosowaniach, w celu redukcji kosztów zestawu przy jednoczesnym zachowaniu w miarę poprawnej multimedialności, rezygnuje się z oddzielnej karty na rzecz układu zintegrowanego z płytą główną.

1.2.3.2. Karta sieciowa i modem

Oba urządzenia służą do skomunikowania komputera z innymi komputerami w sieci. Modem dokonuje połączenia poprzez sieć telefoniczną (analogową lub cyfrową – ISDN), karta sieciowa zaś łączy się poprzez lokalną sieć komputerową LAN. Charakterystycznym dla modemu jest złącze wyjściowe RJ-11. Karty sieciowe możemy natomiast podzielić na:

– karty łączące się szeregowo przez gniazdo BNC (karty starszego typu) i kabel koncentryczny;
– karty łączące się przez złącze wyjściowe RJ-45 i kabel 8-żyłowy, popularnie nazywany skrętką – układ gwiazdy (każdy komputer jest bezpośrednio podłączony do huba);
– karty bezprzewodowe: radiowe lub Wi-Fi, łączące się przez punkty dostępowe.

1.2.3.3. Karta telewizyjna

Inaczej tuner telewizyjny, umożliwia odbiór programów telewizji naziemnej i satelitarnej (w tym również telewizji cyfrowej). Dysponuje też możliwością przechwytywania fragmentów wideo i prostej edycji wideo.

1.2.4. Urządzenia peryferyjne

Intuicyjnie urządzenia peryferyjne (zewnętrzne) dzielimy na wejściowe i wyjściowe. Wejściowe to te, za pomocą których użytkownik komunikuje się z komputerem, wprowadzając dane i wydając polecenia czy to osobiście, manualnie czy werbalnie, czy też poprzez dygitalizowanie rzeczywistości utrwalonej w analogowy sposób.

Do urządzeń wejściowych zaliczamy:

a) klawiaturę;
b) urządzenie wskazujące – mysz, touchpad (ekran dotykowy) lub trackball;
c) skaner;
d) mikrofon;
e) fotograficzny aparat cyfrowy lub kamerę.

Do urządzeń wyjściowych zaliczamy zaś:

a) monitor, projektor;
b) drukarkę;
c) plotter;
d) głośniki i słuchawki.

Istnieją także urządzenia pełniące równocześnie rolę wejściową i wyjściową. Zaliczamy do nich na przykład ekran dotykowy.

Klawiatura o układzie QWERTY zawiera najczęściej 102 klawisze – alfanumeryczne, numeryczne, funkcyjne, specjalne i sterowania kursorem, nie zawiera natomiast znaków diakrytycznych, charakterystycznych dla wielu języków. Te specjalne litery, niespotykane w alfabecie łacińskim, uzyskuje się za pomocą kombinacji klawiszy prawy Alt i litera najbardziej zbliżona do lokalnej.

Dla języka polskiego odpowiednie kombinacje klawiszy wyglądają następująco:

ą=Alt+a;

ę=Alt+e;

ó=Alt+o;

ł=Alt+l;

ń=Alt+n;

ć=Alt+c;

ś=Alt+s;

ż=Alt+z;

ź=Alt+x.

Oprócz podanych wyżej wykorzystuje się jeszcze kombinacje do szybkich operacji na oknach w systemie MS Windows (np.: przełączanie otwartych okien to Alt+Tab; Alt+F4 – zamykanie aktywnego okna) czy też do nawigacji w aplikacjach, zaznaczania (Ctrl+a – zaznaczenie całego tekstu lub wszystkich elementów), kopiowania, wycinania i wklejania zaznaczonej zawartości (odpowiednio: Ctrl+c, Ctrl+x, Ctrl+v).

Urządzenia wskazujące służą do wskazywania i wyboru elementów umieszczonych na pulpitach graficznych systemów operacyjnych za pomocą przemieszczanego precyzyjnie kursora. Pierwszym z nich była mysz, a jej koncepcja została przeniesiona na pozostałe urządzenia wskazujące (ekran dotykowy i trackball), dlatego omówimy tylko funkcjonalność myszy. Otóż, do sterowania kursorem wykorzystuje się przede wszystkim ruch urządzenia po płaskiej powierzchni, który odwzorowywany jest na ekranie. Oprócz tego mysz posiada wbudowane 2 przyciski: lewy służy do zaznaczania i zatwierdzania wyboru, prawy – do otwierania podręcznego menu z aktualnym zestawem możliwych poleceń do wyboru. Szczególną funkcjonalnością myszy jest metoda „przeciągnij i upuść" (drag&drop), która polega na kliknięciu na danym elemencie (ikonie, pasku tytułu, itp.) i przytrzymaniu lewego przycisku myszy, następnie (bez zwalniania przycisku) na przesunięciu myszy po stole, co zaskutkuje przeniesieniem lub skopiowaniem danego elementu (kopiowanie lub przeniesienie zależy od tego, czy dodatkowo przytrzymuje się czy też nie klawisz Ctrl na klawiaturze).

Skaner to urządzenie potrafiące odwzorować wiernie punkt po punkcie zawartość kartki papieru – zamienić obraz rzeczywisty na cyfrową interpretację. Dokonuje tego za pomocą przesuwającej się listwy elementów światłoczułych – matrycy CCD. Możemy wyróżnić skanery: ręczne, płaskie, bębnowe. Urządzenia te mogą posiadać też przystawkę do skanowania slajdów.

Mikrofon, nie tylko w komputerach, służy do wprowadzenia dźwięku do komputera. Dość długo był wykorzystywany wyłącznie przez muzyków. Od pewnego czasu ogromną karierę robią aplikacje i technologie umożliwiające przekaz dźwiękowy w czasie rzeczywistym, takie jak telefonia internetowa VoIP (voiceover IP) i programy do komunikacji natychmiastowej – IM (Instant Messaging). Obie te technologie ewoluują od przekazywania wyłącznie dźwięku do pełnego kontaktu video łączących się osób.

Fotograficzny aparat cyfrowy to alternatywny do skanera sposób na cyfryzację obrazu i w ten sposób uczynienie go rozpoznawalnym przez aplikacje komputerowe, najczęściej komunikuje się z komputerem albo poprzez podłączenie portami USB w komputerze i microUSB w aparacie, albo przez wyjęcie karty pamięci z aparatu i umieszczenie jej w czytniku komputera. **Kamera** wraz z mikrofonem stanowią obecnie podstawowy zestaw do komunikacji natychmiastowej – IM.

Monitor wyświetla wyniki wykonywanych operacji oraz komunikaty generowane przez komputer, słowem: stanowi podstawowe źródło informacji zwrotnej dla użytkownika. Pierwotnie monitory CRT wzorowały się na odbiornikach TV, posiadały wypukły kineskop i wyświetlały dwa kolory: czarny i zielony, bursztynowy albo biały. Z czasem ewoluowały zarówno parametry monitora, jak i jego konstrukcja. Monitory CRT wymagały przetworzenia cyfrowego sygnału pochodzącego z komputera na sygnał analogowy. Operację tę wykonywał konwerter analogowo-cyfrowy RAMDAC umieszczony na karcie grafiki. Następcą tego typu monitora stały się ciekłokrystaliczne panele LCD. Ich bardzo praktyczną zaletą jest niewątpliwie płaska konstrukcja, sprawiająca, że ich użytkowanie jest wygodniejsze niż poprzednika. Monitor LCD zbudowany jest z ciekłych kryształów umieszczonych pomiędzy dwoma warstwami szkła, tranzystorów i lamp podświetlających. W przeciwieństwie do monitora CRT muszą jednak pracować w zalecanej, preferowanej rozdzielczości, inaczej nie zachowują zadowalających parametrów obrazu (w rozdzielczościach innych niż zalecane prosta potrafi mieć zmienną grubość, litery zbudowane są z różnej grubości kresek). W przypadku paneli LCD niemożliwe jest też używanie urządzeń mierzących kolor i pozwalających na precyzyjną kalibrację, co daje przewagę monitorom kineskopowym w zastosowaniach graficznych i wydawniczych.

Część przedstawionych poniżej informacji porównawczych na temat monitorów pochodzi z archiwalnych numerów informatorów reklamowych branży informatycznej, które w chwili obecnej nie są już możliwe do odnalezienia.

Tab. 2. Porównanie pozostałych cech LCD i CRT

Porównanie parametrów monitorów CRT i LCD - zestawienie zalet i wad	
CRT	**LCD**
aktywny obszar ekranu – mniejszy od kineskopu	aktywny obszar ekranu – równy całkowitej powierzchni
błędy zbieżności – nierzadko silne	błędy zbieżności – niemożliwe
czytelność na krawędziach ekranu – zazwyczaj zaledwie satysfakcjonująca	czytelność na krawędziach ekranu – bardzo dobra
czytelność obrazu –- zazwyczaj dobra	czytelność obrazu – zazwyczaj bardzo dobra
emisja ciepła –- bardzo wysoka	emisja ciepła – niska
ergonomia –- skomplikowane ustawienie, czasem wymaga wiedzy specjalistycznej, mało elastyczny, ciężki	ergonomia – ustawienie stosunkowo proste, może być obracany, lekki
interferencja elektromagnetyczna – bardzo podatny	interferencja elektromagnetyczna – niemożliwa
jasność/kontrast – zazwyczaj tylko dobre	jasność/kontrast –bardzo dobre
migotanie obrazu – zawsze obecne	migotanie obrazu –całkowicie statyczny obraz
odbicia –odbijanie światła zewn. (z wyjątkiem płaskich ekranów)	odbicia – brak odbić dzięki płaskiemu ekranowi
pobór mocy – wysoki	pobór mocy – niski
promieniowanie – obecne	promieniowanie – niemożliwe
równomierna dystrybucja jasności – zależy od konkretnego egzemplarza, zazwyczaj zaledwie satysfakcjonująca	równomierna dystrybucja jasności – bardzo dobra (kiedy podświetlenie ekranu jest jednorodne)
skala szarości – zazwyczaj lepsza niż w LCD	skala szarości – relatywnie słabsza niż w CRT
stabilność koloru – może być bardzo dobra	stabilność koloru – dobra
wymagana przestrzeń – duża	wymagana przestrzeń – mała
zakres kolorów – większy niż w LCD	zakres kolorów –- mniejszy niż w CRT
zniekształcenia poduszkowate/błędy liniowości – częste	zniekształcenia poduszkowate/błędy liniowości – niemożliwe

Źródło: Era Komputera, aktualnie niedostępne

Odmianą monitorów LCD są matryce TFT używane w notebookach. TFT to nazwa wyświetlacza sterowanego cienkowarstwowymi tranzystorami o aktywnej matrycy.

Obecnie panele LCD, wraz z odmianą TFT, są szybko wypierane z rynku przez monitory LED, które również są odmianą technologii LCD. Są one jeszcze cieńsze i jeszcze bardziej energooszczędne oraz dają bardziej kontrastowy i żywy obraz. Różnią się źródłem światła podświetlającego ekran – zamiast CCFL (tradycyjnej świetlówki) mają mini diody emitujące światło (LED). Ale i tej technologii wróży się rychły koniec, wraz z całą technologią LCD, a to za sprawą rozwijającej się organicznej technologii OLED.

Cały obraz tworzony na monitorze składa się z pikseli, czyli kolorowych punktów na ekranie. Każdy pojedynczy piksel złożony jest z trzech subpikseli w kolorach podstawowych dla wyświetlania: zielonym, czerwonym i niebieskim. Zapalenie się wszystkich subpikseli w pikselu daje biały punkt na ekranie.

Projektor multimedialny. Jeśli chcemy obraz generowany przez nasz komputer pokazać większej grupie osób, monitory okazują się być za małe. Do celów prezentacyjnych używa się **projektorów**. Podłącza się je także do wyjścia karty graficznej, zaś obraz jest wyświetlany na jasnej płaskiej powierzchni –ścianie lub dużym białym ekranie.

Ze względu na konstrukcję wyróżniamy projektory DLP lub LCD (3LCD). Źródłem światła w projektorach DLP jest lampa łukowa, która jest najdroższym a jednocześnie najmniej trwałym elementem projektora. Zbliżający się koniec żywotności lampy można poznać po nierównomiernym naświetleniu obrazu – znacznie jaśniejszym środku i ciemniejszych brzegach. Z kolei projektory 3LCD generują mniej wyrazisty obraz o gorszym nasyceniu kolorów, za to są poręczniejsze, trwalsze i tańsze.

Zarówno monitor, jak i projektor wyświetla obraz w sposób nietrwały. Aby zachować go na nośnikach, takich jak na przykład papier, konieczne jest użycie urządzeń typu drukarka czy ploter.

Drukarka to podstawowe urządzenie przeznaczone do utrwalania na papierze efektów pracy komputera. Pierwsze drukarki wywodziły się z maszyn do pisania. Były to drukarki monochromatyczne, kolejno: 9-, 18- i 24-igłowe. Drukowanie polegało na uderzaniu igieł przesuwającej się głowicy w barwną tasiemkę i odbijanie się wzoru złożonego z kropek na papierze. Drukowanie za pomocą **drukarek igłowych** było bardzo tanie, a jednocześnie bardzo głośne. Pozwalało też na jednoczesne drukowanie oryginału i kopii po podłożeniu kalki.

Drukarki igłowe zostały wyparte z domów przez **drukarki atramentowe** – cichsze, szybsze i dające kolorowe wydruki. Technika druku atramentowego opiera się na przesuwaniu się pod głowicą kartki papieru, która – linijka po linijce – jest bombardowana mikroskopijnymi kropelkami tuszu wysyłanymi z zasobników przez głowicę piezoelektryczną. Wadą tych drukarek są koszty eksploatacyjne – drogi tusz, wystarczający na niewielką ilość wydruków.

Pewną odmianą drukarek atramentowych są **drukarki termotransferowe i termosublimacyjne** wykorzystujące wysoką temperaturę do przenoszenia kropelek wosku na nośnik. Nośnik może być nierówny i porowaty, co czyni je urządzeniami pożądanymi w pracy firm reklamowych. Druk z ich zastosowaniem jest bardzo drogi.

Drukarki laserowe uzupełniają ofertę drukarek. Łączą w sobie zalety drukarek atramentowych – pozwalają na wyraźny i kolorowy wydruk, a dodatkowo robią to niezwykle szybko i wydajnie. Ich zaletą jest też koszt wydruku – niższy niż w przypadku „plujek", nieco wyższy od wydruków igłowych. Druk laserowy można porównać do odbijania pieczątki. Obraz pierwotnie jest tworzony na bębnie obrazowym – za pomocą pola elektrostatycznego i lasera rozkładany jest na nim toner – a następnie zostaje przyklejony do kartki papieru i utrwalony wysoką temperaturą. Wprawdzie materiały eksploatacyjne (tonery i bęben światłoczuły) wystarczają w tym typie drukarek na kilka tysięcy wydruków (bęben najczęściej na 40 tys., tonery na 2,5–3,5 tys. stron), czyniąc wydruk pojedynczej kartki tanim, jednakże zakup tonera czy wymiana bębna zawsze kojarzy się z wysokim jednorazowym kosztem. Należy więc planować wymianę tych materiałów, by nie była zaskoczeniem.

Tab.3. Porównanie cech drukarek

Cecha drukarki	Drukarka igłowa	Drukarka atramentowa	Drukarka laserowa
Źródło barwnika	Tasiemka barwiąca	Tusz w głowicy	Toner
Druk kolorowy	Nie	Tak	Tak
Tempo zużywania się materiałów eksploatacyjnych	Średnie (wystarcza na 500–1000 stron)	Szybkie (do 200 stron)	Wolne (2,5–3,5tys.)
Koszt materiałów eksploatacyjnych	Najniższy, do 20 zł	Wysoki, oryginalne tusze >130 zł/kolor	Niski, jeśli przeliczyć na okres używania, wysoki – jednorazowy w momencie wymiany, 250–450 zł/ kolor
Szybkość wydruku	Bardzo wolna	Tempo średnie	Bardzo szybka
Głośność	Bardzo głośna	Bardzo cicha	Względnie cicha
Możliwość drukowania kopii jednoprzebiegowo – przez kalkę	Tak	Nie	Nie

Źródło: Opracowanie własne

Ploter używany jest w biurach projektowych i agencjach reklamowych do tworzenia obrazów wielkoformatowych. Wyglądem przypomina deskę kreślarską. Do deski przytwierdzona jest pionowa linijka, do której przymocowany jest pisak. Linijka może poruszać się w poziomie, a pisak wzdłuż linijki w pionie. Złożenie tych ruchów pozwala uzyskać efekt podobny do kreślenia ręką ludzką.

Głośniki i słuchawki komputerowe nie różnią się od głośników i słuchawek spotykanych w urządzeniach audio w segmencie AGD/RTV. Zamieniają impulsy elektryczne otrzymywane z karty dźwiękowej na drgania słyszane przez ucho ludzkie jako dźwięki. Oprócz muzyki umożliwiają bezpośrednie rozmowy za pomocą aplikacji IM i wideokonferencje przez Internet.

1.2.5. Montaż i demontaż podzespołów komputera

Współczesne komputery mają budowę modułową. W jednostce centralnej poszczególne elementy przytwierdza się albo do szkieletu obudowy, albo wciska w odpowiednie gniazda płyty głównej. Urządzenia peryferyjne dołączane są poprzez mocno zróżnicowane wtyki i gniazda. Wszystkie moduły mają złącza konstruowane w ten sposób, by zminimalizować ryzyko nieodpowiedniego przypięcia, które (z uwagi na różne specyfikacje elektryczne poszczególnych modułów) mogłoby doprowadzić do ich uszkodzenia lub zniszczenia (spalenia). Z uwagi na fakt, że następuje w tej dziedzinie szybki rozwój, pociągający za sobą zmiany dotyczące zarówno parametrów wydajnościowych, jaki i elektrycznych części konstrukcyjnych, zmieniają się konstrukcje złącz nawet w obrębie danego typu podzespołu. Proces ten postępuje tak dynamicznie, że z dużym prawdopodobieństwem można założyć, iż zbyt szczegółowy opis montażu poszczególnych modułów z dokładnym opisem gniazd i wtyków byłby nieaktualny już w dniu wydruku niniejszej publikacji.

Ponadto, tak jak nikt nie zostanie mechanikiem samochodowym po teoretycznym kursie, bez zajrzenia pod maskę pojazdu, tak jak nikt nie będzie kierowcą bez praktyki na jazdach próbnych, tak w celu poznania wnętrza komputera należy zdjąć obudowę i zajrzeć do środka.

Zanim jednak to nastąpi, trzeba pamiętać o odpięciu komputera od zasilania. Jest to czynność podstawowa zarówno ze względu na bezpieczeństwo osoby eksperymentującej, jak i z uwagi na wrażliwe elementy wewnątrz obudowy. Niektóre z nich pracują na tak małych prądach, że wystarczy przeskok iskry pomiędzy spoconą dłonią i stykami, by trwale uszkodzić choćby pamięć.

Opis demontażu i montażu różnorodnych generacji podzespołów stanowiłby spore dzieło, a Autor niniejszej publikacji nie ma takich zapędów, zresztą nie jest to celem niniejszej publikacji. Warto jednak przytoczyć choćby ogólne wskazówki. I tak, z uwagi na różnorodność modułów i wielość ich generacji, producenci dbają, by różniły się one także budową złącza. W celu uniemożliwienia montażu elementu w niewłaściwym gnieździe bądź wpięcia wtyczki do gniazda o nieodpowiedniej specyfikacji elektrycznej, każda wtyczka i każde złącze jest charakterystyczne dla danej generacji określonego podzespołu. Złącza grzebieniowe (krawędziowe), mają różne liczby styków i – co za tym idzie – są różnej długości, zaś elementy tak samo długie mają inaczej rozmieszczone wcięcia, odpowiadające poprzeczkom właściwego gniazda. Wtyki (męskie) mają inną liczbę pinów, w innym układzie, gniazda (żeńskie) mają dostosowany do odpowiedniego wtyku układ i liczbę otworków. Różne są także kształty wtyków i gniazd, tak aby pasowały do siebie tylko określone.

W celu identyfikacji dodatkowo na podzespołach umieszczane są naklejki (tzw. stickery) zawierające informacje o tym, co to za element, której generacji, a także jakiej pojemności lub wydajności. Część opisów umieszczona jest bezpośrednio na układach scalonych i płytkach drukowanych – opisywane w ten sposób w ten sposób są na przykład gniazda płyty. Zwiększa to prawdopodobieństwo właściwego doboru modułu oraz prawidłowego osadzenia go w gnieździe.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Co zrobiłbyś w celu przyspieszenia uruchamiania się komputera oraz wczytywania się systemu operacyjnego? Jakie zmiany w hardware zaproponujesz? Co ulepszyłbyś w zakresie oprogramowania?
b) Zakupiłeś nową grę, w której niewłaściwie wyświetlają się płomienie. Jakie ustawienia karty grafiki odpowiadają za ten parametr? W jaki sposób poprawić wydajność graficzną komputera?
c) W jaki sposób wykryć i zdefiniować konflikty sprzętowe komputera? Czym się objawiają? Otrzymałeś komunikat błędu, po którym komputer ciągle się restartuje. Jak wykorzystasz pozyskaną w ten sposób informację?

1.3. Oprogramowanie

Program komputerowy, inaczej **aplikacja,** to – najogólniej rzecz ujmując – zestaw instrukcji do wykonania przez komputer. Często oba pojęcia są stosowane zamiennie, choć nie zawsze aplikacja jest jednym programem. Aplikacja przetwarza dane, czyli wykonuje na nich rozmaite operacje. Za względu na pełnione funkcje można dokonać podziału dostępnego oprogramowania na:

1. systemowe;
2. aplikacyjne;
3. narzędziowe.

1.3.1. System operacyjny

System operacyjny jest najważniejszym programem w komputerze. Do niego należy zarządzanie plikami i dyskami komputera, współpracą urządzeń składowych, np. napędów optycznych czy kart rozszerzeń, oraz pośredniczenie pomiędzy człowiekiem a sprzętem komputerowym, będąc przyjaznym dla obu stron. Dla bezpieczeństwa, by użytkownik nie dokonał bezwiednie zmian o dalekosiężnych skutkach, w systemach operacyjnych wydziela się jądro systemu (kernel), które potrafi kontaktować się z aplikacjami poprzez powłokę systemową (shella). Spotyka się 3 rodzaje jąder systemowych: monolityczne, hybrydowe i mikrojądro.

Najbardziej rozpowszechnionym jest system Windows firmy Microsoft, ale oprócz niego możemy spotkać systemy MacOS X, Unix i Linux w wielu odmianach.

Fizycznym zapisem na dysku, zarówno programów jak i danych, jest plik. Pliki z kolei, z uwagi na zazwyczaj dużą ich liczbę, są posegregowane i umieszczone w folderach i podfolderach (katalogach i podkatalogach).

Większość systemów operacyjnych posiada środowiska graficzne GUI ułatwiające ich obsługę. Dla konkretnego systemu operacyjnego tworzone jest dedykowane oprogramowanie. Spotyka się też rozwiązania „system i komputer tej samej firmy". Rozwiązanie takie jest zwykle bardziej stabilne, ale przywiązuje nas zwykle do jednego producenta, gdy chcemy na przykład dokupić drukarkę czy rozbudować sieć w firmie.

Microsoft Windows to rodzina kilku linii systemów operacyjnych wyprodukowanych przez firmę Microsoft. Sam pomysł stworzenia systemu okienkowego firma Microsoft odkupiła od firmy XEROX. Obecnie systemy rodziny Windows spotyka się w prawie każdym komputerze osobistym. Kolejność powstania systemów operacyjnych Windows datuje się następująco:

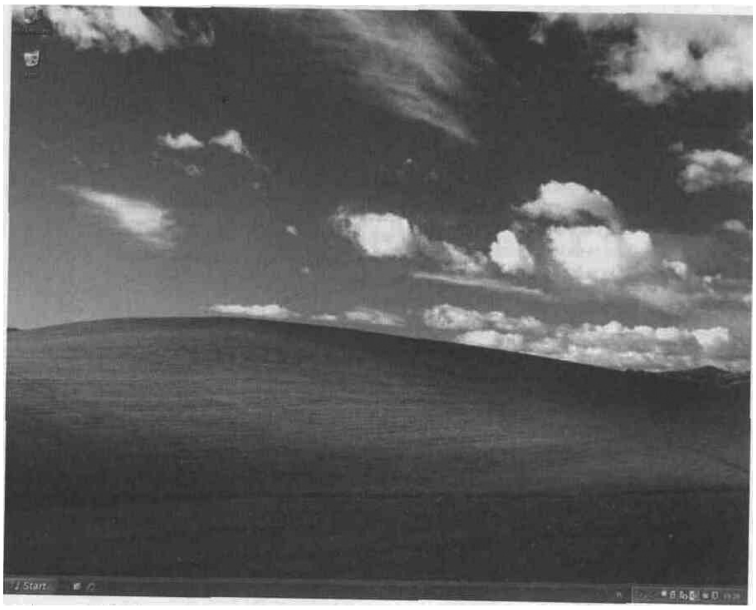
1) Windows 1.0 – 1985 r.;
2) Windows 2.0 – 1987 r.;
3) Windows 3.0 –1990 r. – pierwszy produkt rodziny, który osiągnął szerszy sukces. Wprowadzone ulepszenia dotyczyły przede wszystkim interfejsu użytkownika i możliwości pracy wielozadaniowej;
4) Windows NT – 1993 r. – seria NT była postrzegana jako system dla profesjonalistów. Połączenie linii systemów operacyjnych dla użytkowników domowych i profesjonalistów dokonało się dopiero przy okazji wprowadzenia systemu Windows XP;
5) Windows 95 – 1995 r. – zmiany w interfejsie użytkownika, dodano rozwijane menu, rzeczywista praca wielozadaniowa, otwartość na sieć Internet, obsługa standardu Plug&Play;

6) Windows 98 – 1998 r. – następca Windows 95, krytykowany za pracę wolniejszą niż poprzednik. Zmodernizowano interfejs użytkownika, charakteryzujący się teraz integracją przeglądarki Internet Explorer z Eksploratorem Windows, dodano obsługę USB. Większość niedogodności została wyeliminowana w wydanej w roku 1999 wersji Windows 98 Second Edition;
7) Windows 2000 – 02.2000 r. – system łączący większość walorów Windows NT i 98; wygodny system plików, stabilność działania, bogata obsługa sprzętu.
8) Windows Me – 09.2000 r. – skierowany do użytkowników domowych, ukierunkowany bardziej na rozrywkę i zgodność z posiadanym sprzętem i oprogramowaniem niż jego zabezpieczeniami i stabilnością działania. Ostatni z systemów operacyjnych wywodzących się z linii DOS;
9) Windows XP – 2001 r. – udana próba stworzenia jednolitej linii systemów Windows. System opiera się na kodzie NT z dodanym nowym interfejsem graficznym zawierającym wiele nowości i usprawnień. Dla celów niniejszego opracowania za przykład posłużył system operacyjny Windows XP;
10) Windows VISTA – 2007 r. – raczej nieudany system, dość szybko doczekał się następcy;
11) Windows 7 – 2010 r. – aktualnie powszechnie stosowany system operacyjny;
12) Windows 8 – nowy system o zmienionej koncepcji interfejsu. Dystrybuowany w 3 wersjach: Windows 8, Windows 8 Pro, Windows 8 Enterprise. Premierę miał w listopadzie 2012 roku.

Ogólne wiadomości o systemie Windows

Pulpit

Pulpit to przestrzeń robocza, która ukazuje się po uruchomieniu komputera i zalogowaniu się użytkownika. Skojarzenie z blatem biurka jest jak najbardziej zamierzone. Na ekranie często możemy umieszczać, przesuwać rożne obiekty, tak jak na prawdziwym biurku. Na pulpicie Windows można wyróżnić kilka stref (Rys. 6):

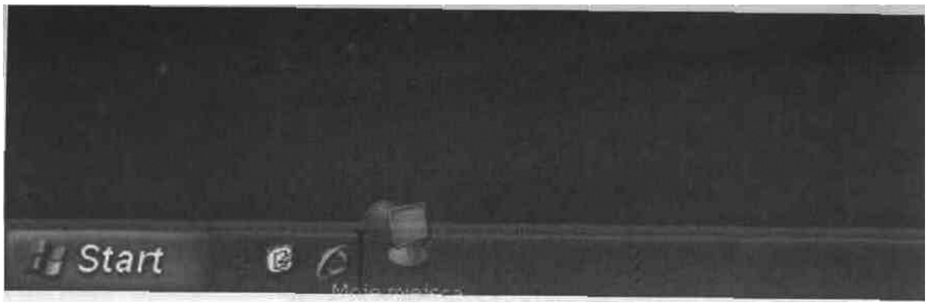


Rysunek 6. Pulpit Windows XP

Źródło: Opracowanie własne

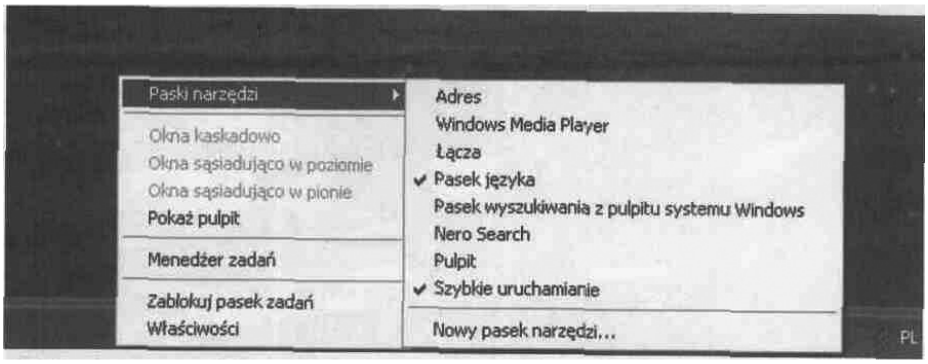
1. Przycisk START, który uruchamia menu z dostępem do licznych funkcji systemu.

2. Pasek zadań – tu „odkładane" są programy po zminimalizowaniu okien. Za jego pomocą możemy szybko przemieszczać się między otwartymi programami. Na pasku zadań można umieścić dodatkowe elementy, takie jak elementy użytkownika (np.: skróty do programów – Rys. 7) oraz predefiniowane, gotowe wzorce systemowe (p..: pasek szybkiego uruchamiania, pasek języka itd. – Rys. 8).



Rysunek 7. Przenoszenie elementów na pasek zadań

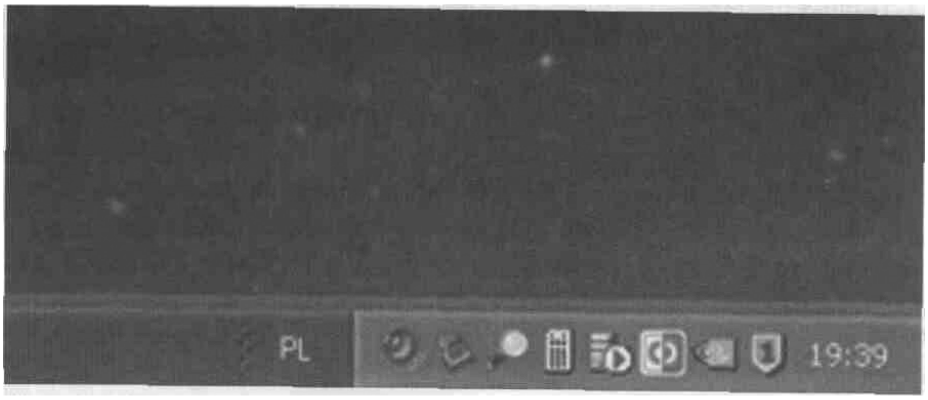
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 8. Wbudowane paski narzędzi

Źródło: Opracowanie własne

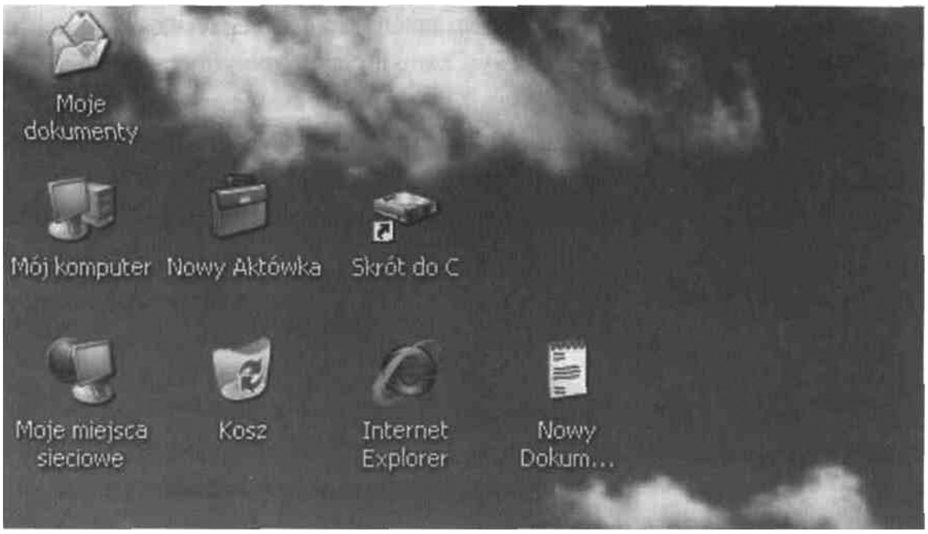
3. Zasobnik systemowy – prawa część paska zadań. Ikony alokowane w tym miejscu informują użytkownika o programach uruchomionych podczas startu systemu operacyjnego, np.: programy antywirusowe, bazy danych, komunikatory internetowe, dialery. Zbyt duża liczba „działających w tle" programów uruchamianych poprzez zasobnik systemowy uszczupla zasoby sprzętowe komputera, dlatego użytkownik powinien kontrolować stan zasobnika (Rys. 9).



Rysunek 9. Zasobnik systemowy

Źródło: opracowanie własne

4. Ikony pulpitu, skróty – graficzne opisy programu, pliku, folderu (Rys. 10).



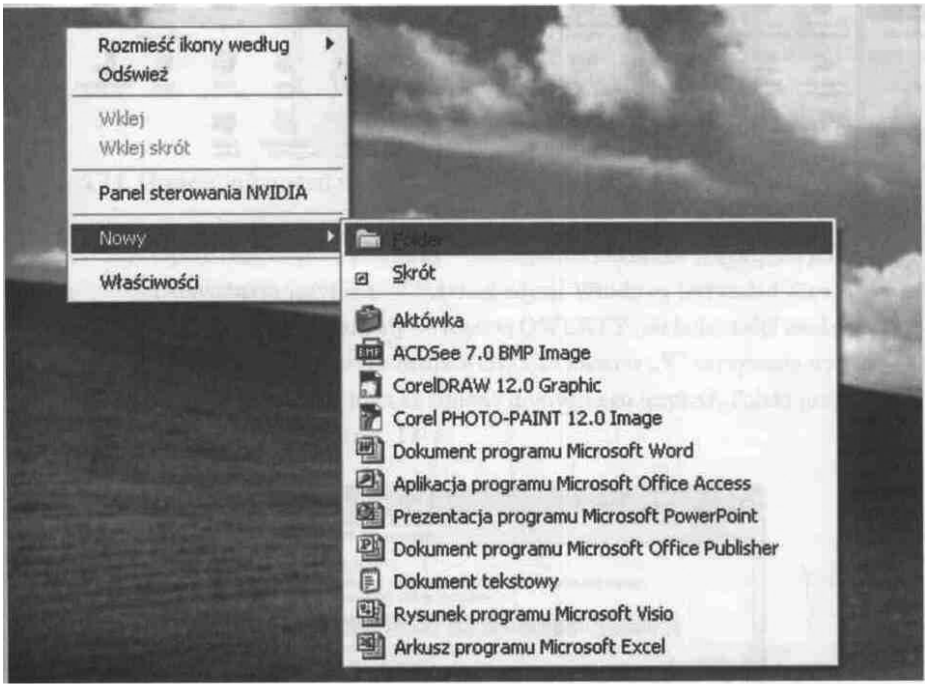
Rysunek 10. Ikony, skróty pulpitu

Źródło: Opracowanie własne

System Windows komunikuje się z użytkownikiem za pomocą okien. W oknach wyświetlana jest zawartość plików, folderów. Standardowymi elementami okna Windows są przyciski: minimalizuj, przywróć w dół/maksymalizuj, zamknij, pasek przewijania.

Z poziomu menu START użytkownik ma dostęp do zainstalowanych programów, jak też opcji konfiguracyjnych systemu operacyjnego. Oprócz menu START w systemie Windows spotykamy się z:

I. „Menu podręcznym" (kontekstowym) – z reguły dostępne jest ono po kliknięciu na obiekcie prawym przyciskiem myszki. Menu kontekstowe zawiera najczęściej używane przez użytkownika opcje poszczególnych programów (Rys. 11). Pracując na co dzień z programami, z pewnością docenimy ten rodzaj menu.



Rys. 11. Menu kontekstowe (podręczne)

Źródło: Opracowanie własne

2. „Paskiem menu” – występuje zwykle jako część okna, składa się z przycisków. Po naciśnięciu na odpowiedni przycisk menu lewym klawiszem myszy następuje jego aktywacja.

Panel sterowania

Panel sterowania jest wydzieloną częścią systemu operacyjnego służącą do ustawiania i zmiany jego parametrów, np.: dodawania sprzętu, instalacji/usuwania programów, zarządzania użytkownikami, zasilaniem, połączeniami sieciowymi.

Wśród wielu opcji Panelu sterowania na uwagę zasługują:

– opcje regionalne i językowe – szczególnie zakładka Języki, przycisk Zaawansowane.

Domyślnym językiem w polskiej wersji Windows jest układ klawiatury o nazwie „Polski programisty”, tożsamy z układem Angielski (stany Zjednoczone) – QWERTY, ale udostępniający możliwość wpisywania liter z polskimi znakami diakrytycznymi (ą, ę, ó, ł, ś, ć, ń, ż, ź). Często zdarza się, iż użytkownik wciskając klawisz „z”, otrzymuje wynik w postaci znaku „y”. Dzieje się tak po przełączeniu układu klawiatury w tryb Polski (214). Do prawidłowego układu klawiatury można szybko powrócić naciskając kombinację klawiszy Ctrl+Shift.

– Ekran – miejsce, w którym użytkownik może zdefiniować na przykład wygląd pulpitu, tapety, styl okien, wygaszacz ekranu, rozdzielczość itp.

– Połączenia sieciowe – tutaj ustawia się parametry dostępu do sieci: rodzaj połączenia, adresy IP i bramy oraz serwerów DNS.

– Opcje automatycznych aktualizacji systemu. Według zaleceń Microsoftu na zainstalowanie poprawki krytycznej użytkownik ma maksymalnie 24 h. Taki jest margines bezpieczeństwa, by komputer z dużym prawdopodobieństwem nie stał się ofiarą ataku przez ogłoszoną oficjalnie lukę w oprogramowaniu.

1.3.2. Oprogramowanie aplikacyjne

Oprogramowanie tego typu instaluje się bezpośrednio na stacjach roboczych, choć w ostatnich latach na fali wirtualizacji i outsourcingu można mieć dostęp do wydzierżawionej aplikacji i niekoniecznie ją posiadać. Pojawiło się nawet pojęcie „pracy w chmurze”.

Ponieważ komputery zagościły w naszym życiu: od prywatnego, przez zawodowe, po publiczne (np. administracja)i od poważnych, profesjonalnych zastosowań po rozrywkę, konieczna staje się klasyfikacja oprogramowania w podziale na grupy ze względu na kryterium zastosowania.

Tak więc możemy wyróżnić następujące grupy:

1) **Edytory tekstu** – z takimi przedstawicielami, jak: Notatnik, WordPad, MS Word, OpenOffice.org Writer, czy wysoce specjalistyczny 3B2. Rozszerzenia nazw charakterystyczne dla plików tekstowych to *.txt, *.doc, *.docx, *.odt, *.dot, *.dotx, oraz format chroniony *.pdf.
2) **Programy graficzne**, wśród których istnieje dodatkowy podział na poruszające się w grafice rastrowej (bitmapowej) – MS Paint, GIMP, IrfanView, Adobe Photoshop, Corel Photopaint, oraz poruszające się w grafice wektorowej – Corel Draw, Inkscape, Adobe Illustrator CS. Charakterystyczne rozszerzenia: *.bmp, *.gif, *.jpg, *.tif, *.png, *.cdr, *.svg.
3) **Arkusze kalkulacyjne,** takie jak: MS Excel, OpenOffice.org Calc, QatroPro. Charakterystyczne rozszerzenia: *.xls, *.xlsx, *.xltx, *.ods.
4) **Bazy danych** – MS Access, dBASE, Oracle, PostgreSQL, MySQL, MS SQL Server, bazy danych XML, na bazie których firmy komputerowe nabudowały szereg aplikacji lokalizowanych na poszczególne sektory gospodarki. Rozszerzenia (często spotykamy 2 typy plików: z danymi i pliki indeksowe, nie będziemy ich tu rozdzielać): *.db, *.ntx, *.mdb, *.idx, *.accdb.
5) **Programy CAD** (computeraid design) i **GIS** (systemy informacji geograficznej) – AutoCad i Catia, SolidWorks, SolidEdge, Nastran, Unigraphics NX. Uniwersalny format to *.dxf.

6) **Programy do grafiki menedżerskiej i prezentacyjnej**, m.in.: MS PowerPoint; OpenOffice.org Impress. Rozszerzenia to *.ppt, *.pptx, *.pps, *.odp.
7) **Oprogramowanie DTP** – do składu i przygotowania materiału do druku na naświetlarce lub maszynie drukarskiej – PageMaker, Ventura Publisher, Design Studio.
8) **Programy muzyczne**, nie tylko do odsłuchiwania, ale też do tworzenia muzyki na komputerze: WinAmp, Windows Media Player, wiele specjalistycznych niszowych aplikacji do tworzenia i obróbki dźwięku. Pliki: *.mp3, *.ac3, *.wav.
9) **Programy do odtwarzania i obróbki filmów:** AllPlayer, Best Player, WindowsMedia Player, WinAmp. Rozszerzenia: *.avi, *.mp4.
10) **Aplikacje obsługujące dostęp do Internetu,** na przykładprzeglądarki (Internet Explorer, Mozilla Firefox, Opera, Netscape, Google Chrome) oraz wbudowane w nie nakładki – wyszukiwarki (Google, Yahoo, Bing, Ask);
11) **Programy pocztowe** – poza dostępem przez stronę www do winmaila, mamy możliwość wykorzystania profesjonalnych aplikacji z rozbudowaną obsługą poczty i kontaktów, np.: MS Outlook Express, MS Outlook, Windows Mail, The Bat, Thunderbird, Eudora, Pegassus Mail;
12) **Programy typu IM** (Instant Messaging) – do komunikacji w czasie rzeczywistym z wiodącą grupą komunikatorów: ICQ, Skype, Gadu-Gadu, Tlen, oraz programami obsługującymi chatroomy.
13) **Gry** – gry uruchamiane na lokalnym komputerze, sieciowe, on-line, RPG, a wśród nich: typowe strzelanki (wszystko co się rusza to wróg), przygodowe (z misjami), zręcznościowe, społecznościowe, logiczne.

Aplikacje z grupy edytorów tekstu, arkuszy kalkulacyjnych, baz danych i grafiki prezentacyjnej są często łączone w pakiety aplikacji biurowych, a ich funkcje w wielu miejscach się przenikają, dodatkowo przez moduł OLE możliwe jest swobodne przenoszenie treści pomiędzy dokumentami w różnych aplikacjach pakietu. Dlatego można scalić te grupy na rzecz jednego kontenera z –ogólnie ujmując – aplikacjami biurowymi.

Wszystkie typy wymienionych programów tworzą ogromną różnorodność możliwych zastosowań komputera i czynią go wartościowym i niezastąpionym partnerem człowieka w życiu.

1.3.3. Oprogramowanie narzędziowe

W pracy z komputerem niezbędne są programy ułatwiające gospodarkę plikami, programy kompresujące pliki w celu ich sprawnego pobierania i wysyłania lub zmniejszenia zajmowanego miejsca na dysku oraz programy pomagające chronić nasz komputer przed nieuprawnioną ingerencją.

Najczęściej spotykany to wbudowany w MS Windows Explorator Windows i będący na licencji shareware Total Commander –pozwala na łatwe porządkowanie, hierarchizowanie i wyszukiwanie zawartości. Do archiwizerów zaliczają się na przykład programy obsługujące formaty *.zip i *.rar (WinZip, WinRar).

W obecnym świecie czas dziewiczo radosnego i bezpiecznego surfowania po sieci mamy już za sobą i szaleństwem jest używanie nieizolowanego od sieci komputera bez zainstalowanego pakietu antywirusowego, który nie tylko umie wyszukiwać złośliwe oprogramowanie, ale też wykryć i zlikwidować nieznane mu zagrożenie na podstawie charakterystycznego zachowania się kodu – poprzez zaawansowaną heurystykę analizy programów. Normą jest też pełnienie przez niego roli firewalla i skanowanie zawartości komputera w czasie rzeczywistym. Pakiet antywirusowy musi być rezydentem – powinien być zainstalowany i nieustannie uruchomiony na komputerze. Do bardziej znanych należą NOD32/Eset Smart Security, Norton AV, Kaspersky, Panda AV, Avast.

Trzeba jednak pamiętać, że program antywirusowy musi być stale aktualizowany i skuteczny praktycznie w 100%. Dla bezpieczeństwa komputera nie ma znaczenia, czy zostanie on zainfekowany armią wirusów i trojanów przy braku ochrony, czy też nasz program ma skuteczność „zaledwie" 99,0% i dlatego wpuści pojedyncze złośliwe oprogramowanie. Wprawdzie istnieją rankingi skuteczności tego typu oprogramowania, które są nieustannie aktualizowane, trudno jednak wyłonić rzeczywiście bezkonkurencyjnego lidera. Zwycięzcy rankingów zmieniają się bardzo często.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Jakie znasz inne systemy operacyjne oprócz MS Windows? Czy umiesz posłużyć się analogicznymi do Panelu sterowania narzędziami do konfiguracji systemu? Jak się nazywają, gdzie je znaleźć?
b) W jaki sposób odbywa się reprezentacja różnych form informacji w komputerze: liczb, znaków, obrazów, animacji, dźwięków? Dlaczego niektóre formaty zapisu dają się pokaźnie kompresować, a inne nie?
c) Omów sposoby uzyskiwania pomocy dla programów na licencjach niekomercyjnych.

BIBLIOGRAFIA:

Sokół M., *Internet. Kurs,* Wyd. 3, Gliwice 2011,

Danowski B., Krupińska A., Dziecko w sieci, *Septem*, 2007.

Pikoń K., *ABC internetu. Wydanie VII*, Gliwice 2011.

Korman D., Zawadzka G., *Informatyka Europejczyka. Poradnik metodyczny dla nauczycieli informatyki w szkołach ponadgimnazjalnych. Zakres rozszerzony,* Wyd. 2, Gliwice 2013.

Danowski B., *Hardware. Leksykon pojęć sprzętowych*, Gliwice 2005.

Metzger P., *Anatomia PC,* Wyd. 9, Gliwice 2007,

NETOGRAFIA:

www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_Internetu, 18.03.2013.

www.sienko.net.pl/cwp/cwp03.html, 18.03.2013.

www.zskl.zsk.p.lodz.pl/~zielin/wyklady/WYKLAD1.htm, 18.03.2013.

www.pl.wikipedia.org/wiki/Sprzęt_komputerowy

2. Wirtualny świat – Internet i multimedia

2.1. Sieci jako nieprzebrane źródło wiedzy i informacji

Szybki rozwój współczesnej cywilizacji przyczynił się do skomputeryzowania prawie wszystkich dziedzin życia. Powszechne używanie komputera spowodowało, że umiejętność posługiwania się nim stała się nieodzownym elementem wykształcenia każdego człowieka.

Sieć Internet jest prawdziwą kopalnią informacji. Zasoby sieciowe są tak ogromne, że nikt nie jest w stanie zapoznać się ze wszystkimi, a przyrastają w takim tempie, że gdyby nawet ktoś znał jakimś cudem liczbę stron www w danym momencie, to w ułamku sekundy ta informacja się dezaktualizuje. Znamienne są również ciągłe zmiany zasobów spowodowane ich aktualizacją, uzupełnianiem, zmianą formy prezentacji itp. Znane są źródła, które istnieją w sieci już wiele lat, inne pojawiają się i znikają jak komety. Ta wielość i różnorodność danych i informacji może być postrzegana zarówno jako mocna, jak i słaba strona Internetu. Dobrze jest mieć dostęp do wielu źródeł i wybór, konieczne jest jednak posiadanie narzędzi wyszukiwania żądanych informacji.

Zadanie poszukiwania związanych ze sobą tematycznie informacji bądź kontekstowego wyszukiwania stron www i innych dokumentów pasujących do zadanego wzorca realizują systemy indeksujące zasoby sieci Internet. Są to systemy komputerowe, które nieustannie przeglądają zasoby Internetu w poszukiwaniu nowych i odnawianych zasobów. Informacje o zasobach sieci gromadzone są w bazie danych i stanowią podstawę do wspomagania poszukiwań w sieci. Nowoczesne techniki magazynowania danych i indeksowania zasobów pozwalają na bardzo szybkie odszukiwania zbioru dokumentów, w których potencjalnie znaleźć możemy informacje na zadany temat, bądź takich, w których treści pojawia się poszukiwane słowo czy fraza.

Nowoczesne przeglądarki WWW oferują zazwyczaj wbudowany mechanizm łączenia się ze stroną (najczęściej będzie to strona zaproponowana przez producenta przeglądarki), na której znajdują się narzędzia przeszukiwania zasobów Internetu. We wszystkich przeglądarkach wyszukiwanie można uruchomić bezpośrednio przyciskiem na pasku narzędzi, wpisując szukaną frazę w odpowiednie okno bądź z poziomu menu. Innym sposobem jest uruchomienie strony wyszukiwarki, na przykład Google (najpopularniejszej) i tam wpisanie kryteriów poszukiwań.

Po wpisaniu słowa kluczowego bądź fragmentu tekstu poszukiwanego dokumentu klikamy klawisz Wyszukaj. Po kilku sekundach w oknie przeglądania dokumentów powinien pojawić się wynik poszukiwań w postaci odnośników (linków) do znalezionych dokumentów pasujących do zadanego wzorca. W zależności od formy prezentowania wyników poszukiwań obok łączników do dokumentów mogą (ale nie muszą) znajdować się również początkowe fragmenty treści stron www albo graficzne miniatury witryn www pozwalające łatwo zorientować się, czy dany dokument zawiera te informacje, o które nam chodziło. We własnym interesie należy zapamiętać, ustawić jako stronę główną, zapisać lub dodać do zbioru ulubionych/zakładek (zależnie od przeglądarki) adresy jednej a nawet kilku wyszukiwarek internetowych, ponieważ:

- w wyniku awarii jakiś serwer oferujący przeszukiwanie Internetu może być niedostępny;
- duże obciążenie sieci (a w szczególności powszechnie znanych wyszukiwarek) może sprawić, iż transfer danych z konkretnego serwera będzie bardzo wolny;
- wynik kontekstowego przeszukiwania zasobów sieciowych realizowany przy wykorzystaniu różnych narzędzi może być odmienny. Polskie wyszukiwarki oferują zwykle w pierwszej kolejności bogaty wybór zasobów polskojęzycznych.

Korzystając z wyszukiwarek, warto zwrócić uwagę na szczegółowe instrukcje formułowania złożonych zapytań. Wprawdzie podstawowe wyszukiwanie jest bardzo uproszczone – wystarczy kolejno, oddzielając spacjami wpisać wyrazy znajdujące się z dużym prawdopodobieństwem w wyszukiwanym pliku, jednak skutkuje to zazwyczaj odnalezieniem wielu tysięcy wyników. Zaawansowane wyszukiwanie przydaje się zwłaszcza w sytuacji, gdy poszukujemy dokumentów zawierających słowo pojawiające się na wielu stronach www, ale być może w różnych kontekstach. Dość prostą i typową konstrukcją pozwalającą zawęzić kontekst poszukiwanego wzorca jest dodanie znaków „+" lub „-" na początku słowa wpisywanego do wzorca przeszukiwania. Dodanie symbolu „+" sprawia, że w wyniku selekcji otrzymamy strony, na których występuje wskazane słowo, zaś „-" przed słowem oznacza, iż interesują nas strony nie zawierające słowa występującego bezpośrednio po znaku „-". Między znakami „+", czy „-" a słowem, którego dotyczy ograniczenie nie powinny występować żadne spacje. Rozważmy następujący przykład:

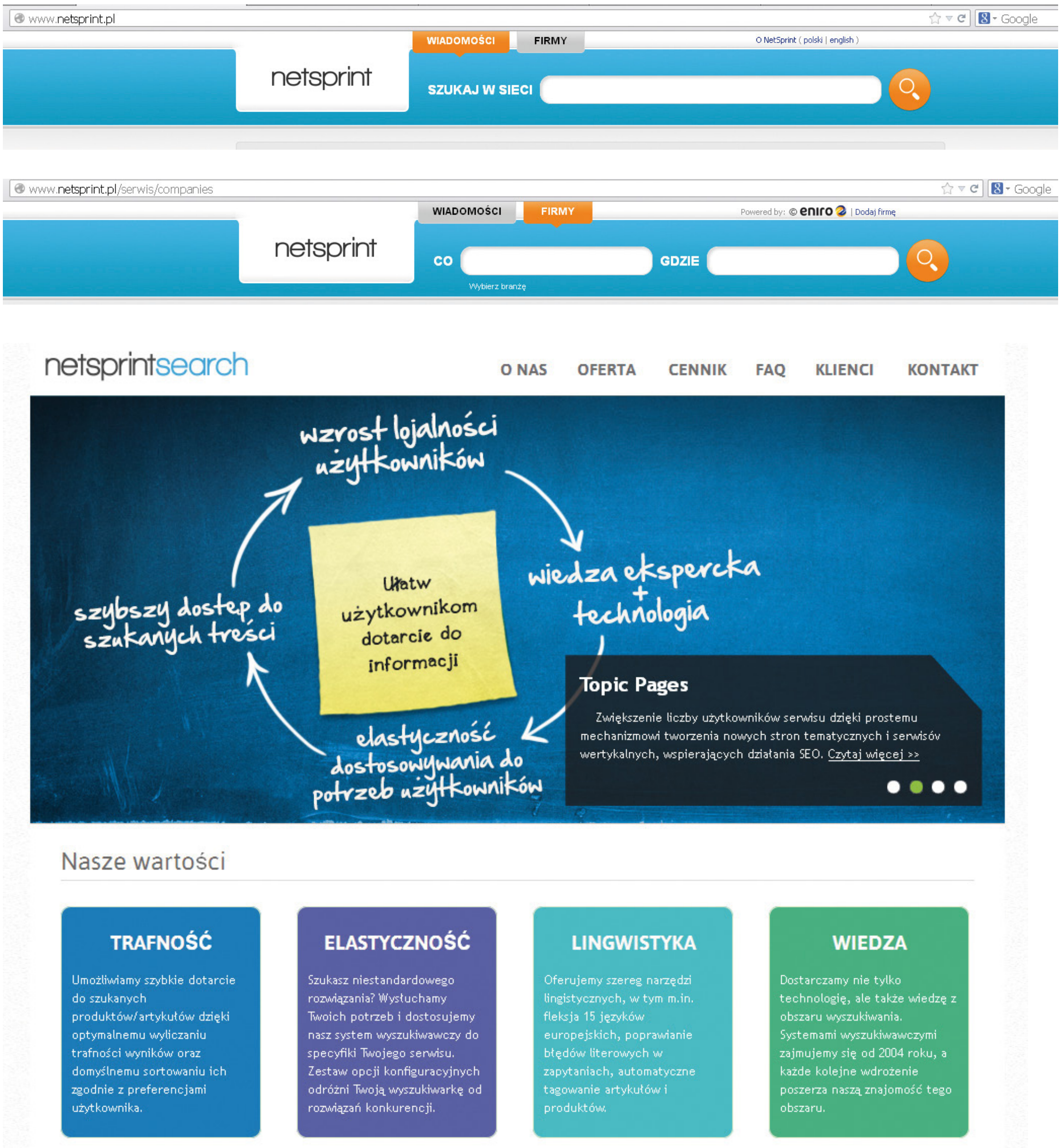
Interesuje nas oferta towarzystw ubezpieczeniowych w zakresie ubezpieczeń zdrowotnych. Wydając zapytanie „ubezpieczenie", otrzymujemy setki adresów stron poświęconych ubezpieczeniom komunikacyjnym, na życie, wypadkowych, II i III filaru itp. Chcąc temu jakoś zaradzić, możemy próbować precyzyjniej określić zawartość poszukiwanych stron. Proponowane zapytanie może mieć choćby taką postać:

Ubezpieczenie -komunikacyjne -życie -wypadkowe +zdrowotne

Część stron kodowanych jest bez użycia polskich znaków diakrytycznych bądź znaki te są kodowane w różny sposób. Odnalezienie podobnych stron kodowanych w różnych standardach znaków narodowych wiąże się z wydaniem dwóch lub więcej zapytań. Litera „ż" znajdująca się na takiej stronie w słowie „życie" nie spowoduje odrzucenia tego wyniku.

Obecnie prawie monopolistyczną pozycję wśród przeglądarek ma produkt najbogatszej korporacji świata – Google. Wprawdzie inny potentat branży oprogramowania – Microsoft agresywnie promuje swoją wyszukiwarkę – Bing, istnieją także takie, jak Babylon i Ask (firmy Ask.com), ale korzystanie z nich ma charakter marginesowy w porównaniu do ilości użyć potentata. Wymienione wyżej ogólnoświatowe produkty są ambitnie lokalizowane na dowolny język świata, stąd agresywnie wypierają rodzime produkty, które znikają lub dołączą do tła Google.

Jedną z rodzimych wyszukiwarek oferujących bogaty zasób informacji na temat krajowych zasobów Internetu jest polski NetSprint (Rys. 12). Na głównej stronie tego „szperacza sieci" znajdziemy łącznik do dokumentu opisującego formy wydawania precyzyjnych zapytań.



Rys. 12. Polska wyszukiwarka Netsprint – opcje wyszukiwania

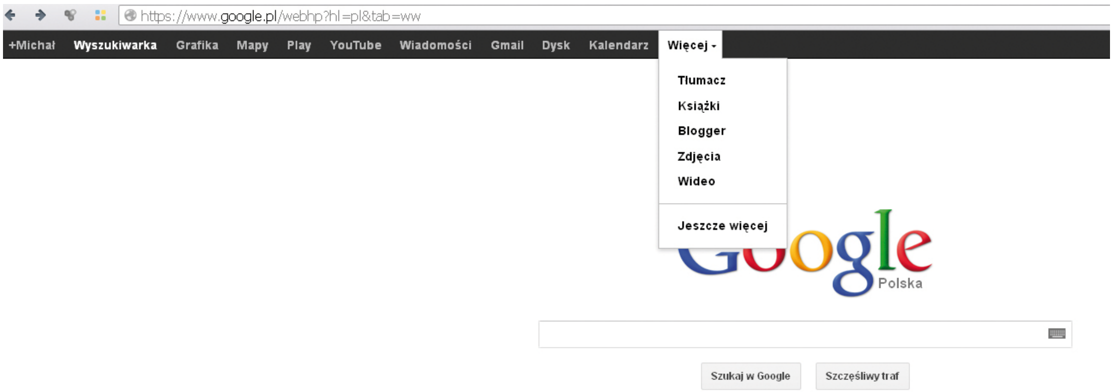
Źródło: Opracowanie własne

Wyszukiwanie wartościowych dokumentów w sieci Internet tylko pozornie jest zadaniem prostym. W rzeczywistości znalezienie unikatowych informacji w gąszczu dokumentów może stanowić poważne wyzwanie. Dobre systemy wyszukiwawcze oferują użytkownikom dwie metody formułowania zapytań: odpytywanie proste i zaawansowane – zawierające złożone reguły wyznaczające kryteria poszukiwania dokumentów pasujących do wzorca. W praktyce częściej korzysta się z zapytań prostych, ale warto zapoznać się również z metodami formułowania zapytań złożonych, zwłaszcza jeśli zasoby www mają być źródłem wiarygodnych informacji, na przykład do pisanej pracy dyplomowej.

Systemy wyszukiwarek sieciowych nieustannie przeglądają zasoby sieciowe w poszukiwaniu nowych dokumentów i sprawdzając ewentualne modyfikacje w dokumentach znajdujących się już w bazie danych systemu. Przeglądając dokładnie serwisy wyszukiwarek www, niekiedy spotkać można informacje o prawdopodobnym czasie, po jakim system samodzielnie powinien odszukać nowe dokumenty i dodać je do bazy informacji o zasobach. Zazwyczaj administratorzy wyszukiwarek podają również wskazówki, w jaki sposób możemy zapobiec automatycznemu gromadzeniu informacji o odwiedzanych stronach w systemach wyszukiwarek. Informacje te wyszukiwarka zbiera na potrzeby spontanicznego pozycjonowania stron w rankingach wyszukiwania, niemniej można uznać je za informacje z kategorii szpiegujących.

Choć nieustanna praca wyszukiwarek z dużym prawdopodobieństwem zaowocuje odnalezieniem stron www z okresu ostatnich tygodni, mamy możliwość „ręcznego" wskazania i usuwania adresów dokumentów oraz informacji określających przynależność zawartości danego dokumentu do konkretnej kategorii tematycznej w systemach wyszukiwań.

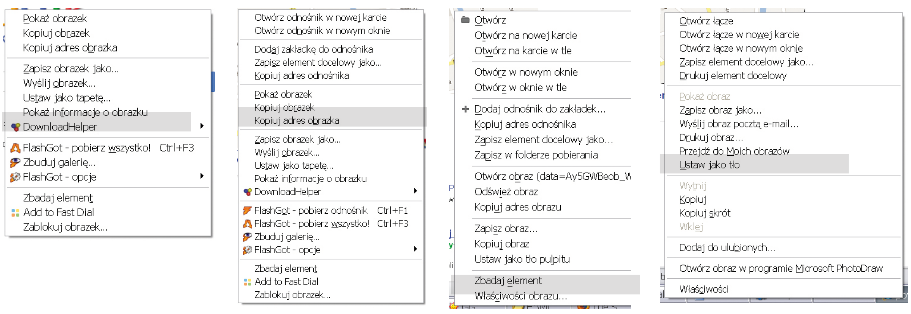
Zasoby światowej sieci internetowej to nie tylko dokumenty tekstowe i wiadomości. Istnieje szereg kategorii wyszukiwania oraz usług wpiętych w wiodącą wyszukiwarkę – grafika, mapy, kalendarz, tłumacz, poczta Gmail itp.



Rys. 13. Kategorie wyszukiwania i usług wyszukiwarki Google

Źródło: Opracowanie własne

Wiele programów posiada specyficzne formaty plików wynikowych. Do celów wymiany informacji powstały ogólnie uznane specyfikacje zapisu, tak by większość uznanego oprogramowania pozwalała zarówno je odczytać, jak i wyeksportować pracę w celu udostępnienia do powszechnie akceptowanego formatu. Także elementy strony www można w większości eksportować do plików w celu wykorzystania ich w trybie off-line lub zaimplementowania w dokumentach, prezentacjach itp. W zakresie tekstu z reguły działają metody znane z edytorów, polegające na zaznaczeniu interesującego fragmentu i użyciu mechanizmu kopiuj/wklej w dowolnej znanej postaci (albo z menu, albo spod prawego przycisku myszki i menu podręcznego, bądź za pomocą skrótów klawiszowych Ctrl+ci Ctrl+v). Elementy graficzne, programy, skompresowane paczki z plikami oraz udostępnioną muzykę można pobierać ze strony z wykorzystaniem prawego przycisku myszy i opcji menu podręcznego. W zależności od przeglądarki będą to różne polecenia typu: „Zapisz jako...", „Zapisz obrazek jako…", „Zapisz obraz jako…", „Zapisz element docelowy jako…".



Rys. 14. Różne sposoby pobierania obrazów ze strony www

Źródło: Opracowanie własne

Działając w odwrotnym kierunku, tzn. chcąc umieścić w sieci informację bądź obraz, bądź dowolne multimedia, trzeba zadbać o odpowiedni format pliku na etapie jego tworzenia. Edytor tekstów Word i konkurencyjny Writer z pakietu OpenOffice.org posiadają opcję zapisu dokumentu w formacie *.html, odpowiednim dla przeglądarek. Dokument jako załącznik do pobrania zapisuje się najczęściej w formacie *.pdf, gdyż po pierwsze zabezpiecza się go w ten sposób przed nieuprawnioną modyfikacją, a po drugie eliminuje ryzyko przeniesienia infekcji makrowirusowej, mogącej się zagnieździć w dokumencie formatu *.doc i *.docx (oba formaty pozwalają na używanie makr). Nieodpowiednim formatem grafiki dla stron www jest zarówno *.bmp (wielkość pliku), *.tif, jak i *.jpg, powszechnie używanym jest format *.gif. Duże pliki umieszczone na stronie spowalniają jej wczytywanie, są też trudne do pobrania, dlatego zaleca się ich skompresowanie, na przykład do formatu *.zip lub *.rar, przed umieszczeniem jako załączniki na stronie.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Mechanizmy związane z bezpieczeństwem danych: sprzętowe i programowe. Szyfrowanie, klucz, certyfikat, zapora ogniowa, RSA – omówienie pojęć i ich zastosowania.
b) Tworzenie zasobów sieciowych związanych z kształceniem i zainteresowaniami.
c) Zapisywanie istotnych informacji, dobierając formaty plików do rodzaju i przeznaczena zapisanych w nich informacji.

2.2. Oswajanie sieci jako miejsca spotkania. Wykorzystanie sieci do własnych działań kreatywnych

Zadziwiającą rolę odegrała sieć www w procesie ewolucji relacji międzyludzkich. Pierwotnie podważyła komunikację w postaci listów – e-mail zawiera te same atrybuty co tradycyjny list, charakteryzuje się uproszczonym sposobem adresowania, przy czym dociera do odbiorcy znacznie szybciej, jest bezpłatny i, będąc niezależnym od czynnika ludzkiego w przekazie, znacznie rzadziej się gubi.

Krótkie wiadomości tekstowe przekazywane przez pagery czy też SMS-y w telefonach komórkowych znalazły alternatywę w postaci programów zbiorczo nazwanych IM (ang. *instant messaging*) – pozwalających na rozmowy w czasie rzeczywistym.

Do nich zalicza się czat (*chat*) – pierwotna forma „pogawędek", zarówno zbiorowych jak i indywidualnych. Zbiorowe konwersacje odbywają się w podziale na kategorie tematyczne, które tworzą tzw. pokoje. Możliwe jest wyodrębnienie się z pokoju do rozmowy prywatnej z innym uczestnikiem chatu. Identyfikacja uczestników odbywa się na poziomie rejestracji, o ile jest prowadzona, później nie ma wymogu posługiwania się realnym imieniem – uczestnicy dyskusji posługują się nickiem – rodzajem pseudonimu. Do nicka przypisane jest indywidualne, wymyślone przez właściciela hasło, co w kolejnych wejściach na chat umożliwia autoryzację wyłącznie poprzez podanie właśnie nicka i hasła. Pogawędka odbywa się za pomocą krótkich wiadomości wpisywanych z klawiatury.Nad przestrzeganiem netykiety czuwa zazwyczaj moderator. Jego obecność jest wyróżniona innym kolorem czcionki, niedostępnym dla zwykłych użytkowników, np. żółtym. Wypowiedzi można wzbogacać ikonkami lub obrazkami wyrażającymi emocje – emotikonami. Podstawowy zestaw emotikonów opiera się o znaki dostępne z klawiatury i kody ASCII. I tak uśmiech wyraża zestawienie dwukropka i nawiasu zamykającego, czyli :), smutek to dwukropek i nawias otwierający, czyli :(, bądź w wersji rozbudowanej – uzupełnionej o „nos", emotikony będą wyglądał odpowiednio :-) i :-(. Często chaty mają wbudowane interpretery wrażliwe na takie połączenia znaków i zamieniają je na bardziej czytelne obrazki ☺ i ☹. Istnieje cały katalog emotikonek i ich interpretacji, wprawy w ich stosowaniu nabiera się w praktyce.

Inną formą, kładącą nacisk na komunikację osobistą dwóch osób, (w odróżnieniu od chatu preferującego komunikację zbiorową) są komunikatory. Są czymś pośrednim pomiędzy listą dyskusyjną a IRC'em (ang. *Internet Relay Chat*). Przykładem popularnego komunikatora jest światowy ICQ (skrót oznaczający fonetycznie wyrażenie *I seek You*, czyli *Szukam ciebie*) oraz, dominujący w Polsce Gadu-Gadu. Komunikatory skutecznie konkurują z SMS-ami i zanikającymi pagerami, głównie dzięki łatwości wpisywania tekstu oraz kosztu – za korzystanie z komunikatora nie ponosimy opłaty. Funkcjonalność komunikatorów ewoluuje o dodatkowe skojarzone usługi. Wzrost przepustowości łącz Internetowych zaowocował również udostępnieniem w komunikatorach komunikacji głosowej, a nawet wideo. Istnieją nawet komunikatory, które wyszły od usług kojarzonych z telefonami i rozwinęły się w kierunku transmisji obrazu, a funkcja pisania krótkich wiadomości jest w nich wtórna. Niewątpliwym królem rynku w tej kategorii jest Skype. Od tych innowacji już niedaleko do telefonii internetowej, zwanej VoIP (ang. *voiceover IP*, głos przez sieć), która na płaszczyźnie kosztów skutecznie konkuruje z telefonią stacjonarną.

Formą współczesnej prezentacji własnych doświadczeń i przemyśleń, a czasem rodzajem dziennika lub pamiętnika jest blog.

Wszystkie zaprezentowane rozwiązania przenikają do kursów e-learningowych (zdalnego nauczania) oraz ułatwiają wymianę poglądów i informacji zarówno pomiędzy uczniami, jak i w relacji uczeń–nauczyciel po godzinach spędzonych w szkole i stanowią ważny czynnik w procesie kształcenia permanentnego.

Przyczyniają się też do kształtowania i ugruntowania społeczeństwa informacyjnego.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wykorzystanie oprogramowania dydaktycznego i technologii informacyjno-komunikacyjnych w pracy twórczej i przy rozwiązywaniu zadań i problemów szkolnych. Jak to wygląda w Twojej szkole?
b) Sposoby konwersji plików multimedialnych i wpływ przetwarzania na ich jakość.
c) Praca z obrazem i filmem – opracowanie i przetwarzanie. Wymiana informacji w drodze dyskusji w sieci.

2.3. Komputer i programy edukacyjne środkiem do poszerzania wiedzy i umiejętności w każdej dziedzinie

Komputer wraz z tablicą multimedialną stanowią jeden ze współczesnych środków dydaktycznych wspomagających proces nauczania, a występując w roli pomocy dydaktycznej, znacząco wpływa na kształtowanie się języka specjalistycznego charakterystycznego dla danego przedmiotu. Potwierdzają to liczne badania przeprowadzone w szkołach II, III i IV etapu kształcenia oraz w szkołach wyższych, tak krajów zachodnich jak i byłego bloku wschodniego. Komputery wywołują duże zainteresowanie uczniów i wymuszają je także wśród nauczycieli, co przekłada się na tworzenie nowego modelu szkoły – nie tylko z zajęciami stacjonarnymi.

Twórcze użycie komputerów na lekcji umożliwia pokazanie procesów i zjawisk trudnych lub zbyt kosztownych do odtworzenia w pracowni albo niemożliwych do przedstawienia w inny sposób – symulacja bardzo szybko (lub bardzo wolno) przebiegających zjawisk i procesów bądź zjawisk istniejących w egzotycznych jak na Polskę warunkach. Przykładem może być symulacja zjawisk pogodowych, wybuchu wulkanu czy pracy silnika odrzutowego. Komputer daje przy tym możliwość interaktywnego uczestniczenia zarówno na etapie wprowadzania założeń, jak i podczas całego cyklu edukacyjnego, czym różni się od nauczania z wykorzystaniem radia i telewizji oraz filmów. Taka koncepcja pracy umożliwia indywidualizację tempa uczenia się, co jest o tyle ważne, że każdy z nas dysponuje różnym poziomem zdolności i percepcji, a komputer może wtedy sprawować permanentną kontrolę nad tym, co udało się zrobić i przydzielać nową porcję zadań, gdy materiał będzie opanowany w odpowiednim stopniu. Nauczyciel sprawuje wtedy rolę superwizora i ostatecznego arbitra w sytuacjach wykraczających poza model nauczania stworzony w komputerze. Takie nauczanie przebiega w sposób zindywidualizowany bez względu na liczebność klasy.

Ciekawostką z przeprowadzonych do tej pory eksperymentów i testów jest hipoteza granicząca z pewnością, że najlepsze wyniki daje wykorzystanie komputera w rozwiązywaniu problemów. Tutaj najpełniej ujawniają się jego gigantyczne możliwości– powstał wszak po to, by uczestniczyć bardzo aktywnie w procesie kreowania sytuacji problemowych, jak i pomagać w ich rozwiązywaniu, a następnie weryfikowaniu. Na podstawie licznych prób przeprowadzenia lekcji z wykorzystaniem komputera matematyk H. Kąkol[1] sformułował następujące wnioski:

- wizualizacja matematyki na ekranie monitora może być źródłem wielu nowych, często niespodziewanych sytuacji problemowych, których analiza doprowadza uczniów do odkrywania i formułowania różnorodnych problemów matematycznych. Możliwość „zobaczenia matematyki", często w ruchu, może przyczynić się do rozwijania intuicji matematycznych, tak bardzo potrzebnych w poszukiwaniu pomysłów rozwiązania rozpatrywanego problemu;
- możliwość wykonywania różnych eksperymentów komputerowych – obserwacja i analiza celowo dobieranych przypadków – daje możliwość nie tylko odkrywania pewnych prawidłowości, formułowania hipotez dotyczących rozwiązywanego problemu, ale także sprawdzenia tych hipotez, potwierdzenia słuszności wyboru odpowiedniego kierunku poszukiwań, a czasami znalezienia teoretycznego sposobu weryfikacji postawionej hipotezy, odkrycia idei dowodu matematycznego;
- stosowanie komputera w nauczaniu problemowym wymaga od ucznia pewnej dojrzałości umysłowej i matematycznej. W pierwszym rzędzie musi on mieć rozwiniętą zdolność prowadzenia obserwacji. Powinien umieć analizować otrzymane informacje, wykorzystywać analogie oraz stosować redukcyjno-dedukcyjne reguły wnioskowania. Widać więc, że komputer wydatnie wspomaga proces nauczania.

Ze względu na olbrzymie możliwości graficzne obecnych komputerów są one przydatne w zadaniach polegających na konstruowaniu i wizualizacji. Komputery pozwalają zaprezentować wykresy funkcji, modele brył, których fizycznie może nie być w danej pracowni szkolnej. Pozwalają uczyć wzorów na pola wielokątów, jednocześnie pokazując pochodzenie tych wzorów.

Komputer nie zastąpi nauczyciela. Nauczyciele nie tylko nie staną się przeżytkiem, ale ich rola nawet wzrośnie, o ile rozwiną się w kierunku nowych możliwości, bez zbytniego pielęgnowania starych nawyków i rutyny. Komputery, w sensie środków dydaktycznych na czasie, mogą być efektywnym narzędziem nauczania i uczenia się, w tym samokształcenia podczas samodzielnej pracy. Mogą też być aktywnym elementem rozwiązania problemu zajęć wyrównawczych i uzupełniania luk w wiadomościach. Kształtując język pojęć i dyscyplinę logicznego myślenia, komputery przyczyniają się do rozwoju umiejętności właściwego formułowania problemu, z wykorzystaniem specjalistycznego słownictwa i systematycznego, algorytmicznego podejścia do koncepcji jego rozwiązania. Istotnym zagadnieniem jest dobór odpowiednich programów dydaktycznych, które sprostają wymaganiom i oczekiwaniom stawianym technice komputerowej. One właśnie w decydującym stopniu będą czynnikiem „za" lub „przeciw" wykorzystania komputera na lekcji i w czasie samodzielnej pracy. Nie wszystkie programy komputerowe są odpowiednim narzędziem zarówno pod względem merytorycznym, jak i dydaktycznym. Autorki artykułu „Propozycja kryterium oceny dydaktycznych programów komputerowych" (B. Ornowska, T. Słowińska, 1991) podjęły próbę przedstawienia kryteriów oceny programów komputerowych pod względem dydaktyki. Proponowana przez obie autorki ocena dydaktyczna programów komputerowych uwzględnia trzy główne aspekty:

1) wartość techniczną programu;
2) wartość dydaktyczną programu;
3) możliwość zastosowania programu.

Podstawową cechą każdego programu komputerowego musi być jego sprawność techniczna. Sposób sterowania przebiegiem programu istotnie wpływa na jakość komunikowania się z komputerem, może motywować lub rozpraszać. Obsługa programu dydaktycznego powinna być prosta. W tym celu program musi na bieżąco informować o sposobie wprowadzania informacji do komputera. W przypadku uzyskania nietypowej informacji komputer powinien powiadomić o tym i umożliwić ponowne wprowadzenie informacji.

1. Kąkol H., Problemowe nauczanie matematyki a komputer, Matematyka, nr 2, Warszawa 1991.

Ocenę wartości dydaktycznej programu komputerowego należy rozpocząć od sprawdzenia, czy nie zawiera on błędów merytorycznych. Drugim aspektem jest poprawność w sensie językowym – ortograficzna i gramatyczna poprawność tekstów pojawiających się na ekranie. Także wielu twórczych nauczycieli przygotowuje interaktywne lekcje i publikuje je na przykład na stronach portalu www.scholaris.pl w postaci:

1. e-lekcji;
2. ćwiczeń interaktywnych;
3. prezentacji multimedialnych.

Warto poszukać innych portali, choć nie wszystkie są wartościowe lub nie zawierają wiarygodnych treści, tak więc w doborze powinno się kierować poradą światłego nauczyciela.

Programy edukacyjne i komputer można wykorzystać także do samodzielnej nauki, bez nadzoru nauczyciela. Wydaje się nawet, że jest to nawet cenniejsze niż praca pod nadzorem, wymaga bowiem przyjęcia na siebie odpowiedzialności za to, co się osiągnie, dyscypliny wewnętrznej i automotywacji do poszerzenia swojej wiedzy. Jest to też swoisty sprawdzian przed samym sobą, czy potrafimy pracować samodzielnie, bez konieczności sprawowania nad nami kontroli.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Czym się kierować dobierając zestaw: portal wiedzowy, forum, newsroom do swojego obszaru zainteresowań?

b) Czy spotkałeś się z e-learningiem? Jakie niekomercyjne platformy znasz? Spróbuj odnaleźć jak najwięcej informacji na temat możliwości pracy na platformie moodle.

2.4. Wykorzystywanie komputera i technologii informacyjno-komunikacyjnych do rozwijania zainteresowań

Szczególnie pożądaną sprawnością jest umiejętne wyszukanie forów o tematyce, która jest przedmiotem naszego zainteresowania. Jeśli interesują nas na przykład nietoperze, to warto znaleźć takie miejsce wymiany informacji na ich temat pomiędzy pasjonatami – chiropterologami. Z ich wypowiedzi można się dowiedzieć o wiele więcej, niż udałoby się znaleźć w dostępnych podręcznikach, poza tym jest to wiedza jak najbardziej praktyczna, której nie sposób przecenić. Świetna jest też możliwość zadawania tym ekspertom pytań i wyjaśniania z ich pomocą wątpliwości i zagadek, które w naturalny sposób pojawiają się u kogoś na początku drogi do bycia specjalistą w dziedzinie nietoperzy. Wszak istnieje duże prawdopodobieństwo, że to, co zaobserwujemy u naszych podopiecznych, ktoś już kiedyś widział, zbadał i wyjaśnił.

Warto zdać sobie sprawę, że Internet jest globalną wioską i nawet jeśli dziedzina wiedzy, która nam się spodobała, jest egzotyczna w naszym środowisku – nie znamy w okolicy fizycznie nikogo, kto by się tym zajmował – to Internet umożliwia odnalezienie się osób odległych terytorialnie, za to bliskich w sferze zainteresowań.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wymień i omów nowe urządzenia informacyjno-komunikacyjne, które zwróciły Twoją uwagę w ostatnim czasie.

Bibliografia:

Anyszko R.,Kott., *Wychowanie dzieci w zakładzie leczniczym*, Warszawa 1988.

Hassa A., Komputer jako środek dydaktyczny, *Komputer w szkole*, nr 3, 1998. Juszczyk, W. Zając, *Komputerowa edukacja uczniów z zaburzeniami w czytaniu i pisaniu*, Katowice 1997.

Kąkol H., Problemowe nauczanie matematyki, a komputer, Matematyka, nr 2, 1991.

Ornowska B., Słowińska T., Propozycja kryterium oceny dydaktycznych programów komputerowych, *Matematyka*, nr 5, 1991,

Osmańska – Furmanek W., Jędryczkowski J., *Prezentacje multimedialne w procesie uczenia się*, Toruń 2004.

Tanaś M., *Edukacyjne zastosowanie komputerów*, Warszawa 1997.

Zakrzewska B., Koncepcja procesu reedukacji uczniów z trudnościami w pisaniu i czytaniu, Życie szkoły, nr 7, 2003.

3. Bezpieczne i kulturalne korzystanie z zasobów sieciowych. Netykieta

3.1. Posługiwanie się komputerem lokalnie i w sieci. Rewolucja informacyjna w społeczeństwie

Współczesny świat nauczył się korzystać z możliwości, jakie daje sprzęt komputerowy, niemal w każdej dziedzinie życia, zwłaszcza w powiązaniu z Internetem i, ogólnie, zdobyczami informatyki. Główne sfery życia społecznego, gospodarczego i kulturalnego ich mają swoje odwzorowanie w sieci. Powstały nowe pojęcia związane z tą aktywnością, takie jak:

- **e-government** – paleta rozwiązań wykorzystywanych przez administrację rządową i instytucje samorządowe do zdalnej obsługi petentów.
- **e-commerce** – handel i usługi internetowe, począwszy od obecności firm w sieci, poprzez strony firmowe i sklepy internetowe (niektóre z nich w pełni bazują na sprzedaży przez Internet), do portali aukcyjnych, takich jak www.allegro.pl czy www.e-bay.com, na których sprzedają zarówno osoby fizyczne, jak i wyspecjalizowane firmy. Specyficznym typem handlu w sieci jest możliwość zawierania kontraktów i umów w Internecie realizowana przez Urząd Zamówień Publicznych. Prowadzony przez UZP *Biuletyn Zamówień Publicznych* służy do publikacji ogłoszeń przetargowych, obowiązkowych dla instytucji sektora administracji (dysponujących środkami publicznymi, w tym dotacjami UE), a dobrowolnych dla każdego innego podmiotu pragnącego dokonać wyboru wykonawcy zamówienia na przykład w trybie przetargu nieograniczonego. Taki sposób kontraktowania sprzyja gospodarności w wydawaniu pieniędzy publicznych oraz transparentności dystrybucji tych środków.
- **e-banking** – bankowość elektroniczna, która pozwola klientom banku na samodzielne wykonywanie czasochłonnych operacji, na przykład płatności za rachunki, zmniejszając w ten sposób koszty obsługi, redukując zatrudnienie na stanowiskach kasowych i wymuszając przesunięcie pracowników do innych czynności, wreszcie likwidując uciążliwe kolejki do okienek na rzecz wygodnego zarządzania kontem z fotela przy pomocy komputera domowego. Operacje elektroniczne przyspieszyły też obieg pieniądza, z 3 dni do paru godzin, oraz pozwoliły na błyskawiczną wymianę informacji pomiędzy bankami, co zablokowało drogę do nadużyć, na przykład w postaci słynnego oscylatora ekonomicznego z roku 1989.
- **e-working** – czyli telepraca, praca wykonywana z domu. Nowa atrakcyjna forma zatrudnienia, zwłaszcza dla ludzi z dysfunkcjami ruchowymi, mieszkających w dużej odległości od miejsca zatrudnienia lub mogących świadczyć pracę tylko w sposób przerywany, nieregularny lub tylko w określonym czasie (np. rodzic wychowujący małe dziecko czy moderator forum internetowego).

- **e-learning** – kursy i studia przez Internet. Coraz bardziej popularna forma kształcenia. Zajęcia składają się z wideokonferencji, testów on-line, a materiały dydaktyczne są rozprowadzane w postaci elektronicznej. Jest to nie tylko atrakcyjny sposób na przekwalifikowanie się lub uzupełniania braków w wykształceniu, ale także ogromna szansa dla ludzi mieszkających z dala od dużych ośrodków naukowych, na niedostępnych na przykład zimą terenach. Ostatnio dostrzeżono też możliwość wykorzystania e-learningu jako zajęć z uczniem zdolnym lub dodatkowych ćwiczeń dla ucznia opóźnionego. W dobie cięcia kosztów funkcjonowania szkół i likwidacji zajęć pozalekcyjnych jest to szczególnie cenna możliwość

Oprócz wymienionych „e-" z technologii informatycznych w szerokim zakresie korzysta medycyna. Nie tylko badania naukowe nad DNA czy nowotworami, lecz także podstawowe badania diagnostyczne są obecnie zdominowane przez komputery – choćby badanie USG, w badanie wzroku (metody komputerowe zastąpiły tradycyjne) czy diagnostyka wad serca u niemowląt. Ponadto wymuszono prowadzenie całej dokumentacji medycznej w specjalistycznych programach – od rejestracji, po raportowanie do NFZ.

Netykieta

Tak jak w życiu codziennym obowiązuje nas kultura osobista i zachowanie się zgodnie z zasadami *savoir-vivre'u*, tak w sieci funkcjonuje kodeks wzorowego zachowania i dobrych manier zwany **netykietą**. Jego trzy główne zasady to:

1) Myśl.
2) Nie nadużywaj.
3) Nie działaj na czyjąś szkodę.

Ponadto do podstawowych reguł netykiety należą (wybór na podstawie http://netykieta.prv.pl/, marzec 2013):

1. Reguły w dziedzinie komunikacji elektronicznej:

a) E-mail (poczta):

- nie przesyłaj plików większych niż 200 KB bez uprzedzenia adresata. Staraj się mimo wszystko nie przesyłać tą drogą dużych plików. Jeśli to możliwe – lepiej użyć jednego z serwisów do przekazywania przez sieć dużych plików, jak np. https://www.dropbox.com;
- nie rozsyłaj łańcuszków szczęścia ani innego spamu (niechcianej poczty);
- jeśli wstawiasz stopkę z podpisem w mail'ach, postaraj się by nie była ona dłuższa niż 3–4 linijki. Umieść tam istotne informacje, konkretne i jak najkrótsze. Jeśli chcesz cytować sławnych – nie wysyłaj nikomu dwa razy tego samego, bo to mija się z celem;
- sprawdź swój komputer, czy nie jest zainfekowany, byś nie przesyłał wirusów innym;
- gdy wysyłasz list do grupy osób, korzystaj z pola „UDW" (Ukryty do Wiadomości). Nie każdy chce, by jego adres e-mail został ujawniony pozostałym adresatom;
- staraj się nadawać tytuł wysyłanym mail'om, np. odzwierciedlający zawartość wiadomości.

b) Komunikatory, takie jak Skype czyGadu-Gadu:

- ustawiając status opisowy w programie tego typu, staraj się, żeby dawał on jakąkolwiek informację, a nie np.: „papa!!!", „Elvis żyje". Znacznie sensowniejszy jest opis „będę po 20:00", „tylko w ważnych sprawach";
- nie wstawiaj w wiadomości całej galerii emotikonów (buziek) naraz. Emotikony mają wyrażać uczucia, które ciężko inaczej pokazać w sieci.

c) Fora dyskusyjne:

- nie należy pisać całej wypowiedzi dużymi literami, gdyż oznacza to krzyk;
- nie zadawaj pytania, na które już kiedyś została na forum udzielona odpowiedź. Zanim je zadasz, sprawdź, czy nie ma na nie odpowiedzi w FAQ lub za pomocą wyszukiwarki na forum co najmniej dwie pierwsze jego strony;
- nie pisz nie na temat, w nieodpowiednim wątku;
- nie powtarzaj swojej wypowiedzi wielokrotnie;
- nie używaj w swojej stopce na forum obrazków powyżej 100 KB, ani nieforemnych – zbyt szerokich lub wysokich.

d) Strony www – tworzenie:

– dobieraj tak kolory, żeby dało się choć chwilę na to patrzeć;
– nie umieszczaj na pierwszej stronie plików większych niż 50 KB. Choć to pierwsza strona, niech się nie ładuje w nieskończoność;
– jeśli nie jest to galeria zdjęć, umieszczaj obrazy w rozdzielczości 72 piksele na cal;
– nie przywłaszczaj sobie bezprawnie efektu pracy innych osób;
– staraj się, aby strona była dobrze wyświetlana w każdej z popularnych przeglądarek (Internet Explorer, Mozilla FireFox, Opera, Chrome).
–

2. Reguły typowo kulturalne – w zakresie relacji międzyludzkich

– nie obrażaj nikogo, staraj się tego nie czynić publicznie nawet wtedy, gdy masz ku temu powody;
– swoje opinie wyrażaj zawsze w sposób kulturalny. Pamiętaj zawsze, że nie jesteś sam jeden na świecie i że nie jesteś najważniejszy.

Na koniec pamiętaj, że tak na prawdę w Internecie nikt nie jest anonimowy! Zawsze można dojść do tego, kto, skąd, kiedy, gdzie i co.

3.2. Społeczne i prawne zagrożenie wynikające z korzystania z Internetu

Przy dynamicznym rozwoju informatyki i Internetu należy sobie uświadamiać pewne zjawiska negatywne związane z używaniem tegoż narzędzia. Powinni na nie zwrócić uwagę szczególnie nauczyciele i rodzice. Zagrożenia te można podzielić na kilka rodzajów:

a) **Fizyczne** – wpływające na wzrok i postawę. Należy dbać o higienę pracy przy komputerze, zapewnić bezpieczne warunki pracy, właściwy sprzęt, oświetlenie, uczyć prawidłowej postawy podczas pracy na komputerze i zmuszać do czynienia przerw rekreacyjnych podczas pracy.

b) **Moralne** – łatwy, niekontrolowany dostęp do informacji niekoniecznie bezpiecznej (np. narkotyki, pornografia, instrukcja konstruowania bomby). Niezbędna jest bliskość i zainteresowanie opiekunów tym, co robią podopieczni, aby można było we właściwym momencie interweniować.

c) **Psychiczne** – uzależnienie od komputera, funkcjonowanie w wirtualnej rzeczywistość oderwanej od życia. Komputer może uzależnić w taki sam sposób jak alkohol, praca czy narkotyki. Początkowo uzależnienie jest niezauważalne. Z czasem, rozwijając się, zaczyna powodować wyraźne szkody. Pierwszą z nich jest postępująca izolacja. Uzależniony od komputera nawet nie szuka związków z innymi ludźmi – szybko zastępuje je maszyna, do której na koniec zaczyna mieć stosunek emocjonalny. Nie potrafi zwyczajnie komunikować się z innymi ludźmi, okazując duży lęk przed kontaktami z nimi, czasami maskując go przez okazywanie swojej wyższości. Drugie poważne niebezpieczeństwo, jakie niesie ze sobą uzależnienie się od komputera, to rozładowywanie z jego pomocą wszelkich napięć. Skrajnie głęboko uzależnieni poczucie bezpieczeństwa znajdują wyłącznie przy komputerze.

Należy tu wspomnieć o ważnej roli nauczycieli, którzy powinni uświadamiać rodzicom te zagrożenia dla psychiki ich dzieci i wspólnie, rodzice i nauczyciele, powinni dbać, aby dzieci i młodzież zainteresować grami rozwijającymi ich osobowość, aby miały dostęp do encyklopedii i programów edukacyjnych, a nie były pozostawione same sobie. Dzieci i młodzież muszą czuć życzliwe zainteresowanie ich sprawami i rozwojem płynące ze strony osób im bliskich.

d) **Intelektualne** – bezkrytyczne zaufanie do możliwości maszyny, „szok informacyjny". Gdy napływ informacji jest zbyt szybki, mózg siłą rzeczy traci zdolność racjonalnej selekcji wiadomości na sensowne vs. nic nie warte. Chcąc nie chcąc, zaczyna absorbować wiadomości przypadkowe, odkładając do głowy nic nie warte bardzo ważne wiadomości o niczym

e) **Społeczne** – zachowania nieetyczne, brak hamulców. Na przykład grzeczna i dobra w rzeczywistości uczennica w trakcie rozmowy z kimś poprzez sieć „wypluwa" z siebie serię okropnych przekleństw, których nigdy nie odważyłaby się powiedzieć na głos, nawet sama przed sobą. Trzeba o tym z uczniami rozmawiać, czasem nawet zawstydzać i uświadamiać, że kultura i dobre wychowanie jest wartością samą w sobie, nawet wobec anonimowego rozmówcy.

f) **Sieciowe** – w sieci można znaleźć ogromne ilości informacji, od aktualnych wiadomości z dowolnego miejsca świata do szczegółowych treści interesujących jedynie wąskie grono specjalistów.

Oprócz niezaprzeczalnych korzyści z rozwoju sieci WWW, istnieją jej negatywne aspekty. Ilość informacji zawartych w Internecie nie koreluje z ich jakością. Nigdy nie można być do końca pewnym znalezionych treści.

Uzależnienie od sieci nie jest stanem jednorodnym, przejawia się różnymi zespołami zachowań:

- **uzależnienie cyberseksualne** – oglądanie, kupowanie czy kopiowanie na swój dysk pornografii sieciowej;
- **elektroniczny hazard** – przeznaczanie czasu i środków na gry sieciowe, aukcje, zakłady;
- **przeładowanie informacjami** – nadmierne gromadzenie i przeglądanie danych z Internetu;
- **uzależnienie od komputera** – obsesyjne granie w sieci.

Wraz z coraz większym rozwojem technologii informacyjnej zagrożenia będą coraz większe, łatwo staną się epidemią, jeśli nie zadba się o odpowiednie kształcenie użytkowników, w szczególności dzieci i młodzieży.

Wskazówki bezpieczeństwa, które warto wziąć pod uwagę w czasie rozmów z nastolatkami na temat zagrożeń w Internecie:

- Sporządzić domowy regulamin korzystania z Internetu. Określić rodzaj witryn, których dzieci nie mogą przeglądać, godziny, w których mogą korzystać z Internetu oraz zasady komunikacji internetowej, obejmujące korzystanie z chatroomów.
- Komputery z dostępem do Internetu ustawić w ogólnodostępnym miejscu, nie w pokojach dzieci.
- Wyposażyć komputer w narzędzia do filtrowania zawartości Internetu (np. funkcja kontroli rodzicielskiej), które będą uzupełniać nadzór rodzicielski.
- Zabronić umawiania się z osobami poznanymi w Internecie.
- Bez pozwolenia dzieci nigdy nie powinny ujawniać jakichkolwiek informacji osobistych: w wiadomościach e-mail, chatroomach, wiadomościach błyskawicznych, formularzach rejestracyjnych, profilach osobistych, ani nie powinny uczestniczyć w konkursach internetowych.
- Nie pozwolać dzieciom na pobieranie programów, muzyki i plików bez zezwolenia osoby dorosłej. Rodzic powinien powiedzieć im, że udostępnianie plików lub pobieranie z Internetu tekstów, obrazów lub ilustracji może stanowić naruszenie praw autorskich i złamanie prawa.
- Zachęcać dzieci do mówienia o tym, co wzbudza w nich niepokój lub poczucie zagrożenia. Dowiedzieć się więcej o sposobach postępowania z internetowymi pedofilami i dręczycielami.
- Przedstawić zagrożenia związane z pornografią w Internecie i skierować młodego człowieka do właściwych witryn poświęconych zdrowiu i seksualności.
- Przedstawić sposoby chronienia się przed spamem.
- Zapoznać się z witrynami, które dzieci często odwiedzają. Upewnić się, że nie odwiedzają witryn z obraźliwymi treściami i nie wysyłają informacji osobistych lub swoich zdjęć.
- Uczyć młodzież odpowiedzialnego, etycznego zachowania w Internecie. Dzieci nie powinny używać Internetu do rozsiewania plotek, tyranizowania lub grożenia innym.
- Transakcje finansowe dokonywane w Internecie (np. zamówienie, kupno lub sprzedaż jakiegoś) przedmiotu muszą być uzgadniane z rodzicami.
- Przedstawić zjawisko hazardu internetowego oraz zagrożenia, jakie ze sobą niesie. Przypomnieć młodzieży, że uprawianie hazardu internetowego przez osoby niepełnoletnie jest nielegalne.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Omów zagadnienia: przestępczości komputerowej, w tym piractwa komputerowego oraz nielegalnych transakcji w sieci, oraz zasady bezpiecznego udostępniania i adminstrowania danymi zamieszczanymi w sieci.

b) Opisz wynikające z rozwoju technologii informacyjno-komunikacyjnych szanse i zagrożenia dla rozwoju społeczeństwa.

c) Komputer i technologie informacyjno-komunikacyjne jako czynnik rozwoju albo uwstecznienia współczesnego człowieka – wyjaśnij i uzasadnij własne stanowisko.

Bibliografia:

Szewczyk A., *Oblicza ubóstwa w społeczeństwie informacyjnym*, Warszawa 2006.

Szewczyk A., *Dylematy cywilizacji informatycznej*, Warszawa 2004.

Szewczyk A., *Problemy moralne w świecie informacji*, Warszawa 2008.

Haber L.H., Niezgoda M., *Społeczeństwo informacyjne. Aspekty funkcjonalne i dysfunkcjonalne*, Kraków 2007.

Białobłocki T., Moroz J., Nowina-Konopka M., Zacher L. W., *Społeczeństwo informacyjne. Istota, problemy, wyzwania*, Warszawa 2006.

4. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera

4.1. Algorytm jako metoda rozwiązywania problemu

Algorytm definiuje się jako metodę systematycznego, krok po kroku, postępowania prowadzącego do rozwiązania problemu lub osiągnięcia celu. Za pierwowzór współczesnych algorytmów uznaje się stworzony wieki temu algorytm Euklidesa. Algorytm porównuje się także do instrukcji postępowania lub przepisu wykonania. Postępowanie algorytmiczne kojarzy się z precyzyjną, dokładną i o minimalnych nakładach metodą dążenia do celu. Ważną cechą algorytmu jest fakt, że dla tych samych danych wejściowych zastosowanie tego samego algorytmu zawsze doprowadzi do identycznych rozwiązań. **Postępowanie algorytmiczne** jest przeciwieństwem losowego eksperymentowania, stosowanego czasem do znalezienia rozwiązania.

W procesie algorytmicznym dość wyraźnie zaznaczone są etapy definiowania problemu, projektowania i otrzymywania rozwiązania. Rozwiązanie nazywa się dobrym, jeśli jest zrozumiałe dla każdego, poprawne i efektywne[1].

Bardziej szczegółowo, proces komputerowej metodologii osiągania celu można scharakteryzować 6 etapami[2]:

1. opis i analiza sytuacji problemowej;
2. sporządzenie specyfikacji problemu z uwzględnieniem opisu danych wejściowych, opisu wyników, opisu powiązań i zależności pomiędzy danymi i wynikami;
3. zaprojektowanie rozwiązania – program, algorytm, struktura danych i środowisko w postaci odpowiedniego języka programowania;
4. komputerowa realizacja rozwiązania wraz z badaniem efektywności działania dla różnych danych.
5. testowanie rozwiązania, weryfikacja poprawności i zgodności ze specyfikacją;
6. prezentacja rozwiązania oraz stworzenie dokumentacji dla przyszłych użytkowników.

Do zadań realizowanych algorytmicznie należy choćby sortowanie danych, porządkowanie z uwagi na zadane kryterium, wyszukiwanie elementu spełniającego zadane kryteria.

Algorytmiczne podejście do rozwiązywania problemów możemy spotkać w działalności gospodarczej firm. Każdy wykonawca robót budowlanych czy drogowych ma do czynienia z kosztorysem wykonawczym, który jest dokładną procedurą wykonania poszczególnych prac. Charakter algorytmu mają także instrukcje napraw sprzętu AGD czy też sposób udzielania pierwszej pomocy ofierze wypadku.

1. M. Sysło, *Algorytmika i programowanie. Wprowadzenie do algorytmiki i programowania, wyszukiwanie i porządkowanie informacji*, Warszawa 2009.
2. tamże

TEMATY DO DYSKUSJI

a) W programie Excel oblicz realny koszt (z podatkiem) zakupu zestawu komputerowego. W sklepie uzyskujesz ceny poszczególnych elementów bez podatku VAT. Opisz to zdanie w postaci listy kroków.
b) Napisz algorytm kosztorysu wykonawczego dowolnie wybranej usługi.
c) Opracuj algorytm w postaci czynności, realizując wysyłanie listu elektronicznego do kolegi (przy użyciu portalu internetowego, na którym masz konto i znasz jego e-mail) z zapytaniem odnośnie wybranej sytuacji probelmowej.
d) Podaj algorytm wyszukiwania lidera w *n*-elementowym zbiorze.
e) Posłuż się metodą „dziel i zwyciężaj" w rozwiązaniu dowolnie wybranej sytuacji problemowej.
f) Zastosuj rekurencję/podejście zachłanne w rozwiązaniu prostej sytuacji problemowej.

4.2. Nie chowaj rozwiązania do szuflady!

Po zrealizowaniu procesu rozwiązywania problemu za pomocą programu komputerowego należy przetestować otrzymane rozwiązanie, ocenić jego własności, odporność na nieumyślne lub celowe uszkodzenia. Bardzo ważne jest powtórne porównanie jego zgodności ze specyfikacją.

Z uwagi na zawodność pamięci ludzkiej należy sporządzić opis dochodzenia do końcowego efektu. Niekwestionowaną wartością dodaną będzie zaprezentowanie problemu, całego postępowania i efektów innym, może się to bowiem przyczynić do dalszego zgłębiania i analizy zjawiska, tworzenia nowych algorytmów, rozwoju osobistego uczestników spotkania.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Profesjonalne testowanie oprogramowania – etapy.
b) Dobór odpowiedniej formy prezentowania efektów pracy i zastosowanej metodyki.
c) Czy komputer może podpowiedzieć nam, co należy zrobić? Testowanie rozwiązań.

Bibliografia:

Sysło M., *Algorytmika i programowanie. Wprowadzenie do algorytmiki i programowania, wyszukiwanie i porządkowanie informacji*, Warszawa 2009.

Cormen T. H, Leierson C. E., Rivest R. L., *Wprowadzenie do algorytmów*, Warszawa 1997.

Harel D., *Algorytmika. Rzecz o istocie informatyki*, Warszawa 1992.

Sysło M. M., *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, Warszawa 1998.

5. Opracowanie informacji za pomocą komputera – arkusze kalkulacyjne, grafika menedżerska i prezentacyjna

5.1. Kto piękny, ten piękny, inni mają Photoshopa

Każdy obraz stworzony lub tylko edytowany w komputerze można zaliczyć do jednej z dwóch kategorii: albo jest bitmapą, albo grafiką wektorową. W dobie dominacji systemu operacyjnego Windows najłatwiej dostępnym rodzajem edytora grafiki rastrowej jest wbudowany w ten system program pod nazwą Paint, w którym obraz powstaje przez odpowiednie zabarwienie poszczególnych punktów (inaczej pikseli) na ekranie. Taki obraz jest pamiętany w postaci bitmapy, tzn. zbioru pikseli. W ten sposób tworzy się grafikę zwaną rastrową. W edytorach grafiki bitmapowej edycja jest możliwa na poziomie pojedynczych punktów lub ich grup, można na przykład zmienić kolor jednokolorowego obszaru otoczonego innym kolorem. Edytory tego typu można również wykorzystywać do korekcji zdjęć pamiętanych w formacie bitmapy, choć akurat skromne możliwości zawarte we wspomnianym programie sugerują użycie bardziej zaawansowanej aplikacji, na przykład wspomnianego w tytule rozdziału Adobe® Photoshopa.

W celu wykonania jakiejkolwiek operacji na rysunku konieczne jest wskazanie, którego elementu ma ona dotyczyć – należy go zaznaczyć. Zaznaczanie (inna nazwa to *maskowanie*) fragmentów rysunku polega na wyodrębnieniu fragmentu kompozycji, który ma być edytowany (kopiowany, przekształcany, powiększany/zmniejszany, zamierzono zmianę jego barwy itp.). Dodatkowo ułatwia to tworzenie choćby kompozycji symetrycznych lub złożonych z powtarzających się motywów – program może posiadać bezpośrednio takie narzędzia bądź efekt jest możliwy do osiągnięcia po wklejeniu kopii i jej symetrycznym odbiciu względem jakiejś osi. Do dyspozycji jest zaznaczanie regularnego (np. kwadratowego, prostokątnego) obszaru lub obszaru o dowolnym kształcie. Niektóre edytory mają jeszcze inne, bardziej rozbudowane możliwości zaznaczania fragmentu rysunku, GIMP na przykład pozwala jednym kliknięciem zaznaczyć wszystkie obszary rysunku, które mają określony kolor. Aby poddać edycji fragment bitmapy, należy po zaznaczeniu skorzystać z narzędzi na przykład zmiany wielkości i położenia. Warty zauważenia jest fakt, że przy powiększaniu obrazu nie zwiększa się liczba punktów, które go tworzą – powiększanie się punktów obrazu powoduje utratę ostrości i efekt „schodkowania". Bardziej zaawansowane edytory grafiki rastrowej (np. program GIMP) umożliwiają automatyczne wygładzanie krawędzi przy skalowaniu. Niemniej, w przypadku krzywych i łuków przy odpowiednim powiększeniu każda z tych linii będzie miała poszarpane krawędzie i schodki.

Jeśli planuje się wykonanie tej samej operacji na kilku obiektach, programy zazwyczaj umożliwiają ich grupowanie z użyciem (przytrzymaniem) klawisza Shift.

Inną koncepcję budowania obrazu reprezentują edytory grafiki wektorowej, z których najbardziej znaną aplikacją komercyjną jest Corel® Draw, zaś po stronie oprogramowania open source – Inkscape. W edytorach tych każdy element rysunku, tak tworzony w trybie rysowania odręcznego jak i z gotowych elementów, jest zapamiętywany za pomocą wzorów matematycznych. Nawet fragmenty odręczne są interpolowane do krzywych matematycznych. Każdy element rysunku jest osobnym tzw. wektorem. Dzięki temu można wrócić w każdej chwili do jego edycji i zmiany właściwości – położenia, koloru i wymiarów. Można modyfikować sposób i kolejność nakładania się poszczególnych obiektów oraz grupować/rozgrupowywać je w dowolnym momencie.

Obraz wykonany jako grafika wektorowa może być zapisany w formacie grafiki rastrowej, jednakże nastąpi wtedy utrata informacji o budujących go wzorach matematycznych. Bitmapa z kolei może być wczytana do programu grafiki wektorowej, będzie jednak wówczas jednym obiektem, który da się skalować, ale ingerencja w jego zawartość jest ograniczona.

Pliki zawierające grafikę rastrową są zwykle większe od plików z grafiką wektorową. Dzieje się tak dlatego, że definicja matematyczna, nawet długiego odcinka, okręgu, łuku lub innego kształtu, jest krótsza niż zapamiętanie koloru i pozostałych parametrów każdego punktu składowego tegoż elementu.

Z czasem zauważono, że w plikach bitmapowych można grupować informacje o wyglądzie sąsiednich, tak samo zdefiniowanych punktów, co dało początek kompresji pliku. Kolejnym pomysłem na zmniejszenie rozmiaru (wagi) takiego pliku jest progowanie kolorów, tzn. zrównanie zbliżonych kolorów do tego samego poziomu i zapisanie ich jako jeden kolor. Pierwsze rozwiązanie pozwalało na stosunkowo niewielką kompresję, za to zachowywało całą informację o obrazie, drugie znacznie lepiej kompresuje pliki, lecz odbywa się to kosztem utraty jakości, stąd mówi się o kompresji stratnej. W praktyce jest to kompromis pomiędzy niewielką utratą jakości rysunku a ograniczeniem jego rozmiaru, co pozwala na jego szybsze pobieranie z sieci i tym samym na szybsze wczytywanie się na przykłąd strony www.

Najpopularniejsze formaty plików z grafiką rastrową to:

- *.bmp – standardowy, nieskompresowany format tych plików, w którym wielkość pliku można moderować, na przykład poprzez liczbę zapamiętanych kolorów;

- *.gif – pomimo kompresji także bezstratny format grafiki rastrowej, z ograniczeniem zapamiętywanej liczby kolorów do 256;

- *.png – rastrowy format plików graficznych oraz system bezstratnej kompresji danych graficznych. Obsługuje stopniowaną przezroczystość (tzw. kanał alfa) oraz 48-bitową głębię kolorów, pozwala na skalowanie liczby kolorów. PNG został opracowany jako następca GIF w 1995 roku;

- *.tif – format TIFF pliku stosowany jest przede wszystkim dla materiałów przeznaczonych do druku, pozwala uzyskać bezstratną kompresję do 40% oryginalnej wielkości pliku;

- *.jpg – format kompresji stratnej, traci się na jakości obrazu, najczęściej można dokonać wyboru jak mocno ma być dokonywany proces kompresji. Pozwala na uzyskanie znacznej oszczędności w rozmiarze pliku;

- *.xcf – wewnętrzny format programu GIMP, nie stosuje kompresji, ma duży rozmiar z powodu zachowywania zaznaczeń, warstw, kanałów i ścieżek, jakie do tej pory zostały użyte. Nie „spłaszcza" obrazu.

Formaty grafiki wektorowej:

- *.cdr – popularny format stworzony przez firmę Corel®;

- *.ai – format konkurenta Corela – programu Adobe®Illustrator;

- *.eps – wywodzący się z PostScriptu, przez wiele lat jako jedyny używany do celów DTP, służy do przechowywania pojedynczych stron grafiki wektorowej w postaci umożliwiającej osadzanie ich w innych dokumentach;

- *.svg – uniwersalny format dwuwymiarowej grafiki wektorowej (statycznej i animowanej).

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Dla wybranego przedsięwzięcia opracuj materiały reklamowe składające się ze zdjęć reklamowych i filmów, uwzględniając:
– edytowanie obrazu w grafice rastrowej i wektorowej – omów różnice między nimi;
– odpowiednio przekształć otrzymane pliki graficzne i filmy.

b) Przygotowane we wcześniejszym ćwiczeniu materiały wykorzystaj do stworzenia w programie Power Point prezentacji reklamującej wybraną firmę/produkt.

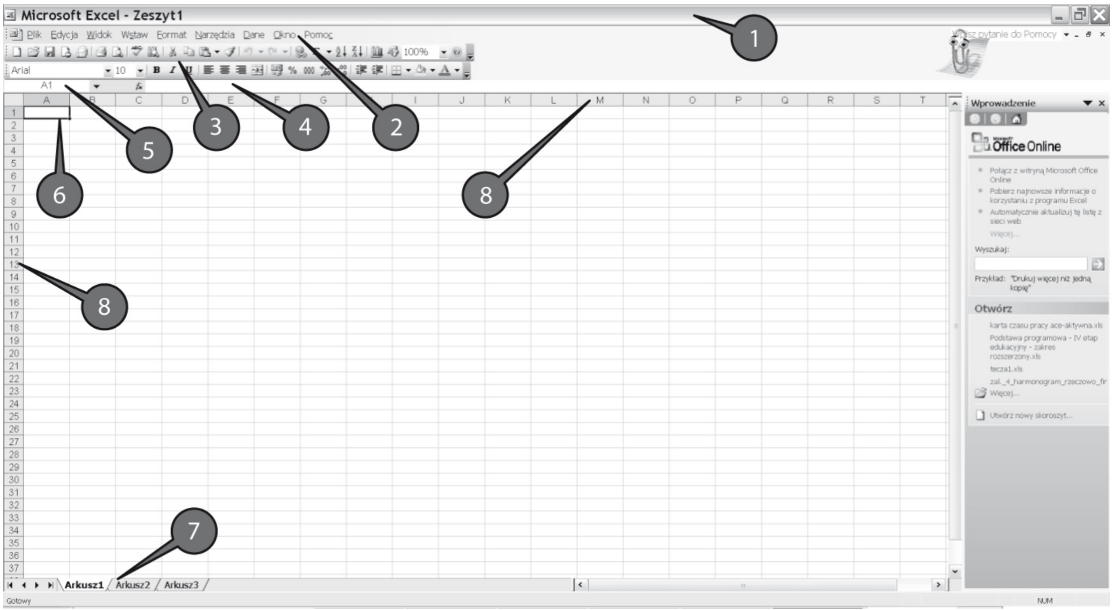
5.2. Lepsze i szybsze niż kalkulator

Arkusz kalkulacyjny to program komputerowy przedstawiający dane, głównie liczbowe, w postaci zestawu tabel dwu- i trójwymiarowych. Pozwala na automatyczną obróbkę danych oraz na ich prezentację na różne sposoby, szczególnie poprzez wykresy. Program, bez którego nie może się obyć współczesna księgowość i biuro.

Automatyzacja obróbki danych możliwa jest dzięki takim rozwiązaniom,jak wbudowana funkcja kopiowania danych i formuł w kierunku ruchu myszki w ramach mechanizmu przeciągnij-i-upuść (*drag&drop*), najważniejszym zaś narzędziem obsługi danych w arkuszu kalkulacyjnym są funkcje (matematyczne, statystyczne, daty i czasu, finansowe, bazodanowe, logiczne), za pomocą których odbywa się ich automatyczne przetwarzanie.

Z racji popularności w naszym kraju w niniejszym podręczniku zostanie omówiony, a raczej zostanie zrobiony wstęp do programu, Microsoft® Excel.

Microsoft® Excel jest arkuszem kalkulacyjnym pozwalającym na tworzenie skoroszytów zawierających arkusze, na przetwarzanie danych z pomocą formuł, tworzenie wykresów, list oraz plików sieci Web. Środowisko graficzne arkusza opiera się na standardzie wszystkich programów pakietu Office, ale dodatkowo oferuje swoje własne elementy, takie jak nowe przyciski, polecenia i elementy sterujące, zaś cały obszar roboczy jest wstępnie pokryty siatką. Plik wynikowy Excela, zapisywany fizycznie z rozszerzeniem *.xls lub *.xlsx (dla szablonów *.xlt lub *.xltx), zawiera w sobie skoroszyt złożony z arkuszy – domyślnie 3. Każdy arkusz posiada komórki, których adresowanie opiera się na współrzędnych kolumn i wierszy. Występuje dodatkowo pasek formuły, na którym wyświetlana jest zawartość aktywnej komórki. Obok, po lewej stronie, znajduje się pole nazwy, zawierające adres jej odwołania. W trakcie edycji formuły pole nazwy zmienia się na pole wyboru funkcji.



Rys. 15. Okno programu MS Excel

Źródło: Opracowanie własne

Opis elementów okna programu Excel:

1) pasek tytułowy;
2) pasek menu;
3) pasek narzędziowy – standardowy i formatowania;
4) pasek formuły;
5) pole nazwy/pole wyboru funkcji;
6) wskaźnik aktywnej komórki – pogrubione obramowanie komórki,wskazuje miejsce aktualnego wprowadzania danych;
7) arkusze – w Excelu 2003 można posłużyć się maksymalnie 256 arkuszami, złożonymi z 65 536 komórek;
8) oznaczenie kolumny (litera) i wiersza (cyfra/liczba).

Każda komórka posiada swój indywidualny adres. Litery w tym adresie odpowiadają danej kolumnie, liczba to numer wiersza. Przykładowo komórka B3 znajduje się w kolumnie B i wierszu 3.

W celu wprowadzenia danych do komórki trzeba ją najpierw uaktywnić. Najprościej jest ustawić się na danym polu i wpisać wartość. Uaktywnienie następuje też po dwukrotnym kliknięciu lewym przyciskiem myszy w wybraną komórkę. Obie metody pozwalają zarówno na wprowadzenie nowej wartości, jak i na poprawienie poprzedniej. Aktywna komórka wyróżniona zostaje grubym obramowaniem.

Jeśli zaistnieje potrzeba zaznaczenia prostokątnego zakresu komórek lub wielu nieprzylegających do siebie komórek lub zakresu, można tego dokonać, przytrzymując klawisz Shift (dla komórek przylegających) lub Ctrl (dla niezależnych) i przesunąć mysz techniką przeciągnij-i-upuść. Zaznaczenie prostokątnej grupy komórek możliwe jest też procedurą rozpoczynającą się od kliknięcia w początkową komórkę, następnie przytrzymaniu klawisza Shift i powtórnym kliknięciu, tym razem w komórkę końcową. W trakcie zaznaczania techniką przeciągnij-i-upuść Excel pokazuje w polu nazwy wielkość zaznaczanego obszaru (ilość wierszy x ilość kolumn), po zakończeniu zaznaczania w polu nazwy pozostaje adres komórki, od której rozpoczęto zaznaczanie.

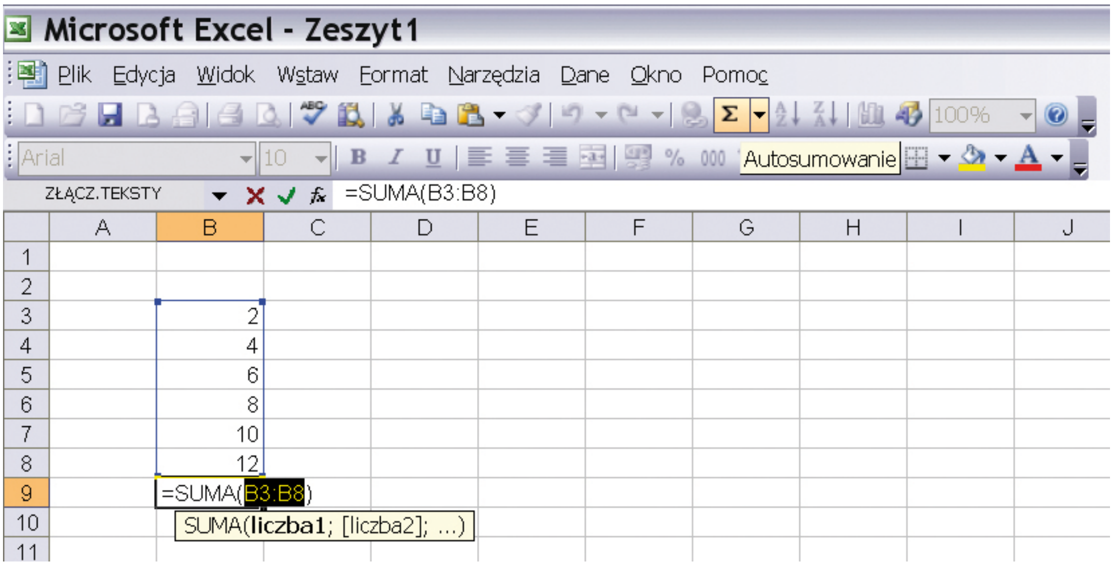
5.2.1. Formuły

W komórkach arkusza przechowywane są dwa typy informacji:

- **Wartość** – jest to informacja stała, nie zmienia się. Wartością może być liczba, tekst, data/czas. Jest ona również wyświetlana w niezaznaczonej komórce na ekranie.
- **Formuła** – składa się z odwołań do komórek, wartości, operatorów oraz predefiniowanych funkcji wykonujących na nich obliczenia. Po przetworzeniu przez Excela w komórce generowany jest wynik formuły, który jest wyświetlany na ekranie. Niemniej, ponieważ formuła dalej przechowuje swoją definicję, w tym odwołania do innych komórek, każdorazowa zmiana wartości jednej z nich lub większej ilości komórek wywoła lawinową modyfikację wyników obliczonych przez formuły zawierające do niej odwołanie. Takie właściwości czynią z arkuszy kalkulacyjnych potężne narzędzie, zarówno dla naukowców jak i biznesu.

Formuły można wprowadzać poprzez pasek formuły, jak i bezpośrednio w aktywnej komórce. Po zakończeniu edycji formuły zmiany trzeba zatwierdzić klawiszem Enter lub przyciskiem zawierającym znaczek odhaczenia, znajdującym się obok paska formuły.

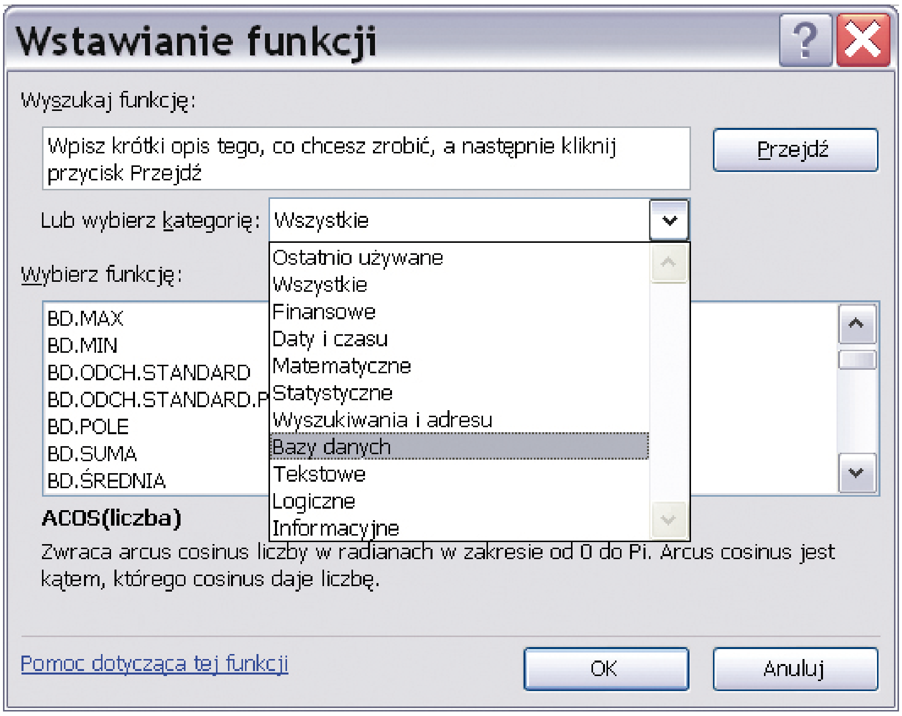
W formułach Excela można posługiwać się nie tylko operatorami matematycznymi, bardzo przydatne są funkcje – gotowe formuły. Funkcje mogą być włączane w formuły oraz zagnieżdżane jedna w drugiej. Najprostszymi funkcjami wykorzystywanymi w arkuszu są autosumowanie, średnia, licznik (ilość komórek), minimum i maksimum. Funkcje te, jako wyróżnione, można w łatwy sposób bezpośrednio wprowadzić przyciskiem autosumowania na pasku narzędziowym.



Rys. 16. Edycja formuły zawierającej autosumowanie w programie MS Excel

Źródło: Opracowanie własne

Większy wybór funkcji uzyskuje się po rozwinięciu listy funkcji, w którą zamieniło się pole nazwy, bądź przez przycisk funkcji f_x po lewej stronie od wpisywanej formuły (patrz Rys. 17).



Rys. 17. Funkcje dostępne w programie MS Excel

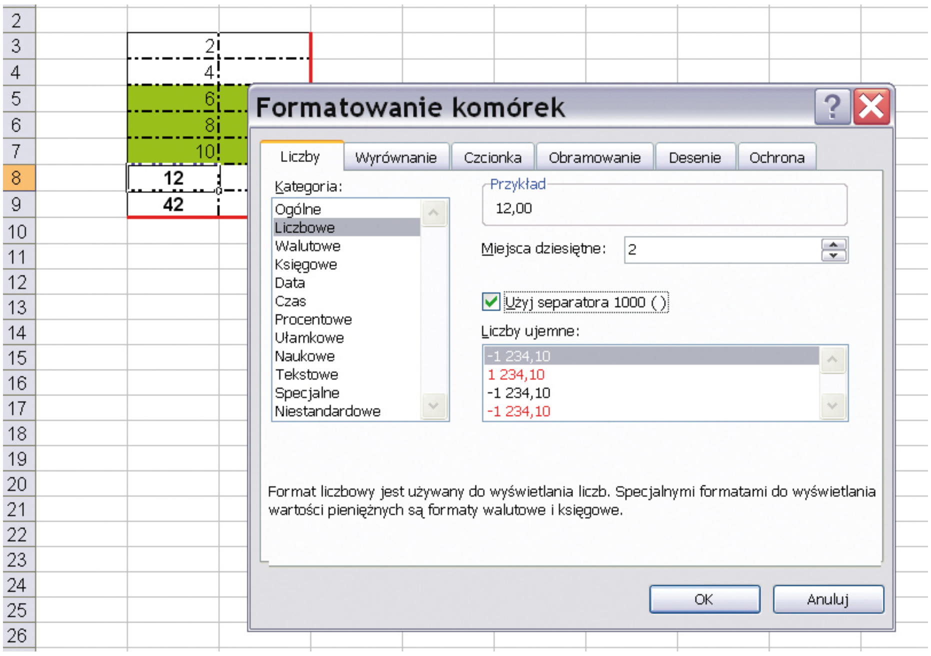
Źródło: Opracowanie własne

Tworząc arkusze kalkulacyjne należy zwracać uwagę na spójność formuł. Częste błędy w formułach to różna liczba nawiasów i cudzysłowów otwierających i zamykających.

5.2.2. Formatowanie

W Excelu możliwe są dwa rodzaje formatowania. Pierwszy polega na poprawie widoczności zawartości arkuszy poprzez stosowanie tła, ramek tabel, koloru i stylu czcionek, dostosowywanie rozmiarów komórek do zawartości itd. Formatowanie to pełni rolę estetyczną. Formatować można zawartość komórki, samą komórkę, tabelę, cały arkusz, aż po skoroszyt, wykorzystując różne opcje obramowania komórek, tabel i arkusza, opcje wydruku wraz z dopasowaniem do strony (arkusz wszak nie jest pojedynczą kartką papieru!), oraz nagłówki i stopki. Zaleca się praktyczne omówienie tych zagadnień na przykładowym arkuszu z zawartością.

Drugim typem jest formatowanie liczb. Excel oferuje bogaty zestaw kategorii formatów liczb, od ogólnego (brak wskazanego wyraźnie formatu), poprzez liczbowe, walutowe, księgowe, daty, czasu, procentowe, ułamkowe, naukowe, tekstowe, aż po specjalne i niestandardowe. To ostanie jest otwarciem się programu na inne, mniej powszechne typy danych.

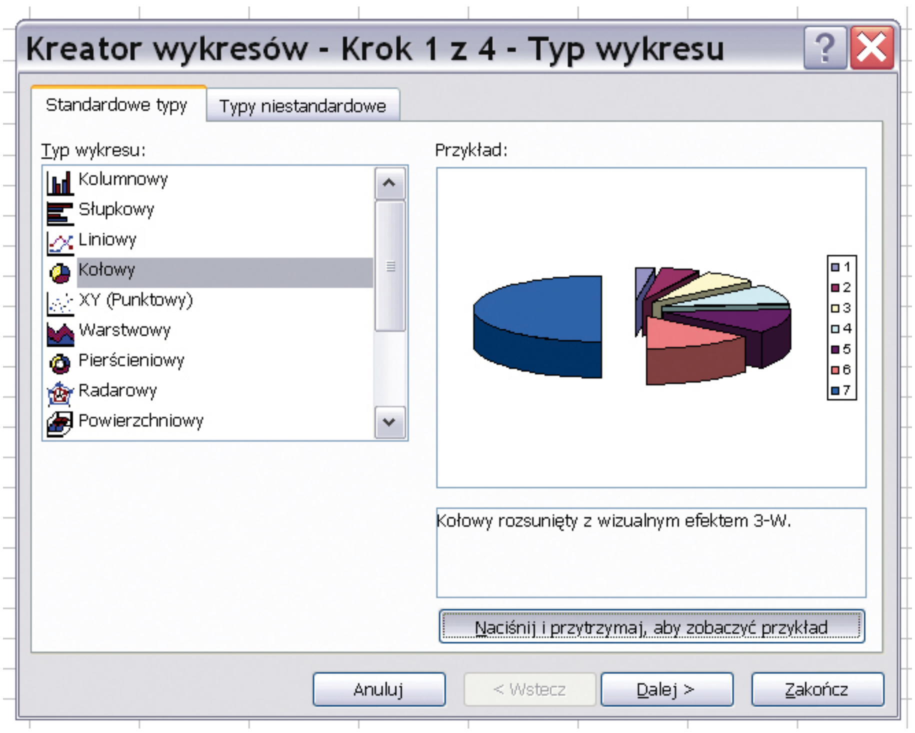


Rys. 18. Formatowanie liczb w programie MS Excel (w tle widać sformatowane komórki i czcionkę)

Źródło: Opracowanie własne

5.2.3. Wykresy i prezentacja wyników

Efekty pracy nie muszą wcale ograniczać się do tabel z kolumnami i rzędami liczb. Można dokonać wizualizacji wyników za pomocą bogatego zestawu wykresów. Do wyboru są wykresy: kolumnowe, słupkowe, liniowe, kołowe i wiele innych



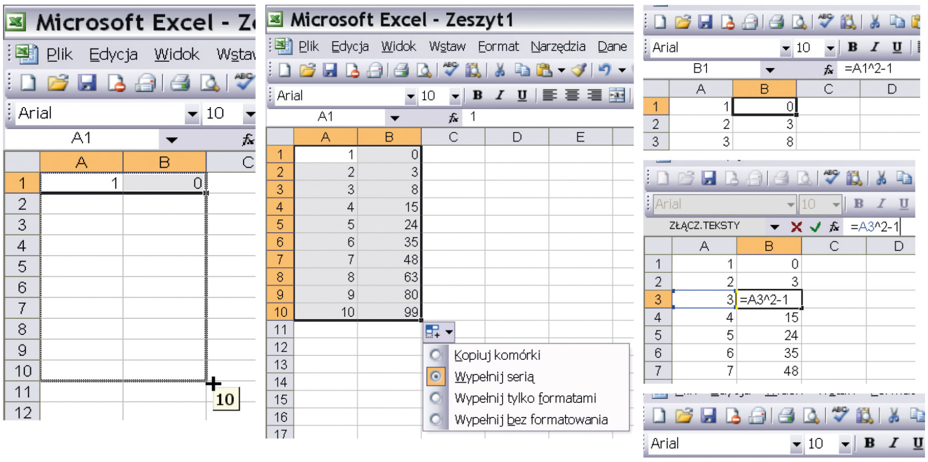
Rys. 19. Kreator wykresów w programie MS Excel

Źródło: Opracowanie własne

Sztuką jest dobranie odpowiedniego wykresu do zawartości. Obszar wykresu i poszczególne jego elementy można formatować – dodawać legendę i tytuł, etykiety danych, opis osi.

Tak jak w formułach, zmiana danych źródłowych spowoduje automatyczne przeliczenie wartości wynikowych i samoczynne skorygowanie się zależnych elementów wykresu (słupków danych, opisów osi).

Praca w arkusz kalkulacyjnym jest wyjątkowo efektywna w przypadku podstawiania dużej ilości danych do tego samego wzoru. Dzięki możliwości kopiowania nie tylko danych, ale też formuł w kierunku ruchu myszy (przy zastosowaniu techniki przeciągnij-i-upuść), następuje automatyczne powielenie formuł oraz zaktualizowanie się argumentów funkcji obliczających (Rys. 20).



Rys. 20. Proces kopiowania (powielania w dół)

Źródło: Opracowanie własne

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Stwórz w programie Excel bazę danych – księgowość wybranego przedsięwzięcia. Wykorzystaj przygotowany arkusz kalkulacyjny do obrazowania zależności funkcyjnych i zapisywania algorytmów, zaprezentuj wyniki swojej pracy, dobierając odpowiednie wykresy.

5.3. Jak cię widzą, tak cię piszą

Prezentacja multimedialna to audiowizualna forma prezentowania wykładów, referatów czy komunikatów, może ona stanowić wprowadzenie do dyskusji, samoistny pokaz, materiał poglądowy do zaprezentowania podczas konferencji naukowych itp. Do prezentacji można wykorzystywać nie tylko sam komputer, ale także projektor multimedialny[1]. Podstawą dla prezentacji jest zawsze pewien, choćby całkiem prosty, scenariusz multimedialny, na podstawie którego przygotowane elementy składowe łączy się w „całość". Tymi elementami mogą być: zdjęcia, tekst, rysunki, dźwięki i obrazy, animacje albo filmy. Prezentacje najczęściej tworzone są w aplikacjach MS Power Point pakietu Office lub aplikacjach Impress będącego składnikiem pakietu OpenOffice.org. Celem tworzenia prezentacji jest zaangażowanie więcej niż jednego zmysłu w przyswajanie podawanych informacji, co zwiększa tempo i skuteczność tego procesu.

Prezentacje multimedialne spotyka się często jako środek do prezentacji wyników finansowych firm, reklamowania produktów, jako element e-learningu. Obok komercyjnych zastosowań, prezentacja może służyć

1. por. http://pl.wikipedia.org/wiki/Prezentacja_multimedialna, 3.05.2013

do uatrakcyjnienia pokazu na przykład albumu rodzinnego, fotografii z wakacji, czy też jako zbiór ulubionych widoków, krajobrazów. Prezentacja może być funkcjonować samodzielnie lub wymagać dodatkowych objaśnień współpracującego z nią człowieka.

5.3.1. Trochę historii

Pierwszymi profesjonalnymi programami do tworzenia prezentacji były: Harvard Presentation Graphics i Microsoft Power Point. W tabeli przedstawiono chronologię rozwoju tej dziedziny wiedzy.

Tab. 5. Historia programów do tworzenia prezentacji

Rok powstania	Nazwa	System operacyjny	Producent
1986	Harvard Presentation Graphics	DOS, Windows	Software Publishing Corporation
1987	Power Point	Windows, Mac OS	Microsoft
1990	Freelance Graphics	Windows	IBM Lotus Development Corp.
1993	Corel Presentations	Windows	Corel Corporation
1998	StarOfficeImpress	Windows, Linux, Solaris	Sun Microsystems
1998	KPresenter	Linux, Unix	KDE Project
2000	OpenOffice.org Impress	Windows, Linux, Solaris, Mac OS, FreeBSD	OpenOffice.org
2003	NeoOfficeImpress	Mac OS	Patrick Lubyi Edward Peterlin
2005	Keynote	Mac OS	Apple

Źródło: www.prezentacje.multimedialne.net/historia.htm, 07.04.2007

- Harvard Presentation Graphics był pionierem w tworzeniu prezentacji. Był pierwszym programem pozwalającym łączyć tekst z grafiką i diagramami. Do końca lat 80 był głównym programem do tworzenia slajdów.
- Microsoft® Power Point, obecnie najpopularniejszy program do tworzenia prezentacji, jest elementem pakietu MS Office i Mac OS. Korzystają z niego biznesmeni, trenerzy, nauczyciele oraz zwykli użytkownicy. Dzięki zintegrowaniu środowiska pakietów mechanizmem OLE, można łatwo importować do prezentacji teksty, tabele i wykresy z pozostałych programów pakietu. Najnowsze wersje umożliwiają zagnieżdżanie w prezentacji plików dźwiękowych i video.
- Freelance Graphics należy do pakietu SmartSuite firmy IBM Lotus. Obok podstawowych opcji program ten ma ciekawą funkcjonalność – szybką wymianę komentarzy i uwag pomiędzy użytkownikami sieci, oraz możliwość bezpośredniego uruchomienia prezentacji na komputerze innego użytkownika sieci. W obecnym stanie jest to jednak sprzeczne z zasadami bezpieczeństwa.
- Corel Presentations – początkowa nazwany Presentations, był częścią składową pakietu WordPerfect. W 1994 roku doszło do wykupienia WordPerfectCorporation przez firmę Novell Netware. Dwa lata później Corel Corporation przejął Novella i dopiero on dorzucił do tego pierwotnego pakietu kilka nowych opcji – edytora bitmap z możliwością wypełnienia i dodawania efektów specjalnych, narzędzia do grafiki wektorowej obsługującej krzywe Beziera, łuki, edycję węzłów. Dodatkowe smaczki w tym produkcie to: symulacja efektów trójwymiarowych, trasowanie map, a także wypełniania tekstem liter.
- OpenOffice.org Impress jest bezpłatną alternatywą dla Power Pointa na licencji GPL z funkcjami podobnymi do produktu konkurenta. Ciekawą innowacją jest możliwość eksportowania pracy bezpośrednio do formatu *.pdf lub flash. Słabiej natomiast obsługuje dźwięki oraz filmy.

- KPresnter to program, który działa pod systemami Linux oraz UNIX i potrafi importować prezentacje w formacie *.pps z Power Pointa. Program ten funkcjonalnością odpowiada pozostałym programom.
- NeoOfficeImpress wykorzystuje środowisko Java, przez co wyróżnia się odpornością na błędy systemowe i uniezależnia się w dużym stopniu od kondycji komponentów komputera. Jest bezpłatny, wciąż rozwijany, działa tylko pod Mac OS.

Keynote to część składowa pakietu iWork firmy Apple. Jest w pełni funkcjonalny, można w nim wykorzystywać m. in. zdjęcia, dźwięki oraz pliki video. Keynote używa formatu „key", ale daje także możliwość zapisu plików w formacie *.pps. Pozwala też na eksport do html, flash, PDF oraz Apple Quick Time.

5.3.2. Nieco teorii, nieco praktyki

Wyróżnić można dwa typy prezentacji multimedialnych: prezentacje interaktywne i prezentacje liniowe. Prezentacje interaktywne dają użytkownikom możliwość: pełnej kontroli nad wyświetlanymi treściami, swobodnej nawigacji między slajdami, skoków do innego działu, zarówno już oglądanego, jak i znajdującego się w dalszej części. Kontrola użytkownika wymaga stosowania nieco innych narzędzi przy jej tworzeniu w zależności od tego, czy jest to prezentacja osadzona na stronie internetowej, napisana za pomocą HTML, prezentacja utworzona w Adobe® Flash lub Macromedia®Director.

Prezentację w formie strony internetowej w HTMLu zaleca się używać w przypadku bardzo rozbudowanych struktur i dużych ilości prezentowanego materiału. Charakter pracy z taką prezentacją przypomina surfowanie po stronie www. Fizycznie składa się ona z wielu plików i najczęściej uruchamia się po otworzeniu w przeglądarce pliku index.html.

Taka koncepcja budowy pozwala na zastosowanie bardzo złożonych struktur, opracować obszerne materiały. Z drugiej strony restrykcyjne wymogi co do wielkości i skalowalności np. obrazków publikowanych w sieci sprawiają, że składa się z wielu niewielkich plików i może być wyświetlana bezpośrednio przez Internet. Konieczne jest jednak zainstalowanie odpowiednich wtyczek (ang. *plug-in*) w używanych przeglądarkach.

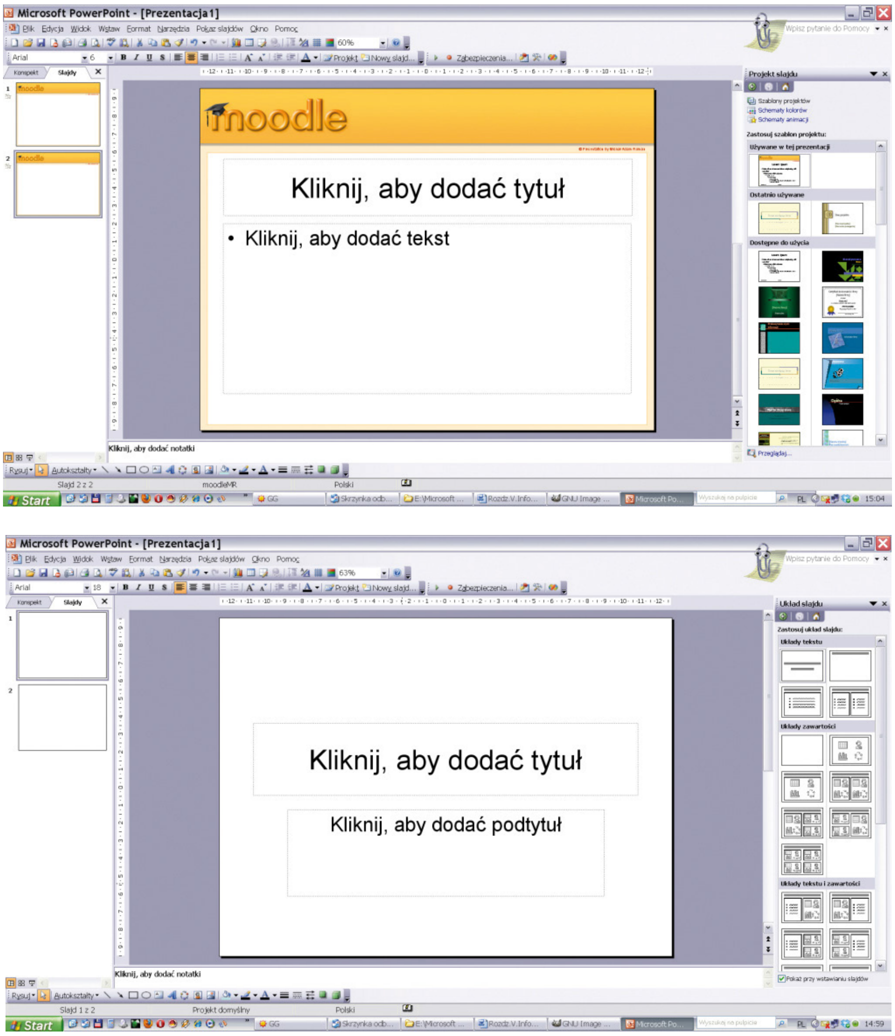
Prezentacje obu wspomnianych wyżej firm to obecnie najbardziej popularne rozwiązania prezentacji interaktywnych. Jeśli zostaną pobrane do wyświetlania off-line (bez konieczności posiadania dostępu do Internetu), na przykład na płycie CD, startują za pomocą pliku wykonywalnego z rozszerzeniem *.exe. Oznacza to, iż użytkownik nie musi posiadać żadnych dodatkowych programów ani wtyczek. Takie prezentacje są jednak rzadko tworzone na początkowych etapach znajomości warsztatu ze względu na trudność tworzenia i specyfikę programowania. Pojawiają się pewne trudności w budowie struktury takich prezentacji.

Prezentacje liniowe (grafika prezentacyjna) to taki rodzaj prezentacji, w których zawarty materiał jest wyświetlany „slajd po slajdzie", nie można w nich budować złożonych struktur, a nawigacja pomiędzy poszczególnymi działami jest rzadko spotykana i to w okrojonej postaci. Autor prezentacji na etapie tworzenia decyduje w jakiej kolejności będą wyświetlane kolejne części zawartego materiału, a w trakcie wyświetlania danej części może tylko zdecydować o czasie wyświetlania slajdu, o ile taką możliwość przewidział i nie ustawił automatycznego chronometrażu.

Slajd jest podstawowym elementem takiej prezentacji, składa się ona zatem z kolejno wyświetlających się w trakcie pokazu ekranów. Na każdym z nich umieszcza się takie obiekty, jak: pola tekstowe, zdjęcia, filmy, animacje. Możliwe jest utworzenie prezentacji na podstawie predefiniowanych w programie szablonów lub na podstawie indywidualnego, pobranego lub samodzielnie sparametryzowanego i utworzonego, szablonu zawierającego powtarzające się logo, hasło, kompozycję itp. Niezależnie od ustawień dotyczących całej prezentacji, programy dysponują propozycjami układów elementów na slajdzie, charakterystycznymi dla określonych typów projektowanej zawartości. Pozwala to na komfortowe umieszczanie zaplanowanych przez autora obiektów, takich jak: tekst w postaci wyliczenia, schematy organizacyjne, slajd z tytułem i zawartością w formie tabeli lub obrazka. Istnieje też możliwość wyboru pustego slajdu, który pozwala na własną kompozycję, zgodną z zaplanowaną koncepcją scenariusza.

a)

b)



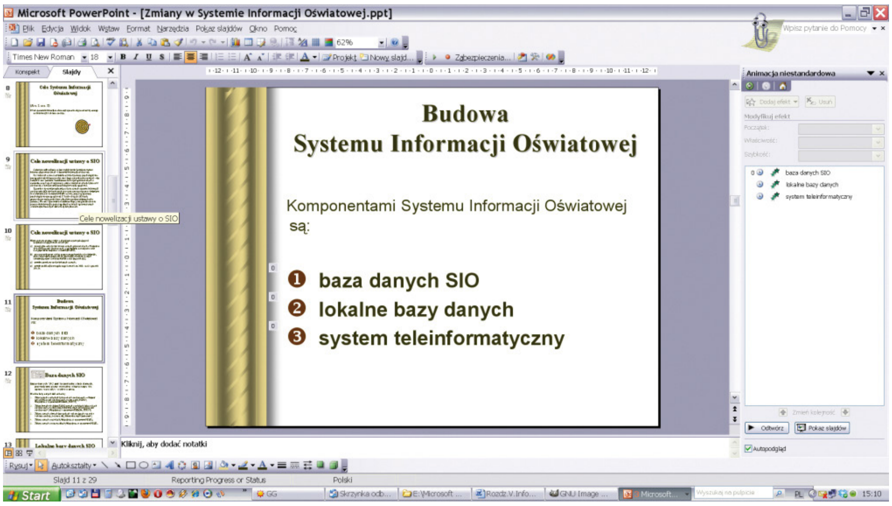
Rys. 21. a) Szablony dostępne w widoku projektu prezentacjib) Slajd w układzie tytułowym, po prawej można wybrać inne dostępne układy do wyboru

Źródło: Opracowanie własne

Zanim zostanie uruchomiony program do tworzenia prezentacji należy przygotować scenariusz lub choćby ogólny projekt, by efekt był w miarę „sensowny”. W przeciwnym razie prezentacja może być przypadkowa i chaotyczna. Należy się zastanowić, jakiemu celowi prezentacja ma służyć. Autor prezentacji może mieć wiele pomysłów dotyczących swojej prezentacji i jeśli ich nie uporządkuje, nie może liczyć na pozytywny rezultat pracy. Szczególną wadą prezentacji może być nienormalne „kadzenie” organizatorowi szkolenia lub rekruterowi publiczności. Prezentacja powinna tak naprawdę odpowiadać potrzebom odbiorców. Niedobrym pomysłem będzie tworzenie prezentacji komercyjnej tylko pod gust nabywcy prezentacji. Tworzenie prezentacji powinno przebiegać zgodnie z intuicją autora. Prezentacje najczęściej są wyświetlane przez projektory lub na ekranie komputera, ale częstą praktyką jest publikowanie jej w Internecie, jako załącznika lub w postaci strony sieci web.

Innymi ważnymi **wskazówkami, o których należy pamiętać, tworząc prezentację,** są: używanie nieszyfrowanej czcionki tekstu w odpowiednim rozmiarze, dobieraniu do tekstu odpowiednio kontrastowych kolorów tła, urozmaicanie prezentacji, unikanie przeładowania informacji zawartych na slajdzie, zsynchronizowanie kolejności slajdów z prezentowanymi treściami, podawanie rzetelnych informacji, dobór tempa wyświetlania do ilości zawartych informacji oraz możliwości absorpcji treści przez odbiorców.

Aby uatrakcyjnić prezentację, można wprowadzić animowane przejścia między slajdami. Można wstawić też efekt dźwiękowy, który będzie odtwarzany, gdy slajd pojawi się na ekranie, wybiera się go z gotowej listy lub z dowolnego pliku muzycznego zawartego na dysku. Takie efekty dźwiękowe mogą być odtwarzane podczas pokazu automatycznie albo po kliknięciu myszką na obiekt symbolizujący dźwięk.



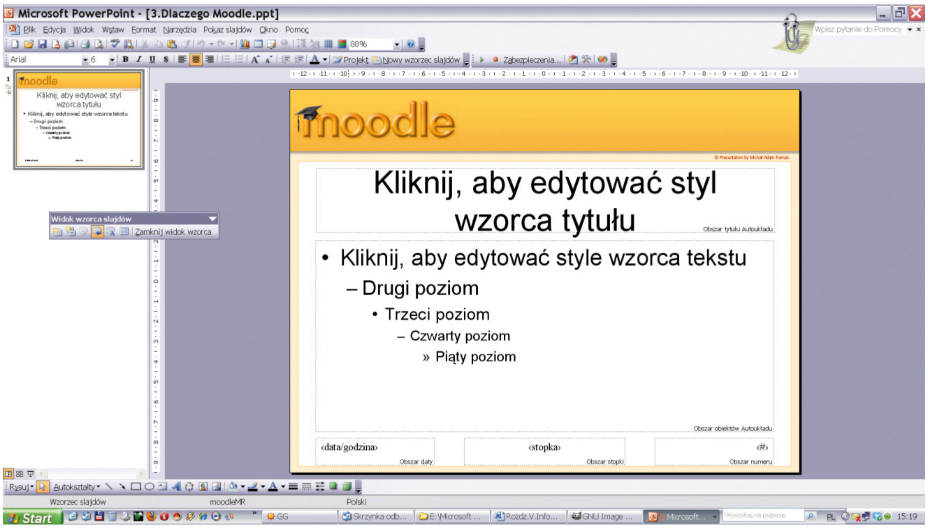
Rys. 22. Prezentacja z animowaniem przejść pomiędzy slajdami oraz animowanie wejść elementów na ekran. (menu animacji po prawej)

Źródło: Opracowanie własne

Ciekawym rozwiązaniem jest umieszczone pod głównym oknem projektowania slajdu pole do wprowadzania notatek. Notatki widzi prowadzący, nie jest ona widoczna dla widowni oglądającej prezentację (na Rys. 22 w polu tym znajduje się tekst: „kliknij, aby dodać notatkę").

Elementy predefiniowane slajdów można ustawić globalnie, używając wzorca slajdów. Wykorzystując wzorzec można sprawić na przykład, że logo lub główna myśl będzie się pojawiała na każdym nowym slajdzie oprócz pierwszego. Nie trzeba przy tym dokonywać pracochłonnego pozycjonowania elementu na każdym nowo powstałym slajdzie, jeśli wykorzystamy wzorzec, ta zawartość będzie pojawiała się automatycznie.

Wzorzec dostępny jest z poziomu menu Widok.



Rys. 23. Widok wzorca slajdów

Źródło: Opracowanie własne

Pokaz slajdów w programie Power Point można uruchomić na trzy sposoby – najprościej jest nacisnąć klawisz F5. Wyświetli się cały pokaz. Aby wyświetlić pokaz od bieżącego miejsca, trzeba użyć kombinacji klawiszy Shift+F5 lub wybrać trzecią w kolejności od lewej ikonę na dole okna, nad poleceniem Rysuj.

Należy zauważyć, że na obecnym etapie rozwoju technologii informacyjnej prezentacje multimedialne stały się czymś powszechnie tworzonym i wykorzystywanym. Znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach życia współczesnych społeczeństw, zarówno w pracy i nauce, jak i życiu towarzyskim i rodzinnym. Można zatem oczekiwać nowej, bardziej zaawansowana technologii w tej dziedzinie,. tworzącej na przykład trójwymiarowe prezentacje multimedialne.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Opisz podstawowe modele barw i ich zastosowanie.
b) Opracuj obrazy i filmy pochodzące z różnych źródeł, tworząc albumy zdjęć.
c) Jak wykorzystać arkusz kalkulacyjny do obrazowania zależności funkcyjnych i do zapisywania algorytmów?
d) Zaprezentuj grupie wybrany produkt/firmę, wykorzystując wcześniej przygotowane filmy i zdjęcia. Przygotuj prezenację multimedialną na podstawie konspektu, a następnię umieść ją na stronie internetowej wskazanej przez nauczyciela.

5.4. Twoje okno na świat

Obecne programy biurowe oraz graficzne są na tyle zaawansowane i posiadają tak mocno rozbudowane możliwości, że obróbka każdego tekstu, tabeli, obrazka czy animacji nawet dla niezbyt biegłego w informatyce człowieka nie stanowi problemu. Z drugiej strony dostęp do materiałów, gotowych lub półfabrykatów, stał się łatwy za sprawą Internetu i graficznego interfejsu oferowanego przez przeglądarki. W sukurs amatorom tworzenia nowych jakości idzie też ogromny silnik w postaci wyszukiwarek, takich jak Google. Humorystycznie mówi się, że jeśli czegoś nie znajdzie się w Internecie to znaczy, że to coś nie istnieje.

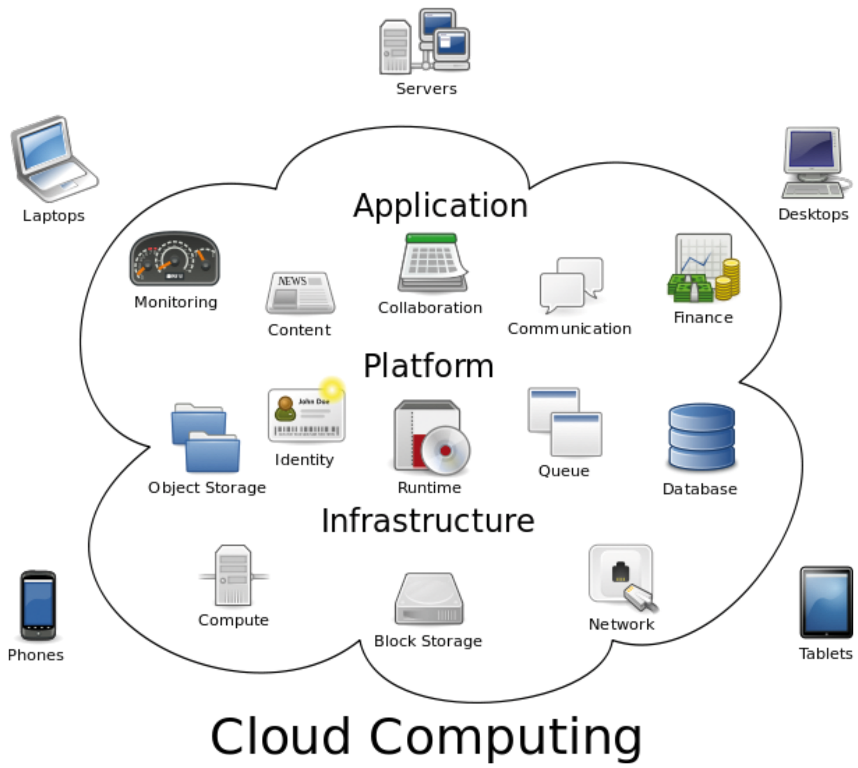
Tradycyjni użytkownicy komputerów przyzwyczaili się do tego, że wszystkie aplikacje instaluje się na twardych dyskach. Przyszłość świata komputerowego zapowiada jednak coś zupełnie innego. Największe programistyczne korporacje promują aktualnie ideę „**cloudcomputing**", czyli usług działających w chmurze. Polega to na tym, że zamiast instalować programy na każdym z komputerów po kolei, ostatecznie na serwerze sieci w firmie, wystarczy przez przeglądarkę internetową zalogować się do swojego konta gdzieś w świecie, by mieć do nich dostęp.

W technologii tej pracuje już wiele pożytecznych i używanych na co dzień programów. Entuzjastycznym promotorem cloudcomputingu jest Google, które w ten sposób udostępnił wszystkie swoje usługi. Wprawdzie przeglądarkę istaluje się na dysku komputera lokalnego, ale klienta poczty Gmail nigdy nie było trzeba instalować na dysku, dlatego nie może dziwić, że nagle pojawiły się usługi całkiem nowej generacji. Dobrym przykładem są też Dokumenty Google (Google docs), które za darmo i bez reklam udostępniają pełny zakres możliwości identycznych jak te w pakiecie Office należącym do giganta z Redmond i udostępniane za pokaźną opłatą w złotych polskich lub jej równowartość w USD.

Dokumenty, prezentacje, zdjęcia, muzyka i inna zawartość naszych komputerów kiedyś ulokowana na dyskach twardych i wszelkiego rodzaju nośnikach wymiennych – pierwotnie dyskietkach, potem płytach CD/DVD i pendrive'ach – obecnie coraz częściej ulokowana jest w sieci, na wirtualnych dyskach (Dropbox, Google drive, Skydrive, chomikuj.pl itp.) i portalach społecznościowych (Nasza-klasa, Facebook). Dzielimy się dokumentami, arkuszami, prezentacjami, pracując w chmurze czy wykorzystując Google docs.

Jakie są tego zalety? Jedna osoba nie musi kupować licencji danego programu na kilka stanowisk (fizycznych komputerów, czasem licencjonowanie jest nawet na każdy rdzeń procesora), jeśli zamierza korzystać z niego w różnych miejscach. Dodatkowo wszelkie dane znajdują się na bezpiecznym serwerze, a więc nie ma ryzyka ich przypadkowej utraty.

Na czym polega praca w chmurze? Jest to innowacyjna technologia, w której komputera osobistego używa się jedynie jako „wtyczki do sieci", a dostęp do danych, które w tradycyjnej technologii są dostępne na dysku własnego komputera, staje się możliwy po zalogowaniu się na odpowiedni serwer. Rozróżnia się chmury publiczne oraz prywatne. Te pierwsze są zewnętrznym, ogólnie dostępnym dostawcą aplikacji i usług. Natomiast chmury prywatne są użytkowane jedynie przez jakąś formę lub organizację, która tworzy je na własny użytek. Zapewne u wielu osób, które jeszcze nie korzystają z tej innowacyjnej technologii, rodzi się pytanie o bezpieczeństwo danych przechowywanych na zdalnym serwerze. Nie jest to pytanie bezzasadne, ale nie powinno też ono budzić w nas szczególnych obaw. Z pewnością dane zgromadzone na jakimkolwiek nośniku podłączonym do globalnej sieci Internetu są, do pewnego stopnia, narażone na ingerencję niepowołanych osób.



Rys. 24. Praca w chmurze. Autor:S. Johnson

Źródło: www.wikipedia.org, 21 marzec 2013.

Obecnie łatwo zaistnieć oficjalnie w Internecie jako choćby niewielka strona internetowa, mogąca służyć zarówno przedsiębiorstwu, instytucji, jak i osobie prywatnej. Obecnie nie ma chyba firmy, która nie prezentowałaby się w jakiś sposób w Internecie. Najpopularniejszą formą jest witryna złożona ze strony głównej i kilku podstron, zawierająca podstawowe informacje o historii i dzisiejszym kształcie firmy, dane kontaktowe, możliwości dojazdu, logo, hasła reklamowe itp. Bardziej ambitne pomysły zawierają odsyłacze do udostępnionych zasobów (instrukcji, wzorów dokumentów itp.), katalogów wyrobów, cenników, formularzy kontaktowych, aż po pełny sklep internetowy z możliwością tworzenia zamówień, dokonywania płatności on-line, ze strefą klienta i programami lojalnościowymi. Żartobliwie można powiedzieć, że jeśli firmy nie da się znaleźć w Internecie, to znaczy, że nie istnieje ☺.

Tworząc stronę www, należy pamiętać o paru zasadach, związanych przede wszystkim z estetyką i funkcjonalnością serwisu.

Dobór kolorystyki odbywa się w oparciu o typ działalności i rodzaj przekazywanych informacji. Do działalności prawniczej albo doradztwa finansowego nie będzie pasować krzykliwy charakter grafiki, który świetnie sprawdzi się w sklepie internetowym artykułów funkcjonującym na rynku silnej konkurencji, gdzie łowi się klienta promocjami, gadżetami, nowinkami technicznymi itp.

Informację się dawkuje, nie umieszcza się wszystkich szczegółów na stronie głównej, dostęp do wszystkich informacji powien być łatwy – stosuje się w tym celu odsyłacze, linki i inne elementy aktywne strony. Informacje dzieli się na na tematy – historia firmy, siedziba i kontakt, oferta, cenniki, serwis i wsparcie techniczne. Piękne widoki i ilustracje są ważne, lecz pamiętać należy, że nie stanowią one głównego celu istnienia całej witryny. Nie mogą przyćmiewać istotnych treści.

Strona powinna być „lekka" – jej wczytywanie nie powinno zajmować zbyt wiele czasu nawet na słabszych komputerach. Dlatego też, nawet kosztem jakości, ogranicza się wielkość, ilość kolorów i rozdzielczość zdjęć, dba się o optymalizację kodu źródłowego, często stosuje się chwyt w postaci szybkiego wczytania w niskiej rozdzielczości, a następnie automatycznego poprawiania się jakości poszczególnych elementów.

Karygodnym grzechem, który szybko eliminuje stronę z listy często odwiedzanych, jest jej rzadka modyfikacja i aktualizacja. „Martwa" strona – nie zmieniająca się lub zmieniająca się rzadko, z nieaktualnymi informacjami, będzie coraz rzadziej odwiedzana przez internautów.

Podstawowym i pierwotnym językiem programowania stron www jest HTML (ang. *HyperTextMarkup Language*) – hipertekstowy język znaczników, oprócz niego najbardziej współcześnie rozpowszechnione i chętnie używane są PHP (obiektowy język programowania zaprojektowany do generowania stron internetowych w czasie rzeczywistym) i Java.

Oczywiście rzadko kto koduje strony www przy pomocy czystego HTMLa. Taki kod można wygenerować nawet przy pomocy zwykłego notatnika z Windowsa. Jeśli jest prawidłowo napisany, wystarczy efekt pracy zapisać z rozszerzeniem nie *.txt, a *.htm, po czym otworzyć w przeglądarce.

Przykładowy kod źródłowy w HTML może wyglądać tak:

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC „-//W3C//DTD HTML 4.0 Transitional//EN"><html>
<head>
<title>Strona przykładowa</title>
</head>
<body>Najpierw zwykły tekst – bez polskich liter!<br>Moze ktos juz robil strone w html zawierajaca: <b>tabelki</b>, <br><b>formularze</b> i <b>
tekst</b> ? <br>
<!--Tak się umieszcza komentarz <br> oznacza przjeście do nowej linii -->
<br><br><H1>Tabela</H1><tablecellspacing="2" cellpadding="2" border="2">
<!-- Zdefiniowanie tabeli --> <tr>
<!-- Początek wiersza --> <th>oceny<br>uczniów</th> <th>matematyka</th> <th>polski</th></tr><tr> <th>Tymoteusz</th> <td>4+</td>
<td>5</td></tr><tr> <th>Filemon</th> <td>3</td> <td>4+</td></tr></table><br><br><H3>Formularz</H3><br><form action="konto.php"
name="formularz">Imię <inputtype="text" name="imie" size="20" maxlength="30"><br><textareacols="50" rows="5" name="dane">Dane osobowe
</textarea><br>Płeć <inputtype="radio" name="plec" value="M" checked>Mężczyzna <inputtype="radio" name="plec" value="K" >Kobieta<br><in
puttype="checkbox" name="zgoda" value="tak">Zgadzam się na przetwarzanie danych<br><inputtype="submit" name="akceptacja" value="Załóż
konto"></form></body></html>
```

Ułatwieniem dla tworzących witryny są takie programy, jak komercyjne: Adobe Dreamwaver (do niedawna MacromediaDreamwaver), Microsoft FrontPage – składnik pakietu Office, czy też polski Pajączek, oraz darmowe alternatywy: CoffeeCupFreeHTML Editor, PHPEdit albo Nvu z ciekawą funkcjonalnością – może pracować w graficznym trybie WYSIWYG (ang. *What You See Is What You Get* – To Co Widzisz Jest Tym Co Otrzymasz).

Wystawiając cokolwiek do Internetu firma, powinna pamiętać, że strona może stać się celem ataku, którego najłagodniejszą konsekwencją może być niemożność wyświetlania portalu firmowego. Znane są przypadki podmiany strony na użyteczną dla cyberprzestępcy – choćby jako źródło wyłudzania haseł, może też być wykorzystana jako „zombie" służące do maskowania ataku na strony istotne z punktu widzenia bezpieczeństwa państwa.

Rzadsze obecnie są przypadki włamań do strategicznych serwerów firmy poprzez witrynę www, gdyż umieszcza się ją albo na wydzielonym serwerze www, na którym może być ewentualnie obsługa poczty, ale nic ważniejszego, albo wysyłana jest na serwer zewnętrznego usługodawcy zajmującego się tzw. hostingiem stron. Taka zewnętrzna firma z reguły korzysta z szybkich łączy oraz kilku dostawców, przez co gwarantuje zarówno działanie serwisu bezawaryjnie non-stop 24/7/365, jak i odpowiednio szybki transfer danych do komputera odbiorcy, umożliwiający szybkie wczytanie strony.

Obsługą takiego serwisu powinien zajmować się profesjonalny webmaster. Każda witryna firmowa, aby zaistniała w sieci oprócz samej konstrukcji i umieszczenia na serwerze dedykowanym musi być zarejestrowana w rejestrze domen i mieć przydzielony adres IP. W Polsce głównym operatorem jest Krajowy Rejestr Domen.

Serwery sieci Internet identyfikowane są przez ich unikalne adresy numeryczne – IP, składające się z 4 grup po 3 cyfry oddzielonych kropkami. Dla ułatwienia komunikacji w powszechnym użyciu są nazwy zapisane w postaci kombinacji ciągu liter i cyfr, nazywane domenami (dokładniej „nazwami domenowymi"). Łatwiejsze i prostsze jest jednak posługiwanie się nazwami literowymi kojarzącymi się z firmą lub instytucją, do której należą. Rejestr nazw domenowych prowadzony przez NASK (Naukowa i Akademicka Sieć Komputerowa) pozwala na skierowanie połączenia do komputera o numerze IP przypisanym do podanej nazwy symbolicznej – domeny, tłumacząc nazwę domenową na adres komputera w sieci Internet.

Do zamiany nazwy symbolicznej na odpowiadający jej adres numeryczny komputera i odwrotnie wykorzystywane są tzw. serwery nazw domenowych (ang. *domain name servers*). Pełna nazwa literowa domeny składa się z ciągu nazw oddzielonych kropkami (podobnie jak w adresie IP, tyle że zamiast cyfr są nazwy). Poszczególne poziomy domeny kończy znak kropki umieszczony po ich prawej stronie. Pierwsza z prawej nazwa domeny, która nie jest zakończona kropką, jest nazywana domeną najwyższego poziomu. Domeny najwyższego poziomu, zwane krajowymi, składają się z dwóch liter jednoznacznie identyfikujących kraj, do którego są przypisane. W przypadku Polski jest to .pl, w przypadku Niemiec .de, dla Wielkiej Brytanii – .uk. Oprócz domen krajowych w domenie najwyższego poziomu istnieje czternaście domen podstawowych (ang. *generic*), które nie są kojarzone terytorialnie z nazwą żadnego państwa: .com (komercyjna), .org (organizacje, zwłaszcza non-profit i społeczne), .mil (wojskowa), .gov (administracji publicznej szczebla rządowego), .int, .net, .edu (edukacyjna), .info, .biz, .name, .museum, .aero. Więcej informacji można znaleźć pod adresem: www.icann.org.

Każde połączenie inicjowane z komputera lokalnego po podaniu przez użytkownika adresu w postaci nazwy domeny, rozpoczyna się od kolejnego „odpytywania" serwerów nazw domenowych DNS o adres numeryczny odpowiadający podanej nazwie komputera w sieci. Kolejne zapytania kierowane są do serwerów odpowiadających za bazy danych kolejnych poziomów nazwy domeny.

Każda nazwa domeny musi być zarejestrowana w jednym, unikalnym rejestrze odpowiadającym poziomowi danej domeny, tzn. może w nim występować tylko raz. Dane z tego rejestru przechowywane są następnie w pamięci szeregu komputerów tworzących sieć serwerów DNS (serwerów nazw domenowych danego poziomu domeny). Jest to ważne nie tylko przez wzgląd na bezpieczeństwo wpisów (kilka kopii na równoległych serwerach), ale również przyspiesza dostęp do danych o domenach. Każda nazwa domeny musi być delegowana do co najmniej dwóch serwerów DNS. Zwyczajowo jeden z nich pełni rolę „głównego" (ang. *primary*), drugi zaś – dodatkowego (ang. *secondary*). Co ciekawe, nie istnieje ograniczenie maksymalnej ilości serwerów DNS, na których może istnieć wpis dotyczący danej nazwy domeny[2].

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Omów kierunki rozwoju pracy w chmurze, a także zagrożenia płynące z powierzania materiałów innym firmom.
b) Zaprojektuj schematycznie układ strony internetowej.
c) Wykorzystując posiadaną wiedzę, zaprojektuj i stwórz stronę internetową reklamującą wybraną firmę/produkt.

Bibliografia:

Haskin D., *Multimedia nie tylko dla orłów*, Intersoftland, 1995.

Koba G., *Technologia informacyjna dla szkół ponadgimnazjalnych*, Migra, 2002.

Płoski Z., *Słownik encyklopedyczny – informatyka*, Wrocław 1999

Szewczyk A. (red.), *Multimedia w biznesie*, Warszawa 2008.

Falkiewicz W., *Pojęcie informacji w technologii multimedialnej*, Warszawa 2005.

2. www.dns.pl/informacje-ogolne.html , 2013.03.27.

Świerk G., Madurski Ł., *Multimedia. Obróbka dźwięku i filmów. Podstawy*, Warszawa 2004.

Grzeszczyk T., *Systemy multimedialne w zarządzaniu przedsiębiorstwem. Metody implementacji*, Warszawa 2003.

Jankowski M., *Elementy grafiki komputerowej*, Warszawa 2006.

Kopertowska M., Sikorski W., *Grafika menedżerska i prezentacyjna. Poziom zaawansowany*, Warszawa 2007.

King J., *Grafika w sieci WWW*, Mikom, Warszawa 2006.

Sharma A., *Zrozumieć Color Management*, Warszawa 2006.

Fleming B., Dobbs D.,*Tworzenie cyfrowych postaci*, Warszawa 2007.

Maestri G., *Animacja cyfrowych postaci*, Warszawa 2007.

Netografia:

www.wikipedia.org (definicje, wyjaśnienia niektórych pojęć)

www.gimp.org, dokumentacja programu GIMP

http://pl.wikipedia.org

www.prezentacje.multimedialne.net

www.microsoft.com/poland/office/akademia

www.2msystem.pl/tworzenie_prezentacji_multimedialnych.htm

HTML, strony www, sklepy internetowe

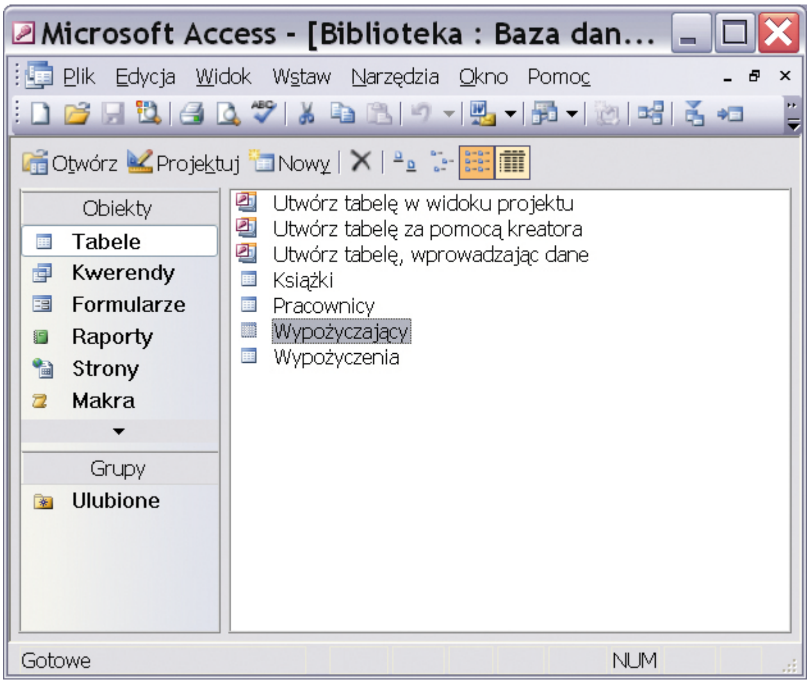
6. Gromadzenie, selekcjonowanie i opracowywanie informacji w bazach danych

Bazy danych mają szerokie zastosowanie wszędzie tam, gdzie niezbędne jest przetwarzanie jakichkolwiek danych. Zwykły użytkownik komputera, a nawet osoba, która z niego nie korzysta, spotyka się z nimi na każdym kroku. Kupno biletu lotniczego lub do teatru, robienie zakupów, czy nawet wykonanie zwykłego połączenia telefonem stacjonarnym bądź komórkowym, to czynności, które, choć nie kojarzą się z omawianym działem informatyki, szeroko korzystają z jego wytworów.

Baza danych to zbiór informacji (danych) wraz z możliwością łatwego do nich dostępu oraz ich modyfikacji (dodawanie nowych, zmiana istniejących i usuwanie starych) z poziomu aplikacji obsługującej bazę.

Ze względu na sposób organizacji danych wyróżniamy bazy:

a) kartotekowe;
b) hierarchiczne;
c) relacyjne (współcześnie najbardziej popularne);
d) obiektowe;
e) sieciowe.



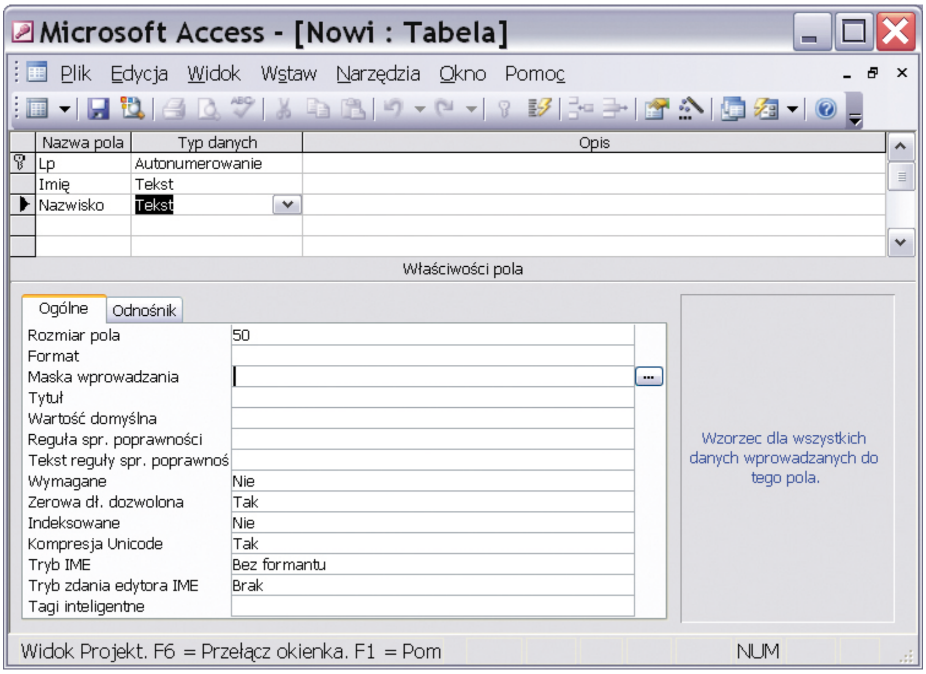
Rys. 25. Okno programu MS Access z widokiem na utworzone tabele

Źródło: Opracowanie własne

6.1. Zapanować nad dużą porcją danych

Z bazami danych wiąże się szereg pojęć i definicji, które należy sobie obligatoryjnie przyswoić. Należą do nich: **tabele, rekordy, pola, typy danych, klucz główny, indeksy, relacje, formularze, kwerendy, raporty**.

Głównym elementem składowym bazy jest **tabela**, która przypomina z wyglądu arkusz kalkulacyjny, gdyż składa się z wierszy i kolumn. W bazie danych wiersze noszą nazwę **rekordów**, a znajdujące się na przecięciu wiersza i kolumny komórki nazywa się **polami**. Każde pole musi być opisane przez tworzącego bazę za pomocą typu danych, który szczegółowo definiuje rodzaj dostarczanej danej. Podstawowe typy to: Autonumerowanie, Liczba (Byte, Długa, Podwójnej długości), Tekst, Nota, Data/Godzina, Waluta, Tak/Nie, Obiekt OLE, Hiperłącze.



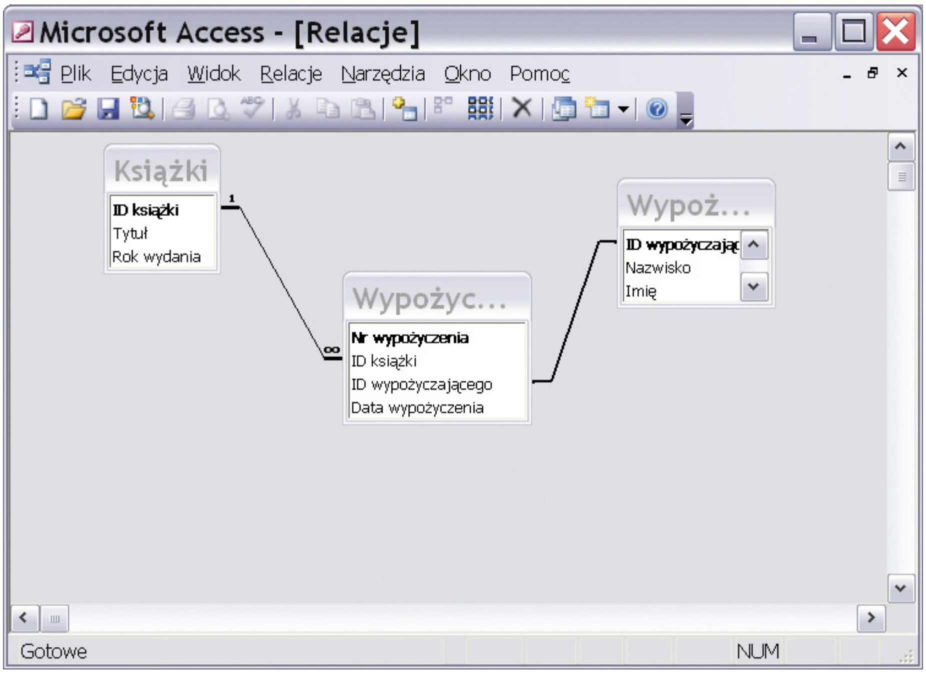
Rys. 26. Tabela w widoku projektu. Definiowanie typu pola (pole „Lp." stanowi klucz podstawowy)

Źródło: Opracowanie własne

Do celów szybkiego kojarzenia danych z różnych tabel na jednym lub kilku polach zakłada się tzw. **klucz główny** (podstawowy). Wartości w tym polu muszą być unikatowe, nie mogą się powtarzać, ponieważ stanowi on identyfikator rekordu. Jego obecność jest obowiązkowa, jeśli nie ma ingerencji ze strony użytkownika, program sam automatycznie go ustawi.

W celu szybkiego wyszukiwania żądanych danych po zbudowaniu bazy zakłada się na nią **indeksy**. Proces jest niezauważalny dla użytkownika i polega na wewnętrznym segregowaniu zgromadzonych danych.

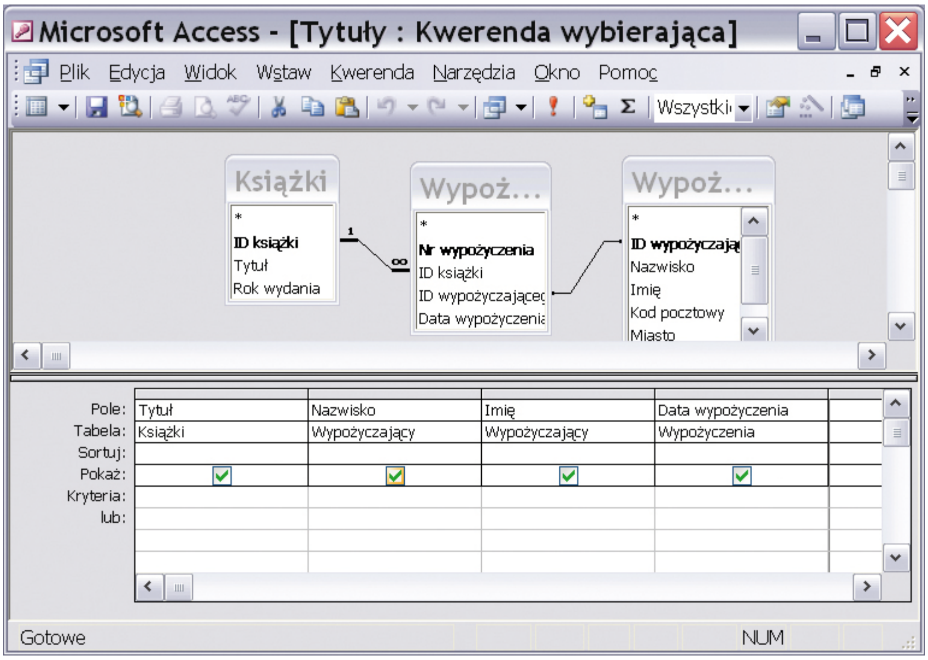
Pomimo rozmieszczenia danych po różnych tabelach, możliwe jest odpytanie bazy z informacji zawartych w całej bazie. W tym celu należy połączyć tabele **relacjami**. Podstawowe relacje to jeden-do-jednego i jeden--do-wielu. Twórca musi na tym etapie zapewnić integralność i spójność bazy danych. Dobrą praktyką jest wymuszanie więzów integralności. Nie da się połączyć ze sobą tabel, jeśli będą w nich występowały wady i anomalie. Do podstawowych wad zalicza się zjawisko redundancji (powtórzenia) oraz niezgodność typów danych, a do anomalii – anomalię aktualizacji bazy danych (gdy nastąpi zdublowanie rekordów) oraz anomalię przy usuwaniu.



Rys. 27. Relacje pomiędzy tabelami. Wymuszone więzy integralności w relacji jeden-do-wielu pomiędzy tabelą Książki i Wypożyczenia symbolizują odpowiednie znaki.

Źródło: Opracowanie własne

Bazę zawierającą tabele połączone relacjami można odpytywać, czyli uzyskiwać wybór z zawartych w niej danych, na podstawie zadanych kryteriów. W tym celu został stworzony cały język zapytań, w skrócie nazywany SQL. Bazę odpytuje się za pomocą **kwerend** (słowo pochodzi od ang. *query*). Choć istnieje kilka typów kwerend, najczęściej wykorzystuje się kwerendę wybierającą. Wynik swojej pracy kwerenda przechowuje w wirtualnej tabeli, którą tworzy.

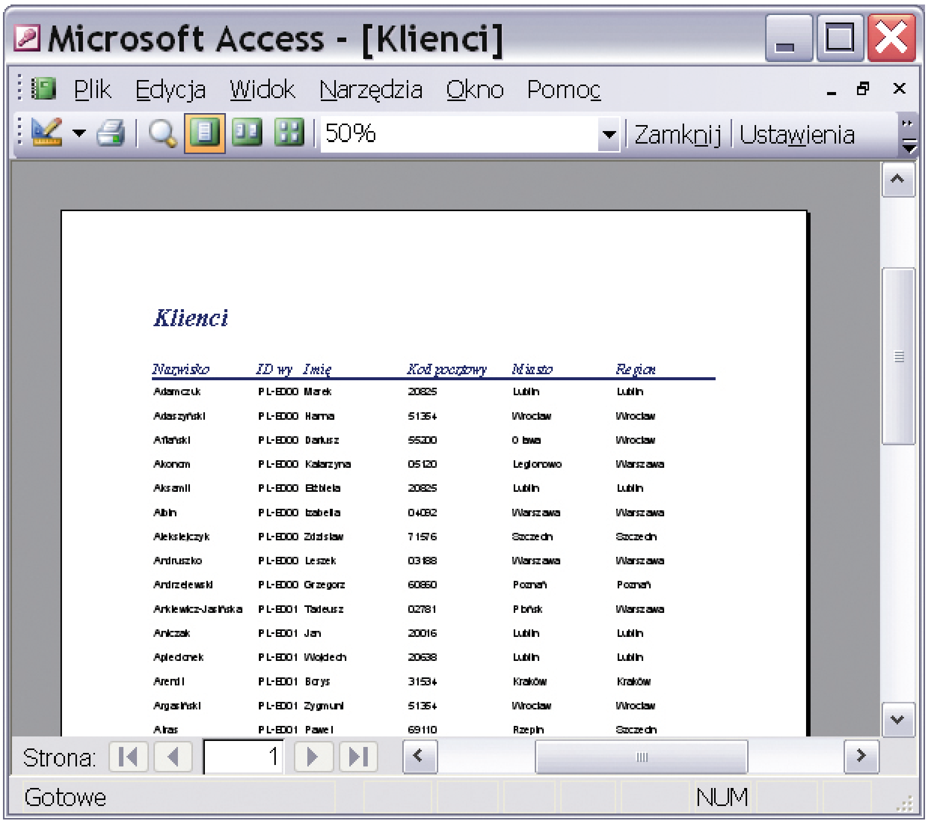


Rys. 28. Kwerenda wybierająca w widoku projektu

Źródło: Opracowanie własne

Choć kwerendy są potężnym narzędziem do zarządzania bazą oraz wydobywania interesujących informacji z gąszczu nagromadzonych danych, to ich konstrukcja nie jest przyjazna w obsłudze dla osoby niekoniecznie zaawansowanej w dziedzinie komputerów. Z drugiej strony kwerenda może mieć charakter otwarty, część parametrów zapytania może być narzucona z góry, a część pozostawiona do wprowadzenia przez operatora bazy. W celu ułatwienia wykonania tej operacji tworzy się **formularze** stanowiące wygodny interfejs do wprowadzania uzupełniających parametrów zapytania. Rola formularzy może obejmować nie tylko wprowadzanie, ale także edytowanie i usuwanie danych i to nie tylko w kwerendzie, ale też w tabelach. Do formularza można dodawać pola tekstowe i przyciski, czyniąc go bardziej przyjaznym człowiekowi.

Końcowy efekt pracy kwerendy można wyświetlić lub wydrukować do **raportu**stanowiącego miły dla oka sposób prezentacji danych pobranych z tabeli podstawowej lub wirtualnej. Każdy raport zawiera informacje pobrane wprost z tabel lub kwerend, które przechowuje projekt raportu.



Rys. 29. Raport

Źródło: Opracowanie własne

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Zastosowania i filozofia języka SQL.
b) Istota relacyjnych baz danych.
c) Zaprojektuj relacyjną bazę danych i wykaż się przed grupą umiejętnością wyszukania w niej potrzebnych informacji – zaprezentij różne metody.

6.2. Ty tu rządzisz

Zanim przystąpi się do tworzenia bazy, powinno się starannie przygotować do tego zadania, stworzyć algorytm pracy tak, by całe przedsięwzięcie nie wymknęło się spod kontroli i nie zaczęło żyć własnym życiem.

Przed utworzeniem bazy danych należy uzyskać odpowiedzi na następujące pytania:

- Kto będzie korzystał z bazy danych i w jakim celu?
- Jakie tabele zbierające dane będą potrzebne?
- Jakie kwerendy i raporty będą potrzebne użytkownikom tej bazy?
- Jakie formularze będą używane do zbierania informacji uściślających zapytania?

Bez odpowiedzi na te pytania nie da się stworzyć efektywnej i użytecznej bazy danych, prawidłowo zaprojektowanej i spełniającej oczekiwania zamawiającego.

Określenie celu

Projektowanie bazy danych rozpoczyna się od określenia celu, któremu ma ona służyć i sposobu jej używania. W trakcie określania przeznaczenia bazy danych zacznie się wyłaniać lista informacji, które baza ma dostarczać. Poszczególne informacje odpowiadają polom (zbiorczo kolumnom) w bazie danych, a zagadnienia, których one dotyczą, odpowiadają tabelom.

Zdefiniowanie pól potrzebnych w bazie danych

Każde pole to informacja dotycząca pojedynczego zagadnienia. Trzeba utworzyć osobne pola przechowujące każdą z informacji. Takim polem w tabeli dotyczącej klientów będzie na przykład nazwa firmy, adres, NIP, numer telefonu. Informacje należy przechowywać w jak najmniejszych jednostkach logicznych, nie powinny to być dane wyliczane ani pośrednie.

Co dalej?

Dopiero teraz mogą nastąpić kolejne etapy pracy – przypisanie pól do odpowiednich tabel, powiązanie tabel relacjami i stworzenie kwerend odpytujących bazę. W celu ułatwienia obsługi pozyskiwania dodatkowych parametrów zapytań należy utworzyć formularze, rezultat pracy kwerendy powinien zaś być wygenerowany w postaci raportów.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wymień kroki projektowania baz danych.
b) Przetestuj poprawność działania bazy – wyszukiwanie informacji i poruszanie się w obrębie przygotowanej bazy.
c) Porównaj sposób potwierdzania i wpisywania danych z Excelem. Który sposób jest bardziej szczegółowy?

Bibliografia:

Banachowski L., *Bazy danych. Tworzenie aplikacji,* Warszawa 1998.

Ullman, J.D., Widom J., *Podstawowy wykład z systemów baz danych*, Warszawa 1999..

Benyon-Davies P., *Systemy baz danych*, Warszawa 1998.

Connolly T., Begg C., *Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation and Management*, Addison, 1998.

Date C. J., *Wprowadzenie do baz danych*, Warszawa 1981.

Delobel C. i M. Adiba,*Relacyjne bazy danych*, Warszawa 1989.

Elmasri, R. and S. B. Navathe, *Fundamentals of Database Systems*. Redwood City 1994.

Figura D., *Obiektowe bazy danych*, Warszawa 1996.

Harris, W., *Bazy danych nie tylko dla ludzi biznesu*, Warszawa 1994.

Pankowski T., *Podstawy baz danych,* Warszawa 1992.

Riordan R. M., *Projektowanie systemów relacyjnych baz danych*, Warszawa 2000.

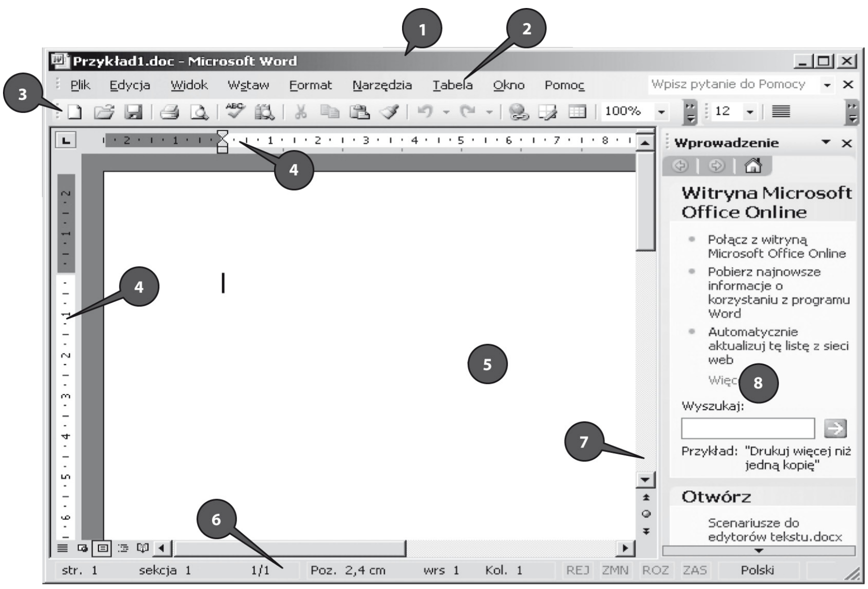
Ullman, J.D., *Systemy baz danych*, Warszawa 1988.

7. Opracowywanie informacji za pomocą komputera, w tym rysunków, tekstów

System operacyjny Windows dysponuje wbudowanymi prostymi edytorami tekstu: pierwszy – najprostszy – to Notatnik, drugi – o nieco większych możliwościach – to WordPad. Do dyspozycji mamy również inne proste i praktyczne narzędzie – kalkulator. Do bardziej zaawansowanych, a nawet profesjonalnych zastosowań, warto rozważyć użycie odrębnej aplikacji – MS Worda będącego częścią składową pakietu Microsoft Office. Dodatkową. Niewątpliwą zaletą wykorzystania tego programu jest fakt, że w ramach pakietu jest zintegrowany z arkuszem kalkulacyjnym (MS E xcel), bazodanową aplikacją MS Access, programem do grafiki menedżerskiej i prezentacyjnej PowerPoint, a także dodatkowymi programami, takimi jak Outlook będący aplikacją typu PIM (ang. *Personal information management*) z funkcjonalnością kalendarza, moduł graficzny Microsoft PhotoDraw i.in. Zaletą „pakietowości" jest łatwa wymiana elementów dokumentów pomiędzy aplikacjami poprzez mechanizm OLE (ang. *Objectlinking&embedding*). Pracę z wymienionymi programami usprawniają liczne kreatory i szablony, co jest szczególnie istotne dla kogoś z niewielkim doświadczeniem w posługiwaniu się komputerem. Na potrzeby niniejszego opracowania posłużono się pakietem Microsoft Office 2003, powszechnym w szkolnych pracowniach SBS.

7.1. Dokument na miarę XXI wieku

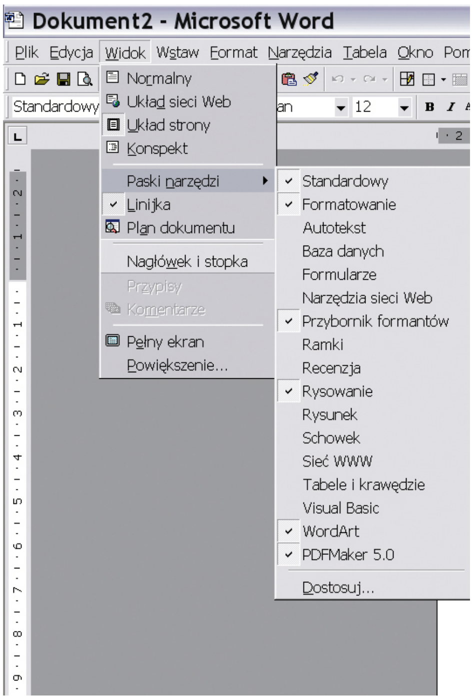
Zanim rozpoczniemy pracę z dokumentem, zapoznamy się z interfejsem Worda i z postawionymi do naszej dyspozycji funkcjonalnościami.



Opis elementów ekranu MS Word:

1) **Pasek tytułu**. Wyświetla nazwę bieżącego dokumentu i nazwę programu. Umożliwia przesuwanie okna aplikacji po całym ekranie.
2) **Pasek menu**. Zawiera poszczególne pozycje menu. Każda z głównych pozycji menu zawiera podmenu, które rozwija się po kliknięciu w napis (np. Plik).
3) **Paski narzędzi**. W programie Microsoft Office Word 2003 domyślnie wyświetlane są dwa paski narzędzi: pasek Standardowy (zawiera przyciski: Nowy, Otwórz, Zapisz itd.) oraz pasek Formatowanie (zawiera przyciski: Styl, Rodzaj czcionki, jej rozmiar, Pogrubienie, Kursywa, Podkreślenie, indeks górny/dolny i inne). Poprzez menu Widok\Paski narzędzi można włączyć lub wyłączyć wyświetlanie pasków. Poprzez menu Widok\Paski Narzędzia\Dostosuj można dodawać lub usuwać przyciski z paska narzędzi. Pasek można dostosować do własnych potrzeb poprzez przycisk znajdujący się na końcu z prawej strony.
4) **Linijka górna i boczna**. Ułatwiają ustawianie marginesów oraz rozmieszczanie różnych elementów na stronie ekranowej, linijka górna umożliwia ponadto dodawanie znaków tabulacji.
5) **Obszar roboczy**. Jest to ta część strony ekranowej, w której można wpisywać tekst.
6) **Pasek statusu**. Wyświetla różne bieżące informacje dotyczące miejsca położenia kursora, np.: numer strony, liczbę wszystkich stron w dokumencie, tryb działania klawiatury.
7) **Pasek przewijania**. Boczny, umożliwia przesuwanie strony ekranowej w dół i w górę, znajdują się tam również przyciski do zmiany strony.
8) **Okno zadań**, zawierające między innymi listę nazw ostatnio otwieranych dokumentów, przycisk tworzenia nowego dokumentu oraz łącza do stron WWW firmy Microsoft w Internecie dedykowanych programowi Word.

Wszystkie paski narzędzi są obiektami dokowalnymi, co oznacza, że dowolny pasek narzędzi, nawet pasek menu, można umieścić w dowolnie wybranym miejscu ekranu, w tym także na innych krawędziach niż górna. Realizuje się to myszką, metodą przeciągnij i upuść (ang. *drag&drop*), przy czym należy złapać myszką za uchwyt paska (małą, szarą wykropkowaną linią przy lewej krawędzi paska).

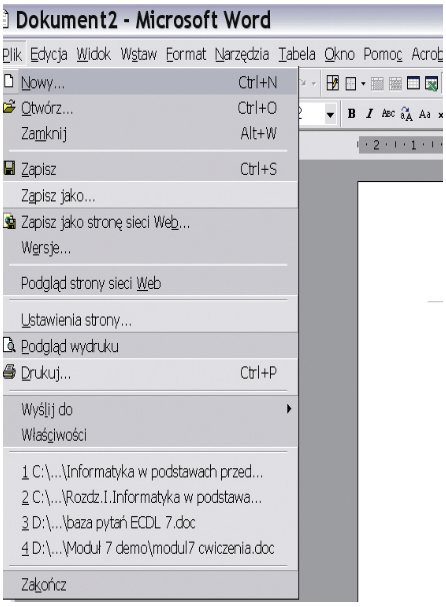


Rys. 30. Wybór pasków narzędzi

Źródło: Opracowanie własne

Word udostępnia **dwie metody tworzenia nowych dokumentów**:

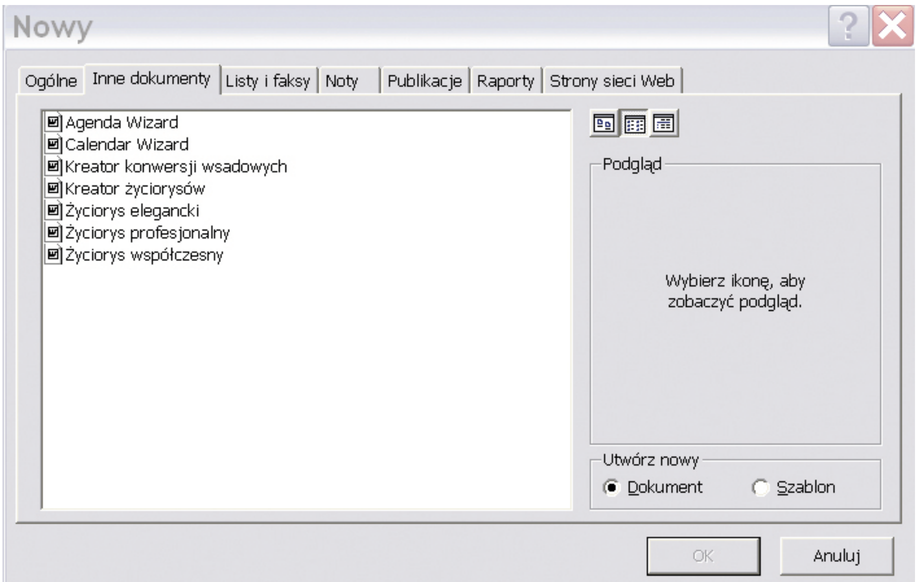
1) **Pusty plik dokumentu** utworzony w oparciu o domyślne ustawienia Worda, użytkownik musi go jedynie ręcznie sformatować. W celu utworzenia pliku tą metodą trzeba wybrać z menu głównego polecenie Plik/Nowy lub nacisnąć znajdującą się na standardowym pasku narzędzi odpowiednia ikonkę (Rys. 31).



Rys. 31. Tworzenie nowego dokumentu

Źródło: Opracowanie własne

2) **Plik utworzony na podstawie szablonu dokumentu** zawierającego szereg wartości, sposobów formatowania, pasków narzędzie zdefiniowanych przez użytkownika makropoleceniami przypisanymi do tego szablonu. Tworzenie dokumentu w oparciu o gotowy szablon może zaoszczędzić sporo czasu, szczególnie w przypadku gdy często tworzymy standardowe rodzaje dokumentów. W celu utworzenia pliku na podstawie szablonu z menu głównego wybiera się Plik/Nowy, a następnie w oknie zadań wybieramy Nowy z szablonu/Szablony ogólne. Po wyborze szablonu w obszarze podglądu może się pojawić miniaturowy widok wybranego szablonu.



Rys. 32. Szablony MS Word

Źródło: Opracowanie własne

Na ekranie pojawi się dokument utworzony w oparciu o wybrany szablon. Żeby wprowadzić nowe wartości, należy postępować zgodnie z informacjami umieszczonymi na szablonie. Word oferuje szereg różnych szablonów dokumentów, nie wszystkie z nich są jednak instalowane domyślnie podczas instalacji pakietu. Jeżeli wybierzemy szablon, który nie jest jeszcze zainstalowany, to program poprosi o włożenie do napędu CD płytki instalacyjnej pakietu Office.

7.1.1. Podstawy formatowania

Mimo że zawartość samego dokumentu Worda może być perfekcyjnie poprawna, to jednak dobranie odpowiedniego sposobu formatowania może zdecydowanie zwiększyć wrażenie, jakie dokument zrobi na osobach go przeglądających.

Word oferuje cały szereg opcji formatowania, które można zastosować w swoich dokumentach. Formatować można czcionkę, akapit, stronę lub cały dokument. I tak:

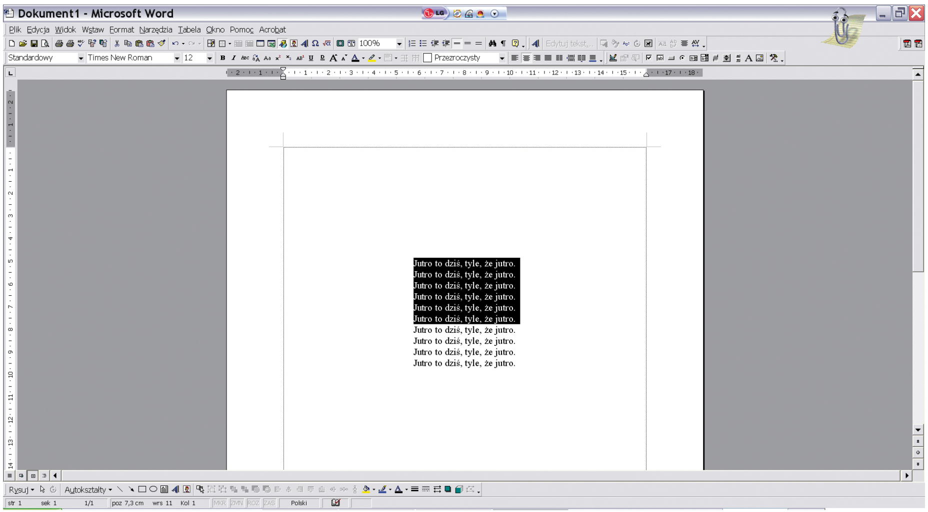
1) **formatowanie czcionek** – pozwala na zmianę wyglądu czcionek, przy użyciu których są prezentowane teksty i liczby;
2) **wyrównywanie** – pozwala na zmianę sposobu wyrównywania tekstu w akapicie (do lewej, do prawej, do środka i wyjustowanie) oraz w komórkach tabel, do formatowania akapitu należy również ustawienie interlinii (odstępów między wierszami), wcięć, tabulatorów oraz odstępów górnych i dolnych;
3) **obramowania** – pozwalają na tworzenie obramowań dookoła poszczególnych fragmentów tekstu lub całej strony;
4) **formatowanie kolumn i wierszy** (opcja dotyczy główne tabel) – pozwala na zmianę szerokości kolumn oraz wysokości wierszy, co umożliwia dopasowanie rozmiarów komórek do rozmiarów zapisanych w nich informacji;
5) **formatowanie całego dokumentu** – ustawienia rozmiaru papieru, położenia strony (pionowa lub pozioma), marginesów, nagłówków i stopek, numeracji stron.

Domyślną czcionką używaną przez program Word jest Times New Roman w rozmiarze 12 punktów. W każdej chwili można zmienić sposób formatowania wielu opcji czcionek w dowolnym obszarze dokumentu:

1) **Czcionka** (krój czcionki, rodzaj czcionki) – jest to krój pisma, używany do wyświetlania znaków na ekranie, Word umożliwia korzystanie ze wszystkich prawidłowo zainstalowanych w systemie czcionek;
2) **Styl czcionki** – określa tzw. wagę oraz kąt ustawienia znaków czcionki, do wyboru mamy zazwyczaj styl Normalny, **Pogrubiony**, *Kursywa* i ***Pogrubiona kursywa***;
3) **Rozmiar czcionki** – określa wielkość czcionki wyrażoną w punktach;
4) **Podkreślenie** – sposób podkreślenia znaków czcionki, nie należy mylić go z obramowaniem akapitu lub fragmentu tekstu (np. na dolnej krawędzi) – te dwa elementy nie mają ze sobą nic wspólnego;
5) **Kolor** – określa, w jakim kolorze czcionka jest wyświetlana na ekranie (drukowana na drukarce);
6) **Efekty** – różnego rodzaju dodatkowe efekty mające wpływ na sposób wyświetlania czcionki.

Aby zmienić sposób formatowania czcionki, krzystając z paska narzędzi formatowania należy:

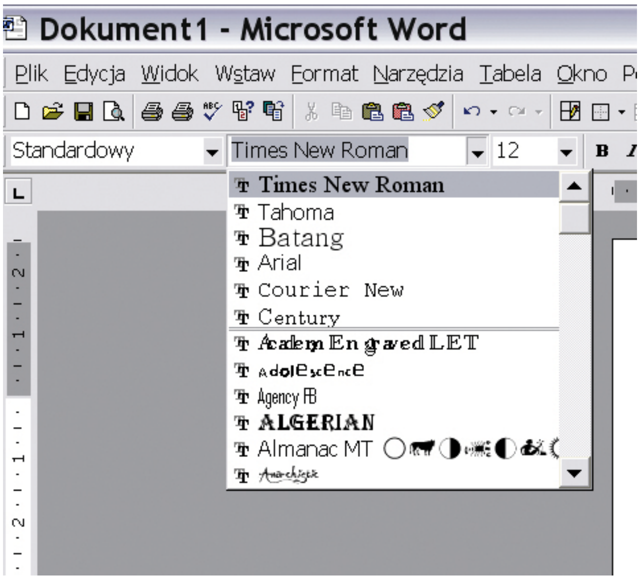
1. Zaznaczyć tekst za pomocą myszy lub klawiatury (Rys. 33). Żeby zaznaczyć część tekstu przy użyciu, myszy należy ustawić się na danym fragmencie, wcisnąć lewy przycisk myszki, a następnie „przeciągnąć" mysz w dół zaznaczonego tekstu, cały czas trzymając wciśnięty przycisk myszy. Aby zaznaczyć tekst z klawiatury, należy ustawić się na jego fragmencie, a następnie zastosować kombinację klawiszy Shift i strzałek znajdujących się obok klawiatury numerycznej.



Rys. 33. Zaznaczanie tekstu w MS Word

Źródło: Opracowanie własne

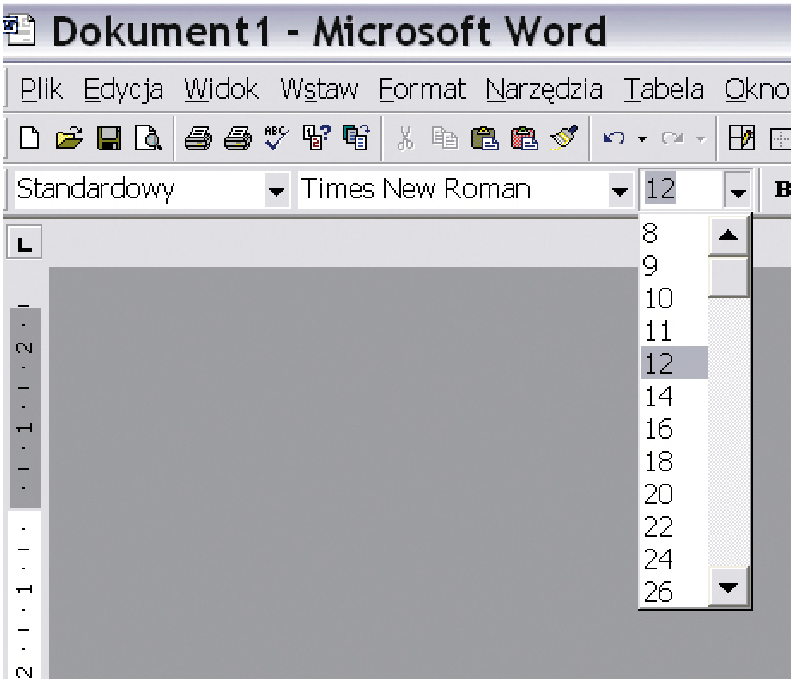
2. Wybrać odpowiedni krój z listy rozwijanej Czcionka.



Rys. 34. Wybór czcionki

Źródło: Opracowanie własne

3. W celu zmiany rozmiaru czcionki trzeba wybrać listę rozwijaną Rozmiar czcionki, wybrać rozmiar czcionki albo wpisać z klawiatury, na końcu wybór zatwierdzić enterem.



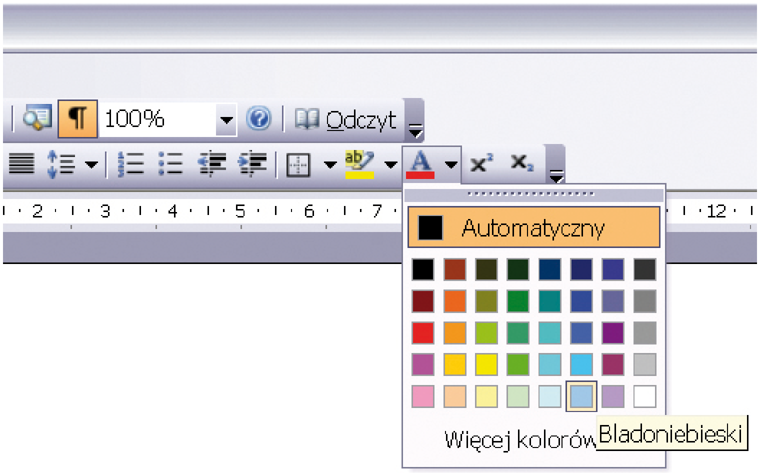
Rys. 35. Wybór rozmiaru czcionki

Źródło: Opracowanie własne

Styl czcionki dostępny jest w dwojaki sposób: albo poprzez wybór odpowiedniego przycisku na pasku narzędzi, albo po naciśnięciu kombinacji klawiszy. I tak:

d) w celu pogrubienia zaznaczonego fragmentu tekstu należy z paska narzędzi wybrać przycisk **pogrubienia B** lub nacisnąć kombinację klawiszy Ctrl+B;
e) w celu pochylenia zaznaczonego fragmentu tekstu trzeba wybrać przycisk *kursywy I* lub nacisnąć kombinację klawiszy Ctrl+I;
f) podkreślenie otrzymamy, naciskając U na pasku narzędzi lub poprzez kombinację klawiszy Ctrl+U.

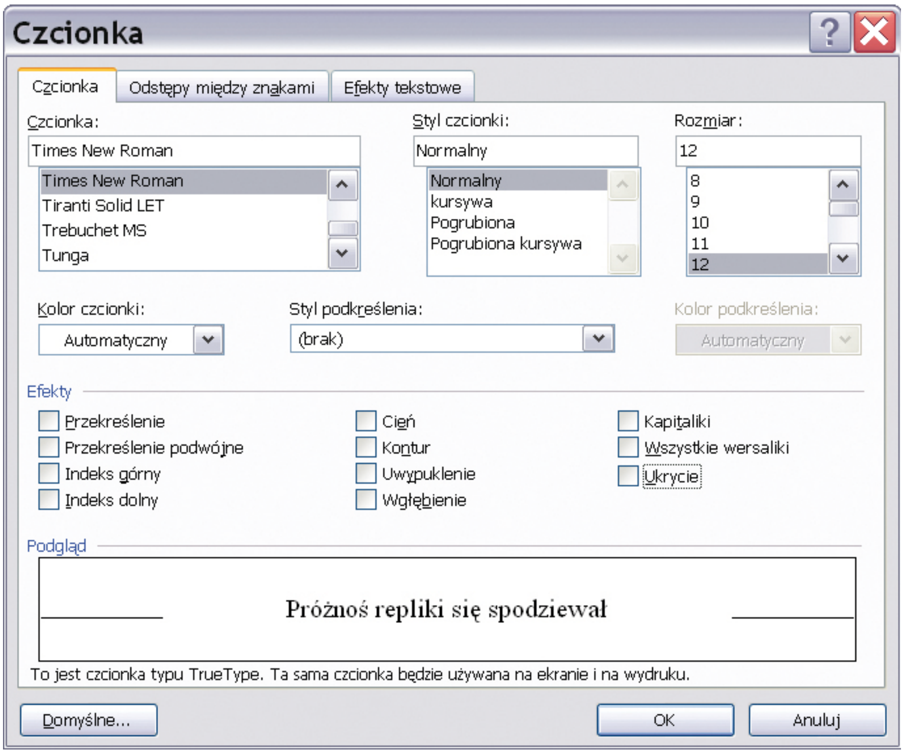
Aby zmienić kolor zaznaczonych znaków, na pasku formatowania należy wybrać przycisk Kolor czcionki i po rozwinięciu się tablicy kolorów kliknąć w ten pożądany.



Rys. 36. Wybór koloru czcionki

Źródło: Opracowanie własne

Wszystkie opisane powyżej opcje są dostępne również przez menu kontekstowe. Najprostszym sposobem dotarcia do niego (i to niezależnym od wersji MS Office) jest zaznaczenie fragmentu tekstu, który ma być sformatowany, następnie wciśnięcie prawego klawisza myszy i wybranie opcji Czcionka. Menu kontekstowe pozwala również na zmianę odstępów między znakami oraz efekty tekstowe.

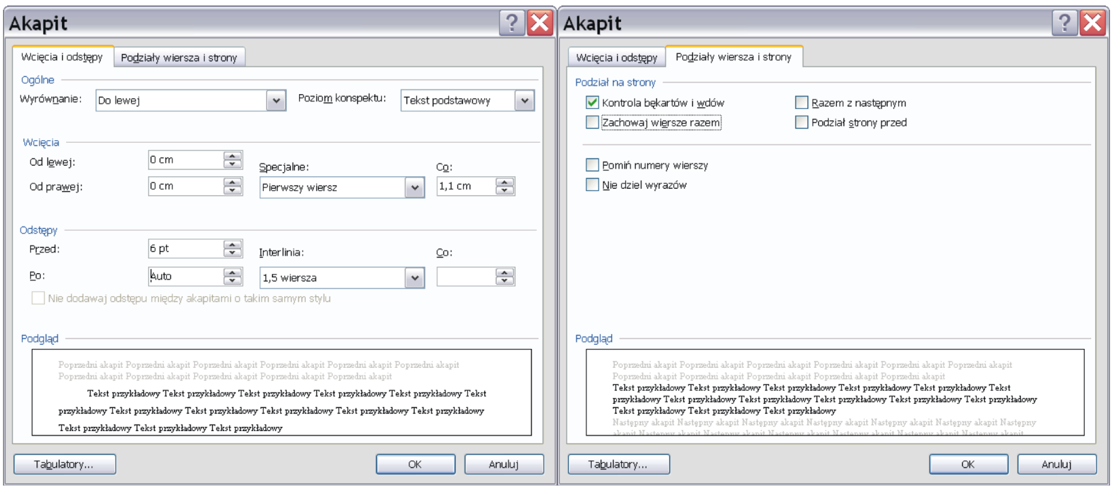


Rys. 37. Opcje menu kontekstowego „Czcionka"

Źródło: Opracowanie własne

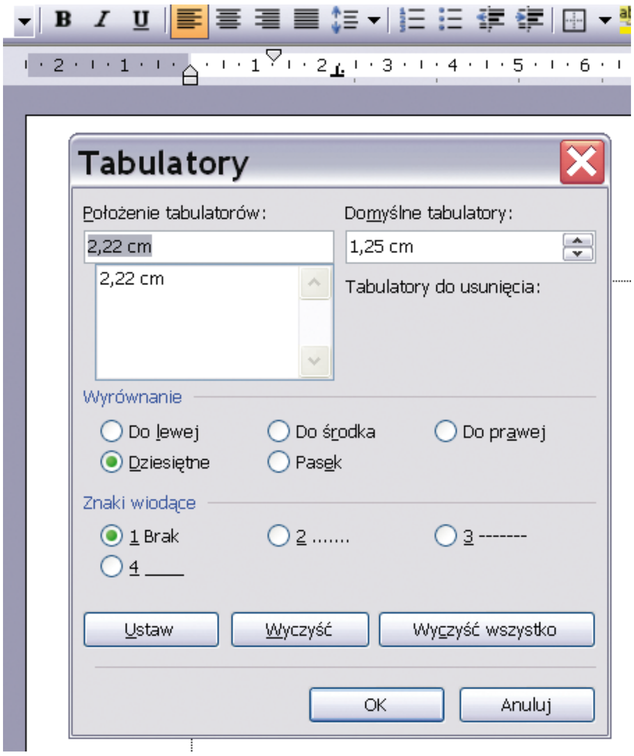
Akapit także można formatować albo za pomocą przycisków na pasku narzędzi, albo za pomocą menu kontekstowego wywoływanego po naciśnięciu prawego przycisku myszy.

Do wyboru jest możliwość wyrównania tekstu w akapicie (do lewej, do prawej, do środka i wyjustowanie), ustawienie interlinii (odstępów między wierszami), wcięć, sformatowanie tabulatorów oraz odstępów górnych i dolnych, tu znajdują się też opcje podziału wiersza i strony. Dostępne rozwiązania znajdują się na kolejnych zrzutach ekranowych.



Rys. 38. Opcje formatowania akapitu oraz podziałów wiersza i strony

Źródło: Opracowanie własne

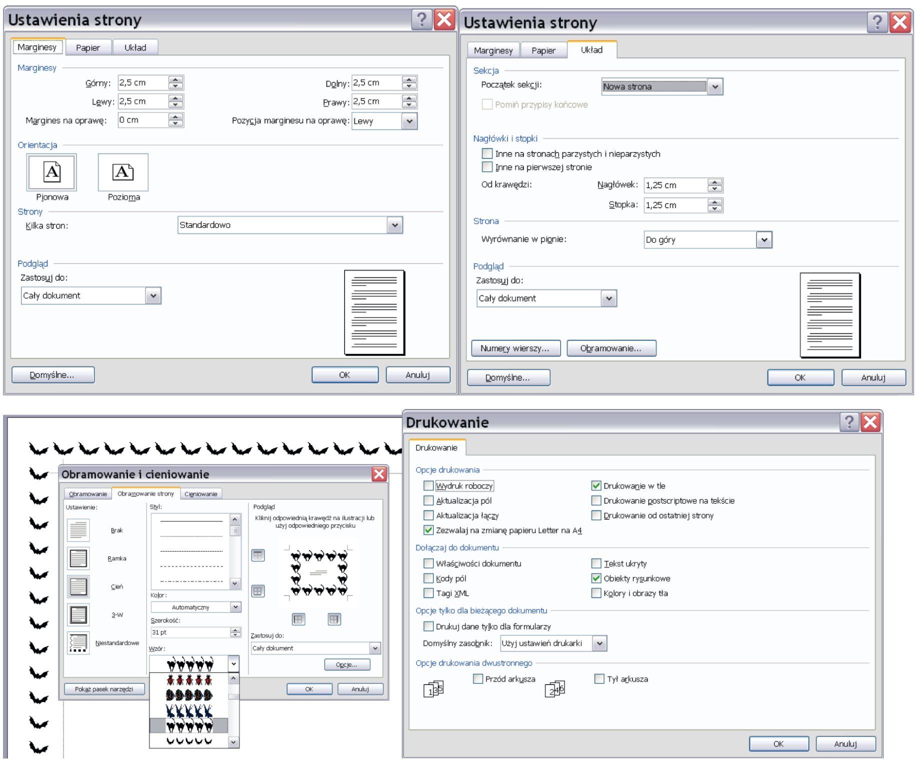


Rys. 39. Linijka górna z zaznaczonymi wcięciami i tabulatorem oraz formatowanie tabulatora (znaki wiodące mogą stanowić odnośniki między oddalonymi pozycjami)

Źródło: Opracowanie własne

Na szczególną uwagę zasługuje justowanie. Wyrównuje ono prawy i lewy margines kosztem odstępów pomiędzy całymi wyrazami. W skrajnym przypadku, gdy w wierszu są tylko 2 wyrazy i wymuszono przejście do następnej linii bez kończenia akapitu (za pomocą Shift+Enter), pierwszy wyraz zostanie wyrównany do lewej, a drugi do prawej, pomiędzy nimi zaś będzie „ziała przepaść”. Akapit to podstawowy sposób dzielenia tekstu na rozpoznawalne wzrokiem mniejsze fragmenty w celu zwiększenia jego czytelności.

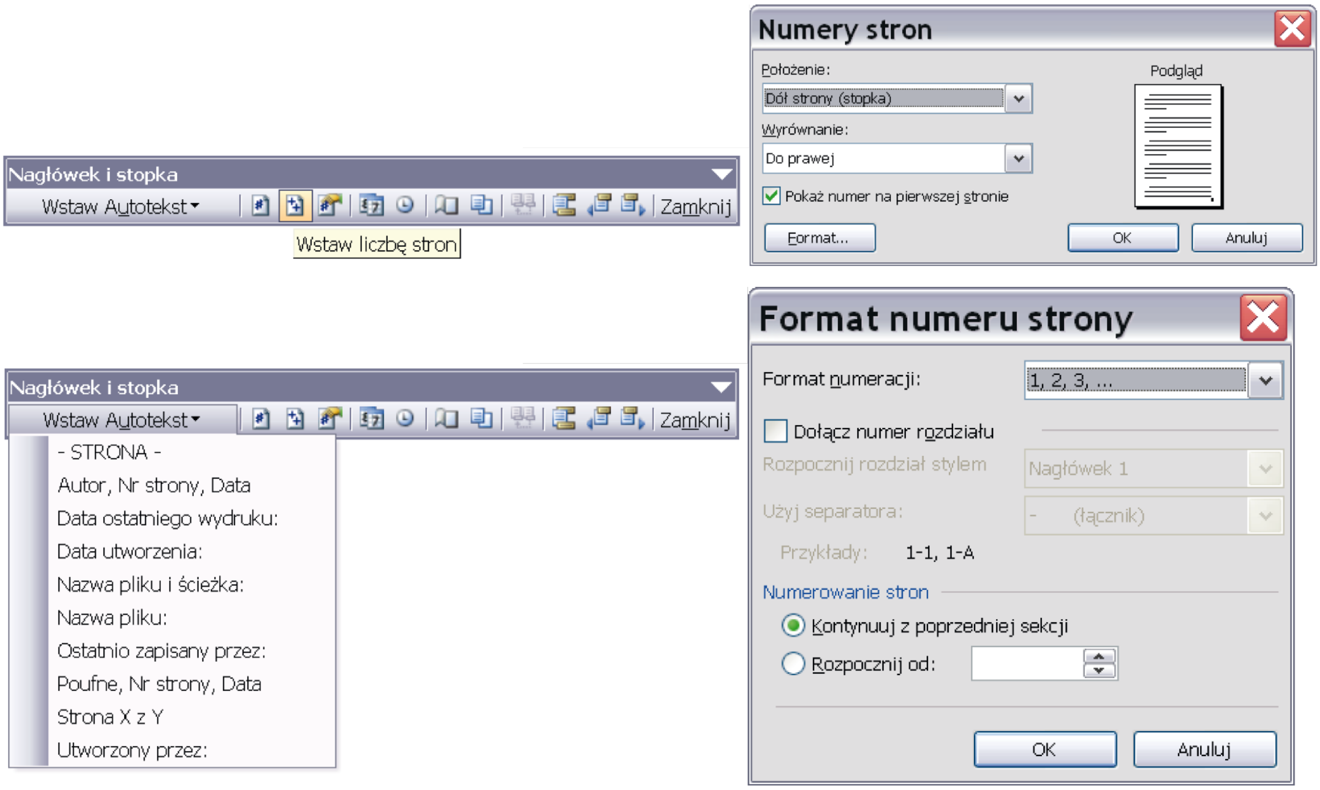
Word pozwala na pełną kontrolę nad dokumentem: rozmiarem jego strony, orientacją (położeniem), marginesami, obramowaniami strony, łamaniem stron, nagłówkami i stopkami, numeracją, zawartością i kolejnością drukowanych stron oraz skalowaniem arkusza przygotowanego do druku – pozwala na wpasowanie wydruku w rozmiar papieru.



Rys 40. Opcje układu strony, obramowania i druku

Źródło: Opracowanie własne

Nagłówek i stopkę można wstawić po wybraniu z menu grupy Widok, a następnie przycisku Nagłówek i stopka. Pojawi się pole tekstowe, w które można wpisać tytuł nagłówka lub można skorzystać z gotowego autotekstu. Z tego poziomu możliwe jest także ponumerowanie stron, mimo że w menu grupy Widok znajduje się odrębny przycisk pozwalający na wstawienie numeracji w rozmaitych opcjach.

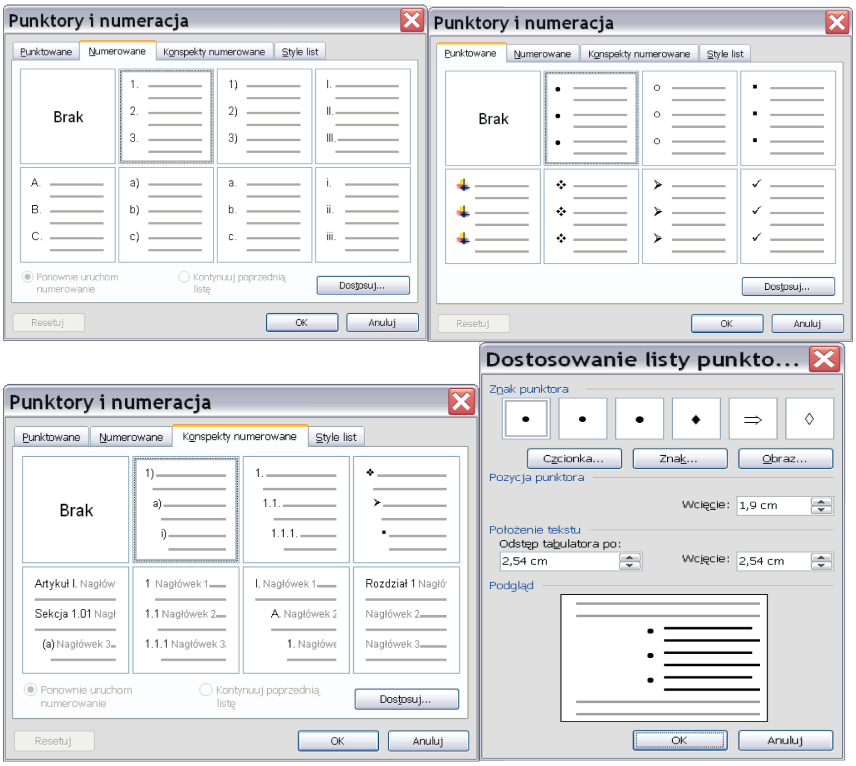


Rys. 41 i 42 Po lewej wstawienie nagłówka/ stopki, po prawej numerowanie stron i ich formatowanie

Źródło: Opracowanie własne

7.1.2. Wypunktowanie i numerowanie

Tworząc dokument, dla zwiększenia czytelności często stosuje się wypunktowanie lub numerowanie wyliczanych treści. Punktory i numeracje posiadają swoje przyciski na pasku narzędziowym, są dostępne w menu podręcznym otwieranym przez kliknięcie prawego przycisku myszy, bądź są dostępne w grupie format. Możliwe jest zastosowanie szerokiej gamy standardowych punktorów i numeracji, także wielopoziomowych konspektów numerowanych, bądź stworzenie własnego formatu punktora lub numeru – po wybraniu przycisku Dostosuj w oknie dialogowym.



Rys. 43. Punktory i numeracja

Źródło: Opracowanie własne

7.1.3. Podziały stron, sekcji, kolumn

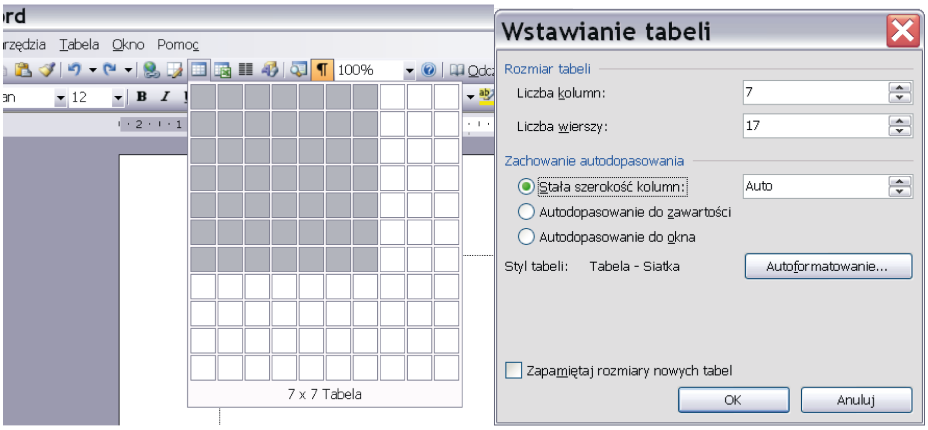
Pracując z dokumentem o dość dużej liczbie stron, trudno jest nad nim zapanować. Niekiedy zdarza się, że dokument posiada strony w orientacji poziomej i pionowej. Często do tak pieczołowicie sformatowanego dokumentu dopisuje się tekst lub dodaje kilka stron. Word sam dzieli tekst na strony, stosując „miękkie podziały". Zwykle w takim przypadku konieczne jest ponowne sformatowanie dokumentu. Aby zapanować nad dokumentem, warto zastosować tzw. twardy podział stron (wymusić koniec strony). Twarde zakończenie ściśle związane jest z określonym miejscem w tekście – przesuwanie się tego tekstu w wyniku modyfikacji czy formatowania będzie powodowało przesuwanie się wraz z nim znaku końca strony. Wymuszenie końca strony ułatwia dopisywanie tekstu do już istniejącego. Dzięki temu dopisywany tekst „nie spycha" w dół już istniejącego oraz nie niszczy formatowania na kolejnych stronach. Z kolei podział sekcji pomaga przy tworzeniu dokumentów o różnej orientacji stron. Natomiast podział kolumny przydaje się w przypadku pracy z dwoma lub więcej kolumnami, gdy występuje potrzeba równomiernego rozłożenia treści w sąsiadujących kolumnach.

Rys. 44. Aby wstawić twardy podział stron z menu „Wstaw" należy wybrać Podział. Wstawienie podziału sekcji umożliwia podział dokumentu na strony o orientacji poziomej i pionowej, podział kolumny na równomierne rozłożenie tekstu w kolumnach

Źródło: Opracowanie własne

7.1.4. Wstawianie i formatowanie tabel

Do wstawiania tabeli służy przycisk „Wstaw tabelę" na Standardowym pasku narzędzi lub można tego dokonać poleceniem Wstaw tabelę z menu Tabela. Pierwszy sposób pozwala na graficzne modelowanie rozmiaru tabeli, tabela ma jednak ograniczone rozmiary, adekwatne do rozmiaru ekranu i miejsca położenia przycisku. Drugi sposób otwiera okno dialogowe pozwalające na dowolne zdefiniowanie tych rozmiarów

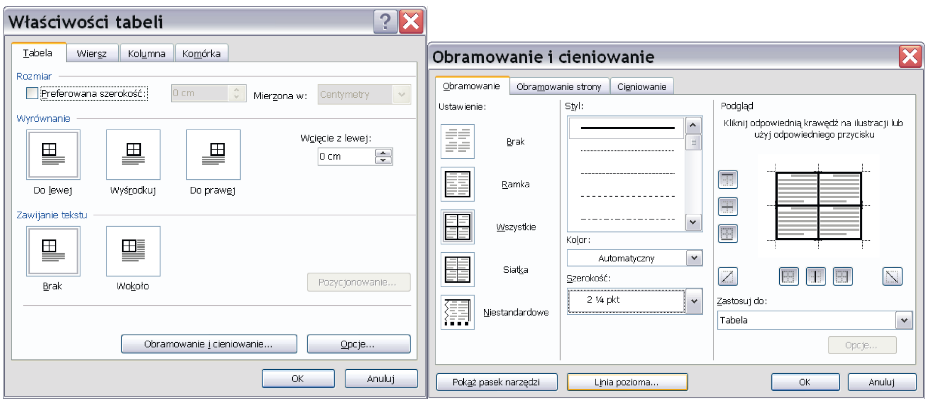


Rys. 45. umożliwiające deklarowanie rozmiarów tabeli

Źródło: Opracowanie własne

W tabeli każda komórka jest traktowana jako osobny akapit i dla komórki możemy zmieniać formatowanie takich cech, jak: czcionka, wyrównanie, wcięcia, korzystając z przycisków na pasku narzędzi Formatowanie. Po naciśnięciu Enter przechodzi się do nowej linii, ale w tym przypadku komórka rozciągnie się i powstanie w niej nowy akapit. Wciśnięcie klawiszy kursora pozwala wędrować pomiędzy znakami w obrębie komórki, natomiast do następnej komórki tabeli przechodzi się wciskając klawisz Tab.

Formatowanie tabeli jest możliwe przez okno dialogowe Właściwości tabeli, w którym znajduje się dodatkowy przycisk odsyłający do kolejnego okna Obramowanie i cieniowanie. W pierwszym z nich można zmienić wymiary wierszy, kolumn, komórek, wyrównać tabelę na stronie oraz otoczyć tekstem, w zakładce Komórka można dodatkowo ustawić równanie zawartości w pionie. Drugie pozwala na dowolne sformatowanie obiektu w zakresie stylu i koloru obramowania tabeli, jej cieniowania, koloru wypełnienia komórki itp.

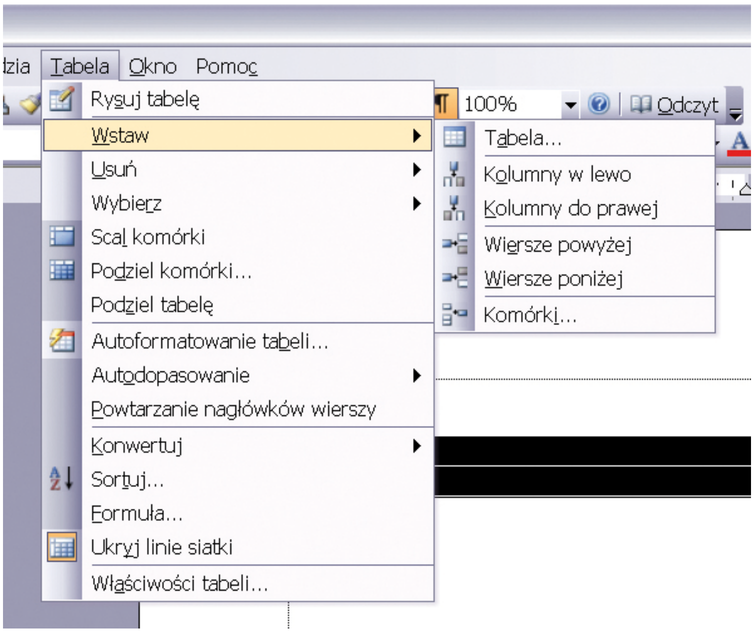


Rys. 46. Właściwości tabeli i opcje obramowania i cieniowania tabeli

Źródło: Opracowanie własne

W tabeli można wykonywać szereg różnych operacji typu: wstawianie lub usuwanie komórek, wierszy i kolumn, scalanie komórek i dzielenie, a nawet podział tabeli na dwie odrębne. Na tabeli można wykonać autoformatowanie, wreszcie można zaznaczoną tabelę przekonwertować na tekst (operacja odwrotna – konwersja zaznaczonego fragmentu tekstu na tabelę jest również dostępna w tym menu).

Aby wstawić pojedynczą komórkę do tabeli należy zaznaczyć jedną komórkę w tabeli w miejscu, w którym ma być wstawiona nowa komórka. Następnie należy wcisnąć przycisk Wstaw tabelę z paska narzędzi standardowych i uruchomić polecenie Wstaw komórki z menu Tabela. Pojawi się okienko, w którym trzeba określić, czy po wstawieniu komórki pozostałe komórki powinny być przesunięte w prawo (przesuwa w prawo wszystkie komórki w wierszu) czy w dół (przesuwa w dół wszystkie komórki w kolumnie). Wybranie jednej z dwóch możliwych opcji spowoduje wstawienie całego wiersza lub kolumny.



Rys. 47. Opcje operacji na tabeli

Źródło: Opracowanie własne

W ten sam sposób można wstawić grupę komórek. Wystarczy zaznaczyć w tabeli kilka sąsiadujących komórek i wcisnąć przycisk Wstaw tabelę, a do tabeli zostaną wstawione komórki w takim układzie, w jakim były zaznaczone.

Wstawienie wiersza/kolumny uzyskuje się przez zaznaczenie wiersza lub kolumny w tabeli (jeżeli zaznaczy się dwa wiersze, to dwa wiersze zostaną wstawione) i wciśnięcie przycisku Wstaw tabelę lub uruchomienie polecenia Wstaw wiersz (kolumny) z menu Tabela. Nowy wiersz (kolumna) będzie wstawiony przed zaznaczonym.

Zaznaczenie grupy komórek i wciśnięcie klawisza Delete powoduje wyczyszczenie zawartości tych komórek. Żeby usunąć komórkę lub grupę komórek, należy je zaznaczyć, po czym użyć polecenia Usuń komórki z menu Tabela. Do usunięcia komórek można również użyć klawisza Backspace. Na ekranie pojawi się okienko, w którym musimy określić, jak przesunąć pozostałe komórki.

7.1.5. Wstawianie obiektów graficznych

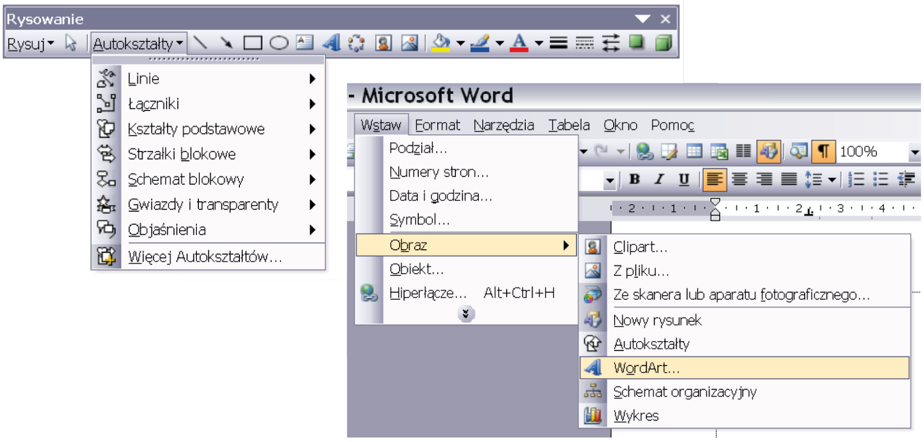
Microsoft Word pozwala na łatwe dodawanie do dokumentów różnorodnych obiektów graficznych i wykresów.

Obiekty rysowane (linie, strzałki, autokształty, prostokąty, owale i inne kształty) przyczyniają się do podniesienia walorów wizualnych dokumentu i wyróżnienia elementów, na które czytelnik powinien zwrócić szczególną uwagę.

Pola tekstowe pozwalają na wygodne umieszczanie notatek w dowolnym miejscu strony. Obiekty Clipart podnoszą atrakcyjność dokumentu poprzez umieszczenie w nim profesjonalnie przygotowanych predefiniowanych ilustracji.

W omawianej wersji edytora tekstów większość elementów graficznych można wydobyć ze specjalnego paska narzędzi o nazwie Rysowanie, który pojawia się po kliknięciu przycisku na pasku narzędziowym lub włącza się go poprzez menu Widok/Paski narzędzi.

Zaawansowane opcje wstawiania obiektów graficznych zostały umieszczone w menu w grupie Wstaw/Obraz.



Rys. 48. Pasek narzędzi Rysowanie oraz wstawianie w dokumencie dowolnego obiektu graficznego

Źródło: Opracowanie własne

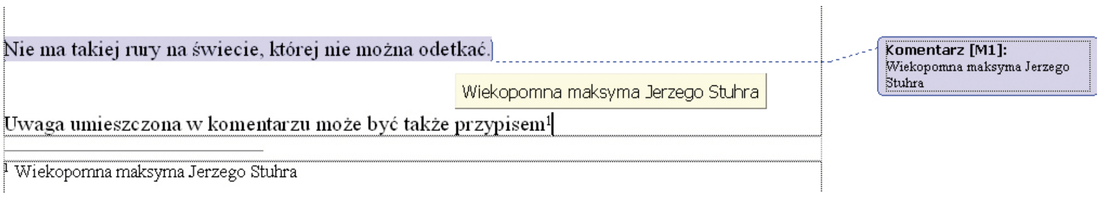
7.1.6. Komentarze i przypisy

W dokumentach można umieszczać również komentarze i przypisy. Komentarze służą do robienia notatek na własny użytek lub dla innych osób pracujących nad dokumentem.

Przypisy najczęściej podają źródło cytowania.

Komentarze i przypisy można wstawiać, edytować i usuwać. W celu wstawienia komentarza należy:

- zaznaczyć tekst lub element, którego ma dotyczyć komentarz, bądź kliknąć na końcu tego tekstu;
- w menu grupy Wstaw wybrać polecenie Komentarz, bądź użyć skrótu Alt+M;
- w dymku komentarza wpisać tekst komentarza;
- przypis wstawiamy analogicznie – wybierając z menu Wstaw polecenie Odwołanie/Przypis dolny, przypis nie tylko znajdzie się na dole strony, ale po najechaniu na numer przypisu pojawi się przy ikonie koperty.



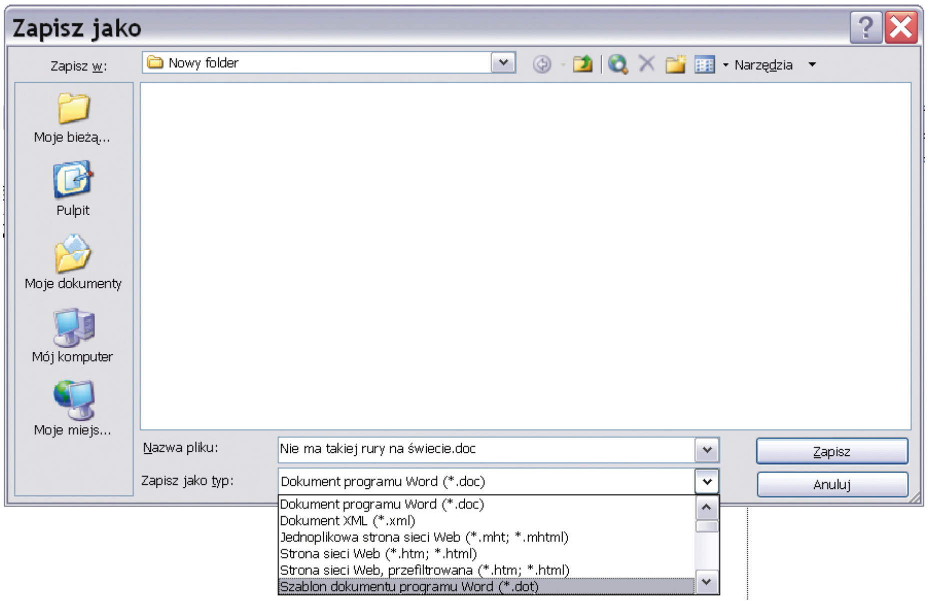
Rys. 49. Komentarz i przypis

Źródło: Opracowanie własne

7.1.7. Zapisywanie dokumentu

Zapisanie dokumentu w postaci pliku na dysku skutkuje również zapisem wielu ustawień strony i opcji drukowania. Przygotowane uprzednio ustawienia strony i formatowania można zapisać jako szablon, wybierając z menu Plik/Zapisz jako odpowiedni typ dokumentu – szablon dokumentu programu Word.

W ten sam sposób można dokument Worda zapisać w formacie *.rtf (w celu przesłania na komputer z włączoną blokadą dla plików zawierających makrodefinicje) albo *.html (w celu publikacji w sieci, np. jako komponent lekcji w Moodle).



Rys. 50. Zapisywanie dokumentu jako szablon

Źródło: Opracowanie własne

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wskaż braki i niedoskonałości narzędzia, jakim jest Twój edytor tekstów, w zastosowaniach DTP. Czego brakuje MS Word, aby mógł być wykorzystywany do składu materiałów?

b) Jaka jest rola słownika w edytorze? Czy na pewno poprawia błędy? Czy można go oszukać?

c) Przygotuj szczegółowy prospekt informacyjny dla wybranej firmy/produktu uzasadniający jej/jego unikatowość i zachęcający do zapoznania się z ofertą firmy/producenta produktu.

Bibliografia:

Syllabus ECDL, wersja 5.0, PTI 2007.

Żarowska A., Węglarz W., *ECDL na skróty*, Warszawa 2011.

Langer M., *Po prostu Word 2003 PL*, Warszawa 2004.

8. Aspekty prawne w pracy z komputerem: przestrzeganie prawa autorskiego, ochrona danych osobowych

Nieznajomość prawa nie zwalnia od odpowiedzialności. Znajomość – często.

St. J. Lec

Prawo autorskie funkcjonuje w Polsce stosunkowo krótko. Nie obrosło więc w dużo przepisów wykonawczych i interpretacji. Niemniej jest przyjęte w bardzo rygorystycznej formie, a im mniejsza wiedza w tym zakresie stróżów i egzekutorów prawa różnych szczebli, tym większa gorliwość w literalnym egzekwowaniu zapisów. Z drugiej strony mamy rzesze korzystających z oprogramowania z zupełnym brakiem świadomości zasad, na jakich mogą to robić i czego im robić nie wolno. Taka nonszalancja i całkowita ignorancja użytkowników oprogramowania w tym zakresie często przekracza dozwolone granice i, wykraczając za nie, staje się przejawem współczesnej odmiany piractwa – piractwem komputerowym. Dlatego ważne jest, by istniał choć cień szansy na rzetelną ocenę sytuacji w oparciu o racjonalne przesłanki, niekoniecznie będące kalką sytuacji opisanych w przepisach prawa, zarówno jednej, jak i drugiej strony przeprowadzanej kontroli. Ważne tym bardziej, że osoba łamiąca prawo zostanie na pewno surowo ukarana, zaś skutki pomyłek i błędów przedstawicieli wymiaru sprawiedliwości zawsze dotykają obywatela. Nawet jeżeli nieprawidłowe działanie władzy zostanie udowodnione, poszkodowany rzadko usłyszy choćby „przepraszam", nie mówiąc o zadośćuczynieniu. Najrozsądniej więc byłoby unikać sytuacji prowokujących do nadinterpretacji prawa i świadomie korzystać z oprogramowania w ramach praw przysługujących użytkownikowi od momentu nabycia licencji.

Zanim przystąpimy do opisu zagadnienia, warto przytoczyć podstawowe definicje, a następnie przytoczyć przepisy regulujące tę dziedzinę aktywności człowieka.

Prawem autorskim nazywamy zespół praw i przepisów regulujących relacje pomiędzy twórcą dzieła a jego późniejszymi użytkownikami, które pozwalają autorowi dzieła decydować o warunkach, na jakich jego dzieło będzie używane i pozwala mu czerpać z niego korzyści. Podstawą prawną jest ustawa O prawie autorskim i prawach pokrewnych.[1] Ustawa ta rozróżnia dodatkowo prawo autorskie osobiste i prawo autorskie majątkowe.

1. Ustawa z dnia 4 lutego 1994 roku O prawie autorskim i prawach pokrewnych, Dz. U. z 2006 r. nr 90, poz. 631, ze zm.

Prawo autorskie **osobiste** związane jest z **uprawnieniami autora dzieła do firmowania dzieła własnym nazwiskiem**. Ustawodawca uznał to za **uprawnienie niezbywalne**. Zgodnie z tym z utworu może korzystać lub nim rozporządzać wyłącznie osoba uprawniona, zazwyczaj autora dzieła.

Prawo autorskie **majątkowe** reguluje **kwestię ekonomiczną** towarzyszącą korzystaniu z dzieła. Kluczowym stwierdzeniem jest to, że **prawa majątkowe można nabyć**. Dokumentem, który to sankcjonuje, jest licencja. W niej też zawarte są warunki korzystania i prawa przysługujące nabywcy. W majątkowym prawie autorskim określa się również czas trwania tego prawa. Licencja dla użytkownika końcowego w nomenklaturze określana jest skrótem **EULA** (End User Licence Agrement). Odrębne zasady wykorzystania dzieła dotyczą pośredników i dystrybutorów dzieła.

Piractwo to zbiorcza nazwa różnego rodzaju niedozwolonych czynów związanych z komputerem, ale nie tylko. Sprawstwem będzie tutaj zarówno kopiowanie programów, jak też muzyki, książek lub filmów. Powszechne obecnie są audiobooki, często umieszczane na dyskach twardych, CD i pendrive'ach, ale niewiele z nich zostało nabytych legalnie. Piractwem jest też używanie plików zdobytych na przykład poprzez sieci P2P (*peer-to-peer*).

Regulacja odpowiedzialności za tego typu działania jest bardzo skomplikowana. Nie dość, że podlega aż dwóm reżimom prawnym, to są to skrajne systemy prawa: cywilnego i karnego. Podstawowa jest wspomniana powyżej regulacja wynikająca z Art. 116 ustawy O prawie autorskim i prawach pokrewnych:

1. *Kto bez uprawnienia albo wbrew jego warunkom rozpowszechnia cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 2.*
2. *Jeżeli sprawca dopuszcza się czynu określonego w ust. 1 w celu osiągnięcia korzyści majątkowej, podlega karze pozbawienia wolności do lat 3.*
3. *Jeżeli sprawca uczynił sobie z popełniania przestępstwa określonego w ust. 1. stałe źródło dochodu albo działalność przestępną, określoną w ust. 1, organizuje lub nią kieruje, podlega karze pozbawienia wolności od 6 miesięcy do lat 5.*

W klimacie piractwa pojawił się szereg pojęć określających osoby uprawiające piractwo.

- **Haker** – osoba, która wyszukuje i ewentualnie wykorzystuje luki bezpieczeństwa w oprogramowaniu komputerowym. Dzięki nim może uzyskiwać dostęp do zabezpieczonych zasobów.
- **Cracker** – osoba łamiąca zabezpieczenia zasobów sieciowych, włamywacz sieciowy.
- **Black hat** (czarny kapelusz) –haker działający na granicy lub poza granicami prawa. Nie publikuje w ogóle znalezionych błędów, wykorzystując je w nielegalny sposób albo publikuje je od razu w postaci gotowych programów (tzw. exploitów), które mogą zostać użyte przez osoby o niższych umiejętnościach (choćby *scriptkiddies*). Niektóre osoby kwestionują w tym przypadku użycie słowa „haker", zastępując je wyrazem „cracker". Za takie działania grozi kara więzienia.
- **White hat** (biały kapelusz) – haker działający zupełnie legalnie lub też starający się nie popełniać szkód. Odkryte przez siebie luki w zabezpieczeniach podaje zwykle w formie, w jakiej łatwo mogą zostać załatane poprawkami przez autorów oprogramowania, lecz trudnej do wykorzystania w celu wyrządzenia komuś szkody. W tej grupie spotyka się audytorów bezpieczeństwa. Za takie działania nie grozi kara więzienia.
- **Grey hat** (szary kapelusz) – haker/cracker stosujący po części metody działania obu wyżej wymienionych grup. Nie grozi mu więzienie.

Prawo autorskie chroni zarówno dzieła materialne (obraz, rzeźbę), jak i wartości intelektualne, do których zaliczają się programy komputerowe.

W dziedzinie oprogramowania wyróżniamy szereg typów licencji, mniej lub bardziej restrykcyjnych dla nabywcy programu i – tym samym – w różnym stopniu ograniczających swobodne korzystanie z programu.

Najprostszym dla użytkownika typem licencji jest **freeware**. Jak sama nazwa wskazuje, nie jest ona obciążona żadnymi kosztami ani zobowiązaniami, pozwala na swobodne dysponowanie programem, twórca lub właściciel zrzeka się wynagrodzenia. Jedyne ograniczenie wynika z najgorszego przejawu piractwa – niedopuszczalne jest przywłaszczenie, czyli rozpowszechnianie tej aplikacji jako własnej i czerpanie z niej zysków.

Kolejnym typem jest licencja **public domain**, która w dobie Internetu, wydawałoby się, powinna odejść w niepamięć, ma się jednak dobrze – za sprawą wojny pomiędzy czasopismami. A więc po kolei: licencja public domain oznacza, iż wprawdzie program dystrybuowany jest bezpłatnie, niemniej użytkownik ponosi koszt nośnika, na którym jest on umieszczony oraz dostawy. Dawniej był to koszt dyskietki lub płyty CD i przesyłki pocztowej. Obecnie aplikacje licencjonowane w ten sposób można spotkać jako płatny pendrive z oprogramowaniem lub jako dodatek do periodyku – sama gazeta na przykład kosztuje 4,50 zł, w przypadku zakupu z dołączoną płytą zawierającą w całości oprogramowanie freeware natomiast czasopismo kosztuje już 19,99 zł.

W hierarchii kosztów mamy następnie do czynienia z licencją **shareware**. Program licencjonowany w ten sposób nie jest w prawdzie darmowy, jednakże opłata jest na tyle niska, że jej poniesienie nie stanowi żadnego wysiłku finansowego dla użytkownika. Często twórca zrzeka się jej na rzecz organizacji charytatywnej lub prosi o wsparcie nią szczytnego celu. W praktyce można spotkać się z ignorowaniem tego skromnego obowiązku, lecz tu należałoby zaapelować do uczciwości i sumienia nabywcy.

Kolejny typ to licencja typu **demo/trial**, czyli wersja demonstracyjna lub testowa programu. Często licencje te są łączone i granice między nimi się zacierają. Przyjęło się, że wersja demonstracyjna to program o ograniczonej funkcjonalności, z częścią opcji niedostępnych, natomiast trial to wersja próbna – z pełną funkcjonalnością przez określony czas testowania. O ile wersję demonstracyjną można traktować jako reklamówkę, rozwiązanie nastawione na wywołanie popytu, to okres próbny, ograniczony czasowo, służy raczej ocenie, czy przedstawiona aplikacja zaspokaja potrzeby użytkownika i czy warto za nią wnieść pełną opłatę licencyjną. W przypadku decyzji negatywnej wersję próbną należy usunąć z komputera – często sam dystrybutor oprogramowania zadba o to, by po okresie próbnym program przestał działać. Także potentaci w dziedzinie software nie stronią od tego rozwiązania, przykładem może być 60-dniowa wersja Office firmy Microsoft®.

Zdecydowanie najdroższym rozwiązaniem jest pełna **licencja komercyjna**, należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że pierwotnym celem przeznaczenia oprogramowania jest bogaty rynek biznesowy, a nie tzw. *thin client* – użytkownik domowy, prywatny. Twórca oprogramowania oczekuje, że tak jak jego aplikacja pozwala na zwiększenie zysków podmiotu gospodarczego, poprawi jego kondycję finansową, tak i on chce mieć możliwość udziału w tym sukcesie, zyskać zwrot poniesionych nakładów i zarobić.

Licencja komercyjna to nie tylko same koszty wytworzenia oprogramowania. Wraz z nim w cenie ujęta jest dystrybucja, ograniczona odpowiedzialność producenta za wady ukryte, często podręcznik i dostęp do kursów on-line w celu łatwiejszego przyswojenia sobie nowości oraz wsparcie techniczne – helpdesk, dostępny różnymi kanałami, który realizują żywe osoby.

Należy nadmienić, że w ramach licencji komercyjnej można wyróżnić dwa podtypy: licencję **BOX** i **OEM**. Pierwsza z nich, „pudełkowa", pozwala na swobodny dobór sprzętu na którym zostanie zainstalowania aplikacja, nie jest z nim związana, często wersja dystrybuowana zawiera nośnik z wersją instalacyjną. Oprogramowanie to można swobodnie przenosić między maszynami, należy jednak pamiętać o odinstalowaniu go z komputera źródłowego, by nie zmieniła się liczba kopii, do których użytkownik ma prawo. Wersja OEM nie może być sprzedawana samodzielnie, gdyż warunki licencji nakazują pakietową sprzedaż aplikacji wraz z przypisanym sprzętem (częścią komputera – w przypadku systemu operacyjnego, lub z zestawem – w przypadku pakietu biurowego). Kupowanie oprogramowania w wersji OEM wiąże się jednak z o wiele niższymi kosztami, co jest (poza ceną części) wynikiem porozumienia producenta części i twórcy programu w sprawie wspólnej dystrybucji.

Z uwagi na fakt, że niektórzy producenci zmonopolizowali rynek podstawowego oprogramowania, niszcząc lub marginalizując konkurencję, zaś organy państwowe zbyt opieszale reagują na zaistniałą sytuację i, gubiąc się w biurokratycznych procedurach odwoławczych, nie były w stanie ochronić rynku przed tym przejawem nieuczciwej konkurencji, powstał nowy, alternatywny sposób licencjonowania, wywodzący się z ruchów społecznych i wolontariatu. Jego dostrzeżenie i wsparcie przez instytucje państwowe daje nadzieję na przywrócenie zdrowych mechanizmów rynkowych.

Ostatnim omawianym typem będzie więc licencja **open source** albo inaczej **GNU GPL** (*General Public License*). Programy budowane w oparciu o taką licencję rozprowadzane są całkowicie za darmo do niekomercyjnego użytku, w dodatku z nieskompilowanym i nieszyfrowanym kodem źródłowym. Ma to na celu umożliwienie rozwoju aplikacji, gdyż każdy ma prawo ją zmodyfikować, usprawnić, wyeliminować błędy, dodać nową funkcjonalność. Pod warunkiem jednak, że po dokonaniu zmian nową wersję wraz z otwartym kodem źródłowym upowszechni również za darmo. Z zakresu systemów operacyjnych taki rodzaj licencjonowania ma większość dystrybucji Linuxa, w dziedzinie pakietów biurowych istnieje OpenOffice.org oraz Libra Office, do zastosowań graficznych funkcjonuje GIMP (do grafiki rastrowej) i Inkscape (do grafiki wektorowej), w zastosowaniach edukacyjnych wyróżnia się platforma e-learningowa Moodle.

Na koniec należy zaznaczyć, że prawo autorskie obowiązuje także w Internecie, zeskanowanie książki i umieszczenie w sieci jako pliku *.pdf jest zaś kategorią przestępstwa w tej dziedzinie. Ciekawym pomysłem jest możliwość zakupu książek w postaci e-booka w księgarniach internetowych. Bardzo często taka wersja elektroniczna książki posiada na każdej stronie publikacji „pieczęć" świadczącą o tym, iż jest to kopia dla określonego nabywcy, czyli kopia personalizowana.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Czy czujesz się autorem treści chronionych? Jak stosować ochronę własności intelektualnej, nie doprowadzając jednocześnie tej ochrony do absurdu?
b) Ściąganie treści z Internetu to sposób na zorganizowanie czasu wolnego czy nielegalna praktyka – wyjaśnij i uzasadnij swoje stanowisko.

Bibliografia:

Adamski A., *Prawo Karne Komputerowe*, Warszawa 2000.

Adamski A., *Prawne aspekty nadużyć popełnianych z wykorzystaniem nowoczesnych technologii przetwarzania informacji*, Toruń 2000.

Burgess G.A., *Przewodnik po internecie dla prawników*, Warszawa 2005.

Dobrzański J., Masłowski K., *Scene of the Cybercrime. Computer Forensics Handbook*, 2004.

Waglowski P., *Prawo w sieci. Zarys regulacji Internetu*, Warszawa 2005.

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. II

Matematyka

KLASA I

Podręcznik dla nauczycieli
– dla Liceum Ogólnokształcącego i Technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań zatytułowanym „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Ja w świecie liczb

Z liczbami spotykasz się na każdym kroku, każdego dnia, dlatego musisz sprawnie wykonywać różnego rodzaju działania na liczbach rzeczywistych. Przypomnij sobie, czego nauczyłeś się w gimnazjum, i postaraj się jak najlepiej opanować nowe wiadomości i umiejętności, które w życiu na pewno ci się przydadzą.

To już potrafię:

1. Odczytać i zapisać liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
2. Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych;
3. Zamienić ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienić ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
4. Zaokrąglić rozwinięcia dziesiętne liczb;
5. Obliczyć wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne;
6. Szacować wartości wyrażeń arytmetycznych;
7. Stosować obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.);
8. Interpretować liczby wymierne na osi liczbowej;
9. Obliczyć odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
10. Wskazać na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3, x < 5;$.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 W 2005 roku Szanghaj liczył około 14 600 00 mieszkańców. W postaci wykładniczej liczbę tę zapisuje się jako:

a) $146 \cdot 10^5$

b) $14{,}6 \cdot 10^6$

c) $0{,}146 \cdot 10^8$

d) $1{,}46 \cdot 10^7$

Zad.2 Liczbę $\sqrt{72}+\sqrt{32}-\sqrt{98}$ można zapisać w postaci:

a) $2\sqrt{6}+4\sqrt{2}-7\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$
d) $17\sqrt{2}$

Zad.3 Dane są liczby zapisane w systemie rzymskim, największa z nich to:

a) MCMLX
b) MCMXCIX
c) MMVII
d) MCMLXXIV

Zad.4 Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{7}{\sqrt{5}}$, należy mianownik tego ułamka pomnożyć przez:

a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{5}-1$
d) $\sqrt{5}+1$

Zad.5. Drut o długości 45 m przecięto na trzy części, których stosunek długości jest równy 1: 3: 5. Najdłuższa z tych części ma długość:

a) $15\ m$
b) $5\ m$
c) $25\ m$
d) $9\ m$

Zad.6 Przybliżona wartość $\sqrt{13}$ wynosi:

a) 3,62
b) 3,60
c) 3,61
d) 3,63

Zad.7 Ile jest liczb ujemnych wśród liczb przeciwnych do: $-\frac{1}{4}, 2, \frac{3}{5}, 5\frac{1}{2}, -0{,}75$?

a) 5
b) 3
c) 2
d) 4

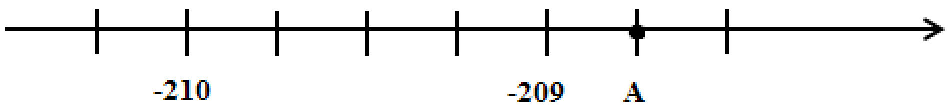
Zad.8 O godzinie 4^{00} termometr wskazywał $-12°C$, a o godzinie 10^{00} ten sam termometr wskazywał $+2°C$. Różnica temperatur w tym dniu wynosiła:

a) -10
b) 14
c) -14
d) 10

Zad.9 Jeśli jest godzina 13^{14}, to do godziny 15^{32} pozostało sekund:

a) $10\ 000$
b) 8280
c) 7500
d) 2180

Zad.10. Punkt A na osi liczbowej ma współrzędne:



a) $-208{,}75$

b) $-209{,}25$

c) $208{,}75$

d) $209{,}75$

ZADANIA OTWARTE

1. Masa Ziemi wynosi $6\cdot 10^{24}kg$, masa Księżyca $7\cdot 10^{22}kg$. Ile wynosi stosunek masy Ziemi do masy Księżyca? Wynik podaj w przybliżeniu.

2. Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}$?

3. Zapisz wyrażenie $\left[\frac{(a^7:a^5)^3\cdot a^4}{a^{13}:a^2}\right]^3$ w postaci potęgi liczby a

4. Z dwóch przystani na rzece odległych od siebie o 100 km wyruszają dwie łódki. Jedna płynie z A do B z prędkością 12 km/h, druga z B do A z prędkością 13 km/h. Po jakim czasie łódki się miną?

5. Jednego dnia cenę pewnego towaru zwiększono o 15%, zaś następnego dnia zmniejszono o 20%. Oblicz początkową cenę tego towaru, jeśli ostatecznie po tych zmianach wynosiła ona 345 zł.

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	4	C	C	B	C	B	A

Zadania otwarte

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – Masa ziemi – $6\cdot 10^{24}kg$ y – Masa księżyca – $7\cdot 10^{22}kg$ $\frac{x}{y}=\frac{6\cdot 10^{24}kg}{7\cdot 10^{22}kg}=\frac{6}{7}\cdot 10^2=\frac{600}{7}\approx 85{,}714$
2	$\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}=\frac{4-(7-4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{1}{\frac{20}{9}}=\frac{9}{20}$ $1{,}8-100\%$ $\frac{9}{20}-x$ $45=1{,}8x\ \Rightarrow x=25\%$

3	$\left[\frac{(a^7:a^5)^3\cdot a^4}{a^{13}:a^2}\right]^3=\left[\frac{(a^2)^3\cdot a^4}{a^{10}}\right]^3=\left[\frac{a^{10}}{a^{10}}\right]^3=a^0$
4	x – czas do spotkania $12x$ – droga I łódki $13x$ – droga II łódki $14x+13x=100\ \Rightarrow x=4$ Odp. Łódki miną się po 4 godzinach.
5	x – cena początkowa $x+0{,}15x-0{,}20\cdot 1{,}15x=345\ \Rightarrow x=375\ zł$ Odp. Początkowa cena wynosiła 375 zł.

1.1 Zbiory liczbowe

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości i inne wytwory dzieł ludzkich, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próbę liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano dobra, dni, czy np. ludzi w konkurencyjnej grupie. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce[1].

Zbiór liczb naturalnych (N) – nazywamy zbiór liczb 0,1,2,3,4,5,6,7,8...

Zapis matematyczny zbioru:

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$

Zbiór ten jest zbiorem nieskończonym. Najmniejsza liczba naturalna w tym zbiorze to 0. Największa liczba naturalna nie istnieje. Podzbiorem liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych dodatnich:

$\mathbb{N}_+=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots\}=\mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0}\}$

Zbiór liczb całkowitych (Z) – stanowią wszystkie liczby naturalne **N** i liczby do nich przeciwne ...–5,–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,5...

Zapis matematyczny zbioru:

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-\mathbf{3},-\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots\}$

Zbiór liczb całkowitych jest zbiorem nieskończonym. Nie istnieje najmniejsza i największa liczba całkowita. Zbiór ten możemy podzielić na dwa podzbiory: liczb całkowitych dodatnich oznaczanych jako $\mathbf{C}_+=\{1,2,3,\ldots\}$ oraz liczb całkowitych ujemnych oznaczanych jako $\mathbf{C}_-=\{\ldots,-3,-2,-1\}$.

Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb, 10.02.2013

Zbiór liczb wymiernych (W) to zbiór wszystkich liczb, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i q jest różne od 0. Jest to zbiór nieskończony. Postać p/q liczby wymiernej nazywamy postacią ułamkową tej liczby.

Podzbiorem liczb wymiernych jest zbiór liczb naturalnych i całkowitych. Oznacza to, że każda liczba całkowita i naturalna jest jednocześnie liczbą wymierną.

Przykłady liczb wymiernych[2]:

$$
\begin{gathered}
-0.04=\frac{-4}{100}=\frac{-1}{25}\\
\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}\\
-\sqrt[3]{27}=-3=\frac{-3}{1}\\
0.166(6)=\frac{1}{6}\\
5=\frac{5}{1}
\end{gathered}
$$

Rysunek 1-1 – Liczby wymierne

Jak widać, każdą z nich da się zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Zbiór liczb niewymiernych (NW) – nazywamy zbiór liczb, które nie dadzą się przedstawić w postaci ułamka p/q, gdzie p i q należą do zbioru liczb całkowitych i dodatkowo q jest różne od 0.

Przykłady liczb niewymiernych[3]:

$$
\begin{gathered}
\pi\\
\sqrt[2]{2}\\
-\sqrt[3]{5}\\
\sqrt[5]{7}\\
\sqrt[2]{\pi}\\
\frac{1}{\pi}
\end{gathered}
$$

Rysunek 1-2 – Liczby niewymierne

Zbiór liczb rzeczywistych (R) – jest sumą zbiorów liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych. Jest uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych.

Przykłady liczb rzeczywistych[4]:

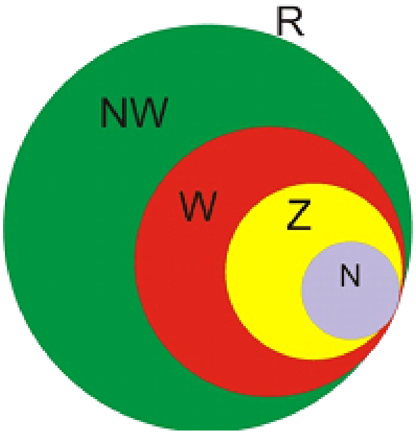
$$
\begin{gathered}
0\\
\pi\\
-0.123\\
\sqrt{5}\\
\sqrt[5]{7}\\
-3\\
\frac{3}{4}\\
1230
\end{gathered}
$$

Rysunek 1-3 – Liczby rzeczywiste

2 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png, 10.02.2013
3 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png, 10.02.2013
4 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png, 10.02.2013

Zbiór liczb rzeczywistych dzieli się na dwa podzbiory: zbiór liczb rzeczywistych **dodatnich** $\mathbb{R}_+$ i **ujemnych** $\mathbb{R}_-$.

Zależności między zbiorami liczbowymi:



Symbol $\subset$ czytamy „zawiera się".

- $N \subset Z$
- $N \subset W$
- $Z \subset W$
- $W \subset R$
- $NW \subset R$

Rysunek 1-4 – Zależności między zbiorami liczbowymi

ZADANIA

1.1.1 Z podanych liczb wypisz liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne. Które z nich mają rozwinięcie nieskończone okresowe?

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{2}{13}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 44, 0, (123), $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{27}$, –3, 16, $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt[3]{5}$, –5

Odpowiedź:

0, (6); 0,125; –0,(153846); 1,118…; 1,5707…; 44; 0,123123…; 1,732…; –3; –3,16; 1,4142…; 0; 1,709…; –5

N={0; 44}, Z={–5;–3; 0; 44 }, W={–5; –3,16; –3; $-\frac{2}{13}$, 0; 0,(123); ;$\frac{2}{3}$, 44}, NW={$\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$}

1.1.2 Wypisz wszystkie elementy zbioru A wiedząc, że A jest zbiorem:

a) wszystkich całkowitych, jednocyfrowych liczb nieparzystych,

b) wszystkich liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 20, podzielnych przez 3,

c) wszystkich dwucyfrowych liczb pierwszych mniejszych od 30,

d) wszystkich dodatnich dzielników liczby 12.

Odpowiedź: a) 1, 3, 5, 7, 9; b) 3, 6, 9, 12, 15,18; c) 11, 13, 17, 19, 23, 29; d) 1, 2, 3, 6, 12

1.1.3 Wypisz wszystkie elementy zbioru A, jeśli:

a) $A = \{x: x|20 \wedge x > 0\}$

b) $A = \{x: x \in N \wedge x < 20 \wedge NWD(x,18) = 1\}$

c) $A = \{x: x \in N \wedge x < 25 \wedge NWD(x,24) = 2\}$

d) $A = \{x: x \in N \wedge NWW(x,12) = 48\}$

Odpowiedź: a) A = {1,2,4,5,10, 20}; b) A = {1,5,7,11, 13, 17, 19}; c) A = {2,10, 14 }; d) A = {48}

Ciekawostka

Zbiór liczb rzeczywistych najprościej określamy mówiąc, że są to „wszystkie liczby". Jest to pewne uproszczenie, ponieważ istnieją liczby, które nie należą do zbioru liczb rzeczywistych – są nimi liczby zespolone.

Zbiór liczb zespolonych został wprowadzony ze względu na to, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie można było wykonywać pierwiastkowania liczb ujemnych. Liczby zespolone mają postać: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{i}$, gdzie $\boldsymbol{i} = \left(\sqrt{-1}\right)$ nazywa się jednostką urojoną. Liczba a jest nazywana częścią rzeczywistą, liczba b częścią urojoną.

1.2 Różne postacie liczb rzeczywistych

Teraz nauczę się:

Przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków i potęg).

Po usystematyzowaniu wiedzy na temat zbiorów liczbowych, zastanówmy się, w jaki sposób możemy przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego czy ułamka dziesiętnego okresowego).

Aby otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby zapisanej w postaci ułamka zwykłego, należy podzielić jego licznik przez mianownik, np. $\frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{25} = 0{,}04; \frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots$

A w jaki sposób przejdziemy z rozwinięcia dziesiętnego na postać ułamka zwykłego?

Przykład 1

Zapisz liczbę $0{,}333\,\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$0{,}333\,\ldots = x \;/\cdot 10$

$3{,}333\,\ldots = 10x$

$3 + 0{,}333\,\ldots = 10x$

$3 + x = 10x$

$3 = 9x /: 9$

$x = \frac{3}{9}$ ostatecznie otrzymujemy:

$x = \frac{1}{3}$

Przykład 2

Zapisz liczbę $0,(125)$ w postaci ułamka zwykłego

$0,(125) = 0{,}125125\,\ldots$

$0{,}125125\,\ldots = x \;/\cdot 1000$

$125{,}125125\,\ldots = 1000x$

$125 + 0{,}125125\,\ldots = 1000x$

$125 + x = 1000x$

$125 = 999x /: 999$

szukanym ułamkiem jest:

$x = \frac{125}{999}$

Przykład 3

Zapisz liczbę $3{,}7235235235\,\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$3{,}7235235235\,\ldots = x \;/\cdot 10$

$37{,}235235235\,\ldots = 10x \;/\cdot 1000$

$37235{,}235235\,\ldots = 10000x$

Jeżeli: $37235{,}235235\,\ldots - 37{,}235235235\,\ldots = 37198$, czyli

$10000x - 10x = 37198,$

$9990x = 37198 \;/: 9990$

więc $x = \frac{37198}{9990} = \frac{18599}{4995}$

Nie wszystkie liczby rzeczywiste można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego skończonego czy też rozwinięcia nieskończonego okresowego. **W takiej formie można zapisać wszystkie liczby wymierne.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Stosując algorytm podany powyżej wykaż, że $0{,}999\ldots = 1$.

Rozwiązanie:

$0{,}999\ldots = x\ /\cdot\ 10$

$9{,}999\ldots = 10x,\ ponieważ\ 0{,}999\ldots = x$

Jeżeli: $9 + 0{,}999\ldots = 9{,}999\ldots$

$to: 9 + x = 10x$

$9 = 9x\ /:9$

$x = 1$

Skoro, to: $0{,}999\ldots = x$,

to $0{,}999\ldots = 1$ c.n.d

ZADANIA

1.2.1 Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamków. Wskaż wśród nich liczby niewymierne.

$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{33}, \frac{8}{15}, \frac{9}{25}, \frac{1}{4}$

Odpowiedź: 0,1(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,4; 0,(15); 0,5(3); 0,36; 0,25

NW = {1,(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,(15); 0,5(3)}

1.2.2 Przedstaw poniższe liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych:

a) 0,(17) b) 0,(453) c) 0,3(8)

d) 0,25(6) e) 2,6(13) f) −2,34(5)

Odpowiedź: a) $\frac{17}{99}$; b) $\frac{453}{999}$; c) $\frac{35}{90}$; d) $\frac{231}{900}$; e) $\frac{2587}{990}$; f) $\frac{21111}{900}$

1.2.3 Znajdź rozwinięcie dziesiętne różnicy liczb:

a) 1,3(5) – 0,7(4) b) 0,8(7) – 0,3 (6)

c) 0,(67) – 0,(33) d) 0,23(5) – 0,1(1)

Odpowiedź:

a) $\frac{122}{90} - \frac{67}{90} = \frac{55}{90} =$ 0,6(1); b) $\frac{79}{90} - \frac{33}{90} = \frac{46}{90} =$ 0,5 (1); c) $\frac{67}{99} - \frac{1}{3} = \frac{102}{297} =$ 0,(34); d) $\frac{212}{900} - \frac{10}{90} = \frac{112}{900} = 0{,}12(4)$

1.2.4 Zbadaj, czy zachodzi równość:

a) $0{,}0(6) + 0{,}0(3) = \frac{2}{15}$ b) $0{,}(3) - 0{,}(2) = \frac{1}{6}$

c) $0{,}(1) \cdot 0{,}(1) = 0{,}(1)$ d) $3 \cdot 1,(4) = 4,(3)$

Odpowiedź:

a) $\frac{6}{90}+\frac{3}{90}=\frac{9}{90}=0{,}1$ NIE;

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ NIE;

c) $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$ NIE;

d) $3\cdot\frac{13}{90}=\frac{39}{90}=0{,}4(3)$ TAK

1.3 Wartości wyrażeń arytmetycznych

Teraz nauczę się:

Obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Wyrażenie wymierne[5] to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych (liter) o tej własności, że występują w nim wyłącznie takie operacje arytmetyczne, które po podstawieniu za zmienne liczb wymiernych dają w wyniku liczbę wymierną.

Aby obliczyć wartość wyrażenia wymiernego, wykonujemy we właściwej kolejności podane działania, a wynik zapisujemy w najprostszej postaci.

Ustalenie właściwej kolejności wykonywania działań podlega następującym zasadom:

1. Jeśli w wyrażeniu występują nawiasy, w pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach.
2. Jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów lub działania w nawiasach zostały już wykonane, to pozostałe działania wykonujemy w następującej kolejności:

- potęgowanie i pierwiastkowanie,
- mnożenie i dzielenie,
- dodawanie i odejmowanie.

ZADANIA

1.3.1 Wykonaj obliczenia:

a) $$\frac{\left(2\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}\right)\cdot 7\frac{2}{8}}{\left(8-\frac{4}{6}\right):4\frac{1}{7}}=$$

b) $$\left(6\frac{2}{5}-4\frac{3}{16}\right)\cdot 2\frac{2}{3}=$$

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne, 11.02.2013

c) $\dfrac{\left(6\frac{1}{8}-2\frac{3}{5}\right):\left(1\frac{2}{15}-3\frac{4}{6}\right)}{\left(16\frac{2}{5}+14\frac{1}{7}\right)\cdot 2\frac{3}{10}}:\dfrac{141}{76}=$

d) $\dfrac{371}{285}:\dfrac{6\frac{1}{5}-7\frac{1}{6}+2\frac{1}{5}\cdot 3\frac{2}{8}}{5\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}\cdot 3\frac{6}{12}}=$

Odpowiedź: a) $-11\frac{11}{90}$; b) $5\frac{27}{30}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) -1

1.3.2 Oblicz:

a) $\dfrac{2{,}4:1{,}32-0{,}12:1{,}5}{2{,}3\cdot 0{,}25+1{,}18:3{,}2}=$

b) $\dfrac{3\cdot(0{,}15-1{,}57)+(23{,}58-3{,}24):2{,}3}{2{,}6\cdot(0{,}12+4{,}35):2{,}33}=$

c) $\dfrac{(6{,}25:0{,}023-1{,}22):0{,}05}{13{,}24-1{,}45\cdot 2{,}8:1{,}13}=$

d) $\dfrac{(1{,}55:0{,}23)\cdot 2{,}15+(8{,}43-2{,}11)}{5{,}3:(1{,}24+2{,}98)\cdot 0{,}008}=$

Odpowiedź: a) 1,84; b) 0,9; c) 508; d) 0,13

1.3.3 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{0{,}125\cdot 3\frac{1}{5}-(0{,}24:0{,}12)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{10:3\frac{1}{3}-6\cdot\frac{2}{3}+1\frac{7}{20}:5{,}4}=$

b) $3{,}4:\left(\dfrac{2{,}4-3\frac{3}{4}+1{,}2:\frac{1}{8}}{6:2{,}25-1{,}45\cdot 1\frac{2}{3}}\right)\cdot\dfrac{372}{34}=$

c) $\left\{4\frac{1}{9}-2{,}5:\left(1\frac{2}{15}+3\frac{4}{3}\right):13{,}3\right\}:\dfrac{400147}{98154}=$

d) $-\dfrac{14985}{1969}+\dfrac{4{,}55\cdot\frac{5}{11}+(-2{,}5)\cdot 0{,}9}{[0{,}7\cdot(-0{,}34)-0{,}120]:3\frac{3}{2}}:\dfrac{1\frac{2}{3}}{5\frac{11}{20}}=$

e) $\dfrac{\left[\left[3{,}32:2\frac{1}{6}-\frac{7}{8}\cdot 0{,}6\right]\cdot 1{,}2+\frac{3}{6}\right]:\frac{975}{1012}}{\left(1{,}2+1\frac{1}{3}\cdot 0{,}21:1{,}3\right)\cdot\frac{11}{15}}:\left(-\dfrac{11107}{13000}\right)=$

Odpowiedź: a) $-2\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 0; e) -2

1.4 Potęgi

Teraz nauczę się:

- Obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych i stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- Wykorzystywać podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką).

Definicja[6]

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę mnożąc przez siebie n-razy liczbę a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ czynnikow}}$$

Prawa działań na potęgach

Niech n, m będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

1) **Iloczyn potęg o tych samych podstawach:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) **Iloraz potęg o tych samych podstawach:** $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) **Potęga iloczynu:** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4) **Potęga ilorazu:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5) **Potęga potęgi:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6) **Potęga ilorazu o wykładniku ujemnym:** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz:

a) 2^3	b) $(-4)^2$	c) $(-\frac{2}{5})^4$	d) $(-\frac{1}{3})^3$
e) $(-1\frac{1}{4})^2$	f) $(2\frac{2}{3})^0$	g) $(0{,}4)^3$	h) $(0{,}02)^4$
i) $(-0{,}5)^2$	j) $(\sqrt{3})^2$	k) $(\sqrt[3]{2})^3$	l) $(-2\sqrt{3})^4$

Odpowiedź:

a) 8;	b) 16;	c) $\frac{16}{625}$;	d) $-\frac{1}{27}$;
e) $\frac{25}{16}$;	f) 1;	g) 0,064;	h) 0,00000016;
i) 0,25;	j) 3; k) 2;	l) 144	

6 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 12.02.2013

1.4.2 Zastosuj prawa działań na potęgach:

a) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^1 \cdot 3^{-2}$ b) $(0,4)^1 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,4)^{-3}$ c) $(2\frac{3}{4}) \cdot (2\frac{3}{4})^0 \cdot (2\frac{3}{4})^2 \cdot (2\frac{3}{4})^3$

d) $(-4)^4 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^1 \cdot (-4)^{-5}$ e) $3^2 \cdot 22^2 \cdot (-1)^0$ f) $(\frac{1}{5})^5 \cdot (2\frac{3}{4})^5 \cdot 3^5$

g) $(4,2)^3 \cdot (\frac{2}{6})^3 \cdot (1\frac{4}{12})^3$

Odpowiedź:

a) $3^8 = 6561$; b) 0,4; c) $(2\frac{3}{4})^6$; d) $(-4)^{-2} = 16$; e) $66^2 = 4356$; f) $(\frac{33}{20})^5$; g) $(\frac{28}{15})^3$

1.4.3 Oblicz:

a) $\frac{10^3}{12^3}$. b) $\frac{(1,2)^4}{120^4}$ c) $\frac{(2,2)^2}{(0,16)^2}$

d) $(4\frac{5}{6})^3 : (1\frac{1}{5})^3$ e) $(3,4)^2 : (\frac{7}{2})^2$ f) $(\sqrt[3]{12})^3 : (-2)^3 : (-22)^0$

Odpowiedź: a) $(\frac{5}{6})^3$; b) $(0,01)^4$; c) $(13,75)^2$; d) $(\frac{145}{36})^3$; e) $(\frac{34}{35})^2$; f) 1,5

1.4.4 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 : \left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}{0,36 : \left(\frac{2}{12}\right)^4} =$ b) $\frac{5^4 - 5^3}{5^2} : \frac{2^5}{\frac{1}{5}} =$ c) $\frac{7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7^5}{7^{10} \cdot 4 - 7^6} \cdot 7^3 =$ d) $\frac{(3 \cdot 2^8 - 2^4 \cdot 6)}{9 : 3^3 \cdot 3^3} : 2^4 =$

Odpowiedź: a) $\frac{100}{36^4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{4949}{9603}$; d) 378

1.4.5 Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:

a) $\frac{a^5 \cdot a^3 : a^2}{a^0 \cdot (a^{10})^2 : a} =$ b) $\frac{(a^4 \cdot a^7) : a^3 \cdot a^8}{a^6 : a^0 \cdot (a^9)^4} =$

c) $\frac{(a^5)^3 \cdot (a^6)^{11} : (a^4)^7}{(a^9)^5 : (a^3)^2} \cdot a^6 =$ d) $\frac{(-a)^4 : (-a)^{-5}}{((-a)^{-2})^4 \cdot a^3} =$

Odpowiedź: a) a^{-13}; b) a^{41}; c) 2^{20}; d) $(-a)^{14}$

1.4.6 Oblicz:

a) $(0,4)^{-3} \cdot (1\frac{4}{5})^{-2} =$ b) $(1,2)^{-3} \cdot (-4,3)^{-2} =$ c) $\frac{22^{-1} + 66^0}{(0,6)^{-2} - 3^{-1}} =$

d) $\frac{(1,3)^{-3} - 2^{-4}}{(5:2^3):(3,3)^{-2} - (-6)} =$ e) $[(3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1}) + 2^{-2}] + 2^{-2} =$ f) $[(\frac{1}{5})^{-2} + (\frac{1}{5})^{-2} \cdot (\frac{1}{5})^{-2}] : (\frac{1}{5})^{-2} =$

Odpowiedź:

a) 253,125; b) 0,03; c) $\frac{138}{781}$; d) 0,0663; e) 2,5; f) 26

1.4.7 Oblicz:

a) $\frac{27^3 \cdot 9^2 \cdot 2^4 \cdot 81}{2^3 \cdot 3^{14}} =$

b) $\frac{(-0,2)^5 \cdot (-5^2)^{-3}}{125^{-2} : (-5)^5}$

Odpowiedź: a) $\frac{2}{27}$; b) 1

Ciekawostka

Postać wykładnicza (notacja naukowa) to zapis liczby bezpośrednio w formie iloczynu postaci[7]:

$$\pm M \cdot 10^E$$

gdzie: M jest mantysą należącą do przedziału $\langle 1, 10)$, E jest wykładnikiem całkowitym.

PRACA SAMODZIELNA:

1.4.8 Przedstaw w postaci wykładniczej z zaokrągleniem do 2 cyfr po przecinku:

a) 0,000004359

b) 0,000000678

Odpowiedź: a) $4{,}36 \cdot 10^{-6}$; b) $6{,}78 \cdot 10^{-7}$

1.4.9 Wyszukaj w Internecie potrzebne informacje i zapisz podane wielkości w postaci wykładniczej:

a) prędkość światła w próżni

b) masa największej ryby świata

c) masa Ziemi

d) wiek Wszechświata

e) elementarny ładunek elektryczny

f) jednostka astronomiczna 1AU

g) masa atomu wodoru

h) liczba ludności świata według danych z 31.10.2011 r.

i) podaj inne ciekawe propozycje takich liczb

Odpowiedź: a) $3 \cdot 10^8$m/s; b) płetwal błękitny $1{,}2 \cdot 10^5$ kg; c) $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg; d) $14 \cdot 10^9$ lat; e) $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C; f) $1{,}5 \cdot 10^8$ km; g) $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; h) $7 \cdot 10^9$.

Ciekawostka

Zapis potęgowania przy użyciu indeksu górnego wprowadził Kartezjusz w XVII wieku. Naturalne potęgi liczby 2 są podstawą **arytmetyki komputerów**. Na przykład 2^n jest liczbą możliwych wartości zmiennej składającej się z n bitów (każdy bit może mieć wartość 0 lub 1, razem jest ich *n*). Z tego powodu zwykle operuje się też wielokrotnościami liczby 2 (bądź jej pewnej potęgi). Osiem bitów tworzy oktet (lub bajt). Większe wartości również są wielokrotnościami liczby 2, nie zaś 10, jak wskazywałyby ich nazwy, np. kilobajt to 1 024, a nie 1 000 bajtów[8].

7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza, 17.02.2013

8 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 17.02.2013.

Za pomocą potęg wyrażone są również jednostki miar układu SI, np.:

- 10^9 to miliard (przedrostek G), GHz – gigaherc
- 10^{12} to bilion (przedrostek T), Tm – terametr
- 10^{15} to biliard (przedrostek P), Ps – petasekunda
- 10^{18} to trylion (przedrostek E), EB – eksabajt
- 10^{21} to tryliard (przedrostek Z), Zm – zettametr
- 10^{24} to kwadrylion (przedrostek Y), Yg – jottagram

Praca dla chętnych

Wyszukaj informacje na temat innych potęg układu SI. Podaj przykłady ich wykorzystania.

1.5 Pierwiastki

Teraz nauczę się:

- Posługiwać się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosować prawa działań na pierwiastkach.

Początki symbolu pierwiastka są dość niejasne. Niektóre źródła podają, że symbol został wprowadzony przez Arabów[9].

Definicja

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką,

że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość:

$|a| = \sqrt{a^2}$

$\sqrt[2]{a}^2 = a$

$\sqrt[3]{a}^3 = a$

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Prawa działań na pierwiastkach

Dla $a, b \geq 0, n \in N$ zachodzą następujące prawa działań na pierwiastkach:

1) Iloczyn pierwiastków $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

9 www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie, 19.02.1013

2) **Iloraz pierwiastków** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

3) **Potęgowanie pierwiastków** $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

4) **Pierwiastek z pierwiastka** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

Co łączy potęgi i pierwiastki?

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi.

1) **Potęga o wykładniku równym zero dla** $a \neq 0$: $a^0 = 1$

2) **Potęga o wykładniku ujemnym dla** $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3) **Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim dla** $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4) **Potęga o wykładniku wymiernym ujemnym dla** $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

ZADANIA

1.5.1 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}25}$ b) $\sqrt{2{,}56}$ c) $\sqrt{0{,}0144}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt{\frac{100}{169}}$ f) $\sqrt{2025}$ g) $\sqrt{5929}$

Odpowiedź: a) 0,5; b) 1,6; c) 0,12; d) –2; e) $\frac{10}{13}$; f) 45; g) 77

1.5.2 Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{500}$ b) $\sqrt{3{,}84}$ c) $\sqrt{2x^4}$ d) $\sqrt{16x^3y}$

e) $\sqrt{24x^8}$ f) $\sqrt{30xy^6}$ g) $\sqrt[3]{\frac{10000x}{a^3}}$ h) $\sqrt[3]{64a^4}$

Odpowiedź: a) $10\sqrt{5}$; b) $0{,}8\sqrt{6}$; c) $x^2\sqrt{2}$; d) $4x\sqrt{xy}$; e) $2x^4\sqrt{6}$; f) $y^3\sqrt{30x}$; g) $\frac{10}{a}\sqrt[3]{10x}$; h) $4a\sqrt[3]{a}$

1.5.3 Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $3\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{13}$ c) $0{,}1\sqrt{37}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{23}$

e) $0{,}2\sqrt{21}$ f) $4\sqrt[3]{33}$ g) $3\sqrt[4]{6}$ h) $4\sqrt[5]{15}$

Odpowiedź: a) $\sqrt{63}$; b) $\sqrt{468}$; c) $\sqrt{0{,}37}$; d) $\sqrt[3]{\frac{184}{27}}$; e) $\sqrt{\frac{21}{100}}$; f) $\sqrt[3]{2112}$; g) $\sqrt[4]{486}$; h) $\sqrt[5]{15360}$

1.5.4 Oblicz, stosując prawa działań na pierwiastkach:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ d) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

Odpowiedź: a) 4; b) 5; c) 4; d) 5

1.5.5 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}81}$ b) $\sqrt{(12{,}34)^2}$ c) $\left(\sqrt{28{,}16}\right)^2$ d) $\sqrt{3^2+4^2}$

e) $\sqrt{3^2\cdot 4^2}$ f) $\sqrt{4^2-3^2}$ g) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$

Odpowiedź: a) 0,9; b) 12,34; c) 28,16; d) 5; e) 12; f) $\sqrt{7}$; g) $\frac{13}{9}$

1.5.6 Wykonaj działania:

a) $\frac{3\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{25}}\cdot\sqrt[3]{81}$ b) $(\sqrt[3]{0{,}04}:\sqrt[3]{0{,}01})\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$

c) $(\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}):\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{32}}:\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$

Odpowiedź: a) $-\frac{27\sqrt{3}}{5}$; b) $\sqrt[3]{0{,}004}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

1.5.7 Ustaw następujące liczby w porządku rosnącym:

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{18}$ b) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$

c) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[10]{25}$ d) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$

Odpowiedź: a) $\sqrt[3]{4}<\sqrt[6]{18}<\sqrt{3}$; b) $\sqrt[5]{3}<\sqrt[15]{30}<\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}<\sqrt[5]{4}<\sqrt[10]{25}$;
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}<\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}<\sqrt[16]{64}$

1.5.8 Zapisz liczby w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\sqrt[3]{9:\sqrt[3]{27}}$

Odpowiedź: a) $3^{-\frac{3}{5}}$; b) $2^{\frac{3}{4}}$; c) $3^{\frac{1}{3}}$; d) $2^{\frac{12}{5}}$; e) $3^{\frac{1}{6}}$; f) $2^{\frac{1}{4}}$

Ciekawostka

Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir, gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go wszystkim, czego zapragnie, zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno ziarenko złożone na pierwszym polu. Władca Indii nie był w stanie takiego honorarium uiścić. Owa zapłata to suma szeregu złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co daje: 18 446 774 073 709 551 615 ziaren. Aby osiągnąć taką ilość zboża, należałoby zasiać całą ziemię kilkakrotnie i zebrać żniwo. I tak oto okazało się, że władca nie wszystkim może obdarować wynalazcę[10].

10 www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html, 1.03.2013

1.6 Przybliżenia liczbowe

Teraz nauczę się:

- Obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Na co dzień często korzystamy z przybliżeń liczbowych, np. uczeń obliczając średnią swoich ocen z przedmiotów, stosuje zaokrąglenie do części setnych, podatnik rozliczając się z urzędem skarbowym również przybliża liczbę do dwóch miejsc po przecinku (do groszy).

Podczas zaokrąglania liczb, gdy otrzymujemy wartość przybliżoną, **liczba ulega zmniejszeniu lub zwiększeniu.** Zależy to od tego, czy nie zmieniamy ostatniej pozostawionej cyfry, czy zwiększamy ją o jeden. W związku z tym wyróżniamy przybliżenia:

z nadmiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o jeden.

Przykład 1[11]

Zaokrąglamy liczbę 12,399367 do pierwszego miejsca po przecinku.

$12{,}399367 \approx 12{,}4$

Podczas zaokrąglania do pierwszego miejsca po przecinku, stojącą w tym miejscu cyfrę (3) musieliśmy zwiększyć o jeden, bo następna cyfra jest większa od 5 (9). W efekcie liczba uległa zwiększeniu.

z niedomiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, ostatnia pozostawiona cyfra nie zmienia się.

Przykład 2[12]

$6{,}963902 \approx 6{,}96$

Podczas zaokrąglania do drugiego miejsca po przecinku, stojąca w tym miejscu cyfra (6), nie zmienia się, bo znajdująca się po niej cyfra jest mniejsza od 5 (3). W efekcie liczba uległa zmniejszeniu o „obciętą" wartość.

Błędy przybliżenia powstają podcza obliczeń jako różnica między dokładną wartością a liczbą użytą w obliczeniach, np. $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ błąd przybliżenia to $1{,}7 - \sqrt{3}$. Pojawiają się na skutek błędów wartości pomiarowych, np. odczytując długość odcinka porównujemy go z podziałką na linijce i niedokładnie przykładamy linijkę, błędnie odczytamy wynik pomiaru lub przyrząd pomiarowy jest niedoskonały. Dokładne wyliczenie jakiejś wartości nie jest możliwe ze względów obliczeniowych. Błędów pomiarowych nie da się zupełnie wyeliminować, ale można je ograniczyć do minimum, np. stosując coraz dokładniejsze przyrządy.

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń:

x – dana liczba

Δx – przybliżenie liczby

błąd bezwzględny – obliczamy jako wartość bezwzględną z różnicy przybliżenia i danej liczby. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$B = |\Delta x - x|$$

11 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013
12 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013

błąd względny – obliczamy jako stosunek błędu bezwzględnego do wartości zmierzonej i wyrażamy w procentach, pokazuje on jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką obniżyliśmy lub powiększyliśmy liczbę:

$$W=\frac{|\Delta x - x|}{x}\cdot 100\%$$

Przykład 3

Zaokrąglij liczbę 12,647890 do części setnych i określ błąd względny i bezwzględny przybliżenia.

12,647890 ≈ **12,65**

Błąd bezwzględny: $B = |\Delta x \ - x| \ = |12{,}65 - 12{,}647890| = |-0{,}00211| = \ 0{,}00211$

Błąd względny: $W = \ \frac{|\Delta x - x|}{x}\cdot 100\% \ = \frac{0{,}00211}{12{,}647890}\cdot \ 100\% = 0{,}0001668 \cdot 100\% = 0{,}01\%$

Ciekawostka

Liczba π (czytaj: **liczba pi**), **ludolfina** – jest to liczba niewymierna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy lub polu koła o promieniu równym 1.

Liczba π z dokładnością do 200 miejsc po przecinku:

π =3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062
862089986280348253421170679821480865132823066470938446095 50582231725359408128
48111745028410270193 852110555964462294895493038196...

Światowy potwierdzony rekord w zapamiętywaniu ciągu cyfr liczby π należy aktualnie do Japończyka Akiry Haraguchi, który podał ją z dokładnością do 100 tysięcy miejsc po przecinku bijąc własny rekord z roku 1995[13].

ZADANIA

1.6.1 Podaj przybliżenie liczby π z dokładnością do:

a) części setnych b) części tysięcznych

c) dziesięciu miejsc po przecinku d) jedności

Jak nazywamy to przybliżenie?

Odpowiedź:

a) 3,14 z niedomiarem; b) 3,142 z nadmiarem; c) 3,14159 26536 z nadmiarem; d) z niedomiarem

13 www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi, 04.03.2013

1.6.2 Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd względny i bezwzględny swojego przybliżenia:

a) $45{,}673 : 4$ b) $2{,}384 + 21{,}287$ c) $6 \cdot 3{,}563 - 2{,}12$

d) $44{,}11 - 3 \cdot 6{,}72$ e) $128{,}69 \cdot 2 + 301{,}25$ f) $268{,}9 : 26{,}6 + 243{,}2 : 5{,}1$

1.6.3 Oblicz błąd względny i bezwzględny (z dokładnością do 0,01%), który popełniono przybliżając liczbę a liczbą b.

a) a = 19,458; b = 19,46 b) a = 20,458; b = 20,5

c) a = 17,458; b = 17 d) a = 19,458; b = 20

e) a = 98,5 cm, b = 1m f) a = 4700 cm3, b = 5l

g) a = 372 min, b = 6h h) a=7806s, b=2h 10 min

Odpowiedź:

a) B = 0,002; W = 0,01%, b) B = 0,042; W = 0,21%, c) B = 0,458; W = 2,62%,

d) B = 0,542; W = 2,79%, e) B = 1m – 98,5 cm = 1,5 cm; W = 1,5:98,5×100 = 1,52%,

f) 5 litrów = 5 dm^3 – 4700 cm^3, 1dm^3 = 1000 cm^3, 5dm^3 = 5000 cm^3,

B = 5000 cm^3 – 4700 cm^3 = 300 cm^3; W = 300:4700 × 100 = 6,38%,

g) 6h = 360 minut, B = 372 – 360 = 12; W = 12:372 × 100 = 3,23%,

h) 2h 10 minut = 7200 s + 600 = 7800 s,

B = 7806 – 7800 = 6; W = 6:7806 × 100 = 0,08%

Ciekawostka

Różne komputerowe operacje arytmetyczne wykonywane na liczbach mogą powodować nieoczekiwane wyniki, gdy wynik obliczeń przekracza dopuszczalny zakres danych. Możemy tutaj wyróżnić dwie sytuacje:

Nadmiar – „przekręcenie licznika" w grach komputerowych, gdy ktoś zdobędzie zbyt dużo punktów

Niedomiar – liczba jest tak mała, że nie może zostać dokładnie zaokrąglona do zera

ZADANIE DLA CHĘTNYCH:

Napisz program, który obliczy:

a) $10^{40} \cdot 10^{40} =$....

b) $10^{-40} - 10^{-41} =$....

Jaki jest wynik działania programu? Czy jest zgodny z twoimi matematycznymi obliczeniami?

Algorytmy, które charakteryzują się kumulowaniem błędów, nazywamy niestabilnymi.

1.7. Obliczenia procentowe

Teraz nauczę się:

Wykonywać obliczenia procentowe.

Procent

Słowo **procent** pochodzi z łacińskiego od *per centum*, „przez sto" i oznacza sposób wyrażenia liczby jako ułamka o mianowniku 100 i oznaczamy symbolem %[14].

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Przykład 1

$23\% = \frac{23}{100}$

Procenty umożliwiają wyrażenie danej wielkości w stosunku do innej, przy czym pierwsza wielkość oznacza zwykle część lub zmianę w drugiej.

14 www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent, 06.03.2013.

Przykład 2

Obliczyć 4,5% liczby 6.

$4{,}5\% \cdot 6 = \frac{4{,}5}{100} \cdot 6 = 0{,}27$

Przykład 3

Liczbę 50 zwiększyć o 10%.

$50 + 10\% \cdot 50 = 50 + 0{,}1 \cdot 50 = 55$

Przykład 4

Cena zeszytu wynosi 3,50 zł. Oblicz jego cenę po podwyżce o 1,5%.

$3{,}50 + \frac{1{,}5}{100} \cdot 3{,}50 \approx 3{,}55$ zł

Przykład 5

Znajdź liczbę, której $33\frac{2}{3}\%$ jest równe 6.

$33\frac{1}{3}\% \cdot x = 6$

$\frac{\frac{100}{3}}{100} \cdot x = 6$

$x = 18$

Przykład 6

Oblicz, jakim procentem liczby 90 jest liczba 15.

$p\% \cdot 90 = 15$

$p\% = \frac{15}{90} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$

Przykład 7

Cena kurtki wynosi 120 zł.

a) Oblicz jej cenę po dwukrotnej obniżce o 30%.

$120 - 30\% \cdot 120 = 120 - 0{,}3 \cdot 120 = 84$

$84 - 30\% \cdot 84 = 84 - 0{,}3 \cdot 84 = 58{,}80$ zł

b) Oblicz cenę kurtki przy obniżce jednokrotnej o 60%.

$120 - 60\% \cdot 120 = 48$ zł

Punkt procentowy – to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości wyrażonymi w procentach.

Przykład 8

Frekwencja klasy Ib w I semestrze wyniosła 88%, a w drugim 92%. Mówimy, że frekwencja wzrosła o 4 punkty procentowe.

W zadaniach pomijamy podatek Belki, który został wprowadzony 01.12.2001 r.

Przykład 9

Jaś chciał w lipcu 2001 r. wpłacić do banku zaoszczędzone przez siebie pieniądze – 3000 zł, z oprocentowaniem 6% w skali roku, ale nie mógł się zdecydować na rodzaj lokaty.

Miał do wyboru lokatę:

a) roczną b) kwartalną c) półroczną d) miesięczną

Oblicz, ile odsetek po roku zostanie naliczonych Jasiowi w każdym przypadku. Którą lokatę powinien wybrać?

Odpowiedź:

a) 6% z 3000 zł = 180 zł

b) $\frac{3}{12}\cdot$ 6% z 3000 zł = 45 zł

c) $\frac{1}{2}\cdot$ 6% z 3000 zł = 90 zł

d) $\frac{1}{12}\cdot$ 6% z 3000 zł = 15 zł

Przykład 10[15]

Ania wpłaciła na lokatę 2000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 3,5% w skali 2 lat (24 miesięcy, a czas zapadalności[16] dokładnie 3 lata (36 miesięcy). Ile odsetek naliczy jej bank? Jaką kwotę będzie miała po 3 latach na swoim koncie?

Najpierw obliczamy odsetki:

$$\frac{36}{24}\cdot 3{,}5\%\cdot 2000=\frac{36}{24}\cdot\frac{3{,}5}{100}\cdot 2000=105\text{ zł}$$

Kwota końcowa to: $2000\ zł + 105\ zł = 2105\ zł$

Przykład 11

Kasia wpłaciła na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku kwotę 1000 zł. W dniu zapadalności bank naliczył jej 20 zł odsetek. Na ile miesięcy Kasia założyła tę lokatę?
Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{x}{12}\cdot\frac{5}{100}\cdot 1000=20{,}83$$

$x = 5$ miesięcy

ZADANIA

1.7.1 Oblicz:

a) 4% liczby 85 b) $3\frac{1}{2}\%$ liczby $30\frac{1}{4}$ c) 112% liczby 80

d) $1{,}6\%$ liczby 1000 e) $0{,}3\%$ liczby 900 f) 150% liczby 27

Odpowiedź: a) $3{,}4$; b) $\frac{847}{800}$; c) $89\frac{3}{5}$; d) 16; e) $2{,}7$; f) $40\frac{1}{2}$

15 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.
16 Czas zapadalności to czas trwania lokaty.

1.7.2 Cenę wycieczki obniżono o $p\%$. Wycieczka kosztuje obecnie x $zł$. Jaka była cena wycieczki przed obniżką?

Odpowiedź: $\frac{100a}{100-p} zł,\ \ p < 100\ \wedge p > 0$

1.7.3 Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a następnie nową cenę podwyższono o 30%. Czy cena końcowa jest taka sama jak początkowa? Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Końcowa cena stanowi 91% ceny początkowej.

1.7.4 Znajdź:

a) Liczbę, której 7% wynosi 56

b) Liczbę, której $0{,}2\%$ wynosi $2\frac{3}{5}$

c) Liczbę, której 112% wynosi $5{,}6$

d) Liczbę, której $0{,}25\%$ wynosi $0{,}3$

Odpowiedź: a) 800; b) 1300; c) 5; d) 120

1.7.5 Aby zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym, wystarczy otrzymać 30% możliwych do uzyskania punktów. Jaka minimalna liczba punktów gwarantuje zdanie egzaminu, gdy maksymalnie można otrzymać 50 pkt.

Odpowiedź: 15 punktów.

1.7.6 Tomek wpłacił na lokatę oprocentowaną 7% w skali roku kwotę 2135 zł. W dniu zapadalności bank naliczył mu 12,45 zł odsetek. Na ile miesięcy Tomek założył tę lokatę?

Odpowiedź: Na 1 miesiąc.

1.7.7 Wojtek wpłacił na lokatę czteromiesięczną z naliczaniem odsetek na zakończenie kwotę 1500 zł. Po upływie tego okresu bank naliczył mu 40 zł odsetek. Ile wynosiło oprocentowanie tej lokaty w skali roku?

Odpowiedź: 8%.

1.7.8 Przypuśćmy, że zakładasz lokatę na 5 miesięcy, jej oprocentowanie w skali roku wynosi 4,5%, a odsetki naliczane na zakończenie wyniosły 100 zł. Oblicz, jaką kwotę powinieneś wpłacić na tę lokatę.

Odpowiedź: 5333 zł.

1.7.9 Kasia wraz ze swoim mężem Piotrem miesięcznie na opłaty wydają 40% tego, co razem zarobią. Z tego, co pozostanie, 60% przeznaczają na zakup żywności dla siebie oraz swoich dzieci. Ile procent ich łącznych miesięcznych zarobków pochłaniają miesięczne wydatki?

Odpowiedź: 64%.

1.7.10 Pan Czesław w pierwszych 2 tygodniach poprzedniego miesiąca sprzedał 15% sprowadzonego do swojego sklepu towaru. W następnych 2 tygodniach sprzedał jeszcze 40% tego towaru, który pozostał. Jaki procent sprowadzonego towaru pozostał panu Czesławowi na koniec poprzedniego miesiąca?

Odpowiedź: 49%.

1.7.11 W 5 kolejnych sesjach giełdowych cena akcji firmy X na zamknięciu dnia osiągała następujący wynik procentowy: –6%, +15%, –3%, +5%, +2%. Oblicz, czy cena końcowa tej akcji jest wyższa, czy niższa od ceny pierwotnej i o ile procent.

Odpowiedź:

x – cena początkowa, y – cena końcowa

$x \cdot 94\% \cdot 115\% \cdot 97\% \cdot 105\% \cdot 102\% = y$

$x \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}97 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}02 = 1{,}12$

$x \cdot 1{,}12 = y$

Cena końcowa akcji jest wyższa od ceny początkowej o 12%.

1.7.12 Pracodawca zaproponował Kasi pensję w wysokości 3000 zł brutto i obiecał, że jeśli się sprawdzi na powierzonym stanowisku, to po roku jej pensję zwiększy o 3%, a w następnych latach o 1 p.p.[17] względem pensji sprzed roku. Jaką pensję otrzyma Kasia w czwartym roku pracy w tej firmie przy założeniu, że się sprawdzi na powierzonym stanowisku i nie zostanie zwolniona lub sama się nie zwolni?

Odpowiedź: w drugim roku: $3000 \cdot 103\% = 3090$ zł, w trzecim roku: $3090 \cdot 104\% = 3214$ zł, w czwartym roku: $3214 \cdot 105\% = 3374$ zł.

Punkt bazowy to inaczej punkt procentowy. Zamiast mówić, że różnica między np. 5,63% a 5,61% wynosi 0,02 p.p., możesz powiedzieć, że ta różnica wynosi 2 p.b.

1.7.13 Oblicz, ile punktów bazowych (p.b.) wynosi różnica pomiędzy podanymi procentami?

a) 18,45% i 18,32%

b) 34,86% i 34,12%

c) 88,06% i 87,04%

d) 56,2% i 53,05%

Odpowiedź: a) 13 p.b.; b) 74 p.b.; c) 102 p.b.; d) 315 p.b.

17 Skrót p.p. oznacza „punkty procentowe".

Ciekawostka

Punktów bazowych często używa Rada Polityki Pieniężnej, czyli grupa ludzi odpowiedzialna za system finansowy całej Polski. Decyzje podjęte przez tę radę mają wpływ na wysokość lokat bankowych, oprocentowania kredytów i pożyczek oraz na stabilność ekonomiczną Polski. Przeciętny Polak nie spotyka się bezpośrednio z punktami bazowymi, ale odczuwa zmiany finansowe wyrażone w punktach bazowych, gdy np. pójdzie do banku.

Podatek Belki to automatycznie pobierana przez bank opłata od zysków kapitałowych. Został on wprowadzony 01.12.2001 przez Marka Belkę (stąd jego nazwa) – ówczesnego ministra finansów i dotyczył wyłącznie lokat oraz depozytów bankowych. Jego stawka wynosiła 20% naliczonych odsetek. W 2004 r. obniżono go do 19%, ale kosztem tego, że dodatkowo objęto nim inne zyski kapitałowe, np. pochodzące ze sprzedaży papierów wartościowych. Podatek Belki od 01.01.2004 do 31.12.2006 wyliczano mnożąc naliczone odsetki przez 19% i zaokrąglając otrzymany wynik do 1 grosza[18].

Wprowadzenie podatku Belki w 2001 r. spowodowało, że w bankowości pojawiły się 2 nowe terminy:

zysk brutto – naliczone odsetki bez potrącania podatku Belki

zysk netto – odsetki uzyskane po odjęciu zaokrąglonego podatku Belki do 1 grosza

1.7.14 Jako pracodawca sporządź listę płac w tabeli.

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%				
2	Belka	Robert	720 zł	5%				
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%				
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%				
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%				
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%				
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%				
8	Podkowa	Robert	1057,63	1%				
9	Sowa	Zofia	1046,4	1%				
10	Zys	Julia	1280	5%				

18 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

Odpowiedź:

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%	78,75 zł	953,75 zł	181,21 zł	772,50 zł
2	Belka	Robert	720 zł	5%	36,00 zł	756,00 zł	143,64 zł	612,36 zł
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%	118,40 zł	1 105,10 zł	209,97 zł	895,13 zł
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%	80,48 zł	1 086,48 zł	206,43 zł	880,05 zł
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%	30,00 zł	630,00 zł	119,70 zł	510,30 zł
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%	60,94 zł	1 279,69 zł	243,14 zł	1 036,55 zł
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%	111,60 zł	1 351,60 zł	256,80 zł	1 094,80 zł
8	Podkowa	Robert	875 zł	1%	105,76 zł	1 163,39 zł	221,04 zł	942,35 zł
9	Sowa	Zofia	720 zł	1%	104,64 zł	1 151,04 zł	218,70 zł	932,34 zł
10	Zys	Julia	986,7 zł	5%	64,00 zł	1 344,00 zł	255,36 zł	1 088,64 zł

1.7.15 Na podstawie poniższej tabeli:

a) oblicz wynagrodzenie netto pracownika,

b) oblicz, jaki procent wynagrodzenia brutto stanowi ubezpieczenie emerytalne, chorobowe, rentowe oraz ubezpieczenie zdrowotne,

c) oblicz, jaki procent całej pensji brutto stanowi podatek.

Wynagrodzenie brutto	3 000
Składki ZUS	
Ubezpieczenie emerytalne	292,80
Chorobowe	73,50
Rentowe	45,0
Razem składki ZUS	
Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne	2588,70
Ubezpieczenie zdrowotne	232,98
Koszty uzyskania przychodu	111,25
Podstawa opodatkowania	2477,45
Kwota zwolniona od podatku	46,33
Podatek	199,00
Pensja netto	

Odpowiedź:

a) Razem składki ZUS wyniosły 411,30, wynagrodzenie netto pracownika = wynagrodzenie brutto – składki ZUS – koszty uzyskania przychodu – ubezpieczenie zdrowotne – podatek = 1985,47 zł; b) 21,48%; c) 6,63%.

1.7.16 Oblicz wysokość wszystkich podstawowych składek społecznych (emerytalnej i rentowej – 6%, chorobowej i zdrowotnej – 9%), jakie zostaną odliczone z pensji Pana Kowalskiego, która wynosi 1700 zł brutto.

Odpowiedź: 225 zł.

1.7.17 Oceń, ile czteroosobowa rodzina osiągająca dochody netto w wysokości 6000 zł może przeznaczyć na miesięczną spłatę raty kredytu hipotecznego. W ocenie uwzględnij przeciętne miesięczne wydatki rodziny na opłaty, żywność itp. Następnie oblicz, na ile lat musiałaby ona zaciągnąć taki kredyt oprocentowany 7% w skali roku, aby zakupić mieszkanie o wartości 300 000zł.

1.7.18 Firma oferuje ratalną sprzedaż samochodu. Raty rozłożone są na 4 lata, przy czym miesięczna kwota spłaty wynosi 900 zł. Cena samochodu wynosi 30000 zł. Jakie oprocentowanie oferuje sprzedawca w skali miesięcznej i w skali roku?
Uwaga: Rozwiąż zadanie w arkuszu kalkulacyjnym (skorzystaj z funkcji FV).

Odpowiedź: miesięczna 1,6%, a roczna 19,2%.

1.7.19 Oblicz wartość podatku Belki oraz zysk netto zgodnie z ordynacją podatkową obowiązującą od 01.01.2007 do 30.03.2012, jeśli odsetki z lokaty wyniosły:

a) 25,72 zł b) 63,32 zł c) 122,75 zł d) 137,20 zł

Odpowiedź: a) odsetki: 25,72 zł, podstawa opodatkowania: 26 zł, podatek Belki: 4,94 zł, zaokrąglenie podatku: 5 zł, zysk netto: 20,72 zł; b) 51,32 zł; c) 99,75 zł; d) 111,20 zł.

Uwaga: Odsetki zaokrągla się do pełnych złotych i nazywa się tę zaokrągloną liczbę podstawą opodatkowania, z której oblicza się 19% podatku Belki; otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych złotych. Aby wyliczyć zysk netto z lokaty, trzeba od odsetek odjąć otrzymany wynik.

Ciekawostka

Banki, aby uniknąć podatku Belki, wprowadziły częstą kapitalizację odsetek. Obowiązujący obecnie system podatkowy sprawia, że od zysku poniżej 2,49 zł nie trzeba płacić podatku. Wszystko za sprawą zaokrągleń podstawy opodatkowania i samego podatku. Zgodnie z zapisami w ordynacji podatkowej odsetki w kwocie 2,49 zł należy zaokrąglić „w dół" do pełnej złotówki, czyli do 2 zł. Podatek od zysku w wysokości 2 zł wynosi 38 groszy. Tu także zaokrąglamy do pełnej złotówki, czyli do zera. W ten sposób od tak niewielkiego zysku z lokaty nie trzeba płacić podatku. Z tego też względu banki proponują lokaty z dzienną kapitalizacją odsetek. Niewielkie odsetki dopisywane są do salda lokaty codziennie i w ten sposób klient nie płaci 19 proc. podatku od zysku. Jeśli we wspomnianej wyżej lokacie zastosowalibyśmy mechanizm dziennej kapitalizacji, to zysk po roku wyniósłby 513 zł już bez podatku. W rezultacie oprocentowanie efektywne wspomnianej lokaty wyniesie 5,13%[19].

19 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

1.7.20 Jaką maksymalnie kwotę trzeba wpłacić na 2-miesięczną lokatę oprocentowaną 6,2% w skali roku, aby legalnie ominąć płacenie podatku Belki wyliczanego zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012?

Odpowiedź:

$\frac{2}{12} \cdot 6{,}2\% \cdot x = 2{,}495$

$x = 242{,}23$ zł

1.7.21 W 2007 roku pani Kasia założyła lokatę jednodniową oprocentowaną 3,8% w skali roku na kwotę 1600 zł. Oblicz, ile dziennie będzie dostawać odsetek od takiej kwoty? Czy uniknie podatku Belki?

Odpowiedź:

$\frac{1}{365} \cdot 3{,}8\% \cdot 1600$ zł $= 0{,}17$ zł $< 2{,}50$ zł. W tym roku uniknie podatku Belki.

1.7.22 Ile wyniosą odsetki od lokaty jednodniowej oprocentowanej 6,84% w skali roku założonej na kwotę 15000 zł w 2012 roku? Jaki będzie zysk netto z tej lokaty po 300 dniach, jeśli w międzyczasie bank nie zmieni oprocentowania?

Odpowiedź: Dokładnie 1,80 zł dziennie; 540 zł po 300 dniach.

1.7.23 W państwie A produkt PKB wzrasta co roku o 8%, a w państwie B o 6%. Po ilu latach w każdym z państw nastąpi potrojenie PKB?

Odpowiedź:

Wskazówka: mając kapitał k przy rocznej kapitalizacji odsetek p% w skali roku, po n latach kapitał wzrasta do $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

A – po 16 latach,

B – po 19 latach.

1.8 Przedziały liczbowe

Teraz nauczę się:

- Posługiwać pojęciem przedziału liczbowego,
- Zaznaczać przedziały na osi liczbowej.

Przedział – zbiór elementów danego zbioru częściowo uporządkowanego, zawartych między dwoma ustalonymi elementami tego zbioru, nazywanymi początkiem i końcem przedziału[20].

20 www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy, 26.02.2013

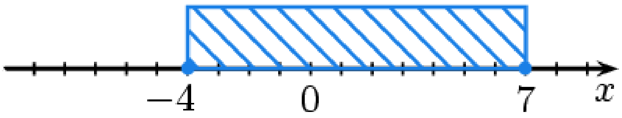
Oznaczenia przedziałów:

Przedziałem domkniętym $< a; b >$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

$\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

Przykład 1

Przedział domknięty $< -4; 7 >$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



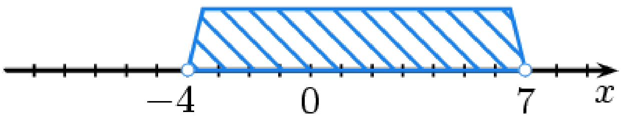
Rysunek 1-5 – Przedział domknięty

Przedziałem otwartym (a;b) o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a} < x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x < b\}$

Przykład 2

Przedział otwarty $(-4; 7)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



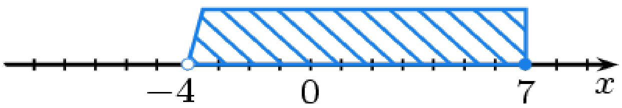
Rysunek 1-6 – Przedział otwarty

Przedziałem lewostronnie otwartym (prawostronnie domkniętym) $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x \leq b\}$

Przykład 3

Przedział lewostronnie otwarty $(-4; 7\rangle$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-7 – Przedział lewostronnie otwarty a prawostronnie domknięty

Przedziałem prawostronnie otwartym (lewostronnie domkniętym) $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} > = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < b\}$

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym $(\boldsymbol{a}; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych od a.

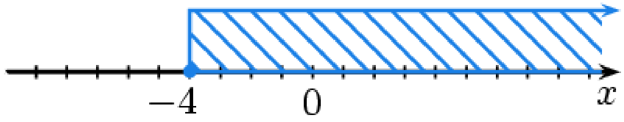
$(\boldsymbol{a}; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{x} > a\}$

Podobnie przedziałem lewostronnie domkniętym nieograniczonym $\langle \boldsymbol{a}; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych bądź równych a.

$\langle \boldsymbol{a}; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 5

Przedział $\langle 4; +\infty)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-8 – Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony

Przedziałem prawostronnie otwartym nieograniczonym $(-\infty;\ \boldsymbol{a})$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych od a.

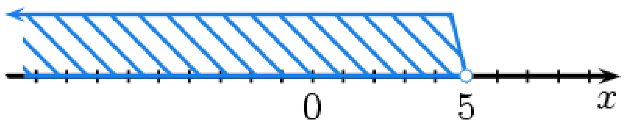
$(-\infty;\ \boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{x} < a\}$

Podobnie **przedziałem prawostronnie domkniętym nieograniczonym** $(-\infty;\ \boldsymbol{a}\rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych *x* mniejszych bądź równych *a*.

$(-\infty;\ \boldsymbol{a} > = \{x \in R : \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 6

Przedział $(-\infty;\ 5)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



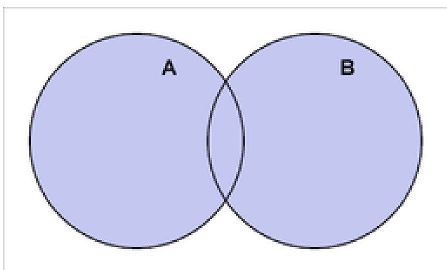
Rysunek 1-9 – Przedział prawostronnie otwarty nieograniczony

Ponieważ przedział jest zbiorem, więc możemy wyznaczać między innymi sumę, iloczyn czy też różnicę przedziałów.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Sumą zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A* lub do zbioru *B*, matematycznie zapisujemy ją tak: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



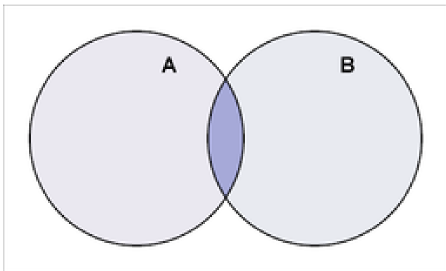
Rysunek 1-10 – Suma zbiorów

Przykład 7

Jeżeli $A = \{1 ,2 ,5\}$ i $B = \{1 ,3 ,4\}$, to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pomimo tego, że 1 występuje w obydwu zbiorach, w sumie tych zbiorów występuje tylko jeden raz.

Iloczynem, czyli częścią wspólną zbioru *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru *A* i do zbioru *B*, formalnie zapisujemy ją tak: $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



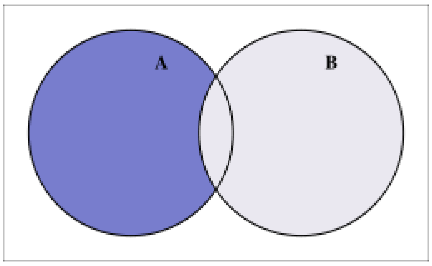
Rysunek 1-11 – Iloczyn zbiorów

Przykład 8

Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \cap B = \{1\}$. Liczba 1 jest jedynym wspólnym elementem tych zbiorów.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A*, a które nie należą do zbioru *B*, możemy ją zapisać tak: $A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$.

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-12 – Różnica zbiorów

Przykład 9

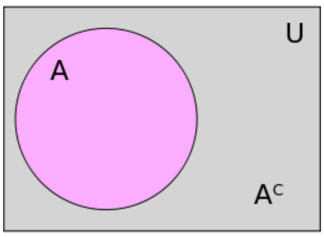
Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \backslash B = \{2, 5\}$. Jedynym wspólnym elementem obydwu zbiorów jest liczba 1, więc otrzymany zbiór będzie bardzo podobny do zbioru *A*, lecz nie posiadający liczby 1.

Dopełnieniem zbioru *A* z przestrzeni *U* nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni *U*, które nie należą do zbioru *A*. Dopełnienie zbioru *A* oznaczamy jako A'.

$A' = U \backslash A$

$A' = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-13 – Dopełnienie zbiorów

Przykład 10

Jeśli $A = \{1,2,3\}$, a przestrzenią U jest zbiór wszystkich liczby całkowitych dodatnich, to dopełnieniem zbioru A będzie zbiór $A' = \{4,5,6,7,8, \dots\}$.

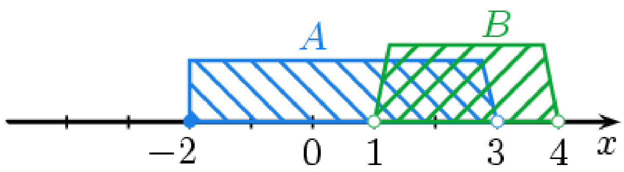
Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zauważmy, że: $\boldsymbol{A \cup A' = U}$ oraz $\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

Przykład 11`

Wyznaczmy $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, A', B'$, gdzie $A = [-2; 3), B = (1; 4)$.

Zaznaczmy najpierw oba przedziały na osi liczbowej:



Z rysunku widzimy, że:

- $A \cup B = [-2;\ 4)$
- $A \cap B = (1;\ 3)$
- $A \backslash B = [-2;\ 1]$
- $B \backslash A = [3;\ 4)$
- $A' = (-\infty;\ -2) \cup [3;\ +\infty)$
- $B' = (-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$

Własności działań na zbiorach

- Dla dowolnych zbiorów *A, B, C* zachodzą prawa:
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – I prawo De Morgana
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – II prawo De Morgana
- $A \cup B = B \cup A$ – przemienność dodawania zbiorów
- $A \cap B = B \cap A$ – przemienność mnożenia zbiorów
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – łączność dodawania zbiorów
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – łączność mnożenia zbiorów
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania

Przykład 12

Mamy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{3, 5, 9\}$. Obliczyć $D = A \cap (B \cup C)$.

$D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 9\}) =$
$= (\{1, 3\} \cup \{3\}) = \{1, 3\}$

ZADANIA

1.8.1 Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały:

a) $(-2; 5)$ b) $\langle -\infty;\ 3)$ c) $\langle 0; 6\rangle$

d) $\{2,3,4,5\}$ e) $(-\infty;\ -3)$ f) $(-5;\ 1\rangle$

g) $\langle -7; 5\rangle$ h) $\langle 0;\ 4)$ i) $\langle -2;\ +\infty)$

1.8.2 Wyznacz zbiory:

a) N∪W b) $R \cup NW$ c) N ∪ R d) $N \cup C$

e) C ∩ W f) $C \cap N$ g) $NW \cap C$ h) R ∩ C

i) C \ W j) R \ W k) N \ NW

Odpowiedź:

a) W; b) R; c) R; d) C; e) C; f) N; g) Ø; h) C; i) Ø; j) NW; k) N.

1.8.3 Podaj wszystkie liczby całkowite, które należą do przedziału:

a) $\left\langle -\frac{1}{2}; 6\right)$ b) $(-5;\ \pi)$ c) $\langle 0; 2\rangle$ d) $\langle -\pi;\ \pi\rangle$

Odpowiedź:

a) $\{0,1,2,3,4,5\}$, b) $\{0,1,2,3\}$, c) $\{0,1,2\}$, d) $\{0,1,2,3\}$.

1.8.4 Zaznacz na osi liczbowej zbiór A' wiedząc, że:

a) $A = (-3; 7\rangle$ b) $A = (-\infty;\ 5)$ c) $A = \langle 2; 6\rangle$

d) $A = (-\infty; 4) \cup (6; 12\rangle$ e) $A = (-5; +\infty)$

Odpowiedź:

a) $(-\infty; -3\rangle \cup (7; +\infty)$; b) $\langle 5; +\infty)$; c) $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$;

d) $\langle 4; 6\rangle \cup (12; +\infty)$; e) $(-\infty; 5)$

1.8.5 Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: A ∩ B, A ∪ B, A\B, B\A:

a) $A = (-3;\ 5),\ B = \langle -1;\ 8\rangle$ b) $A = \langle -4;\ 6),\ B = \langle 5;\ +\infty)$

c) $A = (-4;\ 1),\ B = (0;\ 2\rangle$ d) $A = (-\infty;\ 3),\ B = \langle 1;\ 4\rangle$

e) $A = (-\infty;\ 5\rangle\ \ B = (-2; 2)$

Odpowiedź:

a) $A \cap B = \langle -1;\ 5), A \cup B = (-3;\ 8\rangle, A \backslash B = (-3;\ -1), B \backslash A = \langle 5;\ 8\rangle$

b) $A \cap B = \langle 5;\ 6), A \cup B = \langle -4;\ +\infty), A \backslash B = \langle -4; 5), B \backslash A = \langle 6;\ +\infty)$

c) $A \cap B = (0;\ 1), A \cup B = (-4;\ 2\rangle, A \backslash B = (-4;\ 0\rangle, B \backslash A = \langle 2;\ 2\rangle$

d) $A \cap B = \langle 1;\ 3), A \cup B = (-\infty;\ 4\rangle, A \backslash B = (-\infty;\ 1), B \backslash A = \langle 3;\ 4\rangle$

e) $A \cap B = (-2;\ 2), A \cup B = (-\infty;\ 5\rangle, A \backslash B = (-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 2; 5\rangle, B \backslash A = \emptyset$

1.8.6 Niech $A = \langle -3; 5\rangle, B = (-6; 7), C = (-\infty;\ 4\rangle$. Wyznacz następujące zbiory i zilustruj je na osi liczbowej:

a) $A \cap B$ b) $A \backslash B$ c) C \ A d) B \ C

e) $(A \cup B) \backslash C$ f) $A' \cap C$ g) $C \cap (A \cup B)'$

Odpowiedź: a) $\langle -3; 5\rangle$; b) Ø; c) (–∞; 3); d) 4;7); e) (4;7); f) (–∞;3); g) $(-\infty;\ 4\rangle$.

1.8.7 Mając dane zbiory A i B, zaznacz na osi liczbowej zbiory: A′, B′, A′ ∩ B′ oraz A′ ∪ B′.

a) $A = (-\infty;\ 3), B = (4;\ +\infty)$

b) $A = (-\infty;\ -5) \cup (4; 6), B = \langle 2; 7\rangle$

c) $A = (0;\ 2\rangle \cup (6; +\infty), B = (-5; 8\rangle$

d) $A = \langle 2; 4\rangle, B = (1; +\infty)$

e) $A = (-\infty;\ -3) \cup \langle 1; 2\rangle, B = (0; 4)$

Odpowiedź:

a) $A' = \langle 3; +\infty), B' = (-\infty; 4\rangle, A' \cap B' = \langle 3; 4\rangle, A' \cup B' = R$

b) $A' = \langle -5; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty), B' = (-\infty; 2) \cup (7; +\infty),$
$A' \cap B' = \langle -5;\ 2) \cup (7; +\infty), A' \cup B' = (-\infty; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty)$

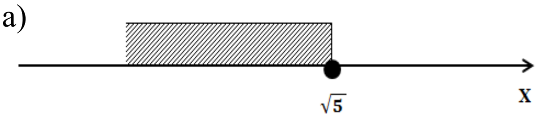
c) $A' = (-\infty; 0\rangle \cup (2; 6\rangle, B' = (-\infty; -5\rangle \cup (8; +\infty), A' \cap B' = (-\infty;\ -5\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty;\ 0\rangle \cup (2; 6\rangle \cup (8; +\infty)$

d) $A' = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), B' = (-\infty; 1\rangle, A' \cap B' = (-\infty; 1\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

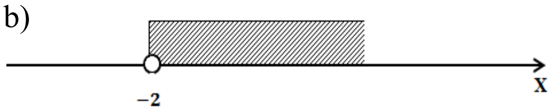
e) $A' = \langle -3; 1) \cup (2;\ +\infty), B' = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty), A' \cap B' = \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty)$
$A' \cup B' = (-\infty; 1) \cup (2, +\infty)$

1.8.8 Zapisz w postaci nierówności i przedziału liczbowego zbiór liczb zaznaczonych na osi liczbowej:

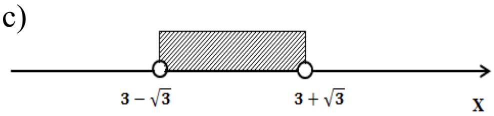
a)



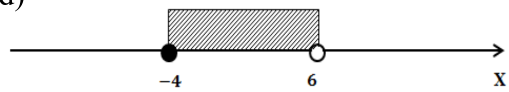
b)



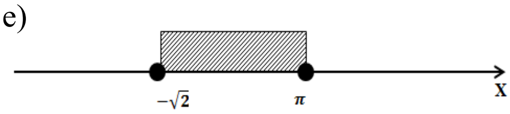
c)



d)



e)



Odpowiedź:

a) $x \leq \sqrt{5},\ x \in (-\infty;\ \sqrt{5}\rangle$

b) $x > -2, \quad x \in (-2;\ +\infty)$

c) $3+\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3}, \quad x \in (3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3})$

d) $-4 \leq x < 6, \quad x \in \langle -4;\ 6)$

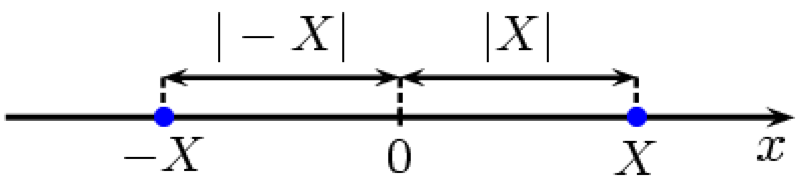
e) $-\sqrt{2} \leq x \leq \pi, \quad x \in \langle -\sqrt{2};\ \pi\rangle$

1.9 Wartość bezwzględna*

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną,
- Zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x-a| < b$, $|x-a| = b$, $|x-a| \geq b$.

Wartość bezwzględna liczby[21] nazywana też modułem lub wartością absolutną liczby, jest to odległość na osi liczbowej od danej liczby do zera.



Rysunek 1-14 – Wartość bezwzględna

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

21 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna, 10.03.2013.

Przykład 1

Wartość bezwzględna z liczby dodatniej to ta sama liczba

$|4| = 4$

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna

$|-5| = 5$

Aby rozwiązać równanie $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \boldsymbol{b}$, należy znaleźć liczby, których odległość od liczby a jest równa b.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|2x - 3| = 5$

Rzpatrujemy dwa przypadki:

$2x - 3 = 5, \quad \vee \ 2x - 3 = -5$

Otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_1 = 4$ lub $x_2 = -1$.

Własności wartości bezwzględnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *x* i *y* zachodzą poniższe własności:

$$|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$$

$$|\boldsymbol{x}| = |-\boldsymbol{x}|$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2}$$

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystać następujące własności:

$$|x| < a \iff -a < x < a \iff (x > -a \wedge x < a)$$

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \iff (x \geqslant -a \wedge x \leqslant a)$$

$$|x| > a \iff (x < -a \vee x > a)$$

$$|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a \vee x \geqslant a)$$

Przykład 3

Rozwiążmy nierówność $|x + 5| \leq 10$, wykorzystując własność $|x| \leq a$ otrzymujemy:

$x \geq -a \wedge x \leq a$, gdzie zamiast x postawiamy $x+5$, a zamiast a liczbę 10 otrzymujemy:

$x + 5 \geq -10 \wedge x + 5 \leq 10$, stąd

$x \geq -15 \wedge x \leq 5$, co ostatecznie zapisujemy za pomocą przedziału $x \in \langle -15; 15 \rangle$.

Przykład 4

Nierówności z wartością bezwzględną możemy zapisać za pomocą przedziałów:

a) $|x| \leq b$, czyli $x \in \langle -b; b \rangle$

b) $|x| < b$, czyli $x \in (-b; b)$

c) $|x| > b$, czyli $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$

d) $|x| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; -b\rangle \cup \langle b; +\infty)$

e) $|x - a| < b$, czyli przedział o środku w punkcie a i długości b, $x \in (a - b; a + b)$

f) $|x - a| \leq b$, czyli $x \in \langle a - b; a + b \rangle$

g) $|x - a| > b$, czyli $x \in (-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)$

h) $|x - a| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; a - b\rangle \cup \langle a + b; +\infty)$

ZADANIA

1.9.1 Oblicz:

a) $|-34,5| + |34,5|$

b) $|-2 - 34| - |12 - 15|$

c) $|-\sqrt{7} - 2|$

d) $|2 - \sqrt{3}|$

e) $|-x^2|$

Odpowiedź: a) 69; b) 33; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$ –2 e) x^2

1.9.2 Rozwiąż równanie:

a) $|x - 5| = 7$

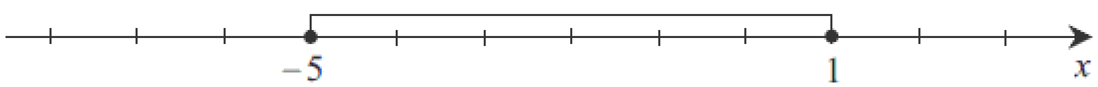
b) $|2x + 6| = 1$

c) $|3x - 3| = 1$

d) $|-x + 1| = 2$

Odpowiedź: a) 12 i –2; b) –2,5 i –3,5; c) $\frac{2}{3}$ i $1\frac{1}{3}$; d) –1 i 3.

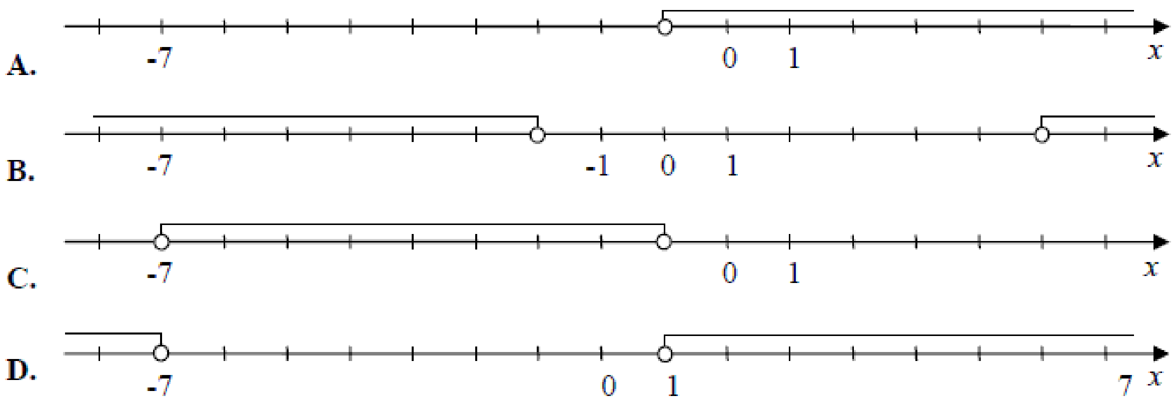
1.9.3 Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej:



A. $|x + 2| \leq 3$ B. $|x - 2| \leq 3$ C. $|x - 3| \leq 2$ D. $|x + 3| \leq 2$

Odpowiedź: D

1.9.4 Wskaż, który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 3| > 4$?



Odpowiedź: D.

1.9.5 Zapisz za pomocą przedziału liczbowego i zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $|x - 5| \geq 3$ b) $|x - 2| < 4$ c) $|x + 1| > 3$

d) $|x + 3| \geq 2$ e) $2 < |x| < 5$ f) $1 \leq |x| \leq 4$

g) $|5 + x| \leq 1$ h) $|2 + x| < 3$

Odpowiedź: a) $(-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 8; +\infty)$; b) $(-2; 6)$; c) $(-\infty;\ -4) \cup (2; +\infty)$; d) $(-\infty;\ -5\rangle \cup \langle -1; +\infty)$; e) $(-5; -2) \cup (2; 5)$; f) $\langle -4; -1) \cup (1; 4\rangle$; h) $\langle -6; -4\rangle$.

1.10 Logarytmy

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać definicję logarytmu i stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Dawniej logarytmy używane były do szybkiego mnożenia liczb za pomocą *tablic logarytmicznych*, które były podstawową pomocą do obliczeń naukowych, geodezyjnych, astronomicznych i inżynierskich. Dzisiaj zastąpiły je kalkulatory i komputery.

Logarytm zapisujemy następująco:

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a > 0$, $a \neq 0$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c = b$ (jest to potęga, do jakiej należy podnieść „a", aby otrzymać „b").

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x$$

Z definicji wynika, że dla $b > 0$ mamy $b = a^{\log_a b}$

Przykład 1

$\log_2 8 = 3 \qquad bo: 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \qquad bo: 3^4 = 81$

$\log_a a = 1$ **Jeżeli podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są takie same, to wynik logarytmowania zawsze wynosi 1.**

bo: $a^1 = a$ (niezależnie od wartości „a”)

$\log_a 1 = 0$ **Jeżeli liczba logarytmowana wynosi 1, to wynik logarytmowania wynosi 0.**

bo: $a^0 = 1$

Przykład 2

$\log_6 6 = 1 \qquad bo: 6^1 = 6$

$\log_{15} 1 = 0 \qquad bo: 15^0 = 1$

Prawa działań na logarytmach:

1) Logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_b c$$

2) Logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

3) Inne prawa:

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \qquad \log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Przykład 3

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

$$\log_{16} 0{,}25 = -\log_{16} 4 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_7 \frac{63}{5} - \log_7 \frac{9}{5} = \log_7 \frac{\frac{63}{5}}{\frac{9}{5}} = \log_7 7 = 1$$

$$\frac{\log_7 32}{\log_7 8} = \frac{\log_7 2^5}{\log_7 2^3} = \frac{5\log_7 2}{3\log_7 2} = \frac{5}{3}$$

$$\log_2 3 \cdot \log_9 2 = \log_9 2^{\log_2 3} = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

Ciekawostka

Najczęściej używa się logarytmów dziesiętnych oraz logarytmów naturalnych, tj. o podstawach równych odpowiednio 10 i *e*.

Przy odwzorowaniu wielkości w skali logarytmicznej, używane są często specyficzne jednostki miary, właściwe dla danej dziedziny, np. bele (B) i decybele (dB) w elektronice i przetwarzaniu sygnałów czy nepery w akustyce[22].

Skale logarytmiczne są szeroko stosowane w nauce i technice dla odwzorowania wielkości, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, np.:

- Skala Richtera – do określania amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych.

Skutki trzęsienia ziemi w zależności od jego wielkości w skali Richtera:

Skala Richtera	Skutki	Średnia liczba trzęsień rocznie
< 2,0	Najmniejsze wstrząsy, nieodczuwalne przez człowieka ani przez sejsmograf.	ok. 2 920 000 (8000 dziennie)
2,0-3,4	Wstrząsy nieodczuwalne dla człowieka, lecz rejestrowane przez sejsmograf.	ok. 800 000
3,5-4,2	Bardzo małe wstrząsy, odczuwane tylko przez niektórych ludzi.	ok. 30 000
4,3-4,8	Odczuwane przez większość osób, nieszkodliwe.	ok. 4 800
4,9-5,4	Odczuwane przez wszystkich, powoduje bardzo niewielkie zniszczenia.	ok. 1 400
5,5-6,1	Średnie wstrząsy, powoduje mniejsze uszkodzenia budynków.	ok. 500
6,2-6,9	Duże wstrząsy, powodują znaczne zniszczenia.	ok. 100
7,0-7,3	Poważne zniszczenia.	ok. 15
7,4-8,0	Ogromne zniszczenia.	ok. 4
8,0-8,9	Ogromne zniszczenia, katastrofalne skutki dla wielu krajów.	ok. 1
≥ 9,0	Trzęsienie, które może zburzyć wszystkie miasta na terenie większym niż kilkanaście tysięcy km^2.	ok. raz na 20 lat

Tabela 1-1 – Skala Richtera

- Skala decybelowa – do określania poziomu wielkości elektrycznych i akustycznych.
- Skala pH – do określania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych.
- Interwały w muzyce.

22 www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna, 25.02.2013

- Skala entropii w termodynamice.
- Skala Krumbeina – dla określania wielkości ziaren w geologii.
- Skala wielkości gwiazdowych.
- Skala logarytmiczna jest w pewnych zastosowaniach skalą naturalną, ze względu na to, że zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat innych skal logarytmicznych lub innego zastosowania logarytmów.

ZADANIA

1.10.1 Oblicz $\log_3 b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 27 b) $\frac{3}{9}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[5]{81}$

Odpowiedź: a) 3; b) –1; c) –1; d) $\frac{4}{5}$.

1.10.2 Oblicz $\log_{\frac{1}{3}} b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 9 b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$

Odpowiedź: a) –2; b) 1; c) $-\frac{4}{3}$; d) $-\frac{2}{5}$.

1.10.3 Oblicz b, jeżeli $\log_2 b$ wynosi:

a) $\sqrt[4]{2}$ b) 4 c) –3 d) 0,125 e) 1

Odpowiedź: a) $-\frac{7}{4}$; b) 16; c) $2^{2^{\frac{1}{4}}}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 2.

1.10.4 Oblicz b, jeżeli $log_{\frac{1}{2}} b$ wynosi:

a) 0,125 b) 0,25 c) 64 d) $\frac{1}{16}$

Odpowiedź: a) 3; b) 2; c) –5; d) 4.

1.10.5 Oblicz:

a) $log_4 16$ b) $log_3 \sqrt[3]{3}$ c) $log_2 \frac{\sqrt{8}}{4}$ d) $log_{\frac{1}{2}}(\frac{8}{2})2$

e) $log_{\frac{3}{5}}(\frac{18}{50})3$ f) $3log_{2,5}\frac{2}{5}$ g) $log_{\frac{1}{3}}(64)-1$ h) $log_2(\frac{1}{64})^{-2}$

i) $2log_{\frac{1}{5}} 125$ j) $2log_{\frac{1}{3}}9$

Odpowiedź: a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{2}{3}$; d) –4; e) 6; f) –3; g) 2; h) 12; i) –6; j) –4.

1.10.6 Oblicz, stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_2 4 + 2\log_3 1$ b) $(\log_5 5 - \log_5 125)^3$ c) $2\log_3 27 - \log_3 81$

d) $\log_2 4 + 2\log_2 1$ e) $\log_3 21 - \log_3 7$ f) $\log_5 10 + \log_5 24{,}3$

g) $\log_4 2 + \log_4 32$ h) $\log_4 8 + \log_4 2$

Odpowiedź: a) 2; b) –1; c) 9; d) 2; e) 1; f) 5; g) 3; h) 2.

1.10.7 Oblicz podstawę logarytmu wiedząc, że:

a) $\log_a 25 = 4$ b) $\log_a 0{,}01 = 3$ c) $\log_a 27 = 3$

d) $\log_a \frac{1}{27} = 2$ e) $\log_a \frac{3}{18} = 4$

Odpowiedź: a) $\sqrt[4]{25}$; b) $\sqrt[3]{0{,}01}$; c) 3; d) $\sqrt{27}$; e) $\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

1.10.8 Oblicz:

a) $\log_3 (2 - (\log_4 \sqrt{4}) \cdot \log_{\sqrt{4}} \frac{1}{4})$ b) $\log_3 9 \cdot \log_4 16 \cdot \log_5 25 + 1$

c) – log3log2log2256 d) $-\log3\log4\sqrt[5]{\sqrt[4]{4}}$

Odpowiedź: a) 1; b) 9; c) –1; d) 2.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Na seans filmowy sprzedano 280 biletów. W tym 126 ulgowych. Jaki procent sprzedanych biletów stanowły bilety ulgowe?[23]

a) 22% b) 33% c) 45% d) 63%

2. 6% liczby x jest równe 9. Wtedy:

a) $x = 240$ b) $x = 150$ c) $x = 24$ d) $x = 15$

3. Iloraz $32^{-27} \div \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy:

a) 2^{-27} b) 2^{-3} c) 2^3 d) 2^{27}

4. O liczbie x wiadomo, że $\log_3 x = 9$. Zatem:

a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 3^9$ d) $x = 9^3$

5. Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?[24]

a) 163,80 b) 180 c) 294 d) 420

23 Zadania: 1, 2, 3, 4 zaczerpnięte z CKE, Próbna matura, listopad 2009.
24 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpięte z CKE, maj 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).

6. Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^{0}$ jest równa:

a) 1 b) 4 c) 9 d) 36

7. Liczba jest równa $\log_4 8 + \log_4 2$:

a) 1 b) 2 c) $\log_4 6$ d) $\log_4 10$

8. Liczba $|5-7|-|-3+4|$ jest równa:[25]

a) –3 b) –5 c) 1 d) 3

9. Samochód kosztował 30000 zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Po tych obniżkach samochód kosztował:

a) 24400 zł b) 24700 zł c) 24000 zł d) 300 zł

10. Dana jest liczba $x = 63^2 \cdot (\frac{1}{3})^4$. Wtedy:

a) $x = 7^2$ b) $x = 7^{-2}$ c) $x = 3^8 \cdot 7^2$ d) $x = 3 \cdot 7$

11. Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa:

a) -2 b) -1 c) $\frac{1}{25}$ d) 4

12. Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje:[26]

a) 1701 zł b) 2100 zł c) 1890 zł d) 2091 zł

13. Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%, w wyniku obu obniżek cena nart zmiejszyła się o:[27]

a) 44% b) 50% c) 56% d) 60%

14. Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16\frac{3}{4}$ jest równa:

a) -8 b) -4 c) 2 d) 4

15. Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy:

a) –6 b) –4 c) –1 d) 1

16. Liczba $\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 \cdot 0{,}5}$ jest równa:

a) 1 b) –1 c) 2 d) 4

---

25 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpięte z CKE, listopad 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd, 20.03.2013).

26 Zadanie 20 zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20,03,2013).

27 Zadania: 13, 14, 15 zaczerpnięte z CKE, maj 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).

17. Liczba $\log_3 36 - \log_3 4$ jest równa:

a) $\log_3 32$ b) $\log_3 14$ c) 2 d) 9

18. Stół kosztował 320 zł. Ile kosztuje stół po podwyżce ceny o 20%?

a) 384 zł b) 256 zł c) 340 zł d) 400 zł

19. Liczba $27^{-2} \cdot 9^6$ jest równa:[28]

a) 9^5 b) 3^{16} c) 6^4 d) 3^6

20. Liczba log0,1+$\log_2$16 jest równa:

a) 6 b) –5 c) 3 d) 7

21. Torba kosztowała 40 zł, a po podwyżce 50 zł. O ile procent podwyższono cenę tej torby?

a) 10% b) 25% c) 75% d) 20%

22. Liczba $\dfrac{\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}}$ jest równa:[29]

a) -1 b) $\dfrac{4}{49}$ c) $-2\dfrac{1}{4}$ d) 1

23. Liczba log6 jest równa:

a) $\log 2 \cdot \log 3$ b) $\dfrac{\log 12}{\log 2}$ c) $\log 2 + \log 3$ d) $\log 2 - \log 3$

24. 20% pewnej liczby jest o 16 mniejsze od tej liczby. Tą liczbą jest:

a) 32 b) 20 c) –2 d) –20

25. Liczbę $x = 2^2 \cdot 16^{-4}$ można zapisać w postaci:[30]

a) $x = 214$ b) $x = 2–14$ c) $x = 32–2$ d) $x = 2–6$

26. Hania pokonuje drogę $S = 100\ m$ z domu do szkoły w czasie 30 min. Z jaką średnią prędkością idzie Hania?

a) 0,05 $\frac{km}{h}$ b) 0,2 $\frac{km}{h}$ c) 5 $\frac{km}{h}$ d) 3,3 $\frac{km}{h}$

27. Liczba $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ jest równa:

a) 6 b) –3 c) 3 d) –6

28 Zadania 19, 20, 21 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2009.

29 Zadania 22, 23, 24 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011 (www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 20.03.2013).

30 Zadania 25, 26, 27, 28 zaczerpnięte z OKE Poznań, styczeń, 2013 (www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc-0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 21.03.2013).

28. Odległość z Elbląga do Legnicy jest równa 468 km, natomiast po zaokrągleniu do setek kilometrów 500 km. Błąd względny tego przybliżenia jest równy:

a) 32 km b) 68 km c) około 6,8% d) 0,32%

29. Liczba $|5-2|+|1-6|$ jest równa:[31]

a) 8 b) 2 c) 3 d) –2

30. Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

31. **(2 pkt)**[32] Miesięczny koszt ogrzewania domu wynosi 200 zł. Dla zmniejszenia tych kosztów planuje się położenie dodatowej izolacji cieplnej, której wartość wynosi 4200 zł. Jeśli ta izolacja daje 30% oszczędności w wydatkach na ciepło, to po ilu latach poniesione koszty zwrócą się?

32. **(2pkt)** Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.

33. **(2 pkt)** Wiedząc, że $\sqrt{x}=16$, $\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}$ oblicz $\sqrt[5]{xy}$.

34. **(2 pkt)** Dana jest liczba 2,363636... Podaj zaokrąglenie tej liczby z dokładnością do 0,001 i oblicz błąd względny tego przybliżenia.

35. **(5 pkt)** Siostry Zosia i Zuzia są współwłaścicielkami działki, przy czym część Zosi jest o 40% więsza od części Zuzi. Zuzia przeznaczyła na budowę altany 21% powierzchni swojej działki, to jest 210 m^2. Oblicz pole powierzchni całej działki. Jaki procent pola powierzchni całej działki stanowi działka Zuzi? Wynik zaokrągij do 1%.

36. **(2 pkt)** Aby obliczyć kwadrat liczby trzycyfrowej, można skorzystać ze wzoru: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, na przykład:

$$172 = (100+70+2)^2 = 100^2+70^2+2^2+2*100*70+2*100*2+2*70*2$$
$$= 10000+4900+4+14000+400+280 = 29584$$

37. **(2 pkt)** O ile procent zwiększy się pole powierzchni działki w kształcie prostokąta, jeśli długość każdego boku powiększymy o 30%?

38. **(2 pkt)** Liczbę 0,(4) – 0,2(1) zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

39. **(3 pkt)** Podaj liczby całowite, które należą do zbioru:

a) $\left(-\infty,2\right\rangle \cap (1;5)$ b) $\left\langle -2;3\right) \cup (3;5\rangle$ c) $(-5;7)/\langle 0;+\infty)$

40. **(4 pkt)** Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:

$A=\log_6(\log_2 64)$; B = $\log_{\frac{2}{3}}\frac{81}{16}$; C = $\log_{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{2}} 1\frac{1}{8}$; D = $\log_3 3\frac{6}{7}+\log_3 2\frac{1}{3}$

41. **(2 pkt)** Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{(0,75)^{-2}+(-1,5)^{-2}}$?

---

31 Zadania: 29, 30 zaczerpnięte z matury poprawkowej, sierpień, 2011 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 21.03.2013).

32 Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2 Wyrażenia algebraiczne

Algebra jest jednym z najstarszych działów matematyki. Około 300 r. n.e. starożytny myśliciel Diofantos po raz pierwszy niewiadome oznaczał literami. Za twórcę współczesnej algebry uznaje się jednak Francioisa Viete. Ten francuski matematyk pierwszy szeroko wprowadził oznaczenia literowe dla niewiadomych oraz dla współczynników.

To już potrafię:

1. Opisywać za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
2. Obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3. Redukować wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4. Dodawać i odejmować sumy algebraiczne;
5. Mnożyć jednomiany, sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnożyć sumy algebraiczne.

▶ SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Wyrażenie $(2ab^2c^3)^3$ można zapisać jako:

a) $2ab5c^2$ b) $2ab^6c^9$ c) $8a^3b^5c^6$ d) $8a^3b^6c^9$

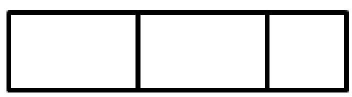
Zad.2. Wyrażenie $25 - a^2 + a$, dla $a = -3$ jest równe:

a) 13 b) 31 c) 19 d) 16

Zad.3. Wyrażenie $(n - 3m)(n + 3m)$ jest równe wyrażeniu

a) $n^2 - 6nm + 9n^2$ b) $n^2 - 6m^2$ c) $n^2 - 6nm + 6n^2$ d) $n^2 - 9m^2$

Zad.4. Na ceglanej elewacji jednego z budynków w mieście powtarza się wzór. Przez *n* oznaczmy długość dłuższej cegły, a przez *m* długość krótszej cegły. Łączną długość pięciu takich wzorów opisuje wyrażenie:



a) $5 \cdot 2n + m$ b) $2n + 5m$ c) $5(2n + m)$ d) $5(2n + 2m)$

Zad.5. Wyrażenie $9b^2 + 6ab - 3b$ jest równe:

a) $3b^2(3 + 2a - 1)$

b) $3b(b + 3a - 1)$

c) $3b(3b + 2a - 1)$

d) $3(b + 2a - 1)$

Zad.6. W sklepie było 20 kilogramów pomarańczy po 3 zł za kilogram, 35 kilogramów mandarynek po 2,50 zł za kilogram. Sprzedano owoce o wartości 130 zł. Które z wyrażeń przedstawia wartość owoców pozostawionych w sklepie?

a) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 - 130$

b) $130 - (20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50)$

c) $(20 + 35) \cdot (3 + 2{,}50) - 130$

d) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 + 130$

Zad.7. Ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$ wyznacz zmienną v

a) $v = \frac{2m}{E}$

b) $v = \sqrt{\frac{2m}{E}}$

c) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

d) $v = \sqrt{2Em}$

Zad.8. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $(5x^2 + 4x) - 7y^2 - (3x^2 + 3y^2)$ otrzymamy:

a) $2x^2 - 4y^2 + 4x$

b) $2x^2 - 10y^2 - 4x$

c) $2x^2 + 10y^2 + 4x$

d) $2x^2 - 10y^2 + 4x$

Zad.9. Liczbę 4 razy mniejszą od kwadratu liczby n przedstawia wyrażenie:

a) $n^2 : 4$

b) $n^2 - 4$

c) $\frac{1}{4n^2}$

d) $4 : n^2$

Zad.10. Różnica kwadratu potrojonej liczby x i ćwierci sześcianu liczby y, to:

a) $3x^2 - 0{,}25y^3$

b) $(3x)^2 - 0{,}25y^3$

c) $3x^2 - (0{,}25y)^3$

d) $(3x)^2 - (0{,}25y)^3$

Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	C	C	A	C	D	A	A

ZADANIA OTWARTE

1. Ze szkoły liczącej n uczniów $x\%$ wyjeżdża w czasie wakacji na obozy, $y\%$ do znajomych w góry, a $z\%$ z rodzinami na wczasy. Ile osób pozostaje w miejscu zamieszkania?

2. Zapisz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych w postaci wyrażenia algebraicznego.

3. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych

$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)$

4. Sprowadź do najprostszej postaci i oblicz wartość liczbową wyrażenia dla $x=-5, y=\frac{1}{2}$

$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)$

5. Uzasadnij, że $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ dla $a,b>0$

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	n – wszyscy uczniowie $x\%\cdot n$ – ilość uczniów na obozach $y\%\cdot n$ – ilość uczniów w górach $z\%\cdot n$ – ilość uczniów na wczasach $a\%\cdot n$ – uczniowie pozostający w domu $x\%\cdot n+y\%\cdot n+z\%\cdot n+a\%\cdot n=n$ $xn+yn+zn+an=100n$ $an=100n-xn-yn-zn$ $a=\frac{n(100-x-y-z)}{n}$ uczniów
2	n– liczba naturalna $2n$ – liczba parzysta $2n+1$ – liczba nieparzysta $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=2n+1+2n+3+2n+5=6n+9=3(2n+3)$
3	$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)=2x+5+3x-2y+2x+3-4y-1$ $=7x-6y+7$
4	$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)=x^2-4y^2+x^2+2xy+y^2-4xy+4y^2$ $=2x^2+y^2-2xy=2\cdot(-5)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-5)\cdot\frac{1}{2}=50+\frac{1}{4}+5=55\frac{1}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}(2-\sqrt{b})}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2-\sqrt{b}+\sqrt{b}=2$

2.1 Wartość liczbowa wyrażeń

Teraz nauczę się:

Stosować wzory skróconego mnożenia na:

- Kwadrat sumy: $(a+b)^2$
- Kwadrat różnicy: $(a-b)^2$
- Różnicę kwadratów: a^2-b^2

Wyrażenia algebraiczne powstają przez łączenie symboli literowych oraz liczb znakami działań i nawiasów.

Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$x, 25,\ \ 2y^3, -\frac{1}{2}ab^2, 5(x-2),\ \ a+3b^2,\ \ \frac{(a+b)}{2}\cdot h,\ \ 3(2+2a)+4-6a$$

Wyrażenia algebraiczne występują w różnych wzorach, twierdzeniach czy dowodach.

Wyrażenia takie, jak $3x, \frac{1}{5}ab, -2y^2, 3ab^2c^3, -1$nazywamy **jednomianami**. Możemy wśród nich wyróżnić **jednomiany podobne,** czyli takie, które różnią się między sobą tylko współczynnikiem liczbowym.

Przykłady jednomianów podobnych:

$1;\ 4;\ \frac{3}{8};\ 15, \dots$

$x;\ 5x;\ -0{,}75x;\ 1\frac{1}{5}x, \dots$

$a^2bc^3;\ 4a^2bc^3;\ -2\frac{4}{5}a^2bc^3;\ 0{,}63a^2bc^3$

Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.

$$xy-2x+y-2-x+2xy+4y-5=-3x+5y+3xy-7$$

$$4a^2-3b-\frac{1}{2}a+2b^2-12+2\frac{3}{4}a-3a^2+5b=a^2+2b^2+2\frac{1}{4}a+2b-12$$

$$3a-8b^2+14ac+\frac{1}{2}a+7-10ca+5\frac{3}{4}b^2-4=-2\frac{1}{4}b^2+3\frac{1}{2}a+4ac+3$$

Taki zabieg nazywa się **redukcją wyrazów podobnych**.

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażeń algebraicznych, w miejsce liter należy wstawić liczby i wykonać określone działania.

Przykład 1

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3x^2+2x-4$ dla $x=-2$.

$$3x^2+2x-4=3(-2)^2+2\cdot(-2)-4=3\cdot4-4-4=12-4-4=4$$

Przykład 2

Zdredukuj wyrazy podobne i oblicz wartość liczbową danego wyrażenia dla $x=-3, y=2$.

a) $4x^2+2x-8+3x-\frac{1}{3}x^2+4-5x=3\frac{2}{3}x^2-4=3\frac{2}{3}\cdot(-3)^2-4=\frac{11}{3}\cdot 9-4=$
$33-4=29$

b) $12x-8x^2+\frac{4}{3}x-7+12x^2-14+9x=4x^2+21\frac{4}{3}x-21=$
$=4\cdot(-3)^2+\frac{67}{3}\cdot(-3)-21=4\cdot 9-67-21=36-88=-52$

c) $3x^2y+5y-6+3y^2x-4y+7x+6x^2y-4y^2x-12x=$
$=9x^2y-y^2x-5x+y-6=9\cdot(-3)^2\cdot 2-2^2\cdot(-3)-5\cdot(-3)+2-6$
$=9\cdot 9\cdot 2-4\cdot(-3)+15+2-6=162+12+15+2-6=185$

d) $-\frac{2}{5}x+1\frac{1}{4}x-0,3y=-\frac{8}{20}x+1\frac{5}{20}x-0,3y=\frac{17}{20}x-0{,}3y=$
$=\frac{17}{20}\cdot(-3)-0{,}3\cdot 2=-\frac{51}{20}-\frac{6}{10}=-\frac{51}{20}-\frac{12}{20}=-\frac{63}{20}=-3{,}15$

ZADANIA

2.1.1 Znajdź wartości liczbowe wyrażenia $(2x^2-2xy)^2$ przy następujących wartościach:

a) $x=3;\ y=2$

b) $x=0{,}5;\ y=0{,}2$

c) $x=3\frac{1}{2};\ y=1\frac{1}{2}$

d) $x=2{,}5;\ y=1{,}75$

Odpowiedź: a) 36; b) 0,09; c) 196; d) $14\frac{1}{16}$.

2.1.2 Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $3(x^2-3y+4)-8$, dla $x=2; y=\frac{4}{3}$

b) $10(x-2)-4(y+3)+6$, dla $x=1\frac{1}{2}; y=0{,}75$

c) $20-4(2x^3-8x+1)+3$, dla $x=-\frac{1}{2}$

d) $x+5-(x-3)+4y-7$, dla $x=-5; y=3$

Odpowiedź: a) 4; b) –14; c) 4; d) 13.

2.1.3 Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $(5x-2)^2-(5x-2)(5x+2)$, dla $x=-0{,}2$

b) $\frac{4x}{y(x+y)}$, dla $x=6, y=-2$

c) $(a^2-16)(a+2)$, dla $a=\sqrt{2}$

d) $\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}$, dla $x=4$

Odpowiedź: a) 12; b) –3; c) $-14(\sqrt{2}+2)$; d) $1\frac{1}{5}$.

2.2 Działania na wyrażeniach algebraicznych

Poza dodawaniem sum algebraicznych można na wyrażeniach algebraicznych wykonywać także inne działania: mnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożyć dwie sumy algebraiczne i wyłączać wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias.

Do przekształcania wyrażeń wykorzystuje się prawa działań na liczbach rzeczywistych.

Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian polega na zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Przykład 1

$$-5(3x + y) = -5 \cdot 3x + (-5) \cdot y = -15x - 5y$$

$$2x(x^2 - 5y) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-5y) = 2x^3 - 10xy$$

$$3a(2x^2 + 4x - 2) = 3a \cdot 2x^2 + 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-2) = 6ax^2 + 12ax - 6a$$

Mnożenie sum algebraicznych polega na pomnożeniu każdego składnika pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Przykład 2

$$(x + 3)(2x - 1) = x \cdot 2x + x \cdot (-1) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-1) = 2x^2 - x + 6x - 3$$

$$\begin{aligned}(3x - 2y)(-2x - 5) &= 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot (-5) + (-2y) \cdot (-2x) + (-2y) \cdot (-5)\\ &= -6x^2 - 15x + 4xy + 10y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2x + 3y - 7)(x - 2y) =\\ &\qquad = 2x \cdot x + 2x \cdot (-2y) + 3y \cdot x + 3y \cdot (-2y) + (-7) \cdot x + (-7) \cdot (-2y)\\ &\qquad = 2x^2 - 4xy + 3xy - 6y^2 - 7x + 14y = 2x^2 - 6y^2 - xy - 7x + 14y\end{aligned}$$

ZADANIA

2.2.1 Uprość wyrażenia, a następnie oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $x^2 - 2y^2 + xy$ dla $x = 2$ i $y = -5$

b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{4}{5}$

c) $3x^2 - 4x + 7 + x^2 - 5x - 8$ dla $x = -1$

d) $5x - 3(4 - 2x) + 2(-x + 1)$ dla $x = -2$

e) $(x - 3)(x + 2 - 4)$ dla $x = 3$

f) $4x^2 - x(x+3) - 5x$ dla $x = \frac{1}{3}$

g) $x(x-3y) + 2xy - y^2(2-y)$ dla $x = 2$ i $y = -3$

h) $3x - 4 - [2x^2 - 5x - (3 - 4x + 3x^2)]$ dla $x = -\frac{1}{2}$

i) $\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2} + \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}$ dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$

Odpowiedź: a) -56; b) 1; c) 16; d) -28; e) 0; f) $-2\frac{1}{3}$; g) $-2{,}75$

2.2.2 Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $(x-5)(x+2) =$

b) $(2x-3)(x-1) + 5x - 4(5-3x) =$

c) $2(2x-5y) - 3(4x+3y) =$

d) $(-x-2y)(-1) + 3(x+y+5) =$

e) $2x(x-5) - (x-y)(x+1) - 5x\left(\frac{2}{5}y - 2\right) =$

f) $5x(1-x^2) - (x-3)(-2x^2) =$

g) $-(3x-2y+1) + (5x-4y+4z) - (x-5y-z) =$

h) $2x - 3y + 4z - \{3x + y - 2z - [3x - 2y - 2z - (3x + 5y - 7z)]\} =$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 2x - 10$; b) $2x^2 + 12x - 17$; c) $-8x - 19y$; d) $4x + 5y + 15$;

e) $x^2 - x + y - xy$; f) $-x^3 - 6x^2 + 5x$; g) $x + 3y + 5z - 1$; h) $-x - 11y + 11z$.

2.2.3 Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia.

a) $(2x+y)(3y-5x) - 4x(x-y)$, dla $x = 1, y = -2$

b) $p(p-3k) + 2pk - k^2(2-k)$, dla $p = 2, k = -4$

c) $\frac{(2a-3b)(b-4a)-2b^2}{3a(4-b)-5b(a+3)}$, dla $a = -2, b = -4$

d) $(a+1)(b+2) + (b+3)(c+4) + (a+5)(c+6)$, dla $a = 1, b = 2, c = 3$

Odpowiedź: a) –12; b) –35; c) 0; d) 9; e) 7.

2.2.4 Wiedząc, że $x = 2 + \sqrt{5}$ i $y = 1 - 2\sqrt{5}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{xy}{2x+y}$

Odpowiedź: $\frac{-8-3\sqrt{5}}{5}$

2.2.5 Uzasadnij, że dla $a, b > 0$ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}-a}{a-b} = 1$

2.3 Wzory skróconego mnożenia

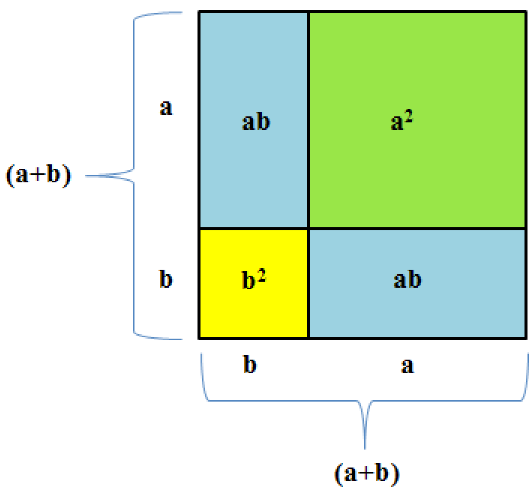
Wzory skróconego mnożenia – kwadrat sumy

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów powiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a+b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a+b)^2$ i jest sumą pól czterech figur.



$$(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Rysunek 2-1 – Kwadrat sumy

Interpretacja algebraiczna

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Przykład 1

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$$(2a+4)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 4 + 4^2 = 4a^2 + 16a + 16$$

$$(2k+5l)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 5l + (5l)^2 = 4k^2 + 20kl + 25l^2$$

$$\left(a\sqrt{2}+2\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 4$$

Przykład 2

$$(102)^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

$$(120)^2 = (100+20)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 20^2 = 10000 + 4000 + 400 = 14400$$

$$(27)^2 = (20+7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 400 + 280 + 49 = 729$$

Przykład 3

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$$49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + x^2 = (7+x)^2 = (7+x)(7+x)$$

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$$

$$9 + 6x\sqrt{3} + 3x^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)\left(3 + x\sqrt{3}\right)$$

Wzory skróconego mnożenia – kwadrat różnicy

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów pomniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

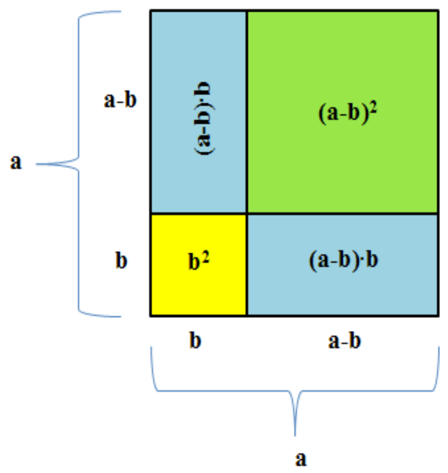
Interpretacja algebraiczna

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a-b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a-b)^2$

i jest równe sumie pól kwadratów o boku$a$ i o boku b zmniejszonej o pole dwóch prostokątów o bokach a, b.



$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Rysunek 2-2 – Kwadrat różnicy

Przykład 4

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$$(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$$

$$(3a-5b)^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 5b+(5b)^2=9a^2-30ab+25b^2$$

$$\left(1-x\sqrt{3}\right)^2=1^2-2\cdot 1\cdot x\sqrt{3}+\left(x\sqrt{3}\right)^2=1-2x\sqrt{3}+3x^2$$

Przykład 5

$$(198)^2=(200-2)^2=200^2-2\cdot 200\cdot 2+2^2=40000-800+4=39204$$

Przykład 6

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$$a^2-16a+64=a^2-2\cdot a\cdot 8+8^2=(a-8)^2=(a-8)(a-8)$$

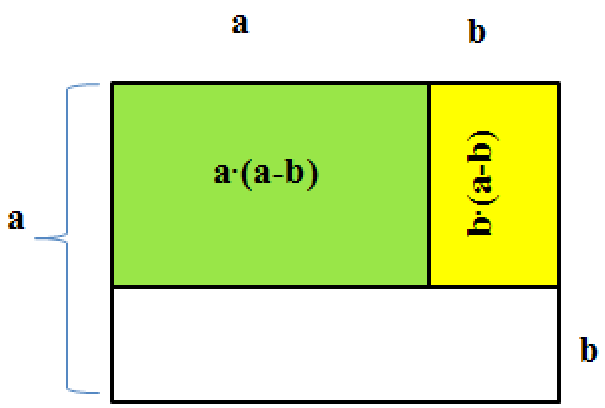
$$9-6y\sqrt{5}+5y^2=9-2\cdot 3\cdot y\sqrt{5}+\left(y\sqrt{5}\right)^2=\left(3-y\sqrt{5}\right)^2=\left(3-y\sqrt{5}\right)\left(3-y\sqrt{5}\right)$$

$$36x^2-36xz+9z^2=(6x)^2-2\cdot 6x\cdot 3z+(3z)^2=(6x-3z)^2=(6x-3z)(6x-3z)$$

Wzory skróconego mnożenia – różnica kwadratów

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń a i b przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$



Rysunek 2-2– Różnica kwadratów

Interpretacja geometryczna

Pole pokolorowanego prostokąta jest równe:

$$P=(a+b)(a-b)$$

$$P=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Zatem $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Interpretacja algebraiczna

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Przykład 7

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$

$(3z+2y)(3z-2y)=(3z)^2-(2z)^2=9z^2-4y^2$

$(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5)=(\sqrt{7})^2-5^2=7-25=-18$

Przykład 8

Zapisz różnicę w postaci iloczynu.

$16b^2-25c^2=(4b)^2-(5c)^2=(4b-5c)(4b+5c)$

$2x^2-4y^2=(x\sqrt{2})^2-(2y)^2=(x\sqrt{2}+2y)(x\sqrt{2}-2y)$

$a^4-64=(a^2)^2-8^2=(a^2-8)(a^2+8)=(a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})(a^2+8)$

Przykład 9

Oblicz $399\cdot 401$.

$399\cdot 401=(400-1)(400+1)=400^2-1^2=160000-1=159999$

ZADANIA

2.3.1 Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia.

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+6)^2$ c) $(2+5y)^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)^2$

e) $(6x+5y)^2$ f) $(y-5)^2$ g) $(2y-4x)^2$ h) $(-3-x)^2$

i) $(y-5)^2$ j) $\left(6y-\frac{1}{3}x\right)^2$

Odpowiedź:

a) x^2+6x+9; b) $4x^2+24x+36$; c) $4+20y+25y^2$; d) $\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$;
e) $36x^2+60xy+25y^2$; f) $y^2-10y+25$; g) $4y^2-16xy+16x^2$; h) $9+6x+x^2$;
i) $y^2-10y+25$; j) $36y^2-4x+\frac{1}{9}x^2$.

2.3.2 Oblicz.

a) 103^2 b) 78^2 c) 503^2 d) 99^2 e) 498^2 f) 303^2

Odpowiedź: a) 10609; b) 6084; c) 253009; d) 9801; e) 248004; f) 91809.

2.3.3 Oblicz, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

a) $(\sqrt{3}+2)^2$ b) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$

c) $(2\sqrt{2}-5)^2$ d) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

Odpowiedź: a) $4\sqrt{3}+7$; b) $2\sqrt{21}+10$; c) $33-20\sqrt{2}$; d) $18+12\sqrt{2}$.

2.3.4 Zapisz wyrażenia w postaci iloczynu.

a) $x^2 - 25$ b) $4x^2 - 9y^2$ c) $x^4 - 49y^2$

d) $64 - 0{,}36x^2$ e) $\frac{64}{81}x^2 - 121y^2$ f) $3x^2 - 7y^2$

Odpowiedź:

a) $(x-5)(x+5)$; b) $(2x-3)(2x+3y)$; c) $(x-7y)(x+7y)$;

d) $(8-0{,}6x)(8+0{,}6x)$; e) $\left(\frac{8}{9}x - 11y\right)\left(\frac{8}{9}x + 11y\right)$; f) $\left(\sqrt{3}x - \sqrt{7}y\right)\left(\sqrt{3}x + \sqrt{7}y\right)$.

2.3.4 Zapisz w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

a) $(x-2)(x+2)$ b) $(2x-3y)(2x+3y)$

c) $-\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(\frac{1}{2}x - y\right)$ d) $\left(\sqrt{2}-5\right)\left(\sqrt{2}+5\right)$

e) $\left(3\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-3\right)$ f) $(-5x-6)(5x-6)$

Odpowiedź: a) $x^2 - 4$; b) $4x^2 - 9y^2$; c) $-\frac{1}{4}x^2 + y^2$; d) -23; e) 54; f) $36 - 25x^2$.

2.4 Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Wzory skróconego mnożenia stosuje się także do **usuwania niewymierności** z mianownika ułamka. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez taki czynnik, który da w mianowniku liczbę całkowitą. Jeżeli w mianowniku mamy sumę lub różnicę, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Przykład 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+5)}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{18+15\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{18+15\sqrt{3}}{12-5} = \frac{3(6+5\sqrt{3})}{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} =$$
$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

ZADANIA

2.4.1 Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$ c) $\frac{7}{\sqrt[3]{8}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ f) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ h) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$

Odpowiedź:

a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; c) $3{,}5$; d) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{4\sqrt{33}-4\sqrt{6}-\sqrt{22}+11}{9}$; f) $2\sqrt{2}-2$; g) $15+5\sqrt{6}$; h) $\frac{-7-2\sqrt{10}}{3}$.

2.4.3 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2}{5+\sqrt{5}}$, $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2\sqrt{3}+5}{6+2\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Odpowiedź:

a) $\sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-3, 0{,}5-0{,}1\sqrt{5}, -3\left(2+\sqrt{5}\right)$;

b) $\frac{6-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}, -5-2\sqrt{6}, \frac{3}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.4.4 Usuń niewymierność, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $\frac{5}{4+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Odpowiedź: a) $\frac{-30+25\sqrt{3}-15\sqrt{7}+10\sqrt{21}}{12}$; b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

2.5 Rozkład wielomianu na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias to nic innego, jak zamiana sumy algebraicznej na iloczyn wyrażeń. Umiejętność ta jest przydatna do rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Przykład

$$3x+6y-12z = 3\cdot z + 3\cdot 2y - 3\cdot 4z = 3(z+2y-4z)$$

$$-2abc+6a^2bc-10ac^2 = -2abc + (-2)\cdot 3aabc + (-2)\cdot 5acc$$
$$= -2ac(b+3ab+5c)$$

$$x(2a+b)-y(2a+b) = (2a+b)(x-y)$$

$$x(y-z)-(y-z) = x(y-z)-1(y-z) = (y-z)(x-1)$$

ZADANIA

2.5.1 Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5x + x^2 =$ b) $6x^2 - 3x =$

c) $6x + 10xy + 8xz =$ d) $8x^2y + 4xy - 2y =$

e) $3xyz + 6xzt - 9xyt =$ f) $5x^4 - 25x^3 - 10x^2 =$

g) $2(x + y) + (x + y)z =$ h) $(2x - 3y) - a(2x - 3y) =$

i) $(5 - x)y^2 - 9(5 - x)y - (x - 5) =$

Odpowiedź:

a) $x(5 + x)$; b) $3x(2x - 1)$; c) $2x(3 + 5y + 4z)$; d) $2y(4x^2 + 2x - 1)$; e) $3x(yz + 2zt - 3yt)$;

f) $5x^2(x^2 - 5x - 2)$; g) $(x + y)(2 + z)$; h) $(2x - 3y)(1 - a)$; i) $(5 - x)(y^2 - 9y + 1)$.

2.5.3 Zapisz w postaci iloczynowej:

a) $3x^2 - 6$ b) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ c) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

d) $3x^3 - 15x^2 - 6x + 30$ e) $x^4 - x^3 - 8x + 8$

Odpowiedź:

a) $3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$; c) $(x + 2)(x^2 + 9)$;

d) $3(x - 5)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; e) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Równość $(a + 4\sqrt{2})^2 = a^2 + 32\sqrt{2} + 32$ zachodzi dla:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$ d) $a = 4\sqrt{2}$

2. Liczba $(2 - 3\sqrt{2})^2$ jest równa:[33]

a) -14 b) 22 c) $-14 - 12\sqrt{2}$ d) $-22 - 12\sqrt{2}$

3. Równość $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$ zachodzi dla:

a) $a = 14$ b) $a = 7\sqrt{2}$ c) $a = 7$ d) $a = 2\sqrt{2}$

33 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z „Poprawkowy egzamin maturalny z matematyki", sierpień, 212 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 23.03.2013).

4. Liczba x stanowi 20% liczby y. Zatem prawdziwe jest następujące równanie:

a) $0{,}2x = y$ b) $y = 5x$ c) $1{,}2x = y$ d) $x = 1{,}2\,y$

5. Liczba $(3-\sqrt{2})^2 + 4(2-\sqrt{2})$ jest równa:[34]

a) $19-10\sqrt{2}$ b) $17-4\sqrt{2}$ c) $15+14\sqrt{2}$ d) $19+6\sqrt{2}$

6. Wyrażenie $8x^2 - 4xy + 6x$ jest równe iloczynowi:

a) $2x(4x - 2y + 6)$ b) $2x(4x - 2y + 3)$

c) $2x(4x^2 - 2y + 3x)$ d) $2x(4x - y + 3)$

7. Wartość wyrażenia $(\sqrt{x+1}+1)(1-\sqrt{x+1})$ dla $x = \sqrt{2} - 2$ jest równa:

a) $2-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}-2$ c) $\sqrt{2}-3$ d) $4-\sqrt{2}$

8. Liczba a stanowi 60% liczby b. Wówczas:[35]

a) $a = b - 0{,}4$ b) $b = 0{,}4\,a$ c) $b = \frac{5}{3}a$ d) $a = \frac{5}{3}b$

9. Wartość wyrażenia $\frac{2a+12}{-a^2}$ dla $a = -2\sqrt{3}$ jest równa:

a) $4\sqrt{3}-1$ b) $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$ c) $\frac{-\sqrt{3}+3}{3}$ d) $-4\sqrt{3}+1$

10. Rozwiązanie równania $x(x-1) + 36 = x(x+3)$ należy do przedziału:

a) $(3,10)$ b) $(11,+\infty)$ c) $(-5,9)$ d) $(-\infty,5)$

11. Różnica liczby x i 15% tej liczby jest równa 255. Równaniem opisującym tę zależność jest:

a) $x - 0{,}15 = 255$ b) $1{,}85 \cdot x = 255$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 255$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 255$

12. Jeżeli $x = 1 - 2\sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2}$, to xy równe jest:[36]

a) $\sqrt{2}-4$ b) $4-\sqrt{2}$ c) -3 d) $-\sqrt{2}$

13. Wyrażenie $x(x-2)(x+2)$ jest równe:

a) $(x-2)^3$ b) $x^3 - 4x$ c) $x^3 - 2$ d) $x^3 - 2x$

14. Wyrażenie $27x^3+y^3$ jest równe iloczynowi

a) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$ b) $(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)$

c) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$ d) $(3x-y)(9x^2-3xy+y^2)$

---

34 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpnięte z „Egzamin maturalny z matematyki", maj, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 23.03.2013).

35 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturaly z matematyki, CEN, Bydgoszcz.

36 Zadania: 12, 13, 14 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturalny z matematyki, OKE, Poznań.

15. Kwadrat liczby $x = 5 + 2\sqrt{3}$ jest równy:[37]

a) 37 b) $25 + 4\sqrt{3}$ c) $37 + 20\sqrt{3}$ d) 147

16. Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi:[38]

a) 5a2(1–10b+3) b) 5a (a–2b+3)

c) 5a (a–10b+15) d) 5(a–2b+3)

17. Liczba $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2})$ jest równa:[39]

a) $19 - 10\sqrt{2}$ b) $17 - 4\sqrt{2}$ c) $15 + 14\sqrt{2}$ d) $19 + 6\sqrt{2}$

18. Dla pewnych a i b zachodzą równości $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych a i b wartość wyrażenia $a - b$ wynosi:[40]

a) 25 b) 16 c) 10 d) 2

19. **(2 pkt)** Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} > \frac{a+1}{2}$.[41]

20. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

21. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

22. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a,b,c spełniają nierówność $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

23. Uprość wyrażenie: $-9(2m-3) + (m-3)^3 - (m+2)(m-2) - m^3$, a następnie oblicz jego wartość dla $m = \sqrt{3}$[42].

24. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

25. Oblicz wartość wyrażenia: $(2x+3y)\cdot(2x-3y) - (2x-3y)^2$ dla $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$

37 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z CKE, 2010 (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 20.03.2013).
38 (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
39 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).
40 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 24.03.2013).
41 (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
42 Zadania: 23, 24, 25 zaczerpnięto z Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności

To już potrafię:

- Zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
- Sprawdzić, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- Sprawdzić, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- Rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi oraz zadania osadzone w kontekście praktycznym.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 Liczba 7 jest rozwiązaniem równania:

a) $2x + 1 = 3x - 2$ b) $2(x + 1) = 3x - 2$

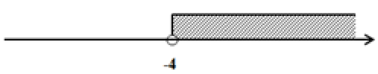
c) $2x + 1 = 3(x - 2)$ d) $2x + 1 = 3x + 2$

Zad.2 Po obniżce o 30% płaszcz kosztuje 392 zł. Jaka jest pierwotna cena płaszcza?

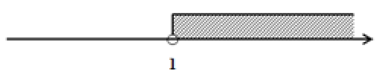
a) 500 b) 560 c) 650 d) 600

Zad.3 Wybierz rysunek, który przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $x - 3 > 1$

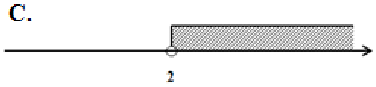
A.



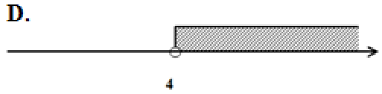
B.



C.



D.



Zad.4 Które z równań należy dopisać do równania $x-2y=8$, aby utworzony układ równań był sprzeczny?

a) $6x+2y=13$ b) $2x+2y=4$

c) $x-2y=4$ d) $2x-4y=16$

Zad.5 Układ równań $\begin{cases}3x+y=8\\2x-y=7\end{cases}$

a) Ma dokładnie jedno rozwiązanie b) Nie ma rozwiązań

c) Ma dwa rozwiązania d) Ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zad.6 Jeżeli y jest liczbą szklanek o pojemności $0{,}2$ litra, które można napełnić sokiem z pełnego naczynia o pojemności $1{,}5$ litra, to opisuje to nierówność:

a) $0{,}2y \geq 1{,}5$ b) $0{,}2y > 1{,}5$

c) $0{,}2y \leq 1{,}5$ d) $1{,}5y < 0{,}2$

Zad.7 Ile litrów wody należy dolać do 3 litrów 10% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 6%? Załóż, że gęstość roztworu jest równa gęstości wody.

a) 1 litr b) 4 litry c) 3 litry d) 2 litry

Zad.8 Nierównością równoważną nierówności $x>1$ jest:

a) $x-1<0$ b) $-x>-1$ c) $x-2>-1$ d) $\frac{x}{2}>1$

Zad.9 Po wyznaczeniu y ze wzoru $2y=z-\frac{1}{3}y$, otrzymamy:

a) $y=\frac{3}{4}z$ b) $y=\frac{3}{7}z$ c) $y=\frac{4}{3}z$ d) $y=\frac{7}{3}z$

Zad.10 Pan Marek zebrał m kg jagód, pan Janek o 5 kg więcej niż pan Marek, a pani Ewa 2 razy mniej niż pan Marek i pan Janek razem. Łącznie zebrali 40 kg jagód. Wskaż odpowiednie równanie opisujące tę sytuację.

a) $m+m+5-\frac{1}{2}(m-5+m)=40$

b) $m+m+5+\frac{1}{2}(m+5+m)=40$

c) $m+m-5+\frac{1}{2}(m+5+m)=40$

d) $m+m-5-\frac{1}{2}(m-5-m)=40$

Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	A	C	D	C	B	B

ZADANIA OTWARTE

1. Za dwa filmy zapłacono 60,20 zł. Ile kosztuje każdy film, jeżeli jeden jest o 15% droższy od drugiego?

2. Korzystając z własności proporcji, rozwiąż równanie $\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$.

3. Za jedną książkę droższą i jedną tańszą zapłacono 19 zł, a za pięć książek droższych i sześć książek tańszych zapłacono 104 zł. Jaka była cena książki droższej, a jaka książki tańszej?

4. Kupując telewizor, Tomek wpłacił 30% jego wartości. Pozostałą część należności postanowił spłacić na raty. Płatność miała się odbyć w 9 ratach po 140 zł. Ile kosztował telewizor?

5. O godzinie 10^{00} Adam wyruszył piechotą z miejscowości A do miejscowości B. O godzinie 11^{30} z miejscowości A wyruszyła Ewa i jadąc na rowerze z prędkością 24 km/h, dogoniła Adama o godzinie 12^{15}. Z jaką średnią prędkością szedł Adam?

Odpowiedzi:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – cena I filmu $x + 15\%x$ – cena II filmu $x + x + 15\%x = 60{,}20$ $2{,}15x = 60{,}20 \Rightarrow x = 28$ Odp. Jeden film kosztuje 28 zł, a drugi 32,20 zł.
2	$\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$ $6x + 4 = 12 + 4x$ $2x = 8 \Rightarrow x = 4$
3	x – tańsza książka y – droższa książka $\begin{cases} x + y = 19 \\ 5x + 6y = 104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ Odp. Tańsza książka kosztowała 9 zł, a droższa 10 zł.
4	x – cena komputera $30\%x + 9 \cdot 140 = x$ $1260 = 0{,}7x \Rightarrow x = 1800$ Odp. Komputer kosztował 1800 zł.
5	$2\ h\ 15\ min$ – czas podróży Adama, $45\ min$ – czas podróży Ewy x – prędkość Adama $x \cdot 2\frac{15}{60}$ – droga przebyta przez Adama $24 \cdot \frac{45}{60}$ – droga przebyta przez Ewę $x \cdot 2\frac{15}{60} = 24 \cdot \frac{45}{60} \Rightarrow x = 8$ Odp. Adam szedł ze średnią prędkością 8 km/h.

3.1 Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Teraz nauczę się:

- Sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania,
- Rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Nazywać równania w zależności od liczby rozwiazań (sprzeczne, oznaczone, nieoznaczone),
- Korzystać z proporcji do rozwiązywania zadań.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy **zbiorem rozwiązań tego równania.**

Równanie o postaci $ax+b=0$, gdzie x jest niewiadomą, natomiast a i b są dowolnymi liczbami, nazywamy **równaniem liniowym.** Aby rozwiązać równanie liniowe, należy sprowadzić je w wyniku przekształceń równoważnych do równania elementarnego $ax=-b$ i obustronnie podzielić przez współczynnik występujący przy niewiadomej x.

! Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą zmieniają swój znak!

Przykład 1

$5x-10=0$

$5x=10/:5$

$x=2$

Równanie liniowe może mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Takie równanie nazywamy **oznaczonym.**

Przykład 2

a) $2x+1=-2(x+3)-1$

$2x+1=-2x-6-1$

$2x+2x=-6-1-1$

$4x=-8$

$x=-2$

b) $2x+3(3x-5)-10=5x+5$

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

Zgodnie zasadą mnożenia liczby przez nawias w wyrażeniach algebraicznych. Mnożymy przez 3 kolejne wyrażenia z nawiasu: 3x i (-5).

$$2x+9x-15-10=5x+5$$

Po lewej stronie można jeszcze zredukować wyrażenia podobne:
2x+9x=11x
-15-10=-25

$$11x-25=5x+5$$

Uwaga!!!

Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą, zmieniają swój znak!

$$11x-25=5x+5$$

Przenosimy 5x na lewo. W związku z tym zmieniamy znak i po lewej zapisujemy: -5x

Przenosimy (-25) na prawo. W związku z tym zmieniamy znak i po prawej zapisujemy: +25

$$11x-5x=5+25$$

Wykonujemy ostatnie działania po obu stronach równania.

$$6x=30$$

$$6x=30 \quad /\div 6$$

30 : 6 = 5

$$x=5$$

Sprawdzenie

Sprawdzenie warto wykonać zawsze, niezależnie od tego, czy jest wymagane w zadaniu, czy nie. Aby je wykonać, do pierwotnej formy równania podstawiamy zamiast „x" otrzymaną wartość, zgodnie z zasadami podstawiania wartości liczbowych za symbole w wyrażeniach algebraicznych. Zapisujemy zamiast „x" otrzymaną wartość, a między liczbą i podstawianą wartością zapisujemy mnożenie.

Równanie zostało dobrze wykonane, gdy po obu stronach uzyskujemy taką samą wartość i możemy zapisać: L = P.

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

$$2\cdot 5+3(3\cdot 5-5)-10=5\cdot 5+5$$

$$10+3(15-5)-10=25+5$$

$$10+3\cdot 10-10=30$$

$$10+30-10=30$$

$$30=30$$

$$L=P$$

Równanie liniowe może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Takie równanie nazywamy **nieoznaczonym (tożsamościowym).**

$$2(x-1)+4=2x+2$$
$$2x-2+4=2x+2$$
$$2x+2=2x+2$$
$$2x-2x=2-2$$
$$0=0$$
$$\downarrow$$

0 = 0 !
Piszemy więc:

$$\downarrow$$

Równanie jest tożsame

$$x \in R$$

Równanie liniowe może nie mieć rozwiązań. Takie równanie nazywamy **sprzecznym.**

Równanie sprzeczne nie ma rozwiązań. W trakcie liczenia, dochodzimy do momentu, w którym powstaje sprzeczność (np. 0 = 9), wtedy znak równości przekreślamy: ($0 \neq 9$). Następnie należy zapisać: „Równanie jest sprzeczne" oraz $x \in \emptyset$ (czyt. x należy do zbioru pustego), można też zapisać słownie: „Brak rozwiązań".

Przykład 4

$$5x-9 \neq 2x+3(x-2)$$
$$5x-9 \neq 2x+3x-6$$
$$5x-9 \neq 5x-6$$
$$5x-5x \neq -6+9$$
$$0 \neq 3$$
$$\downarrow$$

0 ≠ 3 !
Piszemy więc:

$$\downarrow$$

Równanie jest sprzeczne

$$x \in \emptyset$$

Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to **proporcję**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ możemy zastąpić równością $\boldsymbol{d} \quad = b$.

Przykład 5

$$\frac{2x-5}{x+1}=\frac{5}{3}$$

Z: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$3(2x-5)=5(x+1)$$
$$6x-15=5x+5$$
$$6x-5x=5+15$$
$$x=20$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x = 20$.

Zdarzają się równania, które zawierają pewne „utrudnienie" w formie postaci ułamkowych. Łatwo można jednak ten problem rozwiązać. Należy „pozbyć" się mianowników, mnożąc całe równanie przez wspólny mianownik.

Wspólnym mianownikiem dla 4, 8 i 2 jest 8, dlatego mnożymy całe równanie przez 8.

$$\frac{2x+3}{4}-\frac{x-3}{8}+2x=\frac{-2x+4}{2}+5 \qquad /\cdot 8$$

UWAGA: Pamiętajmy by przemnożyć każde wyrażenie.

$$^{2}\cancel{8}\cdot\frac{2x+3}{\cancel{4}_{1}}-{}^{1}\cancel{8}\cdot\frac{x-3}{\cancel{8}_{1}}+8\cdot 2x={}^{4}\cancel{8}\cdot\frac{-2x+4}{\cancel{2}_{1}}+8\cdot 5$$

Skracamy mianowniki z 8, a następnie przepisujemy równanie, pomijając uzyskane w mianownikach 1 (bo dzielenie przez 1 nie zmienia wartości). UWAGA: Pamiętajmy by liczniki zapisać w nawiasach.

$$2\cdot(2x+3)-(x-3)+16x=4(-2x+4)+40$$

Od tego momentu mamy do rozwiązania „normalne" równanie:

$4x+6-x+3+16x=-8x+16+40$

$4x-x+16x+8x=16+40-3-6$

$27x=47$

$x=\frac{47}{27}=1\frac{20}{27}$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x=1\frac{20}{27}$.

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $6x+7+2x=8-x+1+80$

b) $-4(2x-5)=2(3x+7)$

c) $(8x-5)+(2x-3)=(x-2)-(3x+4)$

d) $x(x-3)=(x+2)^2$

e) $(3x+5)^2+(4x+6)^2=(5x+6)^2+37$

f) $\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{7}{15}(3+x)$

g) $\frac{5x-4}{6}-\frac{7-2x}{2}=0$

h) $\frac{x(3-x)}{3}-\frac{3-2x^2}{6}=2x$

i) $3-\frac{2x+3}{2}=\frac{17}{6}-\frac{3x+2}{2}$

j) $\frac{0,7x+5}{7}=0,1\left(x+\frac{2}{7}\right)$

1. Odpowiedź: a) $9\frac{1}{9}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{-4}{7}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{84}{11}$; g) $\frac{25}{11}$; h) $\frac{-1}{2}$; i) $\frac{2}{3}$; j) równanie sprzeczne.

3.1.2 Rozwiąż równania:

a) $x-2(x+5)=-3(4+x)+8$ b) $\frac{x}{2}-3(x-2)=-5x+16$

c) $\frac{x+1}{3}-2(x-1)=\frac{x}{2}-x$ d) $(x+2)^2=2x+(x-3)^2$

e) $(x-2)(x+2)=(x-1)^2$ f) $2(x-4)(x+5)=x(2x-10)-14$

Odpowiedź: a) 3; b) 4; c) 2; d) $\frac{5}{8}$; e) 2,5; f) $2\frac{1}{6}$.

3.1.3 Podaj liczbę rozwiązań równania:

a) $2(3x-2)-5=7-2x$ b) $5x-3=2(x+4)+3x$

c) $(x-2)^2=(x-1)(x+1)-4x$ d) $8-(2x-4)=-2(x-1)+10$

e) $\frac{3x-2}{3}-2x=-\frac{2}{3}-x$ f) $(x+3)^2-(x-3)(x+3)=5$

Odpowiedź:

a) $x=2$ oznaczone; b) $0=11$ sprzeczne; c) $0=-5$ sprzeczne; d) $0=0$ nieoznaczone;
e) $0=0$ nieoznaczone; f) -2 i 1/6 oznaczone.

3.1.4 Rozwiąż równanie podane w postaci proporcji (najpierw przyjmij odpowiednie założenia):

a) $\frac{5}{4x+3}=\frac{2}{x}$ b) $\frac{x}{x-1}=\frac{5x+1}{5x+3}$ c) $\frac{3+x}{x-2}=\frac{5-x}{-x+1}$

d) $\frac{x-2}{-x}=\frac{1-x}{x-2}$ e) $\frac{7}{7x-10}=\frac{5}{5x-20}$

Odpowiedź: a) -2; b) $\frac{-1}{9}$; c) $\frac{13}{9}$; d) $\frac{4}{3}$; e) sprzeczne.

3.2 Nierówności liniowe

Teraz nauczę się:

- Rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Zaznaczać zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisywać w postaci przedziału.

Rozwiązywanie nierówności nie różni się znacząco od rozwiązywania równań.

W nierównościach zamiast znaku „=" mamy znak nierówności.

W porównywaniu do równań mamy tu do czynienia z dwoma podstawowymi różnicami:

1) W trakcie obliczeń, gdy zachodzi konieczność pomnożenia lub podzielenia całego równania przez liczbę ujemną, należy obrócić znak nierówności w drugą stronę.

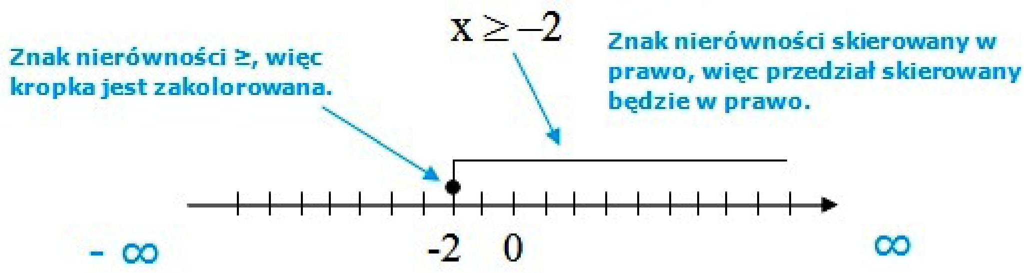
2) Po uzyskaniu rozwiązania, należy zaznaczyć je na osi oraz za pomocą przedziału liczbowego.

Przykład 1

$$2(x+1)-3 \le 4x+3$$
$$2x+2-3 \le 4x+3$$
$$2x-1 \le 4x+3$$
$$2x-4x \le 3+1$$
$$-2x \le 4 \ /\div(-2)$$
$$x \ge -2$$

Dzielimy całe równanie przez (-2), w związku z czym **musimy obrócić znak nierówności.**

Teraz należy zaznaczyć wynik na osi liczbowej.



Po narysowaniu przedziału na osi, należy jeszcze go zapisać.

Nawias trójkątny (domknięty), bo kropka w przykładzie jest zakolorowana.

Nawias okrągły (otwarty), bo przy nieskończoności zawsze jest otwarty.

$$x \in \langle -2, \infty)$$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $5(x-1)-2x+3>2x$

$5(x-1)-2x+3>2x$

$5x-5-2x+3>2x$

$3x-2>2x$

$3x-2x>2$

$x>2$

$x \in (2;\ \infty)$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż nierówności:

a) $5(x-1)-2x+3>2x$

b) $-2(x+6)>4(3+2x)$

c) $3(2-x)\leq -\frac{2}{3}(6x-21)$

d) $1-\frac{2x-5}{3}<3$

e) $\frac{5x+1}{2}\geq\frac{2-5x}{-3}$

f) $2-3(3-2x)>3-\frac{19-12x}{2}$

g) $5-\frac{2x-3}{3}>4-\frac{4x+2}{6}$

Odpowiedź: a) $(2,+\infty)$; b) $(-\infty;-2{,}4)$; c) $(-\infty,8\rangle$; d) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; e) $\langle -\frac{7}{5},+\infty)$; f) $\varnothing$; g) R.

3.3 Przekształcanie wzorów

Teraz nauczę się:

- Przekształcać wzory matematyczne, fizyczne, chemiczne

Przekształcanie wzorów często sprawia uczniom wiele problemów, a jest to naprawdę bardzo proste. Pamiętaj, że każdy wzór możesz potraktować jako równanie. Działania wykonujesz zawsze po obu stronach równania. Aby pozbyć się jakiejś wielkości, wykonujesz działanie odwrotne do danego.

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczaniu jednej zmiennej, która we wzorze występuje jako niewiadoma.

Przykład 1

Znając wzór na siłę, wyznacz wzór na przyspieszenie ciała.

$$F=m\cdot a$$

Podziel obie strony równania przez m

$$a=\frac{F}{m}$$

Przykład 2

Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s=\frac{a\cdot t^2}{2}$ wyznacz czas.

$$s=\frac{a\cdot t^2}{2}$$

Pomnóż obie strony równania przez $\frac{2}{5}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Wyciągnij pierwiastek z obu stron równania

ZADANIA

3.3.1 Przekształć wzory fizyczne , tak aby wyznaczyć:

a) m, v ze wzoru na pęd $p = m \cdot v$

b) T ze wzoru na częstość $f = \frac{1}{T}$

c) m, v ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$

d) l, g ze wzoru na okres wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

e) x, y z równania soczewki $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

f) l, s ze wzoru na opór $R = \rho\ \frac{l}{s}$

g) q, r z prawa Coulomba $F = k\frac{q^2}{r^2}$

Odpowiedź:

a) $m = \frac{p}{v}$, $v = \frac{p}{m}$; b) $T = \frac{1}{f}$; c) $m = \frac{2E}{v^2}$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$; d) $l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$, $g = \frac{4l\pi^2}{T^2}$;

e) $x = \frac{fy}{y-f}$, $y = \frac{fx}{x-f}$; f) $l = \frac{Rs}{\rho}$, $s = \frac{\rho l}{R}$; g) $q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}}$.

3.3.2 Ze wzoru na stężenie procentowe wyznacz:

a) masę substancji m_s

$$c_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$$

b) masę roztworu m_r

Odpowiedź: a) $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$; b) $m_r = \frac{m_s \cdot 100\%}{c_p}$.

3.3.3 Przekształć wzory matematyczne tak, aby wyznaczyć:

a) promień r, ze wzoru na objętość kuli $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) bok trójkata równobocznego, ze wzoru na pole trójkata $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) a, b, ze wzoru na pole trapezu $p = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

d) promień r, ze wzoru na pole koła $p = \pi r^2$

Odpowiedź: a) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$; b) $a = \sqrt{\frac{4p\sqrt{3}}{3}}$; c) $a = \frac{2p-bh}{h}$, $b = \frac{2p-ah}{h}$; d) $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$.

3.3.4 Wyznacz a z wyrażeń:

a) $\frac{1}{a} + \frac{2}{3b} = \frac{c}{d}$

b) $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b-c} = \frac{1}{c}$

c) $(\frac{(a+2b)}{2} : \frac{3a}{b}) : 2d = e$

d) $\sqrt{\frac{2a}{a+c}} = 2d$

Odpowiedź: a) $a = \frac{3db}{2d-3bc}$; b) $a = \frac{bc-c^2-b^2}{2c+b}$; c) $a = \frac{2b^2}{12ed-b}$; d) $a = \frac{4cd^2}{2-4d^2}$.

3.4 Rozwiązywanie zadań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się:

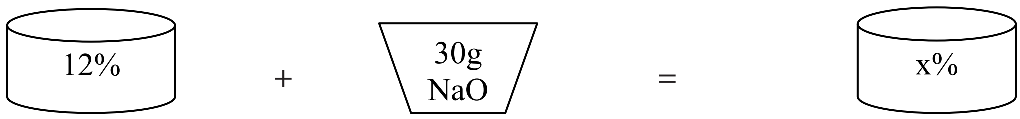
- Układać i rozwiązywać równania i nierówności liniowe do zadań z treścią.

Zadania chemiczne można rozwiązywać różnymi metodami. Często korzystamy ze wzorów chemicznych, które należy przekształcić do odpowiedniej postaci. Istnieją też inne sposoby. A oto jeden z nich:

Przykład 1

Do 130 g 12% roztworu NaOH wrzucono 40 g NaOH. Jakie jest jego stężenie procentowe

Rozwiązanie



130 g roztworu substancji rozpuszczanej 130g + 30g = 160g roztworu

Układamy równanie:

$12\% \cdot 130g + 30g = 160g \cdot x\%$

stąd $x = 28{,}5\%$

Przykład 2

Ile wody należy odparować z 200 gramów 25% roztworu Na_2SO_4, aby otrzymać roztwór o stężeniu 30%?

Rozwiązanie

W 200 g 25% roztworu znajduje się $0.25 \cdot 200 = 50g$ czystego Na_2SO_4 i 150 g wody. Stężenie procentowe roztworu, jaki chcemy otrzymać, wynosi 30%. Jeśli masę rozpuszczalnika oznaczymy jako x, ze wzoru na stężenie procentowe otrzymamy równanie:

$$c_p = \frac{m_s . 100\%}{m_r}$$

$$30\% = \frac{50}{150 + x}$$

$$x = 18,(3)$$

Należy więc odparować 150 g – 18,(3) g = 131,7 g wody.

Rozwiązując zadania fizyczne, pamiętaj o jednostkach.

Przykład 3[43]

Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością 20 m/s, a drugą połowę ze stałą prędkością 30 m/s. Obliczycz średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi.

Rozwiązanie

Średnia prędkość samochodu wynosi $\mathbf{v}_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdzie

$\Delta s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = \mathbf{s}$ całkowita droga przebyta przez samochód,

$\Delta t = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ całkowity czas ruchu samochodu,

$t_1 = \frac{s}{2v_1}$ czas, w którym samochód przebył pierwszą połowę drogi jadąc z prędkością v_1

$t_2 = \frac{s}{2v_2}$ czas, w którym samochód przebył drugą połowę drogi z prędkością v_2

zatem średnia prędkość samochodu jest równa:

$$v śr = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 24\ \frac{m}{s}$$

Uwaga: Średnia prędkość samochodu nie jest, w tym przypadku, średnią arytmetyczną prędkości.

Przykład 4

Adam wyjeżdża w trasę o godzinie 13.00 i jedzie motocyklem ze średnią prędkością 70 $\frac{km}{h}$. Piotr wyjeżdża godzinę póniej i ma do pokonania dwa razy krótszą trasę. Jedzie motocyklem z szybkością 50 $\frac{km}{h}$. Oblicz, jakie trasy mieli do pokonania motocykliści, jeżeli wiadomo, że skończyli jazdę o tej samej godzinie.

Rozwiązanie

Zauważ, że:

$$t_1 = t_2 + 1$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 70(t_2 + 1)$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 50\ t_2$$

$$s_1 = 2s_2$$

43 www.mif.pg.gda.pl/zz/3%20Kinematyka.pdf, 12.03.2013.

stąd otrzymujemy równanie

$$70(t_2 + 1) = 100\, t_2$$

Odpowiedź:

$$t_2 = 2\frac{1}{3}\ h, \qquad t_1 = 3\frac{1}{3}\ h, \qquad s_2 = 116{,}7\ km, \qquad s_1 = 233{,}4\ km$$

ZADANIA

3.4.1 Paweł jedzie do pracy ze średnią szybkością 50 $\frac{km}{h}$. W pogodny dzień podróż zajmuje mu 1,4 h. W deszczowy dzień jego średnia szybkość wynosi 35 $\frac{km}{h}$. Oblicz jaką drogę pokonuje Paweł do pracy i ile minut więcej zajmuje mu pokonanie tej trasy w deszczowy dzień.

Odpowiedź: $s = 70$ km, t_2-$t_1 = 36$ min

3.4.2 Oblicz średnią szybkość Ziemi w ruchu dookoła Słońca, wiedząc że w ciągu roku planeta pokonuje drogę 10^9 km.

Odpowiedź: $v = 1{,}14 \cdot 10^5 \frac{km}{h}$

3.4.3 Samolot leciał z szybkością v = 780 $\frac{km}{h}$ i pokonał drogę 1800 km, następnie 1400 km leciał z wiatrem, którego szybkość wynosiła 150$\frac{km}{h}$. Oblicz czas przelotu całej trasy i średnią szybkość samolotu.

Odpowiedź: $t = 3$ h 12 min, $v = 846 \frac{km}{h}$

3.4.4 Karuzela wykonała 4 okrążenia o promieniu $r = 15$ m wokół własnej osi w czasie $t = 100$ s. Oblicz średnią szybkość karuzeli.

Odpowiedź: $v = \frac{\mathrm{n}2\pi r}{t} = 3{,}77 \frac{m}{s}$

3.4.5 Statek wycieczkowy płynie z miejscowości A do B, tam i spowrotem. Prędkość statku względem wody to 40 $\frac{km}{h}$, a prędkość wody względem brzegu rzeki to 2 $\frac{m}{s}$. Oblicz średnią prędkość statku na całej trasie.

Odpowiedź:

(Pamiętaj o zamianie jednostek. Wykorzystaj wzór z przykładu 3, rozważ ruch w obu kierunkach).

$$v_{śr} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1} = 10{,}75 \frac{m}{s}$$

3.4.6 Swobodnie puszczona kulka stalowa odbija się (bez strat energii) od poziomej, doskonale sprężystej powierzchni, uderzając w nią co 1,2 s. Jak wysoko podskakuje kulka? Przyjmij $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Odpowiedź: Skorzystaj ze wzoru $h = \frac{gt^2}{2}$, za czas podstaw $\frac{t}{2}$ (pomyśl dlaczego), $h = 1{,}8$ m.

3.4.7 Z miast odległych o 150 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwa samochody. Średnia prędkość jazdy jednego z nich wynosi 80 $\frac{km}{h}$, a drugiego 60 $\frac{km}{h}$. O której godzinie i w jakiej odległości od każdego z miast nastapi ich spotkanie?

Odpowiedź: (Pamiętaj, że jadą tyle samo czasu).

$s_1 = v_1 \cdot t = 80t$

$s_2 = v_2 \cdot t = 60t$

$s = 80t + 60t = 150$

$t = 1{,}0714\,h = 1h\,4\,min$

$s_1 = 85{,}7\,km$

$s_2 = 64{,}3\,km$

Samochody spotkają się o godzinie 9.04.

3.4.8 Ile gramów 30% roztworu LiOH należy dodać do 200 gramów 15% roztworu tego związku, aby otrzymać roztwór 20%?

Odpowiedź: $0{,}3x + 0{,}15 \cdot 200 = 0{,}2(200 + x)$

$x = 100g$

3.4.9 Odparowano 35 g 12% roztworu NaCl. Jaką masę osadu otrzymano?

Odpowiedź: $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$

$m_s = 12 \cdot 35/100 = 4{,}2$ g

3.4.10 Ile $CaCl_2$ należy dodać do 300 gramów 25% roztworu $CaCl_2$, aby otrzymać roztwór o stężeniu 40%?

Odpowiedź: $0{,}25 \cdot 300 + x = 0{,}4x + 0{,}4 \cdot 300$

$x = 75$ g

3.4.11 Zmieszano 120 g 18% roztworu KOH i 35 g 25% roztworu tego związku. Jakie jest stężenie procentowe powstałego roztworu?

Odpowiedź: $ms = 120 \cdot 18\% + 35 \cdot 25\% = 30{,}35$ g

$mr = 120 + 35 = 155$ g

$Cp = 19{,}58\%$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

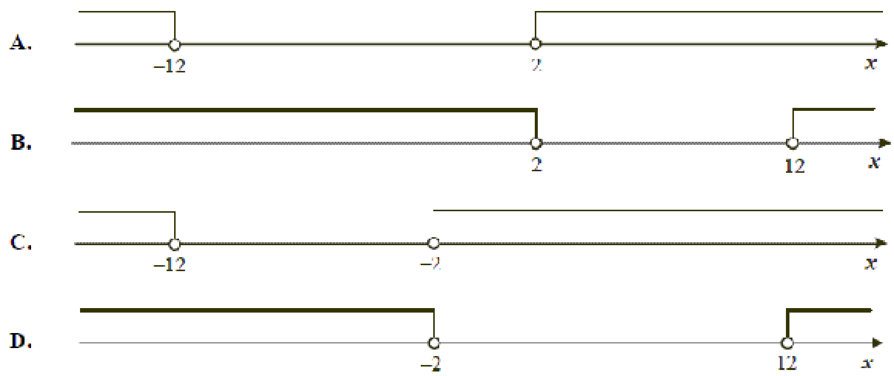
1. Wskaż nierówność, która opisuje sumę przedziałów zaznaczonych na osi liczbowej:[44]

a) $|x-2|>4$ b) $|x-2|<4$ c) $|x-4|<2$ d) $|x-4|>2$

2. Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3}=\frac{2}{3}$ jest liczba:

a) 21 b) 7 c) 17/3 d) 0

3. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$[45]



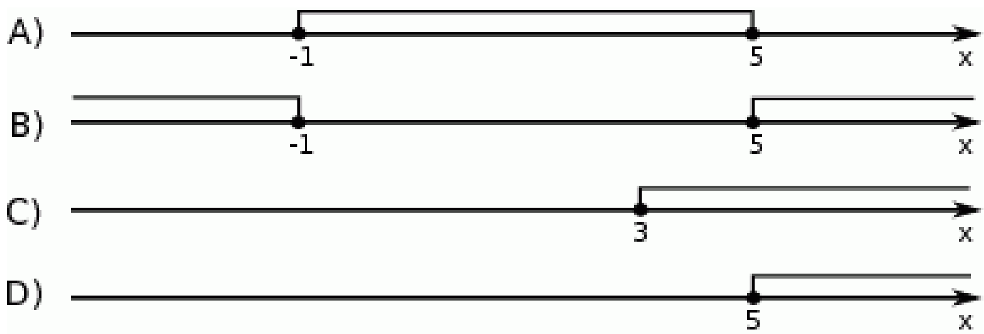
4. Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest:

a) 1 b) 7/3 c) 4/7 d) 7

5. Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3)<0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

6. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x-2|\geq 3$.[46]



7. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.[47]

a) $|x+1|>5$ b) $|x-1|<2$ c) $|x+\frac{2}{3}|\leq 3$ d) $|x-\frac{1}{3}|\geq 3$

8. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36=x(x+3)$ należy do przedziału:

a) $(3, 10)$ b) $(11, +\infty)$ c) $(-5, 9)$ d) $(-\infty, 5)$

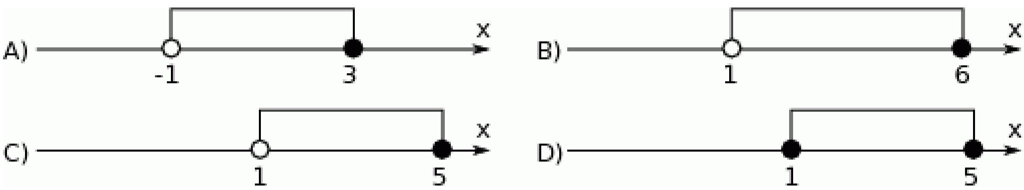
---

44 Zadania: 1, 2 zaczerpnięte z Próbna matura, CKE, listopad, 2010.
45 Zadania: 3, 4, 5 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010.
46 Arkusz maturalny, Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
47 Zadania: 7, 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011.

9. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}<\frac{5x}{12}$ jest:

a) 1 b) 2 c) –1 d) – 2

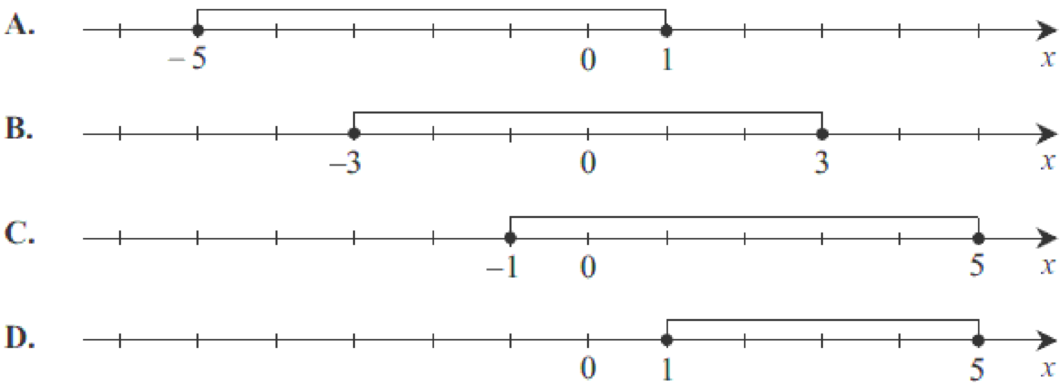
10. Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\leq 0$ i $x>1$.



11. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1|=4x$.[48]

a) $x=-1$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=-2$

12. Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\leq 3$:[49]



13. **Rozwiązaniem równania $\frac{x-6}{2x-4}=\frac{2}{3}$ jest:**

a) 8 b) 10 c) $\frac{1}{2}$ d) –10

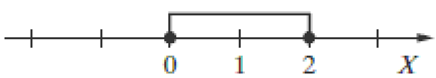
14. Największa liczba naturalna n spełniająca nierówność $n<2\pi-1$ to:[50]

a) 3 b) 5 c) 6 d) 0

15. Rozwiązaniem równania $-2=\frac{x-1}{x+2}$ jest liczba:

a) –1 b) 1 c) 0 d) $\frac{5}{3}$

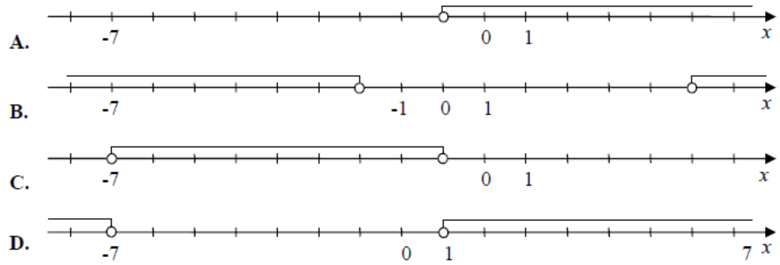
16. Przedział zaznaczony na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



a) $|x+1|\leq 1$ b) $|x+1|\geq 2$ c) $|x-1|\geq 1$ d) $|x-1|\leq 1$

48 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2012.
49 Zadania: 12, 13 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2010.
50 Zadania: 14, 15, 16 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011.

17. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+3|>4$ jest przedstawiony na rysunku:[51]



18. Rozwiązaniem równania $3(2-3x)=x-4$ jest:[52]

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=3$ d) $x=4$

19. Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tą zależność jest:

a) $0{,}15\cdot x=230$ b) $0{,}85\cdot x=230$

c) $x+0{,}15\cdot x=230$ d) $x-0{,}15\cdot x=230$

20. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $2x+1=2-\sqrt{3}x$ i rozstrzygnij, czy rozwiązanie jest liczbą wymierną?[53]

21. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójata. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

22. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x}=-\frac{1}{2}$[54]

23. **(4pkt)** Uzasadnij, że $\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{2}^{40}\cdot(3{,}1)^{22}}{6^2}<\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{22}$.

24. **(2 pkt)** Oblicz, dla jakich wartości parametru a wartość wyrażenia $|3a-1|$ nie jest większa od 3.

25. **(2 pkt)** Trzej wspólnicy postanowili podzielić zysk w wysokości 6500 zł w stosunku $1:4:8$. Jakie kwoty dostaną ci wspólnicy?

26. **(2 pkt)** Sprowadź wyrażenie $|x-1|+|x|-|-x+1|$ do najprostszej postaci, gdy $x\in(0,1)$[55].

27. **(2 pkt)** Za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu. Ile lat ma Julka?

---

51 Arkusz maturalny z matematyki, OKE, Poznań, 2013.
52 Zadania 18, 19 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, sierpień, 2011.
53 Zadania 20, 21 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
54 Zadania 22, 23, 24, 25 zaczerpnięte z informatora CKE, 2007.
55 Zadania 26, 27 zaczerpnięte z próbnej matury z Operonem, listopad, 2009.

4 Funkcja liniowa

To już potrafię:

- Zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- Odczytać współrzędne danych punktów;
- Odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- Odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- Obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

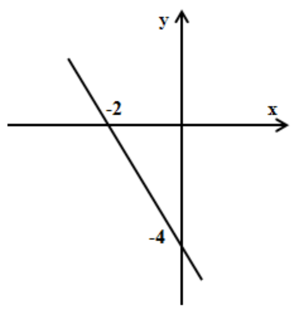
Zad.1 Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje wartości ujemne dla argumentów:

a) $x < -4$

b) $x < -2$

c) $x > -2$

d) $x < -3$



Zad.2 Na odcinku trasy długości 120 km samochód jechał z prędkością y km/h. Wzór funkcji określającej zależność czasu od prędkości to:

a) $y = 120x$ b) $y = \frac{120}{x}$ c) $\frac{x}{y} = 120,\ y \neq 0$ d) $\frac{y}{x} = 120,\ x \neq 0$

Zad.3 Które przyporządkowanie nie jest funkcją:

a) Każdemu nauczycielowi przyporządkujemy ucznia, którego uczy.

b) Każdemu wielokątowi przyporządkujemy liczbę jego boków.

c) Każdej figurze geometrycznej przyporządkowana jest jej nazwa.

d) Każdej liczbie całkowitej jest przypisana liczba do niej przeciwna.

Zad.4. Miejscem zerowym funkcji $y = -6x + 3$ jest:

a) Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) Punkt $(0,3)$ d) $x = 3$

Zad.5 Wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x(2 - x)$ dla argumentu $x = 4$ wynosi:

a) -16 b) 16 c) 8 d) 0

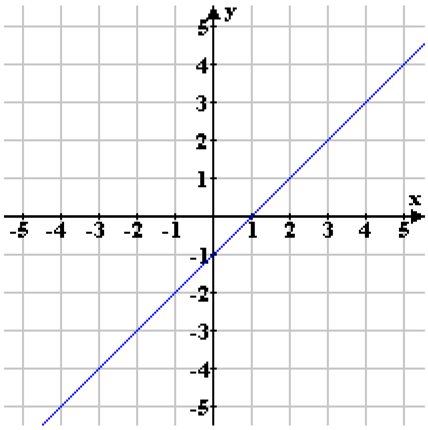
Zad.6 Które zdanie dotyczące funkcji jest $y = 2x - 4, x \in R$ prawdziwe:

a) Funkcja jest malejąca

b) Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(2, 4)$

c) Miejscem zerowym tej funkcji jest 2

d) Funkcja jest stała



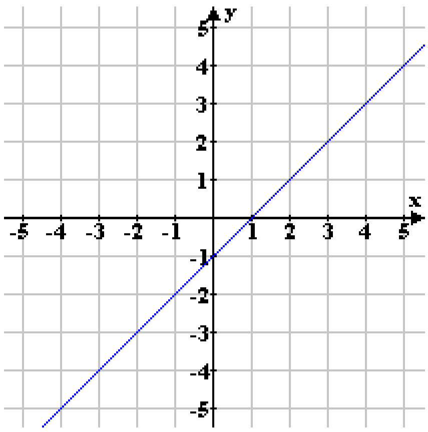
Zad.7. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej. Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?

a) 4

b) 2

c) -4

d) 2



Zad.8 $y = 5$ jest to funkcja:

a) Rosnąca   b) Stała   c) Malejąca   d) Nie jest to funkcja

Zad.9 Do wykresu funkcji $y = ax, x \in R$, należy punkt $A = (-2{,}5)$. Wzór tej funkcji to:

a) $y = 5x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2\frac{1}{2}x$ d) $y = -2{,}5x$

Zad.10. Funkcja określona jest następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkujemy sumę jej cyfr. Dziedziną tej funkcji jest:

a) Zbiór wszystkich liczb naturalnych

b) Zbiór liczb naturalnych większych od 9, a mniejszych od 100

c) Zbiór liczb wymiernych większych od 9, a mniejszych od 100

d) Zbiór liczb całkowitych

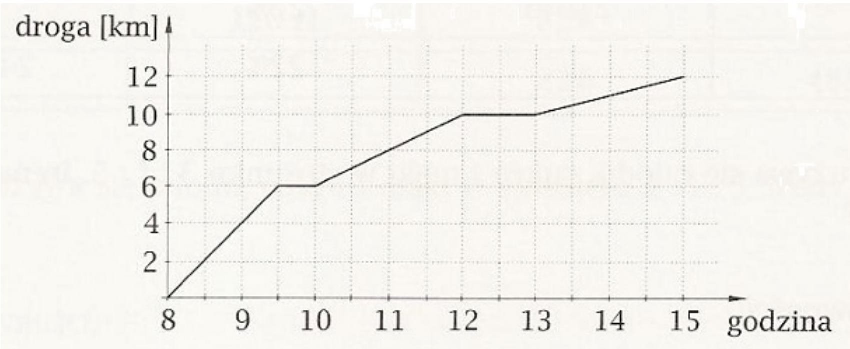
Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	A	C	B	B	D	B

ZADANIA OTWARTE

Zad.1 Trzech pracowników może oczyścić basen w ciągu 5 godzin. Napisz wzór funkcji określającej zależność liczby pracowników (y) od liczby godzin pracy (x). Podaj współczynnik proporcjonalności tej funkcji.

Zad.2 Wykres przedstawia odległość, jaką pokonała Małgosia w zależności od czasu.



Na podstawie wykresu uzupełnij poniższy tekst:

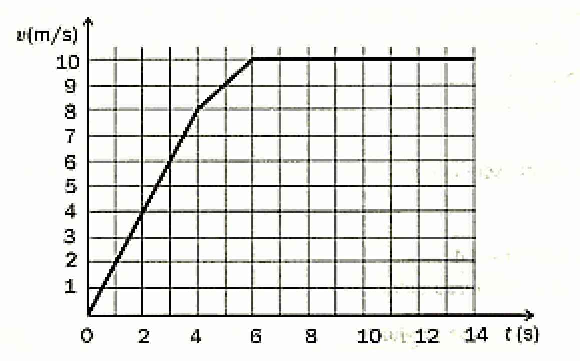
Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła ....

Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie ....

Pierwsze 8 km pokonała w czasie ....

Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością ....

Zad.3 Wykres przedstawia zależność szybkości od czasu w pewnym ruchu.



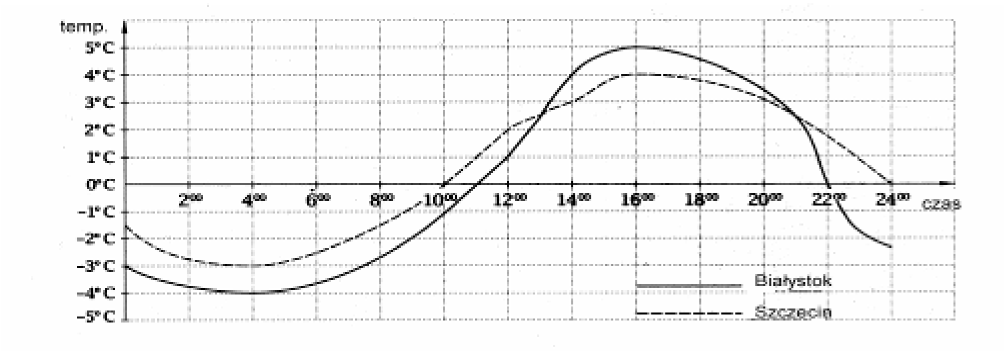
Odpowiedz na pytania:

a) Kiedy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a kiedy jednostajnym?

b) Jaką drogę przebyło ciało między 6 a 8 sekundą ruchu?

c) Jaka była maksymalna szybkość tego ciała?

Zad.4 Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Białymstoku i Szczecinie.



a) Jaką temperaturę pokazywał termometr w obu miastach o 12^{00}?

b) O której godzinie temperatura w tych miastach wynosiła 0°C?

c) W jakich godzinach temperatura w Białymstoku była ujemna?

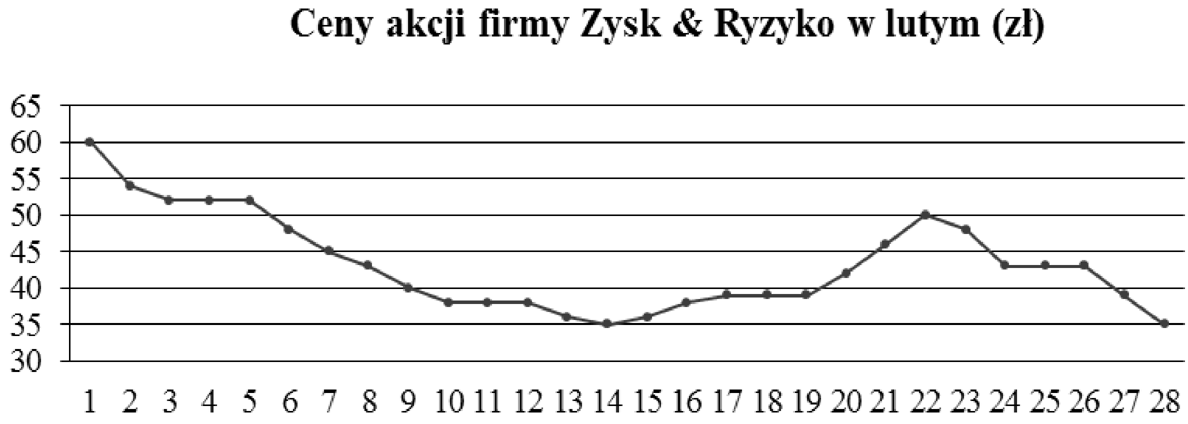
d) O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?

e) W jakich godzinach w Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie?

f) Jaka była najwyższa temperatura w Białymstoku, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?

g) Jaka temperatura była w Białymstoku, gdy w Szczecinie były 3°C?

Zad.5 Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.



a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Odpowiedzi:

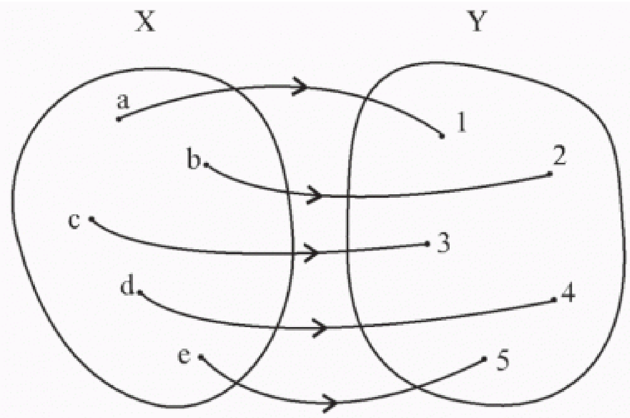
Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$y = \frac{15}{x}, x \in R_+, a = 15$
2	Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła 4 km Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie 9^{30} Pierwsze 8 km pokonała w czasie 3 godzin Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością 1 km/h.
3	a) Ciało poruszało się ruchem przyspieszonym w pierwszych czterech sekundach ruchu oraz od czwartej do szóstej sekundy ruchu – z innym przyspieszeniem. Z ruchem jednostajnym mamy do czynienia od szóstej do czternastej sekundy ruchu. b) $s = 10\frac{m}{s} \cdot 2s = 20m$ c) Maksymalna szybkość, którą osiągnęło to ciało, wynosi $10\frac{m}{s}$
4	O godzinie 12^{00} w Szczecinie były 2°C, a w Białymstoku 1°C. 0°C w Białymstoku było o godzinie 11^{00}, a w Szczecinie o 10^{00}. W Białymstoku ujemna temperatura była w godzinach 0^{00} – 11^{00}. Temperatura w obu miastach była taka sama o godzinie 13^{00} i 21^{00}. W Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie w godzinach 13^{00} – 21^{00}. Najwyższa temperatura w Białymstoku wynosiła 5°C (godz. 16^{00}), a w Szczecinie 4°C (również o godz. 16^{00}). Gdy w Szczecinie były 3°C, to w Białymstoku były 4°C.
5	Wartość akcja spadła w lutym o 25 zł. Kupując i sprzedając akcje w ciągu lutego można było na nich zarobić. Aby zysk był możliwie największy (15 zł za akcję), należało kupić akcje 14 lutego, a sprzedać 22 lutego. Poniedziałki były: 5, 12, 19, 26 lutego.

4.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji.

Teraz nauczę się:

- Rozpoznać i podać przykłady funkcji,
- Posługiwać się pojęciami: dziedzina, argumenty, wartość funkcji,
- Określać funkcję za pomocą grafu, tabeli, wykresu, opisu słownego.

Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory i pewne przyporządkowanie.



WAŻNE!

Zauważ, że każdy punkt zbioru X jest początkiem **tylko jednej** strzałki.

Symbolicznie zapisujemy to jako f: X → Y

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji (D_f), a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**.

Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

Zmienną *x* nazywamy też **zmienną niezależną**, a *y* **zmienną zależną**.

$\boldsymbol{X = \{a, b, c, d, e\}}$ **– zbiór argumentów (dziedzina funkcji)**

$\boldsymbol{Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ **– zbiór wartości funkcji**

Bardzo ważne!

Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość (z jednego punktu grafu może wychodzić tylko jedna strzałka).

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h,...

Nasza funkcja f jest ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$ do zbioru {1, 2, 3, 4}.

Funkcja f liczbie a przyporządkowuje liczbę 2.

Zapisujemy to tak:

$f(a) = 2$ – czytamy: f od a równa się 2

Liczbie b funkcja f przyporządkowuje liczbę 1, piszemy:

$f(b) = 1$ – czytamy: f od b równa się 1

Liczbie c funkcja f przyporządkowuje liczbę 3, piszemy:

$f(c) = 3$ – czytamy: f od c równa się 3

Liczbie d funkcja f przyporządkowuje liczbę 4, co zapisujemy:

$f(d) = 4$ – czytamy: f od d równa się 4

lub dla argumentu d wartość funkcji wynosi 4.

Liczbie e funkcja f przyporządkowuje liczbę 5, piszemy:

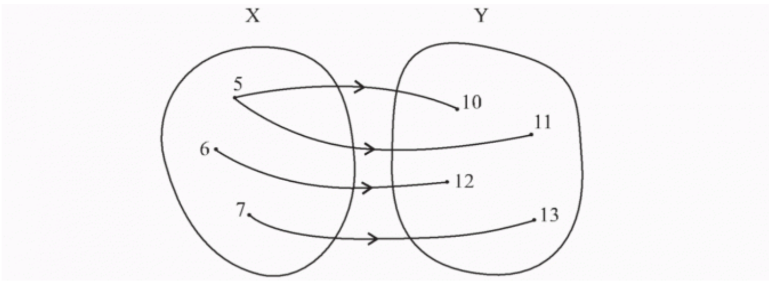
$f(e) = 5$ – czytamy: f od e równa się 5

lub: dla argumentu e wartość funkcji wynosi 5.

Uwaga!

Nie każde przyporządkowanie między dwoma zbiorami nazywa się funkcją.

Funkcją nazywamy tylko takie przyporządkowanie, według którego **każdemu elementowi z dziedziny** (ze zbioru X) przyporządkowany jest **dokładnie jeden element z przeciwdziedziny** (ze zbioru Y).



Rysunek 4-1 – Funkcja

Ten graf nie opisuje funkcji, bo liczbie 5 ze zbioru X przyporządkowane zostały dwie liczby: 10 i 11 ze zbioru Y. Zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi zbioru X ma być przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru Y.

Nie ma żadnych zastrzeżeń co do natury zbiorów X i Y. Mogą być to zupełnie dowolne zbiory.

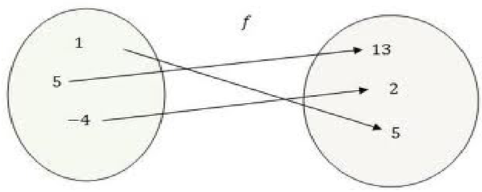
My jednak będziemy zajmować się tylko przypadkiem, gdy zbiory X i Y będą pewnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Innymi słowy, argumentami i wartościami funkcji będą... no właśnie... będą liczby.

Sposoby określania funkcji

Funkcje można określić za pomocą:

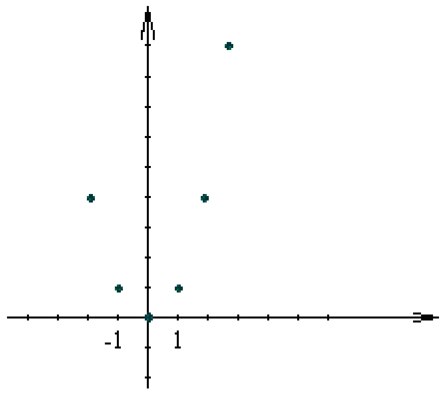
– grafu

Przykład 1



Rysunek 4-2 – Graf

– wykresu



Rysunek 4-3 – Wykres

Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

– wzoru

Przykład 2

$y = x^2$,   dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Używa się również zapisu $f(x) = x^2$, lub $f\colon x \to x^2$.

– tabelki

Przykład 3

x	-7	-5	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	5	7	6	5	3	-2

Rysunek 4-4 – Tabelka

– opisu słownego

Przykład 4

Mamy daną funkcję, określoną opisem słownym:

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

– zbioru par uporządkowanych

Przykład 5

{(–2,4), (–1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)}

Takie określenie funkcji jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Przykład 6

Funkcję ″Każdej liczbie ze zbioru $X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}$ przypisujemy liczbę o 2 od niej mniejszą″, przedstaw w postaci wzoru, tabeli i wykresu.

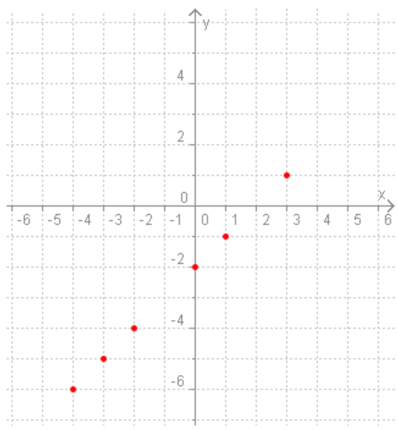
Wzór:

$y = x - 2$

Tabela:

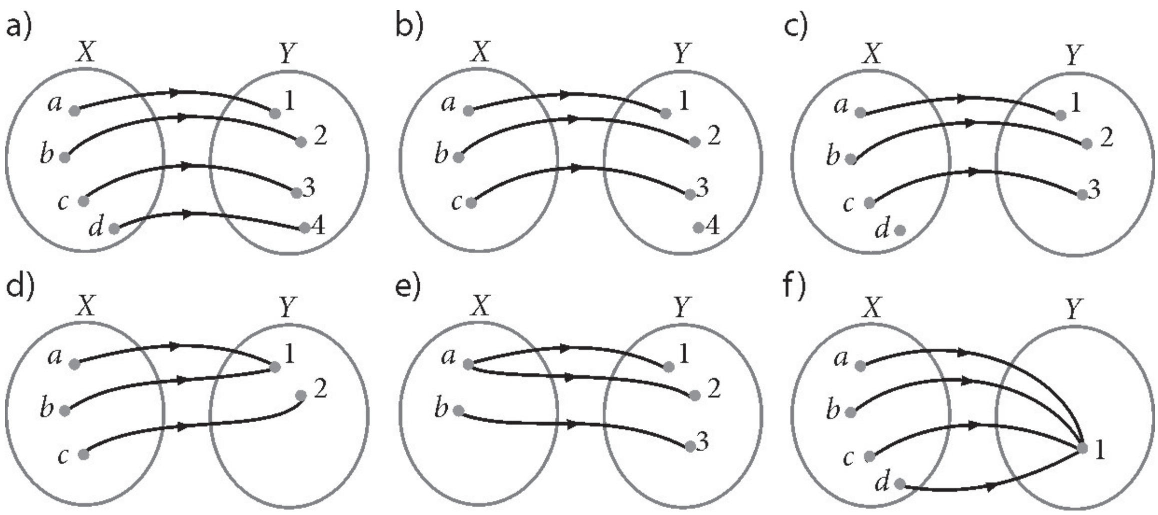
x	–4	–3	–2	0	1	3
y	–6	–5	–4	–2	–1	1

Wykres:



ZADANIA

4.1.1 Który z grafów określa funkcję:



Odpowiedź: a; b; d; f.

4.1.2 Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

b) Każdej liczbie różnej od 0 przyporządkowano odwrotność tej liczby.

c) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

f) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

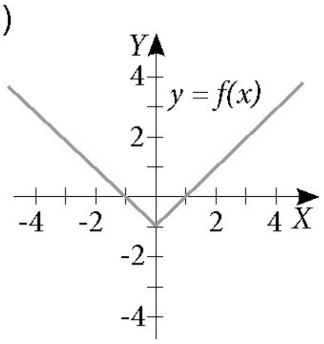
g) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

h) Każdej liczbie przyporządkowano kwadrat tej liczby.

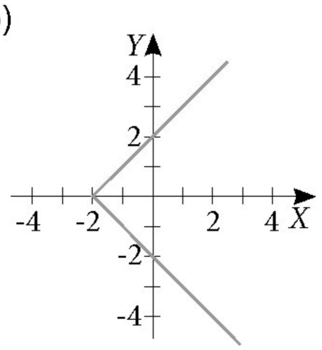
Odpowiedź: a; b; c; d; e; f; g; h – tak.

4.1.3 Podaj, które z wykresów przedstawiają funkcję. Odpowiedź uzasadnij.

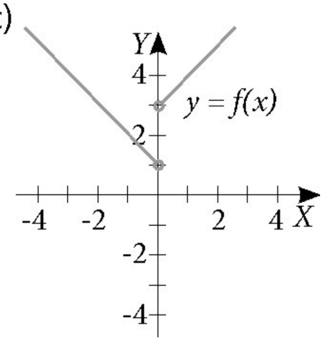
a)



b)



c)



Odpowiedź: a; c.

4.1.4 Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej dwukrotność tej liczby powiększoną o jeden. Opisane słowami przyporządkowanie opisz:

a) wzorem

b) tabelką dla argumentów −3,−2,−1,0,1,2,3

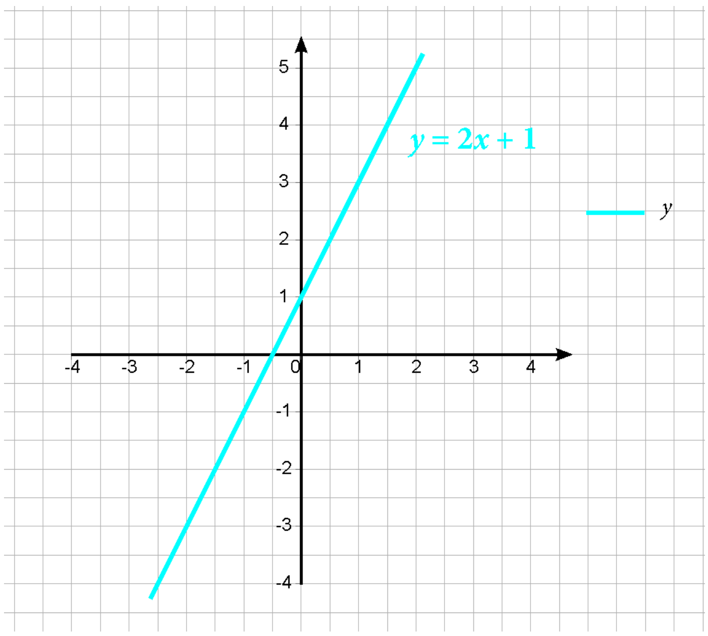
c) wykresem

Odpowiedź: a) $y = 2x + 1$.

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)



4.2 Własności funkcji

Teraz nauczę się:

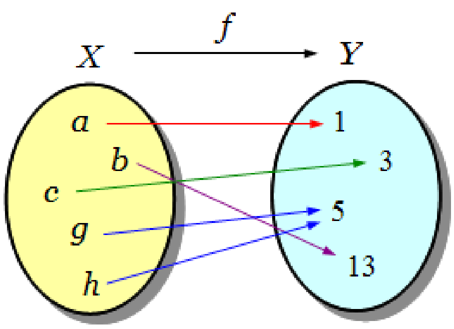
- Obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu,
- Posługiwać się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczania, dla jakiego argumentu przyjmuje daną wartość,
- Wyznaczać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą.

Przyporządkowanie, będące funkcją, możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

a) Dziedzina i wartość funkcji

Wiemy już z poprzedniego działu, że zbiór X, na którym określona jest funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji, a zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Przykład 1



Rysunek 4-5 – Dziedzina i przeciwdziedzina

$X = \{a, b, c, g\ h\}, Y\ = \{1, 3, 5, 13\}$

Zbiorem wartości funkcji $f: X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$

Przykład 2

Wyznacz dziedzinę funkcji podanej wzorem:

a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $x = 2$ w mianowniku wyrażenia będziemy mieli 0, a więc wyrażenie nie będzie miało sensu: $X = D_f = R / \{2\}$

Możemy zapisać dziedzinę inaczej: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Wskazówka:

Dziedziną funkcji danej wzorem jest zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określona.

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

Rozwiązanie:

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$X = D_f : x \in \langle 2, +\infty)$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$

Rozwiązanie:

$x + 4 \rangle 0$

$x \rangle -4$

$X = D_f : (-4, +\infty)$

ZADANIA

4.2.1 Dana jest funkcja

a) $f(x) = 3x + 4$ b) $f(x) = 2x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Oblicz:

$f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x-1)$, $f(x^2)$

Odpowiedź:

a) $f(0) = 4$, $f(1) = 7$, $f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x} + 4$, $f(x-1) = 3x + 1$, $f(x^2) = 3x^2 + 4$

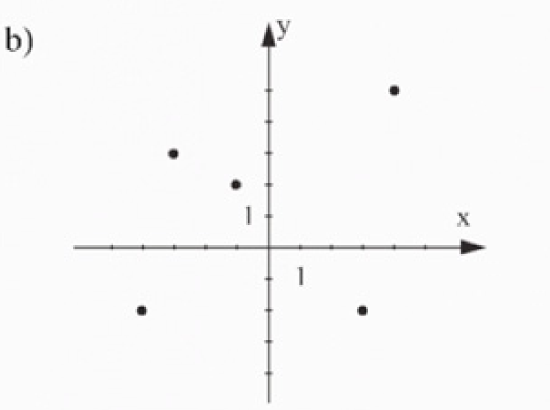
b) $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(\sqrt{2})=7$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^2}+1$, $f(x-1)=2x^2-4x+3$, $f(x^2)=2x^4+1$

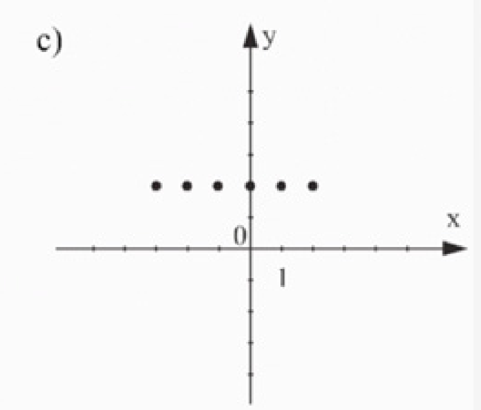
c) $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$, $f(x-1)=\frac{x-1}{x}$, $f(x^2)=\frac{x^2}{x^2+1}$

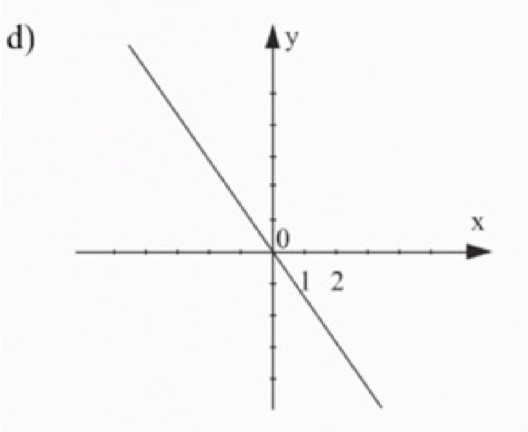
4.2.2 Dla każdej z tych funkcji odczytaj dziedzinę i zbiór wartości:

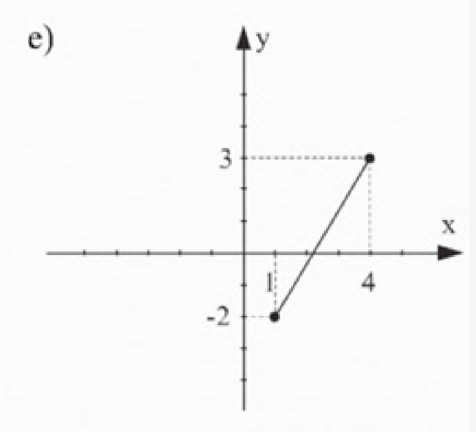
a)

x	-2	-1	0	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
y	4	3	5	0	$-2\frac{1}{2}$



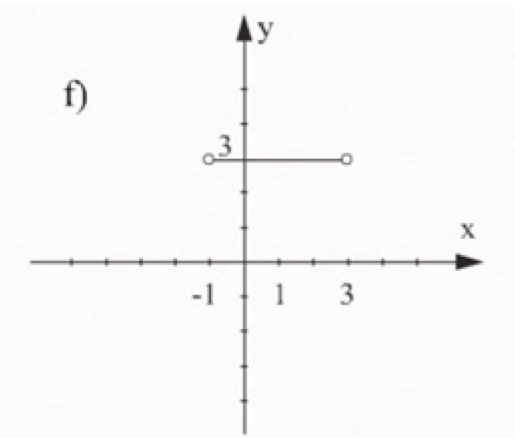






Odpowiedź:

a) $D_f = \{-2, -1. 0, 1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{3}\}$ $Y = \{-2\frac{1}{2}, 0, 3,4,5\}$; b) $D_f = \{-4,-3,-1,3,4\}$ $Y = \{-2,2,3,\%\}$;
c) $D_f = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ $Y = \{2\}$; d) $D_f = R$ $Y = R$; e) $D_f: x \in \langle 1,4 \rangle$ $Y \in \langle -2,3 \rangle$; f) $D_f: x \in (-1,3)$ $Y = \{3\}$.



4.2.3 Funkcja określona jest tabelką:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	–3	3	–1	–2	5	2

a) podaj zbiór argumentów i zbiór wartości funkcji

b) wymień wszystkie ujemne argumenty tej funkcji

c) odczytaj wartość dla argumentu $x = 0$ oraz argumentu $x = 3$

d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2

e) czy punkt (–1,–3) należy do wykresu funkcji

f) narysuj wykres tej funkcji

Odpowiedź:

a) $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ $Y = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 5\}$

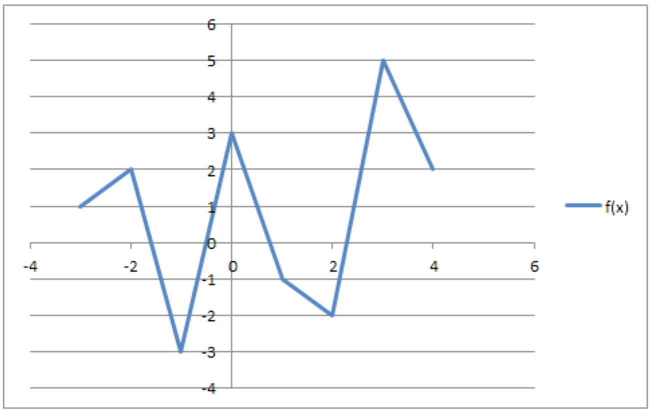
b) $-3, -2, -1$

c) $f(0) = 3, f(3) = 5$

d) $x = 4, x = -2$

e) tak

f)



4.2.4 Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-3)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 10x + 25}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x+1}$

h) $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{x}{x+4} - \dfrac{1}{x-1}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+3}$

j) $f(x) = -3x^2 + 7x - 8$

k) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-4}{x+2}$

m) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9} + \dfrac{4}{x^2}$

n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2}}$

o) $f(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{2-x}} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+4}}$

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2 - 16}$

Odpowiedź:

a) R; b) R/ {–1, 3}; c) R/ {–3, 3}; d) R; e) R; f) $x \in (-\infty, 4)$; g) $x \in < 1, +\infty)$;
h) $x \in < -3, 1) \cup (1, +\infty)$; i) R\ {–3, 1}; j) R; k) R; l) R\ {–2,0}; m) R\ {–3,0,3};
n) $X \in (2, +\infty)$; o) $x \in (-4,2)$; p) $x \in (4,+\infty)$.

Miejsca zerowe

Argument x, dla którego $f(x) = 0$ nazywamy **miejscem zerowym** funkcji f.

Przykład 3

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{2 - x^2}{\sqrt{x - 1}}$ c) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$

Rozwiązania:

a)

$D_f = R$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$

$x - 1 = 0$ lub $x + 1 = 0$

zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji f to $x = 1$ oraz $x = -1$.

b) $D_f = (1, +\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0$

$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$

$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in D_f \qquad -\sqrt{2} \notin D_f$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2}$.

c)

$D_f : x \in R / \{4\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$

$x = -2 \in D_f$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji jest $x = -2$.

Przykład 4

Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe, dziedzinę i przeciwdziedzinę.

Dziedzina:

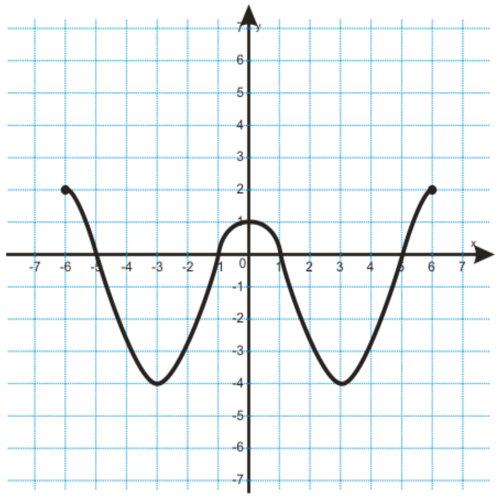
$D_f = \langle -6; 6 \rangle$

Zbiór wartości:

$Z_w = \langle -4; 2 \rangle$

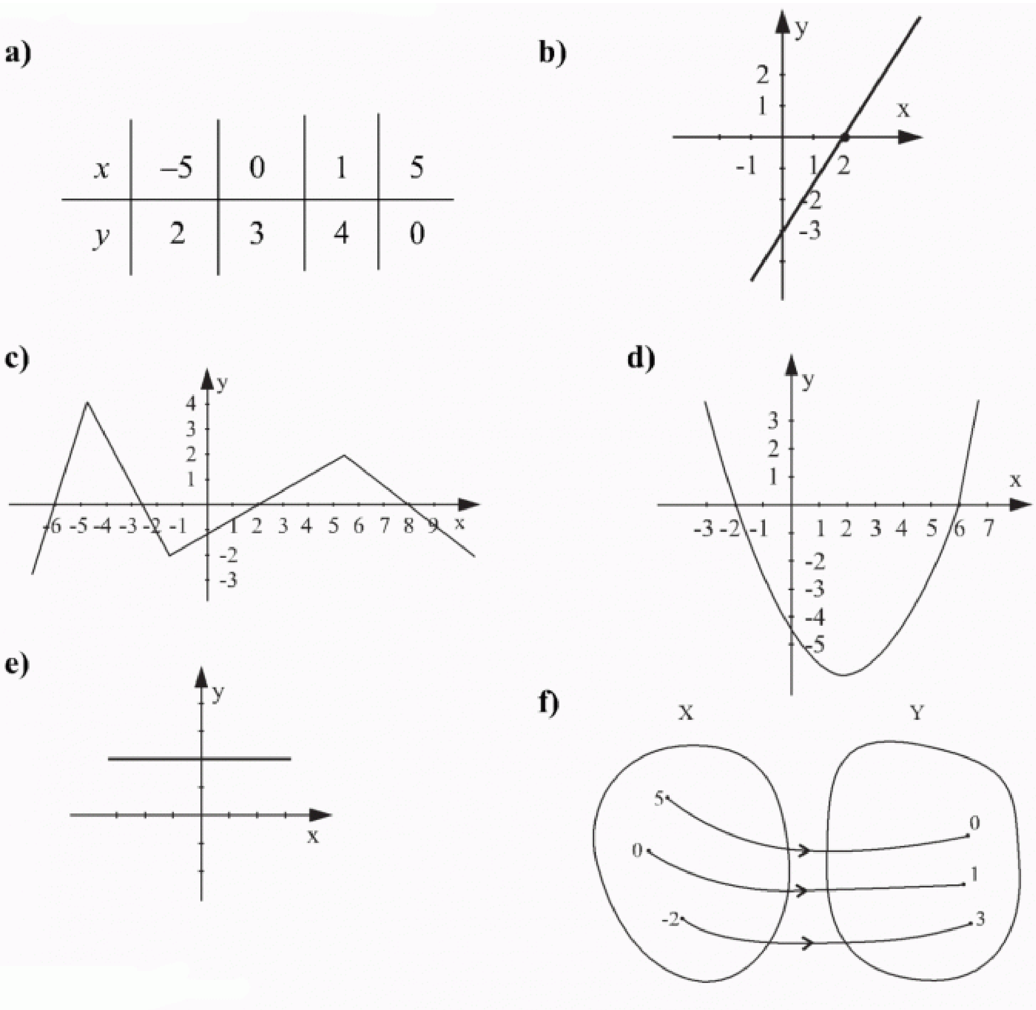
Miejsca zerowe:

$x = -5, x = -1, x = 1, x = 5$



ZADANIA

4.2.5 Wypisz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:



x	–5	0	1	5
y	2	3	4	0

Odpowiedź: a) $x = 5$; b) $x = 2$; c) –6; –2,5; 2; 8; d) 2,6; e) brak miejsc zerowych; f) $x = 5$.

4.2.6 Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji *f*.

a) $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{x-3}{x-3}$ d) $f(x)=\frac{1+2x}{4x-2}$

e) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ f) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ g) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ h) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

i) $f(x)=\sqrt{x+9}$ j) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ k) $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$ l) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$

m) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+9}$

Odpowiedź:

a) df R/–2; $x=2$, b) df R/2; $x=-2$, c) df R/3; brak miejsc zerowych, d) df R oprócz 1/2; $x=-1/2$, e) df (2,+∞); brak miejsc zerowych, f) df (–2; +∞) $x=0$, g) df R/{–3,3}; brak miejsc zerowch, h) df R/{–2,2}, brak miejsc zerowych, i) df <–9,+∞) ; f(–9) = 0, j) df <0,3) suma (3,+∞); f(0) = 0, k) df <3,+∞); f(3) = 0, l) df (–3,+∞); f(0) = 0, m) df = R; f(–1) = 0.

4.3 Monotoniczność funkcji

Monotoniczność jest to pewna cecha funkcji, która mówi nam, co się dzieje z wartościami funkcji podczas zwiększania wartości liczbowych argumentów funkcji. I tak, wyróżniamy z tego względu funkcje:

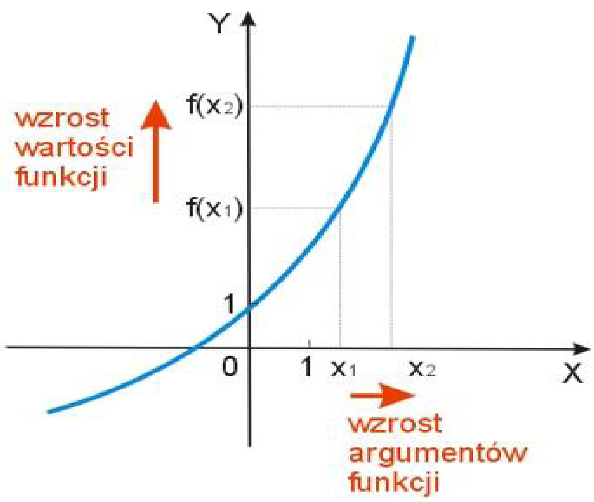
- rosnące
- malejące
- nierosnące
- niemalejące

Warto tu jeszcze wspomnieć o funkcji stałej, choć nie mówimy o niej jak o funkcji monotonicznej.

Funkcja rosnąca

Funkcja *f* jest **rosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

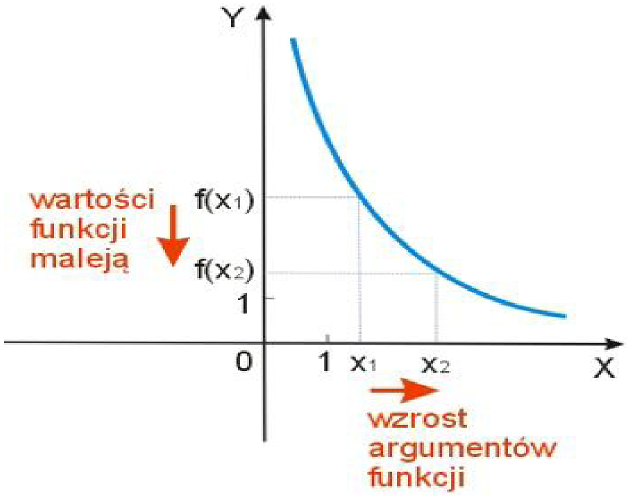


Cechą charakterystyczną wykresu funkcji rosnącej jest to, że zdaje się wznosić ku górze.

Funkcja malejąca

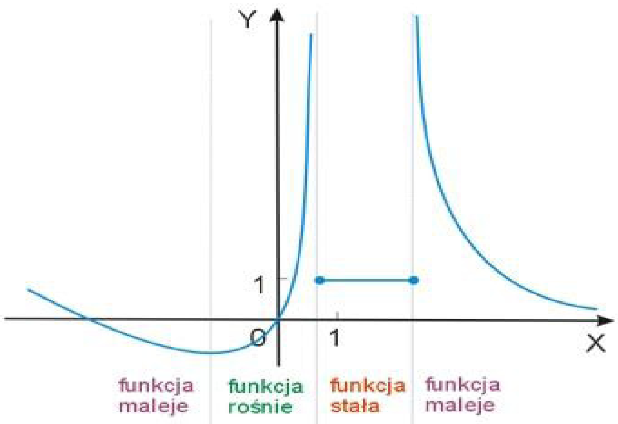
Funkcja f jest **malejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Cechą charakterystyczną wykresu funkcji malejącej jest to, że zdaje się opadać w dół.

Czy funkcja może być jednocześnie malejąca i rosnąca w różnych przedziałach liczbowych? Oczywiście, że tak. Poniżej przykład takiej funkcji wraz z określonymi przedziałami, w których funkcja rośnie i maleje oraz jest stała.



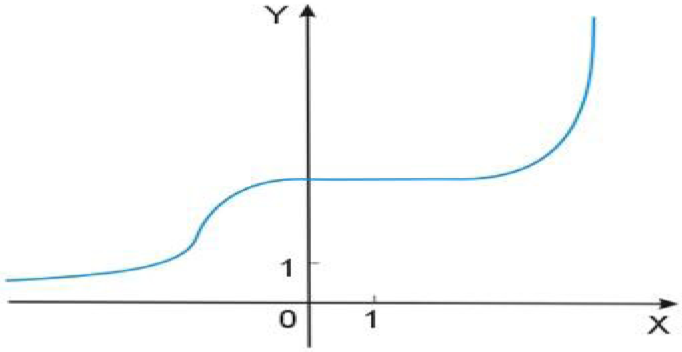
Funkcja niemalejąca

Funkcja f jest **niemalejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Zatem definicja funkcji niemalejącej przypomina definicję funkcji rosnącej, z tym że w przypadku funkcji niemalejącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała.

Oto ilustracja funkcji niemalejącej.

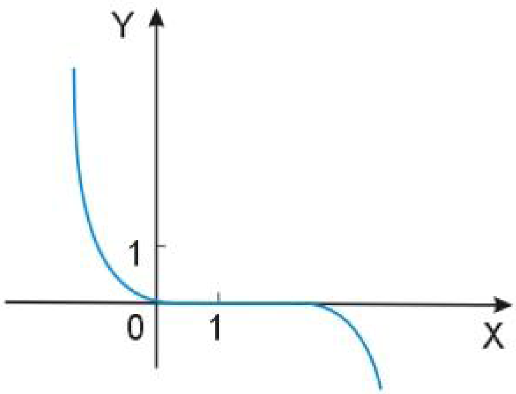


Funkcja nierosnąca

Funkcja f jest **nierosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

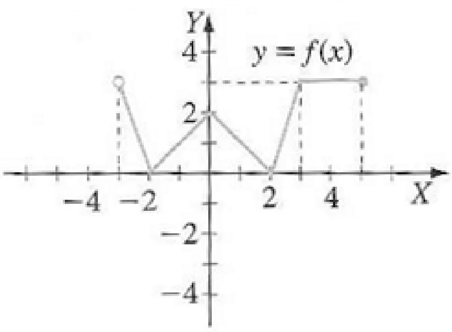
Zatem definicja funkcji nierosnącej przypomina definicję funkcji malejącej, z tym że w przypadku funkcji nierosnącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała. Oto ilustracja funkcji nierosnącej.

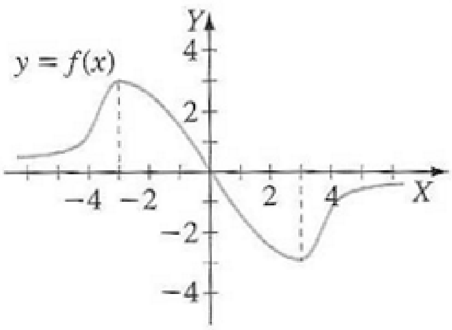


Uwaga: Symbole $<$, $>$ oznaczają tak zwane **nierówności mocne** (ostre), symbole $\leq, \geq$ oznaczają tak zwane **nierówności słabe** (nieostre).

ZADANIE

4.3.1 Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca i stała.





Odpowiedź:

a) rosnąca $x \in (-2;0) \cup (2;3)$, malejąca $x \in (-3;-2) \cup (0;2)$, stała $x \in (3;4)$

b) rosnąca $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$, malejąca $x \in (-3;3)$

4.4 Sporządzanie wykresów funkcji

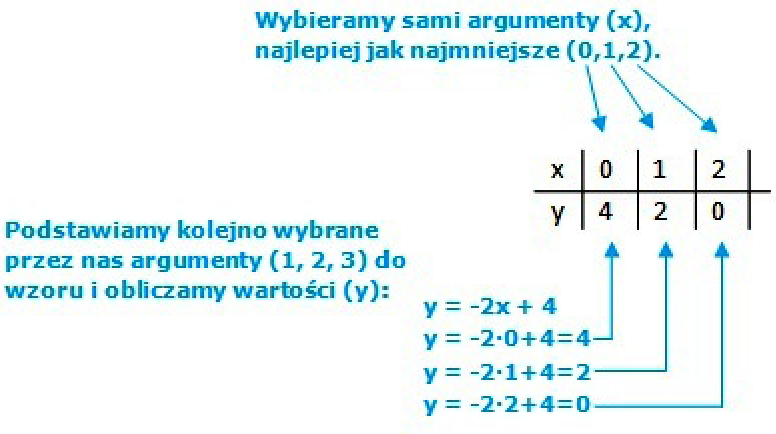
Teraz nauczę się:

- Szkicować wykres funkcji za pomocą wzoru lub tabeli,
- Odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

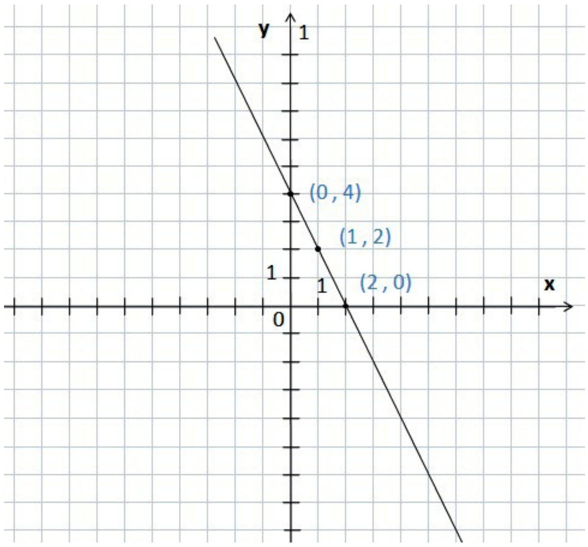
Aby narysować wykres funkcji, należy wykonać dwie następujące po sobie czynności. Powstawanie wykresu funkcji $y = -2x + 4$ przedstawimy na przykładzie:

I. Za pomocą wzoru określamy kilka punktów należących do funkcji (minimum 3). W tym celu wybieramy wartości x, podstawiamy je do wzoru i obliczamy wartości y. Wartości x i y pomocniczo możemy zapisywać w tabeli:

x			
y			



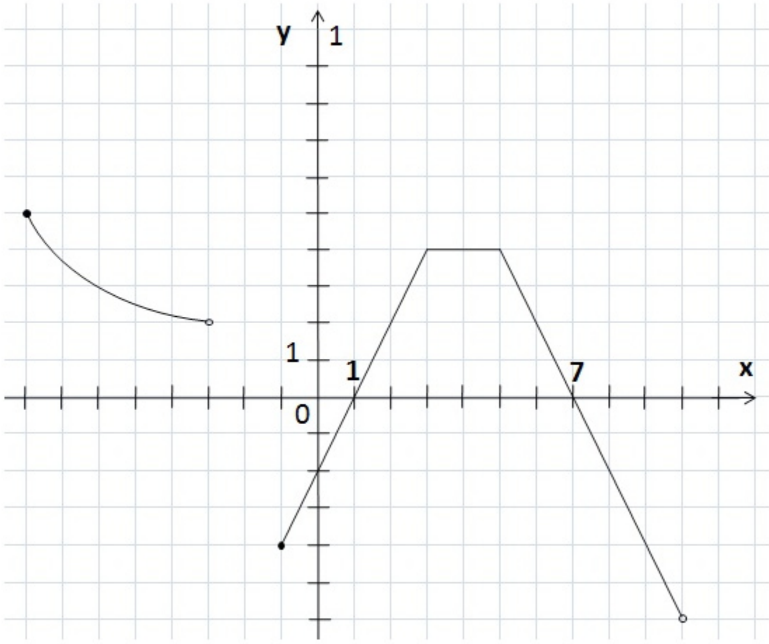
Otrzymujemy więc punkty: (0,4), (1,2), (2,0).



II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je prostą.

Przykład 1

Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:



Uwaga: *Minimalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{min}$ *lub* y_{min}. *Maksymalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{max}$ *lub* y_{max}. *Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości, wypada podać argument (x) lub przedział argumentów dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.*

Odpowiedzi:

a) Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0X):

Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu to dwa przedziały, zgodne z zakresami liczb, widocznymi na powyższym rysunku: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$\boldsymbol{D = \langle -8;\ -3) \cup \langle -1;\ 10)}$

b) Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0Y):

Zbiór wartości to jeden przedział. Powyżej widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$\boldsymbol{Z_w = \langle -6;\ 5\rangle}$

c) Monotoniczność

Funkcja malejąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam, gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy –8), nawias jest trójkątny, tam, gdzie jest pusta (–3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam, gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$\boldsymbol{f(x)} \searrow$ w przedziałach $\boldsymbol{\langle -8;\ -3) \cup \langle 5;\ 10)}$

Funkcja rosnąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca. Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3, nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt, w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)} \nearrow$ w przedziale $\boldsymbol{\langle -1;\ 3\rangle}$

Funkcja stała

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)}_{\rightarrow}$ w przedziale $\boldsymbol{\langle 3, 5\rangle}$

d) Miejsce zerowe:

$\boldsymbol{x_1 = 1 \vee x_2 = 7}$

e) Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

Punkty przecięcia z osią $0X$: $(1{,}0);\ (7{,}0)$

Punkt przecięcia z osią $0Y$: $(0, -2)$

f) Argumnety, dla których funkcja jest dodatnia/ujemna.

Przy liczbie –8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie –3, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów, leżących na osi OX.

$\boldsymbol{f(x)} > 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\langle -8;\ -3) \cup (1; 7)}$

Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX. Przy liczbie 10, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta.

$\boldsymbol{f(x)} < 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\langle -1;\ 1) \cup (7; 10)}$

g) Argumnety, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Dla wartości –5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.

$f(x) = -5$ dla $x = 8,5$

Dla wartości –2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 7. Rozwiąanie jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$f(x) = -2$ dla $x \in \{0,7\}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argumenty –7 i 3. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i dwuelementowego zbioru.

$f(x) = 4$ dla $x \in \langle 3, 5 \rangle \cup \{-7, 3\}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$f(x) = 6$ Brak argumentów

h) Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2, 4), B = (6, 2)$

Punkt A nie należy do wykresu funkcji.

Punkt B należy do wykresu funkcji.

i) Maksimum i minimum

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka.

Minimum funkcji: brak

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego –8.

Maksimum funkcji $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

ZADANIA

4.4.1 Uzupełnij tabelkę funkcji $f: R \to R$ i narysuj jej wykres. Zadanie wykonaj również w arkuszu kalkulacyjnym.

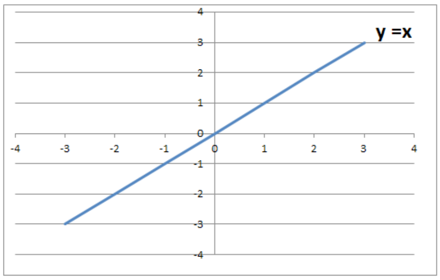
x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...								...

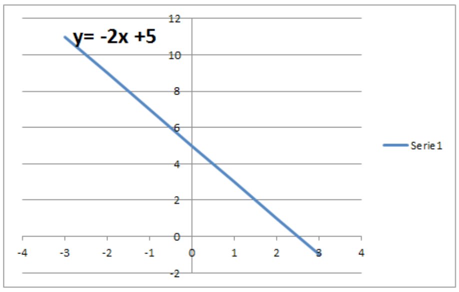
a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{2}x + 1$ c) $y = -2x + 5$ d) $y = 3x + 5$

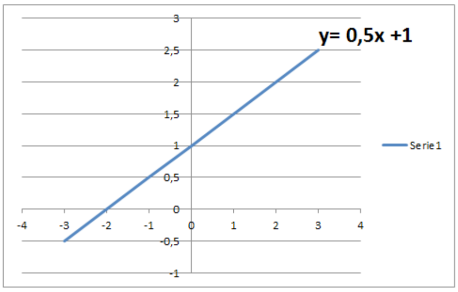
e) $y = -x + 3$ f) $y = \frac{3}{4}x - 2$ g) $y = |x|$ h) $y = |x + 2|$

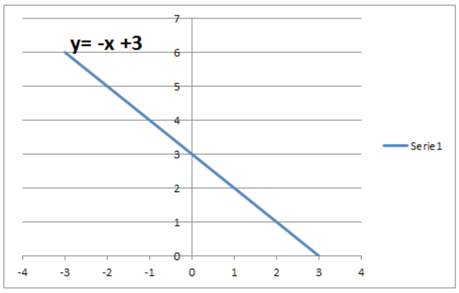
i) $y = |x| - 1$ j) $y = \frac{1}{2}|x|$ k) $y = 3|x|$

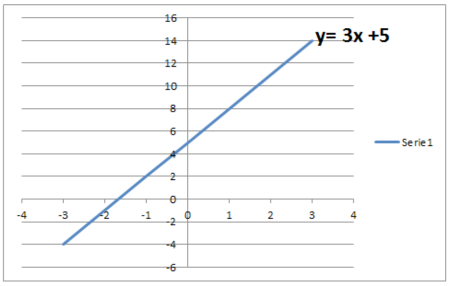
Odpowiedź:

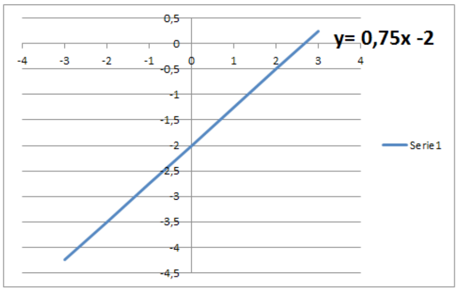

y =x

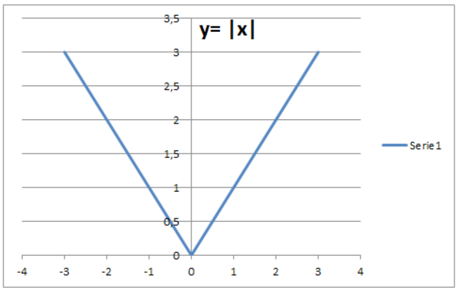

y= -2x +5
Serie1

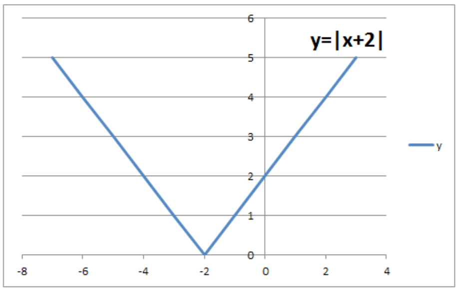

y= 0,5x +1
Serie1

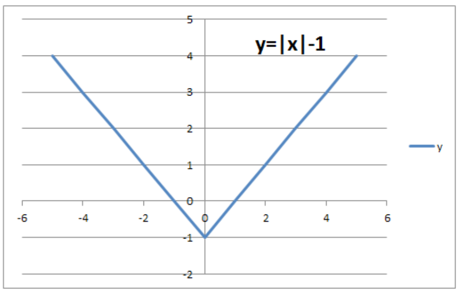

y= -x +3
Serie1

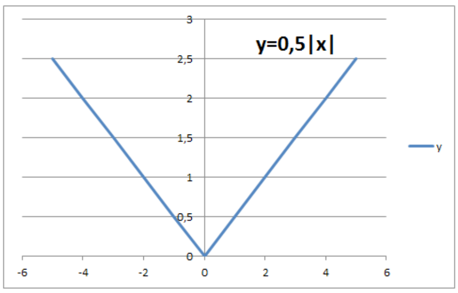

y= 3x +5
Serie1


y= 0,75x -2
Serie1


y= |x|
Serie1

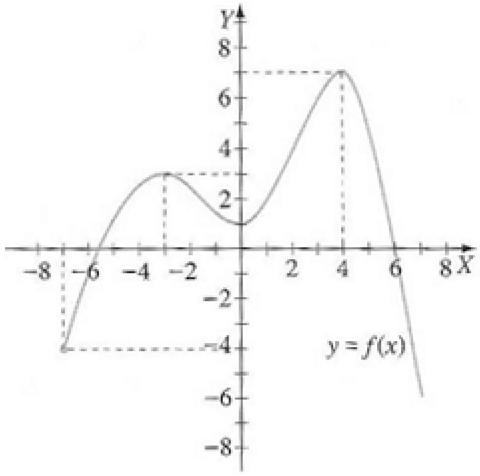

y=|x+2|
y


y=|x|-1
y

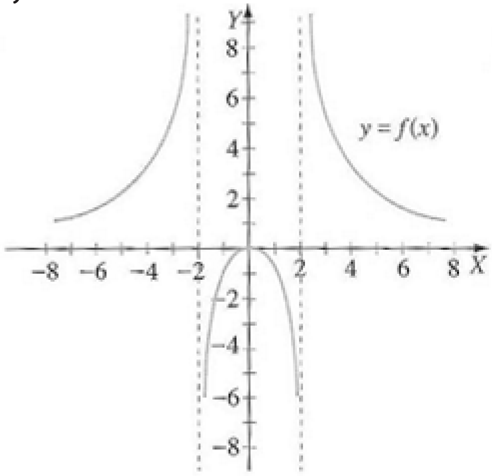

y=0,5|x|
y

4.4.2 Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$, określ:

Wykres I



Wykres II



a) dziedzinę funkcji,

b) zbiór wartości funkcji,

c) miejsca zerowe funkcji,

d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,

e) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała,

f) wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją).

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-7; +\infty)$

b) $y \in (-\infty; 7)$

c) $x = -5{,}5$; $x = 6$

d) $y > 0$ dla $x \in (-5{,}5; 6)$
$y < 0$ dla $x \in (-\infty; -5{,}5) \cup (6; +\infty)$

e) f rosnąca dla $x \in <-7; 4>$
f malejąca dla $x \in <4; +\infty)$

f) $y_{max} = 7$ dla $x = 4$
y_{min} nie istnieje

Wykres II

a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$

b) $y \in (-\infty;+\infty)$

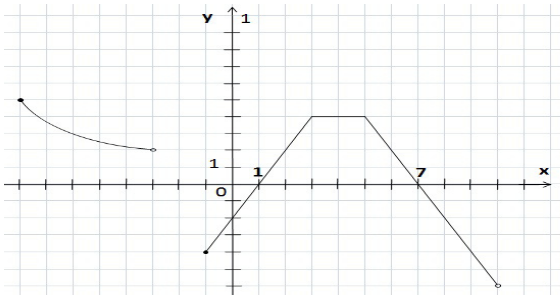
c) $x = 0$

d) $y > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2;+\infty)$
$y < 0$ dla $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

e) f rosnąca dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;0)$
f malejąca dla $x \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$

f) y_{max} nie istnieje
y_{min} nie istnieje

4.4.3 Określ własności funkcji przedstawionej na rysunku:



a) Dziedzina funkcji.

b) Zbiór wartości.

c) Przedziały monotoniczności.

d) Miejsce zerowe.

e) Punkty przecięcia z osiami.

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$.

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$.

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość:
$f(x) = 5, f(x) = -2, f(x) = 4, f(x) = 6$.

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\leftarrow 2$; $f(x) \leq -2$.

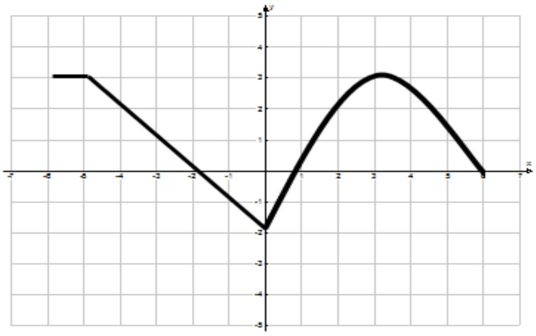
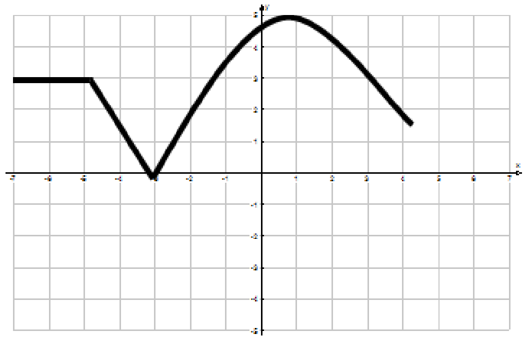
j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–2, 4), B = (6, 2) należą do wykresu funkcji f.

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji.

Odpowiedź:

a) $x \in <-8; -3) \cup <-1; 10)$, b) $y \in (-6; 5>$,
c) f rosnąca dla $x \in <-1; 3>$, f malejąca dla $x \in <-8; -3) \cup <5; 10)$, f stała dla $x \in <3; 5>$,
d) $x = 1, x = 7$, e) $x = 0$ $y = -2$; $y = 0$ $x = 1$ i $x = 7$, f) funkcja jest dodatnia dla $x \in <-8; -3) \cup (1; 7)$,
g) funkcja jest ujemna dla $x \in <-1; 1) \cup (7; 10)$,
h) $f(x) = 5$ dla $x = -8$, $f(x) = -2$ dla $x = 0$, $f(x) = 4$ dla $x \in <3;5>$, $f(x) = 6$ nie ma takich x,
i) $f(x) < -2$ dla $x \in <-1;0) \cup (8; 10)$, $f(x) \leq -2$ dla $x \in <-1;0> \cup <8; 10)$, j) A nie należy, B $\in$ f,
k) $y_{max} = 5$ dla $x = -8$, y_{min} nie istnieje

4.4.4 Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:

a) Dziedzina funkcji.

b) Zbiór wartości.

c) Przedziały monotoniczności.

d) Miejsce zerowe.

e) Punkty przecięcia z osiami.

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$.

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$.

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość: $f(x) = 3$, $f(x) = 1$.

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\langle 3$.

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–4, 2), B = (5, 1) należą do wykresu funkcji f.

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji.

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-6,6>$

b) $y \in <-2,3>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <3,1>$
f jest malejąca dla $x \in <-5,0> \cup <3; 6)$
f jest stała dla $x \in <-6,-5>$

d) $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$

e) $(-2,0)$; $(\frac{1}{2}, 0)$; $(6,0)$; $(0,-2)$

f) $x \in <-6,-2) \cup <\frac{1}{2}; 6)$

g) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-6,-5> \cup <\{3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3, 1\}$

i) $x \in (-5,3)$

j) tak

k) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -2$

Wykres II

a) $x \in <-7,4>$

b) $y \in <0,5>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <0,\frac{1}{2}>$
f jest malejąca dla $x \in <-5,0) \cup <\frac{1}{2}; 4>$
f jest stała dla $x \in <-7,-5>$

d) $x \in \{-3\}$

e) $(3,0)$; $(0;4\frac{1}{2})$

f) $x \in <-7,-3) \cup (-3; 4)$

g) $x \in \{\emptyset\}$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-7,-5> \cup <\{-1\frac{1}{2}, 3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\}$

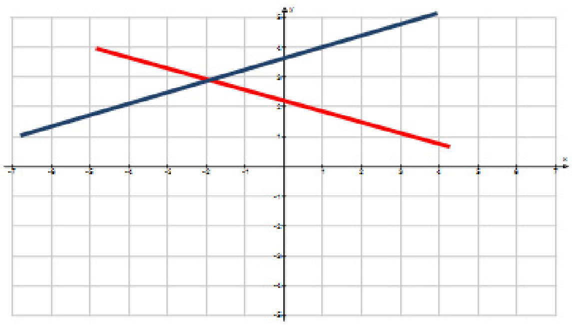
i) $x \in (-5,-1\frac{1}{2}) \cup (3;4)$

j) nie

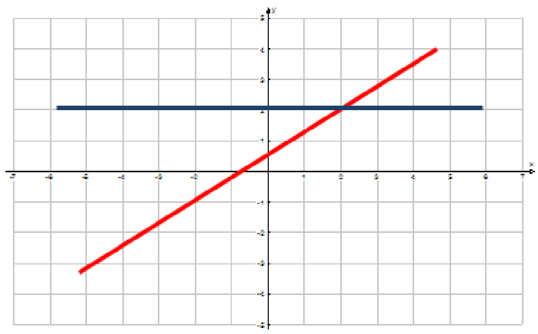
k) $y_{max} = 5$, $y_{min} = 0$

4.4.5 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) = g(x)$.

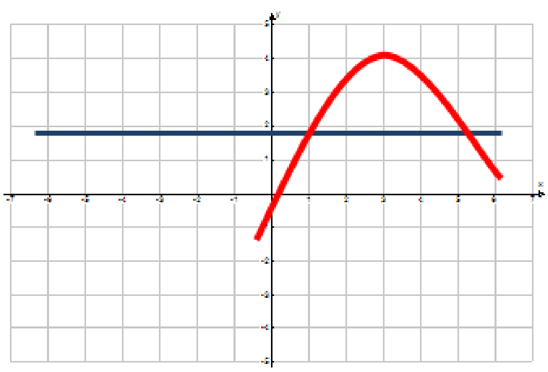
a)



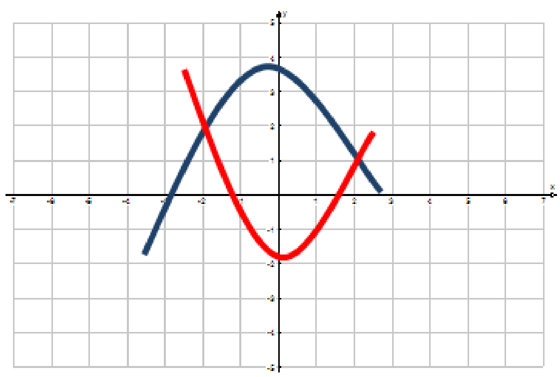
b)



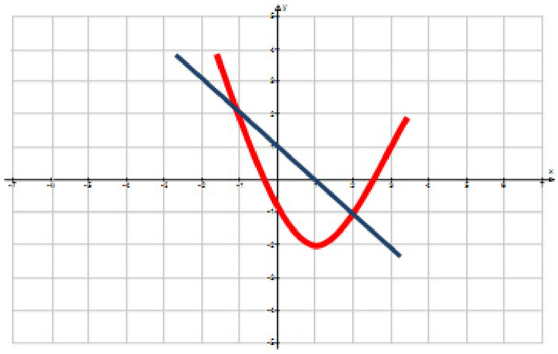
c)



d)



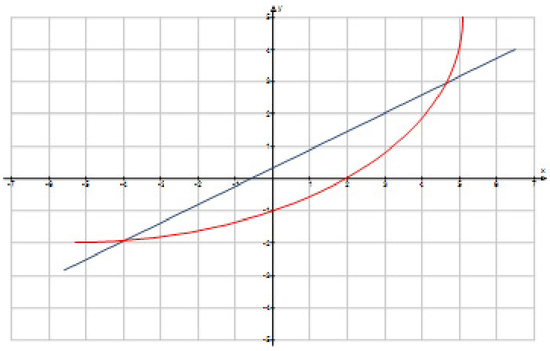
e)



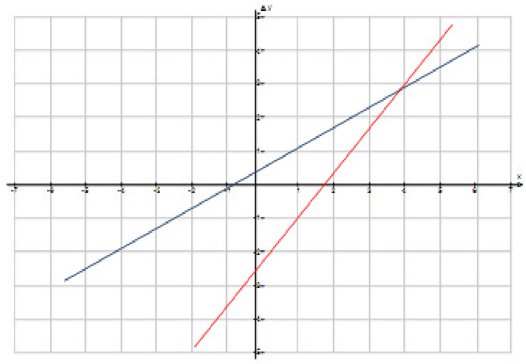
Odpowiedź: a) $(-2\frac{1}{2},1)$, b) (2,2), c) (1,2); (5,2), d) (–2,2); (2,1), e) (–1,2); (2,–1).

4.4.6 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) \geq g(x)$ oraz $f(x) \langle g(x)$

a)

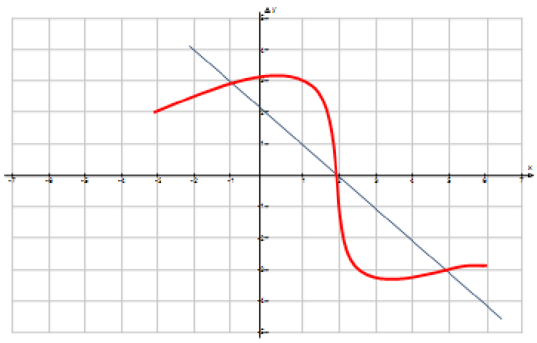


b)



a)

c)



Odpowiedź:

a) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in$ <–4,$4\frac{1}{2}$>; $f(x) < g(x)$ dla $x \in$ <–∞,–4) ∪ $(4\frac{1}{2}, +\infty)$

b) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in$ <–∞,4>; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (4, +\infty)$

c) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in$ <–∞,–1> ∪ <2,5>; f(x) < $g(x)$ dla $x \in (-1, 2)$ ∪ (5,+∞)

4.5 Przekształcanie wykresów funkcji

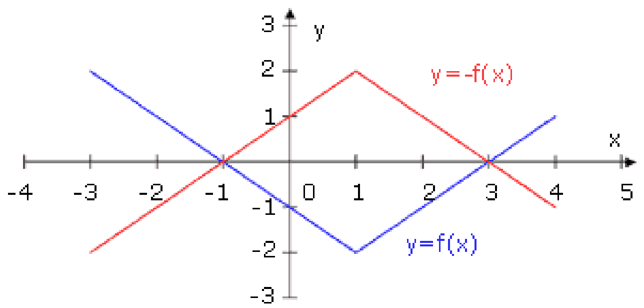
Teraz nauczę się:

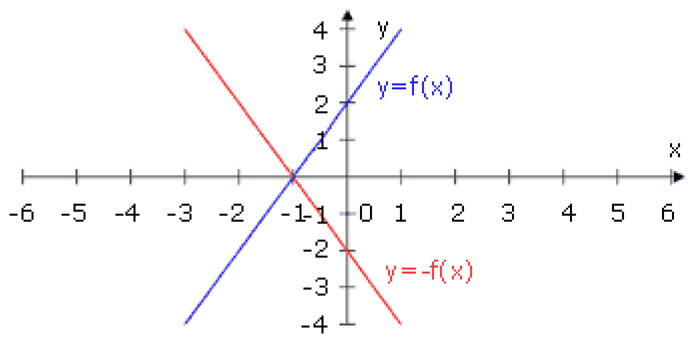
- Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$
- Narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru,
- Wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie,
- Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y=|f(x)|$

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

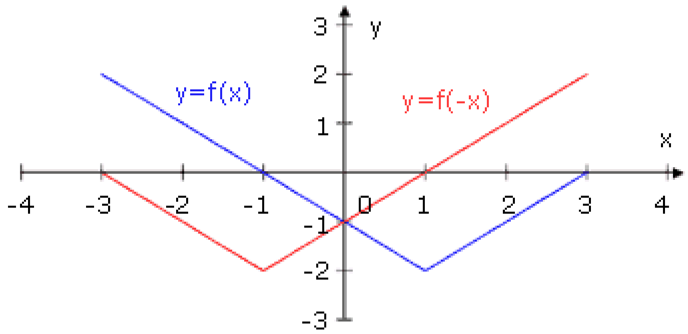
Przykład





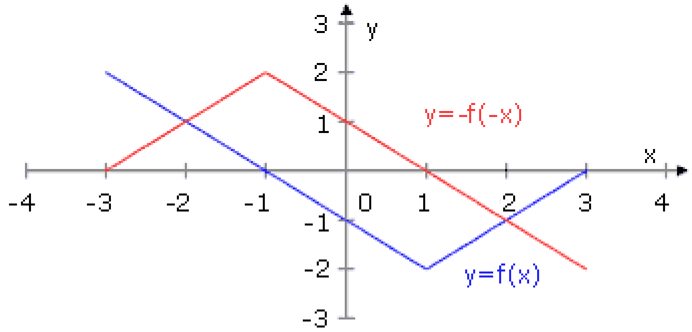
$x \to y = f(-x)$

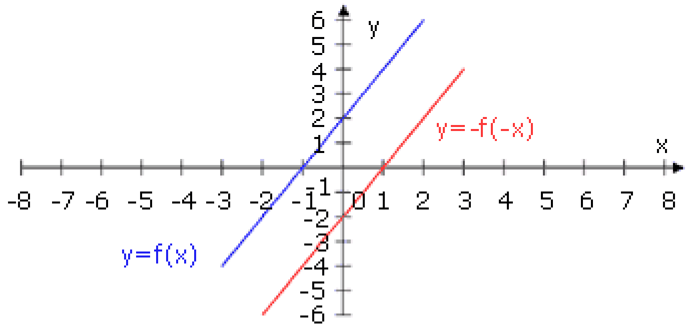
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

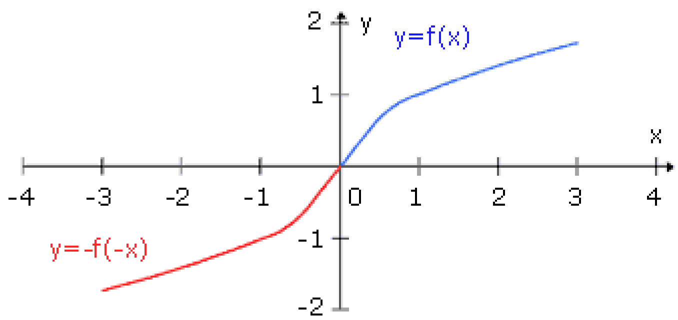


$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$.

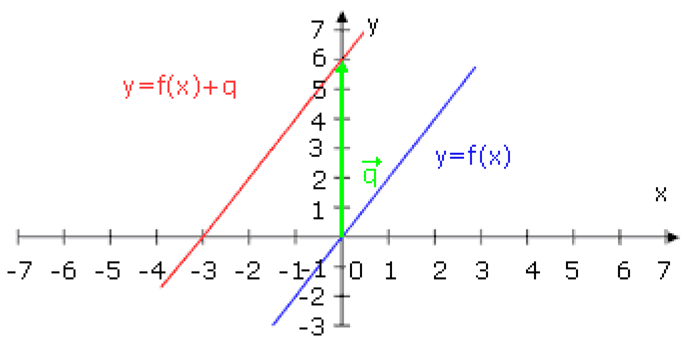






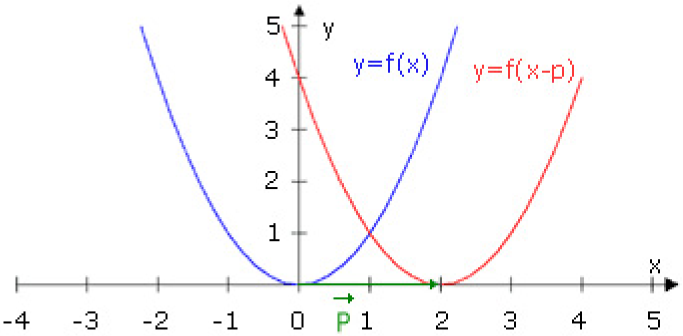
$x \to y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0, q]$).



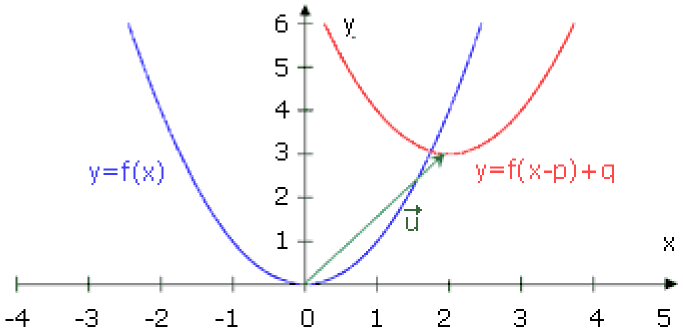
$x \rightarrow y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $[p, 0]$.



$x \rightarrow y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.



$x \rightarrow y = k \cdot f(x)$

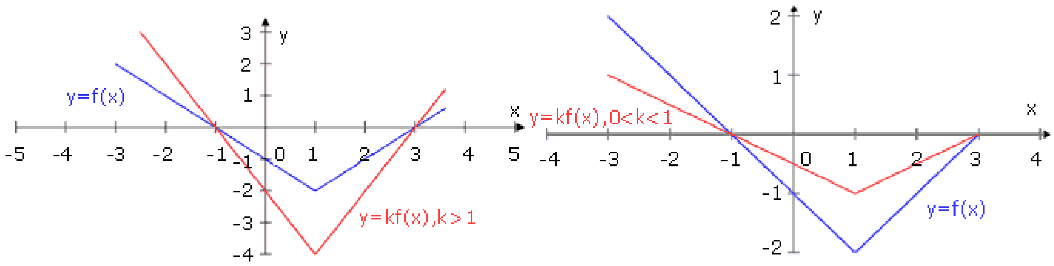
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k-krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY

(„rozciągnął się" wzdłuż osi OY).

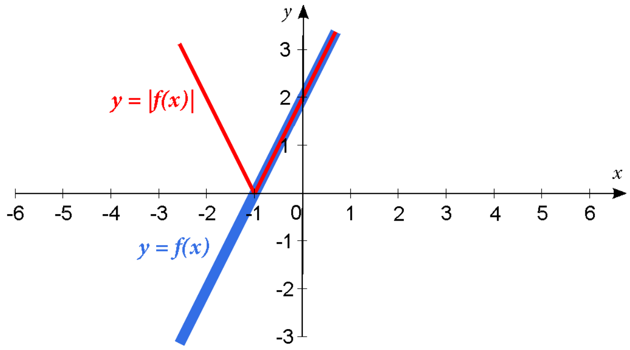
Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY

(„ściągnął się" wzdłuż osi OY).



$* \; x \to y = |f(x)|$

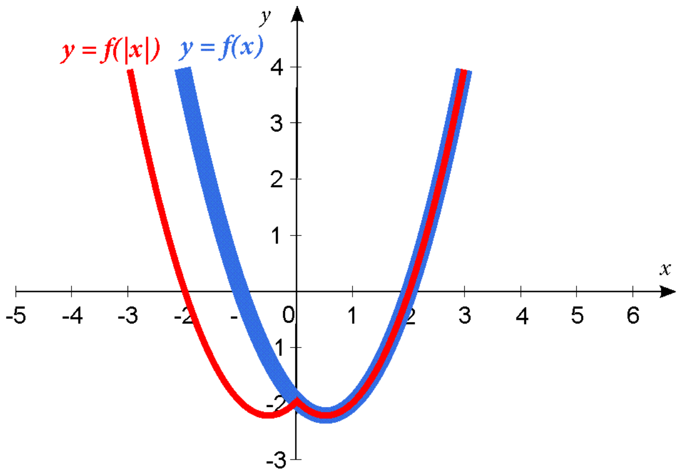
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$ leżącą nad osią OX lub na niej pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX, odbić symetrycznie względem osi OX.

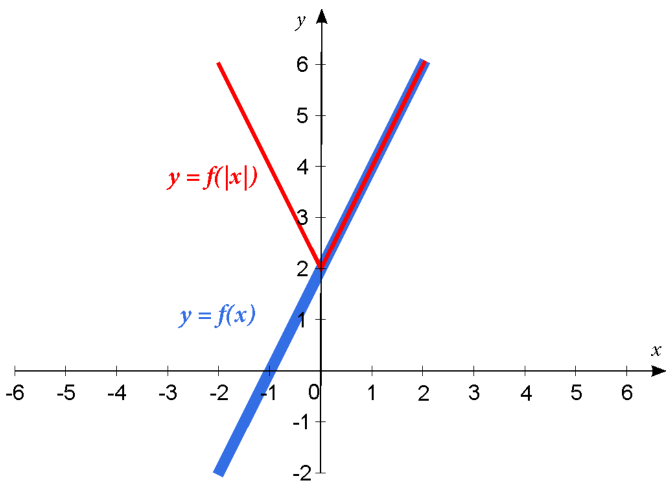


$* \; x \to y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian;
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.



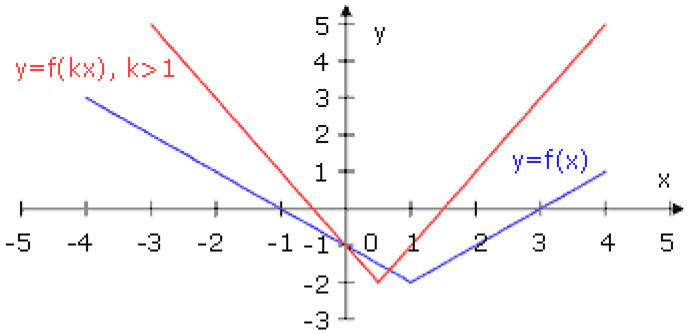


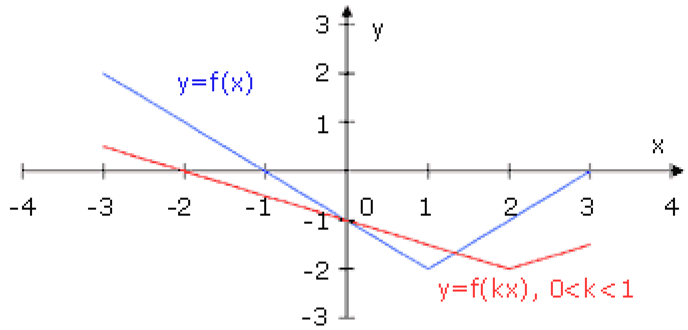
$\boldsymbol{* x \to y = f(k * x)}$

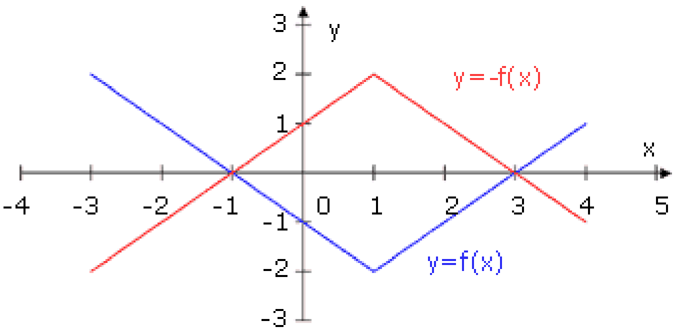
Wykres funkcji $y = f(k * x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania” lub „rozciągania” wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

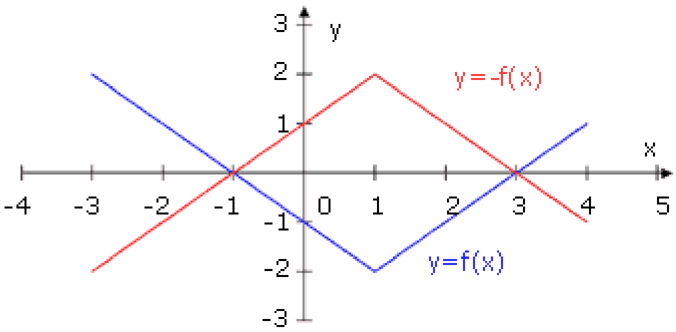
Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się” wzdłuż osi OX.

Dla k ∈ $(0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się” wzdłuż osi OX.









ZADANIA

4.5.1 Mając dane funkcje:

$$f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = -2x - 1, f(x) = -x + 4,$$

zapisz wzory funkcji i naszkicuj wykresy:

a) $x \to f(x)$ b) $x \to -f(x)$ c) $x \to f(-x)$

d) $x \to f(x) - 1$ e) $x \to f(x+1)$ f) $x \to |f(x)|$

g) $x \to f(|x|)$ h) $x \to |f(x) - 1|$

Odpowiedź:

a) $y = f(x) = 2x$

b) $y = -f(x) = -2x$

c) $y = -f(x) = -2x$

d) $y = f(-x) = -2x$

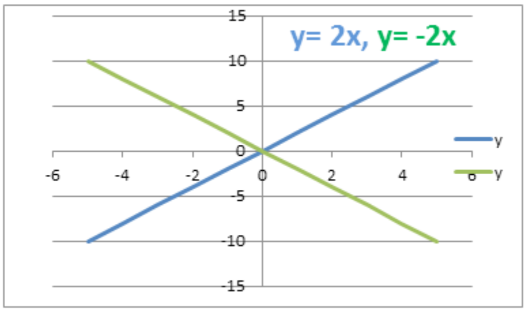
e) $y = f(x) - 1 = 2x - 1$

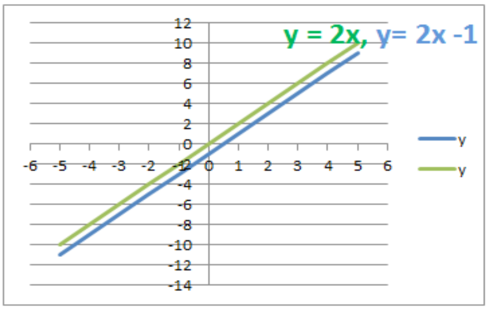
f) $y = f(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$

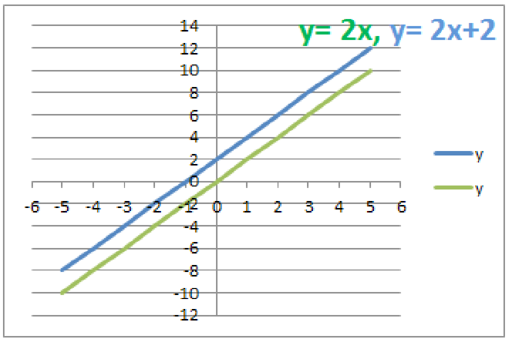
g) $y = |f(x)| = |2x|$

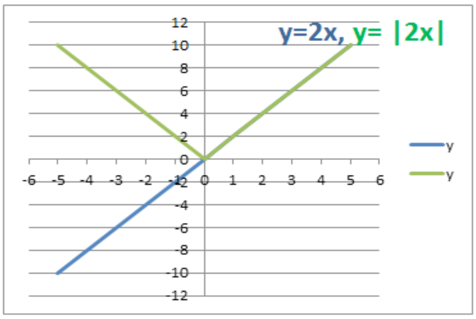
h) $y = f(|x|) = 2|x|$

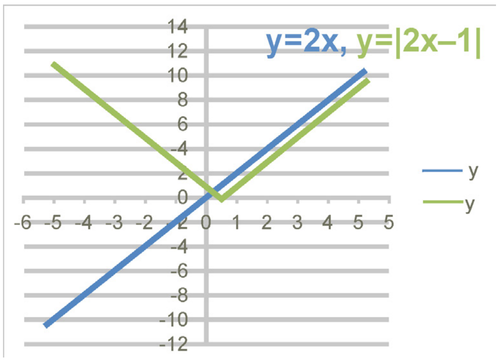
i) $y = |f(x) - 1| = |2x - 1|$

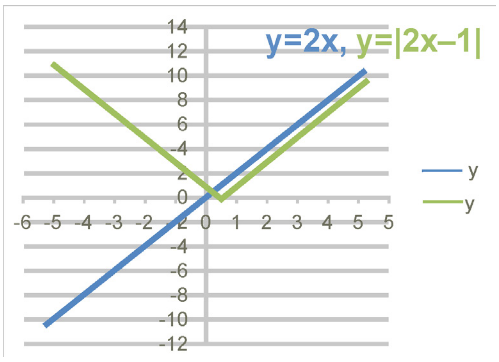












$f(x) = 3x + 1$, $y = -f(x) = -3x - 1$, $y = f(-x) = -3x + 1$, $y = f(x) - 1 = 3x$, $y = f(x+1) = 3x + 4$,

$y = |f(x)| = |3x + 1|$, $y = f(|x|) = 3|x| + 1$, $y = |f(x) - 1| = |3x|$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = -f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $y = f(-x) = \frac{1}{2}x + 2$, $y = f(x) - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$,

$y = f(x+1) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, $y = |f(x)| = |-\frac{1}{2}x + 2|$, $y = f(|x|) = -\frac{1}{2}|x| + 2$, $y = |f(x) - 1| = |-\frac{1}{2}x + 1|$

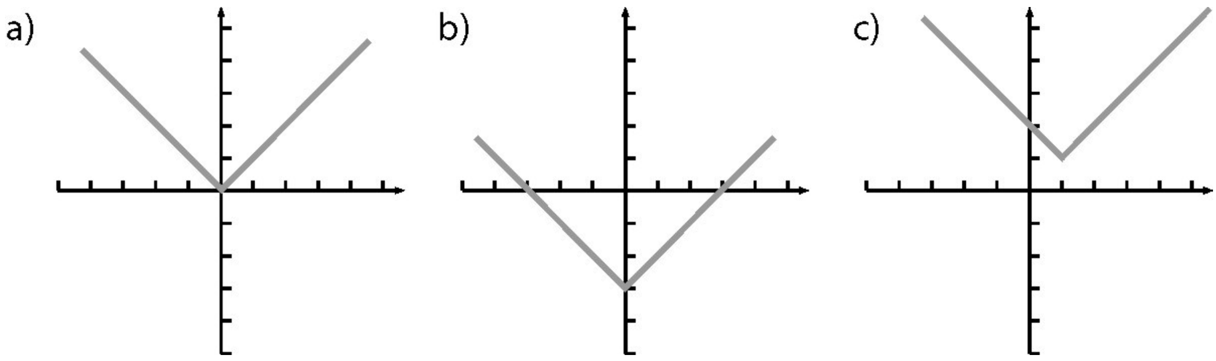
$f(x) = -2x - 1$, $y = -f(x) = 2x + 1$, $y = f(-x) = 2x - 1$, $y = f(x) - 1 = -2x - 2$,

$y = f(x+1) = -2x - 3$, $y = |f(x)| = |-2x - 1|$, $y = f(|x|) = -2|x| - 1$, $y = |f(x) - 1| = |-2x - 2|$

$f(x) = -x + 4$, $y = -f(x) = x - 4$, $y = f(-x) = x + 4$, $y = f(x) - 1 = -x + 3$, $y = f(x+1) = -x + 3$,

$y = |f(x)| = |-x + 4|$, $y = f(|x|) = -|x| + 4$, $y = |f(x) - 1| = |-x + 3|$

4.5.2 Dla każdego z poniższych wykresów funkcji opisz, jak go otrzymano, przesuwając odpowiedni wykres funkcji $y = |x|$. Podaj wzór funkcji o danym wykresie.



Odpowiedź:

a) $y = |x|$ przesunięto o wektor $[1,0]$ $y = |x-1|$

b) $y = |x|$ przesunięto o wektor $[0,-3]$ $y = |x| - 3$

c) $y = |x|$ przesunięto o wektor $[3,1]$ $y = |x-3| + 1$

4.5.3 Zadanie 1 i 2 rozwiąż za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

4.6 Funkcja liniowa i jej własności

Teraz nauczę się:

- Zapisywać funkcję w postaci ogólnej i kierunkowej,
- Interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej,
- Określać monotoniczność funkcji na podstawie jej wzoru i wykresu,
- Badać monotoniczność funkcji w zależności od parametru.

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są współczynnikami liczbowymi, nazywamy **funkcją liniową**. **Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.**

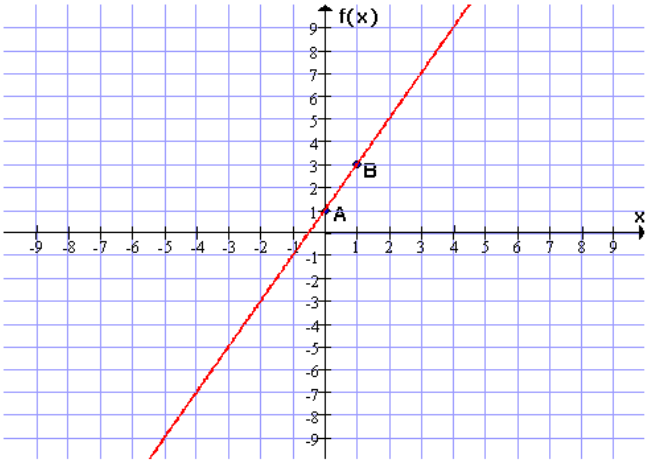
➡ Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

➡ Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej.**

Wykresem każdej funkcji liniowej **jest linia prosta**. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty.

Przykład 1

Narysuj prostą: $y = 2x + 1$



Jeżeli $x = 0$, to $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{A}\,(\mathbf{0},\mathbf{1})$

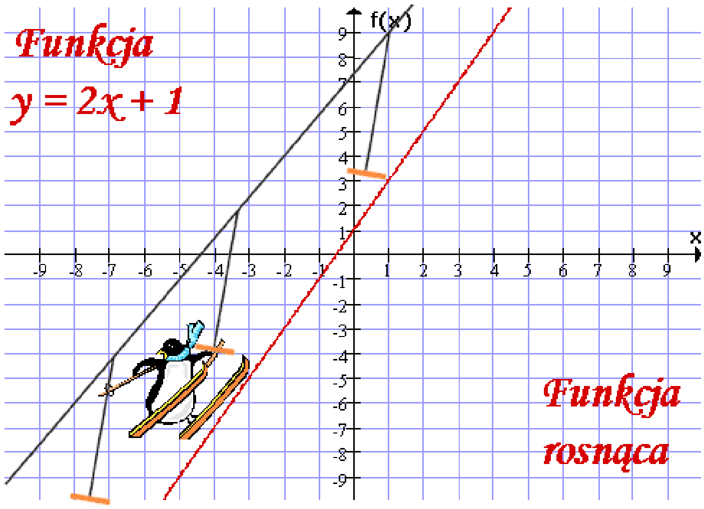
Jeżeli $x = 1$, to $y = 3 \rightarrow \boldsymbol{B}\,(\mathbf{1},\mathbf{3})$

Rysunek 4-6 Wykres funkcji y=2x+1

▶ MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ[56]

➢ Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz większe wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **rosnąca**.

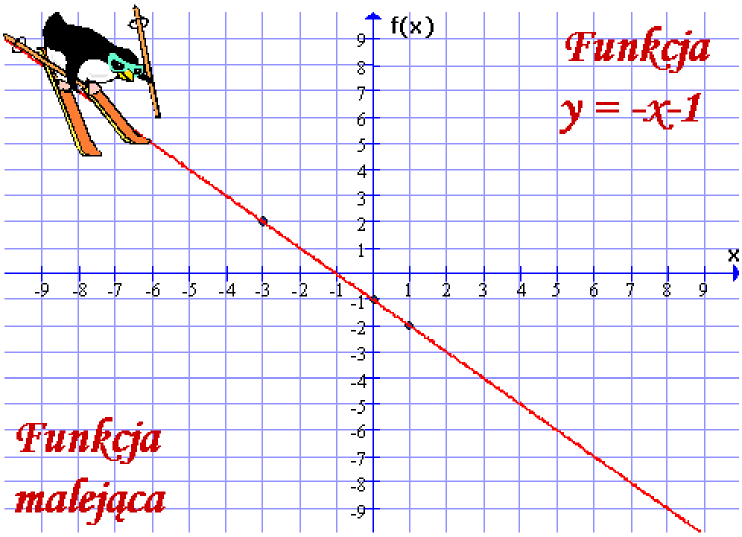
➡ Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy rosnącą, jeżeli $a > 0$



➢ Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz mniejsze wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **malejąca**.

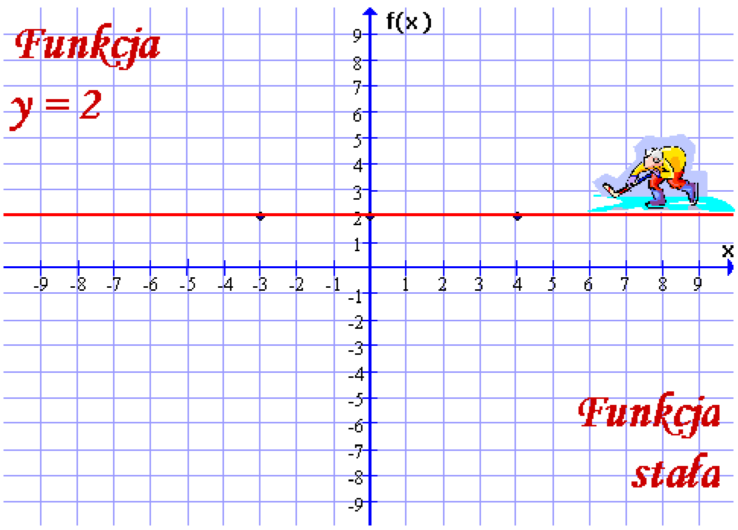
➡ Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy malejącą, jeżeli $a < 0$.

56 https://sites.google.com/site/wlasnoscfunkcji/monotoniczno%C5%9B%C4%87, 28.03.2013.



➢ Jeżeli dla wszystkich argumentów funkcja przyjmuje taką samą wartość, to o takiej funkcji mówimy, że jest **stała**.

Jeżeli $a = 0$, to funkcja $y = ax + b$ jest stała. Jej wzór przyjmuje postać: $y = b$.



Współczynnik a

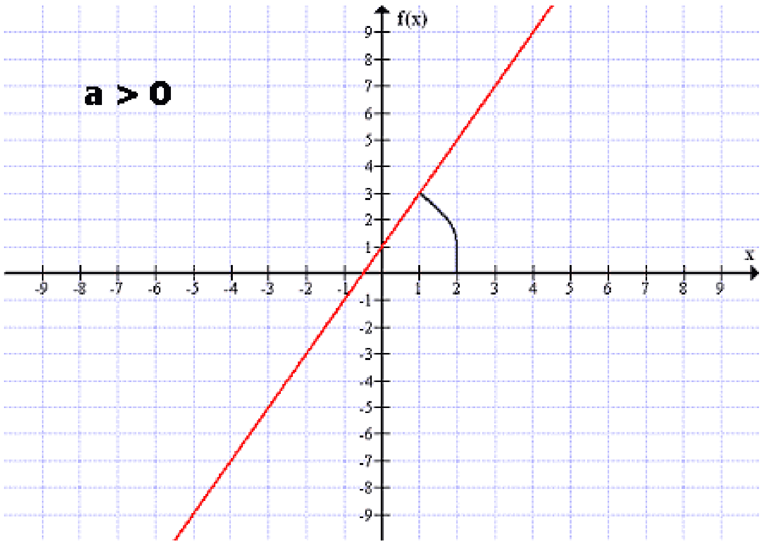
Współczynnik a mówi o kierunku prostej, która jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$. Liczba a jest więc nazywana **współczynnikiem kierunkowym** funkcji $y = ax + b$.

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej $a = tg\alpha$. Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

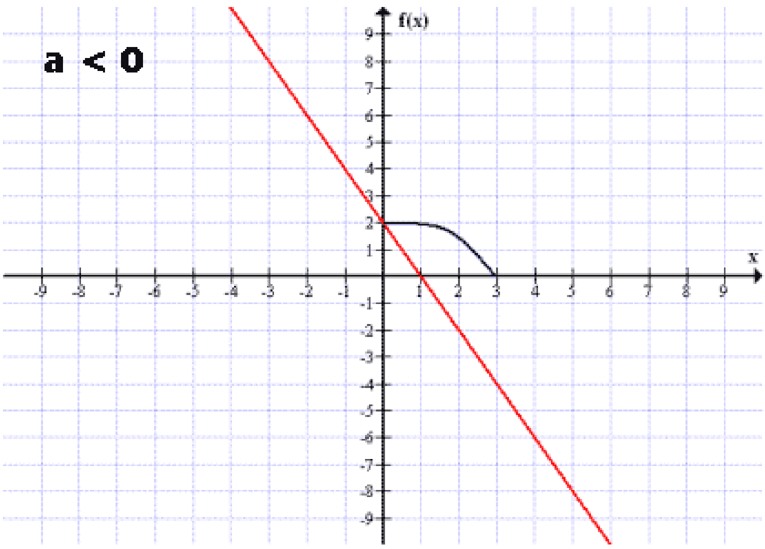
Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, kąt nachylenia do osi x jest wyrażony jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Jeżeli liczba a jest dodatnia, to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem ostrym

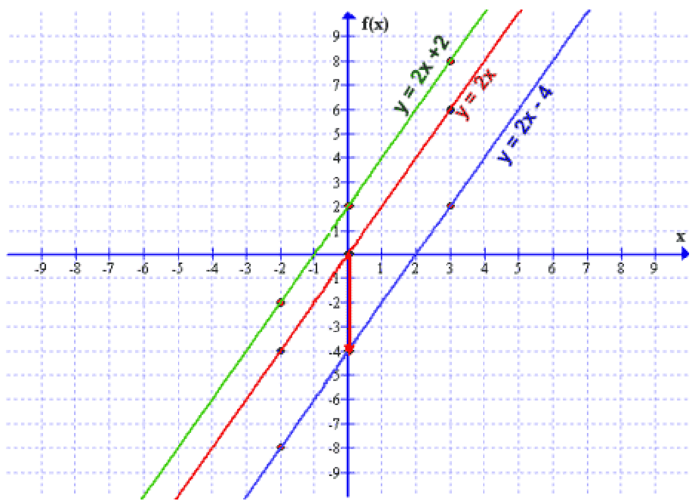
(im większa jest liczba a, tym kąt ten jest większy):



Jeżeli liczba a jest ujemna,to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem rozwartym:



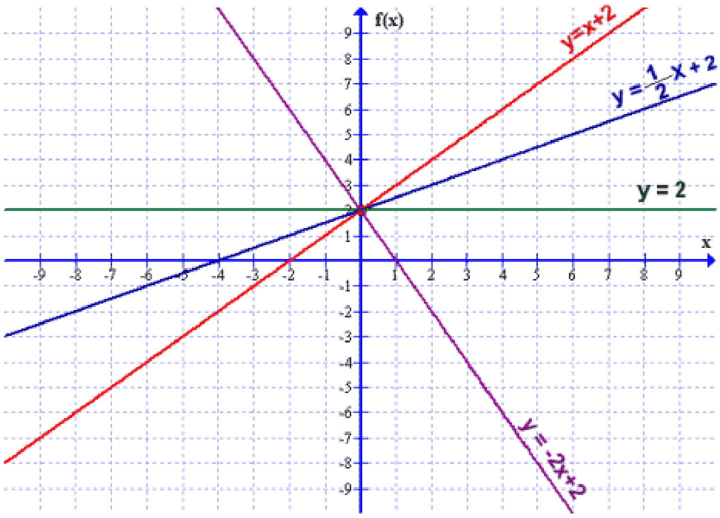
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Współczynnik b

Współczynnik b mówi o tym, w którym punkcie wykres funkcji $y = ax + b$ przecina oś OY, czyli wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0,b)$.

Wykres



Miejsce zerowe – jest to taki argument (x), dla którego wartość (y) wynosi 0.

UWAGA!!!!

Funkcja stała nie ma miejsca zerowego z wyjątkiem funkcji $y = 0$, która ma ich nieskończenie wiele.

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy miejsca zerowego, podstawiając za y wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (czyli miejsce zerowe).

Przykład 2

$$\mathbf{y = 2x - 4}$$

Podstawiamy za y wartość 0 i rozwiązujemy równanie.

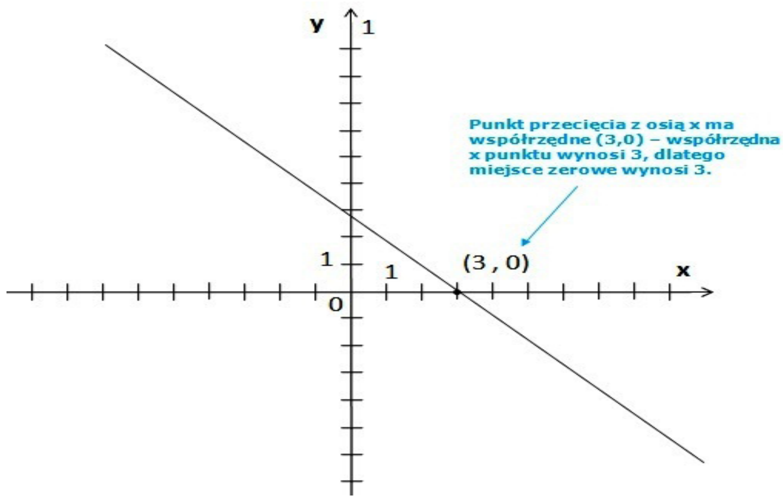
$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 \qquad / \div (-2)$$

$$x = 2$$

Piszemy: Miejsce zerowe funkcji wynosi: $x = 2$.

Mając do dyspozycji wykres, szukamy punktu przecięcia wykresu z osią odciętych (x) i odczytujemy wartość argumentu (x), który jest miejscem zerowym.



Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y - ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$

Przykład 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 4$

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$$

Funkcja ma miejsce zerowe równe: $x_0 = 2$

Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

– **punktu przecięcia z osią** x, podstawiając za y wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe znajduje się w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład 4

$y = 4x + 12$

$0 = 4x + 12$

$-4x = 12 \ / \div (-4)$

$x = -3$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: (–3,0)

– **punktu przecięcia z osią** y, podstawiając za x wartość 0 i obliczając y.

Przykład 5

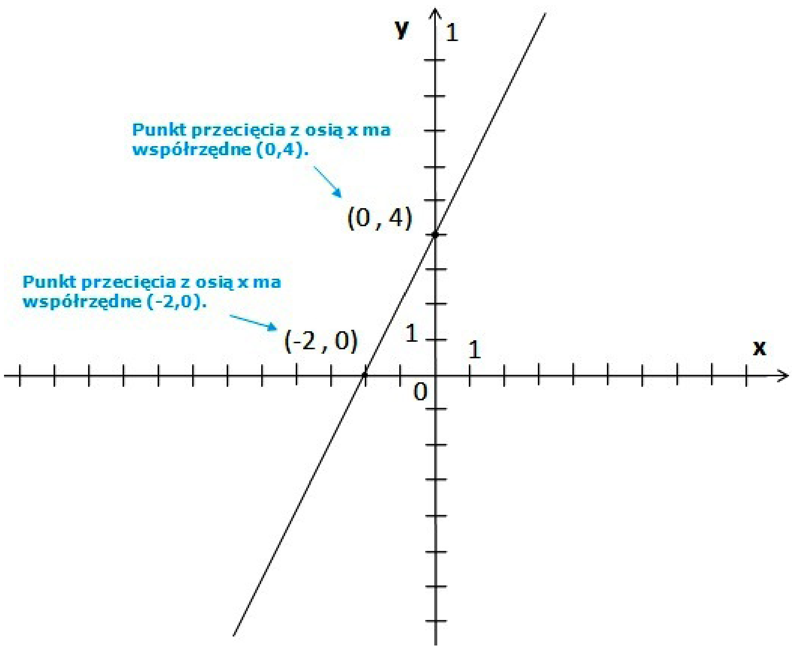
$y = 4x + 12$

$y = 4 \cdot 0 + 12$

$y = 12$

Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: (0,12)

Mając do dyspozycji wykres, odczytujemy współrzędne obu punktów z wykresu.



Punkt przecięcia z osią x: $(-2,0)$

Punkt przecięcia z osią y: $(0,4)$

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji i wykonać obliczenia po obu stronach powstałego równania, patrząc, czy lewa strona będzie równała się prawej. Jeżeli tak jest, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie – znaczy to, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

Przykład 6

Sprawdź, czy punkty: A = (1,2); B = (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.

Sprawdzamy osobno oba punkty:

$$y = 3x - 1$$

Podstawiamy punkt (1,2)

$$2 = 3 \cdot 1 - 1$$
$$2 = 2$$
$$L = P$$

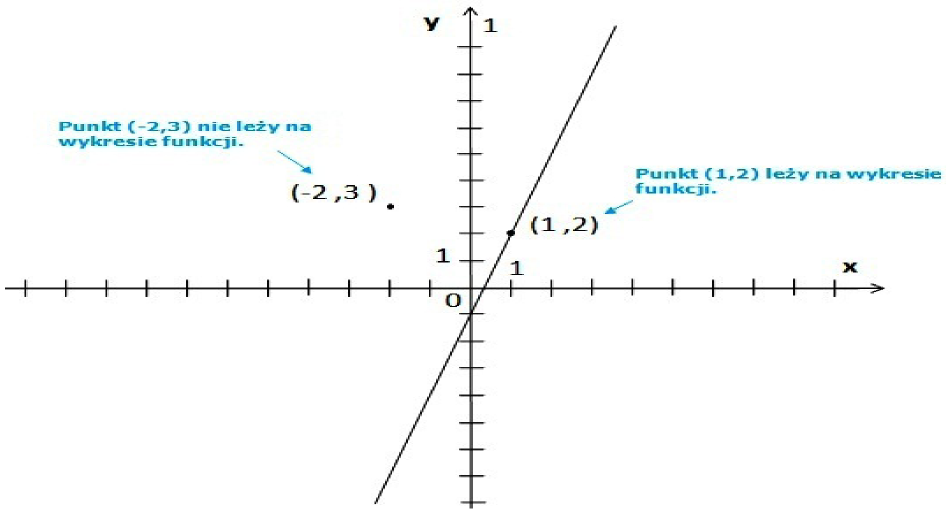
Podstawiamy punkt (-2,3)

$$3 = 3 \cdot (-2) - 1$$
$$3 \neq -7$$
$$L \neq P$$

Punkt (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt (–2,3) nie należy.

Mając do dyspozycji wykres funkcji, wystarczy znaleźć dany punkt w układzie współrzędnych – jeżeli leży on na prostej, która jest wykresem funkcji, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, to znaczy, że nie należy.

Przykład: Sprawdź, czy punkty: (1,2); (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$



Punkt A = (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt B = (–2,3) nie należy.

ZADANIA

4.6.1 Podane równanie sprowadź do postaci kierunkowej:

a) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$ b) $x + y - 4 = 0$ c) $2x + 2y + 3 = 0$

d) $x + 2y = 12$ e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ f) $\frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2$

Odpowiedź:

a) $y = 3x + 0{,}5$; b) $y = -x + 4$; c) $y = -x - 1\frac{1}{2}$; d) $y = -\frac{1}{2}x - 6$; e) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$;

4.6.2 Które spośród punktów A, B, C, D należą do wykresu funkcji: $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,

$f_2(x) = \frac{x+1}{2}$,

a) A = (2,1) B = $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ C = (–2,1), D =(0, 2);

b) A = (1,1), B = (2,2), C = (–3,–1), D = $(2, \frac{3}{2})$.

Odpowiedź: A ∈ $f_{1,}$ D ∈ $f_{1,}$ A ∈ f_2 (x), C ∈ f_2 (x), D ∈ f_2 (x).

4.6.3 Narysuj wykresy funkcji, a następnie:

- określ monotoniczność,
- oblicz miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- sprawdź, czy punkt A = (1,3) należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x - 1$ b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ c) $f(x) = -9x - 3$

d) $f(x) = 0{,}4x + 0{,}1$ e) $f(x) = \frac{-x+2}{2}$ f) $f(x) = \frac{2-2x}{-4}$

g) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$ h) $f(x) = \frac{1-6x}{3} + 2x$

Odpowiedź:

a) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y (0, –1); nie należy

b) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{2})$; nie należy

c) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{3}$; z osią x $(-\frac{1}{3},0)$; z osią y (0,–3); nie należy

d) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{10})$; nie należy

e) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = 2$; z osią x (2,0); z osią y (0,1); nie należy

f) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y $(0, -\frac{1}{2})$; nie należy

g) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -4$; z osią x (– 4,0); z osią y (0,–2); nie należy

h) funkcja stała; miejsce zerowe brak; brak; brak; nie należy

4.6.4 Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-1)x+1$ b) $f(x) = (-m+2)x-4$ c) $f(x) = (m - \frac{\sqrt{3}}{2})x - \sqrt{3}$

Odpowiedź: a) m > $\frac{1}{2}$; b) $m < 2$; c) $m > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

4.6.5 Przez które ćwiartki przechodzą proste $y_1 = 2x + 1$ i $y_2 = \frac{1}{2}x - 5$? Która z prostych tworzy z osią OX większy kąt? W której ćwiartce przecinają się proste?

Odpowiedź: y_1 przez I, II, III; y_2 przez I, III, IV.

4.7 Zastosowanie funkcji do opisywania zjawisk z życia codziennego

Teraz nauczę się:

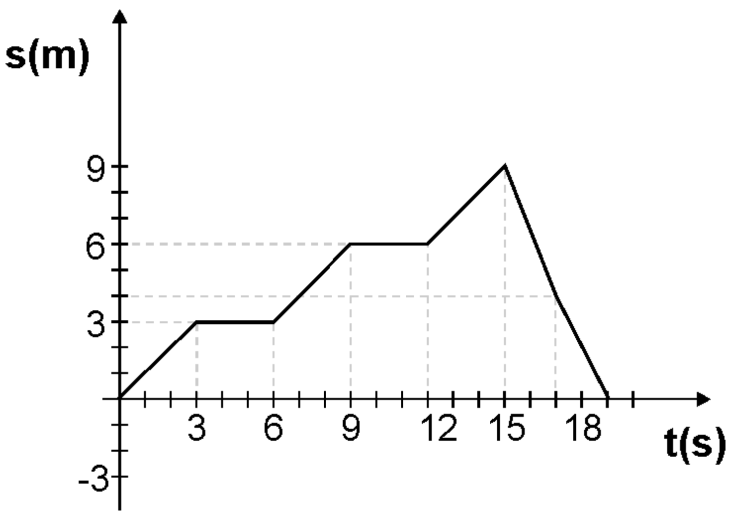
Wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Funkcje wykorzystywane są w wielu dziedzinach życia, np.:

- W badaniach statystycznych – kurs walut,
- W balistyce – zapisywanie toru lotu pocisku,
- Do bliczania maksymalnej prędkości samochodu, z jaką bezpiecznie może pokonać dany zakręt, oraz wiele innych.

W fizyce często do opisywania zajwisk z życia codziennego korzystamy z wykresów funkcji. Analizując dane przedstawione na wykresie najpierw sprawdzamy, jakie wielkości fizyczne i ich jednostki zostały na nim zaznaczone.

Przykład 1



Jak zinterpretować dane na poniższym wykresie? Zauważ, że mamy do czynienia z dwiema wielkościami: szybkością i czasem. Co się dzieje z szybkością ciała w poszczególnych przedziałach czasu?

Na początku ciało spoczywało, następnie przez 2 sekundy jego szybkość wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu (ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym), przez kolejne 2 sekundy ciało poruszało się ze stałą prędkością, od 4 do 6 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 6 do 8 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne dwie sekundy jego szybkość wzrastała, następnie ciało zmieniło zwrot prędkości (zawraca) i przez pierwszą sekundę porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 11 do 12 sekundy jest to również ruch jednostajnie przyspieszony. Obliczmy przyspieszenie ciała w poszczególnych przedziałach czasu. Wiedząc, że przyspieszenie jest równe ilorazowi zmiany szybkości ciała do zmiany czasu $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Z wykresu odczytujemy:

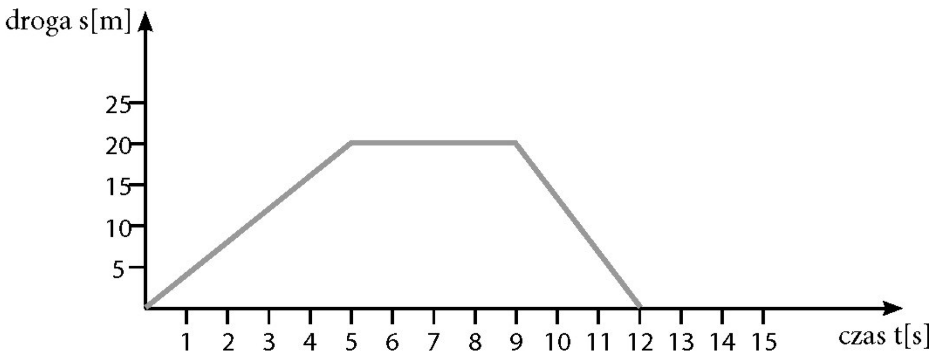
$v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 4, v_5 = 4, v_6 = 6,$

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11, t_7 = 12$, stąd

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{2m/s}{2s} = 1\frac{m}{s^2}$ i analogicznie

$a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, \qquad a_4 = -3\frac{m}{s^2}, a_5 = -1{,}5\frac{m}{s^2}.$

Przykład 2



Przeanalizujmy podobny wykres. Zauważmy, jakie wielkości fizyczne mamy teraz zaznaczone na wykresie? Przez pięć pierwszych sekund droga rosła proporcjonalnie do czasu, to znaczy, że ciało poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne 4 sekundy ciało spoczywa, a przez następne 3 sekundy zawraca, poruszając się ze stałą prędkością. Obliczmy $v_1,\ v_2\ i\ v_3$.

Z lekcji fizyki pamiętasz, że:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, stąd\ v_1 = 4\frac{m}{s}, v_2 = 0\frac{m}{s}, v_3 = -6\frac{2}{3}\frac{m}{s}.$

Przykład 3

Zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita a wyrażoną w stopniach Celsjusza jest zależnością liniową:

a) Znajdź tę zależność, wiedząc że $32°F = 0°C$, a $5°F = -15°C$.

b) 22 lipca w San Diego temperatura o godzinie 12^{00} była o $12{,}5°C$ wyższa niż temperatura o godzinie 6^{00}. Wyraź wzrost temperatury w stopniach Fahrenheita.

Jeżeli F jest temperaturą w Fahrenheitach, a C w Celsjuszach, to wiemy, że $F = aC + b$. Stałe a i b wyznaczymy z podanych informacji.

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a(-15) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 32 \\ 15a = b - 5 = 27 \ \Rightarrow a = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

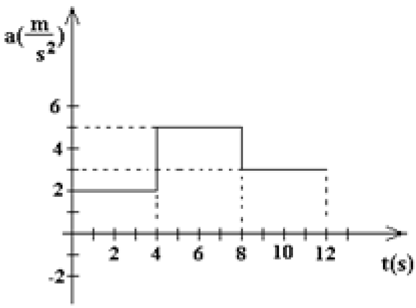
Skorzystamy ze wzoru z podpunktu a).

$$F_2 - F_1 = T_F = \frac{9}{5}C_2 + 32 - \frac{9}{5}C_2 - 32 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$$

Odpowiedź: $22{,}5°F$

ZADANIA

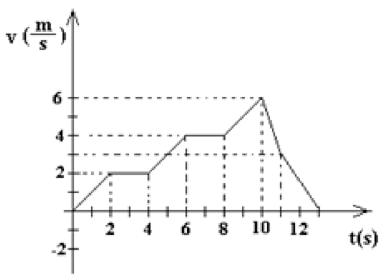
4.7.1 Na podstawie poniższego wykresu dokonaj analizy ruchu ciała i sporządź wykres zależności $v(t)$, $s(t)$.



Odpowiedź:

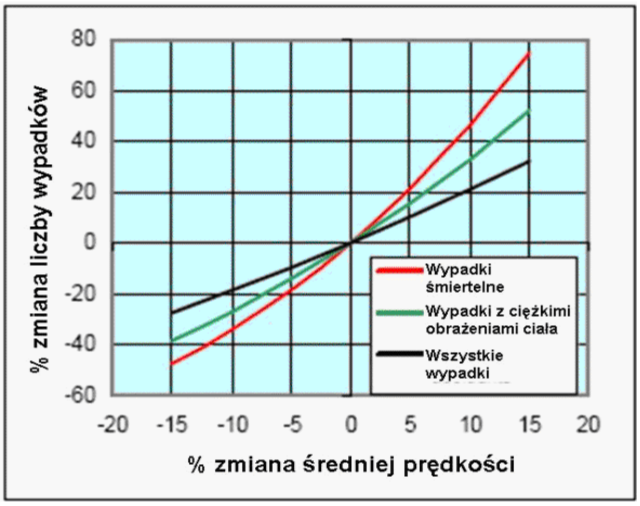
Przez pierwsze dwie sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym $a = 2\,\frac{m}{s^2}$, przez kolejne z przyspieszeniem a = 5 $\frac{m}{s^2}$, od 8 do 12s z przyspieszeniem a = 3 $\frac{m}{s^2}$.
Podstawiamy do wzoru $v = at$ kolejne sekundy czasu i obliczamy odpowiadające jej szybkości.

4.7.2 Opisz zachowanie ciała na podstawie wykresu.



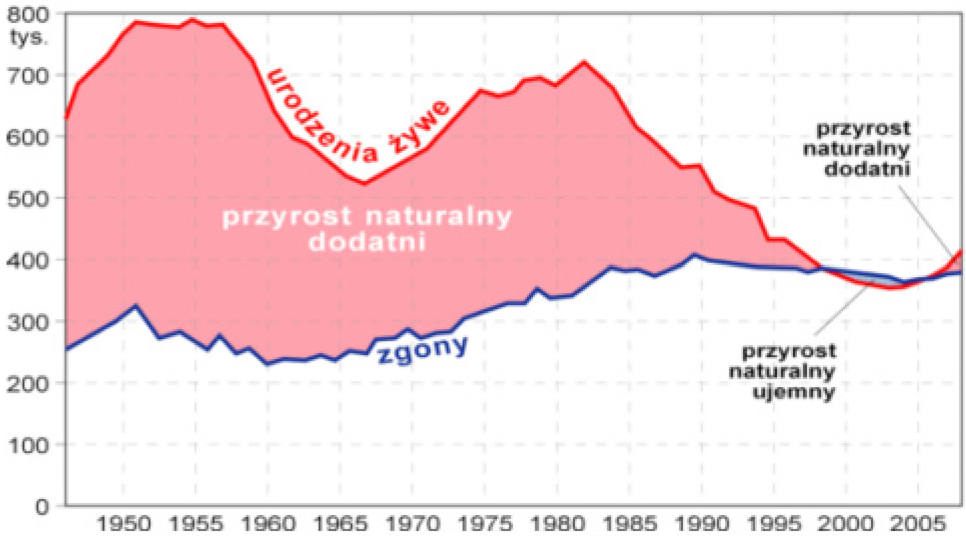
Odpowiedź: Przez pierwsze 3s ciało porusza się ruchem jednostajnym, następnie spoczywa i tak na zmianę, w 15s zawraca, dalej poruszając się ruchem jednostajnym, ale z inną szybkością 3.

4.7.3 Jakie informacje można odczytać z poniższego wykresu? Wyciągnij odpowiednie wnioski.



Zależność między zmianami średniej prędkości jazdy a liczbą wypadków

4.7.4 Wykres przedstawia, jak zmianiał się przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1950 – 2005.[57]



Przyrost naturalny w Polsce w latach 1946 – 2008

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak zmieniała się liczba urodzeń w latach 1950 – 2005?
2. W którym roku liczba urodzeń była największa, a w którym najmniejsza?
3. Jak w tym czasie kształtowała się liczba zgonów?
4. W którym roku przyrost naturalny ludności był najwyższy, a w którym najniższy?

Informacja do zadania:

Prędkość rzeki zależy od takich czynników, jak: głębokość rzeki, nachylenie terenu, rodzaj podłoża tworzącego dno i brzegi rzeki.

Większość rzek zwalnia pod koniec swojego biegu, ponieważ nachylenie terenu, czyli spadek wody, znacznie się zmniejsza. Gdyby przeanalizować przekrój rzeki, można by zauważyć, że pręd-

57 (www.wiking.edu.pl/article.php?id=269, 25.03.2013)

kość różni się w różnych obszarach – najmniejsza jest na dnie rzeki, a największa na jej powierzchni. Powodem tego jest tarcie pomiędzy przepływającą wodą a powierzchnią dna rzeki.

Przy brzegach rzeki, szczególnie na zakrętach, przepływ wody jest najszybszy z powodu siły odśrodkowej.

Zwykle prędkość V wyrażamy w metrach na sekundę $\left[\frac{m}{s}\right]$, natomiast współczynnik rodzaju podłoża oznaczamy k i wyrażamy w $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$. Poziom wody oznaczamy T i wyrażamy w metrach, do wyznaczenia prędkości używamy również współczynnika nachylenia, spadku terenu S.

Prędkość przepływu wody obliczamy ze wzoru: $V = k \cdot \sqrt[3]{T^2} \cdot \sqrt{S}$

Wskazówka: współczynnik nachylenia S = (różnica poziomów)/(długość rzeki)

4.7.5 Dwie stacje pomiarowe Berthelsdorf i Nossen znajdują się na rzece Mulde. Pomiędzy tymi stacjami średni poziom wody wynosi 35 cm. Wysokość nad poziomem morza w Berthelsdorf wynosi 376,61m, a w Nossen 203,76 m. Długość rzeki na tym odcinku wynosi 42,3 km. Dno rzeki jest wyboiste i wartość współczynnika rodzaju podłoża wynosi 30$\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$.

1. Oblicz prędkość rzeki na tym odcinku.

2. Raz na 20 lat poziom wody rzeki Mulde osiaga 2,5 m. Oblicz, jaką wówczas prędkość osiąga rzeka.

3. 30 sierpnia 2008 roku po długim okresie deszczowym prędkość rzeki osiągnęła wartość 1,68 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Oszacuj, jak wysoki był wówczas poziom wody.

4. Prędkość rzeki można również wyrazić w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Tak wyrażona, daje nam informację, jak dużo wody przepływa w ciągu sekundy. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki pomiarów poziomu wody w rzece i jej przepływu.

Data	Godzina	Poziom wody w [cm]	Przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
26.10	01:00	41	2,04
	07:00	39	1,81
	13:00	40	1,92
	19:00	40	1,92
27.10	01:00	40	1,92
	07:00	40	1,92
	13:00	41	2,04
	19:00	44	2,42
28.10	01:00	45	2,55
	07:00	45	2,55
	13:00	41	2,04
	19:00	41	2,04
29.10	01:00	41	2,04
	07:00	41	2,04
	13:00	53	3,78
	19:00	56	4,31
30.10	01:00	73	8,07
	07:00	83	10,9
	13:00	103	19,3
	19:00	106	20,7
31.10	01:00	93	14,8
	07:00	81	10,3
	13:00	75	8,6
	19:00	71	7,56
01.11	01:00	70	7,31
	07:00	66	6,36

a) Przedstaw na wykresie zależność prędkości przepływu od poziomu wody w dniach od 30 października od godziny 01:00 do 31 października do godziny 01:00.

b) Za pomocą jakiej funkcji można opisać tą zależność?

c) Za pomocą programu Exel lub kalkulatora graficznego znajdź wzór funkcji, która w przybliżeniu opisuje tę zależność.

d) Wykorzystując otrzymaną funkcję oszacuj, ile będzie wynosić prędkość przepływu w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$, jeśli poziom wody osiągnie 2,5 m.

e) Przedstaw chronologicznie na wykresie prędkość przepływu wody w dniach od 30 października od godziny 01:00 do 31 października do godziny 01:00. Wyraź przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$.

f) Jaką wartość wyraża obszar zawarty pomiędzy wykresem funkcji a osią x?

g) Oblicz pole powierzchni tego obszaru (wyznacz pole powierzchni tego obszaru na różne sposoby).

6. Wywnioskuj, jak będzie się zmieniać wartość współczynnika $\boldsymbol{k}$, jeżeli dno rzeki będzie bardziej gładkie.

7. Wyjaśnij, dlaczego prędkość przepływu nie jest liniowo zależna od poziomu wody.

8. Wykorzystanie rzek jako drogi wodnej dla statków powoduje czasem pogłębienie koryta rzeki. Jakie może to mieć konsekwencje dla środowiska?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

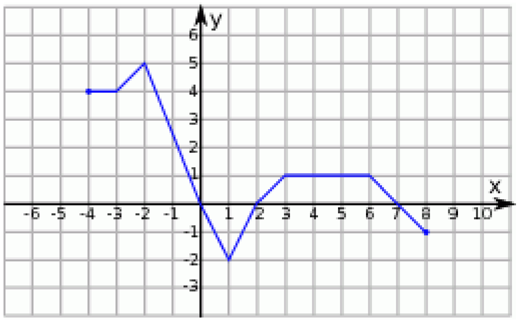
1. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:[58]

a) $-1/3$ b) -3 c) $1/3$ d) 3

2. Zbiorem wartości funkcji f jest:[59]

a) $< -2,5 >$ b) $< -4,8 >$ c) $< -1,4 >$ d) $< 5,8 >$

3. Korzystając z wykresu funkcji f, wskaż nierówność prawdziwą:



a) $f(-1) < f(1)$ b) $f(1) < f(3)$ c) $f(-1) < f(3)$ d) $f(3) < f(0)$

4. Wskaż m, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała.

a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = -1$

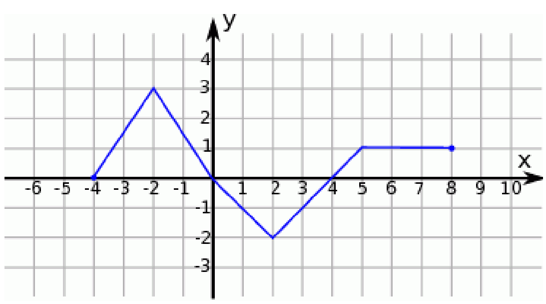
5. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:[60]

a) $-2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

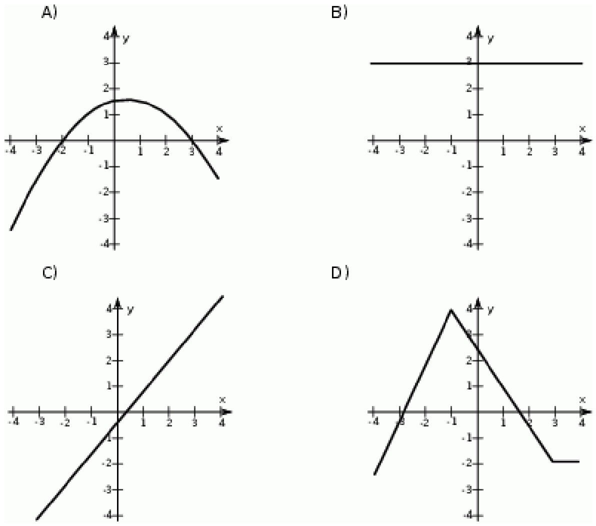


58 Arkusz próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.
59 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2010.
60 Zadania: 5, 6 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2010.

7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem f (x) = ax + 6, gdzie a > 0. Wówczas spełniony jest warunek:[61]

a) $f(x) > 1$ b) $f(2) = 2$ c) $f(3) < 3$ d) $f(4) = 4$

8. Wskaż wykres funkcji, która w przedziale <–4,4> ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



9. Funkcja liniowa $f(x) = (m-1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:[62]

a) $m = 6$ b) $m = 1,5$ c) $m = 1$ d) $m = 5$

10. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

a) 4 b) –2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

11. Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt A = (2,–4), gdy:[63]

a) $m = 5$ b) $m = -5$ c) $m = 1$ d) $m = -4$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

a) $x < 6$ b) $x > 6$ c) $x > -6$ d) $x < -6$

13. Dziedziną funkcji $F(x) = \begin{cases} -2x + 1, & gdy\ x \leq 3 \\ -x, & gdy\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ jest zbiór:[64]

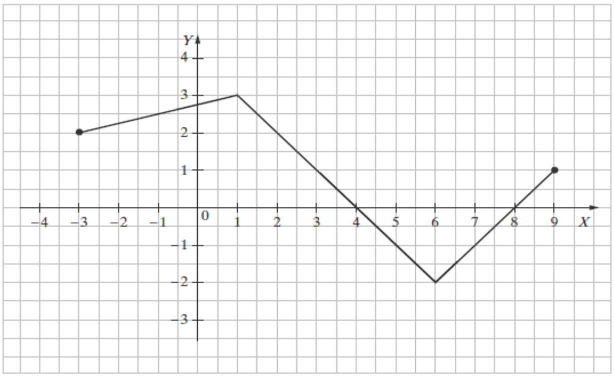
a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle 1,4 \rangle$ c) $\langle 0,4 \rangle$ d) $(-\infty, 1)$

14. Funkcja liniowa $f(x) = (m+2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

a) $m < -2$ b) $m < 2$ c) $m > -2$ d) $m > -4$

61 Zadania: 7, 7 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
62 Zadania: 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2010.
63 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2009.
64 Zadania: 13, 14, 15, 16, 17 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011.

15. Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

a) $\langle 0,4\rangle$ b) $\langle 1,6\rangle$ c) $\langle 0,6\rangle$ d) $\langle -2,4\rangle$

16. Punkt $P = (a+1,2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

a) 0 b) –1 c) 2 d) 1

17. Funkcja liniowa $f(x) = (m-2)x - 11$ jest rosnąca dla:

a) $m > 2$ b) $m > 0$ c) $m < 13$ d) $m < 11$

18. (**5 pkt**) Funkcja liniowa $f(x) = 3ax - b$ jest malejąca, natomiast funkcja liniowa $g(x) = bx - 3a$ jest rosnąca. Wykresy funkcji f i g przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Oblicz odciętą punktu A oraz wyznacz wzory funkcji f i g wiedząc, że ich wykresy są prostopadłe[65].

19. (**2 pkt**) Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru:

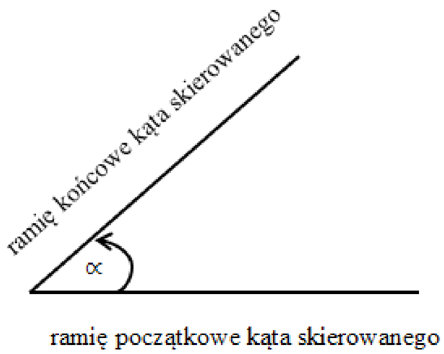
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & dla\ x \in (0,3\rangle \\ \sqrt{3}-3 & dla\ x \in (3,10 \end{cases}$$

65 Zadania: 18,19 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

5 Trygonometria

5.1 Miara łukowa i stopniowa kąta

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy parę prostych o wspólnym początku (wierzchołek kąta).



Rysunek 5-1 – Kąt skierowany

Miarą kąta skierowanego jest **stopień**.

$$1° = \frac{1}{360} \text{kąta pełnego}$$

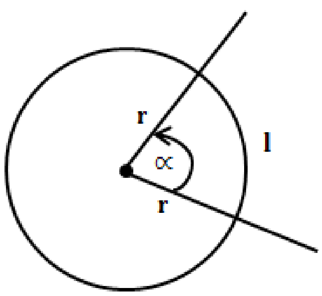
Jednostki mniejsze niż stopień to **minuta kątowa 1′** (uwaga: to nie jest jednostka czasu)

$$1^{\circ} = 60' \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} 1'$$

oraz **sekunda kątowa (1″)**

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' \qquad 1''.$$

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu.



Jednostką miary łukowej jest radian.

$$1\, radian = \frac{180°}{\pi} \sim 57°17'44''$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Rysunek 5-2 – Radian

Zamiana miary stopniowej $(\alpha°)$ na miarę łukową (α):

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}\ radiana}$$

Przykład 1

$$180° = \pi\, rad$$
$$90° = \frac{\pi}{2}\ rad$$
$$30° = \frac{\pi}{6}\ rad$$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową $(\alpha°)$:

$$\boldsymbol{\alpha° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi}}$$

Przykład 2

$$\frac{3}{2}\pi\, rad = 270°$$
$$\frac{\pi}{3}\ rad = 60°$$
$$\frac{\pi}{2}\ rad = 90°$$

Ciekawostka

W niektórych krajach, obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. gradusy. **Gradus** – jest to jedna setna część kąta prostego.

ZADANIA

5.1.1 Znajdź:

a) miarę łukową kątów: $90°, 30°, 45°, 60°, 180°, 210°, 270°, 360°$,

b) miarę stopniową kątów: $3\pi\ rad$; $6{,}5\pi\ rad$; $\frac{6}{5}\pi\ rad$; $\frac{5}{3}\pi\ rad$.

Odpowiedź: a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$; b) $540°$, 117°, 216°, 300°.

5.1.2 Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta. Wynik podaj w stopniach.

Odpowiedź: 114°.

5.1.3 Pole wycinka koła o promieniu $r = 3\ cm$, jest równe $2cm^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

Odpowiedź: $\alpha = \frac{4}{9}$.

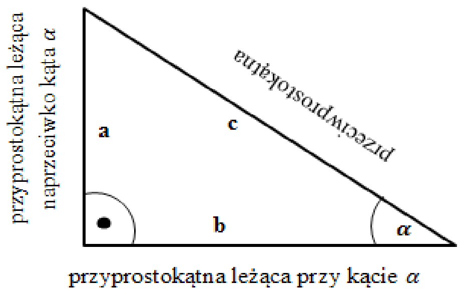
5.2 Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać definicje i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus, tanens i cotangens kątów o miarach od 0° do 180°,
- Obliczać miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).

Termin **trygonometria** pochodzi od dwóch greckich słów: trigonom (trójkąt) i metron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

Rozważmy trójkąt prostokątny o kącie ostrym $\boldsymbol{\alpha}$.



Rysunek 5-3 Trójkąt prostokątny

Tangensem kąta ostrego $\boldsymbol{\alpha}$ nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta $\boldsymbol{\alpha}$ do długości przyprostokątnej (leżącej przy tym kącie) i oznaczamy $\boldsymbol{tg\ \alpha}$.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $sin\ \alpha$.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta α (czytaj: kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta α do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $cos\ \alpha$.

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangensem kąta α (czytaj: kotangensem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta α do długości drugiej przyprostokątnej i oznaczamy $ctg\ \alpha$.

$$ctg\alpha = \frac{a}{b}$$

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, zatem ilorazy określające sinus i cosinus są liczbami mniejszymi od 1.

Przykład 1

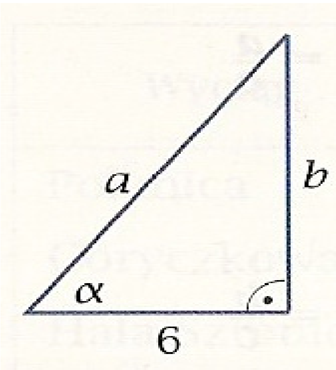
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi 3/4. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$cos\alpha = \frac{6}{a}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{a}$$

$$a = 8$$



Ciekawostka

Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim zapisywali oni hinduską nazwę sinusa bez samogłosek, jako *jb*. Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie zatoka to sinus, tak przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa sinus znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla różnych miar kątów, można odczytać z tablic.

Z tablic możemy korzystać w dwóch celach:

1. Możemy odczytać wartość danej funkcji dla danego kąta.

2. Możemy odczytać, z jakim kątem mamy do czynienia, mając podaną wartość danej funkcji.

Funkcje trygonometryczne i ich wartości odczytywane z tabeli wykorzystujemy do obliczania długości poszczególnych boków lub miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2

Podaj wartość tangensa kąta o mierze 15°.

Dla podanego kąta i funkcji odczytujemy wartość:

	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	-
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046
13°	0.225	0.9744	0.2309	4.3315
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874

Możemy więc zapisać, że tangens 15° wynosi 0,2679:

tg $15^\circ = 0{,}2679$

Przykład 3

Podaj miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,6023. Dla podanego kąta i funkcji odczytujemy wartość. Szukamy w kolumnie funkcji cosinus podanej wartości (0,6023), a jeżeli nie ma jej w tabeli, szukamy wartości najbliższej do danej (dla naszego przykładu będzie to wartość 0,6018):

	sin	cos	tg	ctg
46°	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
47°	0.7314	0.682	1.0724	0.9325
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
49°	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
50°	0.766	0.6428	1.1918	0.8391
51°	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
52°	0.788	0.6157	1.2799	0.7813
53°	0.7986	0.6018	1.327	0.7536
54°	0.809	0.5878	1.3764	0.7265
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
56°	0.829	0.5592	1.4826	0.6745
57°	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494

Kąt ma więc w przybliżeniu miarę 53°.

5.3 Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

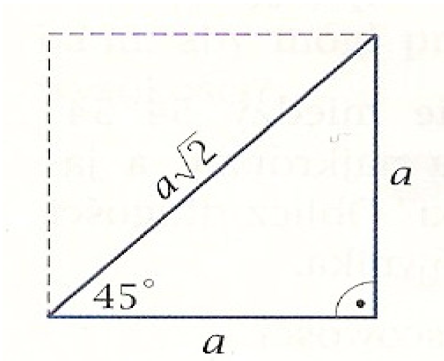
Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°, korzystamy z tego, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° jest połową kwadratu.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°.

$$sin45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{a}{a} = 1$$



Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60°, korzystamy z tego, że trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° to połowa trójkąta równobocznego.

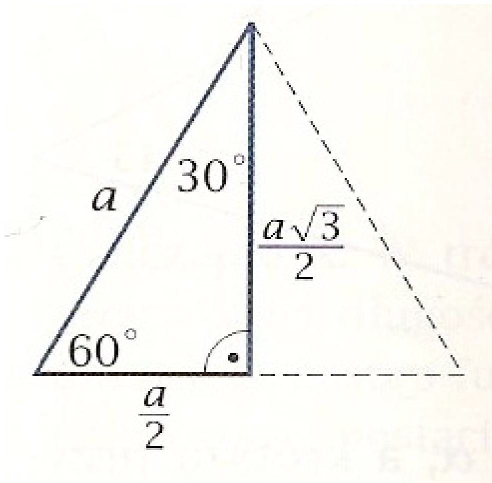
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°.

$$sin30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



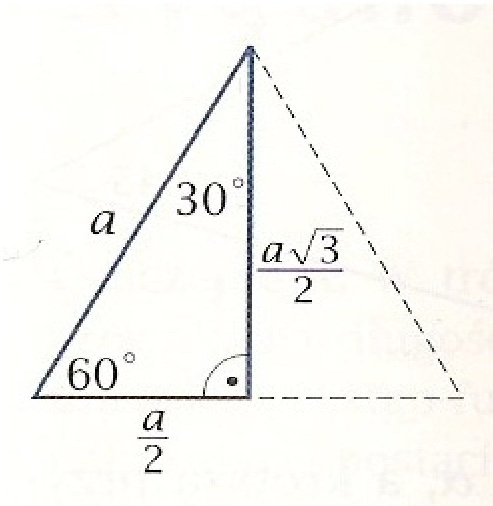
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°.

$$sin60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



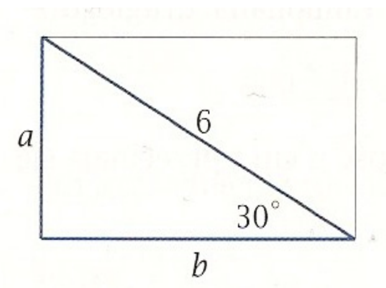
Wartości funkcji trygonometrycznych

α	30°	45°	60°
$sin\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\ \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 5-1 – Wartości funkcji trygonometrycznych

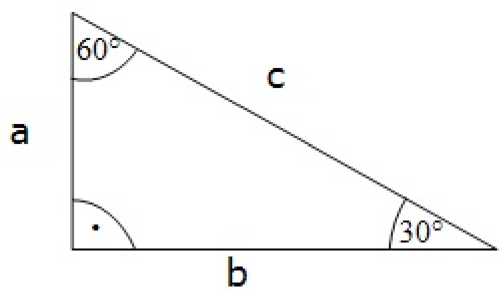
Przykład 1

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



Przykład 2

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.



$$\sqrt{3}c = 12/:\sqrt{3}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

ZADANIA

5.3.1 Oblicz:

a) $sin30° \cdot cos60° + 2sin45°$

b) $tg45° + sin60° + 2cos30°$

c) $tg30° \cdot ctg60° - sin30° \cdot cos30°$

d) $(tg30° - ctg30°): cos30°$

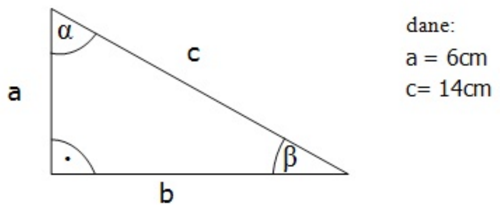
e) $\sqrt{2tg^2 60° - 4cos^2 45°} - ctg45°$

Odpowiedź: a) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$; b) $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{12-9\sqrt{3}}{36}$; d) $-1\frac{1}{3}$; e) 6.

5.3.2 Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.

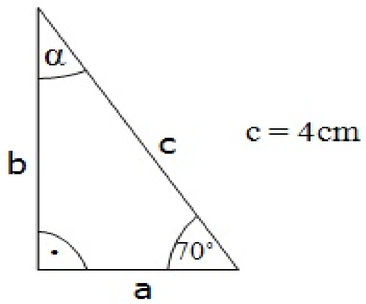
Odpowiedź: $P = 9\sqrt{3} cm^2$.

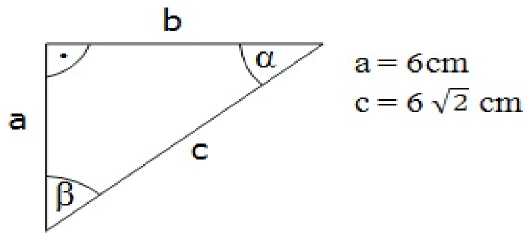
5.3.3 Oblicz miary kątów trójkąta.



Odpowiedź: $\alpha = 65°, \beta = 25°$.

5.3.4 Rozwiąż podane trójkąty prostokątne





Odpowiedź: a) $\alpha = 20°, a = 1{,}368\ cm, b = 3{,}7588\ cm$; b) $\alpha = 45°, \beta = 45°, b = 6\ cm$.

5.3.5 Linę podtrzymującą maszt przymocowano na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy naprężona lina z poziomem?
Odpowiedź: Lina nachylona jest do poziomu pod kątem około 64°.

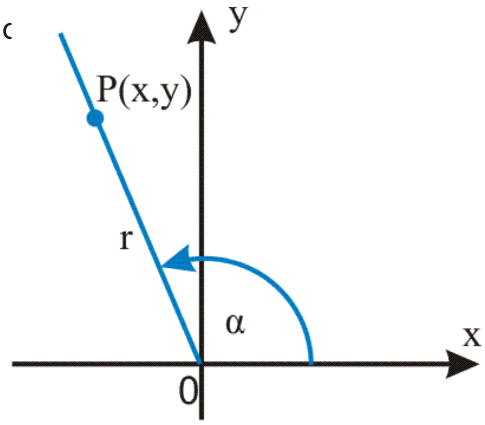
5.3.6 Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 45°. Oblicz jego pole, jeżeli jego podstawy mają długość 12 cm i 6 cm.

Odpowiedź: $P = 27\sqrt{3}cm^2$.

5.4 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych kątów, umieszczamy te kąty w układzie współrzędnych.

Dowolny kąt w układzie współrzędnych to kąt skierowany, którego ramieniem początkowym jest c



α – kąt skierowany

dodatnia półoś x – ramię początkowe kąta α

półprosta $OP^{\rightarrow}$ – ramię końcowe kąta α

$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – promień wodzący punktu $P \neq 0$, gdzie $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta α.

Rysunek 5-4 – Promień wodzący

DEFINICJE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DOWOLNEGO KĄTA

Sinusem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem dowolnego kąta C w układzie współrzędnych nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do odciętej tego punktu.

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Cotangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do rzędnej tego punktu.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych katów o mierze $0°, 90°$ i $180°$.

Dla ułatwienia obliczeń, na końcowym ramieniu każdego kąta obieramy punkt, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1.

Dla kąta $0°$, $P = (1, 0)$

$x = 1, y = 0, r = 1$

$$sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$tg0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$$

Dla kąta $90°$, $P = (0, 1)$

$x = 0, y = 1, r = 1$

$$sin90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$cos90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$tg90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$$

$$ctg90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

Dla kąta $180°$, $P = (-1, 0)$

$x = -1, y = 0, r = 1$

$$sin180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$cos180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$tg180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} - nie\ istnieje$$

Wyniki umieścimy w tabeli:

α	0°	90°	180°
$sin\ \alpha$	**0**	**1**	**0**
$cos\ \alpha$	**1**	**0**	**−1**
$tg\ \alpha$	**0**	–	**0**
$ctg\ \alpha$	–	**0**	–

Tabela 5-2 – Wartości funkcji trygonometrycznych

ZADANIE

5.4.1 Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany α, w którym punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta, a następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta:

a) $P = (1,7)$ b) $P = (-2,5)$ c) $P = (-\sqrt{3}, -4)$ d) $P = (6, -3)$

Odpowiedź:

a) $r = 5\sqrt{2}, sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}, cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, tg\alpha = 7, ctg\alpha = \frac{1}{7}$;

b) $r = 29, sin\alpha = \frac{5}{29}, cos\alpha = \frac{-2}{29}, tg\alpha = -\frac{5}{2}, ctg\alpha = -\frac{2}{5}$;

c) $r = 19, sin\alpha = -\frac{4}{19}, cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{19}, tg\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{2}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

d) $r = 3\sqrt{5}, sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}, cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, tg\alpha = -\frac{1}{2}, ctg\alpha = -2$.

5.5 Wzory redukcyjne

Teraz nauczę się:

Korzystać ze wzorów typu: $sin(90° - \alpha) = cos\alpha$.

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

Jeśli argument zmienia się w nieparzystą wielokrotność kąta $\frac{\pi}{2}$, to funkcja przechodzi w kofunkcję (sinus w cosinus, cosinus w sinus, tangens w cotangens, cotangens w tangens). Ponieważ wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, więc należy je poprzedzić odpowiednim znakiem, pisząc prawą stronę wzoru. Znak piszemy taki, jaki odpowiada funkcji trygonometrycznej kąta α występującej z lewej strony wzoru.

Tabela wzorów redukcyjnych

$\varphi =$	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
	$\frac{\pi}{2} - a$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\pi - a$	$\pi + a$	$\frac{3}{2}\pi - a$	$\frac{3}{2}\pi + a$	$2\pi - a$
$sin\ \varphi$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\ \varphi$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
$tg\ \varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\ \varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tabela 5-3 – Wzory redukcyjne

Przykład 1

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos\alpha$$

Funkcja przeszła w kofunkcję, bo kąt zmienił się o $\frac{\pi}{2}$. Znak z prawej strony jest dodatni (+), bo kąt $\frac{\pi}{2} + \alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam sinus jest dodatni.

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

Funkcja nie zmieniła się, bo kąt zmienił się o π. Znak z prawej strony jest ujemny (–), bo kąt $\pi - \alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam cosinus jest ujemny.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
$sin\ \alpha$	+	+	–	–
$cos\ \alpha$	+	–	–	+
$tg\ \alpha$	+	–	+	–
$ctg\ \alpha$	+	–	+	–

Tabela 5-4 – Znaki funkcji trygonometrycznych

Zapamiętaj wierszyk!

W pierwszej wszystkie są dodatnie,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus.

Przykład 2

$$sin150° = sin(180° - 30°) = sin30° = \frac{1}{2}$$

$$cos420° = cos(4 \cdot 90° + 60°) = cos60° = \frac{1}{2}$$

$$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$$

$$cos\frac{3}{4}\pi = cos135° = cos(180° - 45°) = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ZADANIA

5.5.1 Oblicz:

a) $sin120°$ b) $cos315°$ c) $tg(-840°)$

d) $sin\frac{\pi}{3}$ e) $ctg(-2\pi)$ f) $2sin^2 225° - ctg330° \cdot tg450°$

Odpowiedź: a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) Nie ma rozwiązania; f) $1 + \sqrt{3}$.

5.5.2 Korzystając z wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $\frac{cos135°+tg330°}{ctg225° \cdot sin840°}$ b) $sin\frac{5\pi}{4} \cdot tg\frac{4\pi}{3} + cos2\frac{1}{2}\pi$

Odpowiedź: a) $\frac{-\sqrt{6}-2}{3}$; b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

5.5.3 Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

5,6 Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Teraz nauczę się:

Stosować proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1, tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznaczyć wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Jedynka trygonometryczna

$$\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Uzasadnimy wzór dla sinusa i cosinusa kąta ostrego.

$$sin\alpha = \frac{a}{c} sin\alpha = \frac{a}{c},\ cos\alpha = \frac{b}{c} cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

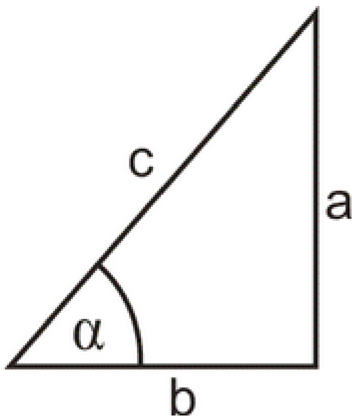
$$a^2 + b^2 = c^2 /: c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$



Rysunek 5-5 – Twierdzenie Pitagorasa

Wniosek:

Jeżeli $\alpha \epsilon (0°; 90°)$, to:

$$\boldsymbol{sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha}$$

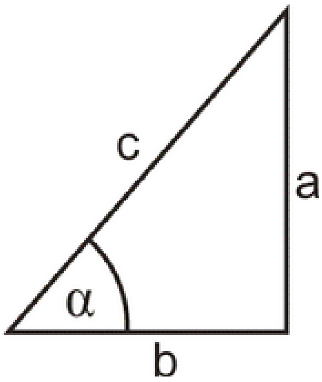
$$\boldsymbol{\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = ctg\alpha}$$

Przykład 1

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$,

b) $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$.



Niech będzie dany trójkąt prostokątny:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha : cos\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha$,

b) $\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha : sin\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = ctg\alpha$.

Ponieważ wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta ostrego są liczbami odwrotnymi, to:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

Z tego wynika, że $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$

Przykład 2

Wiedząc, że $cos\alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2}$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

Przykład 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną: $sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - \left(\frac{sinx}{tgx}\right)^2$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie:

$$\frac{sinx}{tgx} = sinx : tgx = sinx : \frac{sinx}{cosx} = sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} = cosx$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - (cosx)^2$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx(1 - cos^2x) - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx \cdot sin^2x - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sin^3x - cos^2x$$

$$L = P$$

ZADANIA

5.6.1 Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych:

a) $cos\alpha = \frac{1}{4}$,

b) $tg\alpha = 2\sqrt{2}$.

Odpowiedź: a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, tg\alpha = \sqrt{15}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, cos\alpha = \frac{1}{3}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.6.2 Oblicz $a + b$, gdy $a = 1 - cos^2\alpha, b = tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 45°$.

Odpowiedź: 1.

5.6.3 Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Odpowiedź: $sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{1}{2}$.

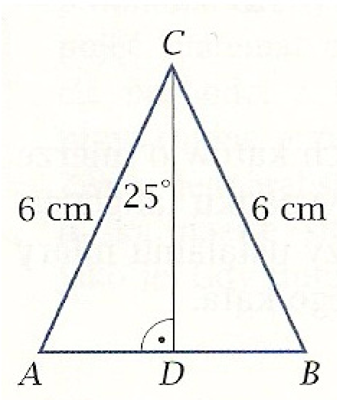
5.7 Zastosowanie trygonometrii

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać wiadomości i umiejętności w zadaniach oraz problemach życia codziennego

Przykład 1

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta? Jaką długość ma wysokość opuszczona na tę podstawę?



Wartość $\sin 25°$ odczytujemy z tablic.

$\sin 25° \approx 0{,}4226$

$|AB| = 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5{,}1$

$cos25° = \frac{|CD|}{6}$

$|CD| = 6 \cdot cos25°$

Wartość $\cos 25°$ odczytujemy z tablic.

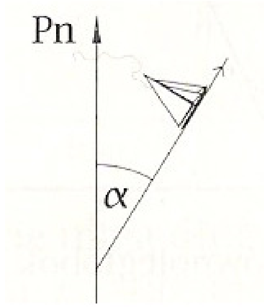
$cos25° \approx 0{,}906$

$|CD| = 6 \cdot 0{,}906 \approx 5{,}4$

Odpowiedź: Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości, a wysokość około 5,4 cm.

Przykład 2

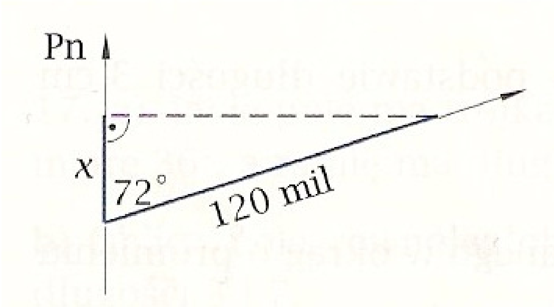
Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°.
O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).



Rysunek pomocniczy do zadania

$$\frac{x}{120} = \cos 72°$$

$$x = 120 \cdot \cos 72°$$



Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tablic.

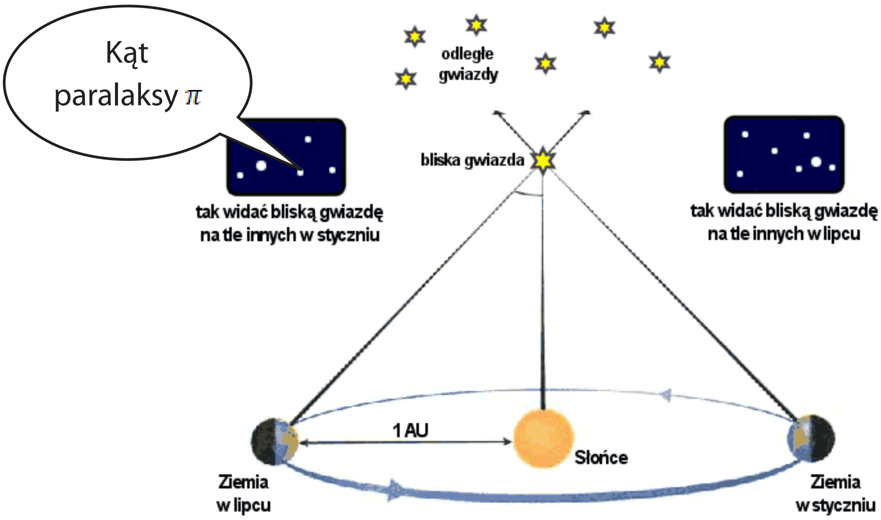
$$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$$

Odpowiedź: Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

Ciekawostka

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się przy pomiarze odległości do trudno dostępnych obiektów, np. do wyznaczania odległości obiektów astronomicznych przy pomocy zjawiska paralaksy.
Paralaksa to zjawisko pozornej zmiany położenia obiektu oglądanego z dwóch kierunków.

W praktyce najłatwiej zobaczyć zmianę położenia na tle innych odległych obiektów. Paralaksę geocentryczną stosuje się do pomiarów odległości w Układzie Słonecznym, wówczas za bazę przyjmuje się promień Ziemi. Do wyznaczenia odległości do innych gwiazd, za bazę obiera się jedną jednostkę astronomiczną, czyli średnią odległość Ziemia – Słońce (149,6 mln km). Można zmierzyć położenie danej gwiazdy na tle odległych gwiazd w dwóch momentach czasu, gdy Ziemia jest na przeciwnych miejscach na swojej orbicie. Otrzymujemy wtedy podwojony kąt paralaksy (2π).



Rysunek 5-6 – Kąt paralaksy

Kąt ten jest na tyle mały, że wyrażamy go w sekundach łuku i oznaczamy symbolem π. **Jedna sekundy łuku,** czyli odległość, z jakiej obiekt o średnicy równej średniej odległości Ziemi od Słońca miałby rozmiary jednej sekundy łuku na niebie[66].

Ciekawostka

Parsek – jednostka odległości używana w astronomii. Jest to odległość, dla której paralaksa roczna położenia Ziemi, widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity, wynosi 1 sekundę łuku. Parsek można równoważnie opisać jako odległość, z jakiej połowa wielkiej osi orbity ziemskiej (czyli 1 j.a.) jest widoczna jako łuk o długości 1 sekundy kątowej.

Słowo parsek zostało wprowadzone przez Herberta Turnera w XIX wieku. Utworzył on je jako zbitkę pierwszych sylab słów **par**alaksa i **sek**unda. Parsek oznaczany jest skrótem **pc** lub **ps**. Używanie drugiego ze skrótów nie jest wskazane, gdyż jest on identyczny ze skrótem dla pikosekundy (1 ps = 10^{-12} s)[67].

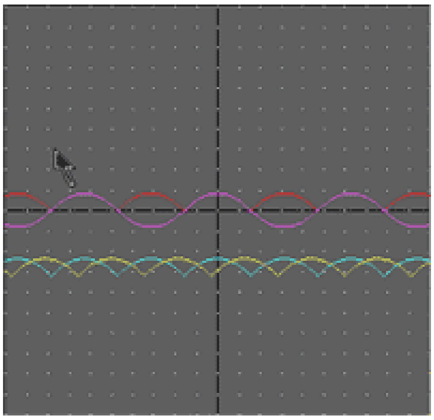
1 pc ≈ 3,2616 roku świetlnego ≈ **206265 jednostek astronomicznych ≈ $3{,}086 \cdot 10^{16}$** m

66 74 www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk, 19.04.2013.

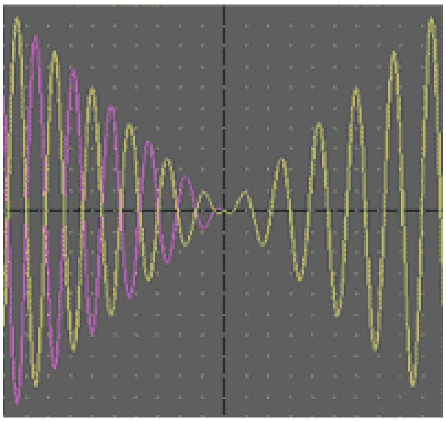
67 www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek, 20.04.2013.

Ciekawostka

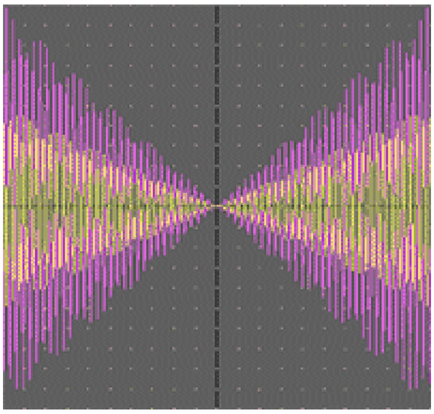
$y = sin(cos(x))$



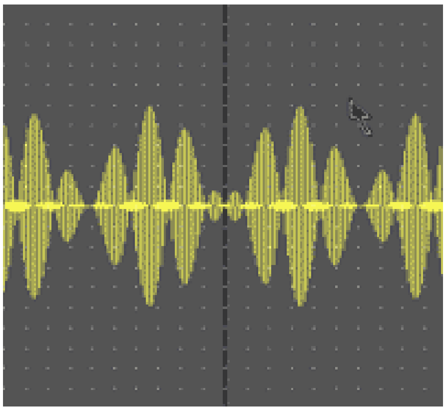
$y = -x \cdot cos(100x)$



$y = x \cdot sin(20x)$



$y = 5sin(0,5x) \cdot cos(50x)$



Zadania

5.7.1 Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Ramię tego trapezu ma długość $10\ cm$, a obwód wynosi $40\ cm$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

Odpowiedź: $2\ cm$, $18\ cm$.

5.7.2 Oblicz wysokość drzewa, które daje cień o długości 17 m przy wysokości słońca 54°. *Wysokość słońca – kąt między kierunkiem promieni słonecznych a płaszczyzną horyzontu.*

Odpowiedź: 23,4 m.

5.7.3 Najbardziej „stroma" kolej na świecie znajduje się w Gwatemali. Tory biegną pod kątem 52°. Na jaką wysokość wjedziesz po przejechaniu 1000 m?

5.7.4 Pod jakim kątem nachylona jest do podłoża drabina o długości 10 m, jeżeli sięga ona na wysokość 8 m? Jak wysoko sięgnie ta drabina, jeżeli kąt między nią a ziemią będzie wynosił 60°? ($\sqrt{3} \approx 1,73205$)

5.7.5 Obserwator stoi na stromym brzegu na wysokości 35 m nad wodą. Widzi żaglówkę pod kątem 12° do poziomu wody. Jak daleko jest ta żaglówka od brzegu?

5.7.6 Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi znajduje się Księżyc, jeżeli kąt paralaksy wynosi $\pi = 57'$. Przyjmij promień Ziemi R = 6378 km.

Odpowiedź: $d = \frac{R}{tg\pi} = 384000$ km.

5.7.7 Oblicz kąt paralaksy najbliższej nam gwiazdy Proxima Centauri, znajdującej się w odległości 4,3 lat świetlnych od Ziemi. Podpowiedź: Rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu jednego roku. (Jaką drogę pokona światło? $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$)

Odpowiedź: $d = 4{,}3$ lat świetlnych $= 4{,}3 \cdot 365{,}35 \cdot 24 \cdot 3600\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 4{,}1 \cdot 10^{16}$ m

$R = 149\,600\,000 \text{ km} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

$tg\alpha = \frac{r}{d} \approx 6{,}36 \cdot 10^8$

$\alpha = (3{,}6 \cdot 10^{-6})°$

5.7.8 Po upływie 6 miesięcy pozycja obserwowanej gwiazdy zmieniła się, tak że jej kąt paralaksy wyniósł 0,00013°. Oblicz odległość gwiazdy od Ziemi, wiedząc, że promień orbity Ziemi wynosi $1{,}496 \cdot 10^8$ km. Odległość wyraź w kilometrach i parsekach.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{r}{l}$, $l = \frac{r}{tg\alpha} = 6{,}6 \cdot 10^{13}$ km = 2,14 pc.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy $\cos\alpha$ jest równy:[68]

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{65}}{9}$

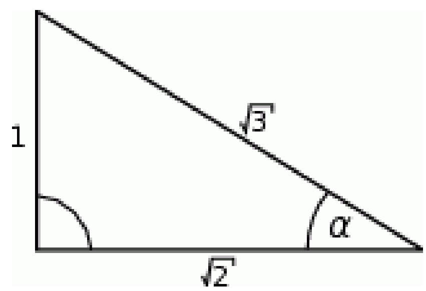
2. Dany trójkąt jest prostokątny (patrz rysunek). Wtedy $tg\alpha$ jest równy:

a) $\sqrt{2}$,

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



3. Kąt α jest ostry i $tg\alpha = 4/3$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

68 Zadania: 1, 2, 3 zaczerpnięto z próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

4. Kąt α jest ostry i $sin\ \alpha = 3/4$. Wartość wyrażenia $2 - cos^2\alpha$ równa się:[69]

a) $\frac{25}{16}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{17}{16}$ d) $\frac{31}{16}$

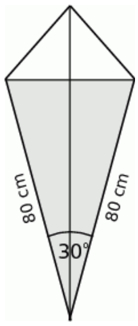
5. Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa:

a) 3200 cm^2

b) 6400 cm^2

c) 1600 cm^2

d) 800 cm^2



6. Kąt α jest ostry i $tg\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $cos\ \alpha$.

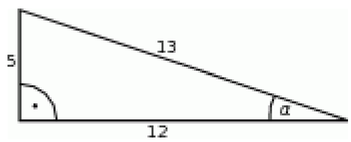
7. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy:[70]

a) $cos\,\alpha = \frac{5}{13}$

b) $tg\alpha = \frac{13}{12}$

c) $cos\,\alpha = \frac{12}{13}$

d) $tg\alpha = \frac{12}{5}$



8. Kąt $\boldsymbol{\alpha}$ jest ostry i $cos\,\alpha = \frac{5}{13}$, wtedy:[71]

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

9. Wartość wyrażenia $\frac{sin^2 38^\circ + cos^2 38^\circ - 1}{sin^2 52^\circ + cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ d) 1

10. **(2 pkt)** Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$.

11. Liczba $tg\,30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa:[72]

a) $\sqrt{3} - 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i |AB| = 13 oraz |BC| = 13. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

a) $\frac{12}{13}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{13}{12}$

---

69 Zadania: 4, 5, 6 zaczerpnięto z matury z matematyki, CKE, maj, 2010.
70 Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
71 Zadania: 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2011.
72 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.

13. Kąt α jest ostry i $cos\,\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ jest:[73]

a) mniejsza od –1 b) równa 1 c) większa od 1 d) równa 0

14. Kąt α jest ostry i $sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy $cos\alpha$ jest równy:[74]

a) $\frac{45}{49}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

15. Kąt α jest ostry i $sin\,\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas:[75]

a) $\cos\alpha = \sin\alpha$ b) $\cos\alpha > \sin\alpha$

c) $\cos\alpha < \sin\alpha$ d) $\cos\alpha = 1 - \sin\alpha$

16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy:[76]

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{4}{3}$

17. Wyrażenie $\frac{1-sin^2\alpha}{\frac{1}{tg^2\alpha}}$, gdzie α jest kątem ostrym, można zapisać w postaci:

a) $sin2\ \alpha$ b) $\frac{cos^4\alpha}{sin\alpha}$ c) $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$ d) $\frac{1}{sin\alpha}$

18. **(2 pkt.)**Wykaż, że jeżeli kąt α jest kątem ostrym i $tg\,\alpha = 2$, to $cos\,\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. **(2 pkt)** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

20. Oblicz wartość wyrażenia $tg^2\alpha - 3cos^2\alpha$, jeżeli $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem ostrym.

21. **(4 pkt)** Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$. Oblicz wartość $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$ i $tg\,\alpha$[77].

22. **(2 pkt)** Drabina o długości 2,5 m oparta o mur styka się z nim na wysokości 2 m. Na jakiej wysokości zetknie się z murem drabina o długości 3,5 m, jeśli obie drabiny nachylone są pod takim samym kątem do podłoża?

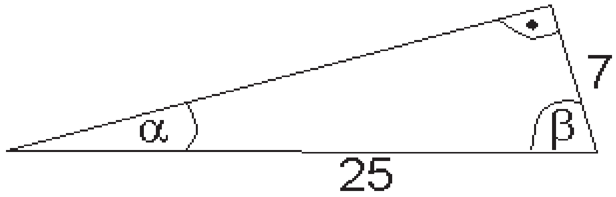
23. **(2 pkt)** Posługując się wzorem: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, oblicz $sin75^\circ$.

24. **(2 pkt)** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$[78].

25. **(2 pkt)** Oblicz $a–b$, gdy $a = sin^4\alpha - cos^4\alpha$, $b = 1 - 4sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.

73 Zadania: 13, 14 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2010.
74 Próbna matura z Operonem, listopad, 2009.
75 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2011.
76 Zadania:18, 19, 20 zaczerpnięto z arkusza maturalnego, OKE Poznań, styczeń, 2013.
77 Zadania: 21, 22, 23 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
78 Zadania: 24, 25, 26, 27 zaczerpnięte z informatora maturalnego, CKE, 2007.

26. (**4 pkt**) Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia $(tg\beta - \frac{1}{sin\beta})^2 \cdot cos\,\alpha$.



27. (**4 pkt**) Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{ctg\alpha - tg\,\alpha}{ctg\alpha + tg\,\alpha}$.

28. (**5 pkt)** Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α[79].

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $sin\,\alpha - tg\,\alpha < 0$,

b) Dla $sin\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

79 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2009.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka, Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty*, Matura 2009 – Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb
2. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png
3. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png
4. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png
5. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
7. www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza
8. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
9. www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie
10. www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html
11. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
12. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
13. www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi
14. www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent
15. www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf
16. www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy
17. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna
18. www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna
19. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd
21. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
24. www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
25. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
28. www.wiking.edu.pl/article.php?id=269
29. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf

Interdyscyplinarny podręcznik cz. II

Matematyka

KLASA II

Podręcznik dla nauczycieli – Liceum Ogólnokształcące i Technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Układy równań pierwszego stopnia

1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony;
- nieoznaczony;
- sprzeczny.

Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie.**

Przykład 1

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość $x = 2$ do pierwszego równania:

$$2 + y = 3$$
$$y = 1$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania.**

Przykład 3

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 /\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-2 \end{cases}$$

$$0=-1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax+by=A \\ cx+dy=B \end{cases}$$

Przykład 4[1]

$$\begin{cases} \frac{3x}{2}=\frac{2-y}{4}+6 \quad /\cdot 4 \\ 6(x-1)-2x+4=y-8 \end{cases}$$

Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 4\cdot\frac{3x}{2}=4\cdot\frac{2-y}{4}+4\cdot 6 \\ 6x-6-2x+4=y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3x=2-y+24 \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 6x=26-y \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" i z „y" na lewo, a liczby na prawo.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-8+2 \end{cases}$$

Wykonujemy końcowe obliczenia.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-6 \end{cases}$$

1 http://www.matematykam.pl/upraszczanie_ukladu.html, 17.02.2013r

KRÓTKIE PRZYPOMNIENIE Z GIMNAZJUM.

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODA PODSTAWIANIA

Przykład 5[2]

$$\begin{cases} 2x+4y=10 \\ -3x-5y=-13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} \boxed{2x+4y=10} \\ -3x-5y=-13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} \boxed{2x=10-4y} \quad /\div 2 \\ -3x-5y=-13 \end{cases}$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} \boxed{x=5-2y} \\ -3x-5y=-13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać: x = 5 - 2y. Uzyskane wyrażenie (5 – 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x=\boxed{5-2y} \\ -3(5-2y)-5y=-13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y \\ -15+6y-5y=-13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y \\ -15+y=-13 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x=5-2y \\ y=-13+15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y \\ y=2 \end{cases}$$

2 http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej y=2, do wcześniej wyprowadzonej postaci: x = 5 - 2y
Po podstawieniu obliczamy drugą niewiadomą (x).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu niewiadomych.

METODA PRZECIWNYCH WPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 6[3]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą x (bo ma najmniejszą wartość w obu równaniach).

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 4y = 10 & /\cdot 3 \\ \boxed{3x} - 5y = -7 & /\cdot (-2) \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest 6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 – w ten sposób w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „–" (tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaliśmy mnożenie równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia, przez liczby określone w poprzednim kroku.

3 http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases} \quad +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x - 6x} + 12y + 10y = 30 + 14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x" skracają się do „0"

$$12y + 10y = 30 + 14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y = 44$$
$$y = 2$$

$$2x + 4y = 10$$
$$2x + 4 \cdot 2 = 10$$
$$2x + 8 = 10$$
$$2x = 10 - 8$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik y=2).

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

1.2 Graficzna interpretacja układów równań

Teraz nauczę się wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1[4]

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

4 http://www.matematykam.pl/metoda_graficzna.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 & / \div 2 \\ -y = -3x + 8 & / \div (-1) \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y" (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu (x , y), to nasze rozwiązanie.

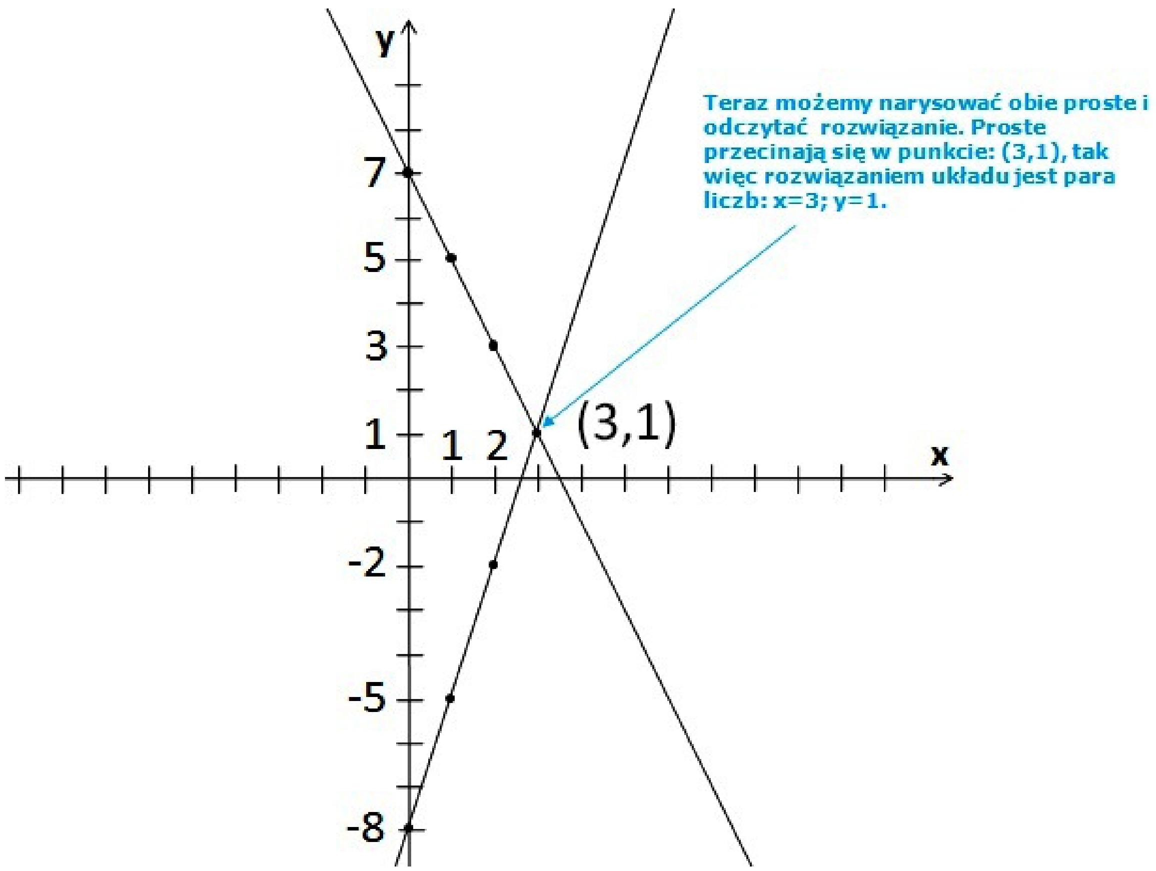
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	7	5	3

x	0	1	2
y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ZADANIA

1.1.1 Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 5x + 2\frac{1}{2}y = 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}3 \\ 2x + 5y = 8{,}6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 0{,}2y = 35 \\ 2{,}5x - 5y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \frac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1 - 0{,}3(y - 2) = \frac{x+1}{5} \\ \frac{y-3}{4} = \frac{4x+9}{20} - 1{,}5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - 2y) = -7x - 2 \\ 5(x + 1) - 2(3 - y) = -4(x + 2) \end{cases}$

n) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x + 1 \\ \frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

a) Układ równań nieoznaczony

b) Układ równań sprzeczny

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, układ równań oznaczony

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, układ równań oznaczony

e) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

f) $\begin{cases} x = 1{,}3 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

g) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 40 \end{cases}$, układ równań oznaczony

h) $\begin{cases} x = 3\frac{3}{23} \\ y = -1\frac{5}{23} \end{cases}$, układ równań oznaczony

i) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

j) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

k) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$, układ równań oznaczony

l) $\begin{cases} x = 5\frac{3}{11} \\ y = -1\frac{9}{11} \end{cases}$, układ równań oznaczony

m) $\begin{cases} x = -\frac{13}{15} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$, układ równań oznaczony

n) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

Wnioski:

- Dla układu **oznaczonego** proste przecinają się w 1 punkcie.
- Dla układu **nieoznaczonego** proste pokrywają się.
- Dla układu **sprzecznego** proste są równoległe i nie pokrywają się.

1.1.3. Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$

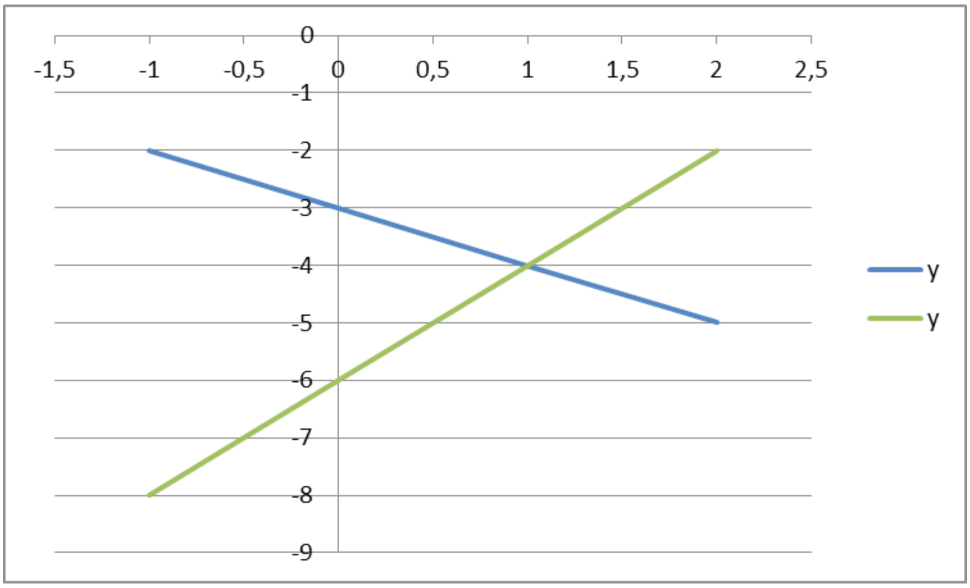
b) $\begin{cases} 3x + y = -(x - 8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$

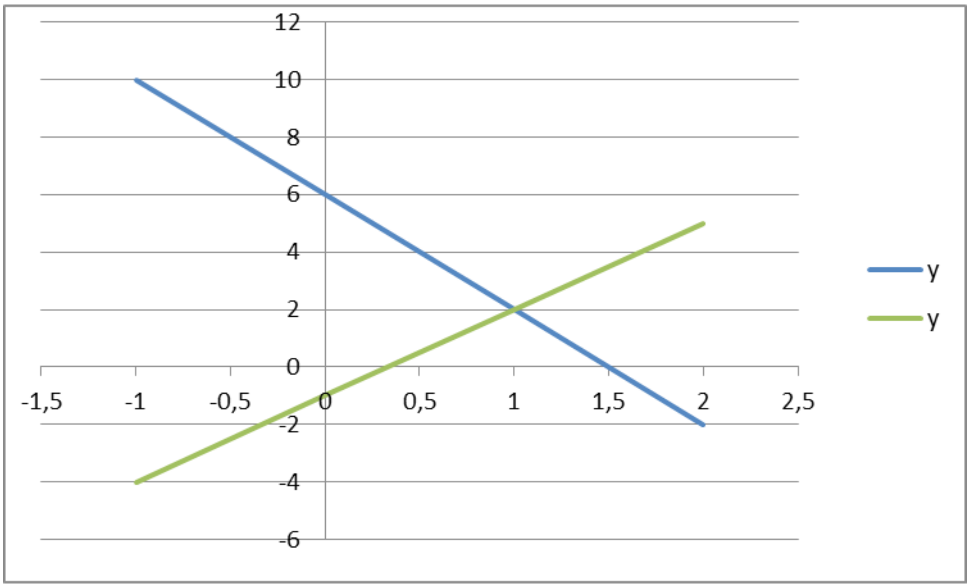
d) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

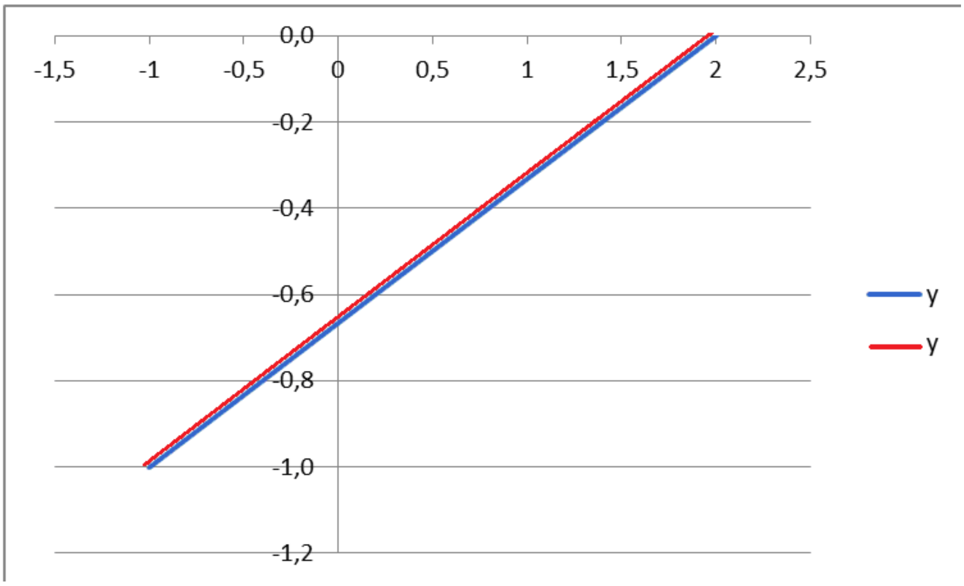
a) $x = 1$ $y = -4$



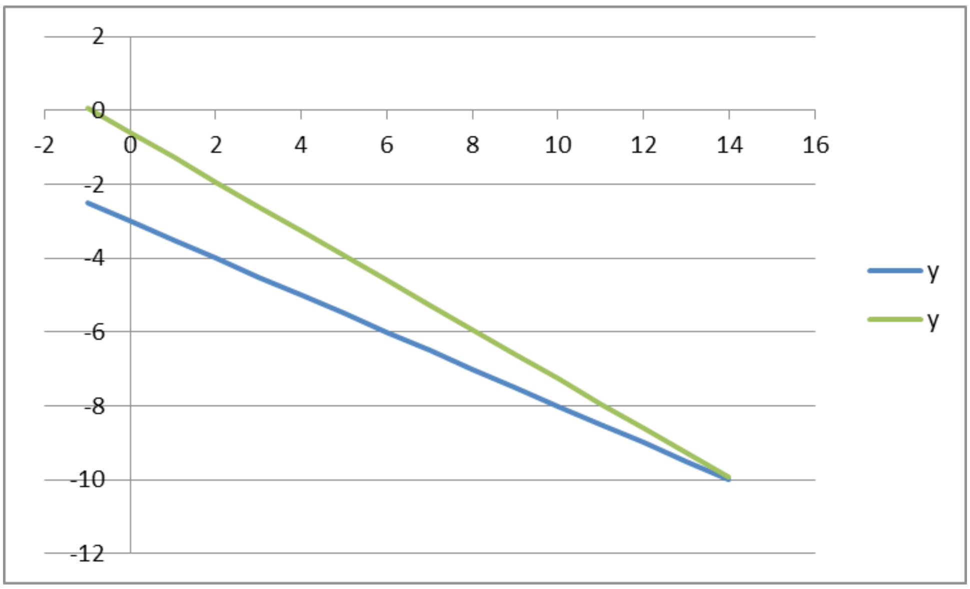
b) $x = 1$ $y = 2$



c) rozwiązaniem jest R



d)



$x = 13$, $y = -9{,}3$

1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową 10 $\frac{m}{s}$ i poruszał się z przyspieszeniem 1 $\frac{m}{s^2}$. Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość 20 $\frac{m}{s}$ i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 10\frac{m}{s}, v = 20\frac{m}{s}, a = 1\,\frac{m}{s^2}, s_0 = 100$ m

Szukamy: t, s

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

Odpowiedź: $t = 10$ s, $s = 250$ m

Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się 120 m^3 wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

Odpowiedź:

v_1 – objętość pierwszej rury

v_2 – objętość drugiej rury

p_1 – przepustowość pierwszej rury

p_2 – przepustowość drugiej rury

t_1 – czas napełniania przez pierwszą rurę

t_2 – czas napełniania przez drugą rurę

$v = p \cdot t$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$p_1 . 2 + p_2 = 120$

$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$

Odpowiedź: Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi 40 m^3

ZADANIA

1.1.3 W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością 20 $\frac{m}{s}$ przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem 2 $\frac{m}{s^2}$ w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_1 = 20\frac{m}{s}$, $a = 2\frac{m}{s^2}$

Szukamy: s, t, v_2

Układamy równania ruchu pojazdów. Zauważ, że drogi pojazdów są jednakowe.

$$\begin{cases} s = v_1 t \\ s = \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie:

$v_1 t = \frac{at^2}{2}$ stąd $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

Odpowiedź: $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

1.1.4 Z balkonu znajdującego się na wysokości 50 m spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?

Rozwiązanie

Mamy dane: $h = 50$ m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$

Szukamy: t, v

Doniczka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ziemskim g.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} \mathrm{h} = \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{cases}$$

Odpowiedź:

$t = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ s

$v = 31{,}6\frac{m}{s}$

1.1.5 Samolot podczas lądowania z szybkością 200 $\frac{m}{s}$, wyhamował na drodze 1000 m.

Z jakim opóźnieniem lądował samolot?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 200 \frac{mm}{s\ s}$, $s = 1500$ m, $v_k = 0$

Szukamy: a

Samolot poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Układamy równania ruchu:

$$\begin{cases} s = v_0 - \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

$t = \frac{v_0}{a}$, podstawiamy do pierwszego równania

$s = \frac{v_0^2}{2a}$, stąd $a = \frac{v_0^2}{2s} = 20 \frac{m}{s^2}$

Odpowiedź: $a = 20 \frac{m}{s^2}$

1.1.6 Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?

Odpowiedź: 2:5

1.1.7 Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty". Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Odpowiedź: Stefan miał 10 zł, a Jan 8 zł.

1.1.8 Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?

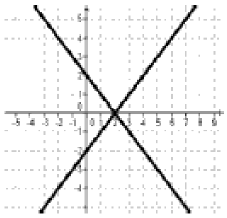
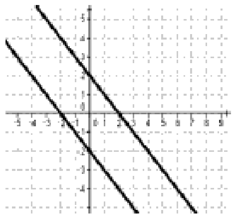
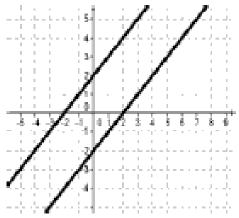
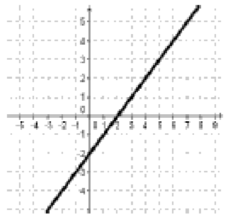
Odpowiedź: 2 długopisy i 9 ołówków

1.1.9 Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł . W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje 1 m^3 wody zimnej, a ile ciepłej?

Odpowiedź: 1 m^3 ciepłej wody kosztuje 6 zł, a zimnej 2 zł

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[5] Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Odpowiedź: c

2.[6] Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

Odpowiedź: d

3.[7] Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$y = -2x - \frac{1}{4}$ i $4x - 4y + 5 = 0$

Odpowiedź: (–1/2,3/4)

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

a) $x = 1, y = -1$ b) $x = -1, y = 1$ c) $x = -1, y = -1$ d) $x = 1, y = 1$

Odpowiedź: d

5.[8] Aby układ $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ był układem nieoznaczonym ,należy w miejsce a wstawić:

a) 10 b) –5 c) 5 d) –6

Odpowiedź: c

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia x – liczba uczniów klasy I, y – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

a) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}08x + 0{,}075y = 51 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}80 + 0{,}75y = 51 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0{,}8x + 0{,}75y = 66 \end{cases}$

Odpowiedź: c

---

5 Zadanie 1: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 18.02.2013.
6 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.
7 Zadanie 3, 4: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.
8 Zadanie 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

Odpowiedź: a

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

Odpowiedź: 15 kg wafli po12 zł i 5 kg wafli po 8 zł

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odpowiedź: $a = 6$, $b = 7$ lub $a = 7$, $b = 6$

2 Równania i nierówności kwadratowe

2.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowmi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$, bo można przeształcić do postaci: $3x^2 - 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$, gdzie $a = 5$,$b = 3$, $c = 7$
- $8x = 3x^2 + 1$, bo można przeształcić do postaci $3x^2 - 8x + 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = -8$, $c = 1$
- $x^2 + 5x = 0$, gdzie $a = 1$, $b = 5$, $c = 0$

Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + c = 0$, gdy $a \neq 0$, $b = 0$ i $c \neq 0$

- $x^2 - 16 = 0$
  $x^2 = 16$
  $x = 4$ lub $x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$
  $-3x^2 = 6 / \div (-3)$
  $x^2 = -2$ sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x-2)^2 = 4(1-x)$
  $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$
  $x^2 = 0$
  $x = 0$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx = 0$, gdy $a \neq 0, b \neq 0$ i $c = 0$

- $5x^2 - 3x = 0$

  $x(5x-3) = 0$

  $x = 0 \text{ lub } 5x - 3 = 0$

  $x = 0$ lub $x = \frac{5}{3}$

- $-5x - 4x^2 = 0$

  $-x(5+4x) = 0$

  $-x = 0 \text{ lub } 5 + 4x = 0$

  $x = 0 \text{ lub } 4x = -5$

  $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{4}$

ZADANIA

2.4.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2 + 16 = 0$ b) $-\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$ c) $2x^2 + 8 = 0$

d) $2x^2 - 5x = 0$ e) $-3x^2 + 6x = 0$ f) $-x^2 - 2 = 0$

g) $x(x-3) = 0$ h) $(x+2)(x-4) = 0$ i) $\frac{1}{2}x^2 = 0$

j) $5x^2 - 7x = 0$ k) $-3x^2 + 1 = 0$ l) $5x^2 = 1$

m) $-x^2 - 3 = 0$ n) $9x^2 + \frac{x}{3} = 0$ o) $x^2 = (1-x)(1+x)$

Odpowiedź:

a) $x = -4$ lub $x = 4$ b) $x = -3$ lub $x = 3$ c) brak rozwiązań

d) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$ e) $x = 0$ lub $x = 2$ f) brak rozwiązań

g) $x = 0$ lub $x = 3$ h) $x = -2$ lub $x = 4$ i) $x = 0$

j) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{5}$ k) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ l) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

m) brak rozwiązania n) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$ o) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

Teraz nauczę się:

- obliczać wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne

Rozwiążmy równanie typu $ax^2+bx+c=0$, gdzie a $\neq 0$.

Aby rozwiązać równanie $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, najpierw obliczamy wartość wyrażenia $\Delta = b^2-4ac$

- jeśli $\Delta \rangle 0$, to równanie ma dwa rozwiązania : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x=\frac{-b}{2a}$;
- jeśli $\Delta \langle 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole Δ i δ to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga – mała litera delta. Z symbolem δ spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

Przykład 1

- $6x^2-13x+5=0$

$$\Delta=(-13)^2-4\cdot 6\cdot 5=49$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$$
$$x_1=\frac{-(-13)-7}{2\cdot 6}=\frac{13-7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{-(-13)+7}{2\cdot 6}=\frac{13+7}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$
$$x_1=\frac{1}{2}\text{ lub } x_2=\frac{5}{3}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

- $6x^2-5x+2=0$

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 2=-23$$

Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3

➢ $6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{4}{2 \cdot 6} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

Rozwiązywanie równań, prowadzące do równań kwadratowych.

Równanie typu $ax^4 + bx^2 + c = 0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym.**

Przykład 4

$x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

$(x^2)^2 + 6x^2 + 5 = 0$

podstawiam $x^2 = t$ w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać

$t^2 + 6t + 5 = 0$

$a = 1, b = 6, c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$\Delta > 0$ – wyznaczamy dwa miejsca zerowe

$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Wracamy do podstawienia $x^2 = t$

$x^2 = -5 \vee x^2 = -1$

$x \in \varnothing \qquad x \in \varnothing$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań = $\varnothing$)

Przykład 5

Rozwiąż równania:

a) $5x-\frac{15}{x}=10$

Rozwiązanie

Założenie: $x \neq 0$

$Df: x \in R/\{0\}$

$5x-\frac{15}{x}=10 / \cdot x$

$5x^2-15=10x$

$5x^2-10x-15=0$

$\Delta=(-10)^2-4\cdot 5\cdot(-15)$

$\Delta=400$

$\sqrt{\Delta}=20$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)-20}{10}=-1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)+20}{10}=3$

b) $\frac{8}{4-x}=\frac{x}{x-4}$

Założenie:

$4-x\neq 0$ i $x-4\neq 0$

$x\neq 4$ i $x\neq 4$

$Df: x \in R/\{4\}$

$8\cdot(x-4)=(4-x)\cdot x$

$8x-32=4x-x^2$

$x^2+4x-32=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=144$

$\sqrt{\Delta}=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-12}{2}=-8$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+12}{2}=4$

$x_2 \notin Df$, stąd rozwiązaniem jest $x_1=-8$

ZADANIA

2.2.1. Rozwiąż równania:

a) $-x^2-2=0$ b) $x\sqrt{3}-\sqrt{2}x^2=0$ c) $x(x-3)=0$

d) $(x-4)(x+2)=0$ e) $(x-2)^2-9=0$ f) $16-(x+3)^2=0$

g) $(3x+2)^2=25$ h) $x^2+6x+5=0$ i) $x^2-10x+25=0$

j) $x^2+2x-120=0$ k) $12x^2+7x-12=0$ l) $3x^2-7x+2=0$

m) $9x^2-24x-20=0$ n) $-3x^2+1{,}5x+54=0$

Odpowiedź:

a) Brak rozwiązania b) $x=0$ lub $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $x=0$ lub $x=3$

d) $x=-2$ lub $x=4$ e) $x=-1$ lub $x=5$ f) $x=-7$ lub $x=1$

g) $x=-\frac{7}{3}$ lub $x=1$ h) $x=-5$ lub $x=-1$ i) $x=5$

j) $x=-12$ lub $x=10$ k) $x=-\frac{4}{3}$ lub $x=\frac{3}{4}$ l) $x=\frac{1}{3}$ lub $x=2$

m) $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\frac{10}{3}$ n) $x=-4$ lub $x=\frac{9}{2}$

2.2.2 Rozwiąż równania:

a) $(3x-2)^2+2=6$ b) $3(4x-1)^2+1=28$

c) $2(5x-2)^2+5=13$ d) $x(3x-5)=12$

e) $(2x-5)^2+(x+4)^2=41$ f) $\frac{x(x-2)}{5}-3x=2x^2+\frac{x(x+1)}{3}$

g) $(x-2)(x+5)-(x-7)(x+1)=(x+2)(x-3)$ h) $3x^2-6x-24=0$

i) $4x^2-20x+25=0$ j) $x^2-2x+4=0$

k) $4x^2-4x-1=0$ l) $3x^2+2x+2=3x+4x^2-3$

Odpowiedź:

a) 0 lub $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ lub 1 c) 0 lub $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{3}$ lub 3

e) 0 lub $\frac{12}{5}$ f) $-\frac{7}{4}$ lub 0 g) $5-2\sqrt{7}$ lub $5+2\sqrt{7}$ h) -2 lub 4

i) $\frac{5}{2}$ j) Brak rozwiązań k) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ l) Brak rozwiązań

2.2.3 Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+3}{x-1}=0$ b) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$ c) $\frac{x+1}{4x}=\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x-3}{6x}=\frac{2}{2x+3}$ e) $\frac{5-x}{5x}=\frac{2}{5x}$ f) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{-3}{3x-1}$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$ b) $x=-1$ lub $x=3$

c) $x=2-\sqrt{5}, x=2+\sqrt{5}$ d) $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}, x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=-5-5\sqrt{2}, x=-5+5\sqrt{2}$ f) równanie sprzeczne

2.2.4 Rozwiąż równania:

a) $x^4-4=0$ b) $x^4-4x^2=0$ c) $x^4-x^2-2=0$

d) $x^4-5x^2+4=0$ e) $x^4-4x^2+4=0$ f) $x^4+2x^2-3=0$

g) $x^4-x^2+1=0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą $x^2=t$, dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe)

Odpowiedź:

a) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ b) 0, –2,2 c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

d) –1,1, –2,2 e) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ f) –1, 1

g) brak pierwiastków rzeczywistych

2.3 *Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

TWIERDZENIE[9]

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ ma rozwiązania x_1,x_2, to:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

9 http://pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a, 18.02.2013.

Dowód

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4a\right)}{4a^2}=\frac{4a}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

UWAGA!

Wzory Viete'a mają szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

Jeżeli...

- $\Delta<0$ – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta=0$ – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta\geq 0$ – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta>0$ – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

- $x_1\cdot x_2<0$ – to są one różnych znaków,
- $x_1\cdot x_2>0$ – to mają one takie same znaki,
- $x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2>0$ – to są one dodatnie,
- $x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2<0$ – to są one ujemne.

Przykład 1

Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji $y=x^2+5x+6$

Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości a, b, c do wzorów:

$$x_1+x_2=\frac{-5}{1}=-5$$

$$x_2\cdot x_2=\frac{6}{1}=6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba –5, a iloczynem liczba 6?". Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb –2 i –3.

Rozwiązaniami są więc: $x_1=-2$ i $x_2=-3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

2.3.1 Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a oraz zastosuj je, aby uzyskać:

a) kwadrat sumy pierwiastków

b) sumę kwadratów pierwiastków

c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków

d) kwadrat różnicy pierwiastków

e) sumę sześcianów pierwiastków

Odpowiedź:

a) $(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)$

b) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$

d)
$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}$$

e)
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$$
$$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right)$$

2.3.2 Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2 - 300x - 200 = 0$

c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2 - x + 21 = 0$

Odpowiedź:

a) $-\frac{115}{203}$ b) 90400 c) $\frac{43}{441}$

Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m = 0$ ma:

a) dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$

Z założenia $m^2 + 4m > 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

b) jeden pierwiastek

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$

Z założenia $m^2 + 4m = 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m = -4$, $m = 0$

c) nie ma pierwiastków

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$

Z założenia $m^2 + 4m < 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m \in (-4; 0)$

ZADANIA

2.3.3 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a) $-2x^2 + 3mx - 1 = 0$ b) $mx^2 + 2x + m = 0$

Odpowiedź:

a) $m = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $m = -1$

2.3.4 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 1 = 0$ ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: $m \in \left(-\infty; 2\sqrt{2}\right)$

2.3.5 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania o różnych znakach.

Odpowiedź: $m \in (-1; 2)$

2.3.6 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Odpowiedź: brak rozwiązań

2.3.7 Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$ jest najmniejsza.

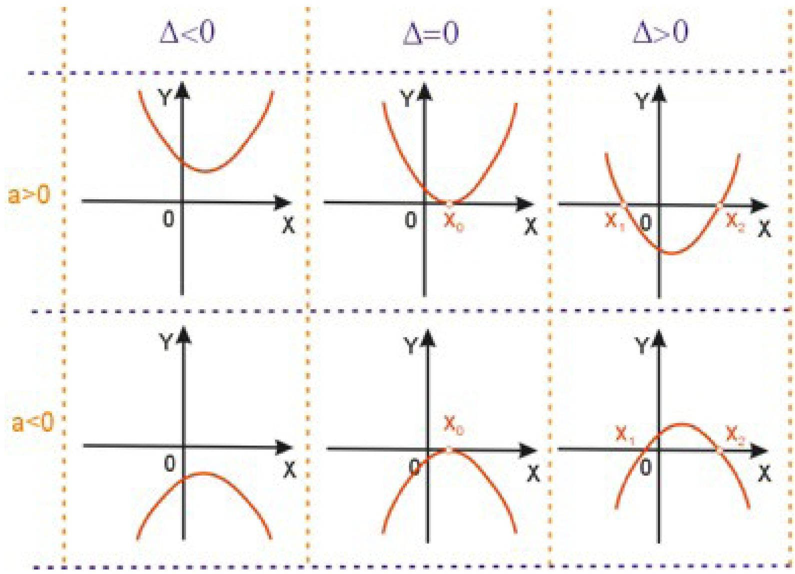
Odpowiedź: $m = 4$

2.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego.** Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika a oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

Przykład 1[10]

$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Krok 1. Wyznaczamy miejsca zerowe, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

10 http://www.matematykam.pl/ , 19.02.2013.

Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia. Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

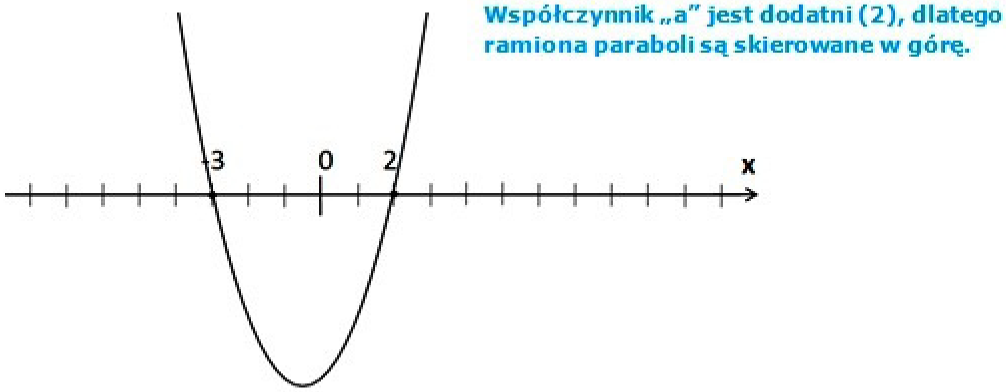
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2+10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2-10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Krok 2. Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

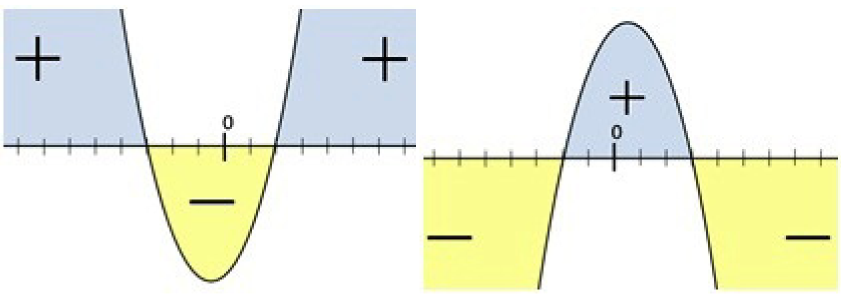
- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istotny jest jedynie kierunek ramion paraboli.



Krok 3. Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zacznijmy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę).

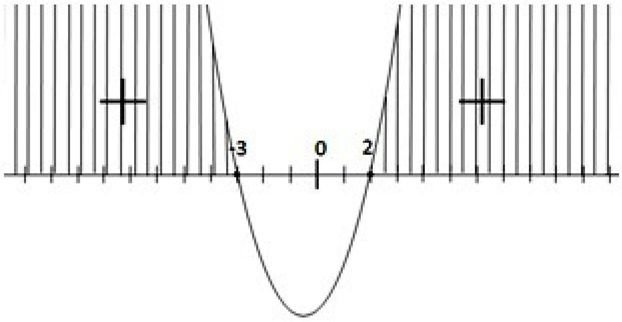
Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy” (<) lub „mniejszy lub równy” (≤), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy" (>) lub „większy lub równy" (≥), zakreślamy obszar dodatni.

W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem: ≥, dlatego zakreślimy obszar dodatni.

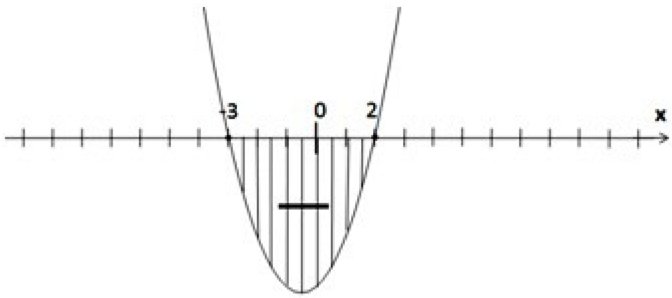


Krok 4. Odczytujemy rozwiązanie. Są nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in (-\infty,\ -3\rangle \cup \langle 2,\ \infty)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę (≤), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



$$x \in \langle -3,\ 2\rangle$$

INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI....

Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie mieć go wcale.

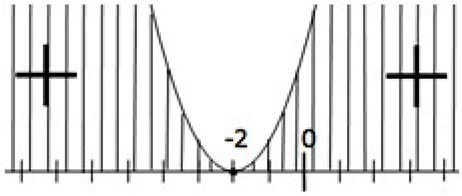
Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

- Z jednym miejscem zerowym

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady

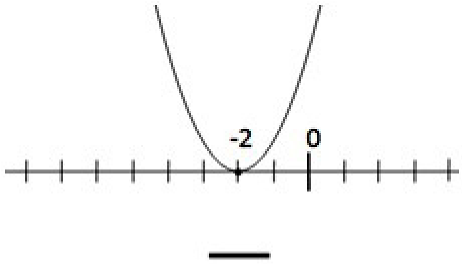
Znak nierówności $\geq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$x \in R$

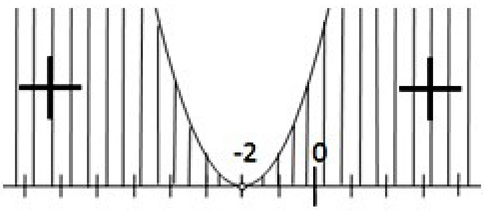
Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

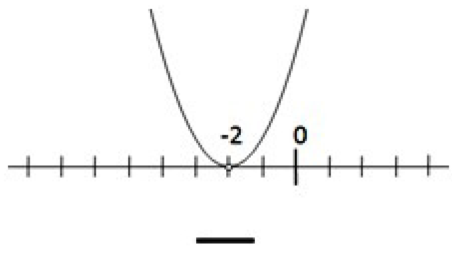
Znak nierówności $>$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

Znak nierówności $<$



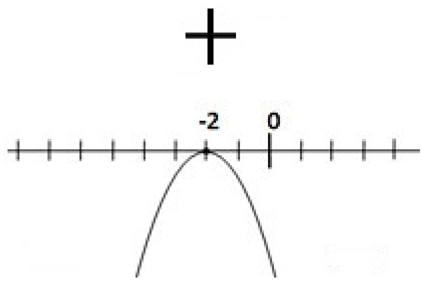
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W DÓŁ

Przykłady:

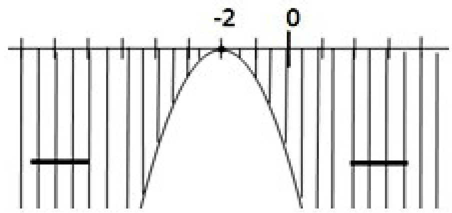
Znak nierówności $\geq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

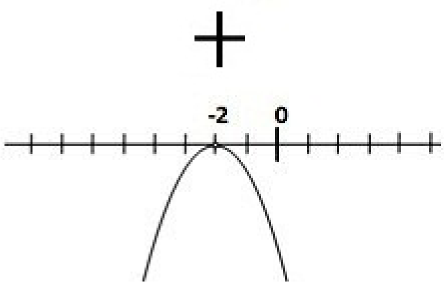
Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero (–2), także należy do rozwiązania.

$x \in R$

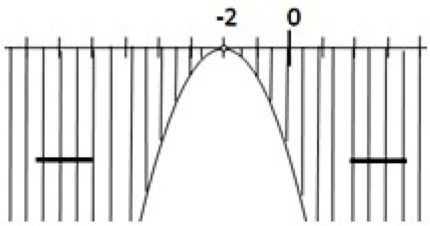
Znak nierówności >



Rozwiązaniem jest zbiór pust. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

Znak nierówności <



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba –2 do niego nie należy.

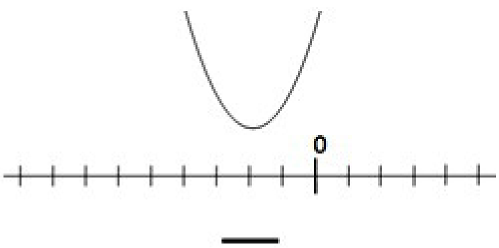
$x \in R \setminus \{-2\}$

- Bez miejsc zerowych

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady:

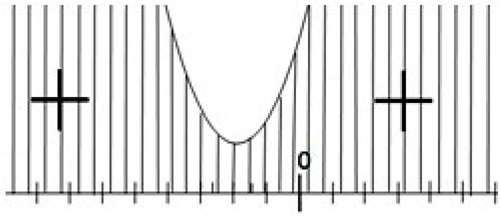
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in \varnothing$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



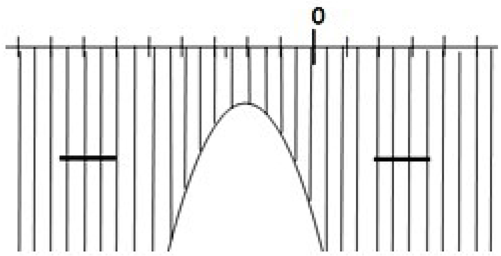
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in R$

– gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

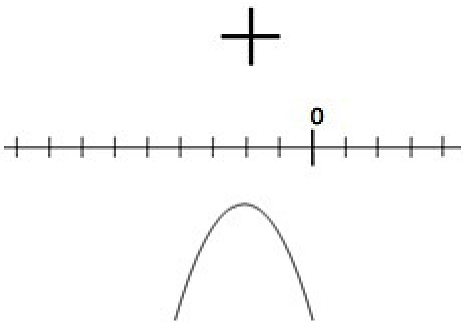
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in R$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in \varnothing$

ZADANIA

2.4.1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)\rangle 0$

b) $x(x+4)\langle 0$

c) $(x-7)(x+6)\geq 0$

d) $2x^2-8x\leq 0$

e) $x^2-16\rangle 0$

f) $x^2\leq 4$

g) $8x^2\geq 24$

h) $48\langle x^2$

i) $x^2-2x-8\geq 0$

j) $x^2+12x+24\rangle 0$

k) $x^2+12x+24\langle 0$

l) $x^2\langle -4(x+1)$

m) $(2x-6)^2\leq 4x-13$

n) $(2x-6)x\geq 0$

o) $(x-1)(x+3)>0$

p) $(2-x)(2x-3)\leq 0$

q) $-3x^2-8x>0$

r) $6x-2x^2\leq 0$

s) $3x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\leq 0$

t) $(x-3)\,(3x-4)-(x-3)\,(x+2)>0$

u) $(x+5)^2+(x+5)\,(x-3)\leq 0$

v) $(3x-4)\,(x+2)>(x+2)\,(x-1)$

w) $(4x-5)\,(x+4)>(x+4)^2$

x) $9x^2+6x+4<3$

y) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

z) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

Odpowiedź:

a) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

b) $(-4,0)$

c) $(-\infty,-6\rangle\cup\langle 7,+\infty)$

d) $\langle 0,4\rangle$

e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

f) $\langle -2,2\rangle$

g) $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3},+\infty)$

h) $(-\infty,-4\sqrt{3})\cup(4\sqrt{3},+\infty)$

i) $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 4,+\infty)$

j) $(-\infty,-6-\sqrt{3})\cup(-6+2\sqrt{3},+\infty)$

k) $(-6-2\sqrt{3},-6+2\sqrt{3})$

l) $\varnothing$

m) $\frac{7}{2}$

n) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

o) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

p) $(-\infty,\frac{3}{2}>\cup<2,\infty)$

q) $(0,4)$

r) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

s) $\left\langle -\frac{1}{6},1\right\rangle$

t) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

u) $\langle -5,-1\rangle$

v) $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},\infty)$

w) $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

x) brak rozwiązania

y) $x\in R$

z) $x\in R$

2.4.2 Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność:

a) $(x-1{,}2)(x-3{,}4)\langle 0$

b) $-x^2+3{,}6x\geq 0$

c) $x^2-6{,}25\langle 0$

d) $2x^2-0{,}6x-16{,}2\langle 0$

Odpowiedź:

a) $\{2,3\}$

b) $\{0,1,2,3\}$

c) $\{-2,-1,0,1,2\}$

d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2.4.3 Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a) $x^2-1\rangle 0,\ x^2+3x\leq 0$

b) $9x^2+9x+2\langle 0,\ x^2-9x+2\langle 0$

c) $x^2\geq 9$; $(x+7)(x-3)(5x+1)>0$

Odpowiedź:

a) $\langle -3,-1\ );\ x\in(\ -\infty,0\ \rangle\cup(1,+\infty)$

b) zbiór pusty; $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\setminus\{-7\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[11] Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa:

a) $-\frac{7}{2}$

b) $-\frac{7}{2}\frac{7}{2}$

c) $-\frac{3}{2}$

d) $-\frac{3}{4}$

Odpowiedź: c

2.[12] Rozwiąż nierówność: $-x^2+2x+8\geq 0$.

Odpowiedź: $x\in<-2,4>$

11 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 19.02.2013.

12 Zadanie 2, 3, 4: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php$x$ arkusze , 19.02.2013.

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 4$ jest:

a) (–2;2) b) (–∞;–2) ∪ (2;∞) c) (–∞;2) d) <–2;2>

Odpowiedź: a

4. Uzasadnij, że równanie $x^2 + (b - 2)x - 2b = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej b ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

5.[13] Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-3,3)$

6.[14] Zbiorem rozwiązań nierówności $x\,(x + 6) < 0$ jest:

a) (–6;0) b) (0;6) c) (–∞;–6) ∪ (0;∞) d) (–∞;0) ∪ (6;∞)

Odpowiedź: a

7. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, 1 > \cup < 7, \infty)$

8.[15] Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-2,5)$

9.[16] Liczba wszystkich rozwiązań równania $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

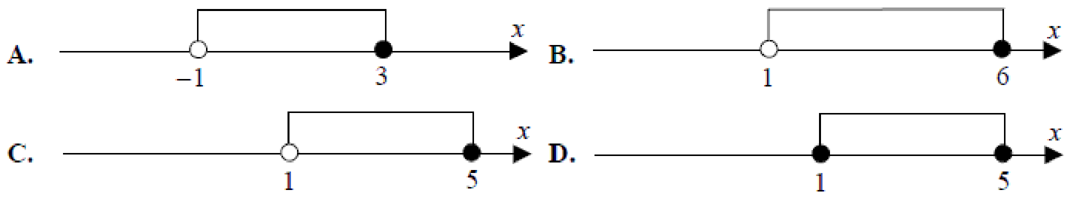
Odpowiedź: d

10 Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -\frac{1}{2} > \cup < 2, \infty)$

13 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 19.02.2013.
14 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.
15 Zadanie 8: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 19.02.2013.
16 Zadanie 9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 19.02.2013.

11.[17] Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5) \le 0$ i $x > 1$.



Odpowiedź: d

12. Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

13.[18] Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

Odpowiedź: d

14. Rozwiąż nierówność: $x^2 - x - 2 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \langle -1, 2 \rangle$

15.[19] Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 4 i 1 lub –4 i –1

16. Wartość k, dla której jeden z pierwiastków równania $x^2 + 9x + k = 0$ jest równy –3 wynosi:

a) –6 b) –18 c) 18 d) 6

Odpowiedź: c

17. Równanie $2x^2 - 4x - 3 = 0$:

a) nie ma rozwiązań, b) ma jedno rozwiązanie,

c) ma dwa rozwiązania , d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: c

17 Zadanie 11, 12: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013
18 .Zadanie 13,14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013.
19 Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

18. Rozwiązaniem równania $2(x-2)^2 = (x-2)\,(x+3)$ jest:

a) $x = -2$ i $x = -1$ b) $x = 7$ c) $x = 2$ i $x = 7$ d) $x = 1$ i $x = 2$

Odpowiedź: c

19. Podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich spełniających nierówność $(3-x)\,(3+x) > 0$ ma:

a) dwa elementy, b) skończoną liczbę elementów,

c) co najmniej 4 elementy, d) nieskończenie wiele elementów.

Odpowiedź: a

20. Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x-1)^2 \geq 5(x-1)$ jest:

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle -4, 1\rangle$ c) $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty)$ d) $\langle 1, \infty)$

Odpowiedź: b

21. Rozwiązaniem równania $x^2 + x = (x+1)^2 - 7(x+2)$ jest liczba:

a) $\frac{15}{8}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $-\frac{13}{6}$

Odpowiedź: d

22. Ile liczb pierwszych zawiera zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej $(x + 1)\,(x - 10) < 0$?

a) 5 b) 4 c) więcej niż 10 d) 6

Odpowiedź: b

23. Kwadrat piątej części stada małp pomniejszonej o 3 schował się w jaskini. Jedna małpa pozostała na drzewie. Ile małp liczy stado?

Odpowiedź: 50 małp

24. Liczby $2a - 2$, $2a + 2$, $a + 1$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

Odpowiedź: $a \in (3, \infty)$

25. Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

Odpowiedź: $x \in \{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$

25. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: –9, –7, –5 lub 5, 7, 9

2.5 *Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego

Teraz nauczę się rozwiązywać układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań metodą algebraiczną:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podstawiamy wyznaczone y z pierwszego równania do drugiego równania i otrzymujemy:

$$2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 / \div 2$$
$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy $\Delta = 9$, a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego: $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone x_1 i x_2 do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 11 = -1$$
$$y_2 = 2x_2 + 11 = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji: $y = 2x^2 + 20x + 47$ i $y = 2x + 1$ w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

ZADANIA

2.5.1 Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną:

a) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7{,}25 \end{cases}$

Odpowiedzi:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Brak rozwiązania

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -6\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -7\frac{1}{2} \end{cases}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[20] Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

2.[21] Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: 28 km

3.[22] W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Odpowiedź: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m $\times$ 8 m, a w drugim hotelu 35 m $\times$ 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m $\times$ 12 m, a w drugim 25 m $\times$ 14 m.

20 Zadanie 1: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.02.2013.
21 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
22 Zadanie 3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.

4.[23] Turysta pokonał pieszo trasę o długości 30 km z miejscowości A do miejscowości B ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $v = 6$ km/h, $t = 5$h

5.[24] Z miast A i B, odległych o 330 km, wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km, licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Odpowiedź: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

6.[25] Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa o długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąg pospieszny pokona tę trasę.

Odpowiedź: Pociąg pospieszny pokonał tę trasę w 2,5 godziny.

7.[26] Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440 zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż planowano. Co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Oblicz:

a) ilu uczniów pojechało na wycieczkę,

b) jaki był całkowity koszt wycieczki dla jednego uczestnika.

Odpowiedź: 45 osób, koszt dla uczestnika to 32 zł

8. Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań) i w sumie rozwiązała ich 448. Jeśli rozwiązywałaby codziennie o 4 zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o 2 dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

Odpowiedź: 16 dni, 28 zadań

23 Zadanie 4: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 20.02.2013.
24 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 20.02.2013.
25 Zadanie 6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
26 Zadanie 7, 8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu

3.1 Jednomian kwadratowy

Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

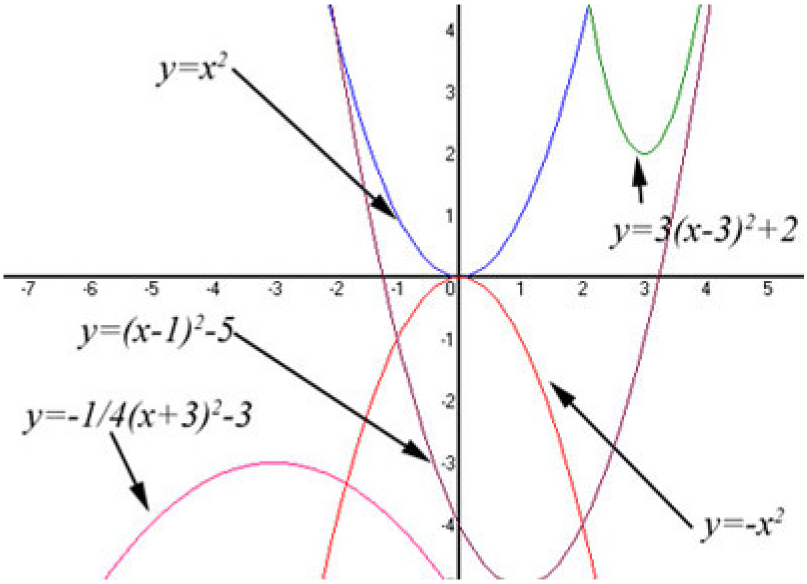
➡ Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**[27].

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

➡ Gdy współczynnik a jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry.

➡ Gdy współczynnik a jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

27 http://www.moskat.pl/szkola/matematyka/b_f_kwadratowa.php.



Przykłady funkcji kwadratowych:

$y = 5x^2 + 9x - 4$

$y = -x^2 - x$

$y = 2x^2 - 7$

$y = x^2$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy).

Jest to funkcja w postaci $y = ax^2$. Jest to więc przypadek, w którym $a \neq 0$ i $b = c = 0$.

Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$y = x^2$

$y = -x^2$

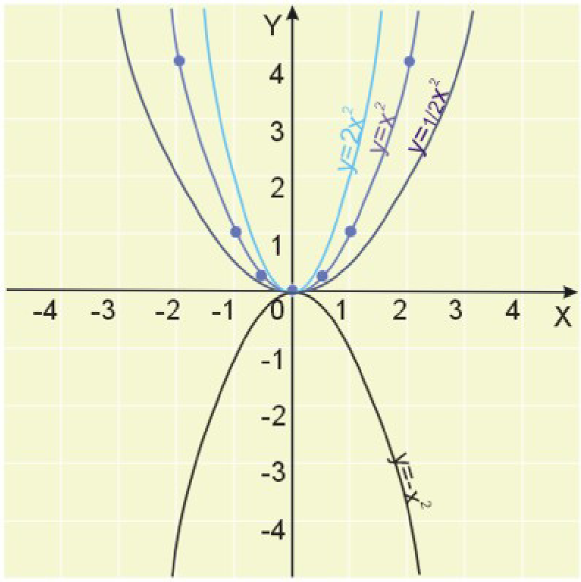
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie a jest dowolną liczbą.

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

x	–2	–1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	–4	–1	0	–1/4	–1	–4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2

Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji.



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**.
  Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik $a > 0$, oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik $a < 0$.
- Im większy jest współczynnik a, tym parabola jest „węższa".
- Parabola posiada jeden wierzchołek w punkcie (0,0).
- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór $(-\infty;0)$, gdy $a > 0$, oraz $(-\infty;0\rangle$, gdy $a < 0$.
- Oś OY jest osią symetrii paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.
- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale $(-\infty;0)$ i rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz rośnie w przedziale $(-\infty;0)$ i maleje w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a < 0$.
- Gdy $a < 0$, funkcja osiąga wartość największą (maksimum) w punkcie $x = 0$, natomiast dla $a > 0$ funkcja osiąga wartość najmniejszą (minimum) w punkcie $x = 0$.
- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 0$.

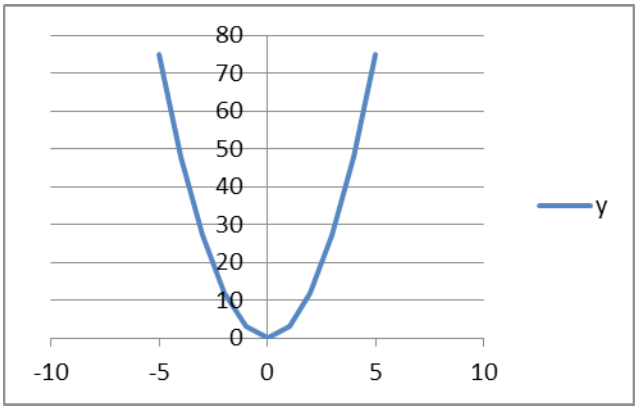
ZADANIA

3.1.1 Sporządź tabelkę wartości funkcji i naszkicuj wykres funkcji f.

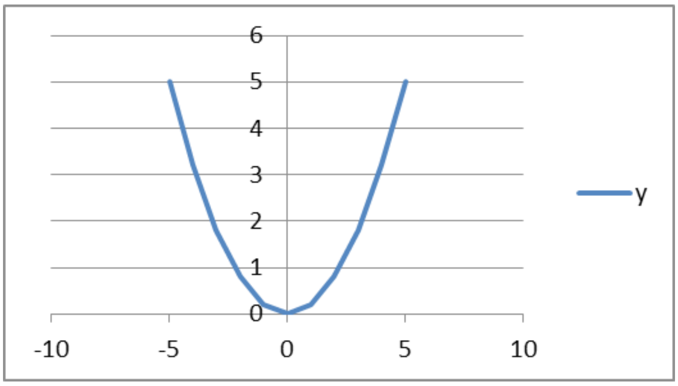
a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ c) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

Odpowiedź:

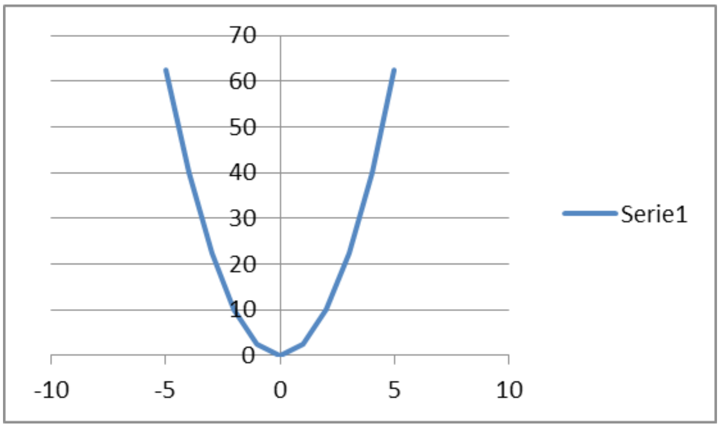
a)



b)



c)



3.1.2 prawdź, czy punkt K należy do paraboli $y = 4x^2$.

a) K = (4,32) b) K = (–2,16) c) $K = \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ d) $K = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Odpowiedź:

a) nie należy b) należy c) nie należy d) należy

3.1.3 Omów następujące własności:

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x)=-x^2$ c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$

Odpowiedź:

a) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

b) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale , funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

c) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

d) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

3.2 Parabola w układzie współrzędnych

Teraz nauczę się interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

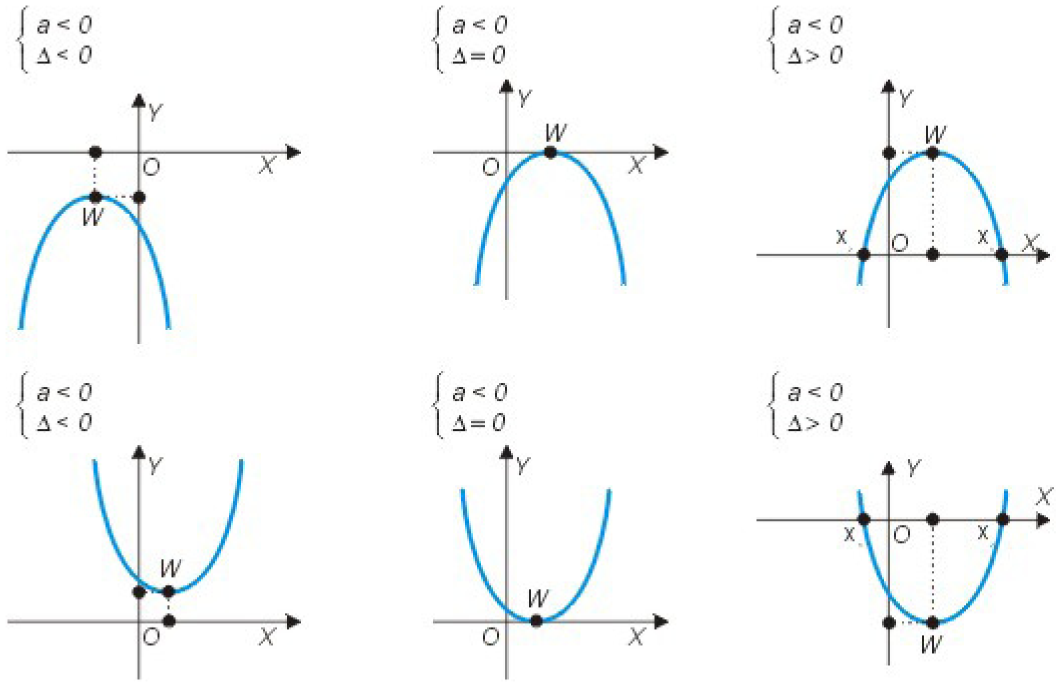
Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

1. znaku współczynnika $\boldsymbol{a}$, który warunkuje skierowanie ramion paraboli,

2. wartości wyróżnika **Δ**, która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią OX :

- ¾ dla **Δ < 0** parabola leży pod ($\boldsymbol{a}$ **< 0**) lub nad ($\boldsymbol{a}$ **> 0**) osią OX , nie ma z osią OX punktów wspólnych,
- ¾ dla **Δ = 0** parabola jest styczna do osi OX ,
- ¾ dla **Δ > 0** parabola przecina oś OX w dwóch punktach.

Różne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



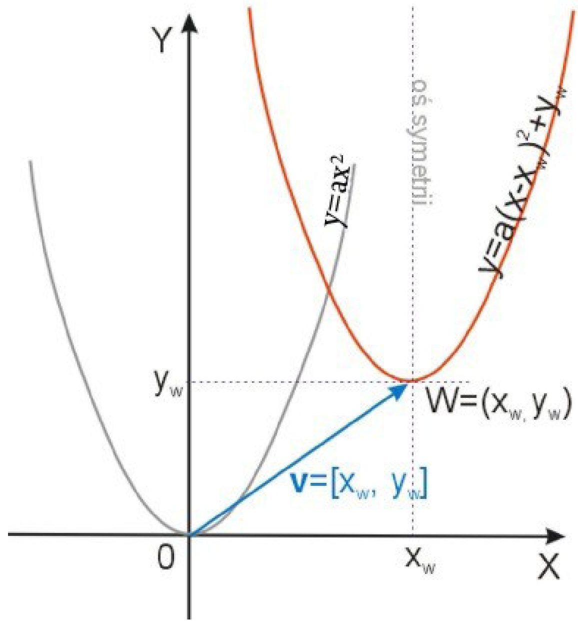
Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$ jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [x_w, y_w]$, przy czym

$$x_w = -\frac{b}{2a},\ y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w -$$

W przypadku dodatniego współczynnika a, mamy:

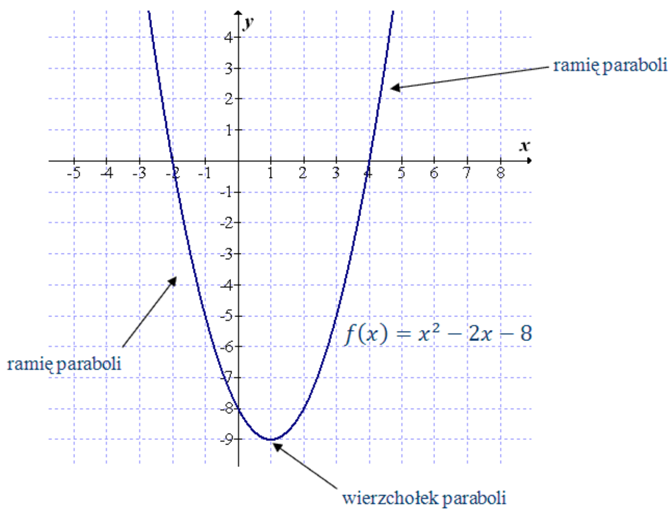


Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli $a > 0$, w dół w przypadku gdy $a < 0$.
- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli $\Delta > 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta = 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$.
- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funkcja przyjmuje minimum dla $a > 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Funkcja przyjmuje maksimum dla $a < 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Gdy $a > 0$, funkcja maleje w przedziale $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$ i rośnie w przedziale $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Gdy $a < 0$, funkcja rośnie w przedziale $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$ i maleje w przedziale $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

ZADANIA



3.2.1 Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (wykres funkcji powyżej).

a) Dziedzina:…

b) Zbiór wartości: ZW =…

c) Miejsca zerowe:…

d) Współrzędne wierzchołka: W =…

e) Oś symetrii, to:…

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in$…

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in$…

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne:…

i) Monotoniczność:

– funkcja jest rosnąca w przedziale…

– funkcja jest malejąca w przedziale…

Odpowiedź:

a) Dziedzina: D = R.

b) Zbiór wartości: ZW = ⟨–9; +∞).

c) Miejsca zerowe: funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 4$.

➢ W = (1,–9)

➢ Oś symetrii: $x = 1$

d) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (4 +\infty)$.

e) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in (-2; 4)$.

f) Punkt przecięcia z osią y–ów ma współrzędne: (0, –8).

g) Monotoniczność: funkcja jest niemonotoniczna (jest jedynie monotoniczna przedziałami)

– funkcja jest rosnąca w przedziale $x \in (1,\infty)$

– funkcja jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty,1)$

3.2.2 Naszkicuj wykres jednomianu funkcji $f(x)$, a następnie przesuń równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile: jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a) $y = x^2,\ \vec{u} = [0,3]$ b) $y = -x^2,\ \vec{u} = [-1,0]$ c) $y = 2x^2,\ \vec{u} = [-3,2]$

Odpowiedź:

a) $y = x^2 + 3,\ D_f : x \in R,$ zbiór wartości $\langle 3,\infty)$, brak miejsc zerowych; W = (0,3); funkcja rośnie $(0,\infty)$; funkcja maleje $(-\infty,0)$

b) $y = -(x+1)^2,\ D_f : x \in R,$ zbiór wartości $(\infty\ \ ,0 >$, jedno miejsce zerowe $x = -1$; W = (–1,0); funkcja rośnie $(\infty,-1)$, funkcja maleje $(-1,\infty)$

c) $y = 2(x+3)^2 + 3,\ D_f : x \in R,$ zbiór wartości $\langle 2,\infty)$, brak miejsc zerowych; W = (–3,2); funkcja rośnie $(-3,\infty)$, funkcja maleje $(-\infty,-3)$

3.3 Postacie trójmianu kwadratowego

Teraz nauczę się:

- zapisywać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej

Postać iloczynowa trójmianu kwadratowego

TWIERDZENIE[28]

Dany jest trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie x_1 i x_2 są rozwiązaniami trójmianu:

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_0)^2$

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania: $(x - 3)(x + 2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod x 3, to pierwszy nawias się „wyzeruje". Iloczyn jakiejkolwiek liczby przez 0 daje nam 0.

Jeśli podstawimy pod drugi x liczbę 2, to ten nawias także nam się wyzeruje. Rozwiązaniami są więc wartości: $x = 3$ i $x = -2$.

Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Postępujemy analogicznie jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

---

28 http://pl.wikibooks.org.

$\Delta > 0$, więc korzystamy ze wzoru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Widzimy, że $a = 1$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$, stąd $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$, stąd otrzymujemy rozwiązanie $x = 1$, a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej korzystając ze wzoru

$y = a(x - x_0)^2$

Odpowiedź: $2(x-1)^2 = 0$

Sposób II

Policzymy deltę.

$\Delta = (-4)\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$x_0 = 1$

$\Delta = 0$ – korzystamy więc ze wzoru: $y = a(x - x_0)^2$

a jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy: $2(x - 1)^2 = 0$

Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7.

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy, że podstawimy te wartości do wzoru.

$(x-(-3))(x-7) = 0$

$(x+3)(x-7) = 0$

Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:

$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7. Można to sprawdzić poprzez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

ZADANIA

3.3.1 Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a) $12x^2 + 11x + 2 = 0$ b) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ c) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

d) $-7x^2 + 10x - 4 = 0$ e) $5x^2 - 3x = 0$ f) $9x^2 - 8 = 0$

g) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ h) $-x^2 + x + 6 = 0$ i) $3x^2 - 5x + 4 = 0$

j) $-4x^2 + 2x - 1 = 0$ k) $10 - 2x^2 = 0$ l) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$

Odpowiedź:

a) $12\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0$

b) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 0$

c) $\Delta < 0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

d) $\Delta < 0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

e) $5x\left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$

f) $9\left(x^2 - \frac{8}{9}\right) = 9\left(x - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

g) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = 0$

h) $-(x - 3)(x + 2) = 0$

i) $\Delta < 0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

j) $\Delta < 0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

k) $-2\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$ l) $\frac{1}{3}x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

3.3.2 Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego

a) $(x - 3)(x - 30) = 0$ b) $2(x - 2)(x + 5) = 0$

c) $\frac{11}{3}(x + 15)(x + 27) = 0$ d) $4x(x + 6) = 0$

e) $-2\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$ f) $-2(x + 1)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right) = 0$

g) $\left(x + 2 - \sqrt{3}\right)\left(x - 3 + \sqrt{2}\right) = 0$ h) $(2x - 3)(2x - 3) = 0$

Odpowiedź:

a) $x_1 = 3, x_2 = 30$ b) $x_1 = 2, x_2 = -5$ c) $x_1 = -15, x_2 = -27$

d) $x_1 = 0, x_2 = -6$ e) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$ f) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$

g) $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$ h) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

3.3.3 Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, mając dane pierwiastki:

a) 3 i 5 b) 4 i –9 c) $\frac{1}{3}$ i 7

d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ e) $\sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{7}$ i $1-\sqrt{7}$

Odpowiedź:

a) $b = -8$, $c = 15$ b) $b = 5$, $c = -36$ c) $b = 7\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{3}$

d) $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{6}{3}$ e) $b = -\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $c = 2+\sqrt{2}$ f) $b = -2$, $c = -6$

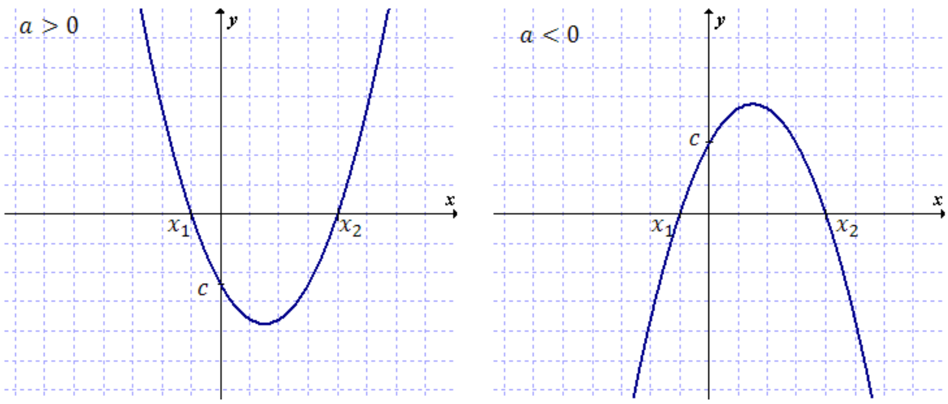
Postać ogólna funkcji kwadratowej

$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są współczynnikami liczbowymi i a ≠ 0, nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY (0, c).

Przykład



Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami x_1 oraz x_2). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2. Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka W funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a, p, q są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną funkcji kwadratowej**.

Współczynniki p i q to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez W = (p, q). Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne p i q ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zaletą postaci kanonicznej jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli.

Dodatkowo po współczynniku a możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry (a > 0), czy do dołu ($a < 0$).

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (gdy $\Delta > 0$) i $f(x) = a(x-x_0)^2$ ($\Delta = 0$) nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym, takim że $a \neq 0$. Literki x_0, x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$.

Uwaga!

Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje.

Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ($\Delta > 0$), to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli $\Delta = 0$, to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Zaletą postaci iloczynowej jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry (a > 0), czy do dołu ($a < 0$).

Reasumując

Dla $\boldsymbol{a \neq 0}$ trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

Postać ogólna	$y = ax^2 + bx + c$		
Postać kanoniczna	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x-p)^2 + q$ gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$		
Postać iloczynowa	$\Delta \langle 0$	$\Delta = 0$	$\Delta \rangle 0$
	Brak postaci iloczynowej	$y=a(x-x_0)^2$	$y = a(x-x_1)(x-x_2)$

ZADANIA

3.3.4 Wyznacz te wartości parametrów a, b i c, dla których $f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = ax^2 - 7x + c$ i $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$ i $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

a) $a = -2, b = 7, c = -5$

b) $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{7}{4}, c = -\frac{3}{8}$

3.3.5 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników a, b i c:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}$

c) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x-2)(x-3)$

e) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

f) $f(x) = (1-x)(3-x) + 6 - 2x$

g) $f(x) = -2(x-3)^2 + 18$

h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 6$

i) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$

j) $f(x) = 2\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right)$

Odpowiedź:

a) $f(x) = x^2 - x + 16\frac{1}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{8}$

c) $f(x) = -3x^2 - 24x - 49$

d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

e) $f(x) = -9x^2 + 6x + 5$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

g) $f(x) = -2x^2 + 12x$

h) $f(x) = 3x^2 + 6x + 6$

i) $f(x) = 2x^2 + 18x - 20$

j) $f(x) = 2x^2 + 4\sqrt{2} - 6$

3.3.6 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2 + 20x + 50 = 2(x + p)^2$

b) $3x^2 - 18x + 20 = 3(x + p)^2 + q$

c) $3x^2 - 15x + 25 = a(x + p)^2 + q$

d) $5x^2 + 12x - 6 = a(x + p)^2 + q$

Odpowiedź:

a) $p = -5,$

b) $p = 3, q = -7$

c) $a = 3, p = \frac{15}{6}, q = -\frac{75}{12}$

d) $a = 5, p = -1{,}2, q = -13{,}2$

3.3.7 Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a) $f(x) = 4x^2 + 6x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

e) $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2$

g) $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$

h) $f(x) = 2(x - 1)(x + 10)$

i) $f(x) = 3x(2 - 3x) + 5$

j) $f(x) = 4(x + 5)x$

Odpowiedź:

a) $p = -\frac{3}{4}, q = \frac{3}{2}, f(x) = 4(x + \frac{3}{4}) + \frac{3}{2}$

b) $p = 1, q = 3, f(x) = -2(x - 1) + 3$

c) $p = 1, q = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}$

d) $p = -2, q = 7, f(x) = -(x + 2) + 7$

e) $p = \frac{1}{8}, q = \frac{47}{64}, f(x) = (x - \frac{1}{8}) + \frac{47}{64}$

f) $p = -3, q = -8, f(x) = \frac{2}{3}(x + 3) - 8$

g) $p = 4, q = 10, f(x) = -2(x - 4) + 10$

h) $p = -4{,}5; q = -50{,}5; f(x) = 2(x + 4\frac{1}{2}) - 50\frac{1}{2}$

i) $p = \frac{1}{3}, q = 6, f(x) = -9(x - \frac{1}{3}) - 6$

j) $p = -2{,}5; q = -25, f(x) = 4(x + 2\frac{1}{2}) - 25$

3.3.8 Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $f(x) = 3x^2 + x + 5$
b) $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$
c) $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$
d) $f(x) = -2x^2 + 6x + 5$

Odpowiedź:

a) Brak miejsc zerowych
b) Jedno miejsce zerowe
c) Dwa miejsca zerowe
d) Dwa miejsca zerowe

3.3.9 Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$
b) $f(x) = -3(x-2)(x+5)$
c) $f(x) = 4(x+5)x$
d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-6)$

Odpowiedź:

a) $x_1 = -10, x_2 = 1$
b) $x_1 = -5, x_2 = 2$
c) $x_1 = -5, x_2 = 0$
d) $x_1 = -1, x_2 = 6$

3.3.10 Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a) $a = \sqrt{2}, x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{2}$
b) $a = -3, x_1 = -2, x_2 = 0$
c) $a = 7, x_0 = 9$
d) $a = \frac{1}{2}, x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{5}$

Odpowiedź:

a) $f(x) = \sqrt{2}(x+4)(x-\frac{1}{2})$
b) $f(x) = -3(x+2)x$
c) $f(x) = 7(x-9)^2$
d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$

3.3.11 Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a) $f(x) = (x-1)(x+5)$
b) $f(x) = -(x-6)(x+4)$
c) $f(x) = 2(x+1)(x+5)$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x+2)^2 - 9$
b) $f(x) = -(x-1)^2 + 25$
c) $f(x) = 2(x+3)^2 - 8$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-10)^2 + 128$

3.3.12 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ c) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

d) $f(x) = 9x^2 + 6x - 1$ e) $f(x) = -3x^2 + 5$ f) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

g) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$ h) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$ b) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$

c) $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ d) $x_1 = -\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right), x_2 = -\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

e) $f(x) = -3(x - \frac{1}{3}\sqrt{15})\ (x + \frac{1}{3}\sqrt{15})$ f) $f(x) = -2(x - 1)(x + \frac{1}{2})$

g) $f(x) = -2(x - 5)(x + \frac{1}{2})$ h) $x_1 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}, x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$

3.4 Rysowanie wykresów funkcji[29]

Teraz nauczę się

- szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.

Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

Poniżej przedstawimy dwa sposoby rysowania wykresów.

Sposób I:

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

1) wierzchołek paraboli,

2) punkty przecięcia z osią $0X$ (punkty dla miejsc zerowych),

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

29 http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html, 21.02.2013.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

$$y = -x^2 - 2x + 8$$

a = -1, b = -2, c = 8

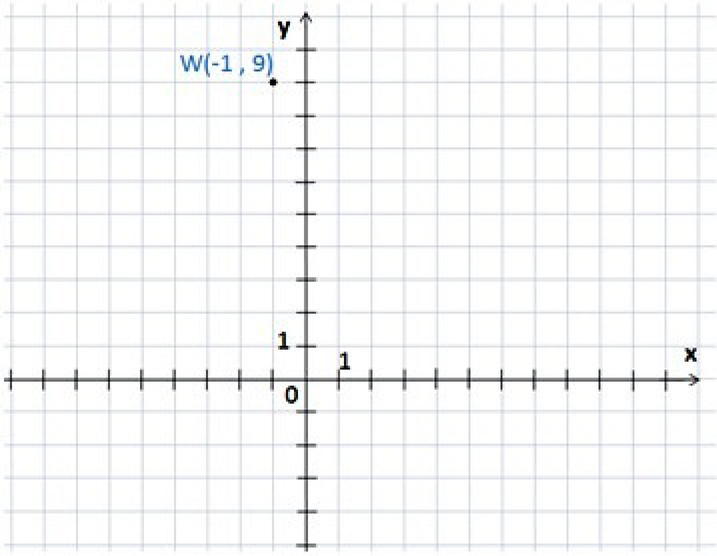
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1,\ 9)$$



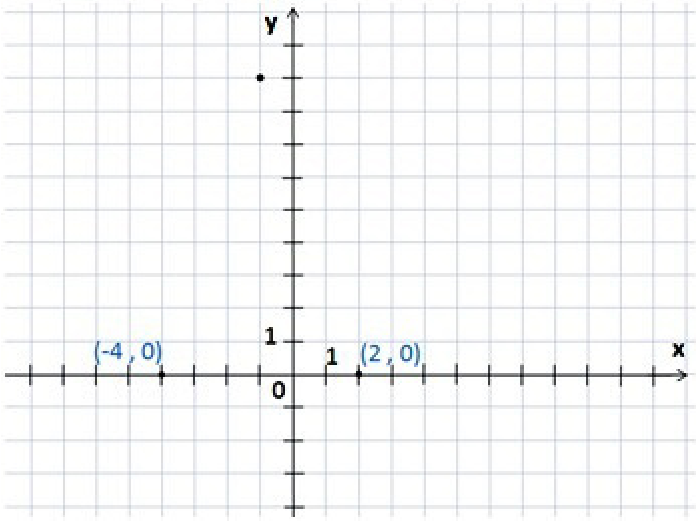
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

UWAGA: Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punktu, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2+6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2-6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

(-4, 0); (2, 0)



3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych:

Wybraliśmy argument –5.

Podstawiamy argument -5 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(-5)^2 - 2 \cdot (-5) + 8 = -25 + 10 + 8 = -7$$

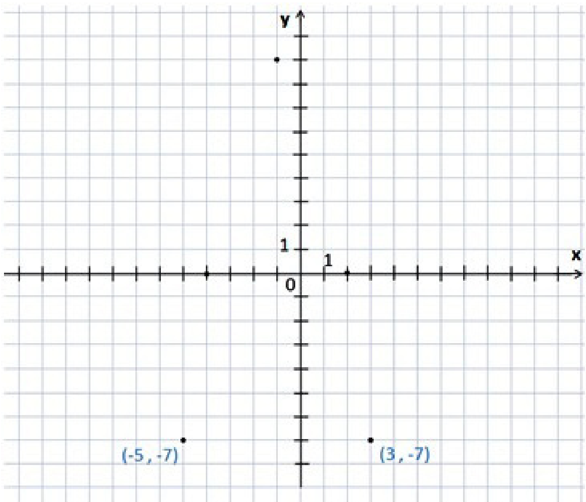
Współrzędne punktu: (–5, –7)

Punkt na prawo od miejsc zerowych:

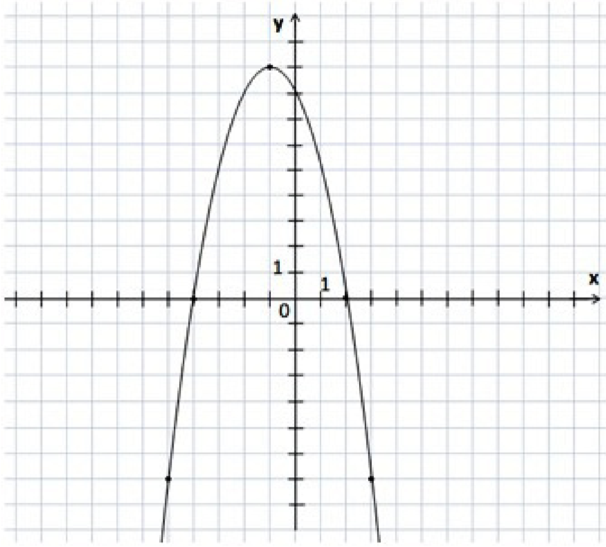
Podstawiamy argument 3 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = -9 - 6 + 8 = -7$$

Współrzędne punktu: (3, –7)



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.

Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze <u>zmienionym znakiem!</u>

$X_1 = 1$

$X_2 = -3$

$$(1, 0); (-3, 0)$$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

RÓŻNICE:

1) wierzchołek paraboli

Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru.

Przykład1

$$y = 2(x+5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p" będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q" się nie zmienia:
X = -5
y = 2

$$W=(-5, 2)$$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Sposób II:

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

Przykład 2

$y = -2(x + 1)^2 - 3$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków).

W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszy przypadek funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W=(0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych:

Wybraliśmy:

x = -2

$$y=-2\cdot(-2)^2=-2\cdot 4=-8$$

(-2, -8)

x = -1

$$y=-2\cdot(-1)^2=-2\cdot 1=-2$$

(-1, -2)

x = 1

$$y=-2\cdot 1^2=-2\cdot 1=-2$$

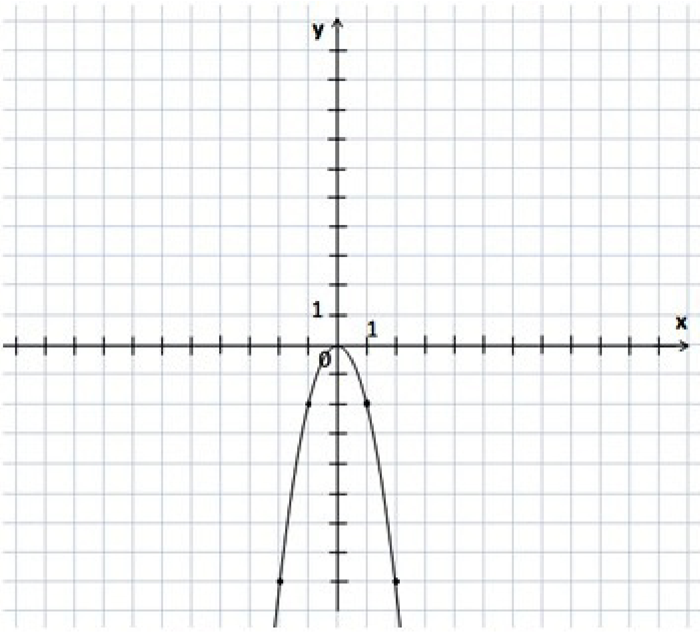
(1, -2)

x = 2

$$y=-2\cdot 2^2=-2\cdot 4=-8$$

(2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

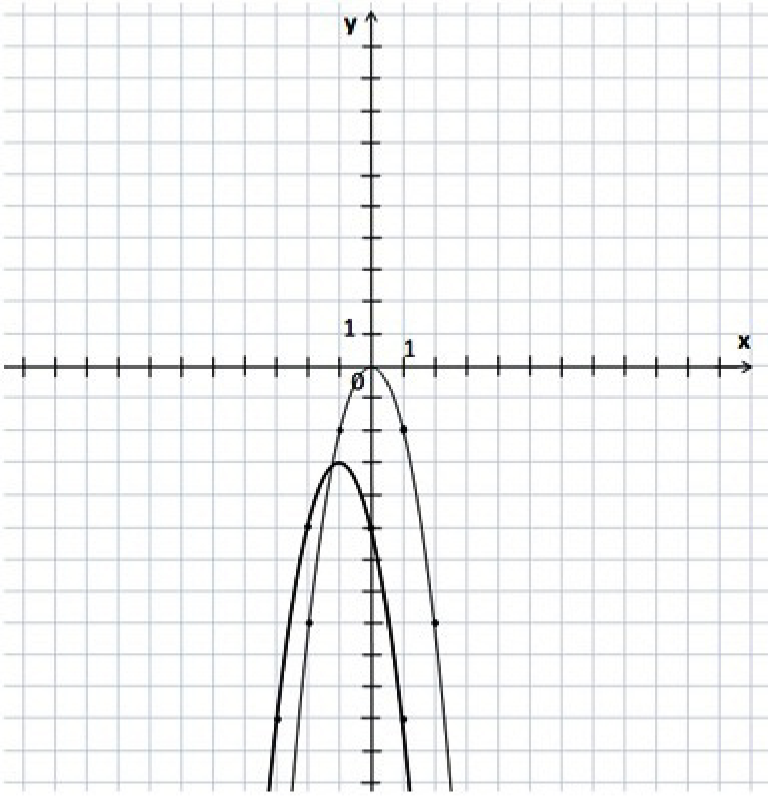


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y=-2(x+1)^2-3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.



ZADANIA

3.4.1 Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej f z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 + 8$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Odpowiedź:

a) z osią OX : 1, –1; z osią OY: –3

b) z osią OX : nie istnieje; z osią OY: 8

c) z osią OX : 2; z osią OY: 4

d) z osią OX : 8, –2; z osią OY: –16

3.4.2 Oblicz:

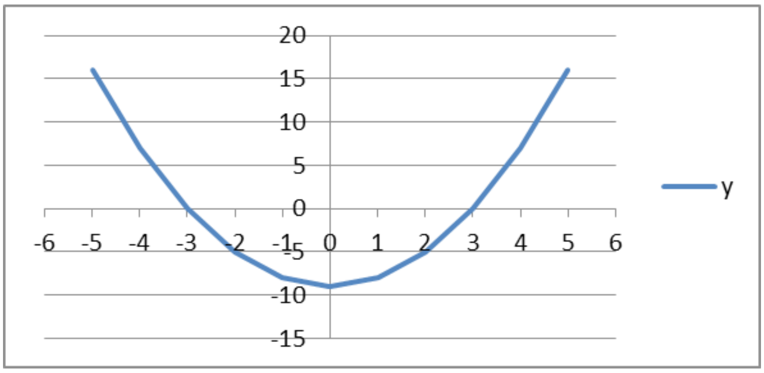
- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych
- współrzędne wierzchołka paraboli
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

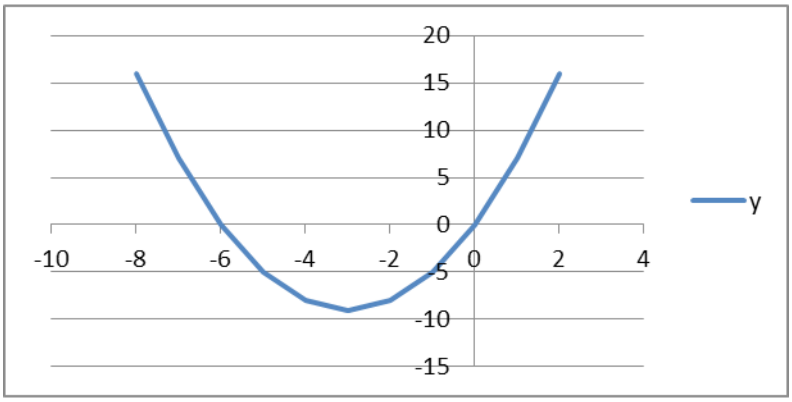
a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 + 6x$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Odpowiedź:

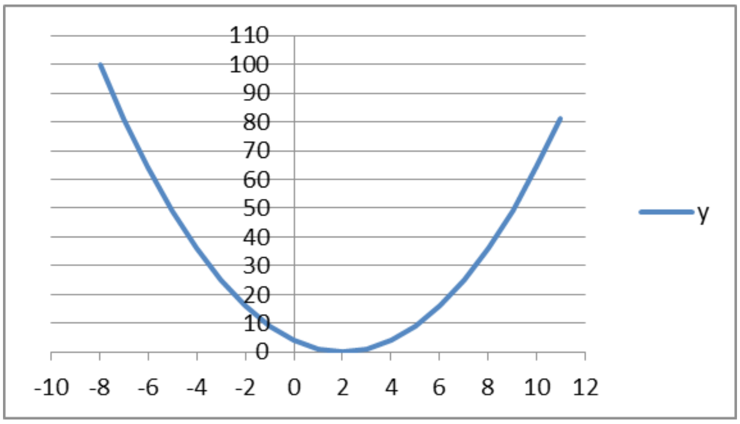
a) z osią OX : –3, 3; z osią OY: –9; $p = 0$; $q = -9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$



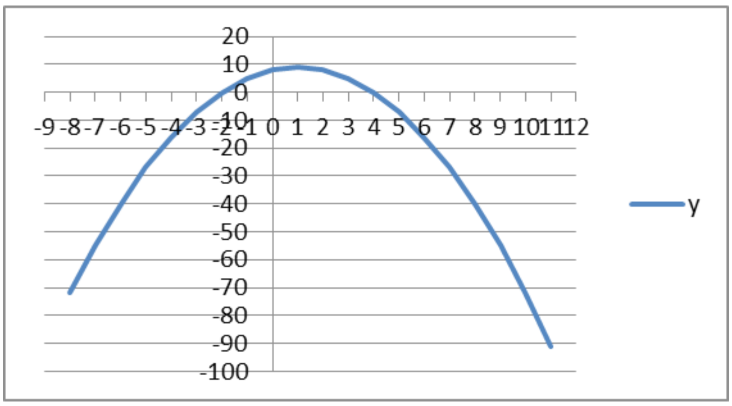
b) z osią OX : 0, –6; z osią OY: 0; $p = -3$; $q = -9$; $x_1 = 0$, $x_2 = -6$



c) z osią OX : 2; z osią OY: 4; $p = 2$; $q = 0$; $x_1 = x_2 = 2$



d) z osią OX : –2, 4; z osią OY: 8; $p = 1$; $q = 9$; $x_1 = -2$, $x_2 = 4$



3.5 Własności funkcji kwadratowej

Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum.

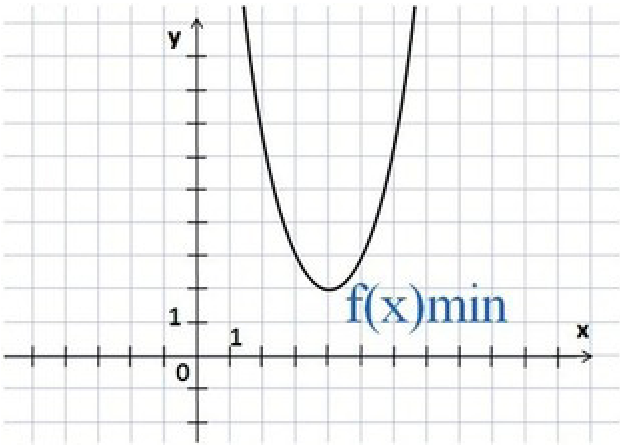
Przypominamy:

Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{\text{min}}$ lub y_{min}. Maksymalną wartość oznaczamy:

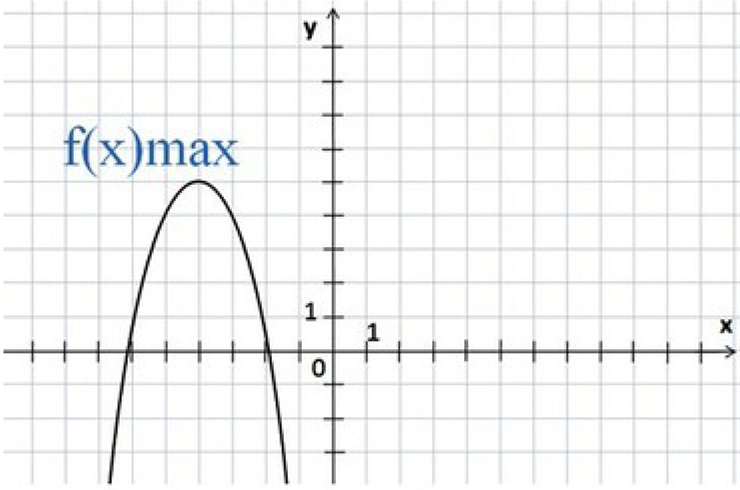
$f(x)_{\text{max}}$ lub y_{max}.

W celu wyznaczenia minimum lub maksimum funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „a" funkcji kwadratowej.

Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy $a > 0$, w dół,

gdy $a < 0$.

Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „a" funkcji ma wartość –3 ($a < 0$). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli mamy do czynienia z maksimum.

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

- **Dziedzina**

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc:

D = R.

- **Zbiór wartości**

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka (q) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka (q):

$$ZW = (-\infty, \ q\rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka (q) a nieskończonością:

$$ZW = \langle q, \ \infty)$$

Przykład 2

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

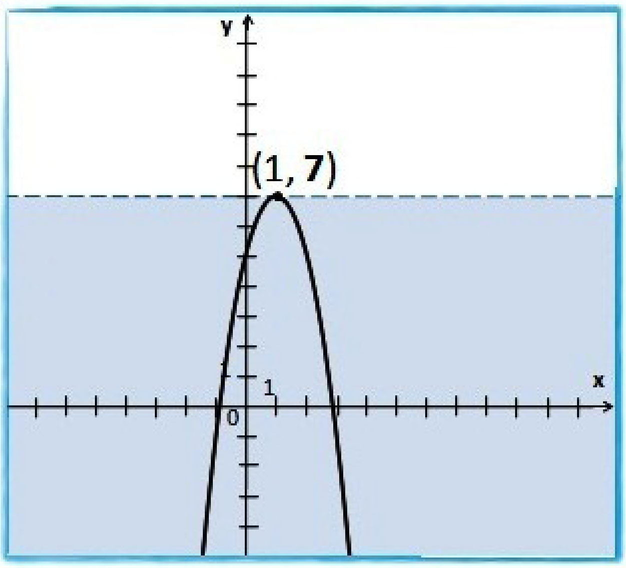
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-56}{4 \cdot (-2)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Ponieważ współczynnik „a" jest ujemny (-2), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością q.

$$ZW = (-\infty, \ 7\rangle$$



Przykład 3

$$y = 2x^2 + 4x - 2$$

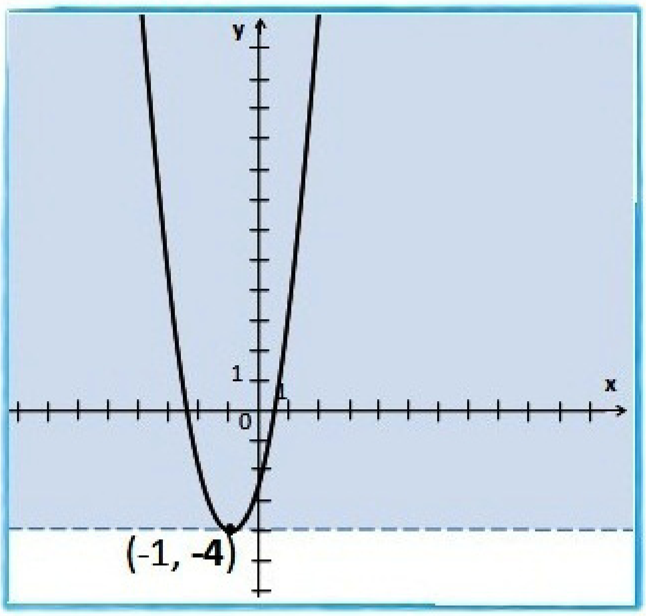
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 + 16 = 32$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-32}{4 \cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4$$

Ponieważ współczynnik „a" jest dodatni (2), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością q a nieskończonością.

$$ZW = \langle -4, \infty)$$



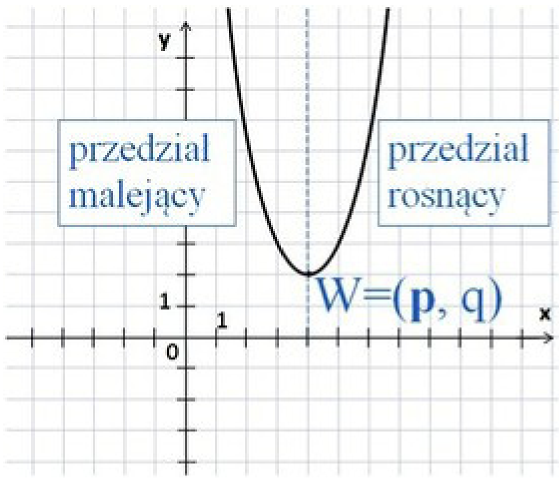
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś 0X), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka (p).

Drugą potrzebną informacją, jest kierunek ramion paraboli:

Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.



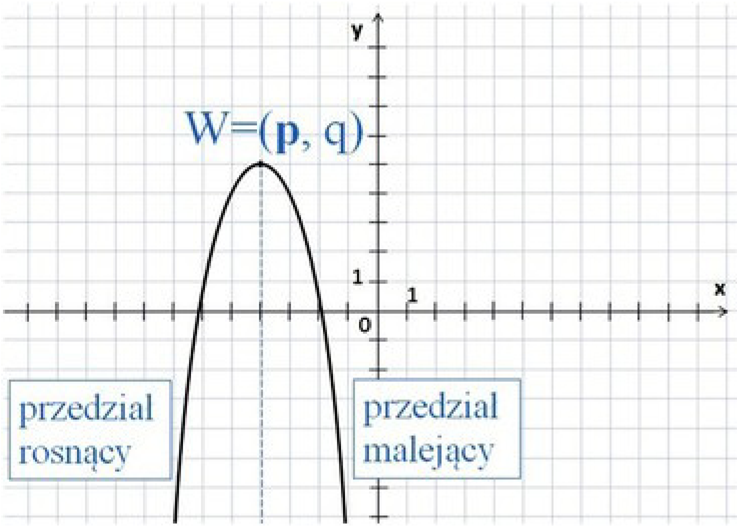
Funkcja jest rosnąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle p, \infty)$

Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\searrow$ w przedziale $(-\infty, p\rangle$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$$f(x)\nearrow \text{ w przedziale } \left(-\infty,\ p\right\rangle$$

Funkcja jest malejąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$$f(x)\searrow \text{ w przedziale } \left\langle p,\ \infty\right)$$

$$y = 3x^2 - 12x + 8$$

Obliczamy współrzędną „p" wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a" funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę.
W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$$f(x)\nearrow \text{ w przedziale } \left\langle 2,\ \infty\right)$$

$$f(x)\searrow \text{ w przedziale } \left(-\infty,\ 2\right\rangle$$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$f(x)\uparrow : (-\infty, 2\rangle$$

$$f(x)\downarrow : \langle 2, \infty)$$

Reasumując

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y = \left\langle -\frac{\Delta}{4a}, \infty \right)$	$Y = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right\rangle$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, rosnąca dla $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	rosnąca dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ malejąca dla $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 = -\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowne do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x = -\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$	

ZADANIA

3.5.1 Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a) $y = x^2 - 4$ b) $y = x^2 - 6x$ c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = -2x^2 + 6x + 7$

3.5.2 Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

- zbiór wartości

- miejsca zerowe
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = -x^2 + 6x$ c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$

d) $f(x) = -(x-1)(x+5)$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ f) $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$

	Zbiór wartości	Miejsca zerowe	Wartości dodatnie	Wartości ujemne	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	$\langle -4, \infty)$	$-2, 2$	$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$	$(-2, 2)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	–	Dla $x = 0$ $y = -4$
b)	$(-\infty, 9\rangle$	$0, 6$	$(0, 6)$	$(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$	Dla $x = 3$ $y = 9$	–
c)	$\langle -4, \infty)$	$1, 5$	$(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$	$(1, 5)$	$(3, \infty)$	$(-\infty, 3)$	–	Dla $x = 3$ $y = -4$
d)	$(-\infty, 9\rangle$	$5, 1$	$(-5, 1)$	$(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$	Dla $x = 2$ $y = 9$	–
e)	$\langle 0, \infty)$	3	$(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$	ϕ	$(3, \infty)$	$(-\infty, 3)$	–	Dla $x = 3$ $y = 0$
f)	$\left(-\infty, 10\frac{1}{8}\right\rangle$	-4, $\frac{1}{2}$	$\left(-5, \frac{1}{2}\right)$	$(-\infty, -4) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	$\left(-\infty, -1\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1\frac{3}{4}, \infty\right)$	Dla $x = -1\frac{1}{3}$ $y = 10\frac{1}{8}$	–

3.5.3 Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = -2x^2 - 8x - 5$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

Odpowiedź:

a) Dziedzina: $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości: $ZW = \langle -1, \infty)$

Miejsce zerowe: $x_1 = 1$ lub $x_2 = 3$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$

rosnąca w przedziale $\langle 2, \infty)$

Wierzchołek: W = (2,–1)

Najmniejsza wartość: $y_{min} = -1$ dla $x = 2$

Największa wartość: nie istnieje

b) Dziedzina $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości $ZW = (-\infty, 3>$

Miejsce zerowe $x_0 \approx -3,2$ lub $x_0 \approx -0,8$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca w przedziale $(-\infty, -2>$

malejąca w przedziale $< -2, \infty)$

Wierzchołek W = (–2, 3)

Największa wartość $y_{max} = 3$ dla $x = -2$

Najmniejsza wartość: nie istnieje

c) Dziedzina: $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości: $ZW = < 1, \infty)$

Miejsce zerowe: nie istnieją

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 3>$

rosnąca w przedziale $< 3, \infty)$

Wierzchołek: W = (3, 1)

Najmniejsza wartość $y_{min} = 1$ dla $x = 3$

Największa wartość: nie istnieje

3.5.4 Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 4x - 1$ z prostymi:

a) $y = -5$ b) $y = -3$ c) $y = -1$ d) $y = 2$

Odpowiedź:

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 4x - 1$ ma:

– 0 punktów wspólnych z prostą $y = -5$

– 1 punkt wspólny z prostą $y = -3$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = -1$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = 2$

3.5.5 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli, określonej równaniem: $y = -x^2 + 6x - 7$.

Odpowiedź: $x = 3$

3.5.6 Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

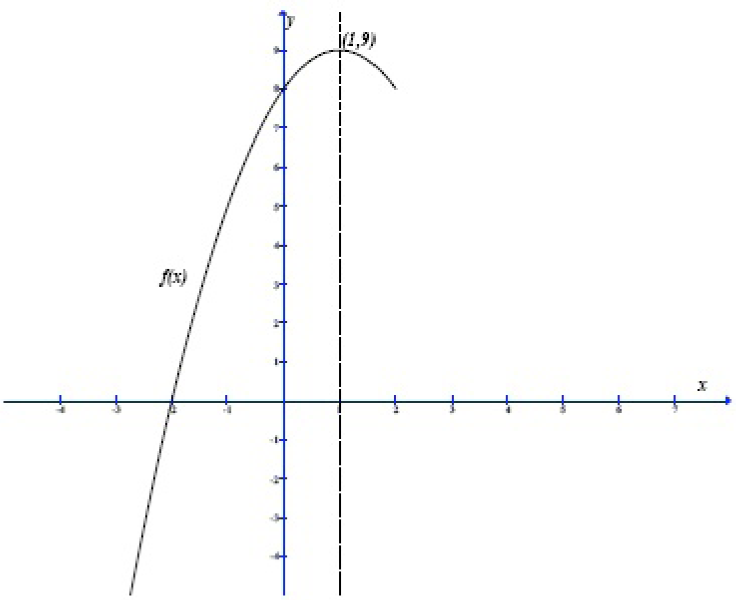
b) Podaj rozwiązanie nierówności: $f(x) \geq 0$.

Odpowiedź:

a) $(-\infty, 4>$

b) $x \in \langle 1,5 \rangle$

3.5.7 Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe:



a) miejscami zerowymi funkcji są liczby: –2 oraz 4

b) funkcja jest rosnąca w przedziale (–2, 4)

c) funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$

d) zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-1, 9)$

Odpowiedź: a

3.5.8 Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $f(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f(x) = -3x(x-2)$

d) $f(x) = 2(x-2)(x+4) - 5$

Odpowiedź:

a) $m = 0$

b) $m = -11\frac{5}{4}$

c) $m = 3$

d) $m = -23$

3.5.9 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 - 3x + 10,\ x \in \langle -1,2 \rangle$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 1,\ x \in \langle -2,5 \rangle$

c) $f(x) = -2x^2 + x - 1,\ x \in \langle 0,2 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = 12, m = 0$

b) $m = 46, m = 7/8$

c) $m = -7/8, m = -7$

3.5.10 Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^2 - 9,\ x \in \langle -2,2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 5x,\ x \in \langle 3,7 \rangle$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 6,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = -9$ b) $m = -14$ c) $m = -10$ d) $m = 1$

3.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

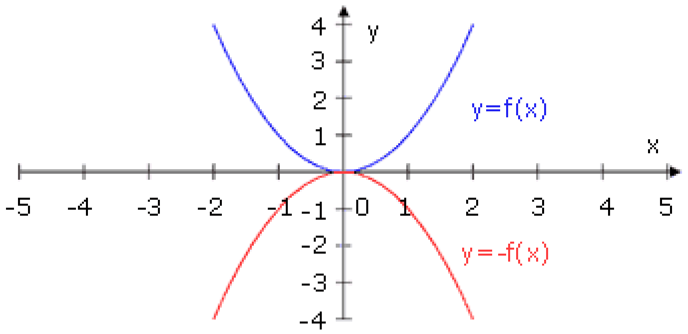
Teraz nauczę się:

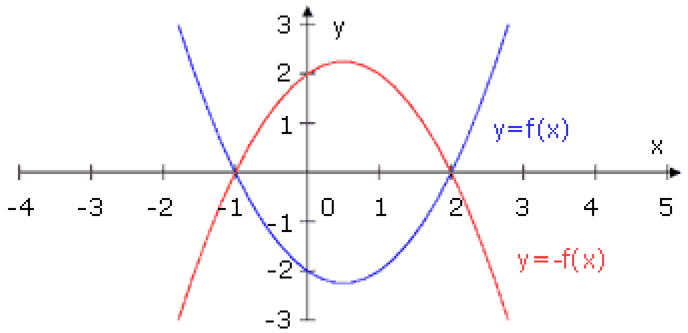
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

$x \rightarrow y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .

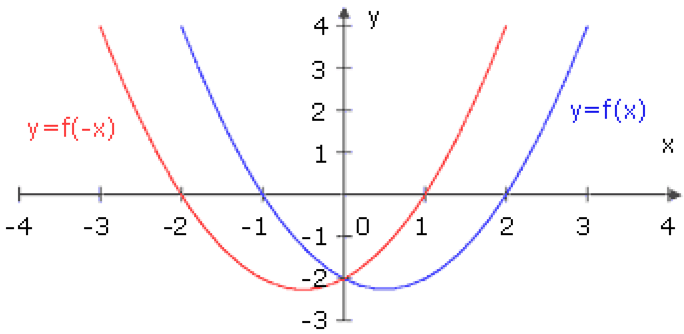
Przykłady





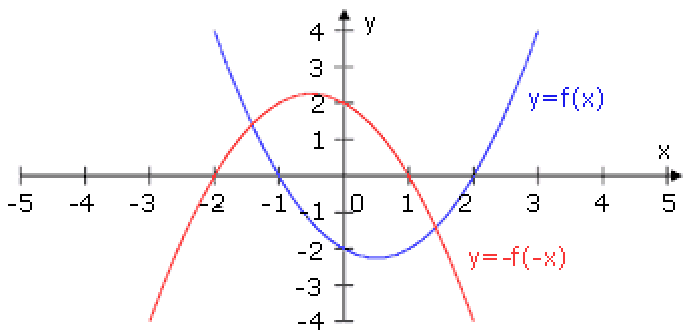
$x \to y = f(-x)$

Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.



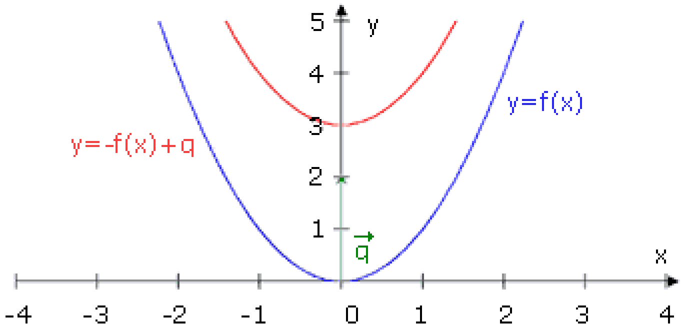
$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).



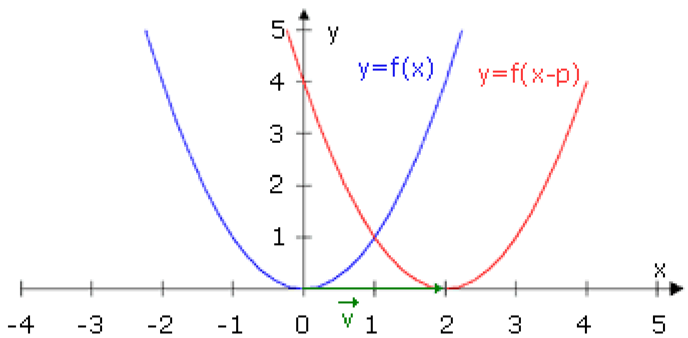
$x \to y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o |q| jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor [0,q]).



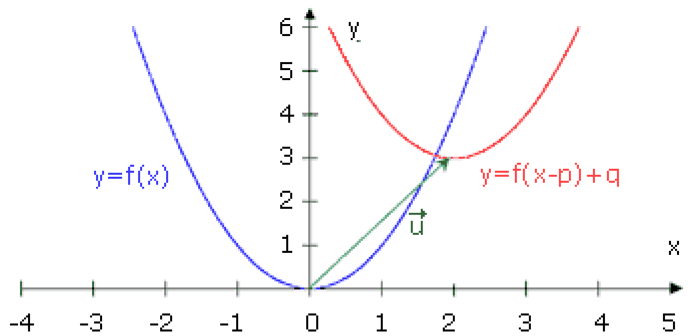
$x \rightarrow y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $\vec{v} = [p,0]$



$x \rightarrow y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p,q]$

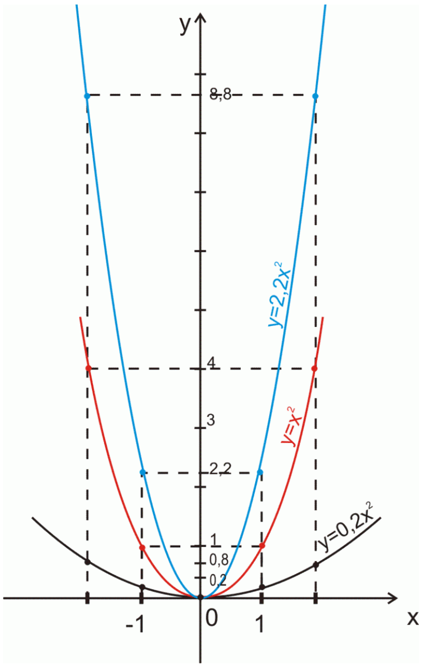


- $x \rightarrow y = k \cdot f(x)$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k–krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

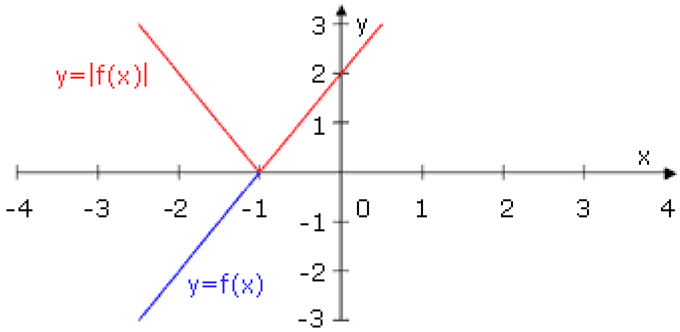
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY).

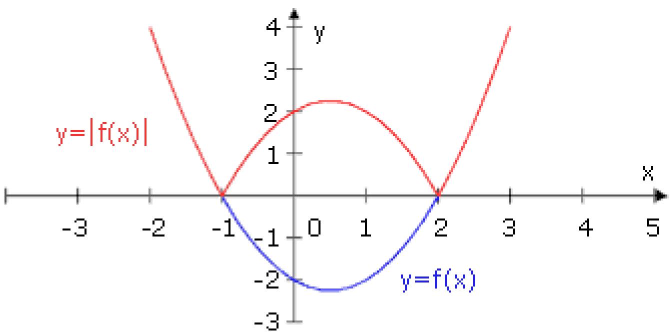
Dla $k \in (0,1)$wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).



***$x \rightarrow y = |f(x)|$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$ – leżącą nad osią OX lub na niej – pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX .

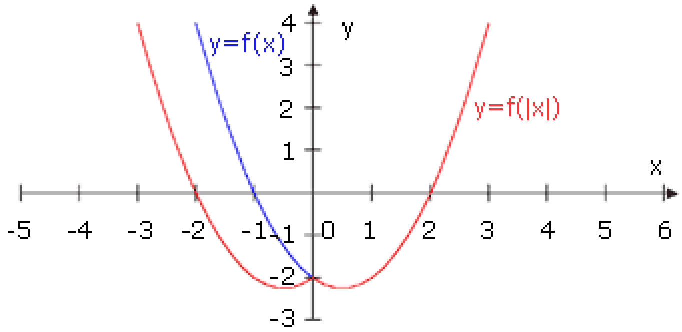




*** $x \rightarrow y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

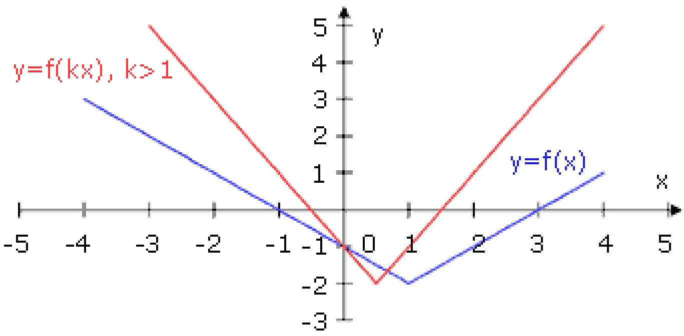


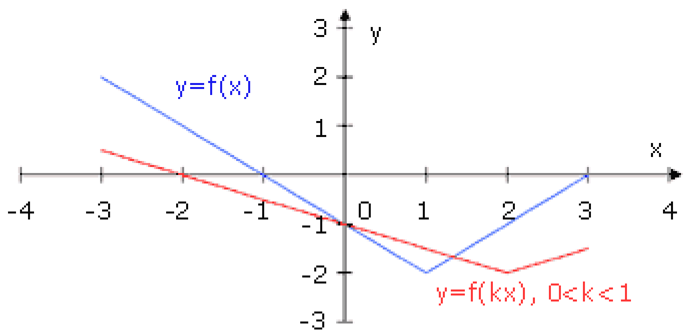
$^{***}x \rightarrow y = f(k^*x)$

Wykres funkcji $y = f(k^*x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX .

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX .

Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX .





3.6.1 Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$ o p jednostek wzdłuż osi OX i q jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji f. Uzupełnij tabelkę według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji g	Przesunięcie wzdłuż osi OX p	Przesuniecie wzdłuż osi OY q	Postać kanoniczna wzoru funkcji f	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x + 4)^2 - 5$	W = (–4,–5)
			$f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				W = (3,0)
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x - 2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		W = (0,–1)

3.6.2 Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = (x - 3)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 3$ e) $y = (x + 1)^2 - 1{,}6$ f) $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) przesuwamy o 3 jednostki w prawo

b) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo

c) przesuwamy o 4 jednostki w górę

d) przesuwamy o 3 jednostki w dół

e) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 1,6 jednostki w dół

f) rysujemy $y = x^2$, odbijamy symetrycznie względem osi OX i przesuwamy w dół o $3\frac{1}{3}$ jednostki w dół

3.6.3 Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi OY o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Odpowiedź:

a) Zbiór wartości $(-\infty, 8\rangle$

b) $b = 12$, $c = -10$

3.6.4 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -0{,}3x^2 + 12$ c) $y = 1{,}4(x - 48)^2$

d) $y = -35(x + 1{,}2)^2$ e) $y = 15(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) W = (0,–5); funkcja maleje $x \in (-\infty, 0)$, funkcja rośnie $x \in (0, \infty)$

b) W = (0,12); funkcja rośnie $x \in (-\infty, 0)$, funkcja maleje $x \in (0, \infty)$

c) W = (48,0); funkcja maleje $x \in (-\infty, 48)$, funkcja rośnie $x \in (48, \infty)$

d) W = (–1,2;0); funkcja rośnie $x \in (-\infty; -1{,}2)$, funkcja maleje $x \in (-1{,}2; \infty)$

e) W = $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; funkcja maleje $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, funkcja rośnie $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$

3.6.5 Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta.

a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$ b) $y = 0{,}6x^2 - 5$ i $y = 10$

c) $y = -0{,}1(x - 3)^2$ i $y = -4$ d) $y = 15(x + 2)^2 + 4$ i $y = -1$

e) $y = -3{,}2(x - 5)^2 - 1$ i $y = -11$ f) $y = 33(x + 7)^2 + 21$ i $y = 20$

Odpowiedź:

a) ma dwa punkty wspólne b) nie ma punktów wspólnych

c) ma dwa punkty wspólne d) nie ma punktów wspólnych

e) ma jeden punkt wspólny f) nie ma punktów wspólnych

3.6.6 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W, przechodząca przez punkt P:

a) W = (–1,–1), p = (3,3) b) W = (–8,7), p = (1,6) c) W = (3,2), p = (–5,10)

Odpowiedź:

a) $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 1$ b) $y = -\frac{1}{81}(x + 8)^2 + 7$ c) $y = \frac{1}{8}(x - 3)^2 + 2$

3.6.7 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Odpowiedź:

a) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$ b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ c) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$

3.6.8 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ b) $f(x) = (x-1)(x+3)$ c) $f(x) = -(x-1)(x+3)$

3.6.9 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$ b) $f(x) = x^2 + x - 6$ c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

3.6.10 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3, \infty)$, wykres przechodzi przez punkt P = (–1,5) i ma oś symetrii o równaniu $x = 1$,

b) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4, \infty)$, jednym z miejsc zerowych jest $x = 1$ i wykres ma oś symetrii o równaniu $x = -1$,

c) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 4, \infty)$, wykres ma oś symetrii o równaniu $x = 2$ i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3\frac{1}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

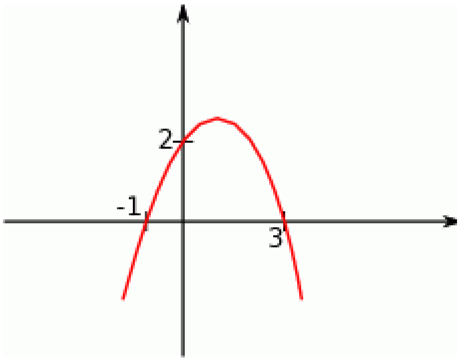
3.6.11 Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 6, 7, 8.

3.6.12 Rozwiąż równanie $f(x-1)=4$, jeżeli $f(x)=x^2+x-2$

Odpowiedź: $x=-2$, $x=3$

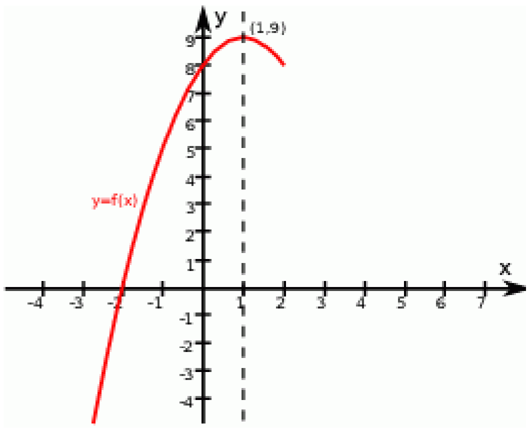
3.6.13 Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór.



Odpowiedź:

$$y=-\frac{2}{3}(x+1)(x-3)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$$

3.6.14 Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



Odpowiedź:

$$y=-(x-1)^2+9$$
$$y=-(x+2)(x-4)$$
$$y=-x^2+2x+8$$

3.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

ZADANIA

3.7.1 Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Odpowiedź: Prędkość turysty z miasta A to 4 km/h, a turysty z miasta B 3 km/h.

3.6.2 Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Odpowiedź: Wymiary pierwszego boiska to 56 m $\times$ 33m, a drugiego boiska 60 m $\times$ 25 m.

3.6.3 Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: Turysta dziennie przechodził 28 km.

3.6.4 Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm, a od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Trójkąt ma boki 41cm, 40 cm i 9 cm.

3.6.5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej trójkąta to 17 cm.

3.6.6 Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

Odpowiedź: Czas napełniania zbiornika przez obie rury jednocześnie wyniesie $23\frac{1}{3}$ godziny.

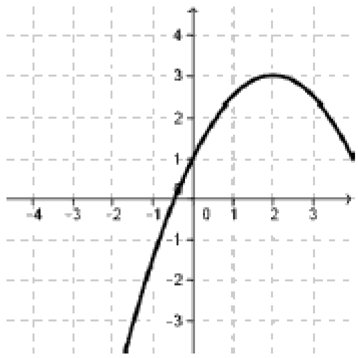
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[30] Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x - 7)(x + 2)$ są

a) $x = 7, x = -2$ b) $x = -7, x = -2$ c) $x = 7, x = 2$ d) $x = -7, x = 2$

Odpowiedź: a

2.[31] Wzorem funkcji kwadratowej f, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku, jest:



a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Odpowiedź: b

3. Największa wartość funkcji: $y = -2x^2 + x + 1$, w przedziale $\langle -1; 0{,}5 \rangle$, jest równa:

a) $1\frac{1}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) -4

4.[32] Gdy przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji opisanej wzorem:

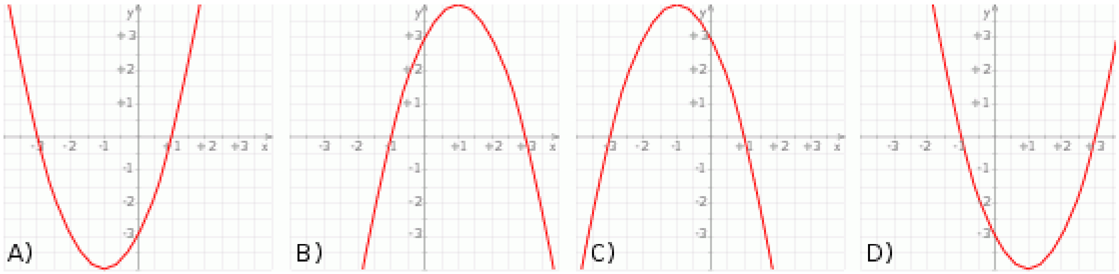
a) $y = 2(x - 2) + 4$; b) $y = 2(x - 2) - 4$; c) $y = 2(x - 2) + 1$; d) $y = 2(x + 2) + 4$

5. Funkcja kwadratowa $y = x^2 + bx + c$ jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2\rangle$, a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$. Postać kanoniczna tej funkcji opisana jest wzorem:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ b) $f(x) = (x + 2)^2 + 4$ c) $f(x) = (x + 4)^2 + 2$ d) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$

30 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 22.02.2013.
31 Zadanie 2, 3: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 22.02.2013.
32 Zadanie 4, 5, 6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 22.02.2013.

6. Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



Odpowiedź: a

7.[33] Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x\in(-\infty,-4\rangle \\ 5x+10 & \text{dla } x\in(-4,2) \\ x+4 & \text{dla } x\in\langle 2,+\infty) \end{cases}$$ jest:

a) -4 b) -2 c) -1 d) 1

8. Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

a) $(-\infty, \frac{3}{2})$ b) $(-\infty, -1)\cup(4,+\infty)$ c) $(-1,4)$ d) $(-4,1)$

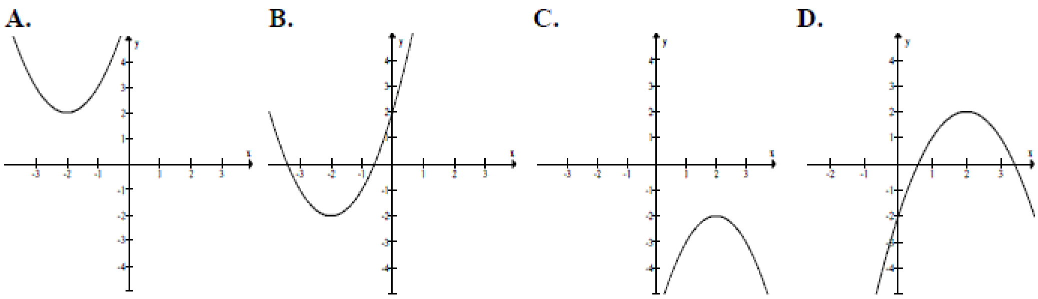
9. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:

a) $(2,\infty)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(1,+\infty)$

10.[34] Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:

a) $x = -8$ b) $x = -4$ c) $x = 4$ d) $x = 8$

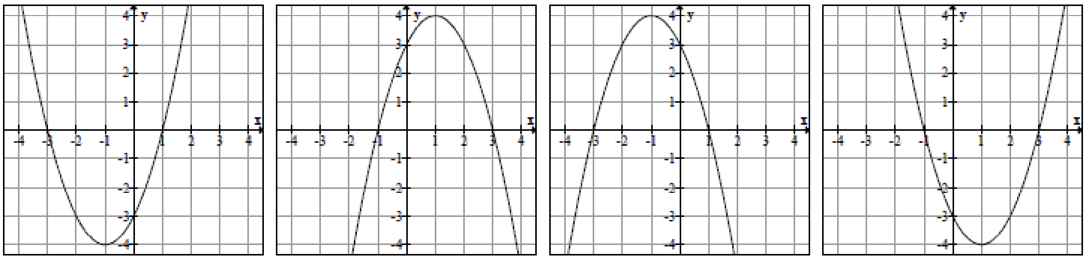
11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.



12. Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

33 Zadanie 7: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 22.02.2013.
34 Zadanie 10, 11, 12: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 22.02.2013.

13.[35] Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



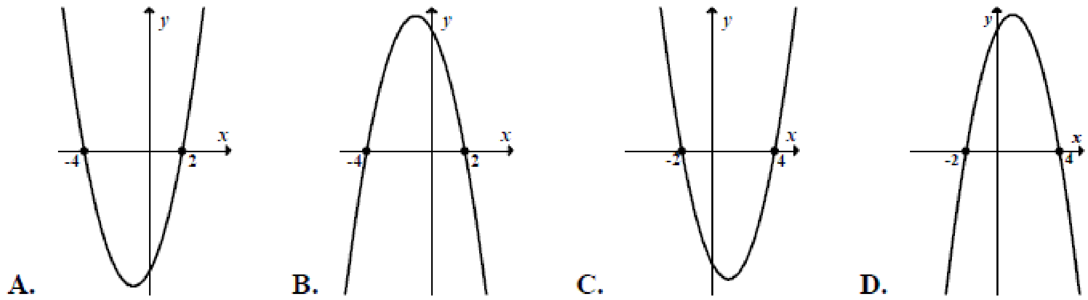
A. **B.** **C.** **D.**

14. Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$, jest punkt o współrzędnych:

a) (0,2) b) (0,–2) c) (–2,0) d) (2,0)

15.[36] Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale <–2, 3>.

16.[37] Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:

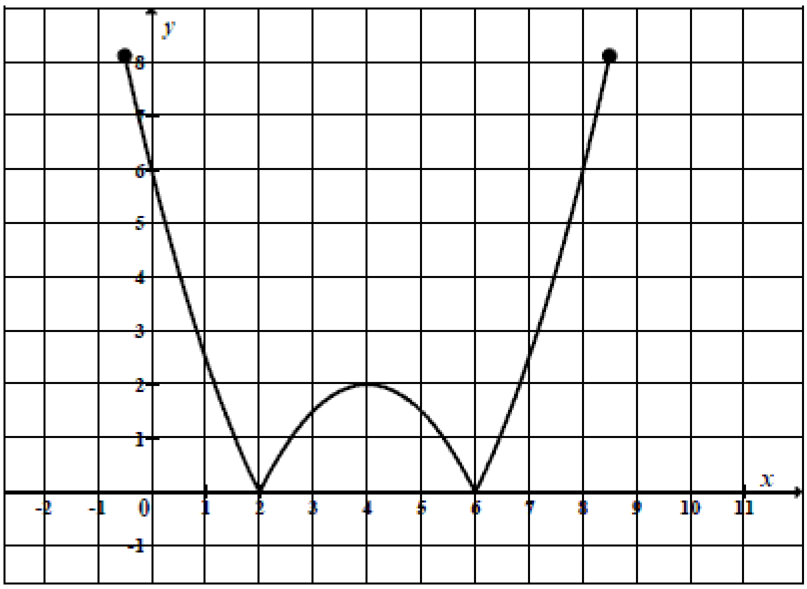


17.[38] Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:

a) (3,0) b) (0,3) c) (–3,0) d) (0,–3)

35 Zadanie 13, 14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 22.02.2013.
36 Zadanie 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 22.02.2013.
37 Zadanie 16: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.
38 Zadanie 17, 18: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = 3$

19.[39] Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 10x + 9$ w przedziale <3,7>.

Odpowiedź: $y_{\mathbf{max}} = -12$, $y_{\min} = -16$

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4 \text{ i } x + y = 10$$

Odpowiedź: $p = (3,7)$, R = (5,5)

21. Wyznacz wartość liczby m tak, aby funkcja $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$ miała dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -1$

Odpowiedź: $m = 12$

22. Wzór w postaci funkcji kanonicznej $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, to:

a) $y = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

b) $y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

c) $y = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

d) $y = (x + \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{8}$

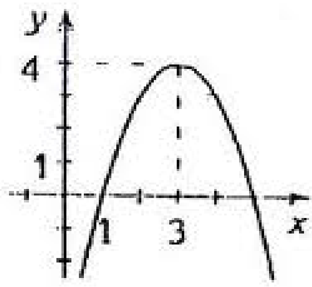
---

39 Zadania 19- 35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Odpowiedź: a

23. Funkcję kwadratową, przedstawioną na rysunku, opisuje wzór:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$

Odpowiedź: a

24. Zbiorem wartości funkcji $y = x^2 - 6x + 11$, jest:

a) $(-\infty, 2\rangle$ b) $(-\infty, 3\rangle$ c) $\langle 3, \infty)$ d) $\langle 2, \infty)$

Odpowiedź: d

25. Funkcja $f(x) = x^2 + \mathrm{b}x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla $x = 2$, jeśli:

a) $b = -4,\ c = 8$ b) $b = 4,\ c = -8$ c) $b = -4,\ c = -8$ d) $b = 4,\ c = 8$

Odpowiedź: a

26. Wykresy funkcji $f(x) = 9 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 9$:

a) są symetryczne względem osi OX b) są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY d) nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja f ma wzór:

a) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ b) $f(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ d) $f(x) = -(x+2)^2$

Odpowiedź: a

28. Liczba punktów wspólnych prostej $y = -x$ z wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, wynosi:

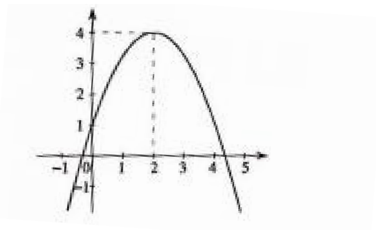
a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

Odpowiedź: c

29. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby –6 oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$.

Odpowiedź: 62

30. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określ jej wzór:



Odpowiedź: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

31. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

Odpowiedź: $y = -x^2 + 6x$

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem $y = x + 4$

Odpowiedź: $x \in (1,4)$

32. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$, jeśli $x + y = 4$.

Odpowiedź: 8

33. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami: $y = x^2 + 2x - 8$ oraz $y = x^2 + 6x - 4$ mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

Odpowiedź: (–1,–9)

34. Wartością największą funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x - 3$, określonej w przedziale <–3,2>, jest liczba:

a) –4 b) 5 c) 0 d) 6

35. Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 9$ przyjmuje wartości nieujemne dla:

a) $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

b) $x \in (-3,3)$

c) $x \in \langle -3,3 \rangle$

d) $x \in (-\infty,-3 \rangle \cup \langle 3,\infty)$

4 Planimetria

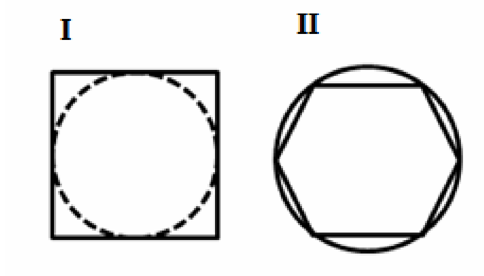
To już potrafię:

- korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
- rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznawać styczną do okręgu;
- korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
- rozpoznawać kąty środkowe;
- obliczać długość okręgu i łuku okręgu;
- obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
- stosować twierdzenie Pitagorasa;
- korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
- obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów;
- zamieniać jednostki pola;
- obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
- obliczać stosunek pól wielokątów podobnych;
- rozpoznawać wielokąty przystające i podobne;
- stosować cechy przystawania trójkątów;
- korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych;
- rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu;
- narysować pary figur symetrycznych;
- rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii;
- wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury;
- rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
- konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach 60°, 30°, 45°, okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
- rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Informacja do zadań 1 i 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.



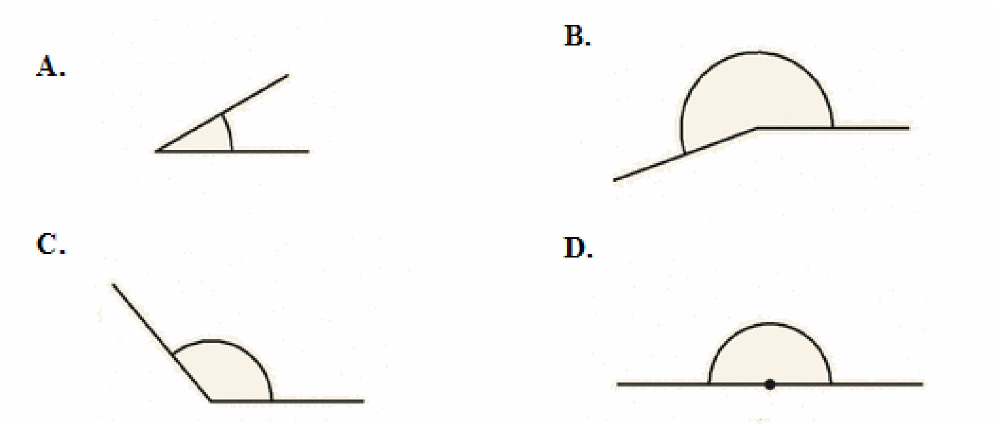
Zad. 1 Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości $4\sqrt{2}$ m?

a) 4 m b) 2 m c) 5,6 m d) 2,8 m

Zad. 2 Jaki jest obwód sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

a) 16 m b) 24 m c) $12\sqrt{3}$ m d) $6\sqrt{3}$ m

Zad. 3 Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły:



Zad. 4 Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

a) BARDZO ATRAKCYJNE CENY b) OBNIŻKA CEN

c) CENY PROMOCYJNE d) PRZECENA TOWARÓW

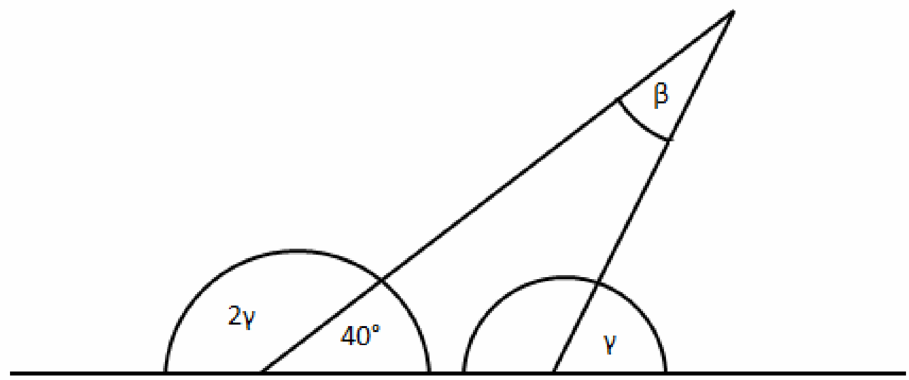
Zad. 5 Jaka miarę ma kąt β

a) 50°:

b) 35°

c) 30°

d) 40°



Zad. 6 Miara kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{3}$ okręgu wynosi:

a) $90°$ b) $60°$ c) $120°$ d) $80°$

Zad. 7 Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

a) 6π b) 18π c) 9π d) 12π

Zad. 8 W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

a) przystające b) równoboczne c) podobne d) rozwartokątne

Zad. 9 Pole kwadratu o przekątnej długości $5\sqrt{6}$, to:

a) 25 b) 50 c) 75 d) 15

Zad. 10. Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm, wynosi:

a) $24\ \text{cm}^2$ b) 24 cm c) 10 cm d) $12\ \text{cm}^2$

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	C	B	A	D	C	B

ZADANIA OTWARTE

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi …………

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi ………

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na ……………

Proste prostopadłe oznaczamy symbolem ……

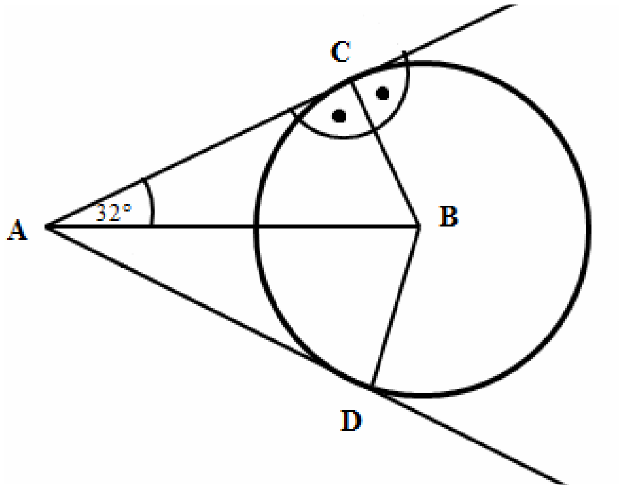
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach ………

Przez jeden punkt można poprowadzić ……… prostych.

Miejsce przecięcia się dwóch prostych, to………

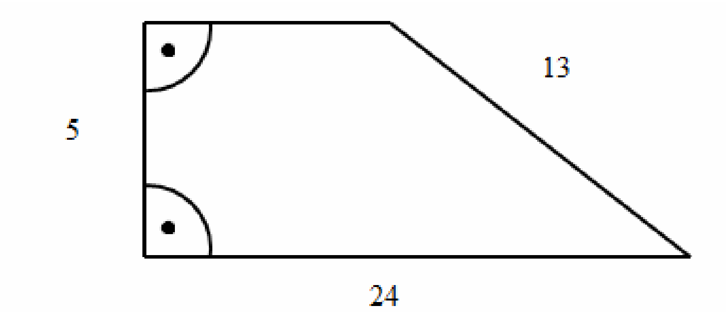
Kąt o mierze 180º nazywamy kątem ……

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$.



3. Oblicz x i y wiedząc, że punkty $A = (3x - 1; 2y)$ i $B = (x + 2; 4y - 1)$ są symetryczne względem osi OX .

4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



5. Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

Rozwiązania

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi 135° Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na równoramienne, równoboczne, różnoboczne. Proste prostopadłe oznaczamy symbolem $\perp$ Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: romb, deltoid Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych Miejsce przecięcia się dwóch prostych to punkt Kąt o mierze 180° nazywamy kątem półpełnym.
2	$\sphericalangle A = 64°, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°, \sphericalangle B = 116°$
3	$3x - 1 = x + 2$ $-2y = 4y - 1$ $x = 1{,}5$ $y = \frac{1}{6}$
4	b $-b$ – górna podstawa $b = 12$ $P = \frac{(24 + 12) \cdot 5}{2} = 65$ $L = 54$
5	Konstrukcja

„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków".

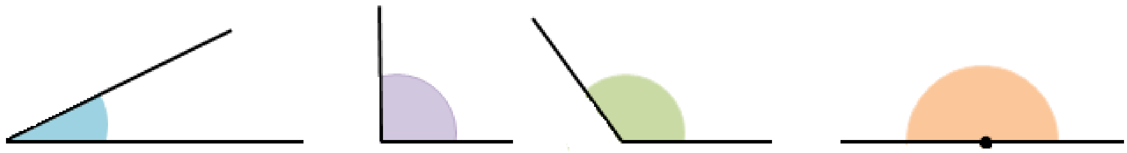
Planimetria jest działem geometrii (słowo „geometria" pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

4.1 Kąt środkowy i wpisany

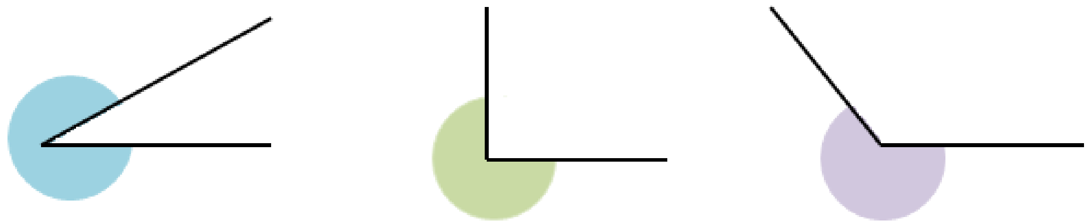
Teraz nauczę się stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na: **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe 180°) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od 180°, ale mniejsze od 360°).

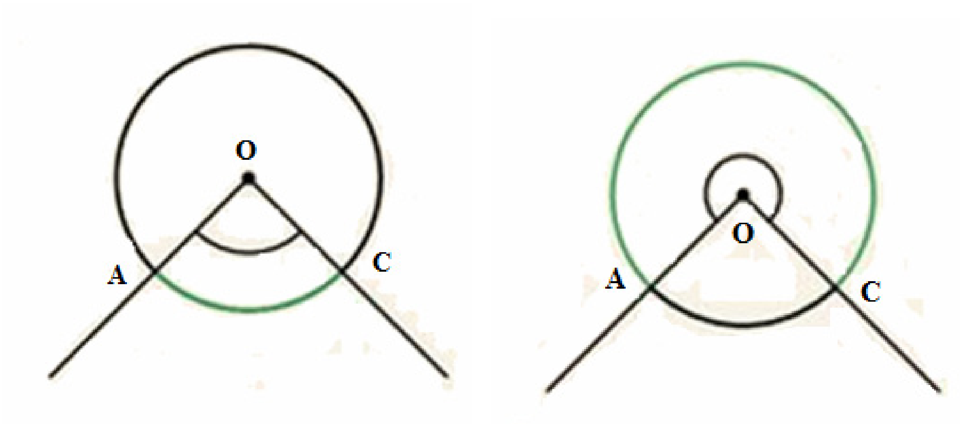
Kąty wypukłe:



Kąty wklęsłe:



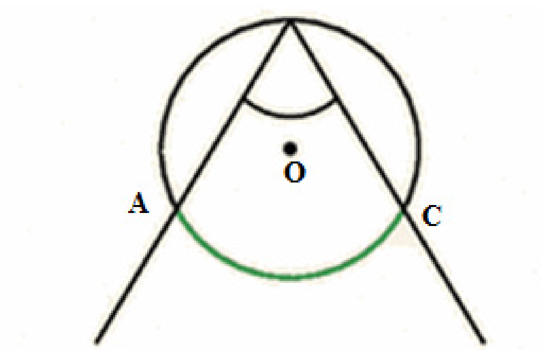
Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.



Kąt środkowy wypukły

Kąt środkowy wklęsły

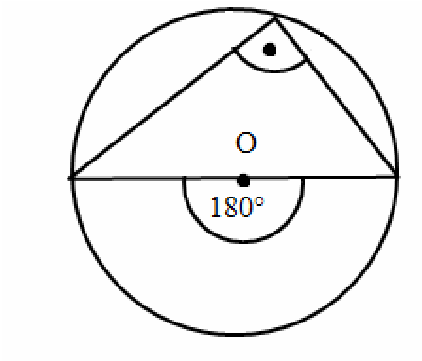
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.



Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.

Własności kątów środkowych i wpisanych

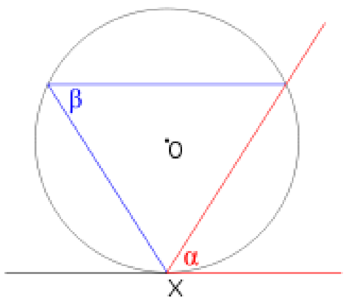
- Jeżeli kąt wpisany i środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.
- Kąt wpisany opary na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.



- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

Kąt dopisany do okręgu

Kąt dopisany do okręgu w punkcie X należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie X oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie X.



Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

α – *kąt dopisany*

β – *kąt wpisany*

$\alpha = \beta$

Przykład 1

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A, jak na rysunku obok. Kąt dopisany $\alpha = 50°$. Oblicz miarę kąta ACB.

Dorysujmy promienie $OAOA$ i OB. Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$\sphericalangle OAB = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\sphericalangle OAB = 180° - 80° = 100°$

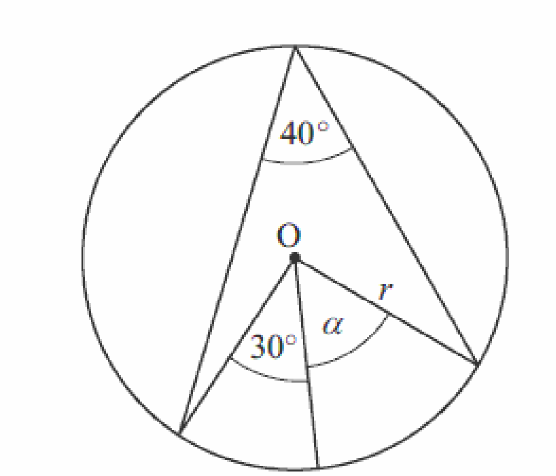
W takim razie z twierdzenie o kątach, wpisanym i środkowym, mamy:

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180° - 50° - 75° = 55°$

ZADANIA

4.1.1 Oblicz miarę kąta $\boldsymbol{\alpha}$.

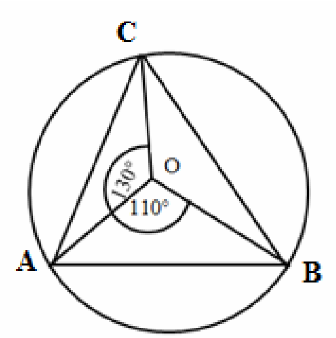


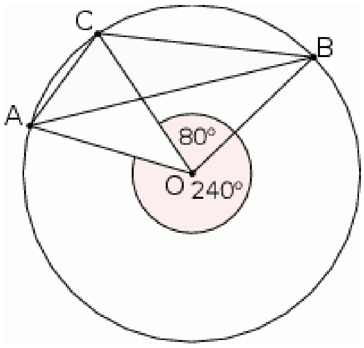
Odpowiedź: 50°

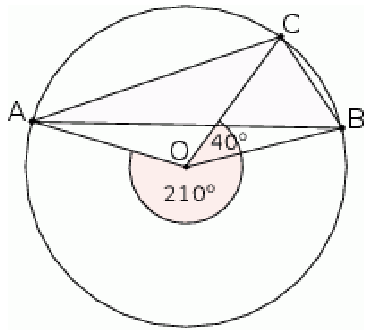
4.1.2 Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta środkowego $\mathbf{ABS}$.

Odpowiedź: 120°

4.1.3 Wyznacz miary kątów trójkąta $\mathbf{ABC}$.

a) 

b) 

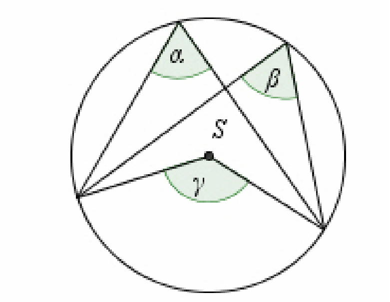
c) 

a) 60°, 65°, 55° b) 40°, 20°, 120° c) 20°, 55°, 105°

4.1.4 Okrąg podzielono na trzy części w stosunku $\mathbf{2}:\mathbf{3}:\mathbf{3}$. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $45°,\ 45°,\ 90°$

4.1.5 Dany jest okrąg o środku w punkcie $\mathbf{S}$. Miara kąta $\boldsymbol{\alpha}$ jest równa $\mathbf{70°}$. Ile wynosi suma miar kątów $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$?



Odpowiedź: $210°$

4.1.6 Wierzchołki trójkąta $\mathbf{ABC}$ leżą na okręgu, a środek $\mathbf{O}$ okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąta $\mathbf{ABO}$ ma miarę $\mathbf{20^\circ}$, to jaką miarę ma kąt $\mathbf{ACB}$?

Odpowiedź: 70°

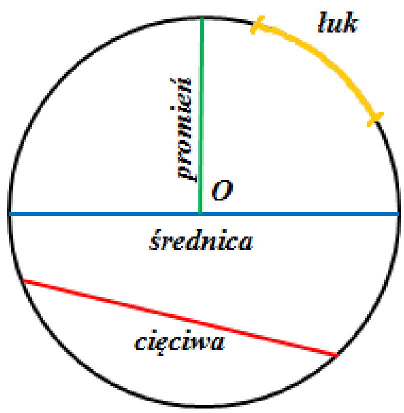
4.1.7 Ostrokątny trójkąt równoramienny $\mathbf{ABC}$ o podstawie $\mathbf{AB}$ jest wpisany w okrąg o środku $\mathbf{S}$, przy czym kąt $\mathbf{SAB}$ ma miarę $\mathbf{40^\circ}$. Oblicz miarę kąta $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: 65°

4.2 Wzajemne położenie prostej i okręgu

Teraz nauczę się korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od środka O. Okrąg oznaczamy $o(O, r)$.



Promieniem okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą r. Okrąg o promieniu r ma długość $2\pi r$.

Cięciwą okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i **okręgu:**

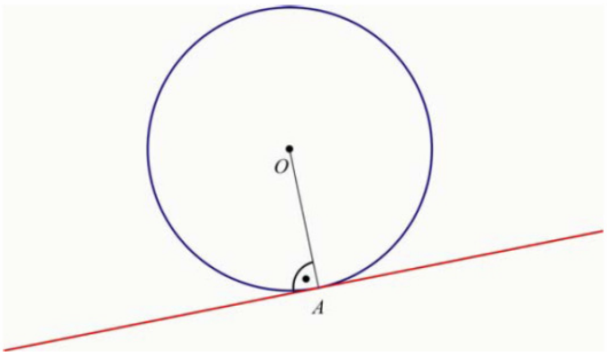
1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.

Definicja

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

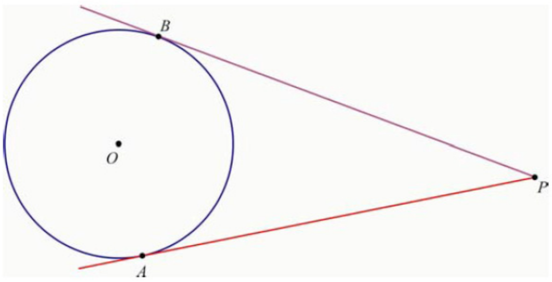
Twierdzenie 1.

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

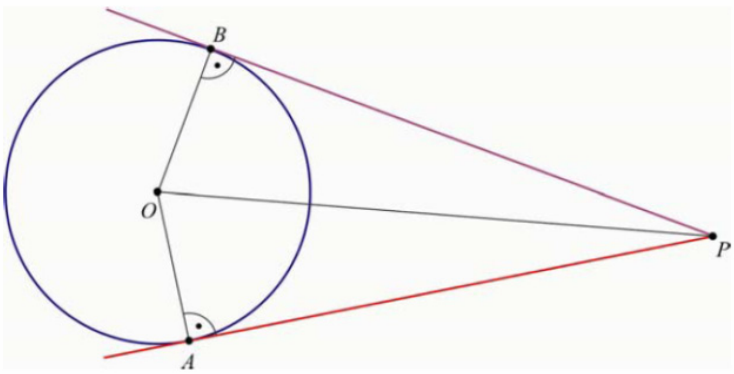


Twierdzenie 2.

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.



Dowód

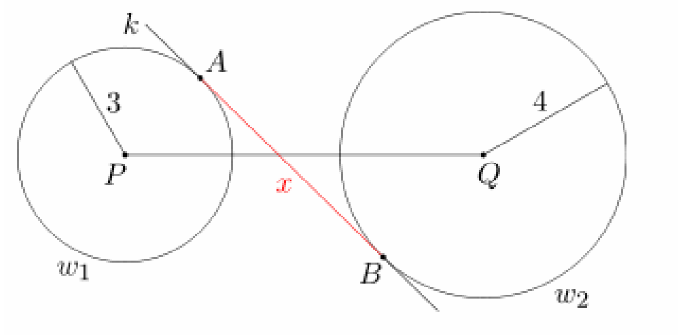


Trójkąty POA i POB są prostokątne. Półprosta PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$ (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$. Oznacza to (suma kątów w trójkącie),

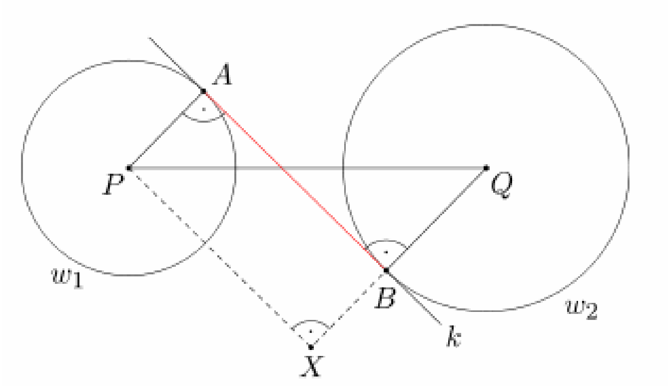
że również $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$. Ponadto $AO = BO = r$. Z cechy kbk wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że $PA = PB$.

Przykład

Dany jest odcinek $|PQ| = 10$ oraz okręgi: jeden o środku P i promieniu 3, a drugi o środku Q i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej k, która jest do nich styczna odpowiednio w punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB.



Zaznaczamy na prostej BQ, lecz poza odcinkiem BQ, taki punkt X, aby długość odcinka BX była równa 3. Następnie uzasadnimy, że czworokąt $ABXP$ jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PQX



Niech X będzie takim punktem leżącym na prostej BQ, poza odcinkiem BQ, że $|BX| = 3$. Proste AP i BX są prostopadłe do wspólnej prostej AB, więc $AP \parallel BX$ są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt $APXB$ jest równoległobokiem. A ponieważ w równoległoboku tym kąt $\sphericalangle PAB = 90^{\circ}$, więc równoległobok $ABXP$ jest prostokątem.

Zatem trójkąt PXQ jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |Ab|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4+3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

$$|AB| = \sqrt{51}$$

ZADANIA

4.2.1 Obwód okręgu jest równy 8π cm. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

a) nie mniejsza niż 4 cm

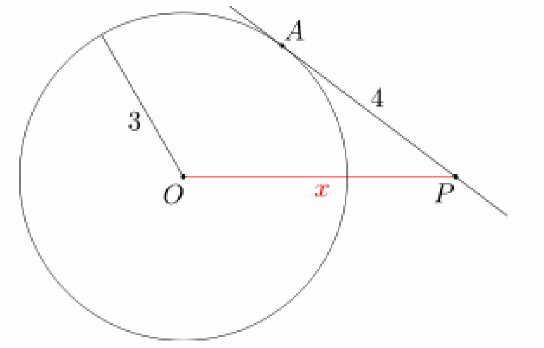
b) nie większa niż 3 cm?

Odpowiedź:

a) jeden lub wcale

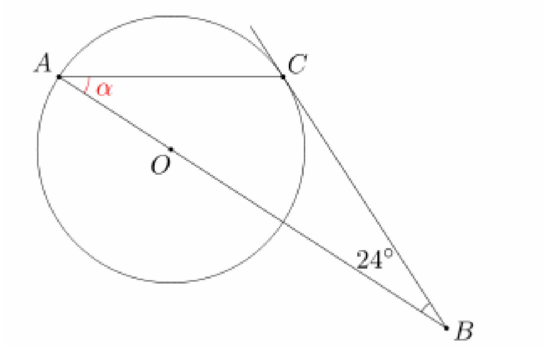
b) dwa punkty

4.2.2 Dany jest okrąg o środku O i promieniu 3. Przez punkt p leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiedząc, że długość odcinka AP wynosi 4, oblicz długość odcinka OP.



Odpowiedź: $|OP| = 5$

4.2.3 Dany jest okrąg o środku $\mathbf{O}$ oraz punkty $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie $\mathbf{C}$ przecina prostą $\mathbf{AO}$ w punkcie $\mathbf{B}$. Wiedząc, że miara kąta $\mathbf{ABC}$ wynosi $\mathbf{24^\circ}$, oblicz miarę kąta $\mathbf{CAB}$.



Odpowiedź: 33°

4.3 Wzajemne położenie dwóch okręgów

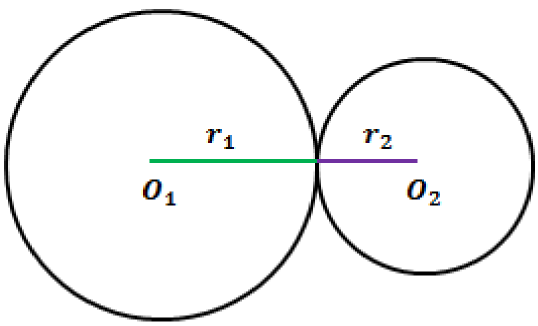
Teraz nauczę się korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)

Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

Okręgi styczne zewnętrznie

Okręgi styczne zewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.

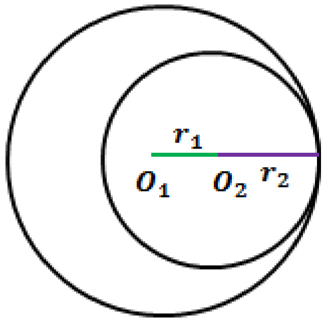
$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$



Okręgi styczne wewnętrznie

Okręgi styczne wewnętrznie mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.

$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

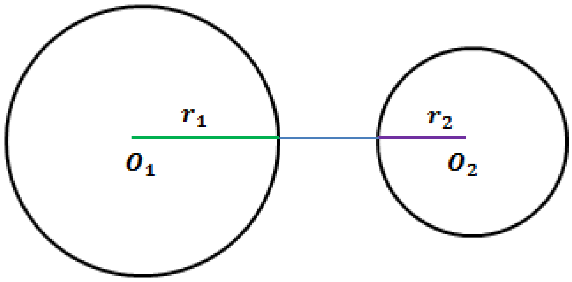


Okręgi rozłączne

Okręgi rozłączne nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:

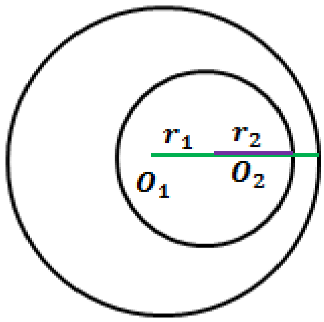
- Większa od sumy ich promieni

$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$



- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni

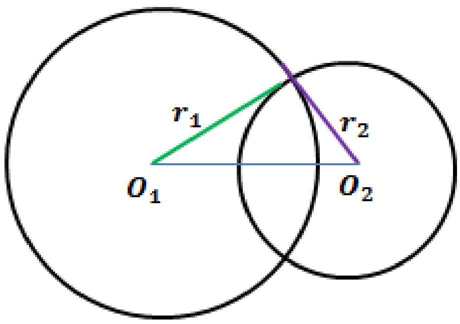
$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$



Okręgi przecinające się

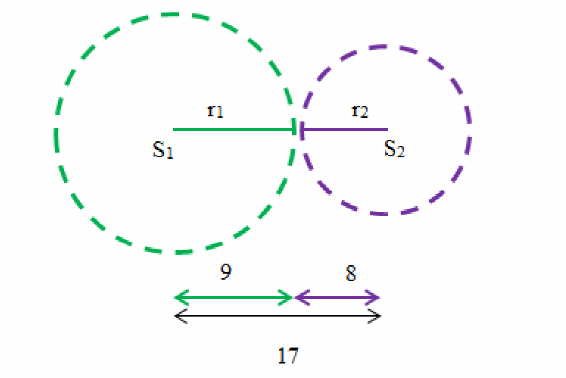
Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.

$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$



Przykład

Dane są dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio równych r_1 i r_2. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli $|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8$.



Robimy rysunek poglądowy. Jeden okrąg ma promień $r_1 = 9$, a drugi $r_2 = 8$.

Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.

ZADANIA

4.3.1 Określ wzajemne położenie okręgów $\mathbf{o(O_1, r_1)}$ i $\mathbf{o(O_2, r_2}$, jeśli $\mathbf{|O_1O_2| = 12\ cm}$ oraz:

a) $r_1 = 3\ cm,\ r_2 = 8\ cm$

b) $r_1 = 5\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

c) $r_1 = 9\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

d) $r_1 = 22\ cm,\ r_2 = 10\ cm$

Odpowiedź:

a) rozłączne zewnętrznie

b) styczne zewnętrznie

c) przecinające się

d) styczne wewnętrznie

4.3.2 Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach $\mathbf{10\ cm}$ i $\mathbf{6\ cm}$, gdy:

a) okręgi te są styczne zewnętrznie

b) okręgi są styczne wewnętrznie

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego

d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

Odpowiedź:

a) $|S_1S_2| = 16\ cm|S_1S_2| = 16\ cm$

b) $|S_1S_2| = 4\ cm|S_1S_2| = 4\ cm$

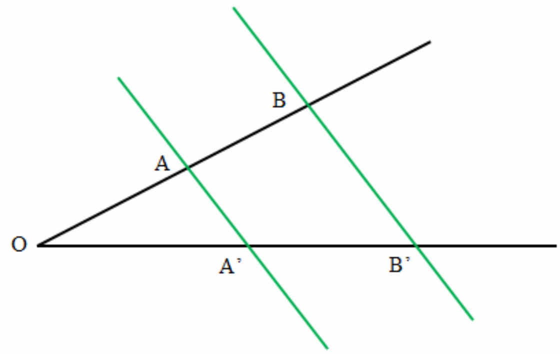
c) $|S_1S_2| = 6\ cm|S_1S_2| = 6\ cm$

d) $|S_1S_2| = 10\ cm|S_1S_2| = 10\ cm$

4.4 Twierdzenie Talesa

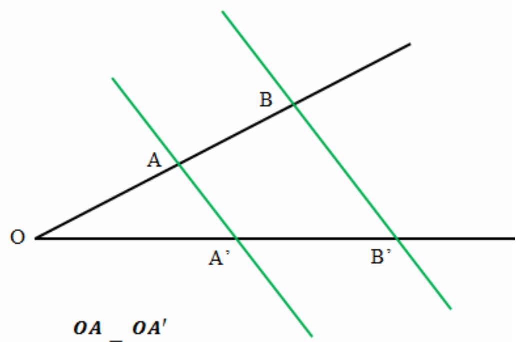
Teraz nauczę się stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.



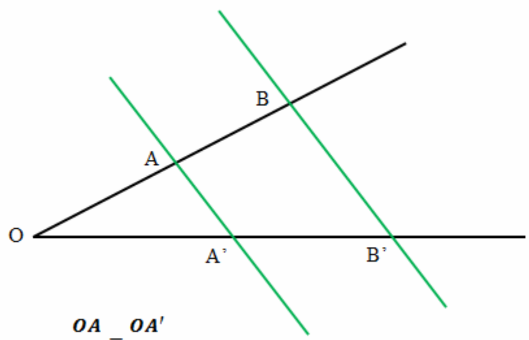
Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

Przypadek 1



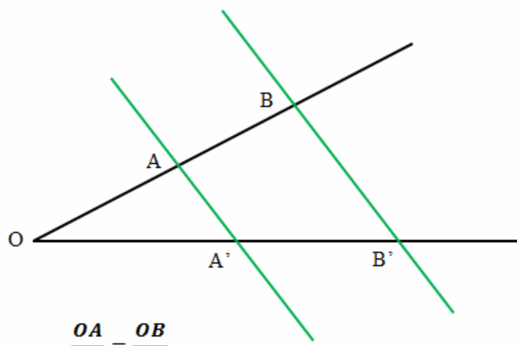
$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

Przypadek 2



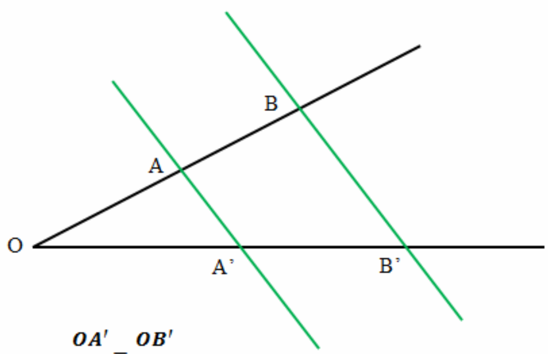
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

Przypadek 3



$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$

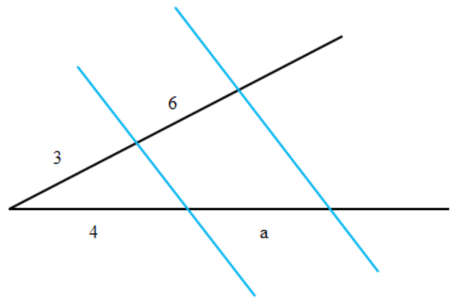
lub



$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$$

Przykład1

Oblicz długość odcinka a.



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

Układamy proporcję: $\frac{3}{6} = \frac{4}{a}$

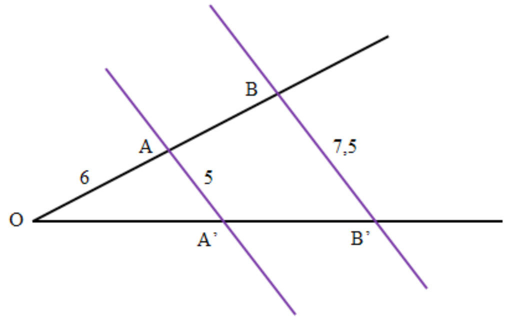
$3a = 6 \cdot 4$

$3a = 24 / : 3$

$a = 8$

Przykład 2

Oblicz długość odcinka AB.



Obliczając długość odcinka AB, skorzystamy z przypadku 3.

Układamy proporcję: $\frac{OA}{AA\prime} = \frac{OB}{BB\prime}$

$\frac{6}{5} = \frac{6 + |AB|}{7{,}5}$

$5(6 + |AB|) = 6 \cdot 7{,}5$

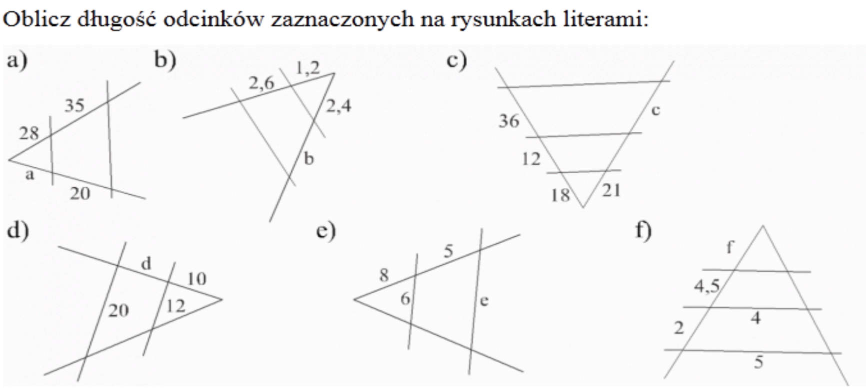
$30 + 5|AB| = 45 / -30$

$5|AB| = 15 / : 5$

$|AB| = 3$

ZADANIA

4.4.1 Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



Odpowiedź:

a) 16

b) 5,2

c) 42

d) $6\frac{2}{3}$

e) $9\frac{3}{4}$

f) 3,52

4.4.2 W trapezie $\mathbf{ABCD}$, gdzie $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{CD}$, przedłużono boki $\mathbf{AD}$ i $\mathbf{BC}$ do przecięcia w punkcie $\mathbf{S}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DS}$ wiedząc, że jest on krótszy od odcinka $\mathbf{CS}$ o $\mathbf{3\ cm}$ i $|\mathbf{AD}| = \mathbf{16\ cm}$, a $|\mathbf{BC}| = \mathbf{24\ cm}$.

Odpowiedź: $6\ \mathrm{cm}$

4.4.3 W trapezie krótsza podstawa wynosi 6, zaś ramiona mają długość 4 i 5. Ramiona trapezu przedłużono tak, że powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości 4 zostało przedłużone o odcinek długości 3.

Odpowiedź: 30

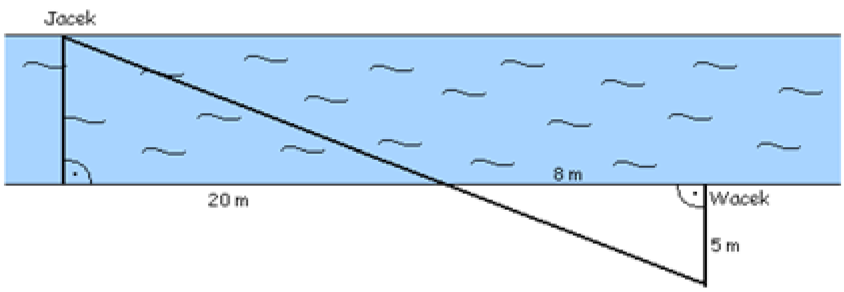
4.4.4 W trójkąt równoramienny o podstawie $\mathbf{8\ cm}$ wpisano kwadrat o boku równym $\mathbf{6\ cm}$, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

Odpowiedź: 24 cm

4.4.5 Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

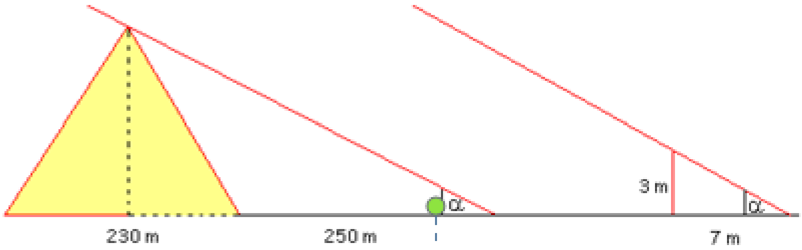
Odpowiedź: 3,4 cm

4.4.6 Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



Odpowiedź: 12,5 cm

4.4.7 Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



Odpowiedź: 156,43 m

4.4.8 Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

Odpowiedź: 12 m

4.4.9 W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: AC = 2,4 i CB = 7,2 m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec A podniesie się na wysokość 4 metrów.

Odpowiedź: O 12 m.

4.4.10 Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm , a średnicę 2 cm?

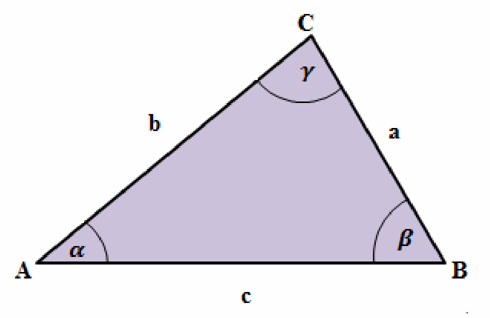
Odpowiedź: Wielkość przedmiotów z odległości 100 m wynosi 10 m.

4.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne

Teraz nauczę się:

- sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt;
- sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny;
- obliczać miary kątów i długości boków trójkąta;
- obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona;
- korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

Trójkąt – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Podział trójkątów

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

- **Podział trójkątów ze względu na kąty:**

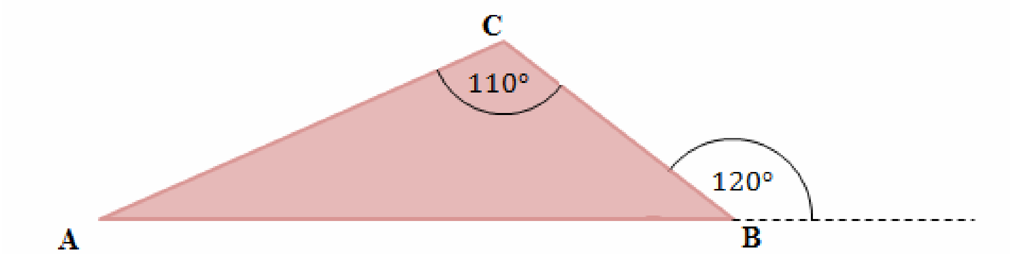
1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.
2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną.**
3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

- **Podział trójkątów ze względu na boki:**

1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę 60°.
2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.
3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 110°, a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę 120°. Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



$$\sphericalangle B = 180° - 120° = 60°$$

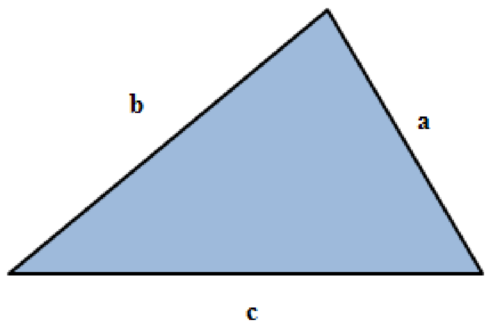
$$110° + 60° + \sphericalangle A = 180°$$

$$170° + \sphericalangle A = 180°$$

$$\sphericalangle A = 180° - 170°$$

$$\sphericalangle A = 10°$$

Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > c$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > b$

$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > a$

Przykład 2

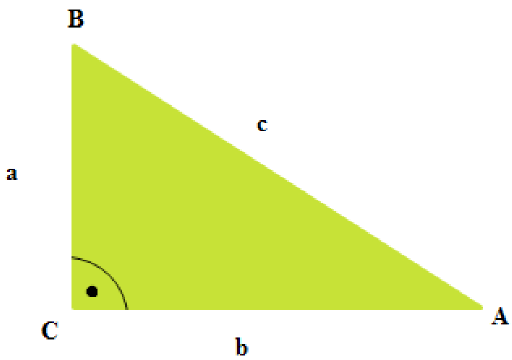
Sprawdź, czy odcinki o długościach $5, 6, 3\sqrt{2}$ mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości. Należy sprawdzić, czy suma długosci dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4{,}25 \approx 9{,}25 > 6$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

Twierdzenie Pitagorasa

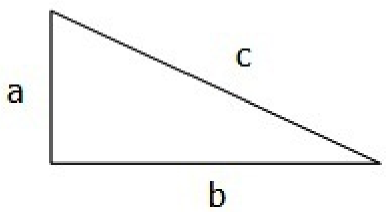


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$

Przykład 3

Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: $3 : 4$, a przeciwprostokątna ma długość $15\ \mathrm{cm}$.



$a = ?$
$b = ?$
$c = \ 10\ cm$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3 : 4$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3b \ \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2 a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15\ cm\ ^2)$$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225\ cm^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225\ cm^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144\ cm^2$$

$$b = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \ \Rightarrow \ a = \frac{3}{4} \cdot 12\ cm = 9\ cm$$

Odpowiedź: Przyprostokątne mają długości 9 cm i 12 cm.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a) $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$ b) $2, \sqrt{10}, 4$

a) $\left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$$24 = 3 + 21$$

$$24 = 24$$

$$L = P$$

Trójkąt jest prostokątny

b) $4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2 4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2$

$$16 = 10 + 4$$

$$16 \neq 14$$

$$L \neq P$$

Trójkąt nie jest prostokątny

Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską.**

Przykłady takich trójek:

3, 4, 5;

5, 12, 13;

40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q takie, że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$a^2 + b^2 = c^2$

Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

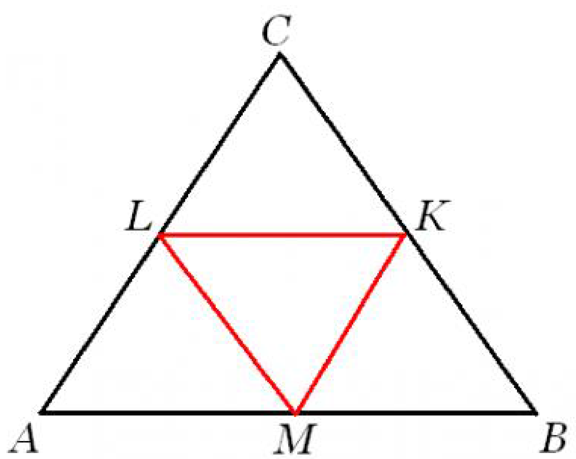
Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$AB \parallel LK \qquad |LK| = \frac{1}{2}|AB|$

$AC \parallel KM \qquad |KM| = \frac{1}{2}|AC|$

$BC \parallel LM \qquad |LM| = \frac{1}{2}|BC|$



ZADANIA

4.5.1 Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.

Odpowiedź: 30°, 40º, 110º

4.5.2 Jeden kąt trójkąta ma miarę 26º, a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi 12º. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Odpowiedź: 26º, 71º, 83º

4.5.3 Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3:5:4.

Odpowiedź: $a = 12\ \mathrm{cm}, b = 20\ \mathrm{cm}, c = 16\ \mathrm{cm}$

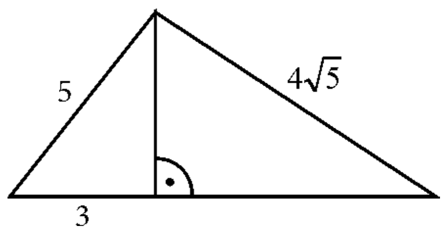
4.5.4 W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.

Odpowiedź: 8 cm

4.5.5 W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

4.5.6 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:



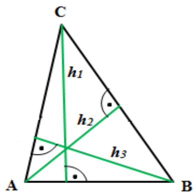
Odpowiedź: $P = 22$

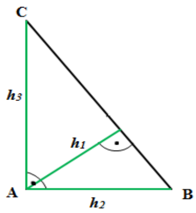
4.5.7 Dany jest trójkąt $\mathbf{ABCABC}$ o bokach długości: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{6}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AC}| = \mathbf{5}$. Punkt $\mathbf{M}$ jest środkiem boku $\mathbf{AC}$, punkt $\mathbf{N}$ – środkiem boku $\mathbf{BC}$. Obliczyć obwód trapezu $\mathbf{ABNM}$.

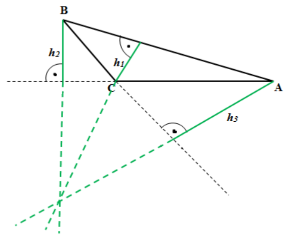
Odpowiedź: 13,5

Wysokości i **środkowe** w **trójkącie**

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

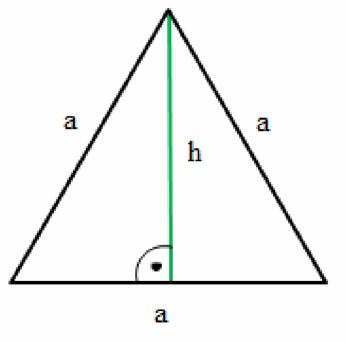






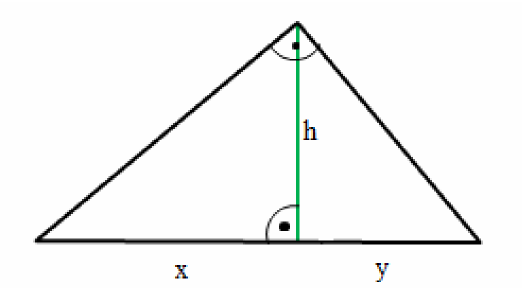
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



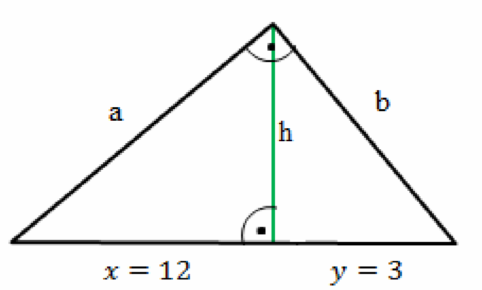
Wysokość trójkąta o boku a jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

W **trójkącie prostokątnym** wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki x, y, dla których $h = \sqrt{x \cdot y}$



Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 3 cm i 12 cm. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.



a, b – szukane długości przyprostokątnych

h – wysokość

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej a

$a^2 = x^2 + h^2$

$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ cm

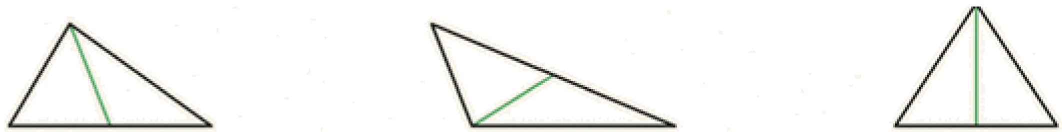
Podobnie liczymy długość przyprostokątnej b

$b^2 = y^2 + h^2$

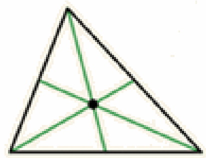
$b^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$

Wysokość trójkąta ma długość $6\ \mathrm{cm}$, a przyprostokątne $6\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$ i $3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$.

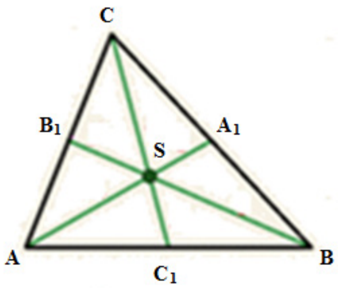
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

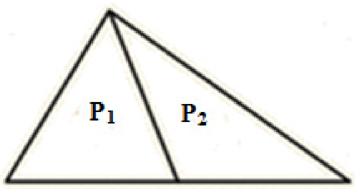


Środek ciężkości S dzieli każdą środkową w stosunku $2 : 1$.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości $3, 5, 6$.

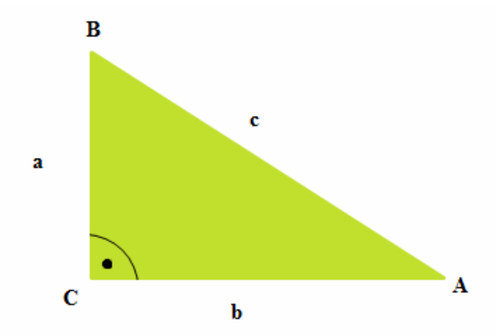
Liczymy najpierw ile wynosi połowa obwodu trójkąta $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

Odpowiedź: Pole trójkąta o bokach $3, 5$,6 wynosi $2\sqrt{14}$.

Twierdzenie

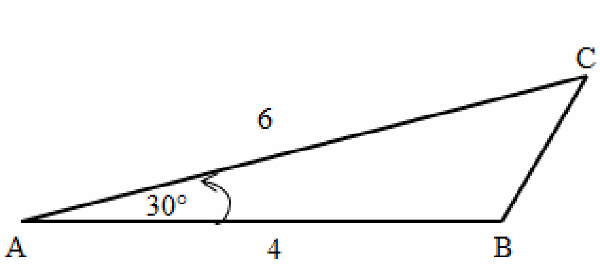
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BCA|$$

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot sin30°$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6j^2$.

ZADANIA

4.5.8 W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: 16 cm, $2\sqrt{97}$ cm, $2\sqrt{97}$ cm

4.5.9 W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Odpowiedź: $64, 16 + 16\sqrt{2}64, 16 + 16\sqrt{2}$

4.5.10 Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|\mathbf{AB}| = \mathbf{4}$ i $|\mathbf{BC}| = \mathbf{2\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $\sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90°$

4.5.11 Oblicz pole trójkąta ABC jeśli $|\mathbf{AC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AB}| = \mathbf{7}, \sphericalangle \mathbf{BAC} = \mathbf{60°}$.

Odpowiedź: $7\sqrt{3}$

4.5.12 Oblicz pole trójkąta o bokach $\mathbf{12}$ i $\mathbf{9\sqrt{2}}$ oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze 30°.

Odpowiedź: $27\sqrt{2}$

4.5.13 W trójkącie ostrokątnym $\mathbf{ABC}$ poprowadzono prostą prostopadłą do boku $\mathbf{AB}$, przecinającą bok $\mathbf{AC}$ w punkcie $\mathbf{E}$ i bok $\mathbf{AB}$ w punkcie $\mathbf{F}$. Punkt $\mathbf{D}$ jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu $\mathbf{C}$. Wiedząc, że $|\mathbf{EC}| = \mathbf{3}|\mathbf{FD}| = \mathbf{1}$, oblicz sinus kąta $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

4.6 Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*

Teraz nauczę się stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu

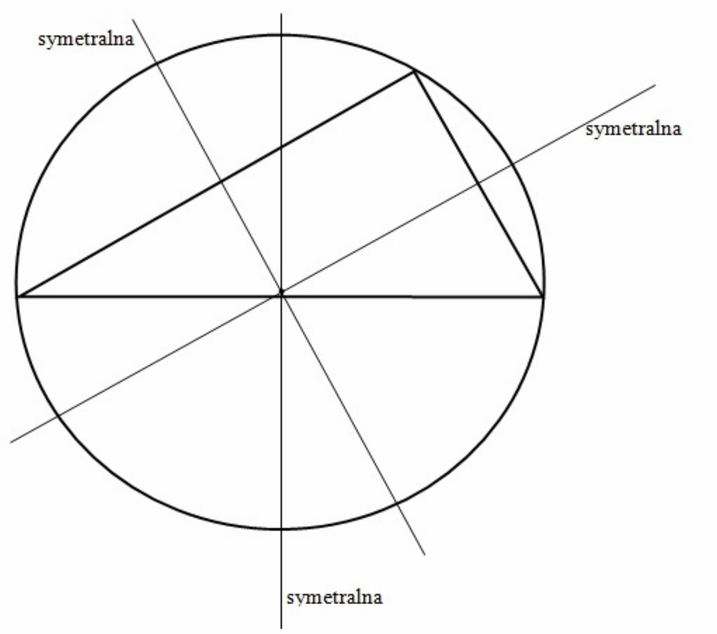
Okrąg opisany na trójkącie

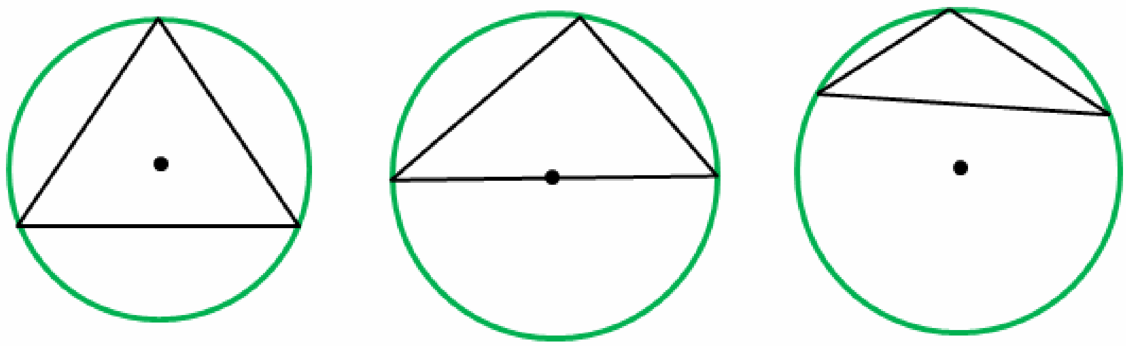
Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

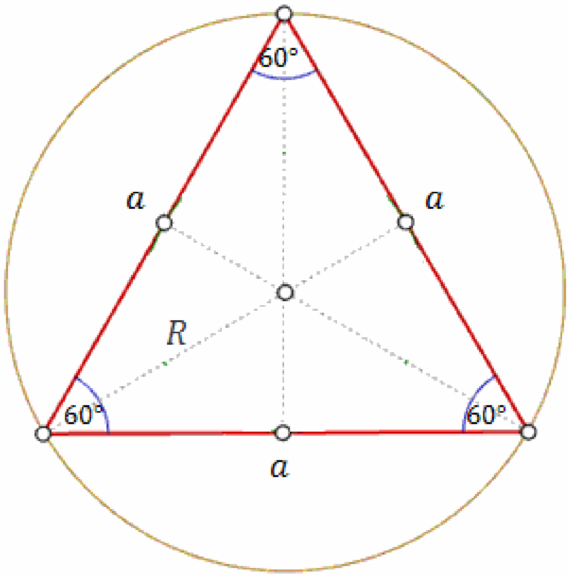




- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

OKRĘGI OPISANE NA WYBRANYCH TRÓJKĄTACH

Trójkąt równoboczny



R – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

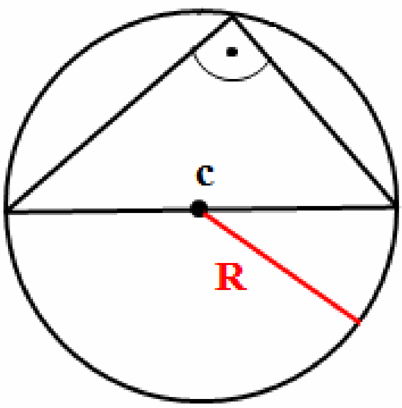
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



c – przeciwprostokątna

h – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$R = \frac{1}{2}c$$

Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku $a = 12$ cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru $R = \frac{2}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 12\text{ cm}$, to:

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

więc $R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi $2R$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$$

$$(2R)^2 = 16 + 100$$

$$4R^2 = 116 /:4$$

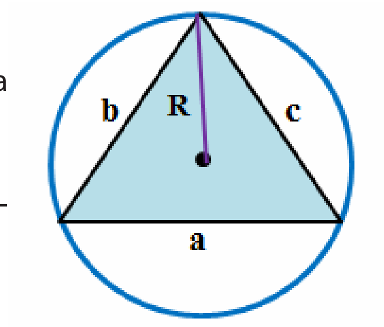
$$R^2 = 29 \Rightarrow R = \sqrt{29}$$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = \sqrt{29}$.

Pole trójkąta wpisanego w **okrąg**

Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wynosi $\boldsymbol{P = \frac{abc}{4R}}$



ZADANIA

4.6.1 Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: 8π.

4.6.2 Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $25\pi\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

4.6.3 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

a) równobocznym, o boku o długości $8\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

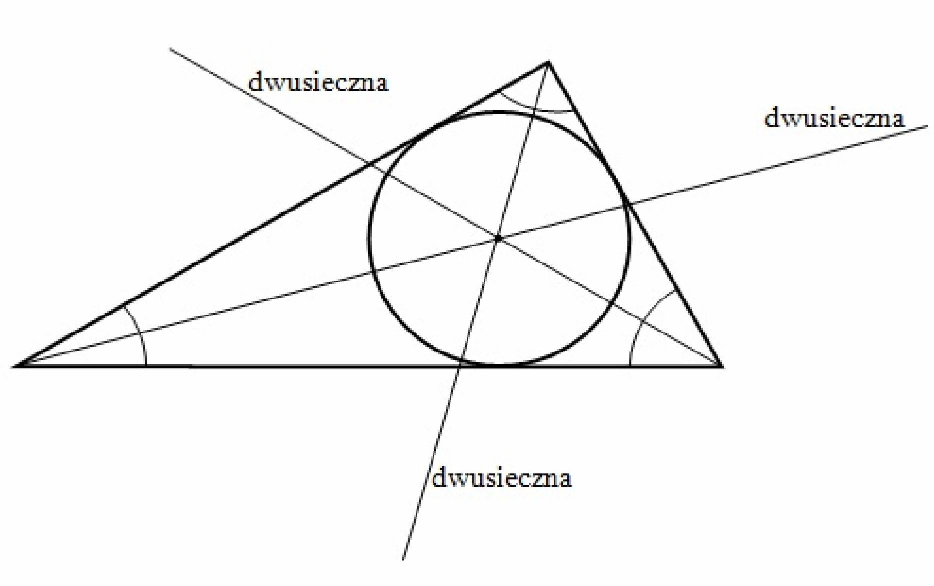
b) prostokątnym, o przyprostokątnych $12\ \mathrm{cm}$ i $18\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $R=3\sqrt{13}$.

4.6.4 Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy $\mathbf{13\frac{13}{24}}$. Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

Odpowiedź: 17.

Okrąg wpisany w **trójkąt**



Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta.

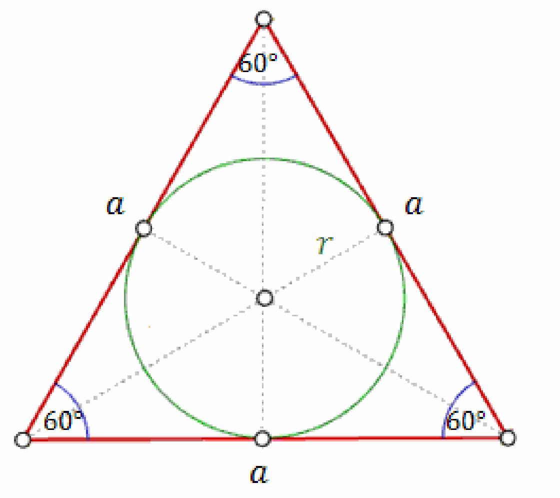
Dwusieczna kąta to półprosta, która ma początek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa kąty o równych miarach.

Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

Trójkąt równoboczny



r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

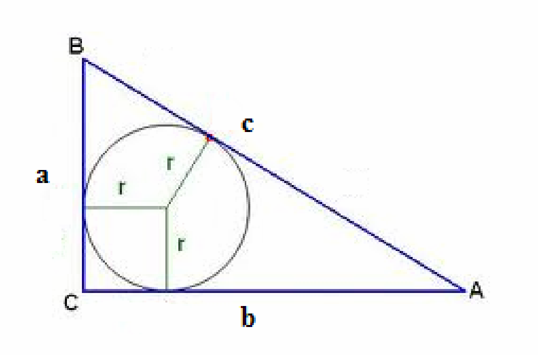
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ \mathrm{cm}$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 8\ \mathrm{cm}$, to:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

więc $r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ \mathrm{cm}$ wynosi $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$.

Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3\ \mathrm{cm}$ i przeciwprostokątnej $5\ \mathrm{cm}$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$5^2 = 3^2 + a^2$$

$$25 = 9 + a^2$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\ cm$$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru $r = \frac{a+b+c}{2}$, więc

$$r = \frac{4+3-5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość $1\ \mathrm{cm}$.

Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c opisanego na okręgu o promieniu r jest równe

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

ZADANIA

4.6.5 Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $12\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

4.6.6 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:

a) Pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: $25\pi\ \mathrm{cm}^2$

b) Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $4\pi\ \mathrm{cm}^2$

c) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Odpowiedź: $h = \frac{24}{5}\ \mathrm{cm}$

4.6.7 Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

4.6.8 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $\mathbf{12\ cm}$. Kąty przy tej podstawie mają po $\mathbf{30°}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $r = \left(12 - 6\sqrt{3}\right)$

4.6.9 Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $\mathbf{a}$ i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:

a) $a = 4$ b) $a = 3\sqrt{6}$ c) $a = 6\sqrt{2}$ d) $a = 12$

Odpowiedź:

a) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3} r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $r = \sqrt{3},\ R = 3\sqrt{2} r = \sqrt{3},\ R = 3\sqrt{2}$

c) $r = \sqrt{6},\ R = 2\sqrt{6} r = \sqrt{6},\ R = 2\sqrt{6}$

d) $r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3} r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}$

4.6.10 W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{5}{12}, tg\beta = \frac{12}{5}$

4.7 Przystawanie i podobieństwo trójkątów

Teraz nauczę się:

- rozpoznawać trójkąty przystające i podobne;
- wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów

Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.

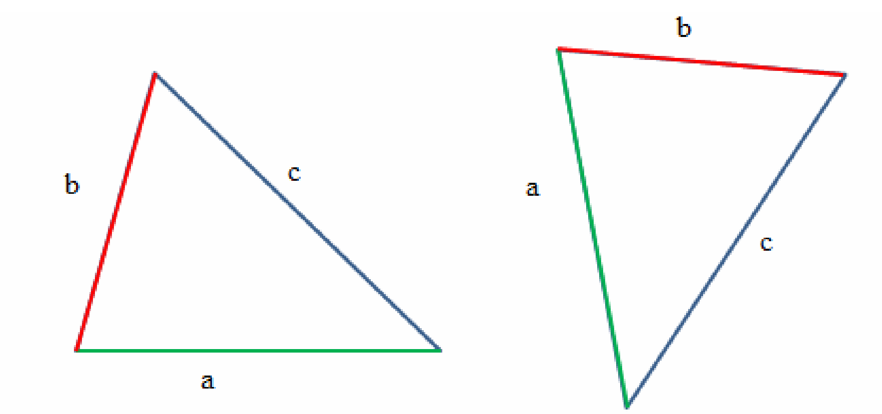
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem ≡.

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

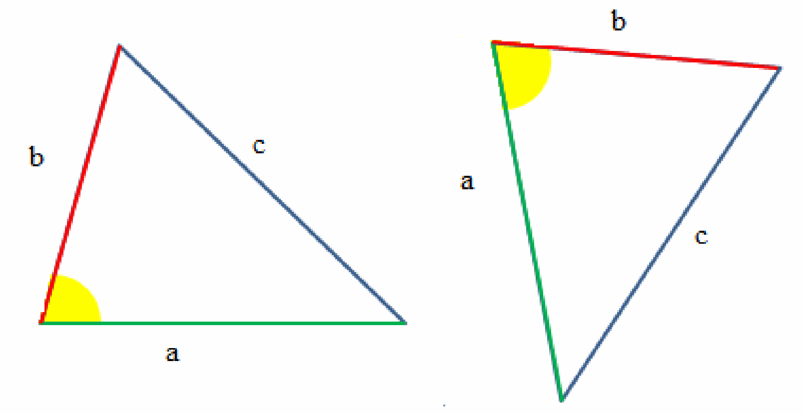
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



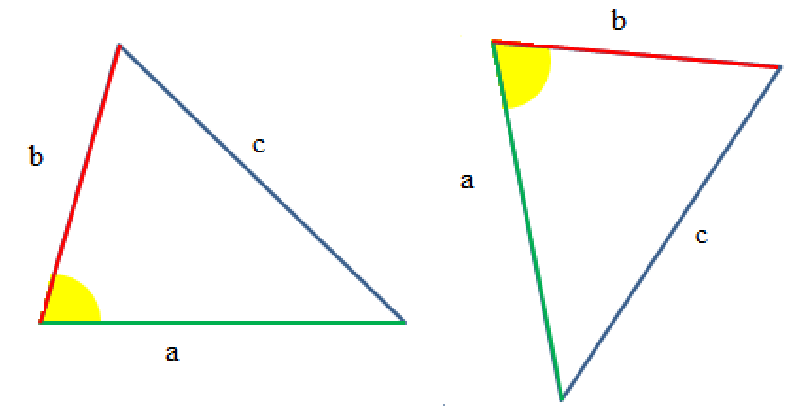
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



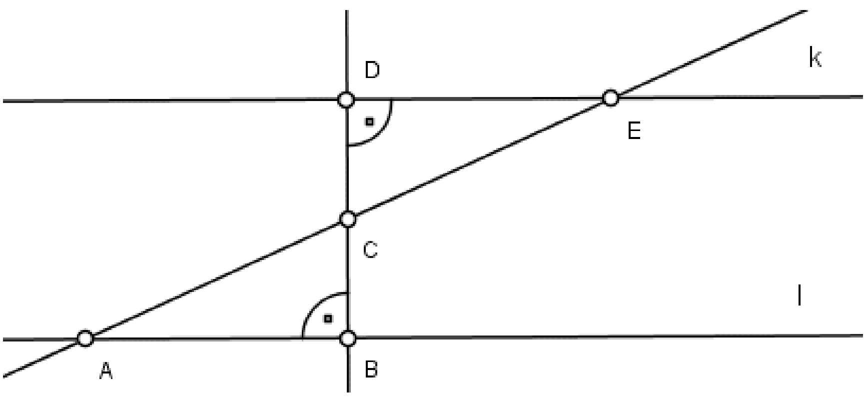
III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Przykład 1

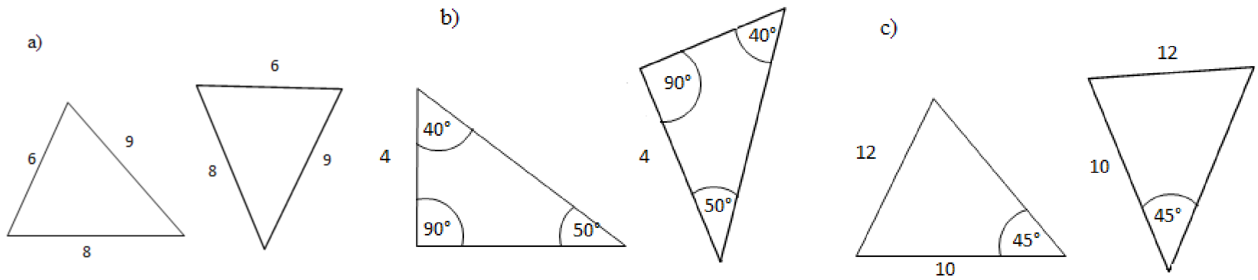
Proste k i l są równoległe. Punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.



Kąty BCA oraz DCE jako kąty wierzchołkowe mają równe miary. $|DC| = |CB|$ ponieważ punkt C jest środkiem odcinka BD. Wobec powyższych faktów, trójkąty ABC oraz DCE na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

ZADANIE

4.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

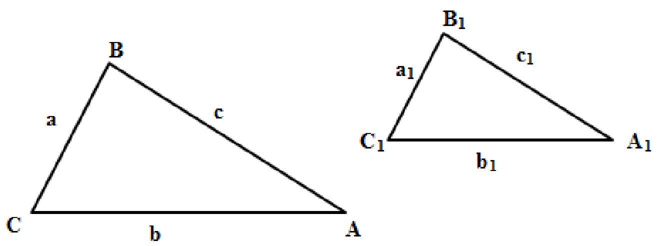
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem ~.

I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



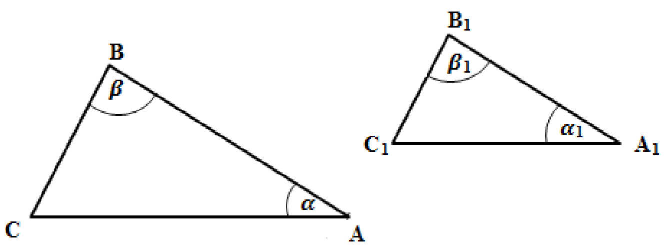
$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} = k$$

k – skala podobieństwa

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \beta_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

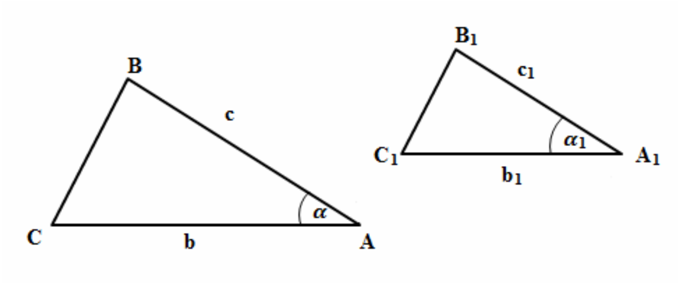
III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.

$\alpha = \alpha_1$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

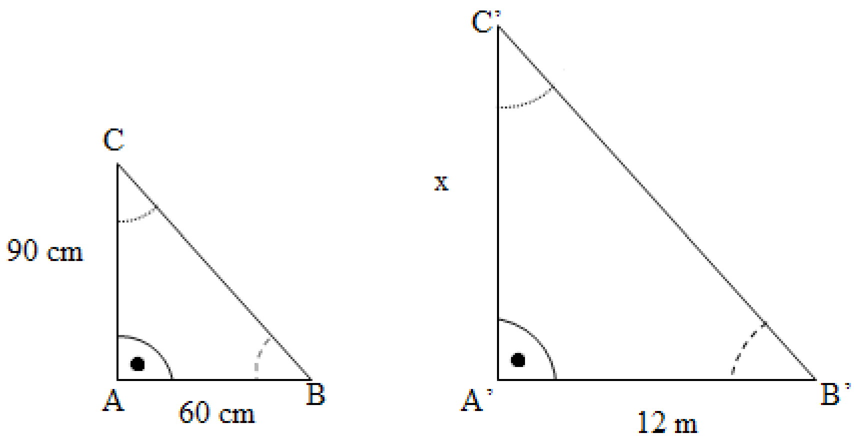
$\Delta ABC \sim \Delta A_1 A_2 A_3$



Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.

W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\frac{0,9}{0,6} = \frac{x}{12}$$

$$6x = 9 \cdot 12$$
$$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$$

Odpowiedź: Wieża ma wysokość 18 m.

ZADANIA

4.7.2 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ w skali $\mathbf{k} = \mathbf{2}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$, jeśli: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{5}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{7}, |\mathbf{CA}| = \mathbf{4}$.

Odpowiedź: $|A'B'| = 10, |B'C'| = 14, |C'A'| = 8$.

4.7.3 Ramiona trapezu $\mathbf{ABCD}$ przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie $\mathbf{E}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DE}$.

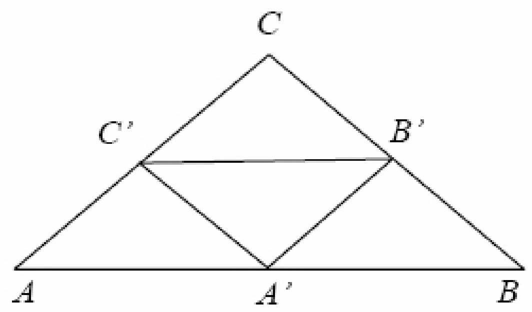
Odpowiedź: 12.

4.7.4 Punkty $\mathbf{A', B', C'}$ są środkami boków trójkąta $\mathbf{ABC}$. Pole trójkąta $\mathbf{A', B', C'}$ jest równe $\mathbf{4}$. Oblicz pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Odpowiedź: 16.

4.7.5 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$. Oblicz długość boku $|\mathbf{A'C'}|$, jeżeli

Odpowiedź: $|A'C'| = 7{,}5\ \mathrm{cm}$.



4.7.6 Trójkąty $\mathbf{ABC}$ i $\mathbf{A'B'C'}$ są podobne. Trójkąt $\mathbf{ABC}$ ma boki o długości $\mathbf{4\ cm}$, $\mathbf{6\ cm}$ i $\mathbf{8\ cm}$. Obwód trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ wynosi $\mathbf{135\ cm}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$.

Odpowiedź: $30\ \mathrm{cm}, 45\ \mathrm{cm}, 60\ \mathrm{cm}$.

4.7.7 Drzewo o wysokości $\mathbf{4\ m}$ rzuca cień o długości $\mathbf{8\ m}$. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości $\mathbf{3\ m}$. Oblicz wysokość znaku drogowego.

Odpowiedź: $1{,}5\ \mathrm{m}$.

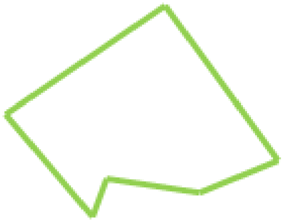
4.8 Wielokąty

Teraz nauczę się:

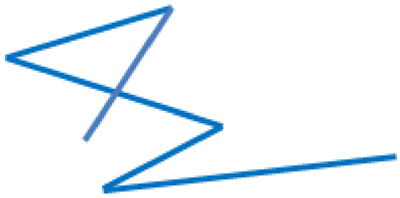
- obliczać liczbę przekątnych wielokąta;
- obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta

Łamaną nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.

Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej.**

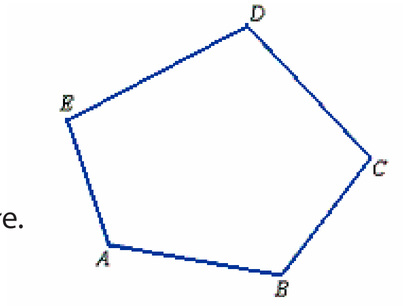


Łamana zwyczajna zamknięta



Łamana zwyczajna otwarta

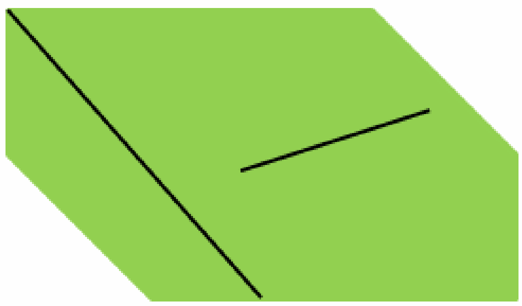
Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.



Wielokąt o n bokach nazywamy również n–kątem.

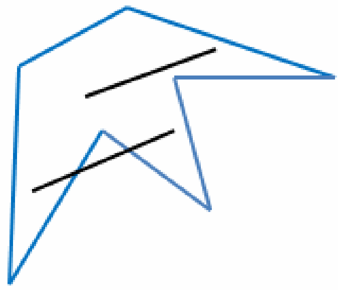
Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.



Wielokąt wypukły

Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie



Wielokąt wklęsły

Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

Przykład 1

Oblicz liczbę przekątnych 17–kąta.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:

$$(n-2)\cdot 180^\circ$$

Przykład 2

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

$$(n-2)\cdot 180° = (17-2)\cdot 180° = 15\cdot 180° = 2700°$$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę". To znaczy mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n". Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \ /\cdot 2$$

Obliczamy powstałe równanie:

$$(n-3)n = 108$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-108) = 441$$

$$\sqrt{\Delta} = 21$$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ – nie spełnia warunków zadania – liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+21}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1080°$. Jaki to wielokąt?

Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$(n-2)\cdot 180° = 1080° \ /: 180°$$

$$n - 2 = 6$$

$$n = 8$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

ZADANIA

4.8.1 Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: dziesięciokąt.

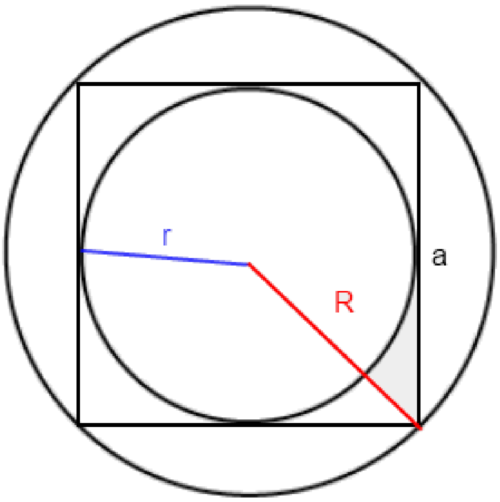
4.8.2 Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1620°$. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: jedenastokąt.

Czworokąty

Na początek przypomnimy podstawowe wzory na pola czworokątów.

Kwadrat



$P = a^2$

$P = 2R^2$

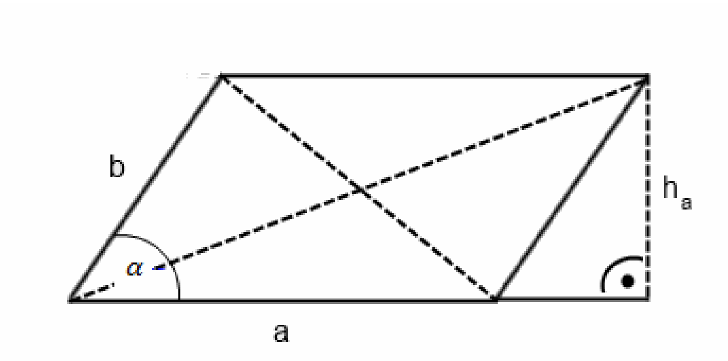
$P = 4r^2$

d – przekątna

$d = a\sqrt{2}$

$P = \frac{1}{2}d^2$

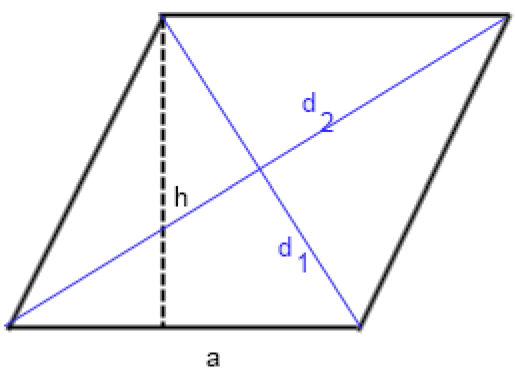
Równoległobok



$P = a \cdot h_a$

$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Romb

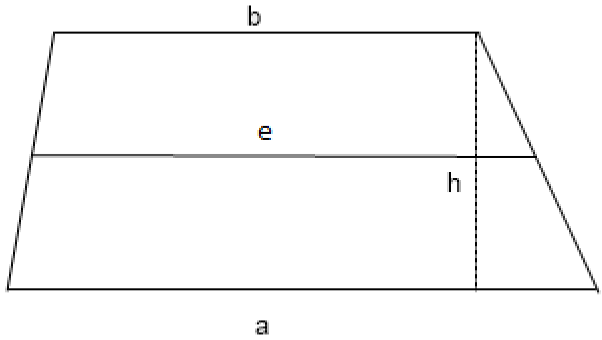


$P = a \cdot h_a$

$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$

$P = a^2 sin\alpha$

Trapez

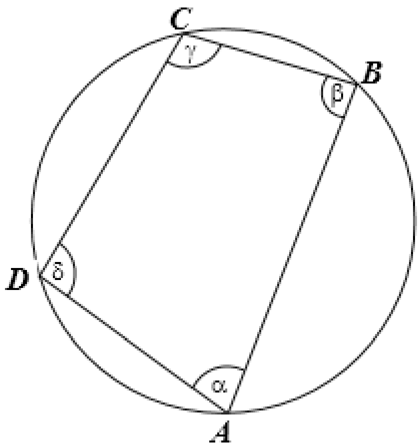


$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

e – odcinek łączący środki ramion trapezu

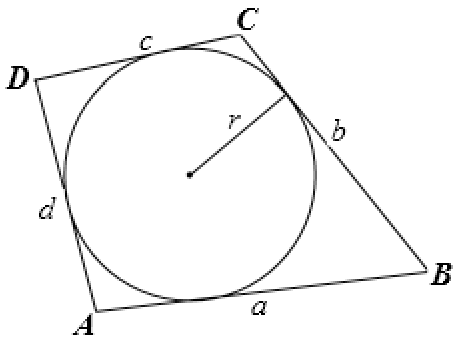
$$e = \frac{a+b}{2}$$

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.



W **czworokąt wypukły można wpisać okrąg** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$a + c = b + d$



ZADANIA

4.8.3 Oblicz pole równoległoboku o bokach $\mathbf{7cm}$ i $\mathbf{12cm}$, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o 60°.

Odpowiedź: $42\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$**.**

4.8.4 W rombie $\mathbf{ABCD}$ bok AB ma długość $\mathbf{20\ cm}$, a przekątna $\mathbf{BD}$ ma długość $\mathbf{24\ cm}$. Punkty $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ są kolejno środkami boków rombu.

a) wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest prostokątem
b) oblicz pole tego prostokąta

Odpowiedź:

b) $P = 192\ \mathrm{cm}^2$.

4.8.5 W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą $\mathbf{45°}$ i . Oblicz pole trapezu.

Odpowiedź: $P = 21\left(\sqrt{3} - 1\right)\ \mathrm{cm}^2$.

4.8.6 Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedź: $P = 45\ \mathrm{cm}^2$

4.8.7 W trójkącie prostokątnym ABC dane są $|\mathbf{AC}| = \mathbf{12}, \sphericalangle\mathbf{CAB} = \mathbf{60°}$. Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1:5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.

Odpowiedź: $P = 70\sqrt{3}$.

4.8.8 W czworokącie $\mathbf{ABCD}$ przekątne $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BD}$ przecinają się w punkcie $\mathbf{E}$. Dane są pola trzech trójkątów : $\mathbf{P_{BCE} = 15}, \mathbf{P_{ECD} = 5}, \mathbf{P_{AED} = 10}$. Oblicz pole czworokąta $\mathbf{ABCD}$.

Odpowiedź: 60.

4.9 Wielokąty foremne

Teraz nauczę się obliczać:

- miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego;
- sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego;
- pola wielokątów foremnych

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.

Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.

Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

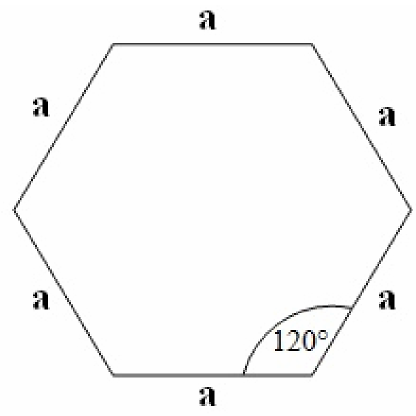
Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

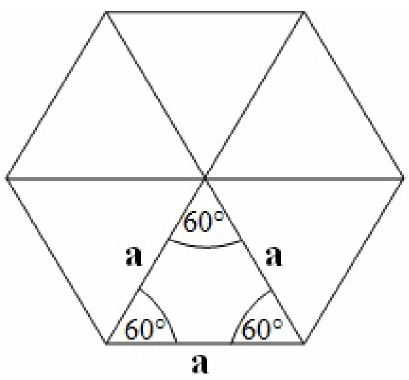
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny.**



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi 720°.

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę 120°.



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	Pole	Promień okręgu opisanego na wielokącie	Promień okręgu wpisanego w wielokąt
Trójkąt równoboczny	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ZADANIA

4.9.1 Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $\mathbf{4,5\ cm}$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $R = 3\ \mathrm{cm},\ r = 1{,}5\ \mathrm{cm}.$

4.9.2 W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

4.9.3 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód długości $\mathbf{10\ cm}$. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

Odpowiedź: pole trójkąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{9}$, pole kwadratu $P = 6\frac{1}{4}$, pole sześciokąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{6}$.

4.9.4 Pole kwadratu jest równe $\mathbf{8\ cm^2}$. Oblicz promień koła:

a) opisanego na kwadracie

b) wpisanego w kwadrat

Odpowiedź: $R = 2\ \mathrm{cm},\ r = \sqrt{2}\ \mathrm{cm}.$

4.9.5 W koło o polu $\mathbf{6,25\pi\ cm^2}$ wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

Odpowiedź: $P = 12{,}5\ \mathrm{cm}.$

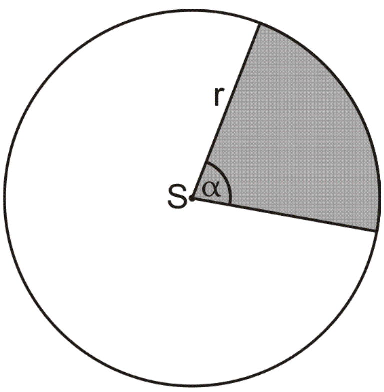
4.10 Pole koła i długość okręgu

Teraz nauczę się obliczać: pole koła i wycinka koła oraz długość okręgu

Dla danego koła o promieniu r możemy policzyć:

pole: $\boldsymbol{P = \pi r^2}$

oraz obwód: $\boldsymbol{L = 2\pi r}$



Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu r.

Kąt pełny ma 360°. Podzielmy całe koło na wycinki o kącie 1°. Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$$P = \frac{\pi r^2}{360°}$$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie α stopni będzie miał postać:

$$\boldsymbol{P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole wycinka koła o promieniu $r = 10$ i kącie równym 60°.

Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:

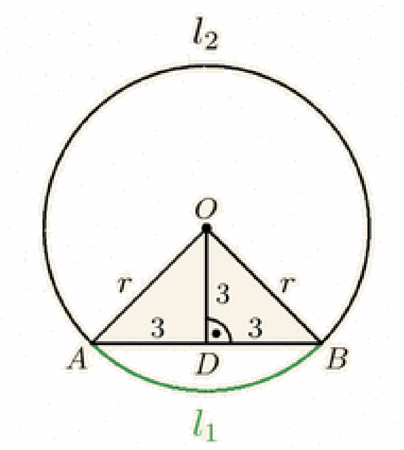
$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$$

Długość l łuku okręgu o promieniu r, odpowiadającego kątowi środkowemu o mierze α, wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r}$$

Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 6 cm odległą o 3 cm od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt AOB jest równoramienny. Odcinek OD jest jego wysokością i dzieli cięciwę AB o długości 6 cm na dwie równe części po 3 cm. Promień r liczymy z twierdzenia Pitagorasa.

$$3^2 + 3^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 18 = r^2 \quad \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\ cm$$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180°. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych ADO i DBO są równe $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

$$\sphericalangle AOB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Długość łuku l_1 wynosi:

$$l_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku l_1.

$$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \pi\ \mathrm{cm}.$$

Odpowiedź: okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm i $4\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \pi$ cm.

ZADANIA

4.10.1 Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $60°$ ma długość 2. Oblicz pole tego wycinka.

Odpowiedź: 6π.

4.10.2 Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\pi$ odpowiada kąt $135°$.

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

4.10.3 Promień koła jest równy 2 cm. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze $30°$?

Odpowiedź: $\frac{1}{3}\pi$.

4.10.4 Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie $60°$, jeżeli promień koła ma długość 6 cm.

Odpowiedź: $P = 6\pi\ \mathrm{cm}^2,\ l = 2\pi\ \mathrm{cm}$.

4.10.5 Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu 9 cm i kącie $60°$.

Odpowiedź: $l = 3\pi\ \mathrm{cm}, P = 13{,}5\pi\ \mathrm{cm}^2$.

4.10.6 Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie $120°$, wynosi $l = 8\pi\ cm$.

Odpowiedź: $r = 12\ \mathrm{cm}$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[40] W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość:

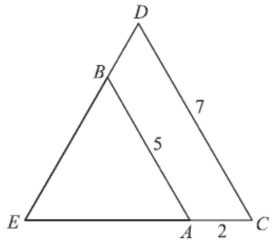
a) 6 b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{29}$ d) 14

2. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) $16\sqrt{6}$ b) $14\sqrt{6}$ c) $12+4\sqrt{6}$ d) $12+2\sqrt{6}$

40 Zadania 1-6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 01.03.2013.

3. *Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:

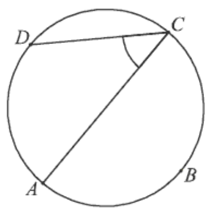


a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{14}{5}$ c) 3 d) 5

4. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

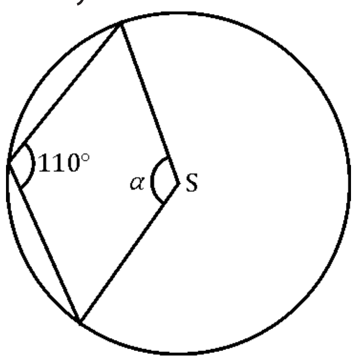
a) 25 b) 50 c) 75 d) 100

5. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa:



a) 90° b) 60° c) 45° d) 30°

6. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.



7.[41] Punkt S jest środkiem koła. Zatem miara kąta α jest równa (patrz na rysunek):

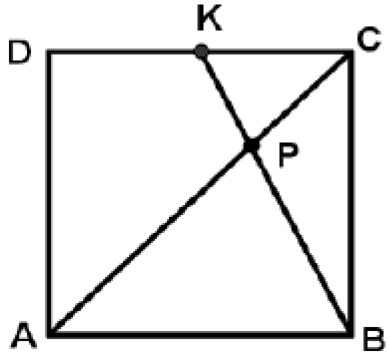
a) 70° b) 220° c) 140° d) 250°

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe 30° i 60°. Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

41 Zadanie 7, 8, 9: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze, 01.03.2013.

9. Na boku DC kwadratu $ABCD$ obrano punkt K tak, że $|DK| = |KC|$ (zobacz rysunek). Przekątna AC kwadratu przecina odcinek BK w punkcie P. Uzasadnij, że pole trójkąta ABP jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta KCP.



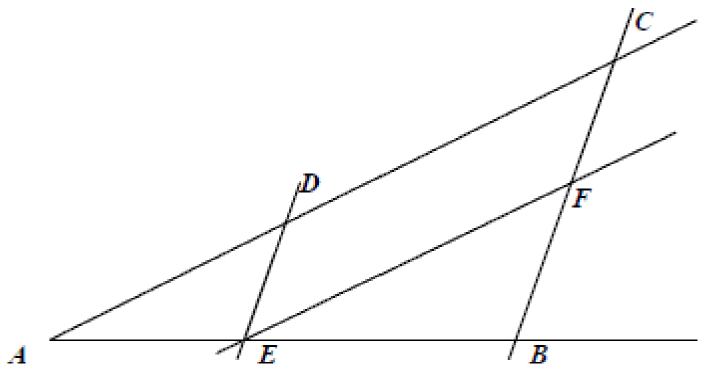
10.[42] Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

a) 36π b) 9π c) $18\sqrt{3}\pi$ d) 12π

11. Odcinek o długości 2,4 m podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

a) 120 cm b) 0,72 m c) 480 mm d) 14 dm

12. *Proste DE i CB oraz EF i AC są równoległe. Oblicz długość odcinka EB, jeżeli $AE = 2{,}5$, $DE = 3$ oraz $FB = 4$.



13. Wykaż, że wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki AD i DB, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio AC i BC tego trójkąta.

14.[43] W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

a) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ d) $\frac{1}{17}$

42 Zadania 10-13: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 01.03.2013.
43 Zadanie 14, 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 01.03.2013.

15. Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{5}$

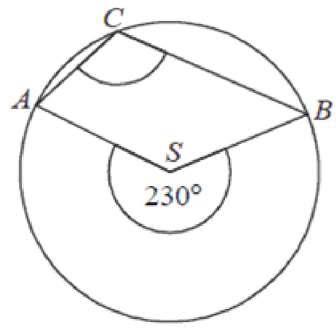
16.[44] Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1:

a) o 10% b) o 110% c) o 21% d) o 121%

17. Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 14. Bok AB tego prostokąta ma długość 6. Długość boku BC jest równa:

a) 8 b) $4\sqrt{10}$ c) $2\sqrt{58}$ d) 10

18. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego ACB jest równa:

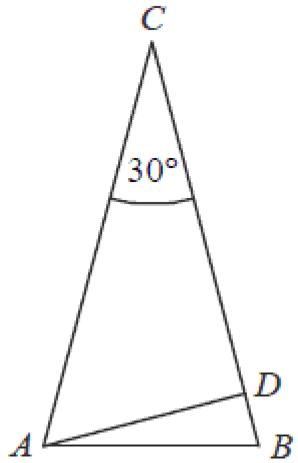


a) 65° b) 100° c) 115° d) 130°

19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

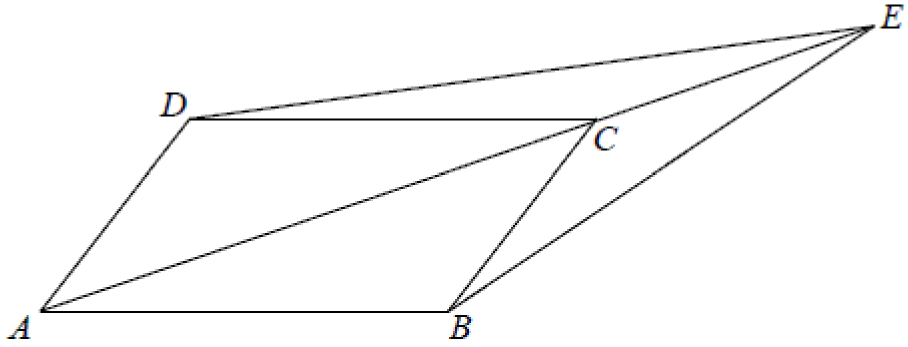
a) 36 b) 18 c) 12 d) 6

20. W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok BC.



44 Zadania 16-21: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 01.03.2013.

21. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.



22.[45] Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

a) 21° i 105 b) 11° i 66° c) 18° i 108° d) 16° i 96°

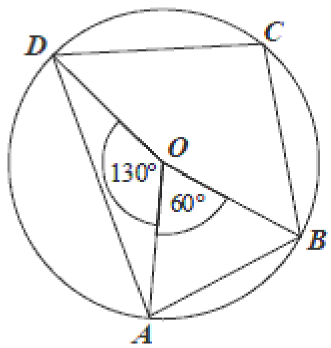
23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta a dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm d) 8 cm

25. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany BAD ma miarę:



a) 150° b) 120° c) 115° d) 85°

26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

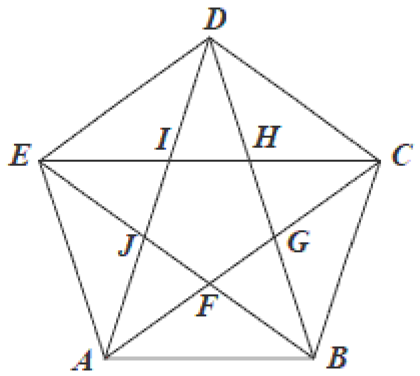
27.[46] W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość:

a) 6 b) $2\sqrt{21}$ c) $2\sqrt{29}$ d) 14

45 Zadania 22-26: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 02.03.2013.

46 Zadania 27-31: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf,0 2.03.2013.

28. Pięciokąt $ABCDE$ jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ECD:



A. $\Delta\, ABF$

B. $\Delta\, CAB$

C. $\Delta\, IHD$

D. $\Delta\, ABD$

29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) $16\sqrt{6}$ b) $14\sqrt{6}$ c)1 $2 + 4\sqrt{6}$ d) $12 + 2\sqrt{6}$

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

a) 25 b) 50 c) 75 d) 100

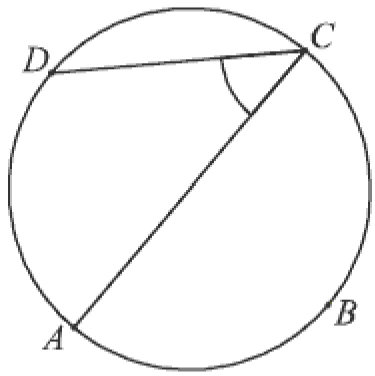
31. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa:

A. 90°

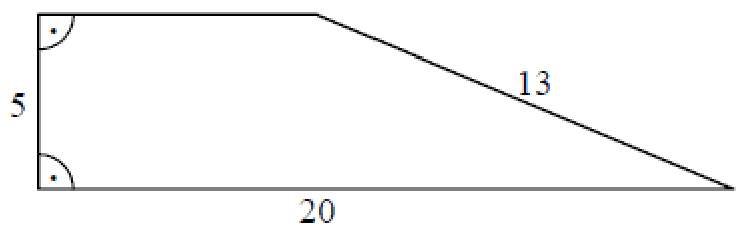
B. 60°

C. 45°

D. 30°



32.[47] Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.

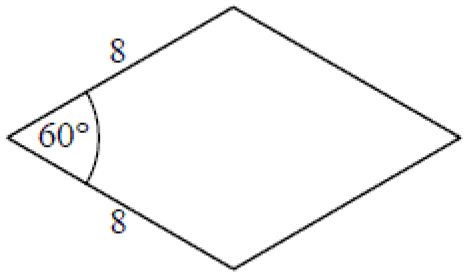


Obwód tego trapezu jest równy:

a) 43 b) 46 c) 48 d) 50

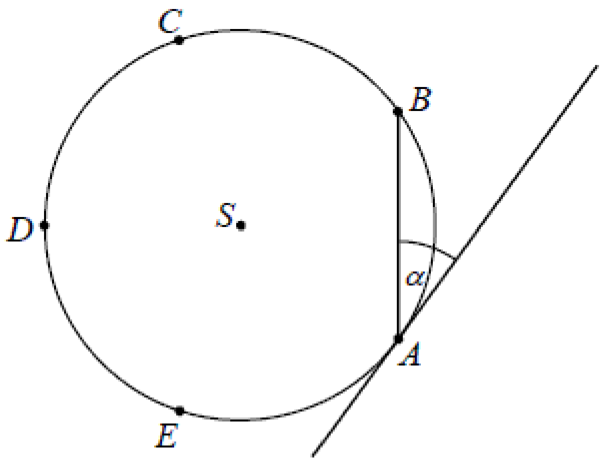
47 Zadania 32-35: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 03.03.2013.

33. Bok rombu ma długość 8, a kąt ostry ma miarę 60°. Wysokość tego rombu jest więc równa:



a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$

34. Punkty A, B, C, D i E leżą na okręgu o środku S i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek).

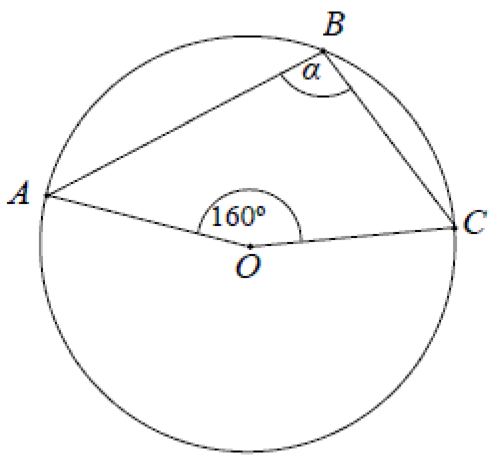


Wówczas miara kąta ostrego α między cięciwą AB i styczną do tego okręgu w punkcie A jest równa:

a) 18° b) 30° c) 36° d) 54°

35. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

36.[48] Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę:



a) 80° b) 100° c) 110° d) 120°

48 Zadanie 36, 37, 38: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 04.03.2013.

37. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa:

a) $3\sqrt{3}$ b) 3 c) $6\sqrt{3}$ d) 6

38. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

39.[49] Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:

a) 7 b) 14 c) 21 d) 28

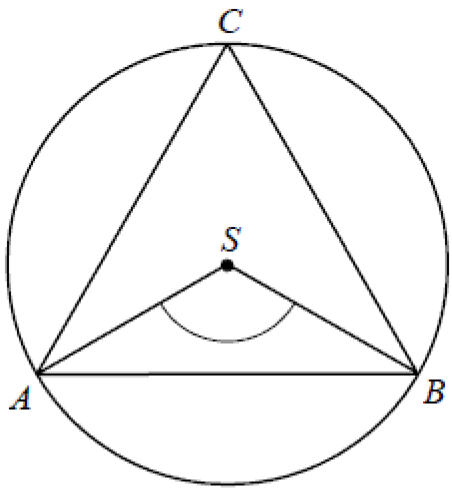
40. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:

a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 8 d) 4

41. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{61}$

42. Punkty A, B, C, leżące na okręgu o środku S, są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

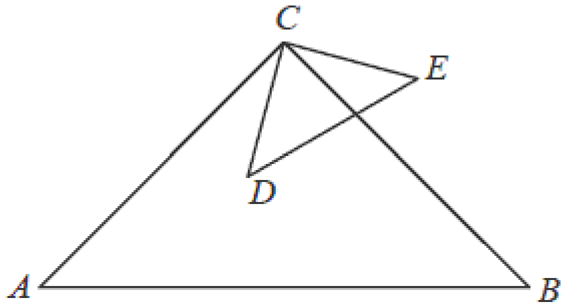


Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa:

a) 120° b) 90° c) 60° d) 30°

49 Zadania 39-44: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

43. Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $AD = BE$.



44. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

45.[50] Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E takie, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Wykaż, że kąt $|\sphericalangle DCE| = 45°$.

46. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.

Odpowiedź: $2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

47. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

a) $120°$ b) $135°$ c) $144°$ d) $150°$

Odpowiedź: c.

48. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{3}$

49. Długościami boków trójkąta mogą być:

a) $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$ b) 6 mm; 0,1 dm; 12 cm

c) $4{,}2 - \sqrt{3{,}2} + \sqrt{3}$ d) 2 dm; 4 cm; 0,07 m

Odpowiedź: a.

50. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:

a) $50°$ b) $80°$ c) $40°$ d) $70°$

Odpowiedź: b.

---

50 Zadania 45-53: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

51. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o 38° większy od drugiego. Kąty te mają miary:

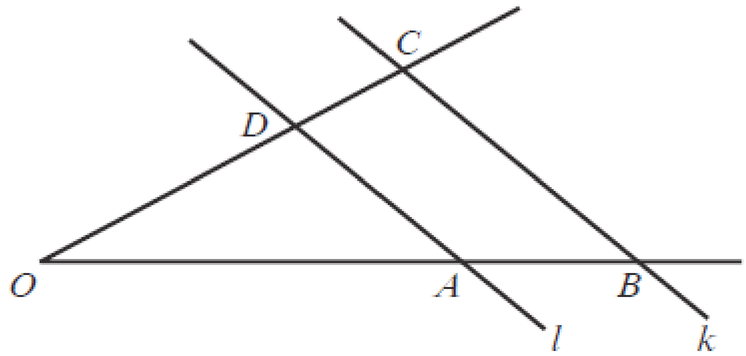
a) 71° i 109° b) 38° i 142° c) 26° i 64° d) 38° i 76°

52. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:

a) 360° b) 540° c) 720° d) 1080°

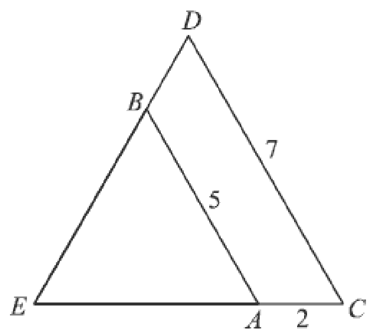
Odpowiedź: c.

53. *Proste l i k są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek OD ma długość:



a) 12 b) 18 c) $\frac{18}{5}$ d) $\frac{144}{5}$

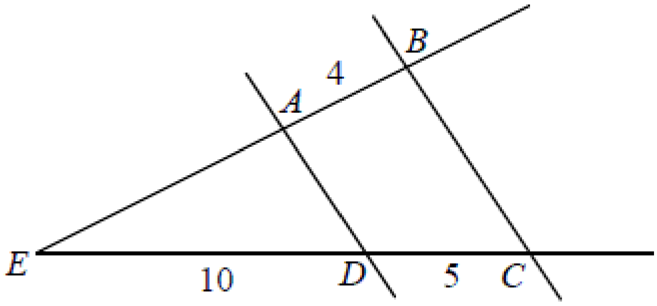
54.[51] *Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:



a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{14}{5}$ c) 3 d) 5

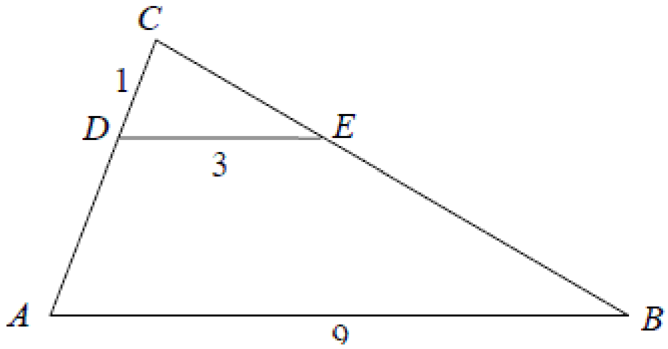
51 Zadanie 54: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf,0 4.03.2013

55.[52] *Proste AD i BC są równoległe. Długości odcinków ED, DC oraz AB podane są na rysunku. Długość odcinka EA jest równa:



a) 4 b) 8 c) 9 d) 10

56.[53] *Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka AD jest równa:



a) 2 b) 3 c) 5 d) 6

52 Zadanie 55: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf,
53 Zadanie 56: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

5 Ciągi

W liceum uczeń nauczy się:

- 1. Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.
- 2. Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.
- 3. Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu
- 4. arytmetycznego i geometrycznego.

5.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

Teraz nauczę się wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby naturalne.

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ...)$.

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, ..., n\}$ i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.

a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a liczby $(1, 2, 3, ..., n)$ nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności.

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia, wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Przykłady:

$a_n = n + 3$: 2, 5, 8, 11, 14, ... – ciąg rosnący

$a_n = n^2$: 1, 4, 9, 16, 25, ... – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n$: 3, 2, 1, 0, –1, ... – ciąg malejący

$a_n = -5n$: –5, –10, –15, –20, –25, ... – ciąg malejący

5.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny;
- stosować wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$\boldsymbol{r = a_{n+1} - a_n}$ nazywamy różnicą ciągu

$\boldsymbol{a_{n+1}a_{n+1} = a_n a_n + r}$

Przykłady ciągów arytmetycznych:

$a_1 = 5, r = 3$; 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

$a_1 = 6, r = -2$; 6, 4, 2, 0, –2, –4, ...

Zależność między pierwszym a **dowolnym wyrazem ciągu :**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Suma n–początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\boldsymbol{s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)n(a_1 + a_n)}{2 \qquad 2} = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r2a_1 + (n-1)\cdot r}{2 \qquad\qquad 2} \cdot n}$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} zachodzi równość:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}a_{n-1} + a_{n+1}}{2 \qquad\quad 2}}$$

Ciąg arytmetyczny jest:

– **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia: $a_{n+1} - a_n > 0$,

– **malejący**, gdy różnica ciągu jest ujemna: $a_{n+1} - a_n < 0$,

– **stały**, gdy różnica ciągu jest równa 0: $a_{n+1} - a_n = 0$.

Ciekawostka[54]

W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych nazwany następnie jego imieniem:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

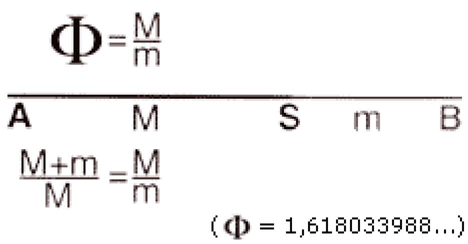
$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie n – należy do naturalnych oraz $k_0 = 1$ i $k_1 = 1$

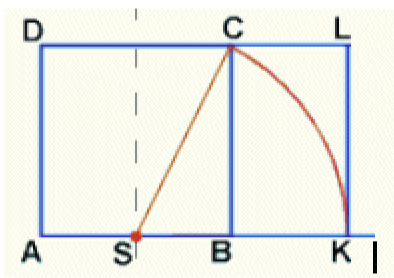
Można pokazać, że $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1{,}61803399887\ \ldots = \Phi$ gdzie Φ jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym. Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba Φ, jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd w opracowaniach często podaje się, że $\Phi = 1{,}618$.

Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:

1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.

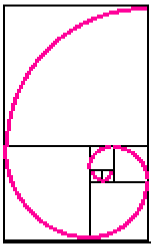


2. Złoty podział prostokąta .



54 Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym", J. Nowakowski i K. Borowski, Wydawnictwo Difin., www.bossa.pl, 6.03.2013.

3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

ZADANIA

5.2.1 Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

a) 1, 2, 3, 4, 5, ... b) 2, 4, 8, 16, 32, ... c) −2, −4, −6, −8, ... d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

Odpowiedź: Ciągi arytmetyczne: a, c, d

5.2.2 Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n):

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 3n-1$ c) $a_n = 2n+1$

d) $a_n = 1-n$ e) $a_n = n^n$ f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Odpowiedź:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12 b) 2, 5, 8, 11, 14, 17 c) 3, 5, 7, 9, 11, 13

d) 0, −1, −2, −3, −4, −5 e) 1,4, 27, 256, 3125, 46656 f) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

5.2.3 Dany jest ciąg (a_n) o podanym wzorze:

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_3 i a_4.

Odpowiedź: $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$

5.2.4 Sprawdź, czy dany ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 3 + n$ b) $a_n = 2n - 1$ c) $a_n = n^2 + 1$

d) $a_n = \frac{2}{3}n + 2$ e) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Odpowiedź: Tak: a, b, c

5.2.5 Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_2 = 5, a_6 = 15$

b) $a_3 = 6, a_{11} = 21$

c) $a_7 = 4, a_9 = 18$

d) $a_1 = 3, a_4 = 9$

e) $a_2 = 1, a_4 = 3–2\sqrt{3}$

Odpowiedź:

a) $a_n = –35+ (n – 1) \cdot 10 = –45 + 10n$

b) $a_n = 2 + (n – 1) \cdot 2 = 2n$

c) $a_n = –38 + (n – 1) \cdot 7 = –45 + 7n$

d) $a_n = 3 + (n – 1) \cdot 2 = 2n + 1$

e) $a_n = 5 + 2\sqrt{3} – n(2 + \sqrt{3})$

5.2.6 Znając trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, wyznacz 60 wyraz tego ciągu: $a_1 = 12, a_2 = 24, a_3 = 36$

Odpowiedź: 720

5.2.7 Mając dany ciąg arytmetyczny (a_n), w którym: $a_1 = 2$, $r = 4$, $a_n = 122$, oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg i ile wynosi suma jego wyrazów.

Odpowiedź: $n = 31$, $S_n = 1922$

5.2.8 Wyznacz a_3, a_7, a_{12} w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 8$, $r = 11$.

Odpowiedź: $a_3 = 30, a_7 = 74, a_{12} = 129$

5.2.9 Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów ciągu: 1, 4, 7, 10, 13, ….

Odpowiedź: $S_{20} = 590$

5.2.10 Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym $a_n = 2n – 5$.

Odpowiedź: $S_{15} = 165$

5.2.11 Oblicz x, wiedząc, że liczby:

a) $8, x, 22$ b) $x-4, 5, x+12$

w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Podaj różnicę ciągu.

Odpowiedź: a) $x = 15, r = 7$ b) $x = 1, r = 8$

5.2.12 Oblicz x, wiedząc, że: $2 + 6 + 10 + \ldots + x = 648$.

Odpowiedź: 70

5.2.13 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n):

a) $a_n = 3n$ b) $a_n = 2n - 4$ c) $a_n = n^2 - 1$

d) $a_n = -n + 2$ e) $a_n = \frac{-2n}{n+3}$

Odpowiedź:

a) $r = 3$ ciąg rosnący b) $r = 2$ ciąg rosnący

c) $r = 2n + 1$ dla $n \geq 1$ r > 0 ciąg rosnący d) $r = -1$ ciąg malejący

e) $r = \frac{-6}{n^2 + 7n + 12} < 0$ ciąg malejący

Ciekawostka

Ciąg liczb Fibonacciego na giełdzie

Istnieją trzy sposoby wykorzystania ciągu liczb Fibonacciego do analizy papierów wartościowych:

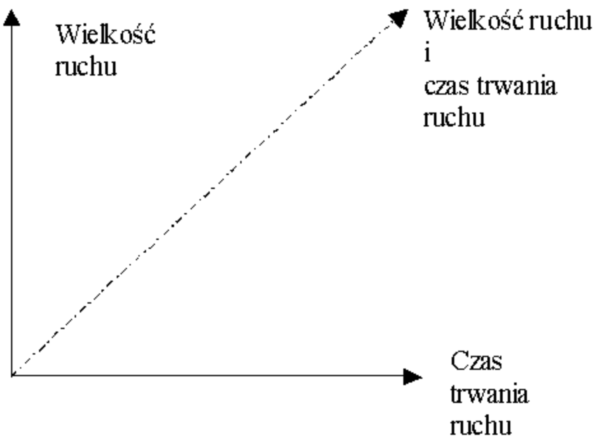
1. metody czasowe – w odniesieniu do upływu czasu (rozdział 3.2.1)
2. metody cenowe – w odniesieniu do zmiany ceny (rozdział 3.2.2)
3. metody cenowo–czasowe – w odniesieniu do upływu czasu i zmiany ceny (rozdział 3.2.3).

Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.

Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.

Rysunek 27. Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.



5.3 Ciąg geometryczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest geometryczny;
- stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą q, zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą q, a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

Suma n–początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$Sn = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1(1-q^n)a_1(1-q^n)}{1-q \qquad 1-q} \text{ dla } q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad \text{dla } q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, $a_{n,}$ a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n^{\,2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy:

$q > 0$ i $a_1 > 0$ lub $q \in (0, 1)$ i $a_1 < 0$

Ciąg jest malejący wtedy gdy:

$q > 0$ i $a_1 < 0$ lub $q \in (0, 1)$ i $a_1 > 0$

Ciąg jest stały wtedy, gdy:

$q = 1$ lub $a_1 = 0$

Jeśli iloraz q jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny.

Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału (–1, 1).

Ciekawostka

Metody cenowe

Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotne jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi Φ i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby Φ z przedziału <–3, 3>.

Tabela 3. Współczynniki złotego podziału[55]

Potęga n	F^n – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	Ciąg zewnętrzny
2	2,618	
3	4,236	

55 Źródło: Fischer R., "Liczby Fibonacciego na giełdzie", WIG - Press, Warszawa 1996.

–1	0,618	Ciąg wewnętrzny
–2	0,382	
–3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrotu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego, wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół) ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomu poziomów odwrotu Fibonacciego rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).

ZADANIA

5.3.1 Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a) 3, 6, 12, … b) 2, –6, 18, … c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$ d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

Odpowiedź:

a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ c) $a_n = \frac{2}{5} \cdot (5)^{n-1}$ d) $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

5.3.2 Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $q = -2, a_3 = 0{,}5$ b) $q = -\frac{1}{3}, a_4 = -27$ c) $q = -0{,}2, a_5 = -151{,}2$ d) $q = -6, a_4 = 0{,}5$

Odpowiedź:

a) $a_1 = \frac{1}{8}$ b) $a_1 = 729$ c) $a_1 = -94500$ d) $a_1 = -\frac{1}{432}$

5.3.3 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na n-ty wyraz wiedząc, że:

a) $a_1 = 1, a_5 = 12{,}5$ b) $a_1 = 16, a_7 = 256$ c) $a_1 = -3, a_{10} = -81$ d) $a_1 = 5, a_3 = 2{,}5$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt[4]{\frac{25}{2}}, a_n = (\sqrt[4]{\frac{25}{2}})^{n-1}$ b) $q = \sqrt[6]{16}, a_n = 16^{\frac{n+4}{5}}$

c) $q = 3, a_n = -3^n$ d) $q = \sqrt{\frac{1}{2}}, a_n = 5 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^{n-1}$

5.3.4 Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a) $a_1 = 3, q = -2, a_n = 1536$ b) $a_1 = -1, q = -20, a_n = -64000000$

c) $a_1 = 7, q = 0{,}5, a_n = \frac{7}{128}$ d) $a_1 = 0{,}5, q = -4, a_n = 128$

Odpowiedź:

a) 10, b) 7, c) 8, d) 5

5.3.5 Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = 96, a_5 = 48$ b) $a_3 = 12, a_6 = 24$ c) $a_2 = 6, a_5 = -3$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt{2}, a_1 = 7{,}5$ b) $q = \sqrt[3]{2}, a_1 = 6\sqrt[3]{4}$ c) $q = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, a_1 = 6\sqrt[3]{-2}$

5.3.6 W ciągu geometrycznym (a_n) mamy dane $a_2 = -1$, $q = -2$. Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: $S_n = \frac{3}{16}$

5.3.7 Wyznacz x, wiedząc że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$a_1 = 9$, $a_2 = x$, $a_3 = 1$

Odpowiedź: $x = 3$

5.3.8 Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest geometryczny? Wyznacz q.

a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$ c) $a_n = 2n^2$

Odpowiedź:

a) $q = 2$ b) $q = 9$ c) nie

5.3.9 Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), jeśli:

a) $a_1 = 8$, $2a_5 = 3a_4$, $n = 6$ b) $a_1 = 2$, $a_7 = 128$, $n = 8$

Odpowiedź:

a) 166,25 b) –510

5.3.10 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), określonego wzorem:

a) $a_n = \frac{3-2n}{4n-50}$ b) $a_n = \frac{5n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{1}{3n^2-12n-3}$ d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+7}$

Odpowiedź: a, b, d – rosnące, c – nie jest monotoniczny

5.3.11 Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 10^{n+2} - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $b_n = 10^{n+1}$, $q = 10$

5.3.12 Znajdź sumę:

a) $1 + 6 + 21 + \ldots + n(2^n - 1)$ b) $3 + 27 + 135 + \ldots + (2n - 1) \cdot 3^n$

Odpowiedź:

$(n - 1) \cdot 2^{n+1} - 0{,}5 \cdot (n^2 + n - 4)$ $(n - 1) \cdot 3^{n+1} + 3$

5.3.13 Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

5.4 Praktyczne zastosowanie ciągów (procent prosty, składany)

Teraz nauczę się obliczać podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)

Kapitalizacja odsetek[56]

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk. W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej – na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia 19-procentowego podatku od zysków kapitałowych, zwanego potocznie podatkiem Belki.

Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota. Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{oprocentowanie}{liczba\ kapitalizacji\ w\ roku}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001 — 31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{oprocentowanie}{liczba\ kapitalizacji\ w\ roku} \cdot 0{,}8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

56 www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc, 06.03.2013.

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004 — 31.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{\textit{oprocentowanie}}{\textit{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 — brak wzoru na procent składany.

Ciekawostka

Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

ZADANIA

5.4.1 Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

5.4.2 Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym z kapitalizacją odsetek:

co miesiąc	co kwartał	co pół roku	co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.

Odpowiedź:

2253,65 zł	2251,02 zł	2247,20 zł	2240 zł

5.4.3 Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

Odpowiedź: 10982,29 zł

5.4.4 Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000 zł.

a) Bank I oferuje 14% w stosunku rocznym z roczną kapitalizacją odsetek.

b) Bank II oferuje 10% w stosunku rocznym z kwartalną kapitalizacją odsetek.

c) Bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji . Zdecydujesz się na rok czy na dwa lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

Odpowiedź:

a) po roku 68400 zł, po dwóch latach 77976 zł

b) po roku 66228,77 zł, po dwóch latach 73104,17 zł

c) po roku 60906,21 zł, po 2 latach 61826,11 zł

5.4.5 Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

a) Oblicz, jaką kwotą (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.

b) O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Odpowiedź:

a) 33043,06 zł   b) o 713,80 zł

5.4.6 Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95 zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).

5.4.7 Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

5.4.8 W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?

5.4.9[57] · Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku. Bank zaproponował mu następujące oferty:

a) oprocentowanie 6% w sali rocznej z odsetkami doliczanymi po roku,

b) oprocentowanie 3,8% w skali rocznej z odsetkami doliczanymi co kwartał.

57 http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/.

c) Dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?

Odpowiedź:

a) 1049 zł b) 1031 zł c) Pierwsza o 18 zł

5.4.10 Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować w banku, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400$.

Odpowiedź: Skorzystaj z funkcji finansowej PV

=PV(6%;20;0;400) w wyniku otrzymujemy: 125 $

Z matematycznego punktu widzenia obliczyliśmy sumę ciągu geometrycznego. Ten sam wynik uzyskamy wprowadzając własną formułę: = 400/(1 + 6%) ^ 20 = 125

5.4.5 Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyłeś w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5% w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.

Odpowiedź:

Możesz skorzystać z kalkulatora kredytowego, p.: http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/kredytowy.html

prowizja: 450 zł

kwota kredytowana: 15450 zł

kwota do wypłaty: 15000 zł

suma spłat: 22007,32 zł

rata: 183,39 zł

5.4.5 Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł, oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:

a) na koniec okresu rozliczeniowego

b) na początek okresu rozliczeniowego

c) Jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

Odpowiedź:

169,35zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0))

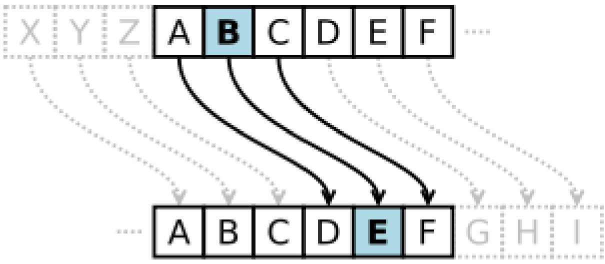
168,58 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0;0;1))

252,87 zł

Możesz skorzystać z funkcji finansowej PMT.

Ciekawostka

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻ

Szyfr: CĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻAĄB

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŻ DĆFĄ, EKTRP ŚZŃM YŹŚŁ L UAGWĘ INCJ

PRACA DLA CHĘTNYCH

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza).Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1[58] Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

a) 40° b) 50° c) 60° d) 70°

2 Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy:

a) $-\frac{3}{25}$ b) $\frac{3}{25}$ c) $-\frac{7}{25}$ d) $\frac{7}{25}$

3 Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz: x, y, z.

4[59] Który wyraz ciągu $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$ jest równy zero?

a) a_9 b) a_{18} c) a_{21} d) a_{49}

5 Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n równym:

a) $a_n = 3 \cdot 2^n$ b) $a_n = \frac{4n^2 - 9}{3 + 2n}$ c) $a_n = \frac{n+3}{2n+2}$ d) $a_n = \frac{n^2 + 1}{3}$

6 Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

7[60] Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_2 = 64$ b) $a_2 = 0$ c) $a_2 = -64$ d) $a_2 = 128$

8 Liczby 2; $2x-1$; 0,5 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:

a) $x = 0$ b) $x = 0$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ d) $x = -1$

9 O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

58 Zadania 1-3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.
59 Zadania 4-6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 08.03.2013.
60 Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 08.03.2013.

10[61] Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

11 Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

a) $10000 \cdot (1{,}0075)^4$ b) $10000 \cdot (1{,}03)^4$ c) $10000 \cdot (1{,}03)^{16}$ d) $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

12 Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1$, $z = 3\sqrt{5} + 2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

a) z, y, x b) y, x, z c) x, y, z d) z, x, y

13 Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

a) $S_{2n} = 8n^2 + 4n$ b) $S_{2n} = 4n^2 + 2n$ c) $S_{2n} = 4n^2 + n$ d) $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

14 Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

a) $q = 2$ b) $q = 7$ c) $q = 9$ d) $q = 28$

15 W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16[62] Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_3 = \frac{1}{2}$ b) $a_3 = -\frac{1}{2}$ c) $a_3 = \frac{3}{8}$ d) $a_3 = -\frac{3}{8}$

17 W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy:

a) $a_4 = -18$ b) $a_4 = 0$ c) $a_4 = 4{,}5$ d) $a_4 = 144$

18 Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

19[63] Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n+4}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_8 = 2\sqrt{5}$ b) $a_8 = 8$ c) $a_8 = 5\sqrt{2}$ d) $a_8 = \sqrt{12}$

61 10-15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
62 Zadania 16-18: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 09.03.2013.
63 Zadania 19-21: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013..

20 Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4\sqrt{2}$ c) $a = 8 - 2\sqrt{2}$ d) $a = 8 + 2\sqrt{2}$

21 Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$. Wyznacz wzór na n–ty wyraz tego ciągu.

22[64] Liczby 12, 18, $2x + 1$ są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

a) $x = 11\frac{1}{2}$ b) $x = 12$ c) $x = 12\frac{1}{2}$ d) $x = 13$

23 W ciągu arytmetycznym a_n dane są $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 30 b) 110 c) 220 d) 2046

24 Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$.

25[65] Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy:

a) $a_1 = \frac{2}{3}$ b) $a_1 = \frac{4}{9}$ c) $a_1 = \frac{3}{2}$ d) $a_1 = \frac{9}{4}$

26 Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy:

a) $a_4 + a_1 = a_{10}$ b) $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ c) $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ d) $a_5 + a_7 = 2a_8$

27 Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz: x i y.

28[66] W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

a) 13 b) 0 c) –13 d) –26

29 W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy:

a) 8 b) 2 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{2}$

64 Zadania 22-24: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
65 Zadania 25-27: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
66 Zadanie 28, 29: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 10.03.2013.

30[67] Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności 102 dm^3 wypływa w pierwszej minucie 5 dm^3 cieczy, a w każdej następnej o 0,25 dm^3 mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?

Odpowiedź: W 17 minucie.

31 Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:

a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w poprzednim miesiącu.

b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.

Odpowiedź: a) $S_{12} = 8190$ zł, b) $S_{12} = 7958{,}56$zł; powinien wybrać propozycję a).

32 Wyznacz liczbę składników w sumie $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 151$ i wyznacz tę sumę.

Odpowiedź: 51 składników, 3876.

33 Oblicz, dla jakiej wartości k liczby 5, $(k+1)^2$, $2k + 9$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?

Odpowiedź: = –3.

34 Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.

a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?

b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?

Odpowiedź: rozbicie namiotu kosztuje 234,5 zł; 350 zł wystarczy na 25 dni.

35 Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby x, y, z, t, aby liczby 4, x, y, z, t, 8 tworzyły ciąg geometryczny.

Odpowiedź: $x = 4\sqrt[5]{2}, y = 4\sqrt[5]{4}, z = 4\sqrt[5]{8}, t = 4\sqrt[5]{16}$.

---

67 Zadania 30-37: Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

36 Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnicę tworzącą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 10, 7, 4 lub 2, 7, 12.

37 Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: $(31, 31, 31)$lub $(3, 15, 75)$.

Bibliografia

1 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.

2 Testy maturalne. Matematyka 2010, Wydawnictwo Aksjomat.

3 Kalina R., Szymański T., Zbiór zadań z matematyki, Wydawnictwo Sens.

4 Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.

5 Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., Arkusze egzaminacyjne, Wydawnictwo Szkolne Omega.

6 Cewe A., Nahorska H., Matura z matematyki od 2010 roku, Wydawnictwo Podkowa.

7 Gwizdak D., Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.

8 Antek M., Belka K., Grabowski P., Prosto do matury, Wydawnictwo Nowa Era.

9 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era.

10 Jenike M., Fizyka, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

11 Wojciechowska M., Unieszowska J., Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009, Operon.

12 Jaworski R., Fizyka. Matura 2012, Operon.

13 Fischer R. Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.

14 Nowakowski J., Borowski K., Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym, Wydawnictwo Difin.

Źródła internetowe:

1. www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html
2. www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html
3. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
4. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
5. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
6. pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
11. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
12. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
15. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
16. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
21. www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

27. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
28. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
29. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
31. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
32. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
34. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
35. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
37. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
38. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
39. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
40. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
43. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
44. www.bossa.pl
45. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
46. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
47. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
48. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
49. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
50. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
51. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
52. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
53. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
54. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. II

Matematyka

KLASA III

Podręcznik dla nauczycieli – Liceum Ogólnokształcące i Technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

1.1 Równanie prostej na płaszczyźnie

Teraz nauczę się:
Wyznaczać równanie prostej w postaci kierunkowej przechodzącej przez dany punkt.

Linia prosta lub prosta – to jedno z podstawowych pojęć geometrii[1].

Równaniem prostej k nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu, który do tej proste należy, ale nie jest spełnione przez współrzędne punktów leżących poza prostą k.

Możemy wyznaczać równanie prostej:

- przechodzącej przez dany punkt,
- przechodzącej przez dany punkt i nachylonej do osi OX pod danym kątem,
- przechodzącej przez dwa dane różne punkty.

Równanie prostej można zapisać w postaci:

Postać ogólna

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$

A, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej.

Np. $3x - 5y + 7 = 0, -\frac{1}{2}x + 12y + 2 = 0,\ 0{,}25x - \frac{1}{3}y - 4 = 0$

Postać kierunkowa

$\boldsymbol{y = ax + b}$

a – współczynnik kierunkowy (kątowy) prostej, b – wyraz wolny.

Współczynnik a można obliczyć jako tangens kąta zawartego pomiędzy wykresem prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych a osią OX: $\boldsymbol{a = tg\alpha}$.

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29, 15.03.2013.

W równaniu prostej x i y oznaczają współrzędne dowolnego punktu P należącego do płaszczyzny. Od ich wartości zależy położenie prostej w układzie współrzędnych.

Punkt P należy do prostej tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Przykład 1

Przekształć równanie zapisane:

a) z postaci kierunkowej na postać ogólną

b) z postaci ogólnej na postać kierunkową

Rozwiązanie:

a) Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = 3x - 5$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę: $y - 3x + 5 = 0$

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną: $-3x + y + 5 = 0$

b) Aby przekształcić równanie z postaci ogólnej na kierunkową, wystarczy z zapisu ogólnego wyznaczyć y.

Dane mamy równanie w postaci ogólnej: $2x - 3y + 6 = 0$

Wyznaczamy y: $-3y = -2x - 6 \,/ : (-3)$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$

Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Jeżeli w równaniu ogólnym nie występuje zmienna y, to wyznaczamy x i otrzymujemy równanie prostej prostopadłej do osi OX.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt $A = (x_1, y_1)$ można zapisać w postaci $y = a(x - x_1) + y_1$

Przykład 2

Wiedząc, że współczynnik kierunkowy prostej wynosi 5, napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-2{,}6)$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

$y = 5\big(x - (-2)\big) + 6$

$y = 5(x + 2) + 6$

$y = 5x + 10 + 6$

$y = 5x + 11$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (-1{,}4)$ i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\alpha = 60°$, to $tg60° = \sqrt{3}$.

Równanie prostej ma więc postać: $y = \sqrt{3}x + b$.

Wiemy, że do prostej należy punkt B, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$4 = \sqrt{3} \cdot (-1) + b$

$b = 4 - \sqrt{3}$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$.

ZADANIA

1.1.1 Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym i przechodzącej przez punkt C. Otrzymane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej.

a) $C = (-3, -2), a = -\frac{1}{3}$

b) $C = (0{,}3), a = -1$

c) $C = (2{,}5), a = 3$

d) $C = (-2, -2), a = -4$

Odpowiedź:

a) $\frac{1}{3}x + y + 1 = 0$

b) $x + y - 3 = 0$

c) $-3x + y + 1 = 0$

d) $4x + y + 6 = 0$

1.1.2 Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:

a) $P = (-3{,}4), \alpha = 45°$

b) $P = (6{,}15), \alpha = 120°$

c) $P = (-1{,}5), \alpha = 135°$

d) $P = (2, -3), \alpha = 60°$

Odpowiedź:

a) $y = x + 7y = x + 7$

b) $y = -\sqrt{3}x + 15 + 6\sqrt{3}$

c) $y = -x + 4y = -x + 4$

d) $y = \sqrt{3}x - 3 - 2\sqrt{3}$

1.1.3 Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = -2x + 3$. Wyznacz liczbę a, jeśli:

a) $f(2a - 4) = 3a + 8$ b) $f(4a + 1) = f(5a - 3)$ c) $f(8 - 4a) = \frac{22a-23}{3}$

Odpowiedź:

a) $a = \frac{3}{7}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$

1.2 Równoległość i prostopadłość prostych, a ich współczynnik kierunkowy

Teraz nauczę się:

- Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
- wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt.

Dwie proste są równoległe, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste k i l dane wzorami:

$$(\boldsymbol{k}) \quad \boldsymbol{y = a_1 x + b_1}$$
$$(\boldsymbol{l}) \quad \boldsymbol{y = a_2 x + b_2}$$

są **równoległe,** jeżeli:

$$\boldsymbol{a_1 = a_2}$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$\boldsymbol{a_1 \cdot a_2 = -1}$$

Przykład 1

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2{,}4)$ i równoległej do prostej o równaniu: $3x - 2y + 4 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x - 2y + 4 = 0$

$-2y = -3x - 4 \; /:(-2)$

$y = \frac{3}{2}x + 2$

$a_1 = \frac{3}{2}$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$y = a(x - x_1) + y_1$

Z warunku równoległości wiadomo, że $a = a_1 = \frac{3}{2}$.

Punkt P leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4$, więc

$y = \frac{3}{2}(x + 2) + 4 = \frac{3}{2}x + 3 + 4 = \frac{3}{2}x + 7$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{3}{2}x + 7$.

Przykład 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (3, -2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu: $3x + 4y - 7 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x + 4y - 7 = 0$

$4y = -3x + 7 \ /: 4$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

$a_1 = -\frac{3}{4}$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$y = a(x - x_1) + y_1$

Z warunku prostopadłości wiadomo, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, stąd

$-\frac{3}{4} \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \ a_2 = \frac{4}{3}$

Punkt B leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{4}{3}(x - 3) + (-2)y = \frac{4}{3}(x - 3) + (-2)$, więc

$y = \frac{4}{3}x - 4 - 2 = \frac{4}{3}x - 6$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{4}{3}x - 6$.

ZADANIA

1.2.1 Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej:

a) $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$

b) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (2,2)$

e) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

f) $y = -3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (3,3)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $x + y - 6 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (1, -2)$

i) $2x + 2y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-4, -3)$

j) $x - y + 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-2, -5)$

k) $x + y - 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-6,8)$

Odpowiedź:

a) $y = -\frac{1}{3}x + 5$

b) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

c) $y = \frac{3}{2}x - 4$

d) $y = -3x + 8$

e) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

f) $y = \frac{1}{3}x + 2$

g) $x + 2y + 2 = 0$

h) $x - y - 3 = 0$

i) $x - y - 3 = 0$

j) $x + y + 7 = 0$

1.2.2 Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej:

a) $y = 2x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (2, 3)$

b) $y = -5x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (2,1)$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{2}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6,1)$

e) $y = 4x + 6$ i przechodzi przez punkt $A = \left(\frac{1}{4}, 5\right)$

f) $y = -x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (-5,2)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $y-0,5=0,3x$ i przechodzi przez punkt $A=\left(10,-\frac{1}{2}\right)$

i) $x+y+3=0$ i przechodzi przez punkt $A=(6,1)$

j) $3x-y=-9$ i przechodzi przez punkt $A=(-2,6)$

Odpowiedź:

a) $y=2x-1$

b) $y=-5x+11$

c) $y=-\frac{1}{2}x+4$

d) $y=\frac{2}{3}x-3$

e) $y=4x+4$

f) $y=-x-3$

g) $y=2x-11$

h) $y=0,3x-3,5$

i) $x+y+7=0$

j) $3x-y+12=0$

1.2.3 Dana jest prosta l o równaniu $y=\frac{3}{2}x-\sqrt{2}$ oraz punkt $A=(-3,-2)$. Wyznacz wzór funkcji liniowej f wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do prostej l, punkt A należy do wykresu funkcji f.

Odpowiedź: $y=-\frac{2}{3}x-4$.

1.2.4 Określ wzajemne położenie prostych:

a) $18x+3y-1=0$ $y=\frac{1}{3}-6x$

b) $y=\frac{7}{8}x+2$ i $7x-8y+24=0$

c) $6x+2y=4$ i $y=\frac{1}{3}x+2$

d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ i $y=3x+4$

e) $x-2y+3=0$ i $2x+y-5=0$

f) $3x-6y+7=0$ i $y=\frac{1}{2}x$

g) $3x-6y+7=0$ i $y=-2x+4$

Odpowiedź:

a) proste równoległe

b) proste równoległe

c) proste prostopadłe

d) proste przecinające się

e) proste prostopadłe

f) proste równoległe

g) proste prostopadłe

1.2.5 Proste k i l są prostopadłe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l:2x-9y+6=0, k:y=ax+6$

b) $l:y=-\frac{1}{3}x+2, k:y-ax=4$

c) $l:2ax-y+1=0,\ k:x+2y-6=0$

Odpowiedź:

a) $a=-\frac{9}{2}$

b) $a=3$

c) $a=-1$

1.2.6 Proste l i m są równoległe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: y = 2x - 5 = 0, m: y = (3-a)x + 4$ b) $l: y = 3x + 6$, $k: y - ax = 4$

c) $l: y = (a+4)x + 5$, $m: y = 4 + 10x$ d) $l: y = ax + 6$, $m: y = 6 + 19x$

Odpowiedź:

a) $a = 1$ b) $a = 3$ c) $a = 6$ d) $a = 19$

1.3 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Teraz nauczę się:

- Obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- Wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- Sprawdzać, czy punkty są współliniowe.

Punkt przecięcia dwóch prostych

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P. Punkt przecięcia P leży na prostej k i na prostej l, zatem jego współrzędne muszą spełniać jednocześnie równania obu prostych. Współrzędne punktu P otrzymujemy, rozwiązując układ równań.

Przykład 1

Wyznacz punkt przecięcia się prostych danych równaniami: $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$.

Z podanych wzorów funkcji tworzymy układ dwóch równań:

$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -5x + 9 \end{cases}$ wyznaczamy z niego x oraz y.

$3x - 7 = -5x + 9$

$3x + 5x = 9 + 7$

$8x = 16 \ /:8$

$x = 2$, więc

$y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Odpowiedź:

Proste określone równaniami $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$ przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Jeśli mamy dane dwa różne punkty na płaszczyźnie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, możemy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Możemy napisać równanie takiej prostej, rozwiązując układ równań lub skorzystać z gotowego wzoru.

Poniższe przykłady przedstawiają obie metody.

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}6)$.

Szukamy równania prostej $y = ax + b$

Prosta przechodzi przez punkty $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}9)$, a to oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają równanie prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = -3a + b \\ 9 = a + b \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania i otrzymujemy:

$$6 - 9 = -3a - a + b - b$$

$$-3 = -4a \;/:(-3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Skoro $9 = a + b,$ to $b = 9 - \frac{4}{3} = 7\frac{2}{3}$

Szukane równanie prostej, to $y = \frac{4}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

Określenie wzoru funkcji przechodzącej przez dwa dane punkty za pomocą wzorów

Mając dane dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, możemy obliczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Gdy mamy współczynnik kierunkowy prostej i punkt, który do tej prostej należy, to możemy już napisać jej wzór, korzystając z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$.

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, opisuje wzór:

$$\boldsymbol{(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0}$$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-2,3)$ i $B = (4,2)$.

Rozwiązanie:

I sposób :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$(y-3)(4-(-2)) - (2-3)(x-(-2)) = 0$$
$$(y-3)\,(4+2) - (-1)\,(x+2) = 0$$
$$(y-3)\cdot(6) + 1\cdot(x+2) = 0$$
$$6y - 18 + x + 2 = 0$$
$$6y = -x + 16$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{16}{6}$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$$

II sposób:

1. Zapisujemy równanie szukanej prostej w postaci kierunkowej, czyli: $y = ax + b$.

2. W kolejnych krokach będziemy wyznaczać współczynniki a i b.

3. Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do równania prostej:

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

4. Podstawiamy współrzędne drugiego punktu do równania prostej: $y_B = a \cdot x_B + b$

5. Rozwiązujemy układ równań

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

$$y_B = a \cdot x_B + b$$

otrzymując szukane parametry a i b.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \;/\cdot(-1) \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 = 2a - b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$-1 = 6a \;/:6$$
$$a = -\frac{1}{6}$$

Podstawiamy do pierwszego równania z układu równań za $a = -\frac{1}{6}$, dzięki temu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b, którą obliczamy:

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + b$$

$$3 = \frac{1}{3} + b$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Otrzymane równanie ma postać: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$.

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2{,}4)$ i $B = (-3{,}5)$. Znajdź prostą przechodzącą przez te punkty.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej, korzystając ze wzoru:
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-4}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Korzystamy z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$ i piszemy równanie prostej:

$$y = -\frac{1}{5}(x - (-3)) + (-3) = -\frac{1}{5}(x + 3) - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3$$

Ostatecznie prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{3}{5}$.

ZADANIA

1.3.1 Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty:

a) A = (–2,–10), B = (1,–1) b) A = (–3,9), B = (2,–1) c) A = (0,6), B = (6,0)

d) A = (–2,–1), B = (3,0) e) A = (–12,4), B = (3,1) f) A = (8,4), B = (1,–1)

Odpowiedź:

a) $a = 3$ b) $a = -\frac{8}{5}$ c) $a = -1$

d) $a = \frac{1}{5}$ e) $a = -\frac{1}{5}$ f) $a = \frac{5}{7}$

1.3.2 Oblicz brakujące współrzędne punktów, jeśli wiadomo, że należą do danej prostej:

a) $y = \frac{3}{2}x + 2$, $P = (-2, y)$ b) $2x - 3y = 2$, $P = (\frac{1}{2}, y)$

c) $y = 9x - 3$, $P = (x, -6)$ d) $\frac{x}{-7} + \frac{2y}{7} = 1$, $P = (x, -\frac{2}{3})$

Odpowiedź:

a) $y = -1$ b) $y = -\frac{1}{3}$ c) $x = -1$ d) $x = -8\frac{1}{3}$

1.3.3 Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a wiedząc, że do tej prostej należy punkt M:

a) $a=0,\ M=(-2,-3)$

b) $a=3,\ M=(6,-2)$

c) $a=-\frac{3}{4},\ M=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

d) $a=-5,\ M=(2,3)$

Odpowiedź:

a) $y=-3$

b) $y=3x-20$

c) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

d) $y=-3x+13$

1.3.4 Napisz równanie prostej, do której należą punkty:

a) $A=(-1,7),\ B=(3,-5)$

b) $A=(-4,4),\ B=(2,7)$

c) $A=(-5,0),\ B=(5,-6)$

d) $A=\left(1,\frac{1}{12}\right),\ B=\left(3,-\frac{17}{12}\right)$

e) $A=(-2,6), B=\left(\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$

f) $A=(2,1),\ B=(-4,2)$

g) $A=(2,6),\ B=(-1,-7)$

h) $A=(2,4),\ B=(5,-5)$

Odpowiedź:

a) $y=-3x+4$

b) $y=\frac{1}{2}x+6$

c) $y=-\frac{3}{5}x-3$

d) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}$

e) $y=-3x$

f) $y=-\frac{1}{6}x+1\frac{1}{3}$

g) $y=4\frac{1}{3}x-2\frac{2}{3}$

h) $y=-3x+10$

1.3.5 Sprawdź, czy punkty są współliniowe:

a) $A=(2,1), B=(4,5), C=(-3,-9)$

b) $A=(-1,-6), B=(0,-6), C=(12,0)$

c) $A=(-5,3), B=(2,3), C=(4,3)$

d) $A=(2,0), B=(2,-4), C=(2,8)$

Odpowiedź:

a) tak

b) nie

c) tak

d) tak

1.4 Odległość punktów

Teraz nauczę się:

- Obliczać odległość dwóch punktów;
- Odległość punktu od prostej.

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Odległość punktu A od B liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Przykład 1

Oblicz odległość punktów A i B od siebie, gdy $A = (7,\ 6)$, $B = (-5, 4)$.

Podstawiamy do wzoru:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{144 + 4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Odpowiedź: Odległość punktu A od punktu$B$ wynosi $2\sqrt{37}$.

Odległość punktu od prostej to w istocie długość odcinka, którego początkiem jest dany punkt i opuszczonego na prostą pod katem prostym.

Dana jest prosta k o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ i punkt $P = (x_1, x_2)$, który leży poza prostą k.

Odległość punktu P od prostej k wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Obliczając odległość punktu od prostej, możemy korzystać z powyższego wzoru lub wykonać następujące kroki:

1. Napisać wzór prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.

2. Obliczyć punkt przecięcia danej prostej i prostej do niej prostopadłej.

3. Obliczyć długość odcinka, którego końce to dany w zadaniu punkt i punkt obliczony w punkcie drugim. Długość tego odcinka jest szukaną przez nas odległością punktu A od prostej k.

Przykład 2

Dane są: prosta $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$. Obliczmy odległość punktu A od prostej k.

Rozwiązanie:

1. Napiszmy wzór prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.
   Jeśli prosta l jest prostopadła do prostej k, to współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $-\frac{1}{2}$.

Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (1,3)$, więc:

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Równanie prostej l: $y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Obliczamy punkt przecięcia prostej k i prostej do niej prostopadłej.
Rozwiązujemy układ równań złożony ze wzorów obu funkcji

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x = 0{,}4$$

$$y = 2 \cdot 0{,}4 + 3 = 3{,}8$$

Punkt przecięcia prostych k i l ma współrzędne $B = (0{,}4;\ 3{,}8)$

3. Obliczamy długość odcinka AB, czyli odległość punktu A od prostej k.

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}4 - 2)^2 + (3{,}8 - 3)^2} = \sqrt{2{,}56 + 9}$$
$$= \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$$

Odpowiedź: Odległość punktu A od prostej k wynosi $3{,}4$.

Przykład 3

Korzystając z danych z przykładu 2, obliczymy odległość punktu A od prostej k, korzystając ze wzoru $d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

A, B i C to współczynniki prostej z jej postaci ogólnej, natomiast x_1, y_1 to współrzędne danego punktu.

Mamy dane: prostą k: $y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$$y = 2x + 3$$

$$2x - y + 3 = 0$$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców:

a) $A=(1{,}1), B=(4{,}7)$ b) $A=(-5{,}2), B=(3{,}2)$

c) $A=(2,-5), B=(-3{,}4)$ d) $A=(-1,-4), B=(8{,}4)$

e) $A=(2,-2), B=(4{,}5)$ f) $A=(3,-5), B=(4{,}4)$

g) $A=(6{,}8), B=(10{,}0)$ h) $A=(8{,}0), B=(-2{,}5)$

Odpowiedź:

a) $3\sqrt{5}$ b) 8 c) $\sqrt{117}$ d) $\sqrt{165}$

e) $\sqrt{53}$ f) $5\sqrt{2}$ g) $4\sqrt{5}$ h) $5\sqrt{5}$

1.4.2 Oblicz odległość punktu A od prostej k:

a) $A=(1{,}4), k{:}\,4x-2y-16=0$

b) $A=(-5,4), k{:}\,y=-2x+1$

c) $(-2{,}3), k{:}\,3x-4y+2=0$

Odpowiedź:

a) $2\sqrt{5}$ b) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{16}{5}$

1.4.3 W układzie współrzędnych są dane punkty $A=(-4{,}2)$, $B=(5{,}4)$.

a) Oblicz odległość punktu $C=(-1{,}4)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B.

b) Uzasadnij, że jeśli $m\neq 0$, to punkty A, B oraz punkt $D=(-1,m)$ są wierzchołkami trójkąta.

Odpowiedź:

a) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

b) 3 punkty są wierzchołkami trójkąta, jeżeli nie leżą na jednej prostej. Musimy zatem sprawdzić, czy punkt $D=(-1,m)$ nie leży na prostej AB. Ponieważ wyliczyliśmy już równanie tej prostej, nie ma z tym problemu (wstawiamy współrzędne tego punktu do równania prostej i patrzymy, czy nie wyjdzie 0): $2\cdot(-1)-3m+2=3m\neq 0$.

1.5 Współrzędne środka odcinka

Teraz nauczę się:

- Wyznaczać współrzędne środka odcinka.

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Środek odcinka, mając dane współrzędne jego końców A i B. liczymy ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Przykład 1

Podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach: A = (3, –5), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3 + 6}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) = (4{,}5;\ -1)$$

Przykład 2

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S = (-3, 6)$. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B = (4, -2)$.

Zajmijmy się osobno współrzędną x i osobno współrzędną y.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -3$$

$$\frac{x_1 + 4}{2} = -3$$

$$x_1 + 4 = -6$$

$$x_1 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 6$$

$$\frac{y_1 + (-2)}{2} = 6$$

$$y_1 - 2 = 12$$

$$y_1 = 14$$

Odpowiedź: Współrzędne punktu A wynoszą $(10{,}14)$.

ZADANIA

1.5.1 Podaj środki odcinków, których końce mają współrzędne:

a) $A = (-8,5), B = (0,11)$ b) $A = (3,-5), B = (-13,7)$

c) $A = (-2,3), B = (4,-9)$ d) $A = (1,7), B = (-5,-2)$

e) $A = (5,3), B = (1,3)$ f) $A = (-6,1), B = (4,3)$

g) $A = (-4,-8), B = (2,1)$ h) $A = (-4,5), B = (8,7)$

i) $A = (-4,-7), B = (10,-3)$ j) $A = (0,6), B = (-12,16)$

Odpowiedź:

a) $S = (-4{,}8)$ b) $S = (-5{,}1)$ c) $S = (1,-3)$ d) $S = \left(-2, \frac{5}{2}\right)$

e) $S = (3{,}3)$ f) $S = (-1{,}2)$ g) $S = \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$ h) $S = (2{,}6)$

i) $S = (3,-5)$ j) $S = (-6{,}11)$.

1.5.2 Dany jest odcinek o końcach w punktach $A = (-2{,}4)$ i $B = (6,-2)$.

a) Wyznacz współrzędne środka odcinka.

b) Oblicz długość tego odcinka.

c) Wyznacz równanie prostej równoległej do odcinka przechodzącej przez punkt $C = (0{,}3)$.

Odpowiedź:

a) $S = (2{,}1)$ b) $|AB| = 10$ c) $y = \frac{4}{3}x + 3$.

1.5.3 Dany jest odcinek $|AB|$, w którym dany jest środek S i koniec B. Wyznacz współrzędne punktu A.

a) $S = (2,-5), B = (9,-3)$ b) $S = (-3{,}6), B = (2{,}5)$ c) $S = (2{,}4), B = (5{,}8)$

d) $S = (2{,}7), B = (-3{,}5)$ e) $S = (2{,}1), B = (-5{,}6)$

Odpowiedź:

a) $A = (-5,-7)$ b) $A = (-8{,}7)$ c) $A = (-1{,}0)$

d) $A = (7{,}9)$ e) $A = (9,-4)$.

1.5.4 Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, jeżeli środki jego boków mają współrzędne:
$P = (1{,}3), Q = (-5{,}4), R = (-6{,}7)$.

Odpowiedź: $A = (0{,}6);\ B = (2{,}0);\ C = (-12{,}8)$.

1.5.5 Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek o końcach $A = (29, -15)$ i $B = (45,13)$ w stosunku $|AP|:|PB| = 1:3$.

Odpowiedź: $P = (33, -8)$.

1.5.6 W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

Odpowiedź: $y = -2x + 14$.

1.5.7 Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A = (4,6), B = (3,5)$ b) $A = (3,1), B = (-4,-8)$ c) $A = (3,1), B = (-1,7)$

d) $A = (-1,3), B = (1,1)$ e) $A = (1,1), B = (5,5)$ f) $A = (-2,4), B = (6,8)$

Odpowiedź:

a) $y = -x + 9$ b) $y = -\frac{7}{9}x - 5\frac{2}{9}$ c) $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$

d) $y = x + 2$ e) $y = -x + 6$ f) $y = -2x + 10$

1.6 Równanie okręgu*

Teraz nauczę się:

- Posługiwać równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisywać koła za pomocą nierówności;
- Wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu.

Równanie okręgu

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r.

Niech punkt $P = (a, b)$ leży w dowolnym miejscu na okręgu. Zapiszmy teraz zależność dowolnego punktu P leżącego na okręgu i jego odległości od środka okręgu.

$|OP| = r$, i na mocy definicji odległości dwóch punktów, otrzymujemy:

$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$

$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}\ /\cdot^2$

$r^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$, ma postać:

$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ (postać kanoniczna)

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (postać ogólna), gdzie $r^2 = a^2 + b^2 - c$

Przykład 1

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 6)$ i promieniu: 4

$(x - (-2)) + (y - 6) = 4^2$

$(x + 2) + (y - 6) = 16$

Przykład 2

Podaj wzór okręgu o środku w punkcie $S = (-2, -7)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A = (-6, -4)$.

Mamy dane współrzędne środka okręgu, które możemy podstawić do wzoru:

$(x + 2)^2 + (x + 7)^2 = r^2$

Musimy obliczyć promień okręgu. Możemy to zrobić, podstawiając współrzędne punktu $A = (-6, -4)$ do wzoru:

$(-6 + 2)^2 + (-4 + 7)^2 = r^2$

$(-4)^2 + 3^2 = r^2$

$16 + 9 = r^2$

$25 = r^2$

$r = 5$

Równanie okręgu ma wtedy postać: $(x + 2)^2 + (x + 7)^2 = 25$.

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli a, b oraz r.

Przykład 3

Przekształć równanie okręgu, które dane jest w postaci ogólnej, na postać kanoniczną.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

Szukamy najpierw współrzędnych środka okręgu.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

$-2a = 4$

$a = -2$

$-2b = -6$

$b = 3$

Obliczamy długość promienia wiedząc, że $r^2 = a^2 + b^2 - c$

$r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - 4 = 4 + 9 - 4 = 9$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ w punkcie $P = (-2{,}3)$.

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ – okrąg o środku w punkcie $S = (3{,}4)$ i promieniu $r = 1$.

Prosta styczna do okręgu w punkcie P jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty: $S = (3{,}4)$ i $P = (-2{,}3)$.

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$\big(y - (-2)\big)(-2-3) - (3-4)(x-3) = 0$$

$$(y+2)\cdot(-5) - (-1)(x-3) = 0$$

$$-5y - 10 + x - 3 = 0$$

$$x - 5y - 13 = 0$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$$

Prosta styczna do okręgu w punkcie A jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$, więc jej równanie to: $y = -5x + b$.

Skoro punkt P należy do prostej $y = -5x + b$, to:

$$3 = -5\cdot(-2) + b \ \Rightarrow b = -7$$

Równanie stycznej do okręgu ma postać: $y = -6x - 7$.

Koło – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu na tej płaszczyźnie (środka koła) nie przekracza pewnej wartości (promienia koła).

Koło w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisane wzorem:

$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2}$$

gdzie $r > 0$ – promień koła, (x_0, y_0) – współrzędne środka koła[2]

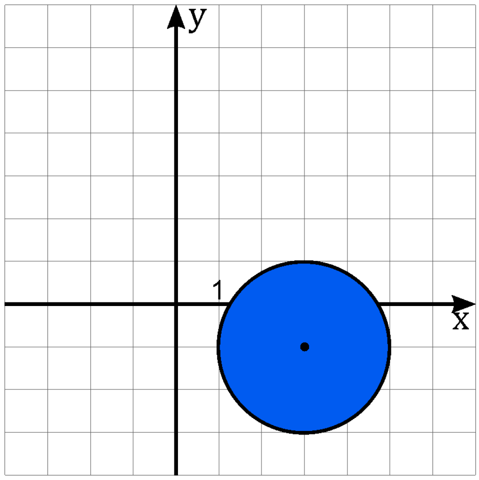
Przykład 5

Narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 4$$

Nierówność opisuje koło o środku w punkcie $S = (3, -1)$ i promieniu $r = 2$.

2 www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o, 19.02.2013.



ZADANIA

1.6.1 Wyznacz środek i długość promienia okręgu:

a) $(x-4)^2+y^2=4$ b) $x^2+(y+3)^2=9$ c) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

d) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ e) $(x+6)^2+(y+10)^2=64$ f) $(x-3)^2+(y+5)^2=8$

Odpowiedź:

a) $S=(4{,}0)$, $r=2$ b) $S=(0,-3)$, $r=3$ c) $S=(2,-4)$, $r=5$

d) $S=(2{,}0-1)$, $r=2$ e) $S=(-6,-10)$, $r=8$ f) $S=(3,-5)$, $r=2\sqrt{2}$

1.6.2 Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

a) $S=(-4{,}6), r=5$ b) $S=(1{,}2), r=3$ c) $S=(0{,}0), r=\sqrt{2}$

d) $S=(-4{,}1), r=\sqrt{7}$ e) $S=(6,-2), r=1$ f) $S=(0{,}1), r=2$

Odpowiedź:

a) $(x+4)^2+(y-6)^2=25$ b) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ c) $x^2+y^{2^2}=2$

d) $(x+4)^2+(y-1)^2=7$ e) $(x-6)^2+(y+2)^2=1$ f) $x^2+(y-1)^2=4$

1.6.3 Podaj równanie okręgu o ośrodku w punkcie $S=(6,-11)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A=(6,-1)$.

Odpowiedź: $(x-6)^2+(y+11)^2=100$

1.6.4 Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt przecięcia prostych $7x-y-3=0$ i $4y-3x-13=0$ i do którego należy punkt $P=(5{,}6)$.

Odpowiedź: $(x-1)^2+(y-4)^2=20$.

1.6.5 Zapisz wzór okręgu za pomocą postaci kanonicznej:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 27 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Odpowiedź:

a) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 7$

b) $x^2 + y^2 = 3$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$

d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

1.6.6 Punkt $K = (-1,9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $L = (2,0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Odpowiedź: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

1.6.7 Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $S = (0,3)$ i promieniu $r = \sqrt{6}$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$.

Odpowiedź: Okrąg z prostą nie ma punktów wspólnych.

1.6.8 Napisz nierówność, która opisuje koło o promieniu r i środku w punkcie S:

a) $S = (-1,5), r = 4$

b) $S = (-3,0), r = \sqrt{3}$

c) $S = (-1,-2), r = \sqrt{2}$

d) $S = \left(4, \frac{1}{2}\right), r = 3$

Odpowiedź:

a) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 \leq 16$

b) $(x + 3)^2 + y^2 \leq 3$

c) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 2$

d) $(x - 4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 9$

1.6.9 Określ położenie punktów $A = (1,0), B = (3,3), C = (4,-1)$ względem koła o środku w punkcie $S = (-1,3)$ i promieniu $r = 4$.

Odpowiedź: Punkty A i B należą do koła, punkt C leży poza kołem.

1.6.10 Oblicz odległość punktu A od środka koła $(x - 3)^2 + y^2 \leq 9$ oraz określ położenie punktu A względem tego koła, jeżeli:

a) $A = (3,-3)$

b) $A = (4,2)$

c) $A = (-2,-3)$

Odpowiedź:

a) $d = 3$, punkt należy do koła

b) $d = \sqrt{5}$, punkt należy do koła

c) $d = 6$, punkt nie należy do koła

1.6.11 Przedstaw w prostokątnym układzie współrzędnych figurę

a) $F = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x - 2y + 2 < 0\}$

b) $F = \left\{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge (x-7)^2 + (y+2)^2 \leq 36 \wedge (x-5)^2 + y^2 \geq 4\right\}$

c) $F = \left\{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge (x-2)^2 + y^2 > 16 \wedge (x-6)^2 + y^2 < 4\right\}$

Odpowiedź:

1.7 Symetria osiowa i środkowa

Teraz nauczę się:

- Znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Symetria – słowo greckie, oznaczające regularny układ, harmonię między częściami całości.

Świat jest pełen symetrii, obcujemy z nią na co dzień: w świecie roślinnym, w budowie organizmów żywych, w sztuce, w budownictwie, w technice i w geometrii.

Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A', leżący:

- na prostej prostopadłej do tej prostej k i przechodzącej przez punkt A;
- w tej samej odległości od prostej k, co punkt A;
- po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A[3].

Symetrię osiową względem prostej k oznaczamy S_k.

Twierdzenie

Symetria osiowa jest izometrią. Symetria osiowa, jak każda izometria, zachowuje kształt figury i jej wymiary.

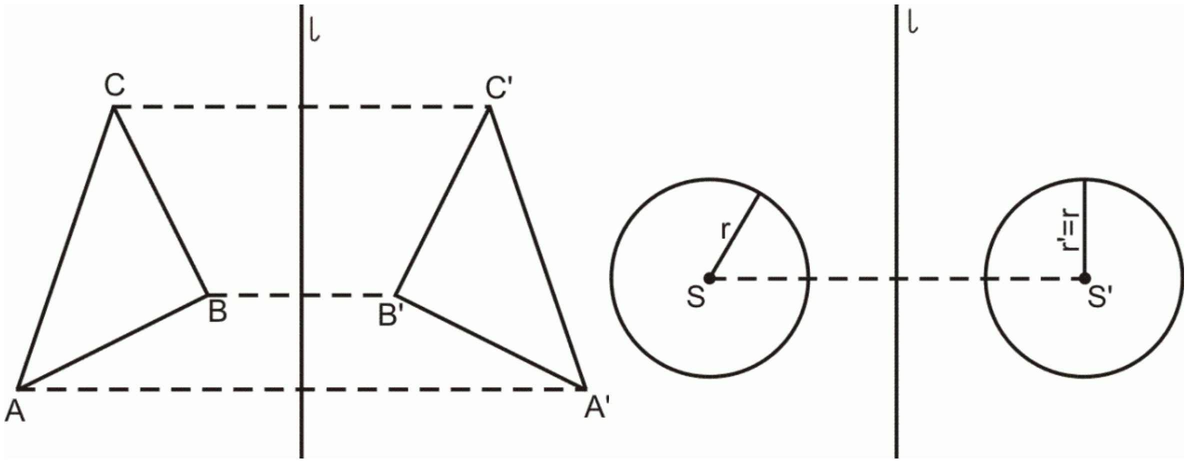
Izometria – przekształcenie geometryczne (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje odległość punktów, czyli odległość między dwoma dowolnymi punktami A i B jest równa odległości między ich obrazami A' i B'.

W symetrii osiowej:

- Obrazem trójkąta względem dowolnej prostej jest trójkąt do niego przystający.

3 www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.

- Obrazem okręgu względem dowolnej prostej jest okrąg o tym samym promieniu.
- Obrazem odcinka jest odcinek takiej samej długości.
- Obrazem prostej jest prosta.



Rysunek 1-1. Przykłady figur symetrycznych

Prostą, względem której figura jest sama do siebie symetryczna, nazywamy **osią symetrii** tej figury. Natomiast figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną.**

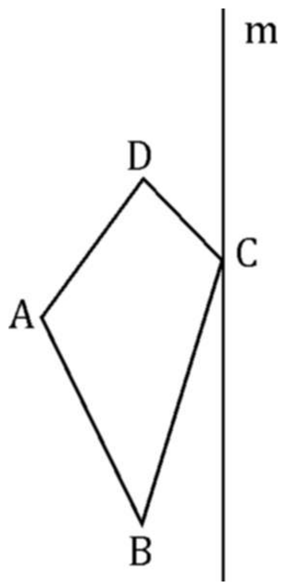
Przykład 1

Figury osiowosymetryczne to, np.:

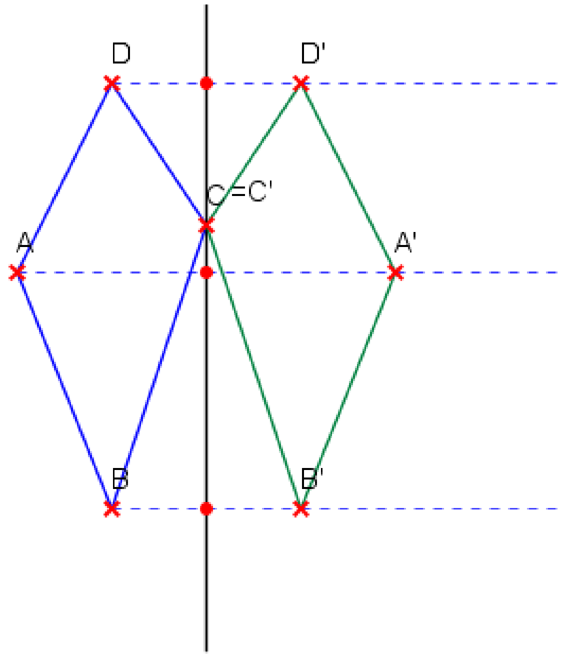
- Odcinek – 2 osie symetrii.
- Kwadrat – 4 osie symetrii.
- Okrąg (koło) – nieskończenie wiele osi symetrii.
- Kąt – 1 oś symetrii (prosta zawierająca dwusieczną kąta).
- Trójkąt równoboczny – 3 osie symetrii.

Przykład 2

Wyznacz konstrukcyjnie obraz figury w symetrii względem danej prostej.



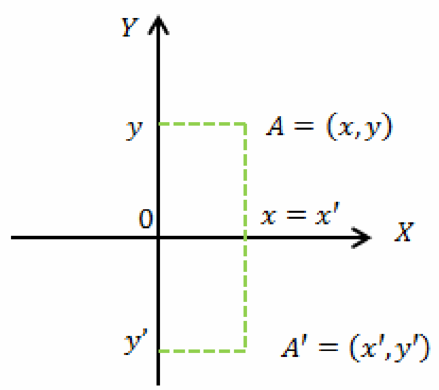
1. Prowadzimy proste prostopadłe do prostej m, przechodzące przez punkty A, B, C, D.
2. Za pomocą cyrkla mierzymy odległość punktu A od prostej m i odkładamy taki sam odcinek po przeciwnej stronie prostej, i otrzymujemy punkt A' symetryczny do punktu A.
3. Analogicznie postępujemy z pozostałymi punktami.
4. Łączymy punkty $A', B', C' D'$ i otrzymujemy figurę symetryczną do danej względem prostej m.



Rysunek 1-2. Figury symetryczne

Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi OX.

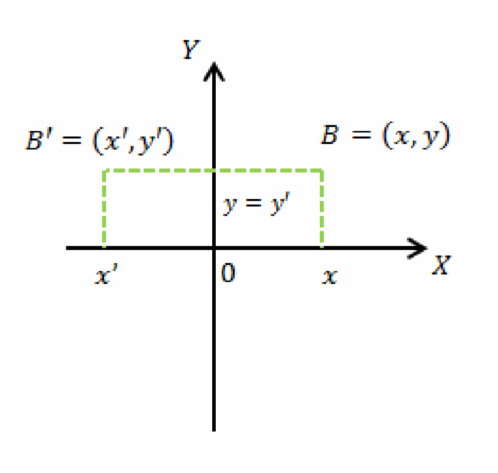


Rysunek 1-3. Symetria względem osi OX

Jak widać na rysunku 3, pierwsze współrzędne obydwu punktów są takie same, natomiast drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Symetria względem osi



Rysunek 1-4. Symetria względem osi OY

Jak widać na rysunku 4, pierwsze współrzędne punktów B i B' są liczbami przeciwnymi, natomiast drugie są równe.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A' = (x, -y)$

Obrazem punktu $B = (x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $B' = (-x, y)$

Symetria środkowa

Symetrią środkową względem punktu O, zwanego środkiem symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O jest stały, a każdemu innemu punktowi A przyporządkowuje się punkt A' taki, że punkt O jest środkiem odcinka AA'.

Symetrię względem punktu O będziemy oznaczać symbolem S_o.

Twierdzenie

Symetria środkowa względem punktu O jest izometrią.

Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest punkt O.

Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej S_o jest ta sama figura. Figurę F nazywamy środkowosymetryczną.

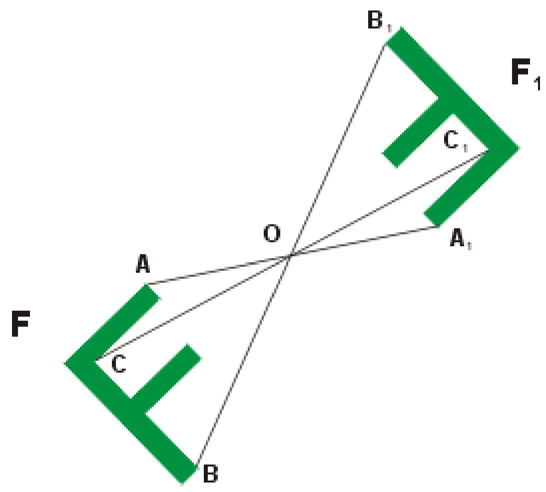
Przykład 3

Figury środkowosymetryczne to, np.:

- Koło (okrąg) – środek koła.
- Odcinek – środek odcinka.
- Prostokąt – punkt przecięcia jego przekątnych.

Przykład 4

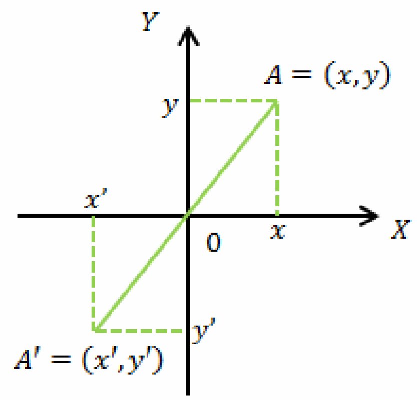
Przykład figury środkowosymetrycznej.



Rysunek 1-5. Przykład figury środkowosymetrycznej4

Trójkąt to figura, która **nie ma** środka symetrii.

Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych



Rysunek 1-6. Symetria względem punktu (0,0)

Jak widać na rysunku 5, pierwsze współrzędne punktów A i A', jak i drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$

4 www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa, 06.03.2013.

ZADANIA

1.7.1 Podaj współrzędne obrazu punktu M w symetrii względem osi OX, OY, o początku układu współrzędnych:

a) $M = (5, -9)$ b) $M = \left(3, -2 + \sqrt{3}\right)$ c) $M = \left(\frac{4}{7}, -2\frac{3}{4}\right)$

d) $M = (2, 3)$ e) $M = (-5, -7)$

Odpowiedź:

$a)\ OX: M' = (5{,}9),$

$OY: M' = (-5{,}9),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M' = (-5, -9)$

$b)\ OX: M' = \left(3{,}2 - \sqrt{3}\right),$

$OY: M' = \left(-3, -2 + \sqrt{3}\right),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M' = (-3{,}2 - \sqrt{3})$

$c)\ \ OX: M' = \left(\frac{4}{7}, 2\frac{2}{3}\right),$

$OY: M' = \left(-\frac{4}{7}, -2\frac{2}{3}\right),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M' = (-\frac{4}{7}, 2\frac{2}{3})$

$d)\ \ OX: M' = (2, -3)d)\ \ OX: M' = (2, -3),$

$OY: M' = (-2{,}3),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M' = (-2, -3)$

$e)\ \ OX: M' = (-5{,}7),$

$OY: M' = (-5, -7)'$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M' = (5{,}7)$

1.7.2 Trójkąt ABC, w którym $A = (-5{,}2)$, $B = (6{,}-3)$, $C = (1{,}4)$, przekształcono symetrycznie względem:

a) osi x,

b) osi y,

c) początku układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkątów otrzymanych po przekształceniu.

Odpowiedź:

a) $A' = (-5,-2)$, $B' = (6,3)$, $C' = (1,-4)$

b) $A' = (5,2)$, $B' = (-6,-3)$, $C' = (-1,4)$

c) $A' = (5,-2)$, $B' = (-6,3)$, $C' = (-1,-4)$

1.7.3 Podaj przykłady liter, liczb lub wyrazów, które są figurami osiowosymetrycznymi.

1.7.4 Oblicz, dla jakich wartości parametru m i n punkty A i B są symetryczne względem osi z, gdy: $A = (3, -n)$ i $B = (m + 2,1)$.

Odpowiedź: $m = 1, n = -1$.

1.7.5 Jakim zbiorem: pustym, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór osi symetrii kwadratu?

Odpowiedź: Zbiór skończony.

1.7.6 Wyznacz równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu:

$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 19 = 0$ względem prostej: $y = 2x + 1$.

Odpowiedź: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 7$.

1.7.7 Znajdź obraz okręgu: $x^2 + y^2 = 4$ w symetrii względem prostej: $y = 2x + 4$.

Odpowiedź: $(x + 3,2)^2 + (y - 1,6)^2 = 4$.

1.7.8 Trójkąt o wierzchołkach $A = (-2,3), B = (-4,1), C = (2,6)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktów będących obrazami wierzchołków trójkąta ABC w tym przekształceniu.

Odpowiedź: $A' = (2, -3), B' = (4, -1), C' = (-2, -6)$.

Ciekawostka

Ambigram – grafika utworzona kaligraficznie lub obrazowo w taki sposób, że po obróceniu całości można odczytać ten sam tekst[5].
Inaczej mówiąc, ambigramy to grafiki środkowosymetryczne.

Przykłady ambigramów

Rysunek 1-7. Przykłady ambigramów[6]

Palindrom (gr. *palindromeo* – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej. Przykładem palindromu jest: *Kobyła ma mały bok*. Współcześnie palindromy pełnią funkcję gry słownej[7].

Najdłuższy polski palindrom, autorstwa Tadeusza Morawskiego, ma ponad 33 tysiące liter.

Przykłady palindromów:

„Gór ech chce róg"

„Żartem dano nadmetraż"

„Może jeż łże jeżom"

„Zagwiżdż i w gaz"[8]

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[9] Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu:

a) $y = -\frac{1}{3}x - 1$ b) $y = \frac{1}{3}x + 1$ c) $y = 3x + 1$ d) $y = 3x - 1$

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram, 09.03.2013.
6 www. violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd, 07.03.2013.
7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom, 09.03.2013.
8 pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski, 21.02.2013.
9 Zadania 1, 2: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Próbna matura z matematyki, listopad 2009, 05.03.2013.

2. Prosta o równaniu $y = -4x + (2m - 7)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Wtedy:

a) $m = 7$ b) $m = 2\frac{1}{2}$ c) $m = -\frac{1}{2}$ d) $m = -17$

3.[10] Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy:

a) $m = -\frac{2}{3}$ b) $m = -\frac{1}{3}$ c) $m = \frac{1}{3}$ d) $m = \frac{5}{3}$

4.[11] Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$.

a) $y = -2x + 1$ b) $y = 0{,}5x - 1$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $y = 2x - 1$

5.[12] Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(2, 1)$.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = -x + 1$

6.[13] Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

a) są równoległe i różne

b) są prostopadłe

c) przecinają się pod kątem innym niż prosty

d) pokrywają się

7.[14] Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$:

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -\frac{1}{2}x$ c) $y = 2x$ d) $y = -2$

8. Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

a) $(-5, -2012)$ b) $(-2012, -5)$ c) $(2, -7)$ d) $(-2012, 5)$

9. Na okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$ leży punkt:

a) $A = (-2, 5)$ b) $B = (2, -5)$ c) $C = (2, -7)$ d) $D = (7, -2)$

10.[15] Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (4, -3)$ i $B = (-1, -13)$. Funkcja f opisana jest wzorem:

a) $f(x) = 2x - 11$ b) $f(x) = 2x + 11$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

---

10 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010, 05.03.2013.
11 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011, 05.03.2013.
12 Zadanie zaczerpnięte z: Arkusz maturalny CKE, maj, 2011, 05.03.2013.
13 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Matura próbna, listopad, 2010, 05.03.2013.
14 Zadania 7, 8, 9: zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 05.03.2013.
15 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte z CKE (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.phparkusze), 05.03.2013.

11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Środkiem S tego okręgu jest punkt:

a) $S=(-3,-4)$ b) $S=(3,4)$ c) $S=(3,-4)$ d) $S=(-3,4)$

12. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x-6y+7=0$.

a) $y=\frac{1}{2}x$ b) $y=-\frac{1}{2}x$ c) $y=2x$ d) $y=-2x$

13.[16] Prostą przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A}=(\mathbf{1},\mathbf{1})$ i równoległą do prostej $\boldsymbol{y}=\mathbf{0},\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}$ opisuje równanie:

a) $y=-2x-1$ b) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ c) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ d) $y=2x-1$

14. Proste: $y=-3x+4$ i $y=\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{4}{3}\right)x$ są prostopadłe, jeżeli:

a) $a=-2$ b) $a=2$

c) $a=\sqrt{5}$ d) $a=-\sqrt{5}$ lub $a=\sqrt{5}$

15.[17] Proste l i k są prostopadłe i l: $2x-9y+6=0$, k: $y=ax+b$. Wówczas:

a) $a=-\frac{2}{9}$ b) $a=\frac{2}{9}$ c) $a=-\frac{9}{2}$ d) $a=\frac{9}{2}$

16. Równanie $(x+6)^2+y^2=4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

a) $S=(-6,4), r=4$ b) $S=(6,0), r=4$ c) $S=(6,0), r=2$ d) $S=(-6,0), r=2$

17. (**5 pkt**) Prosta $y=x+4$ przecina okrąg o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

18. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y=-\frac{1}{3}x+2$:

a) $y=3x$ b) $y=-3x$ c) $y=3x+2$ d) $y=\frac{1}{3}x+2$

19. Punkty $B=(-2,4)$ i $C=(5,1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

a) 74 b) 58 c) 40 d) 29

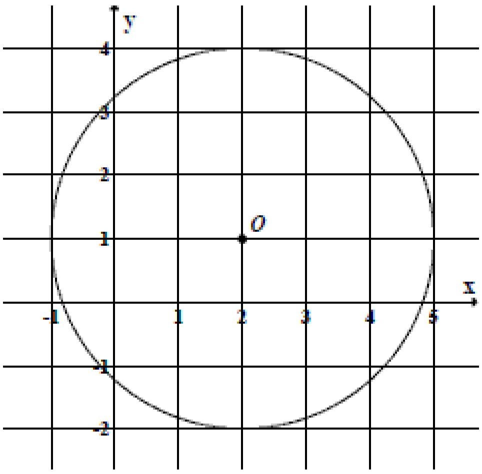
20. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y-6)^2=100$. Środek tego okręgu ma współrzędne:

a) $(-4,-6)$ b) $(4,6)$ c) $(4,-6)$ d) $(-4,6)$

16 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, styczeń. 2013 (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 05.03.2013.

17 Zadania 15, 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad 2012 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf), 05.03.2013.

21.[18] Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Równanie tego okręgu ma postać



A. $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=3$

C. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

D. $(x+2)^2+(y+1)^2=3$

22. Punkt $S = (2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

a) $B = (5,11)$ b) $B = \left(\frac{1}{2},2\right)$ c) $B = \left(-\frac{3}{2},-5\right)$ d) $B = (3,11)$

23. Proste o równaniach $y = 2x - 5$ i $y = (3 - m)x + 4$ są równoległe. Wynika stąd, że::

a) $m = 1$ b) $m = \frac{5}{2}$ c) $m = \frac{7}{2}$ d) $m = 5$

24. Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2,\ 1)$.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x + 5$ d) $y = -x + 1$

25. Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu:

a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $y = 0$ d) $y = 4$

26. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:

a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) $\frac{1}{3}$ d) 3

27. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6:

a) $x^2 + y^2 = 3$ b) $x^2 + y^2 = 6$ c) $x^2 + y^2 = 12$ d) $x^2 + y^2 = 36$

28. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) 30 b) $4\sqrt{5}$ c) $12\sqrt{5}$ d) 36

18 Zadania21, 22: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, czerwiec, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf), 05.03.2013.

29. **(5 pkt)** Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2, -1), B = (4,2), C = (5,1)$. Wyznacz:

a) Pole trójkąta ABC.

Odpowiedź: $P = 2{,}5$.

b) Równanie zawierające wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

Odpowiedź: $y = x - 3p$.

30. **(4 pkt**) W rombie $ABCD$ dane są $A = (-3, -1)$ i punkt przecięcia przekątnych $M = (9,3)$. Wiadomo, że punt B leży na prostej $2x - y - 25 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

Odpowiedź: $B = (11, -3), C = (21,7), D = (7,9)$.

31. (2 pkt) Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-1, -1), B = (5,2)$, $C = (3,3), D = (1,2)$ jest trapezem?

Odpowiedź: Tak.

32. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$ i jest prostopadły do prostej $y = 2x - 4$.

Odpowiedź: $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

33. **(2 pkt)** Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$.

34. **(2 pkt)** W trójkącie równoramiennym $\boldsymbol{ABC}$ o podstawie $\boldsymbol{AB}$ poprowadzono wysokość z wierzchołka $\boldsymbol{C}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2}, \mathbf{8}), \boldsymbol{B} = (-\mathbf{2}, \mathbf{4})$.

35. **(4 pkt)** Oblicz pole i obwód rombu $\boldsymbol{ABCD}$ wiedząc, że przekątna $\boldsymbol{AC}$ jest zawarta w prostej o równaniu $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$ oraz $\boldsymbol{A} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{4})$ i $\boldsymbol{D} = (-\mathbf{6}, \mathbf{6})$.

36.[19] **(6 pkt)** Wyznacz współrzędne punktu $\boldsymbol{BB}$, który jest symetryczny do punktu $\boldsymbol{A} = (\mathbf{3}, \mathbf{2})$ względem prostej $\boldsymbol{y} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{6}$.

37. **(4 pkt)** Dany jest trójkąt równoramienny $\boldsymbol{ABC}$, w którym $|\boldsymbol{AC}| = |\boldsymbol{BC}|$ oraz $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$ i $\boldsymbol{C} = (\mathbf{1}, \mathbf{9})$. Podstawa $\boldsymbol{AB}$ tego trójkąta jest zawarta w prostej $\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}$. Oblicz współrzędne wierzchołka $\boldsymbol{B}$.

19 (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 06.03.2013.

38.[20] **(4 pkt)** Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu przechodzącej przez jeden z tych punktów.

39.[21] **(4 pkt)** Okrąg o środku w punkcie $\boldsymbol{S = (3, 7)}$ jest styczny do prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 3}$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

20 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf), 06.03.2013.
21 (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013), 06.03.2013.

2 Wielomiany*

2.1 Pojęcie wielomianu

Wielomian – w matematyce wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i podnoszenia do potęgi o stałym wykładniku naturalnym[22].

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Stopień wielomianu jest to najwyższy ze stopni jego składników (jednomianów) o niezerowych współczynnikach. Dla wielomianu jednej zmiennej jest to największa potęga zmiennej, która występuje w wielomianie.[23]

Przykład 1

Przykłady wielomianów oraz ich stopień:

$W(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7$ – wielomian stopnia 4

$G(x) = 5x^6 + 9x^3 - 7$ – wielomian stopnia 6

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ – wielomian stopnia 2

$Q(x) = 8$ – wielomian stopnia 0

Wielomiany zapisujemy zazwyczaj w postaci uporządkowanej.

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x

Przykład 2

Wyznacz wartości parametrów a i b, tak aby wielomiany $P(x) = x^3 + x^2 + 12x - 8$ oraz $W(x) = x^3 + (2a - b)x^2 + (3b - 2a)x - 8$ były równe.

22 pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian, 27.02.2013.
23 pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.

Wielomiany $P(x)$ i $W(x)$ są tego samego stopnia. Musimy sprawdzić, dla jakich wartości a i b współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3b - 2a = 12 \end{cases}$$

$2b = 13 \quad \Rightarrow b = 6{,}5$

$2a = 1 + 6{,}5 \ \Rightarrow a = 3{,}75$

$W(x) = P(x) \ \Leftrightarrow a = 3{,}75 \ \wedge b = 6{,}5$

ZADANIA

2.1.1 Dany jest wielomian $W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 7$, oblicz:

a) $W(2)$ b) $W(-1)$ c) $W(\sqrt{3})$ d) $W\left(-\frac{1}{2}\right)$

Odpowiedź:

a) 33 b) -6 c) $11\sqrt{3} - 1$ d) $-5\frac{1}{8}$

2.1.2 Podane wielomiany uporządkuj malejąco i podaj ich stopień.

a) $P(x) = 6x^5 - 2 + 4x^2 + 9x$

b) $P(x) = 7x^3 + 12 - 9x^6 + 14x + 3x^2$

c) $P(x) = -8x^{19} + 3x^9 - 7x^{15} + 6x$

d) $P(x) = -2 + x^6 + x^{11} - 6x^3$

Odpowiedź:

a) $P(x) = 6x^5 + 4x^2 + 9x - 2$

b) $P(x) = -9x^6 + 7x^3 + 3x^2 + 14x + 12$

c) $P(x) = -8x^{19} - 7x^{15} + 3x^9 + 6x$

d) $P(x) = x^{11} + x^6 - 6x^3 - 2$

2.1.3 a) Dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax - b$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 4$.

b) Dany jest wielomian

$W(x) = 3x^4 + ax^3 - bx^2 - 3$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(-1) = 2, W(-1) = 5$.

c) Dany jest wielomian

$W(x) = x^3 + 3ax^3 - 2bx^2 + 6$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 5, W(2) = 8$.

d) Dany jest wielomian $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx^2 + c$. Oblicz a, b i c wiedząc, że $W(-1) = 3, W(2) = 9$.

e) Dany jest wielomian

$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$. Oblicz a, b, c wiedząc, że: $W(-1) = 1,\ W(0) = 1,$
$W(1) = -1$.

Odpowiedź:

a) $a = 2, b = 1$ b) $a = -6\frac{1}{2}, b = -3\frac{1}{2}$ c) $a = -\frac{1}{3}; b = \frac{1}{2}$

d) $a = 3, b = 2, c = 1$ e) $a = -1, b = -2, c = 1$

2.1.4 Wyznacz wartości parametrów a i b (lub a, b i c), tak aby wielomiany $W(x)$ i $P(X)$ były równe.

a) $W(x) = (3a-1)x^3 + (2b-a)x^2 + (a+b)x - 4,\ P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 4$

b) $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4,\ \ P(x) = cx^3 + 2ax^2 + ax + b$

c) $W(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + c,\ \ P(x) = (b-1)x^3 + (a+1)x^2 + 3bx - 2a$

d) $W(x) = ax^3 + 7x^2 - bx - 3c,\ \ P(x) = (4b+c)x^2 + (c+2)x + 15 - a$

e) $W(x) = (a+1)x^3 + 3x^2 - 5cx - 2,\ \ P(x) = 2x^3 + bx^2 - 12x - 2$

Odpowiedź:

a) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = -1 \wedge b = -2$

b) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 4 \wedge c = 2$

c) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = -4 \wedge b = -3 \wedge c = -8$

d) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = -2 \wedge c = 15$

e) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = 2\frac{2}{5}$

2.2 Działania na wielomianach

Teraz nauczę się:

- Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
- Rozszerzać i skracać wyrażenia wymierne;
- Dzielić wielomiany przez dwumian

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dodawanie i mnożenie wielomianów jest łączne i przemienne, zachodzi również rozdzielność mnożenia wielomianów względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na redukcji wyrazów podobnych.

Dodawanie wielomianów

Aby dodać dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, dodajemy do siebie wszystkie wyrazy podobne tych wielomianów i porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 1

Dodaj wielomiany:

a) $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3$ oraz $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4 \\ &= (-3x^4 + 3x^4) + (4x^3 + 5x^3) + (7x^2 + 4x^2) + (-9x + 6x) + (3 - 4) \\ &= 9x^3 + 11x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

b) $W(x) = 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3$ oraz $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3 + 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2 \\ &= 6x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

c) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ oraz $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

$W(x) + P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 + (-3x^3 + 5x^2 - 7x + 3) = (3x^3 - 3x^3) +$
$(-5x^2 + 5x^2) + (7x - 7x) + (-3 + 3) = 0$

Wniosek

Suma dwóch wielomianów może mieć stopień mniejszy lub równy większemu stopniowi wielomianów, może także być wielomianem zerowym.

Odejmowanie wielomianów

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, należy do wielomianu $W(x)$ dodać wielomian $-P(x)$. Następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie wielomianów:

a) $W(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ oraz $P(x) = -8x^2 + 5x^2 + 6x - 8$

$$W(x) - P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 - (-8x^3 + 5x^2 + 6x - 8)$$
$$= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 + 8x^3 - 5x^2 - 6x + 8 =$$

$$= (4x^3 + 8x^3) + (-7x^2 - 5x^2) + (5x - 6x) + (-3 + 8) = 12x^3 - 12x^2 - x + 5$$

b) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ oraz $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$$W(x) - P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - (6x^3 + 4x^2 - 3x + 2)$$
$$= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 =$$

$$= (6x^3 - 6x^3) + (-7x^2 - 4x^2) + (5x + 3x) + (-2 - 2) = -11x^2 + 8x - 4$$

Stopień otrzymanego wielomianu zależy od wielomianów składowych, analogicznie jak w przypadku dodawania.

Mnożenie wielomianów

Aby pomnożyć dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, trzeba pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Następnie zredukować wszystkie wyrazy podobne i uporządkować otrzymany wielomian.

Przykład 3

Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $W(x) = 3x^2 - 4x + 1$ oraz $P(x) = x + 3$

$$W(x) \cdot P(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3x + 3$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 9x + 3$$

b) $W(x) = 4x^3 + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - 3x$

$$W(x) \cdot P(x) = (4x^3 + 1) \cdot (4x^2 - 3x) = 16x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 3x$$

Wniosek

Stopień iloczynu niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Dzielenie wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielnym przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia sposobem pisemnym liczb rzeczywistych.

Wykonaj dzielenie wielomianów:

$W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3)$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dzielimy $2x^3$ przez x i otrzymujemy $2x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ mnożymy $2x^2$ przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy

$-2x^3 - 6x^2$ z przeciwnymi znakami

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dodajemy stronami i przepisujemy $4x + 7$

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dzielimy $-9x^2$ przez x

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$
mnożymy $-9x$ przez $(x + 3)$ i wynik

$-2x^3 - 6x^2$ zapisujemy z przeciwnymi znakami

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$9x^2 + 27x$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dodajemy stronami i przepisujemy -7

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dzielimy $31x$ przez x

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ mnożymy 31 przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy z przeciwnym znakiem

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$-31x - 93$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dodajemy stronami

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$\underline{\quad -31x - 93}$

$= \quad -100$

W dzieleniu wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$ otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 - 9x + 31$ i resztę $R(x) = -100$

Przykład 5

Wielomiany można dzielić przez dwumian, stosując **schemat Hornera**

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 2)$

$r = 2$

Wielomian jest stopnia trzeciego, więc tabelka wygląda następująco:

III	II	I	0
1	–4	3	–5
1			

W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy wszystkie stopnie wielomianu, w drugim wierszu natomiast wszystkie współczynniki tego wielomianu. Pierwszy współczynnik zawsze przepisujemy na dole.

Przystępujemy do obliczeń.

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2		

$r = 2$

$1 \cdot 2 - 4 = -2$ (-2 wpisujemy do dolnego wiersz)

Dalej analogicznie:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	

$r = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ (-1 wpisujemy do dolnego wiersz)

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	-7

$r = 2$

$-1 \cdot 2 - 5 = -7$ (-7 wpisujemy do dolnego wiersz)

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia drugiego.

W dolnym wierszu tabelki otrzymaliśmy współczynniki tego wielomianu.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian

$(x - 2)$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = x^2 - x - 1$ reszty (-7).

Więc wielomian: $W(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2) - 7$.

ZADANIA

2.2.1 Dane są wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ **i** $F(x) = x^4 - 6x^2 + 7$**.**

Oblicz: $P(0), P(-2), P(\sqrt{2}), F(\sqrt{3}), F(\sqrt{2})$

Odpowiedź: $P(0) = -3, P(-2) = -1, P(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 7,\ F(\sqrt{3}) = -5, F(\sqrt{2}) = -1$

2.2.2 Oblicz sumę i różnice wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 4,\ P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 7x + 10$

b) $W(x) = -7x^4 - 6x^2 - 5x + 8,\ P(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 8$

c) $W(x) = -10x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,\ P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 3x^4$

d) $W(x) = -3x^9 + 6x^7 - 5,\ P(x) = 8x^4 - 6x$

Odpowiedź:

a) $W(x) + P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x + 6,\ W(x) - P(x) = 10x^3 - 12x^2 - 2x - 14$

b) $W(x) + P(x) = -4x^3 - 11x,\ W(x) - P(x) = -14x^4 + 4x^3 - 12x^2 + x + 16$

c) $W(x) + P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 13x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,$

$W(x) + P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 13x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,$

$W(x) - P(x) = -2x^8 - 4x^6 - 7x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5$

d) $W(x) + P(x) = -3x^9 6x^7 + 8x^4 - 6x - 5,\quad W(x) + P(x) = -3x^9 6x^7 + 8x^4 - 6x - 5,$

$W(x) - P(x) = -3x^9 + 6x^7 - 8x^4 + 6x - 5$

2.2.3 Oblicz iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = -3x^2 + 6,\ P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

b) $W(x) = 2x^7 + 6x^3,\ P(x) = -4x + 2$

c) $W(x) = -3x^6 + 4x^2 + 2,\ P(x) = 2x + 1$

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 6x,\ P(x) = x^2 - 3$

Odpowiedź:

a) $-6x^5 + 18x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 24$

b) $-14x^8 + 4x^7 - 24x^4 + 12x^3$

c) $-6x^7 - 3x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

d) $2x^7 - 6x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 18x$

2.2.4 Wykonaj dzielenie wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$, gdy:

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40,\ P(x) = x - 5$

b) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,\ P(x) = 2x - 1$

c) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 13x - 2,\ P(x) = 3x - 2$

d) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9,\ P(x) = x - 3$

e) $W(x) = 2x^3 - 19x^2 + 13x - 2, P(x) = 3x - 2$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 6x + 8$

b) $x^2 - 2x + 3$

c) $2x^2 - 5x + 1$

d) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

e) $2x - 102x - 10$

2.2.5 Dane są wielomiany $A(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $B(x) = x^3 - 8$, $C(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) + 2B(x)$

c) $2A(x) - 4B(x)$

d) $5B(x) - 10C(x)$

e) $A(x) \cdot C(x)$

f) $(x - 2) \cdot C(x) - B(x)$

g) $A(x) - (3x + 5) \uparrow\cdot B(x)$

h) $(C(x))^2$

i) $(A(x))^2 - (P(x))^2$

Odpowiedzi:

a) $3x^3 - 7x - 4$

b) $4x^3 - 7x - 12$

c) $-14x + 40$

d) $5x^3 - 10x^2 - 20x - 80$

e) $2x^6 - 7x^4 - 12x^3x + 56x - 32$

f) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$

g) 0

h) $-3x^4 - 3x^3 + 17x + 44$

i) $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$

j) $3x^6 - 28x^4 + 32x^3 + 49x^2 - 56x - 48$

2.3 Rozkład wielomianu na czynniki

Teraz nauczę się:

- Stosować wzory skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$;
- Rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias..

Warto na początku przypomnieć sobie wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.

Kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory stopnia trzeciego:

Sześcian sumy

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sześcian różnicy

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

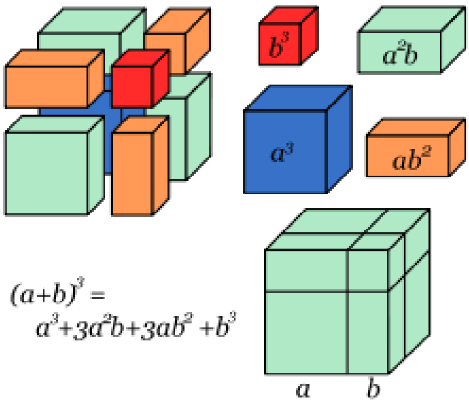
Suma sześcianów

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Różnica sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Każdy z tych wzorów możemy udowodnić w sposób algebraiczny lub – podobnie jak w przypadku wzorów stopnia drugiego – poprzez interpretację geometryczną. Trzeba jednak przejść do przestrzeni trójwymiarowej.



Rysunek 2-1. Graficzne uzasadnienie wzoru na sześcian sumy[24]

24 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia, 07.03.2013.

Przykład 1

$$(x+5)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 5 + 3\cdot x\cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

$$(3x-4)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot 4 + 3\cdot 3x\cdot 4^2 - 4^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$$

$$\sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{7}+21+7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{7}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^3}$$
$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{7}\right)^3} = 1+\sqrt{7}$$

Zadania

2.3.1 Uprość:

a) $(x+5)^3$ b) $(2x+1)^3$ c) $(x+3y5)^3$

d) $(x-2)^3$ e) $(3x-4)^3$ f) $(2x-y)^3$

Odpowiedź:

a) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ b) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

c) $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$ d) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

e) $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$ f) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

2.3.2 Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, uprość wyrażenia:

a) $x^3 - 8$ b) $x^3 - 125$ c) $64x^3 + 27$

d) $8x^3 + 216$ e) $(x+2)^3$ f) $(x-5)^3$

Odpowiedź:

a) $(x-2)(x^2+2x+4)$ b) $(x-5)(x^2+5x+25)$

c) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$ d) $(2x+6)(4x^2-12x+36)$

e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ f) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy zapisać go w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeśli taki rozkład nie istnieje, to mówimy, że wielomian jest **nierozkładalny.**

Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod:

1) wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,

2) wzory skróconego mnożenia,

3) zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej,

4) grupowanie wyrazów.

Przykład 2

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z wspólnego dzielnika współczynników liczbowych oraz najniższej potęgi x.

a) $W(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

b) $W(x) = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2 + 2x - 3)$

Przykład 3

Rozłóż wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $W(x) = x^4 - 64 = (x^2 - 8)(x^2 + 8) = \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right)(x^2 + 8)$

W poniższym przykładzie liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania wzoru na różnicę sześcianów.

b) $W(x) = 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9)$

c) $W(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$

$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 4

Rozłóż wielomian na czynniki, zamieniając na postać iloczynową funkcji kwadratowej.

W tym przypadki wielomian musi mieć postać funkcji kwadratowej.

$W(x) = 4x^2 - 8x - 12$

Obliczamy deltę i pierwiastki tej funkcji.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$\Delta > 0$, więc są dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 16}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 16}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

Zapisujemy postać iloczynową:

$W(x) = 4(x + 1)(x - 3)$

Przykład 5

Rozłóż wielomian na czynniki metodą przez grupowanie wyrazów.

Z tej metody można skorzystać, gdy mamy parzystą ilość czynników w wielomianie.

Łączymy wyrażenia w pary, każdą parę traktujemy jako osobne wyrażenie i każde z nich przekształcamy, wyłączając czynnik przed nawias. Ostatecznie zapisujemy iloczyn, wyłączając wspólny nawias przed nawias.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 3)$

b) $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = (4x^3 - 8x^2) - (3x - 6) = 4x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(4x^2 - 3)$

c) $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^3 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ZADANIA

2.3.3 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = 3x^4 - 5x^3$

b) $W(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$

c) $W(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2$

d) $W(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^4$

e) $W(x) = 4x^2(x^2 - 2) + 2(x^2 - 2)$

Odpowiedź:

a) $W(x) = x^3(3x - 5)$

b) $W(x) = 2x(2x^2 - 3x + 6)$

c) $W(x) = x^2(x + 2)(x - 2)(x - 4)$

d) $W(x) = 4x^4(x^6 + 2x + 1)$

e) $W(x) = 2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2x^2 + 1)$

2.3.4 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$

b) $W(x) = (9x^2 - 6x + 1)(9x^2 - 1)$

c) $W(x) = (x^3 - 27)(x^2 - 9)$

d) $W(x) = (x^4 - 25)(x^3 + 8)$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $W(x) = (3x - 1)^3(3x + 1)$

c) $W(x) = (x - 3)^2(x + 3)(x^2 + 3x + 9)$

d) $W(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

2.3.5 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$

b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

c) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x - 14$

d) $W(x) = x^4 + x^3 + 27x + 27$

e) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

f) $W(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

g) $W(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

h) $W(x) = 15x^6 - 10x^5 + 45x^4 - 30x^3$

i) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

j) $W(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$

k) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$

l) $W(x) = x^4 + 5x^2 - x^3 - 5x$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

b) $W(x) = (x+2)(x^2+9)$

c) $W(x) = (x+2)(x\sqrt{3}-\sqrt{7})(x\sqrt{3}+\sqrt{7})$

d) $W(x) = (x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$

e) $W(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(3x-1)$

f) $W(x) = (x+2)^3$

g) $W(x) = (x-1)^3(x+1)^2$

h) $W(x) = 5x^3(x^2+3)(3x-2)$

i) $W(x) = (x-2)(x-3)(x+3)$

j) $W(x) = (x+7)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

k) $W(x) = (x-4)(x+4)(x-2)$

l) $W(x) = x(x-1)(x^2+5)$

2.3.6 Rozłóż wielomiany na czynniki poznanymi metodami:

a) $5x^6 + 10x^5 - 15x^2$

b) $8x^3 - 27$

c) $2x^2 - 6x - 8$

d) $4x^3 - 8x^2 - 3x + 6$

e) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$

f) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$

g) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3$

h) $(x^4 - 16x^2)(x^5 + 5x^4 + 6x^3)$

i) $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2$

j) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

k) $x^4 + x^3 - 8x - 8$

l) $x^5 + 10x^4 + 25x^3$

Odpowiedź:

a) $5x^4(x^2+2x-3)$

b) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$

c) $2(x-4)(x+1)$

d) $4x(x+5)(-3x-2)^2(5x-1)$

e) $x^2(2x-3)^2$

f) $(x+2)(x-2)(2x+3)$

g) $2x^3(x-3)(x-1)$

h) $x^5(x+4)(x-4)(x+2)(x+3)$

i) $-2x^2(x-2)(x+5)$

j) $(x-2)(x+2)(x+3)$

k) $(x^3-8)(x+1)$

l) $x^3(x+5)^2$

2.3.7 Wykorzystując poznane metody, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej:

a) $8x^3-12x^2+6x-1$

b) $3x^4-5x^3+5x^2-5x+2$

c) $x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x$

d) $x^4+2x^3-4x^2-8x$

e) x^3+3x^2-2x

Odpowiedź:

a) $(2x-1)^3$

b) $(x-1)(3x-2)(x^2+1)$

c) $(x^2+3x+1)x(x^2+1)$

d) $x(x-2)(x+2)^2$

e) $x\left(x-1+\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$

Ciekawostka

Wzory skróconego mnożenia można szybko wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala.**

Blaise Pascal (1623-166) – francuski filozof, matematyk i fizyk. Badał prawdopodobieństwo, próżnię i ciśnienie atmosferyczne. Wynalazł m.in. pierwszą maszynę liczącą „Pascalinę” oraz TRÓJKĄT PASCALA. Od jego nazwiska wywodzi się nazwa jednostki ciśnienia (Pa) i język programowania Pascal[25].

Trójkąt Pascala pozwala wyprowadzić wzory skróconego mnożenia.

Przyjrzyjmy się postaci wzorów:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

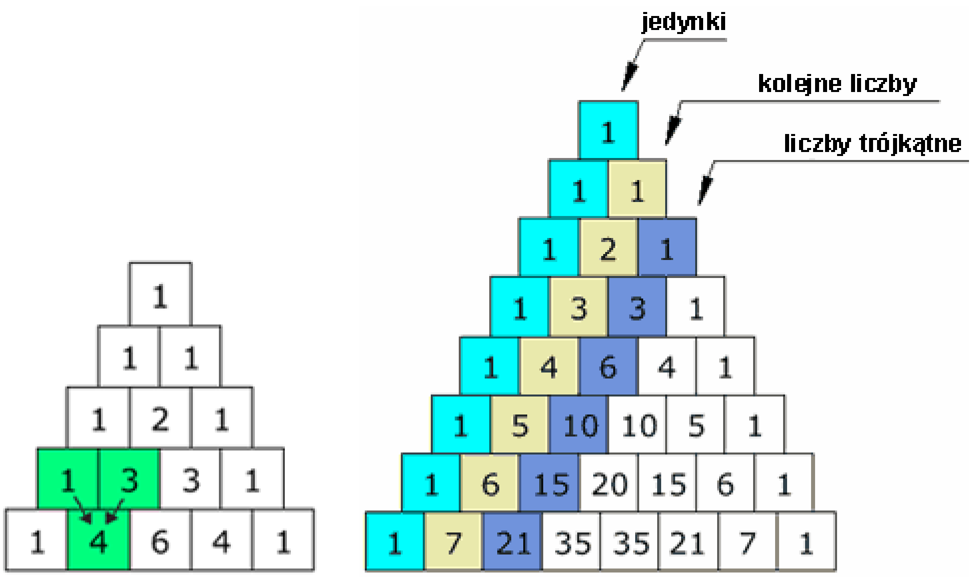
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Zapiszmy same współczynniki liczbowe składników. Postać kolejnych czynników liczbowych jest widoczna. Współczynniki liczbowe utworzyły trójkąt, który nazywa się trójkątem Pascala.

Zasady budowy trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to tablica liczb, w której każdy element powstaje poprzez sumowanie elementów stojących nad nim. Elementy skrajne to jedynki.



Rysunek 2-2. Zasada tworzenie trójkąta Pascala

25 www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal, 19.02.2013.

Wyznaczymy teraz współczynniki piątej potęgi dwumianu.

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Dwumian Newtona, czyli wzór na $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 6

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)!\cdot 0!} = \frac{7!}{7!\cdot 1!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!} = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)!\cdot 7!} = \frac{7!}{0!\cdot 7!} = 1$$

Więc:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

ZADANIE

2.3.8 Wyznacz, korzystając z trójkąta Pascala:

a) $(a-b)^4$ b) $(a-b)^5$ c) $(a+b)^6$

Odpowiedź:

a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

c) $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

2.4 Równania wielomianowe

Teraz nauczę się:

- Wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;
- Rozwiązywać równania wielomianowe.

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań wielomianowych, przybliżymy pojęcie pierwiastka wielomianu.

Pierwiastek wielomianu lub równania wielomianowego to rozwiązanie tego równania.

W przypadku wielomianów mamy zazwyczaj do czynienia z kilkoma pierwiastkami.

Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nazywamy jego miejsce zerowe. Powiemy zatem, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$, gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_+$

Przykład 1

Sprawdź, czy liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu: $W(x) = x^3 - 2x^2 - 19x - 20$.

$W(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 19(-2) - 20 = -8 - 8 + 38 - 20 = 2$

Otrzymany wynik jest różny od 0, więc liczba (-2) nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 2

Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu:

$W(x) = 2x^5 - 4x^2 - 24x$

Więc: $W(2) = 2 \cdot (2)^5 - 4 \cdot (2)^2 - 24 \cdot 2 = 64 - 16 - 48 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Równanie $W(x) = 0, W(x) = 0$, gdzie $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a \quad x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ nazywamy równaniem wielomianowym stopnia n

Rozwiązywanie równań wielomianowych sprowadza się do znalezienia pierwiastków danych wielomianów.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania rozłożyć na czynniki.

Przykład 3

Rozwiąż równanie: $x^4 - 9 = 0$

$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)(x^2 + 3) = 0$

Wyrażenie będzie równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\left(x - \sqrt{3}\right) = 0 \ \vee \ \left(x + \sqrt{3}\right) = 0 \ \vee \ (x^2 + 3) = 0$

$x - \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$x + \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 3 > 0$, więc $x = \sqrt{3} \ \vee x = -\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = \sqrt{3} \ \vee x = -\sqrt{3}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie: $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$

Skorzystamy z metody grupowania wyrazów.

$x^3(x + 1) - 8(x + 1)$

$(x + 1)(x^3 - 8) = 0$

$(x + 1) = 0 \ \vee \ (x^3 - 8) = 0$

$x = -1 \ \vee \ x^3 = 8 \ \Rightarrow x = 2$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = -1 \vee \ x = 2$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie: $x^5 - 2x^4 + 5x^3 = 0$.

Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias:

$x^3(x^2 - 2x + 5) = 0$, to wyrażenie jest równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy:

$x^3 = 0 \ \vee \ x^2 - 2x + 5 = 0$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, skoro $\Delta < 0$, to trójmian nie ma pierwiastków.

Więc rozwiązaniem jest: $x = 0$.

Przykład 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt[4]{2 - 4x^2 - 3x}$

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, więc:

$2 - 4x^2 - 3x \geq 0 \, / \cdot (-1)$

$4x^2 + 3x - 2 \leq 0$

$\Delta = 9 + 32 = 41$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Odpowiedź: $x \in \langle \frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \rangle$.

ZADANIA

2.4.1 Zapisz podane wyrażenia w prostszej postaci. Przyjmij, że każdy mianownik w podanych ułamkach jest różny od zera.

a) $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$ b) $\frac{30x^4-6x^3+45x^2-9x}{8x^3+12x}$ c) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^3-2x^2-12x+8}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 1$ b) $\frac{3(5x-1)}{4}$ c) $\frac{x-1}{x^2-4}$ d) $\frac{x+3}{x-3}$ e) $\frac{x-2}{x+1}$

2.4.2 Rozwiąż równania:

a) $3x^4 - 12 = 0$ b) $x^3 + 4x = 0$

c) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ d) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

e) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$ f) $x^3 + 8x^2 - 2x - 16 = 0$

Odpowiedź:

a) $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

b) $x = 0$

c) $x = 1 \vee x = -1$

d) $x = 5 \vee x = 1 \vee x = -1$

e) $x = 1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \, x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

f) $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = -8$

2.4.3 Rozwiąż, rozkładając na czynniki:

a) $3x^3 + 6x^2 + 4x + 8 = 0$

b) $x^6 + 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $1 + x^2 = x^3 + x$

d) $3x^2 - 4x = -x^3 + 12$

e) $-9x - 5x^2 = -x^3 - 45$

f) $x^4 + 3x^3 - 6x - 4 = 0$

g) $x^3 - 7x^2 + 6 = 0$

h) $5x^3 + 9x^2 - 26x - 24 = 0$

i) $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$

j) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$

k) $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$

l) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

m) $6x^3 + 6x^2 - 3x - 3 = 0$

n) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$

o) $2x^3 - 4x^2 - 6x + 12 = 0$

p) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$

q) $x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 18x^2 = 0$

r) $-2x^4 - \sqrt{3}x^3 + 2x + \sqrt{3} = 0$

s) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$

t) $2x^5 - 18x^3 + 2x^2 - 18 = 0$

u) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$

w) $x^8 + x^6 - x^4 - x^2 = 0$

x) $20x^4 - 20x^3 + 5x^2 = 0$

Odpowiedź:

a) $x = -2$

b) $x = -1$

c) $x = 1$

d) $x = 2 \lor x = -2 \lor x = -3$

e) $x = 5 \lor x = 3 \lor x = -3$

f) $x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2} \lor x = -2 \lor x = -1$

g) $x = 3 - \sqrt{15} \lor x = 3 + \sqrt{15} \lor x = 1$

h) $x = -3 \lor x = -\frac{4}{5} \lor x = 2$

i) $x = 7$

j) $x = -2 \lor x = \sqrt{5} \lor x = -\sqrt{5}$

k) $x = 2 \lor x = -2 \lor x = 7$

l) $x = 3 \lor x = \sqrt[3]{4}$

m) $x = -1 \lor x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \lor x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

n) $x = -1 \lor x = \sqrt{5} \lor x = -\sqrt{5}$

o) $x = 2 \lor x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$

p) $x = -1 \lor x = \sqrt{5} \lor x = -\sqrt{5}$

q) $x = 2 \lor x = 0 \lor x = 3 \lor x = -3$

r) $x = 1 \lor x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

s) $x = -2 \lor x = 2 \lor x = \dfrac{3}{2}$

t) $x = 3 \lor x = -3 \lor x = -1$

u) $x = -3 \lor x = \sqrt{5} \lor x = -\sqrt{5}$

v) $x = -1 \lor x = 3 \lor x = -3$

w) $x = 0 \lor x = 1 \lor x = -1$

2.4.4 $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

2.4.5 Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^3+5x^2+6x}$

b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(4-x^2)}$

c) $f(x) = \sqrt{x(2+x)(x-3)^2} - \sqrt{(x+2)^2(4-x)}$

d) $f(x) = \frac{8x^3-125}{4x^3-4x^2-25x+25}$

e) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3-16x}$

f) $f(x) = \frac{6x-2}{x^2-x-2}$

g) $f(x) = -3x^2+7x-8$

h) $f(x) = x + \frac{1-\sqrt{x+1}}{3\sqrt{1-2x}}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x+2|}}{x(x+3)}$

j) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x+6}}$

l) $f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

Odpowiedź:

a) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0\}$

b) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle -2,3\rangle$

c) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 0,4\rangle$

d) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

e) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-4,0,4\}$

f) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x \in \left\langle \frac{1}{2},+\infty\right)$

i) $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-3\}$

j) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

k) $x \in (-\infty,6)$

l) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[26] Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$ b) $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$ c) $2x^5 + 3x + 1$ d)) $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

2. Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (x-2)^{53} + 53x + 2^{53}$ jest równy:

a) 2^{54} b) 0 c) 2^{53} d) 53

3. Wielomian $W(x) = x^2(x-2) - (x-2)$ można zapisać w postaci:

a) $x^2(x+2)$

b) $(x^2+1)(x-2)$

c) $x(x-2)^2$

d) $(x-1)(x+1)(x-2)$

26 Zadania 1-22: zaczerpnięte z www.zadania.info, 21.03.2013.

4. Wielomiany $W(x) = (x-2)(x+1)(x+2)$ i $P(x) = (a-b)x^3 + x^2 + (a+b)x - 4$ są równe. Z tego wynika, że:

a) $a = 1, b = 2$ b) $a = -1, b = -2$ c) $a = -1, b = 2$ d) $a = 2, b = -1$

5. Stopień wielomianu $W(x) = (x-1)(3x+5)^2(2x+1)^3$ jest równy:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8

6. Wielomian W określony jest wzorem $W(x) = -x^9 + x^8 - 6$. Zatem $W(-5)$ jest liczbą:

a) ujemną b) dodatnią c) niewymierną d) pierwszą

7. Po rozłożeniu wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$, otrzymujemy:

a) $W(x) = (x+5)(x-3)(x+3)$ b) $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

c) $W(x) = (x-5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ d) $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

8. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - 2x, V(x) = 2x^2 + 3x$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

9. Wartość wielomianu $W(x) = 3x - x^2 - x^3$ dla $x = -3$ jest równa:

a) 12 b) -9 c) 9 d) -24

10. Wielomian $P(x) = W(x) - K(x)$ jest siódmego stopnia oraz
$W(x) = mx^7 + 8x^5 + 5, K(x) = 3x^3 + 8x^5 + (3m+2)x^7$.
Wynika stąd, że liczba m jest różna od:

a) 3 b) -1 c) 1 d) 0

11. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$:

a) jest iloczynem wielomianów $(x-2)$ i (x^4+1)

b) ma trzy miejsca zerowe

c) ma dwa miejsca zerowe

d) jest różnicą wielomianów $(x^5 - 2)$ i $x + 2$

12. Funkcja $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$ ma:

a) 1 miejsce zerowe b) 2 miejsca zerowe

c) 3 miejsca zerowe d) nie ma miejsc zerowych

13. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ w punkcie m jest równa 15 dla:

a) $m = 3$

b) $m = 3 \lor m = -3$

c) $m = 2 \lor m = -2 \lor m = 3$

d) $m = 2$

14. Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $W(x) = 5x^2 - 2x^3 + 3$, aby otrzymać wielomian $P(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$?

a) $6 - 7x^2 - 6x^3$

b) $2x^3 + 17x^2$

c) $6x^3 + 7x^2$

d) $6x^3 + 7x^2 - 6$

15. Wiadomo, że $W(-1) = -1$, gdy $W(x) = 2x^3 + px - 3$. Zatem wartość współczynnika p wynosi:

a) $\frac{1}{4}$

b) -4

c) 4

d) -1

16. Wielomiany P i Q określone są wzorami $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = -x^5 + 1$.

Wielomian R

$(x) = 2P(x) + Q(x)$ jest stopnia:

a) 0

b) 10

c) 1

d) 5

17. Wielomiany $P(x) = (a+1)x^3 + x^2 - b$ i $P(x) = (b-1)x^3 + x^2 + 2a + 1$ są równe. Zatem liczba $a + b$:

a) należy do zbioru $\langle 2,\ 3)$

b) jest większa od 3

c) należy do zbioru $(-2, 0\rangle$

d) jest mniejsza od -2

18. Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi:

a) $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$

b) $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$

c) $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$

d) $(x^4 - 2)(x + 1)$

19. Wielomian $x^3 - 3x^2 - 3$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

a) $(x-3)(x-1)(x+1)$

b) $(x-3)x^2$

c) $(x-3)(x^2+1)$

d) $(x-3)^2(x^2+1)$

20. Dane są wielomiany $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + 2$ oraz $P(x) = 2x^4 + 5X^3 + 3x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

a) $5x^4 + 3x + 2$

b) $3x + 2$

c) $-x^4 + 3x + 2$

d) $-x^4 + 3x - 2$

21. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

22. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$ b) $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$ c) $2x^5 + 3x + 1$ d) $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

23.[27] Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

a) $5x^2 + 12x - 3$ b) $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$

c) $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$ d) $4x^3 + 12x^2 - 3$

24.[28:] Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Współczynnik a jest równy

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

25.[29] Dane są wielomiany $W(x) = 2x^2 - 5x$ i $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.
Wielomian $G(x) = 2W(x) - P(x)$ jest równy:

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ b) $-x^3 + 7x^2 - 7x + 4$

c) $-x^3 + 9x^2 - 12x + 7$ d) $x^3 - x^2 - 8x + 5$

26.[30] Dane są wielomiany $\boldsymbol{W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4}$ oraz $\boldsymbol{M(x) = x^3 - 2x^2 + 5}$. Wielomian $\boldsymbol{W(x) - M(x)}$ jest równy:

a) $\boldsymbol{4x^3 + 9}$ **b)** $\boldsymbol{3x^3 + 1}$ **c)** $\boldsymbol{2x^3 - 1}$ **d)** $\boldsymbol{4x^3 - 4x^2 + 9}$

27.[31] Dane są wielomiany $W(x) = x - 4$ i $M(x) = x^2 - 2x$. Wielomian $W(x) \cdot P(x)$ jest równy:

a) $x^3 - 2x^2 - 8x$ b) $x^3 - 6x^2 + 8x$ c) $x^3 - 4x^2 - 10x$ d) $x^3 - 4x^2 + 6x$

28.[32] Suma odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1$ jest równa:

a) 4 b) $-0{,}25$ c) 6 d) -4

29. Liczba $x = 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^2 - 2a$, gdy a jest równe:

a) 18 b) -18 c) 9 d) $18\sqrt{2}$

27 Zadanie 23: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.
28 Zadanie 24: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 05.03.2013.
29 Zadanie 25: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 05.03.2013.
30 Zadanie 38: zaczerpnięte z www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_3516874321687431687416876516 4687/mat_ark_pdst.pdf, 05.03.2013.
31 Zadanie 27: zaczerpnięte z www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 05.03.2013.
32 Zadania 28, 29: zaczerpnięte ze strony (www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf), 05.03.2013.

30.[33] Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

31.[34] Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-4)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = 0$ są liczby:

a) $-3, -2, 2, 3$ b) $2, 3$ c) $-3, 2$ d) $-2, 3$

32. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{36-x^2}{(6-x)(x^3-1)}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{1,6\}$ b) $R\backslash\{-6,-1,6\}$ c) $R\backslash\{-6,6\}$ d) $R\backslash\{-6,1,6\}$

33.[35] Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0$ ma:

a) dokładnie jedno rozwiązanie b) dokładnie dwa rozwiązania

c) dokładnie trzy rozwiązania d) dokładnie cztery rozwiązania

34.[36] Liczba 5 nie należy do dziedziny wyrażenia:

a) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$ b) $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$ c) $\frac{x^2-25}{x^2+25}$ d) $\frac{x^2-25}{x+5}$

35. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{2}{x} : \frac{x^2-16}{x+1}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-1,0\}$ b) $R\backslash\{-4,-1,0,4\}$ c) $R\backslash\{-4,4\}$ d) R

36. Do dziedziny funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{5x}{x(x+1)(x-\sqrt{7})(x^2+7)}$:

a) nie należą 2 liczby b) nie należą 3 liczby c) nie należą 4 liczby d) nie należy 5 liczb

37. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{x^2-2x+3}$ jest największa, gdy liczba x jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) 2

38. Dla której z liczb wyrażenie $\frac{2+x}{x-5}$ nie ma sensu liczbowego?

a) -2 b) -5 c) 0 d) 5

39. Dziedziną wyrażenia $W = \frac{x^2-36}{(x+4)(x^2+4x+4)}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-6,-4,-2,6\}$ b) $R\backslash\{-6,-4,2,6\}$ c) $R\backslash\{-4,2\}$ d) $R\backslash\{-4,-2\}$

33 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf), 05.03.2013.
34 Zadania 31, 32: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 06.03.2013.
35 Zadanie 33: zaczerpnięte z arkusza CKE, sierpień 2012 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 20.03.2013.
36 Zadania 34–47: zaczerpnięte z www.zadania.info, 20.03.2012.

40. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{3x}{x^2-5x+6}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{2\}$ b) R c) $R\backslash\{2,3\}$ d) $R\backslash\{3\}$

41. Zbiór $R\backslash\{-3,0,2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

a) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x^2-x-2}{x^3+5x^2+6x}$ c) $\frac{3x+2}{x(x-2)(x-3)}$ d) $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$

42. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-4x}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-5,5\}$ b) $R\backslash\{0,4\}$ c) $R\backslash\{-2,2\}$ d) $R\backslash\{-5,0,4,5\}$

43. Dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{-x-3}$ jest zbiór:

a) $\langle -3,+\infty)$ b) $(-3,\ +\infty)$ c) $(-\infty,-3\rangle$ d) $(-\infty,-3)$

44. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji $f(x)=\sqrt{-x^2-8x-\frac{59}{4}}$ jest:

a) -2 b) -3 c) -4 d) -5

45. Największą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x)=\sqrt{30-6x}$, jest:

a) -5 b) -4 c) 5 d) 6

46. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x}}$ jest:

a) $(-\infty,1\rangle$ b) $(1,+\infty)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(-1,+\infty)$

47. Wyrażenie $\frac{3x+1}{x-2}-\frac{2x-1}{x+3}$ jest równe:

a) $\frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$ b) $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$ d) $\frac{x+2}{-5}$

48.[37] Wyrażenie $\frac{x-1}{3x-6}-\frac{2}{x-2}$ jest równe:

a) $\frac{x+1}{3x-6}$ b) $\frac{x+5}{3x-6}$ c) $\frac{x-7}{3x-6}$ d) $\frac{x-3}{3x-6}$

49. **(6 pkt)** Dany jest wielomian $W(x)=x^4-mx^3+nx^2-8$. Wartość tego wielomianu dla $x=2$ jest taka sama, jak dla $x=-2$, a wartość wielomianu dla $x=3$ wynosi 82. Wyznacz wartości liczb m i n oraz rozwiąż nierówność $W(x)>x^4+2$.

37 http: //www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 21.03.2013.

50. **(2 pkt)** Sprawdź, czy wielomiany $W(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ i $H(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$ są równe.

51. **(2 pkt)** Określ dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+3}{x^2-4} + \frac{4}{x-2}$ i wykonaj działania.

52. **(2pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

53. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Odpowiedź: $2, -2, 7$.

54.[38] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

Odpowiedź: $-\sqrt{5}; -2; \sqrt{5}$.

55. Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

56. **(2pkt)** Rozwiąż równanie $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 6x - 12x^3 + 2x^2 - 6x - 12}$.

Odpowiedź: $-2; \sqrt{6}; -\sqrt{6}$.

57.[39] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

58.[40] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{x-2}{3x-1} = \frac{x+5}{3x+2}$.

59. **(2 pkt)** Wykonaj działania: $\frac{x-5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-10x+25}$

60. **(3 pkt)** Pewną liczbę wymierną można przedstawić w postaci $\frac{n}{3-n}$, gdzie $n \in \{1,2,3,....,32\}$. Gdy powiększymy licznik tego ułamka o 39, a mianownik o 20, to podwoimy wartość tego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

38 Zadania 54, 55, 56: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 17.03.2013.
39 www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 17.03.2013.
40 Zadania 58, 59, 60: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 17.03.2013.

3 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

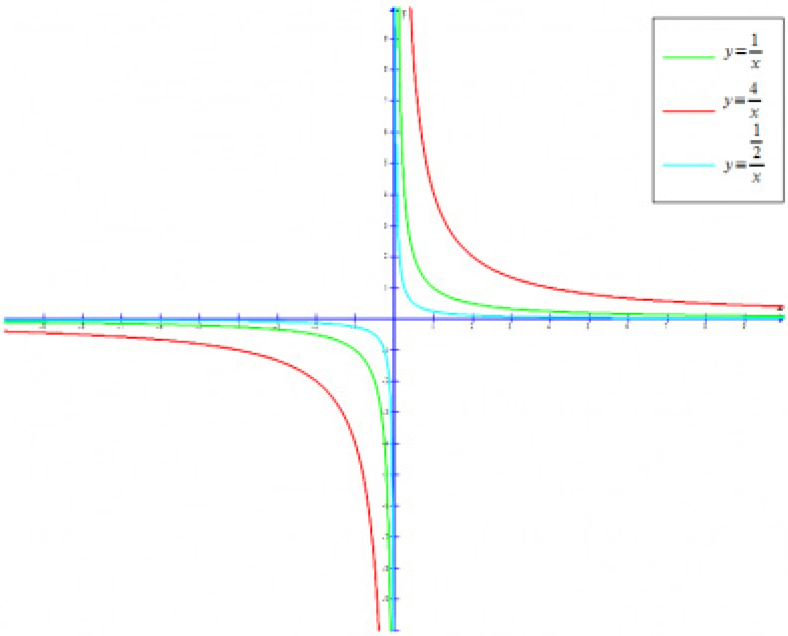
3.1 Funkcja wykładnicza i jej własności

Teraz nauczę się:

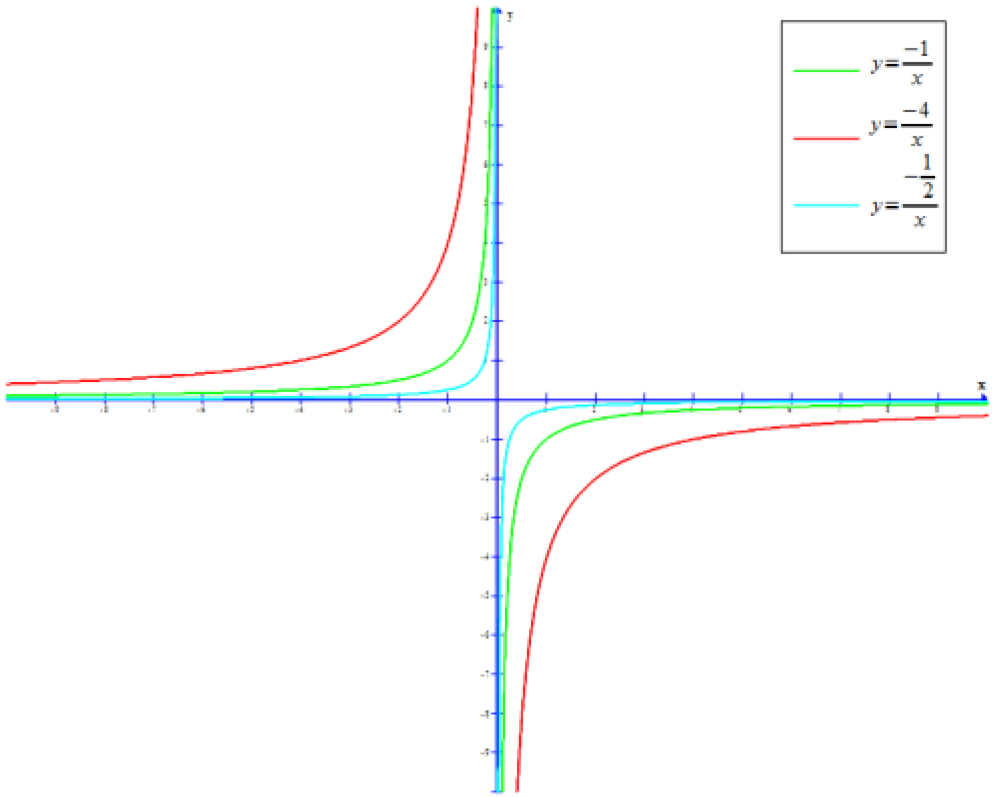
- Szkicować wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla danego a;
- Korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Pojęcie hiperboli.

Poniżej narysowano kilka różnych funkcji typu $f(x)=\frac{a}{x}$.



Rysunek 3-1. Wykres funkcji hiperbolicznej, a > 0



Rysunek 3-2. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a < 0$

Krzywą, która jest wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy hiperbolą. Wykres składa się z dwóch rozłącznych części, zwanych gałęziami hiperboli.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Gdy $a > 0$, gałęzie hiperboli $y = \frac{a}{x}$ leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

Gdy $a < 0$, gałęzie hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Zatem, aby narysować wykres funkcji, wystarczy znać wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla $x > 0$, a następnie odbić go symetrycznie względem punktu $(0{,}0)$, czyli początku układu współrzędnych.

Wykres funkcji typu $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) zbliża się do obu osi układu współrzędnych (punkty tego wykresu mogą leżeć dowolnie blisko tych osi). Prostą $x = 0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, a **prostą $y = 0$ nazywamy asymptotą poziomą tego wykresu.**

Zmniejszanie wartości „a" powoduje zbliżenie się hiperboli do osi układu.

Zwiększanie wartości „a" powoduje oddalenie się hiperboli od osi układu.

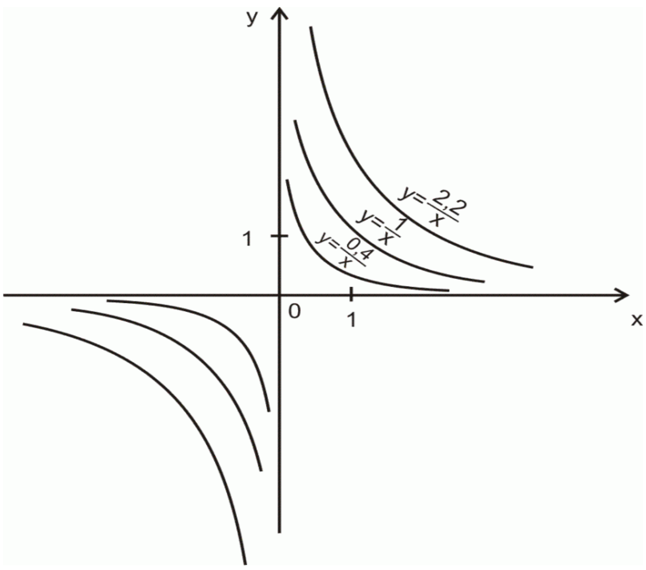
Przykład 1

W jednym układzie współrzędnych należy narysować wykresy funkcji:

$f(x) = \frac{0{,}4}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{2{,}2}{x} f(x) = \frac{0{,}4}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{2{,}2}{x}.$

Budujemy częściową tabelę zmienności funkcji:

x	0,25	0,5	1	2
$f(x)=\frac{0,4}{x}$	1,6	0,8	0,4	0,2
$f(x)=\frac{1}{x}$	4	2	1	0,5
$f(x)=\frac{2,2}{x}$	8,8	4,4	2,2	1,1



Rysunek 3-3. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, $a>0$

UWAGA!!!

- Jeśli , $a>0$ to gałęzie hiperboli są położone w I i III ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$ **jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli** $R/\{0\}$**.**
- Widzimy, że funkcja jest **malejąca** w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

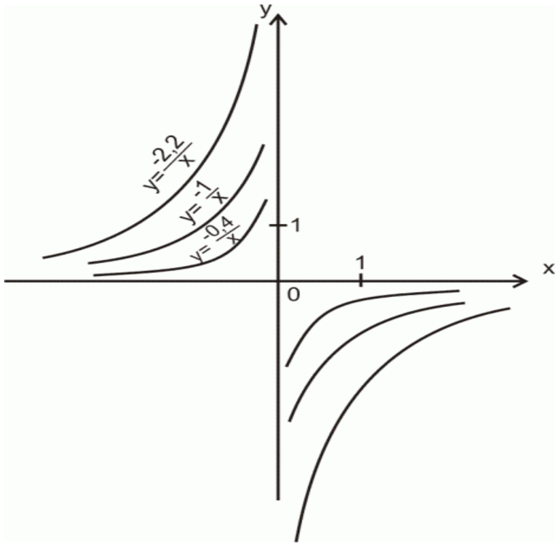
Przykład 2

W jednym układzie współrzędnych należy narysować wykresy funkcji:

$f(x)=-\frac{0,4}{x}, f(x)=-\frac{1}{x}, f(x)=-\frac{2,2}{x}.$

Wykres funkcji $y=-f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y=f(x)$ przez odbicie symetryczne względem osi OX.

Wykorzystując tę własność oraz wykresy funkcji z **Przykładu 1**, widzimy, że wykresy podanych funkcji są następujące:



Rysunek 3-4. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, $a<0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a<0$, to ramiona hiperboli są położone w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ **(** $a\neq 0$ **) jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli** $R/\{0\}$**.**
- Widzimy, że funkcja jest **rosnąca** w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

Poniżej przypominamy reguły dotyczące przesuwania wykresów funkcji:

Niech $a>0$ i $b>0$.

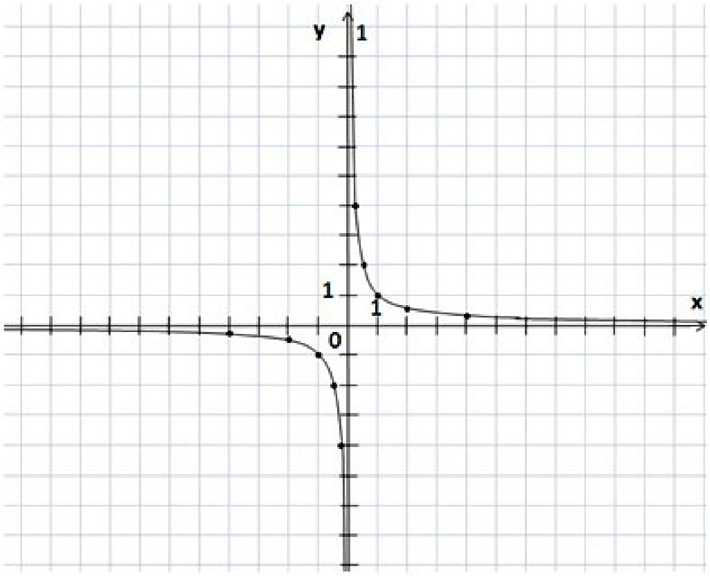
- Jeśli wykres funkcji $y=f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x-a)+b$.
- Jeśli wykres funkcji $y=f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x-a)-b$.
- Jeśli wykres funkcji $y=f$(x) przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x+a)+b$.
- Jeśli wykres funkcji $y=f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x+a)-b$.

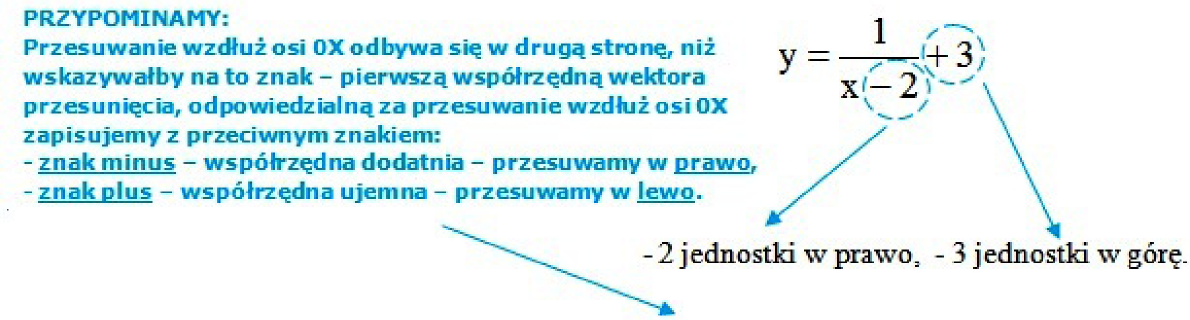
Powyższą regułę wykorzystajmy w przykładzie.

Przykład 3[41]

Narysuj wykres funkcji: $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

W pierwszej kolejności rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{1}{x}$



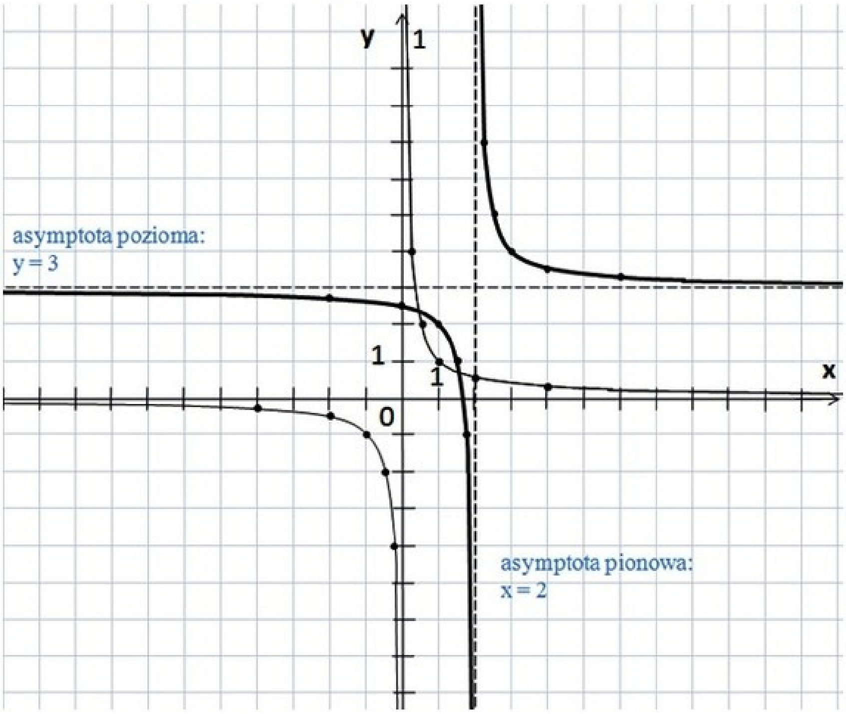


ASYMPTOTY pionową i poziomą przesuwamy wraz z wykresem funkcji.

Dla rozpatrywanego przykładu:

- asymptota pozioma będzie znajdowała się na wysokości 3: $y = 3$,
- asymptota pionowa będzie znajdować się w miejscu argumentu 2: $x = 2$.

41 www.matematykam.pl, 03.03.2013.



ZADANIA

3.1.1 Sporządź wykresy funkcji:

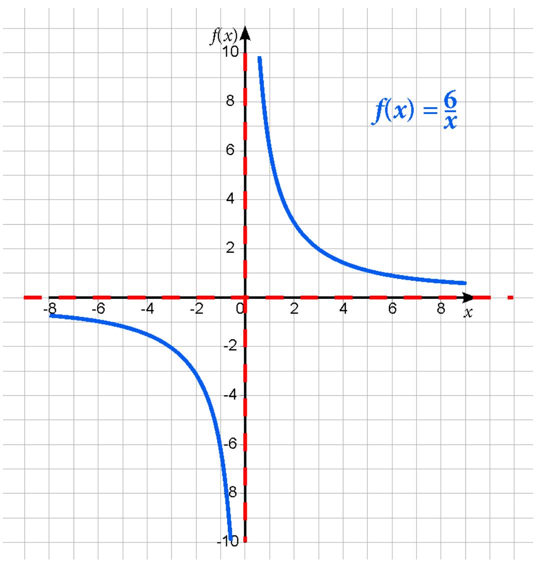
a) $f(x)=\frac{6}{x}$ b) $f(x)=-\frac{8}{x}$ c) $f(x)=\frac{2}{x}+3$ d) $f(x)=-\frac{4}{x}+2$

e) $f(x)=\frac{4}{x-2}$ f) $f(x)=\frac{-2}{x+1}$ g) $f(x)=\frac{5}{x+3}$ h) $f(x)=\frac{-3}{x-1}$

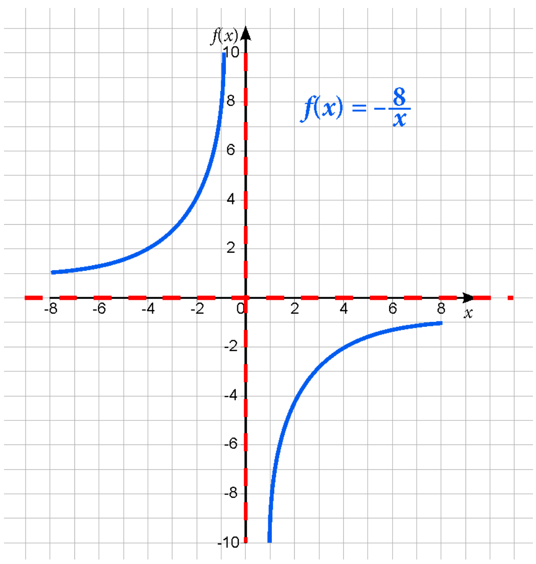
i) $f(x)=\frac{4}{x-3}-2$ j) $f(x)=\frac{-4}{x-4}+1$

Odpowiedzi:

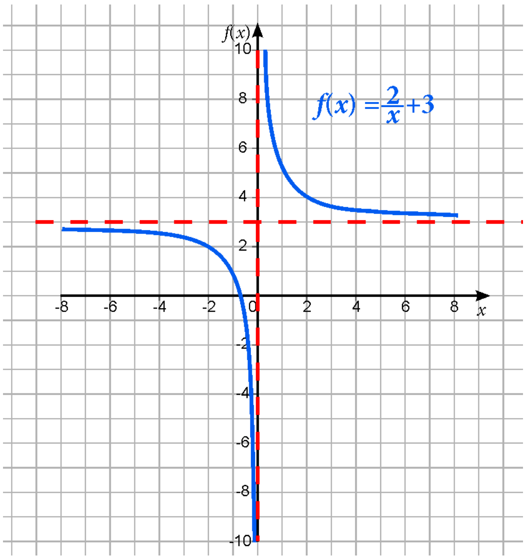
a)



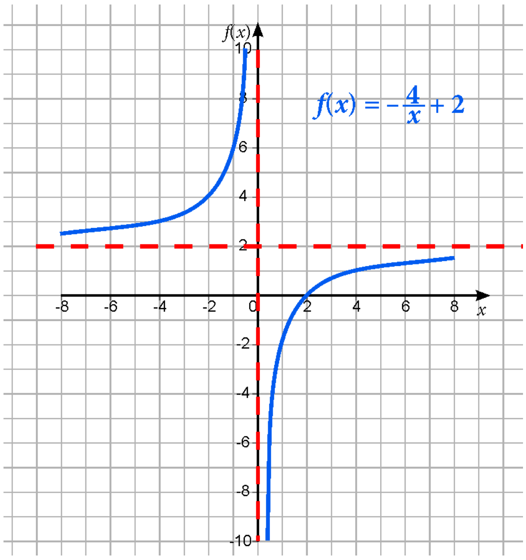
b)



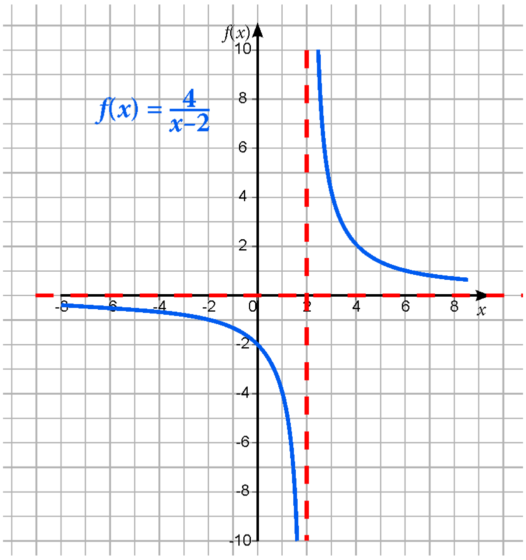
c)


$f(x) = \frac{2}{x} + 3$
f(x)
x

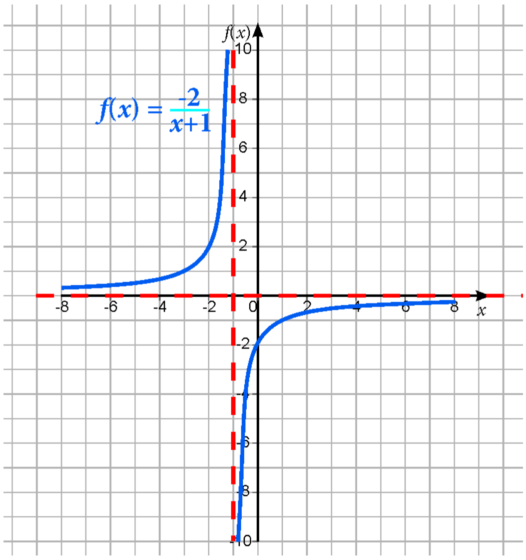
d)


$f(x) = -\frac{4}{x} + 2$
f(x)
x

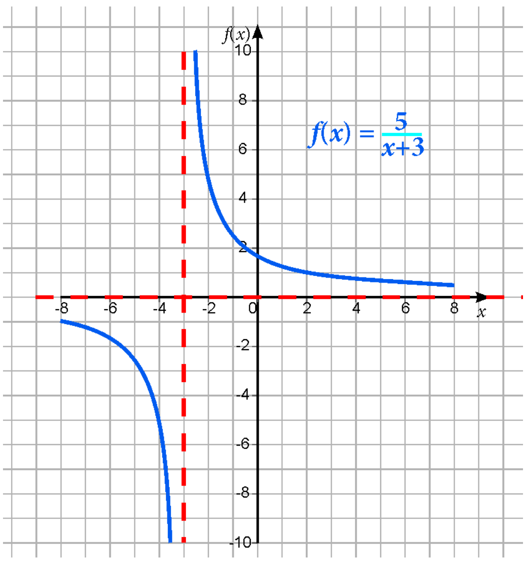
e)


$f(x) = \frac{4}{x-2}$
f(x)
x

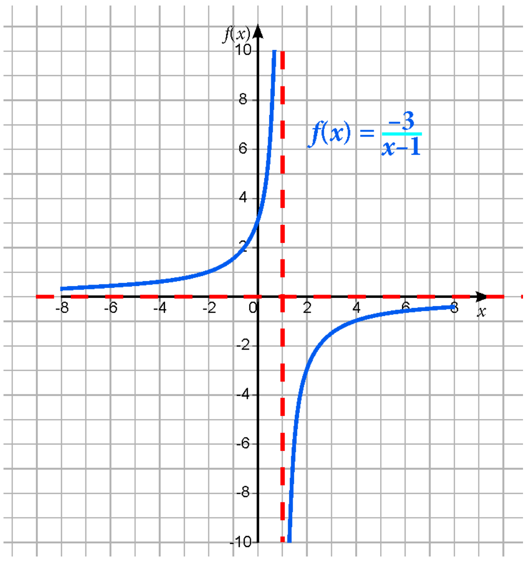
f)


$f(x) = \frac{-2}{x+1}$
f(x)
x

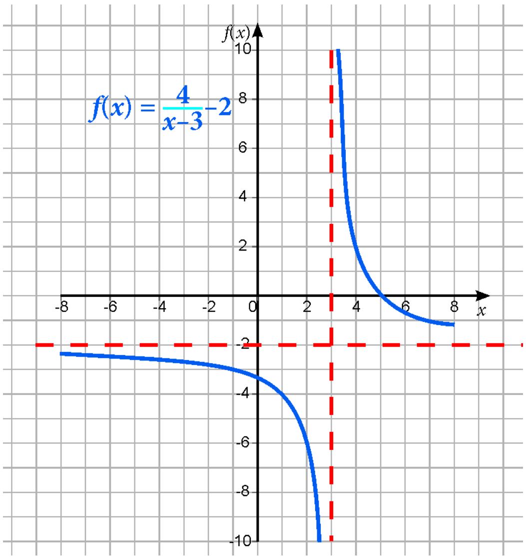
g)


$f(x) = \frac{5}{x+3}$
f(x)
x

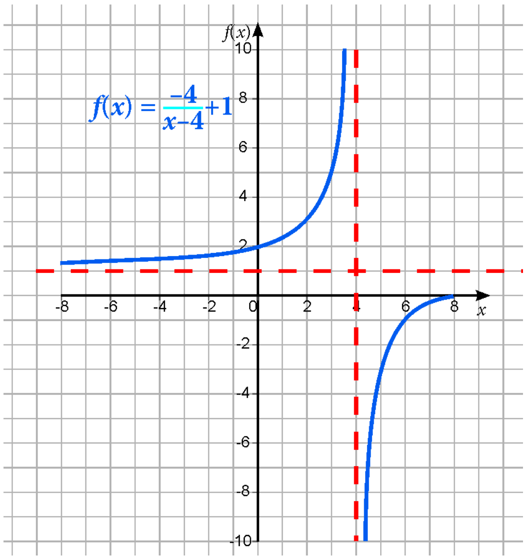
h)


$f(x) = \frac{-3}{x-1}$
f(x)
x

i)



j)



3.1.2 Wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g, jeżeli wykres funkcji f przesunięto:

a) o 5 jednostek do dołu

b) o 3 jednostki w prawo

c) o 2 jednostki do góry i 4 jednostki w lewo

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{4}{x} - 5$ b) $f(x) = \frac{4}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4} + 2$

3.1.3 Zapisz równania asymptot wykresu funkcji:

a) $y = \frac{3}{x-1} + 2$ b) $y = \frac{-0,7}{x+12} - \frac{1}{3}$ c) $y = \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}} - \sqrt{5}$ d) $y = \frac{7}{3(x-\frac{1}{2})} + \frac{4}{5}$

Odpowiedź:

a) $\boldsymbol{x = 1;\ y = 2}$ b) $\boldsymbol{x = -12;\ y = -\frac{1}{3}}$ c) $x = -\sqrt{3};\ \ y = -\sqrt{5}$ d) $x = \frac{1}{2};\ \ y = \frac{4}{5}$

3.1.4 Punkt $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} = \left(3\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{6}\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{a}{x}$ b) $f(x) = \frac{a}{x+4}$ c) $f(x) = \frac{a}{x} - 2$ d) $f(x) = \frac{a}{x-2} + 2$

Dla każdej z tych funkcji wyznacz wartość współczynnika $\boldsymbol{a}$.

Odpowiedź:

a) $21\sqrt{2}$ b) $21\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

c) $21\sqrt{2} + 8\sqrt{6}$ d) $21\sqrt{2} - 4\sqrt{6} - 7\sqrt{3} + 4$

3.1.5 Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x-5}+3$ b) $f(x)=\frac{3}{x+2}-3$ c) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x+6}$ d) $f(x)=\frac{-3}{x}+1$

Odpowiedź:

a) Zbiór wartości: $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$.

b) Zbiór wartości: $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$.

c) Zbiór wartości: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-6)\cup(-6,\infty)$.

d) Zbiór wartości: $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$; funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

3.1.6 Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x = -5;\ y = 3$ b) $x = 0{,}6;\ y = 0$ c) $x = -15;\ y = -6$

d) $x = 0;\ y = -2$ e) $x = 0;\ y = 0$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{3}{x+5}+3$, $f(x)=\frac{-9}{x-5}+3$ b) $f(x)=\frac{1}{x-0{,}6}$, $f(x)=\frac{5}{x-0{,}6}$

c) $f(x)=\frac{1}{x+15}-6$, $f(x)=\frac{20}{x+15}-6$ d) $f(x)=\frac{1}{x}-2$, $f(x)=\frac{-17}{x}+3$

e) $f(x)=\frac{16}{x}$, $f(x)=\frac{-0{,}1}{x}$

3.1.7 a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y=-\frac{10}{x+7}-9$.

b) Podaj współrzędne wszystkich punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y=\frac{-6}{x-12}+8$ oraz $y=\frac{6}{x+7}-15$.

Odpowiedź:

a) $(\mathbf{-7,-9})$

b) $(\mathbf{12,8}),(\mathbf{-7,8}),(\mathbf{-7,-15}),(\mathbf{12,-15})$

Proporcjonalność odwrotna

Definicja: Proporcjonalność odwrotna[42]

Proporcjonalność odwrotna to taka zależność między dwiema zmiennymi wielkościami x i y, w której iloczyn tych wielkości jest stały. Czyli:

$x\cdot y=a$, gdzie $a,x,y\in R\ /\{0\}$.

42 www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homograficzna, 15.03.2013.

Wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**.

Z powyższego wzoru możemy obliczyć x w zależności od y, wtedy: $x = \frac{a}{y}$

oraz y w zależności od x, wtedy: $y = \frac{a}{x}$

Zauważ, że ostatni wzór to wzór funkcji omawianej w poprzednim podrozdziale tego tematu.

Przykład 4

Pan Nowak ma przeczytać książkę, która liczy 520 stron. Postanowił, że codziennie będzie czytał taką samą liczbę stron. Liczba x przeczytanych dziennie stron oraz liczba y dni w czasie, w którym Pan Nowak przeczytał książkę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, ponieważ:

$$x \cdot y = 520$$

Jeśli Pan Nowak czyta więcej stron dziennie, to czas czytania książki jest krótszy. Czytając 20 stron dziennie, Pan Nowak przeczyta książkę w ciągu 26 dni, zaś przy czytaniu 65 stron dziennie, przeczyta ją w ciągu 8 dni.

Mamy stałą wartość iloczynu $20 \cdot 26 = 65 \cdot 8 = 520$.

Liczba dni czytania y zależy od liczby przeczytanych stron x w sposób $y = \frac{520}{x}$.

Przykład 5

Weźmy podstawowy wzór fizyczny:

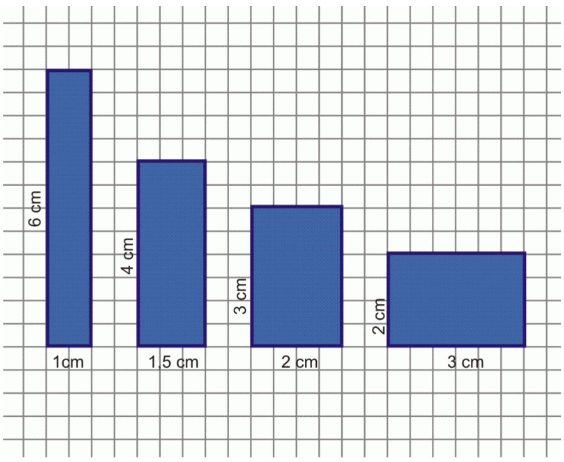
$$v = \frac{s}{t}$$

Zakładamy, że droga (s) jest stała, a prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do czasu.

Np. jedzie samochód z miasta A do miasta B. Im szybciej jedzie, tym mniej czasu mu to zajmie. Odległość między tymi miastami się nie zmienia, czyli droga (s) jest wielkością stałą.

Przykład 6

Na rysunku poniżej przedstawiono prostokąty o polu $6\ \mathrm{cm}^2$



Rysunek 3-5. Prostokąty o równym polu

Przy stałym polu prostokąta im większa jest długość jednego jego boku, tym mniejsza jest długość drugiego.

Jeśli długość jednego boku prostokąta **zwiększymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 2,5 razy;
- 5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 5 razy;
- 6 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 6 razy.

I odwrotnie, jeśli długość jednego boku prostokąta **zmniejszymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 2,5 razy;
- 5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 5 razy;
- 6 razy, to jego drugi bok zwiększy się 6 razy.

➡ **Zauważ, że pole prostokąta jest stałe i równe iloczynowi długości jego boków.**

Przykład 7[43]

Samochód jadąc ze stałą prędkością, pokonuje pewną drogę w ciągu 6 godzin. Z jaką prędkością powinien jechać motocyklista, aby tę samą trasę przejechać w ciągu 3 godzin?

Zauważ, że stała jest długość trasy, czyli droga, jaką pokonują samochód i motocyklista. Droga jest równa iloczynowi prędkości przez czas jazdy.

Odpowiedź: Motocyklista ma pokonać tę samą trasę w ciągu 3 godzin, czyli w czasie 2 razy krótszym niż samochód. Zatem jego prędkość powinna być 2 razy większa niż prędkość samochodu.

Wniosek:

- Jeśli jedna z wielkości rośnie (maleje), a równocześnie druga wielkość maleje (rośnie) tyle samo razy, to te wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi.**
- **Iloczyn** wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

43 www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne, 15.03.2103

ZADANIA

3.1.8 Sprawdź, czy wielkości podane w tabelce są odwrotnie proporcjonalne? Jeżeli tak, to podaj wartość współczynnika proporcjonalności.

x	0,3	1	3	2	0,2
y	4	1,2	0,4	0,6	6

Odpowiedź:

Aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne, ich iloczyn musi być stały, liczymy więc $x \cdot y$:

$0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$

$1 \cdot 1{,}2 = 1{,}2$

$3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$

$2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2$

Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości to $a = 1{,}2$.

3.1.9 Uzupełnij tabelkę tak, aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne.

x	3,6		0,1	144
y		0,6	36	

Odpowiedź:

x	3,6	6	0,1	144
y	1	0,6	36	0,025

3.1.10 Koło zębate o 120 zębach napędza koło zębate o 48 zębach. Ile razy obróciło się małe koło, gdy duże koło w tym czasie obróciło się 40 razy?

Odpowiedź: Małe koło obróciło się 100 razy.

3.1.11 Kierowca pokonał pewną trasę, jadąc ze średnią szybkością 90 km/h. O ile kilometrów na godzinę powinien zwiększyć szybkość, aby pokonać tę samą trasę w czasie krótszym o 25%?

Odpowiedź: Kierowca powinien zwiększyć szybkość o 30 km/h.

3.2 Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczej

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = a^x$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Jej nazwa pochodzi od tego, że x znajduje się w wykładniku.

Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza,** która przecina oś OY w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Kształt wykresu zależy od podstawy a.

Przypadek I[44]

Funkcja rosnąca w podstawie mająca liczbę większą od 1.

Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = 2^x$

Aby narysować wykres funkcji, w pierwszej kolejności tworzymy tabelę, zawierającą punkt (0, 1) oraz parę punktów położonych na lewo od tego punktu, oraz parę położonych na prawo.

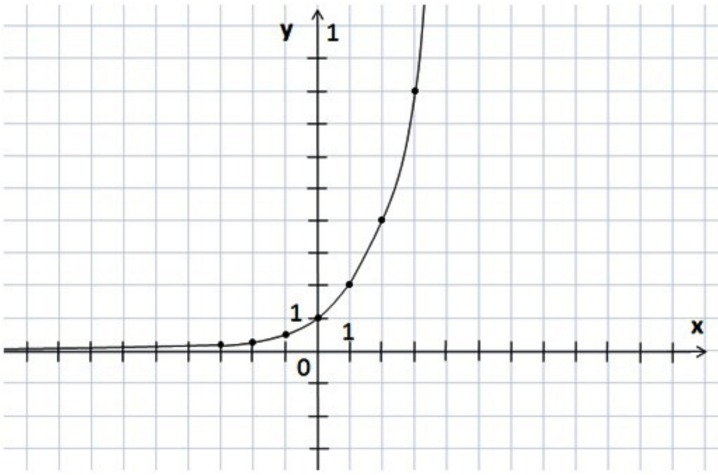
Trzy liczby na lewo od 0. Trzy liczby na prawo od 0.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Następnie zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią.

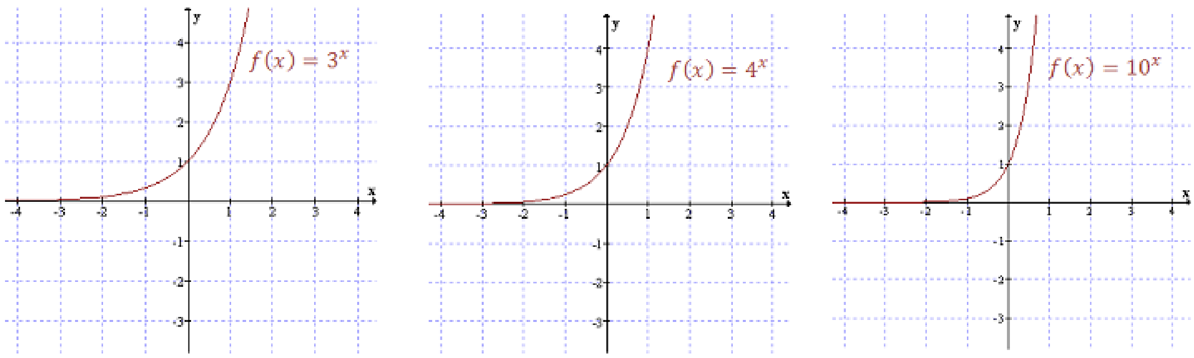
44 www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html, 12.03.2013.

UWAGA!!!! Linia wykresu nie może przeciąć osi OX.



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $\boldsymbol{a} > 1$.

Przykładowo:



Rysunek 3-6. Wykresy funkcji wykładniczych, a > 0

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a > 1}$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = \boldsymbol{R}_{+}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $\boldsymbol{rosnąca}$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x)} > 0$, gdy $\boldsymbol{x} \in (-\infty;\ +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

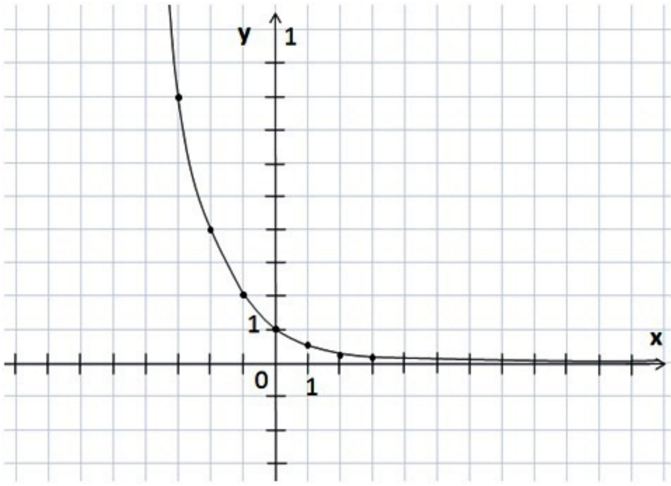
Przypadek II

Funkcje mające w podstawie ułamek.

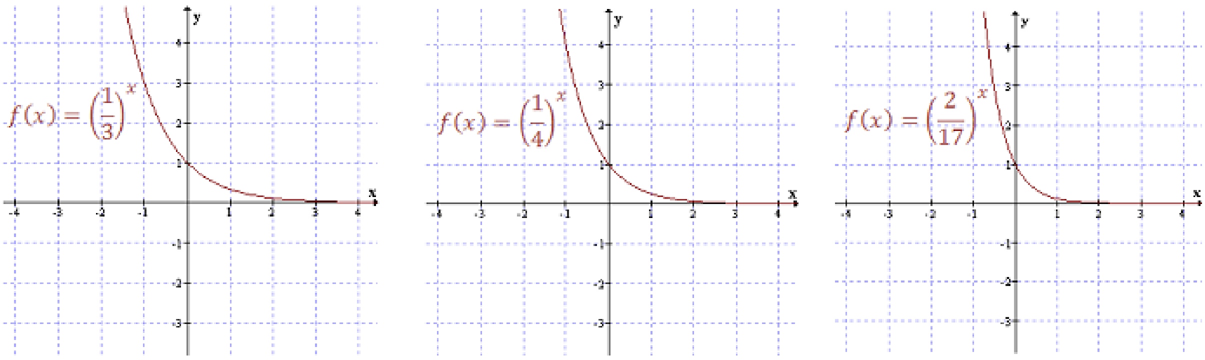
Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Postępujemy dokładnie w ten sam sposób, jak dla funkcji mającej w podstawie liczbę większą od 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $a < 1$. Przykładowo:



Rysunek 3-7. Wykresy funkcji wykładniczych, a < 0

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a < 1}$:

1. Dziedzina: $D = R$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R_+$.
3. Monotoniczność: funkcja jest ***malejąca***.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty;\ +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $y = 0$.

Funkcje wykładnicze – przesunięcie

Funkcje wymagające przesuwania prostszych przypadków wzdłuż osi układu.

Przykład:

$f(x) = 2^{x-1} - 4$

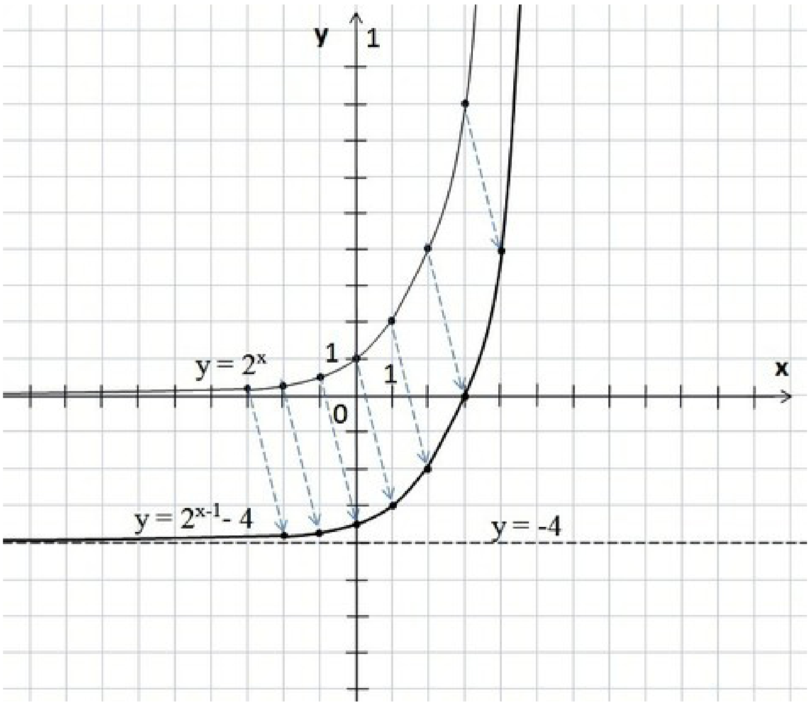
W celu narysowania powyższej funkcji, w pierwszej kolejności rysujemy prostszą funkcję:

$f(x) = 2^x$

W tym przypadku będziemy wykres funkcji $y = 2^x$ przesuwać o wektor $[1, -4]$ (przesuwamy wykres o 1 jednostkę w prawo i 4 jednostki w dół).

UWAGA:

W przypadku tej funkcji asymptota pozioma również przesunie się o 4 jednostki w dół, czyli będzie miała wzór $y = -4$.



Dla przypadków, gdy wykres otrzymujemy poprzez przesunięcie o wektor, asymptota znajduje się na wysokości, która wynika z przesunięcia wykresu funkcji o określoną liczbę jednostek w górę lub w dół.

UWAGA!!!!

Gdy funkcja ma miejsce zerowe, należy je obliczyć, przyrównując wzór funkcji do zera. Otrzymujemy wówczas równanie wykładnicze.

Określenie, czy funkcja ma miejsce zerowe, nie wymaga rysowania wykresu. Wystarczy stwierdzić, czy podczas rysowania będziemy przesuwać wzór funkcji w dół, czy nie. Tylko funkcje wymagające przesuwania w dół podczas rysowania mają miejsce zerowe.

Przykład:

Obliczymy miejsce zerowe funkcji:

$f(x) = 2^{x+7} - 16$

Rysując tę funkcję, wykres funkcji $f(x) = 2^x$ musielibyśmy przesunąć o 7 jednostek w lewo i 16 w dół. Wynika stąd, że ta funkcja ma miejsca zerowe.

Aby je obliczyć, wystarczy wzór funkcji przyrównać do zera.
$2^{x+7} - 16 = 0$

$2^{x+7} = 16$

$2^{x+7} = 2^4$ teraz możemy pominąć podstawy i przyrównać wykładniki.
$x + 7 = 4 \Rightarrow x = -3$

Odpowiedź: Funkcja ma miejsce zerowe dla $x = -3$.

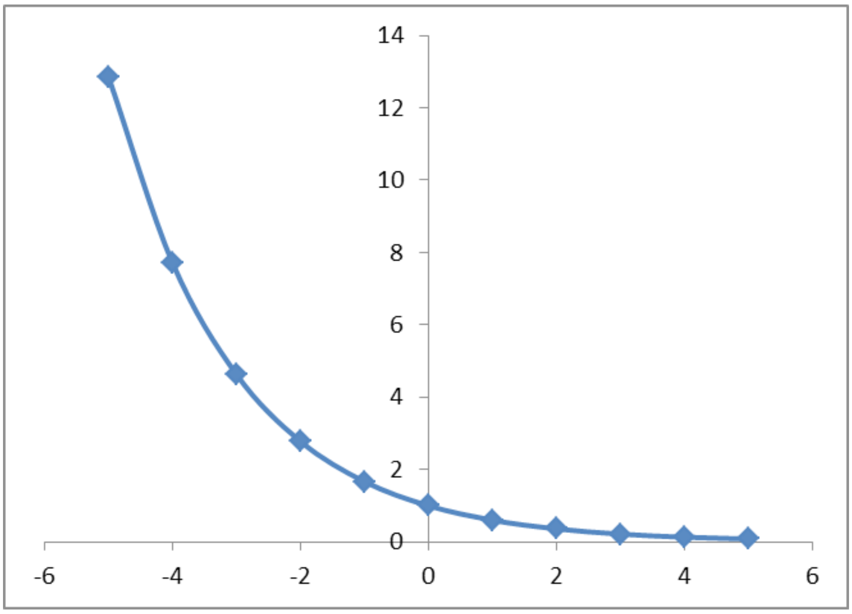
ZADANIA

3.2.1 Narysuj wykresy następujących funkcji:

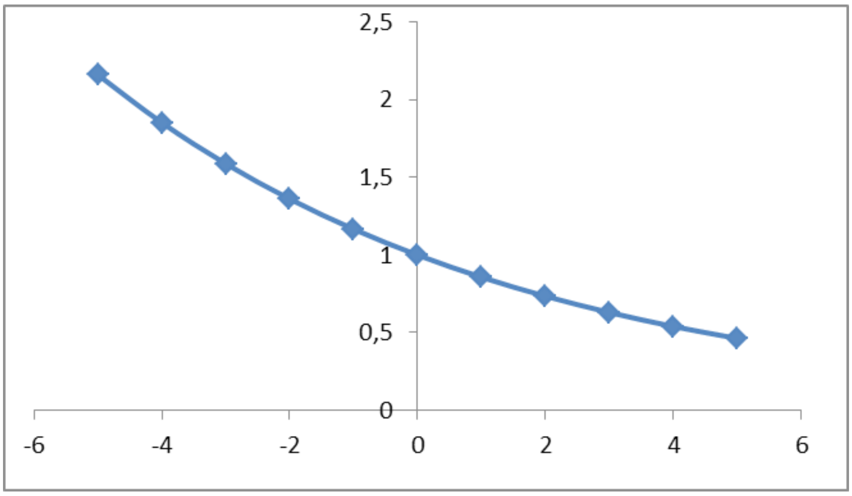
a) $f(x) = (0{,}6)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$ c) $f(x) = 10^x$

Odpowiedzi:

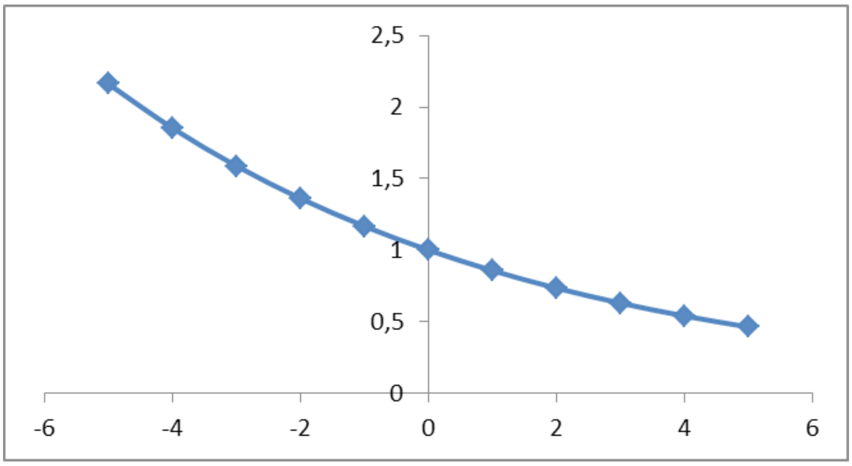
a)



b)



c)

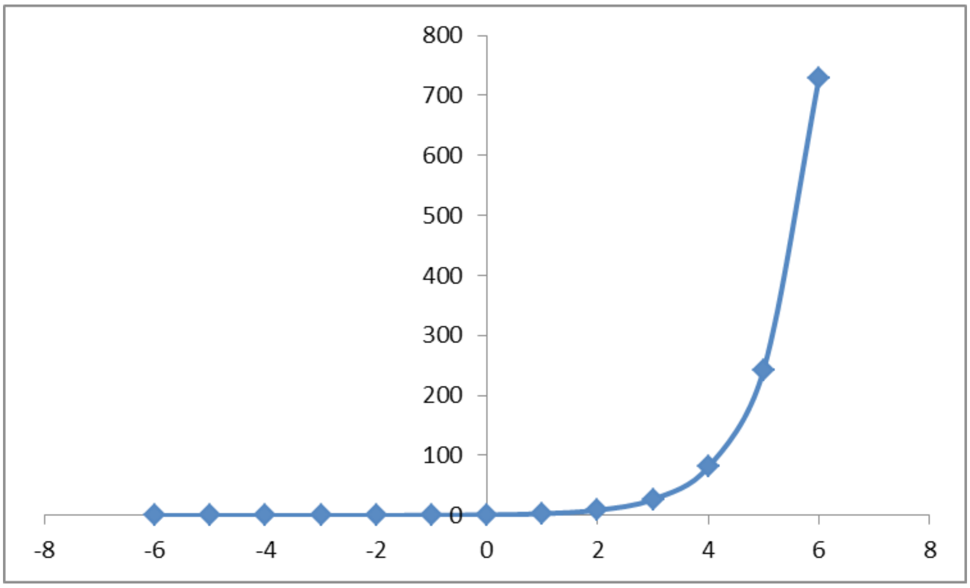


3.2.2 Narysuj wykres funkcji $f(x)=3^x$, a następnie wykresy funkcji:

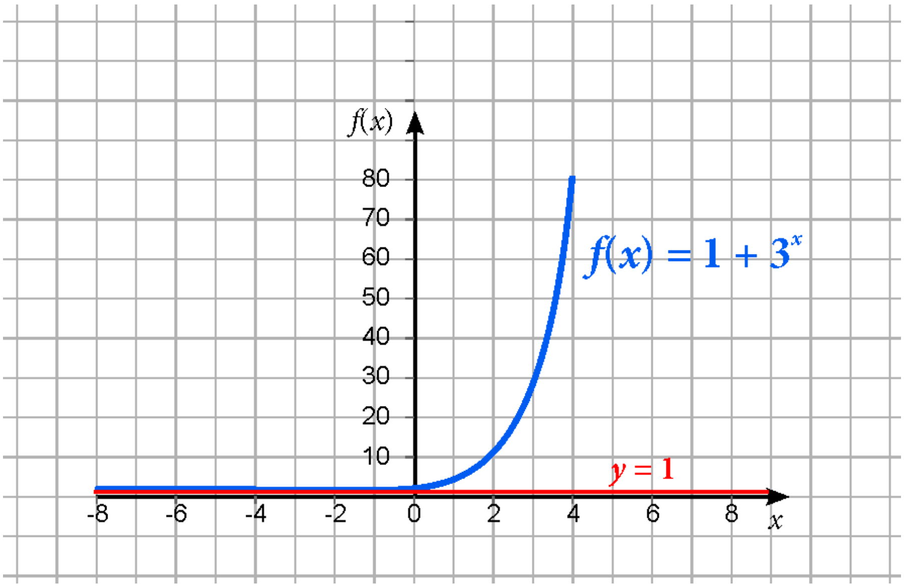
a) $f(x)=1+3^x$ b) $f(x)=-4+3^x$ c) $f(x)=3^{x+2}$ d) $f(x)=3^{x-3}$

e) $f(x)=-3^x$ f) $f(x)=4-3^x$ g) $f(x)=9\cdot 3^x$

Odpowiedź: wykres $y=3^x$

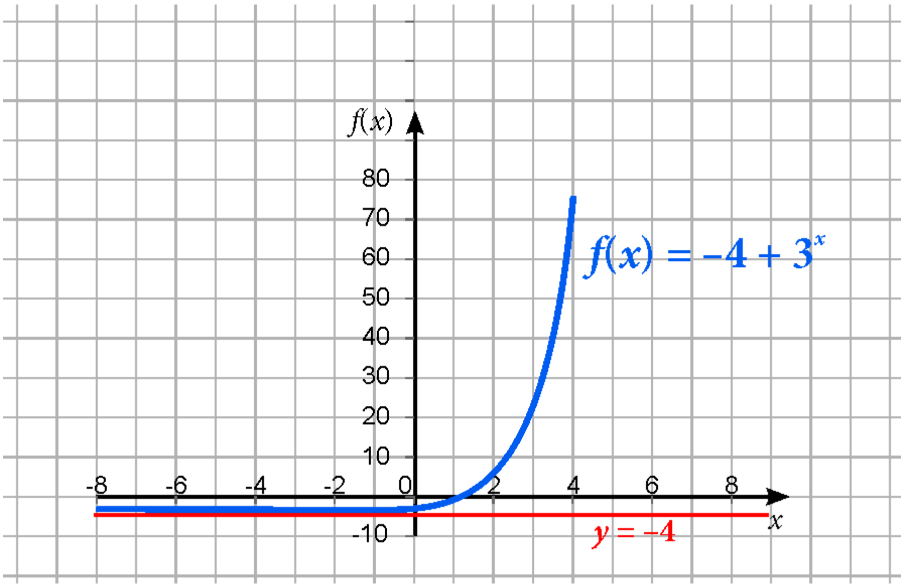


a)



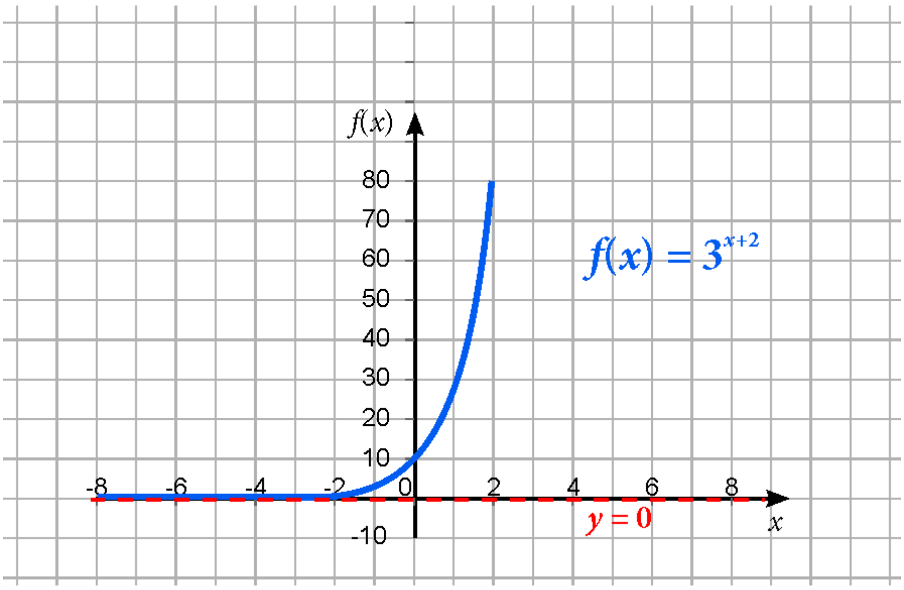
$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = 1 + 3^x$
$y = 1$

b)



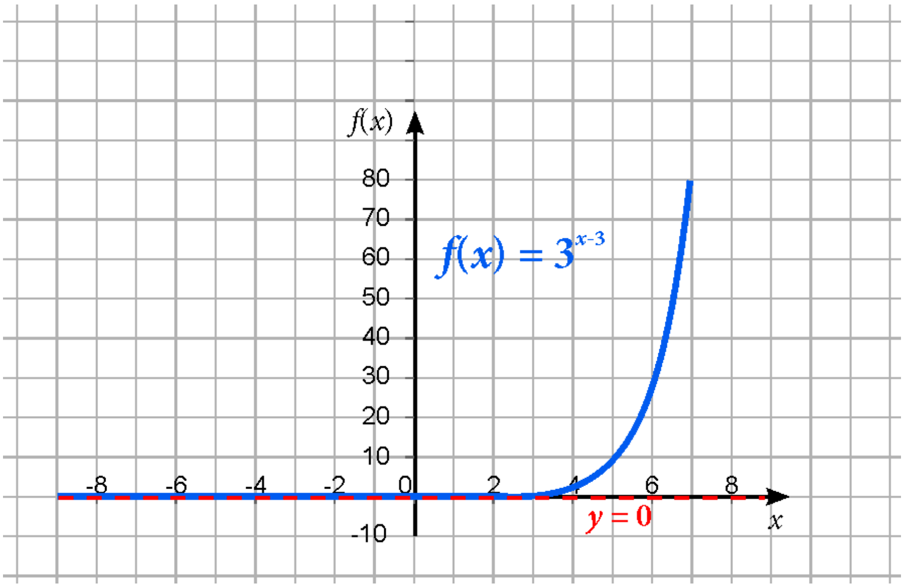
$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = -4 + 3^x$
$y = -4$

c)



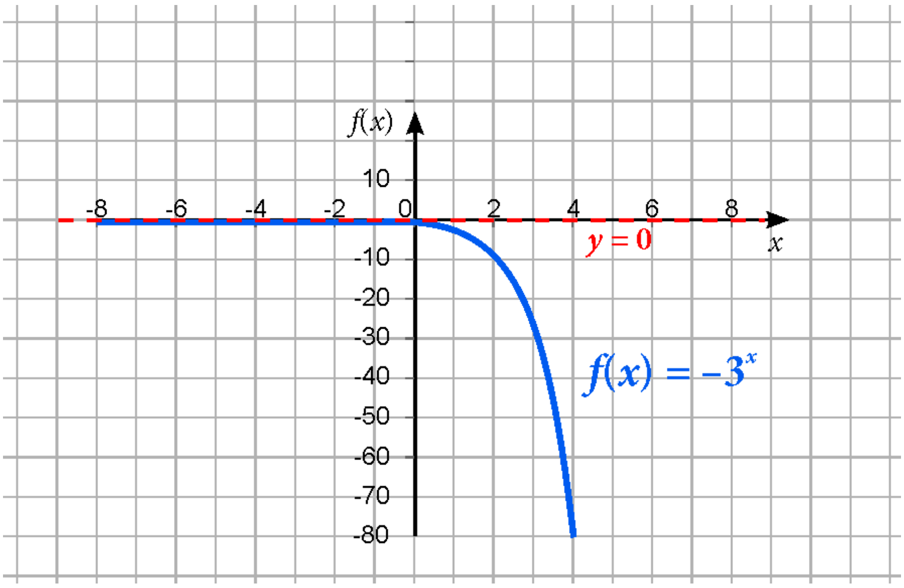
$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = 3^{x+2}$
$y = 0$

d)



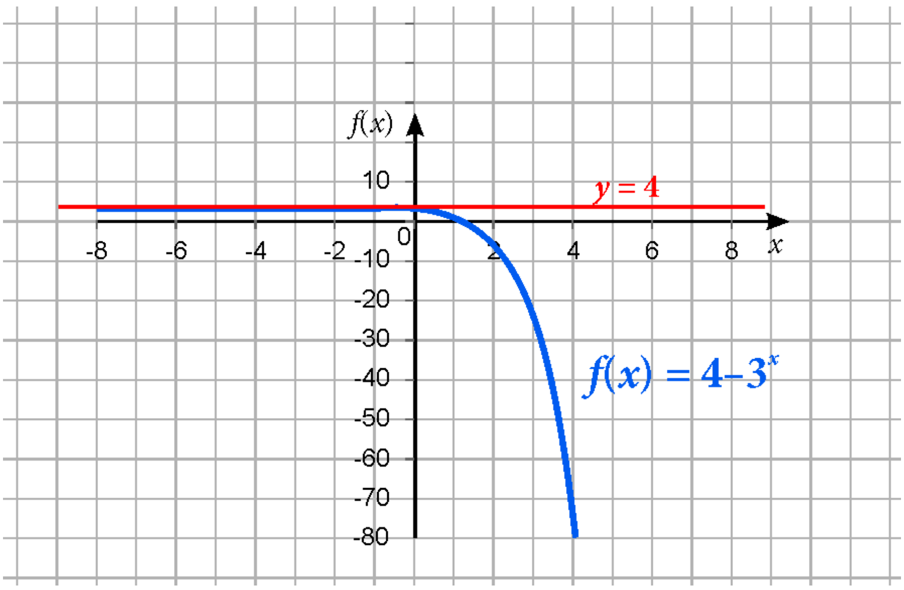
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
f(x) = 3^(x-3)
y = 0

e)



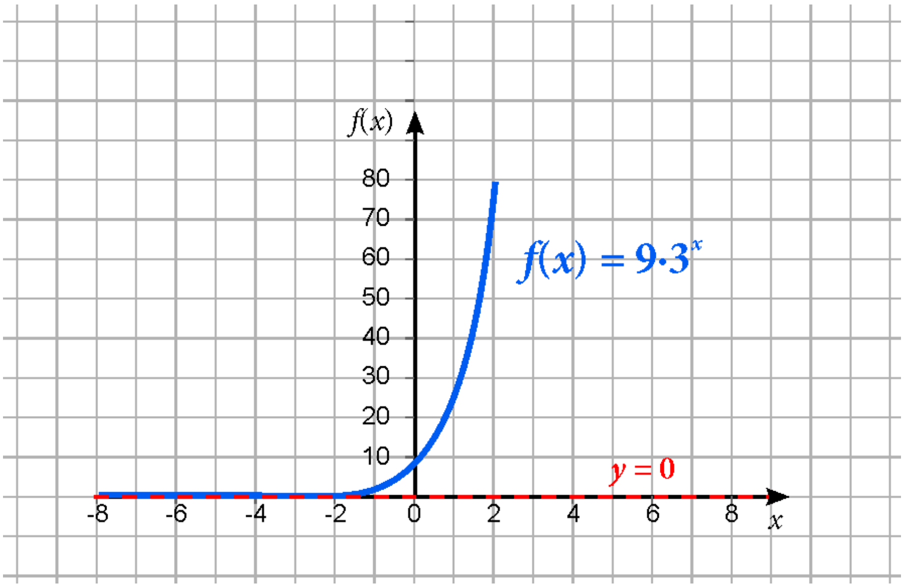
f(x)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
y = 0
f(x) = –3^x

f)



f(x)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
y = 4
f(x) = 4–3^x

g)



3.2.3 Dane są funkcje:

$$j:(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^{x}-5 \quad k:(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \quad l:(x)=6^{x+4}$$

Które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) przyjmują tylko wartości dodatnie,

c) mają asymptotę $y=0$,

d) mają miejsca zerowe,

e) przecinają oś. y

Odpowiedź:

a) l b) k, l c) k, l

d) j e) j, k, l

3.2.4 Podaj równanie asymptoty funkcji $f(x)$, określonej wzorem:

a) $f(x)=5^{x-2}$ b) $f(x)=0{,}3^{x+3}-4$ c) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-1$

d) $f(x)=5^{x}+5$ e) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}-4$

Odpowiedź:

a) $y=0$ b) $y=-4$ c) $y=-1$

d) $y=5$ e) $y=-4$

3.2.5 Napisz wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A = (3, \frac{1}{8})$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 2) - 1$.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x)$.

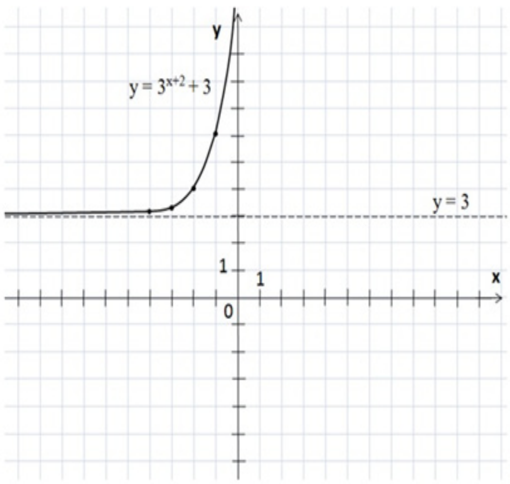
c) Dla jakich argumentów funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

Odpowiedź:

a) $a = \frac{1}{2}$, b) $x = -2$; c) $x > -2$

3.2.6 Narysuj wykres funkcji i określ jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność, miejsce zerowe oraz asymptotę):

$f(x) = 3^{x+2} + 3$



Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.

Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = (3, +\infty)$.

Funkcja rosnąca.

Miejsce zerowe: brak.

Asymptota: $y = 3$.

3.3 Funkcja logarytmiczna i jej własności*

W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje o postaci $y = \log_a x$. Takie funkcje nazywamy **funkcjami logarytmicznymi**.

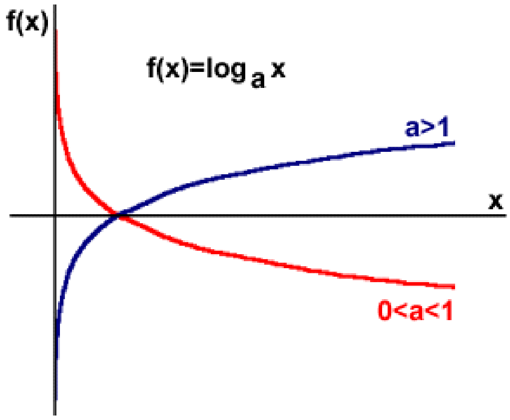
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = \log_a x$ gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

Dziedziną każdej funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

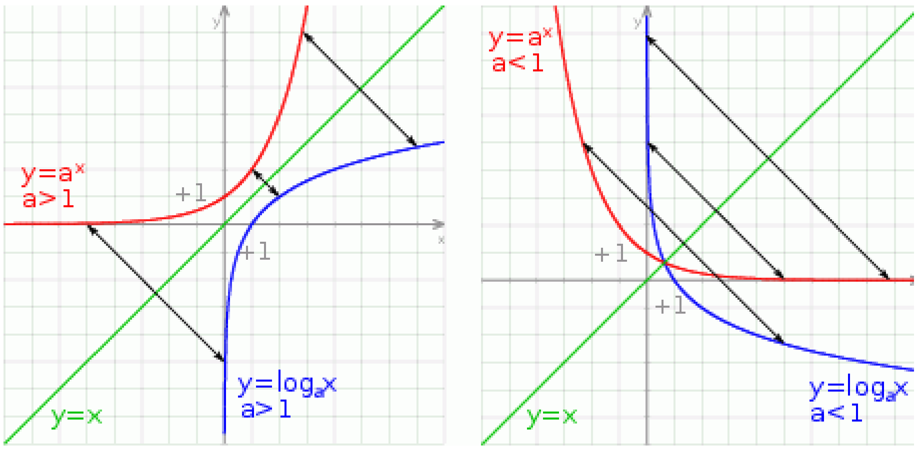
Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się **krzywą logarytmiczną**.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją malejącą dla $a \in (0, 1)$, natomiast dla $a \in (1, +\infty)$ jest funkcją rosnącą.



Rysunek 3-8. Wykresy funkcji logarytmicznych

Funkcja logarytmiczna $\boldsymbol{f(x) = log_a\, x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = ax$. Wykresy tych funkcji są symetryczne względem prostej $\boldsymbol{f}(x) = x$.

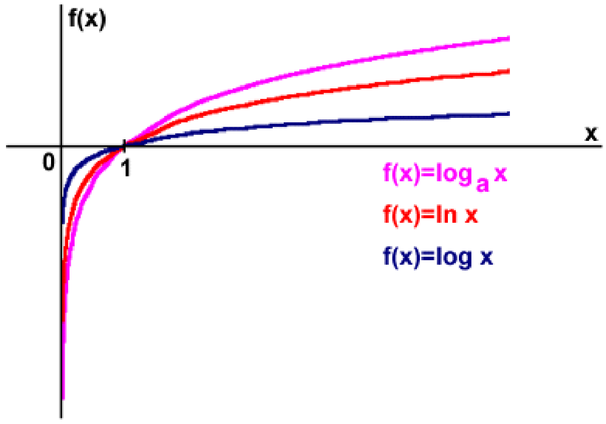


Rysunek 3-9. Funkcja wykładnicza a logarytmiczna

Ciekawostka

Wiadomo, że w zależności od podstawy, istnieją trzy grupy logarytmów:

- logarytm przy dowolnej podstawie – $\mathbf{log}_a\, \boldsymbol{x}$
- logarytm przy podstawie dziesiętnej (***dziesiętne***) – $\mathbf{log}_{10}\, \boldsymbol{x = log\, x = lg\, x}$
- logarytm przy podstawie z ***e (liczby Nepera e = 2,718281828...)*** – $\mathbf{log}_e\, \boldsymbol{x = ln\, x}$



Rysunek 3-10. Wykres funkcji logarytmicznej przy podstawie z e

Symbol lnx jest symbolem logarytmu naturalnego i oznacza logarytm o podstawie $a = e(e \approx 2{,}7)$.

$lnx = \log_e x$

$ln1 = 0,$ bo $e^0 = 1$

$lne = 1$, bo $e^1 = e$

$ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$, bo $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

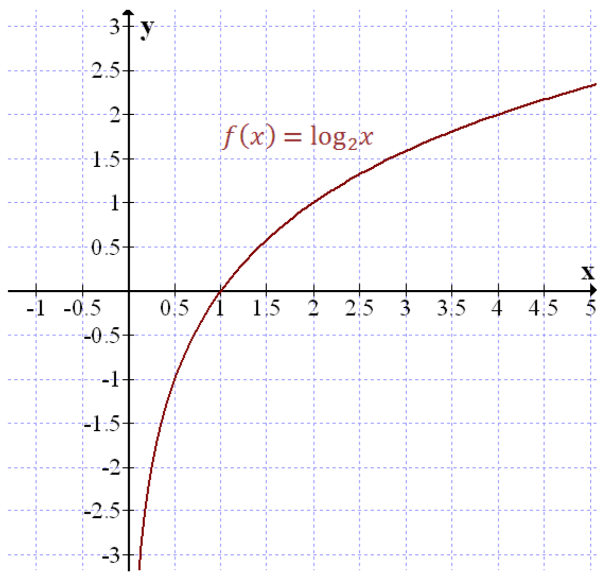
Funkcja logarytmiczna i jej własności*

Przypadek I [45] – dla $a > 1$

Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_2 x$. Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x. Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y=log^2x	-2	-1	0	1	2

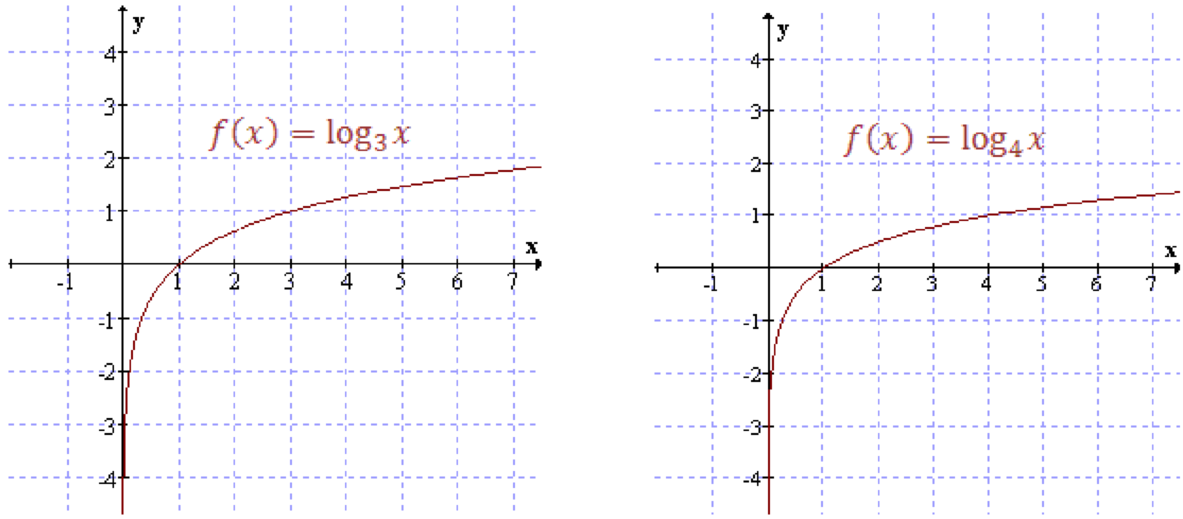
Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



45 Przypadek I i II: www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php, 17.03.2013.

Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a > 1$.

Przykłady:



Rysunek 3-11. Wykres funkcji logarytmicznych, $a > 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a > 1$:

1. Dziedzina: $D = R_+$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R$.
3. Monotoniczność: funkcja jest ***rosnąca***.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (1; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: $x = 1$.
6. Oś OY jest asymptotą pionową, czyli prosta $y = 0$.

Przypadek II – dla $a < 1$

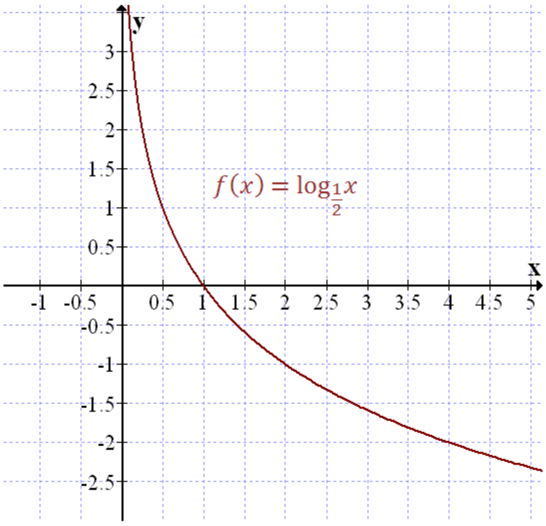
Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x.

Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

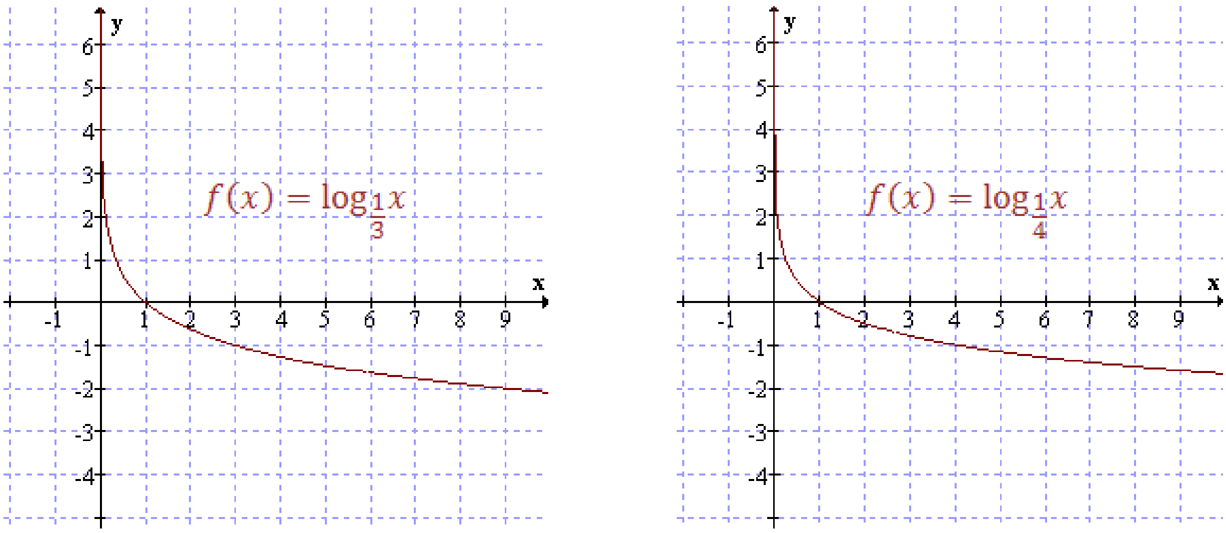
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log^2 x$	2	1	0	-1	-2

Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $\boldsymbol{a} < 1$.

Przykłady:



Rysunek 3-12. Wykresy funkcji logarytmicznych, $0 < a < 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a < 1$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D = R_+}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW = R}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $\boldsymbol{malejąca}$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x) > 0}$, gdy $\boldsymbol{x \in (0;\ 1)}$.
5. Miejsca zerowe: $\boldsymbol{x = 1}$.
6. Oś OY jest asymptotą pionową, czyli prosta $\boldsymbol{y = 0}$.

ZADANIE

3.3.1 Podaj współrzędne punktów symetrycznych względem prostej $y = x$ do punktów:

a) $A = (1{,}5), B = (4, -2), C = (-5, -1), D = (0, -3), E = (10{,}0)$

3.4 Szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznej*

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw.

ZADANIA

3.4.1. Narysuj wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \log_2(x - 3)$

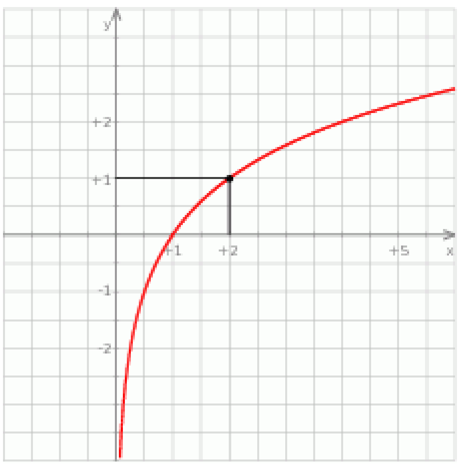
b) $y = \log_2(5 + x)$

c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = -4 + \log_2 x$

e) $y = \log_2(x + 1)$

3.4.2. Dany jest wykres funkcji logarytmicznej f.



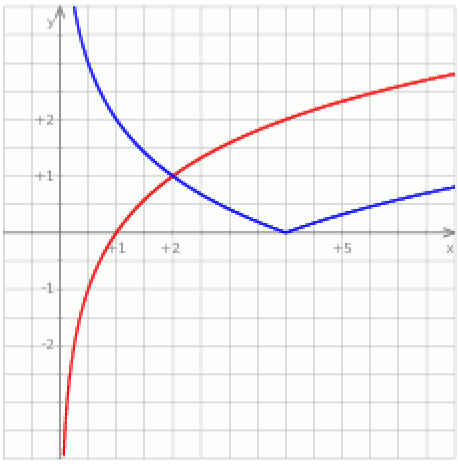
a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.

c) Odczytaj z rysunku zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są nie mniejsze od wartości funkcji f.

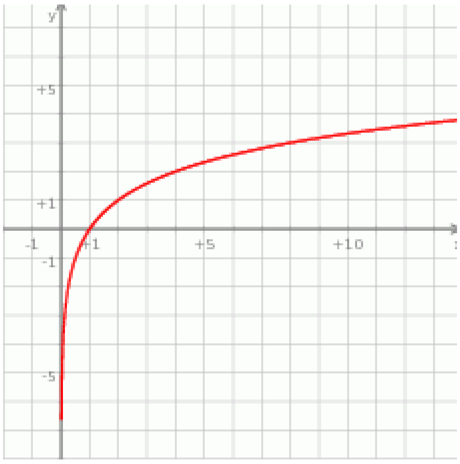
Odpowiedź:

a) $f(x) = \log_2 x$



b) że $g(x) \geq f(x)$ dla $x \in (0, 2\rangle$.

3.4.3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.



a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p. b) Oblicz $f(0{,}125)$.

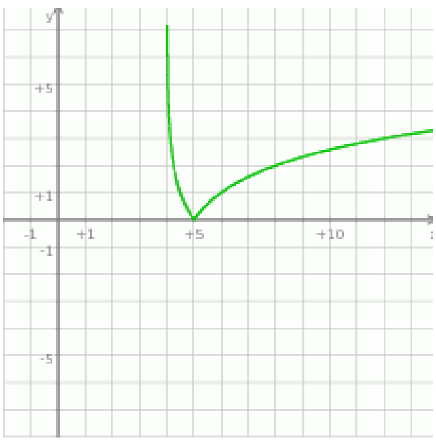
c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x-4)|$. d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.

Odpowiedź:

a) $p = 2$

b) $\log_2(0{,}125) = -3$

c) Wykres rys.



d) $x = 5$

3.5 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne w zjawiskach fizycznych i chemicznych

Teraz nauczę się:

- Posługiwać funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- Posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Zastosowanie funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym

Przykład 1

Model wykładniczy

Niech funkcja $f(t), t \geq 0$ opisuje pewną wielkość zmieniającą się w czasie. Wielkość ta zmienia się zgodnie z **modelem wykładniczym**, jeśli:

$f(t) = b \cdot a^t$, gdzie $a > 0, a \neq 1$ i $t \geq 0$.

UWAGA!!!

Liczby a i b są na ogół wyznaczane doświadczalnie.

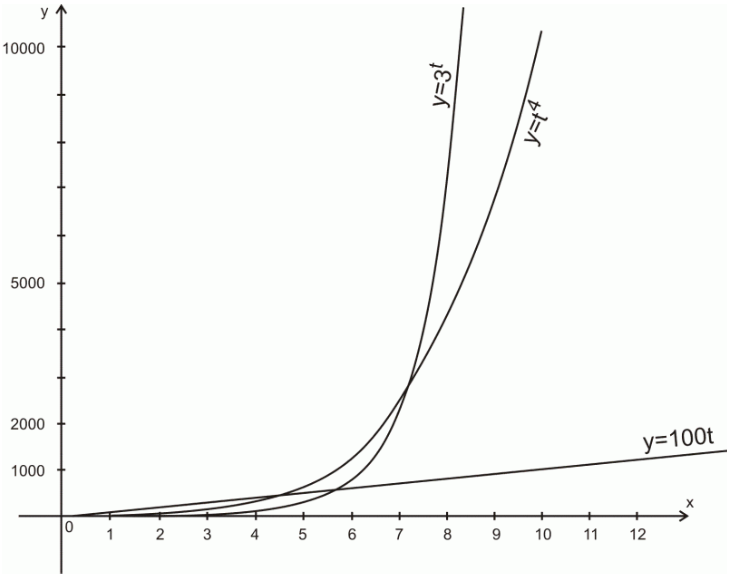
Jeśli $a > 0$, to mamy do czynienia ze wzrostem wykładniczym.

Wzrost wykładniczy jest wzrostem bardzo szybkim. Często nazywa się go wzrostem gwałtownym. Jest on znacznie szybszy nie tylko od wzrostu liniowego opisanego przez funkcję $g(t) = at, a > 0$, ale także od wzrostów opisanych przez funkcje potęgowe $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

Dla małych wartości czasu wzrost wykładniczy może być nawet wolniejszy niż wzrost liniowy, ale począwszy od pewnego momentu (różnego dla różnych zjawisk) tempo wzrostu krzywej z modelu wykładniczego jest już znacznie większe niż w przypadku modeli opisywanych przez funkcje $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

UWAGA!!!

Funkcja rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, której wykres jest w tym przedziale „podobny” do wykresu funkcji wykładniczej, jest funkcją rosnącą coraz szybciej, czyli tempo wzrostu funkcji jest szybkie.



Rysunek 3-13. Wzrost wykładniczy

Z przedstawionego wykresu odczytujemy, że dla $t > 8$ wartości funkcji $f(t) = 3^t$ zaczynają przewyższać wartości funkcji $g(t) = 100t$ i $h(t) = t^4$ i im większy jest czas, tym różnice pomiędzy wartościami tych funkcji są większe.

Dla $a \in (0;1)$mamy do czynienia ze spadkiem wykładniczym, czyli funkcja $f(t) = b \cdot a^t$ maleje coraz wolniej.

Dokonując pomiaru wartości wielkości opisanej ustalonym modelem wykładniczym, stwierdza się, że w stałych odstępach czasu zwiększają się one lub zmniejszają o ten sam procent.

Wiele zjawisk w przyrodzie odbywa się (przynajmniej w pewnej fazie ich trwania) według modelu wykładniczego. Są to między innymi: promieniotwórczość naturalna, wzrost lub spadek liczby populacji, stygnięcie ciał itd. Omówimy je w kolejnych przykładach i zadaniach.

Funkcję $f(t) = ba^t$ $f(t) = b \cdot a^t$ można przedstawić na wiele sposobów, tzn. można stosować do jej opisu różne podstawy a funkcji wykładniczej.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich i różnych od jedynki liczb a i c istnieje taka liczba $k \neq 0$, że funkcje $f(t) = ba^t$ i $g(t) = bc^{kt}$ są równe, tzn. $ba^t = bc^{kt}$, dla dowolnego $t > 0$

Uzasadnienie tego twierdzenia jest bardzo proste.

Należy znaleźć liczbę k, która dla każdej wartości $t \geq 0$, spełnia warunek $a^t = c^{kt}$.

Korzystając z własności potęg, otrzymujemy:

$a^t = (c^k)^t$ dla każdego $t \geq 0$.

Stąd $a = c^k$.

Korzystając z określenia logarytmu, obliczamy: $k = \log_c a$.

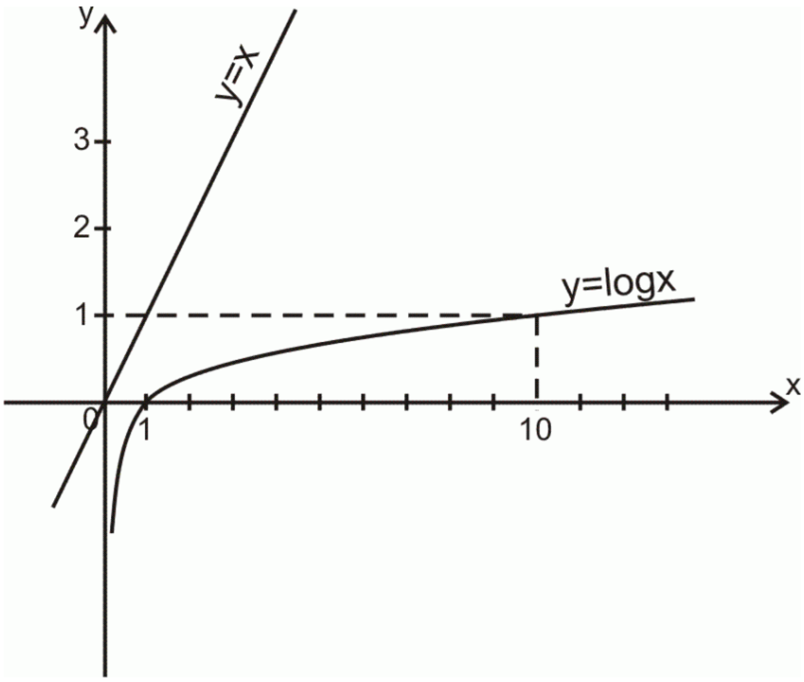
A więc istnieje liczba $k = \log_c a$ taka, że funkcję $f(t)$ można zastąpić funkcją $g(t)$.

Zastosowanie funkcji logarytmicznych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym[46]

Przykład 2

Skala logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x, a > 1, x > 0$, jest funkcją rosnącą. Jej wzrost jest jednak bardzo powolny, wolniejszy nawet od wzrostu liniowego.



Rysunek 3-14. Wykres funkcji $logx < x$ dla $x > 0$

Jeśli zakres wartości pewnej wielkości jest dodatni i bardzo szeroki, to wygodniej jest go podawać w skali.

Podanie konkretnej wartości w o pewnej wielkości oddaje jej obraz tylko wtedy, gdy możemy ją porównać z innymi wartościami, a szczególnie z najmniejszą wartością ω_0.

Iloraz $\frac{\omega}{\omega_0}$ mówi nam, ile razy wartość ω jest większa od najmniejszej wartości ω_0 przyjmowanej przez daną wielkość. Iloraz ten jest liczbą bezwymiarową i dużą przy szerokim zakresie wartości.

Zlogarytmowanie ilorazu $\frac{\omega}{\omega_0}$ prowadzi do tzw. **skali logarytmicznej** danej wielkości. Do logarytmowania używa się na ogół logarytmu dziesiętnego lub naturalnego.

Skala logarytmiczna jest więc przedstawieniem wartości w pewnej wielkości, np. natężenia, w następującej postaci podanej z użyciem logarytmu: $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ lub $k\ ln\frac{\omega}{\omega_0}$, gdzie: k – stała charakterystyczna dla zjawiska mierzonego przez wartości ω, ω_0 – najmniejsza z wartości przyjmowanych przez ω.

Mimo, że $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ i $k\ ln\frac{\omega}{\omega_0}$ są liczbami bezwymiarowymi, to często wprowadza się dla nich specjalne jednostki, właściwe dla danej dziedziny.

46 www.megamatma.pl, 17.03.2013.

Przykładami skal logarytmicznych są: **skala decybelowa w akustyce, skala Richtera określająca wielkości wstrząsów sejsmicznych, skala pH czy skala wielkości gwiazdowych.**

Wprowadzenie skali logarytmicznej jest nie tylko pomysłem matematycznym na to, aby bardziej przejrzyście przedstawić pewne dane.

Stwierdzono doświadczalnie, że nasze zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

Prawo Webera-Frechnera mówi, że wartość reakcji na bodźce takich zmysłów, jak: wzrok, słuch czy poczucie temperatury jest proporcjonalna do logarytmu tego bodźca.

Przykład 3

Poziom głośności dźwięku

Źródła dźwięku wysyłają dźwięki o różnym natężeniu. Dźwięki rozchodzą się w postaci fal dźwiękowych. Jeśli kilka źródeł dźwięku wysyła jednocześnie dźwięki, to ich natężenia sumują się.

Natężenie dźwięku I jest ilością energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu i przechodzącej przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej.

Jednostką natężenia dźwięku jest $\frac{W}{m^2}$ (wat na metr kwadratowy).

Natężenie dźwięku odpowiadające tzw. progowi słyszalności jest równe $I_0 = 10 - 12\frac{W}{m^2}$. Natężenia innych słyszalnych dźwięków są większe od I_0. Natężenie **szeptu** jest około 100 razy większe niż I_0, zaś natężenie dźwięku towarzyszące **wybuchowi petardy** to już wielkość rzędu $10^4\frac{W}{m^2}$, czyli że jest ono 10^{16} razy większe niż I_0.

Przy tak szerokim zakresie wartości natężenia dźwięku wprowadzenie skali logarytmicznej jest bardzo uzasadnione. W skali tej logarytmujemy iloraz $\frac{I}{I_0}$. Wielkość obliczoną za pomocą logarytmu dziesiętnego z ilorazu $\frac{I}{I_0}$ nazywa się **poziomem natężenia dźwięku** lub **poziomem głośności dźwięku.** Oznacza się ją literą L.

I tak przyjęto:

Wzór

Poziom głośności dźwięku:

$L = 10log\frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ – poziom słyszalności, I – natężenie dźwięku.

Jednostkami poziomu głośności są **bel i decybel**, oznaczane symbolami **B** i **dB.**

Dźwięk ma poziom głośności równy 1B, jeśli jego natężenie jest równe $10\ I_0$.

Natomiast $1\ dB = 0{,}1\ B$.

Decybele są powszechniej używanymi jednostkami poziomu natężenia dźwięku.

ZADANIA

3.5.1 Aktywność źródła promieniotwórczego określa liczbę atomów, która uległa rozpadowi w jednostce czasu **A** = $\frac{\Delta N}{\Delta t}$. Jednostką aktywności jest bekerel **(1 Bq =** $\frac{1}{s}$**)**. W poniższej tabeli zamieszczono wyniki pomiarów aktywności próbki pewnego pierwiastka promieniotwórczego.

$t(h)$	0	480	960	1200	1950
A (10^3Bq)	5	1,5	0,5	0,25	0,05

Przedstaw na wykresie zależność aktywności próbki tego pierwiastka od czasu.

3.5.2 Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu wapnia wynosi 6 miesięcy. W chwili początkowej próbka zawierała 40 mg wapnia. Oblicz, ile wapnia próbka zawierała:

a) dwa lata wcześniej,

b) po trzech latach.

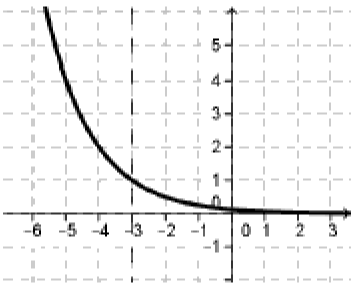
Odpowiedź:

a) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{2}{0,5}} = 40\ \text{mg} \cdot 2^4 = 640\ \text{mg}$

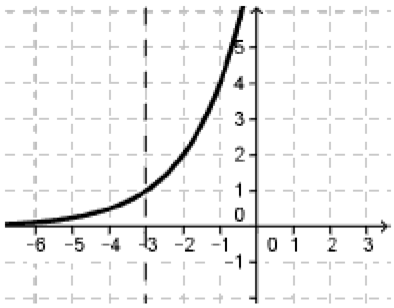
b) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{-3}{0,5}} = 40\ \text{mg} \cdot 2^{-6} = 0{,}625\ \text{mg}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

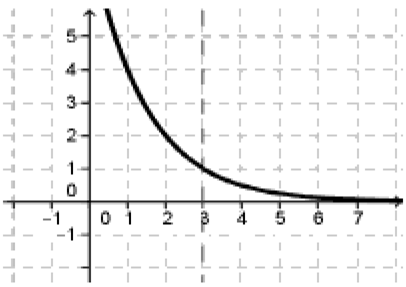
1.[47] Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-3}$ przedstawiony jest na rysunku



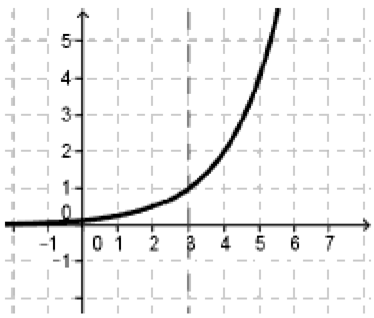
A.



C.



B.



D.

47 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 11.03.2013.

2.[48] Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3^{x+2} - 3$ jest zbiór:

a) $(-2, \infty)$ b) $(-3, -2)$ c) $(3, \infty)$ d) $(-3, \infty)$

3. Wartością funkcji $f(x) = 2^x$ jest liczba:

a) -8 b) -4 c) 0 d) 3

4. Zbiorem wartości funkcji $(x) = 2^x + 3$ jest przedział:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $\langle 0, +\infty)$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-3, +\infty)$

5. Funkcją malejącą jest funkcja:

a) $f(x) = (0{,}5)^{x-1}$ b) $f(x) = (0{,}5)^{-x}$ c) $f(x) = -(0{,}5)^x$ d) $f(x) = (0{,}5)^{2-x}$

6. Funkcja $f(x) = 9^x$ dla argumentu $x = -\frac{3}{2}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{3^3}$ b) 27 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$ d) $\frac{1}{81}$

7. Funkcja $(x) = 8^x$dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $0{,}25$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ d) 4

8. Dla jakiego argumentu $y = 2^x$ przyjmuje wartość 64?

a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 4$

9. Populacja bakterii w próbce podczas pewnego eksperymentu zmniejsza się o 2% dziennie. Jeśli przyjmiemy, że na początku doświadczenia populacja bakterii liczyła A sztuk, to po upływie t dni liczbę bakterii $p(t)$ można opisać wzorem:

a) $p(t) = 0{,}02^t \cdot A$ b) $p(t) = 0{,}98^t \cdot A$ c) $p(t) = 2^t \cdot$

Zadania zamknięte, wydawnictwo Nowa Era[49]

10. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = x$ przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, wynosi:

a) $2\sqrt{2}a$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{8a}$ d) $a\sqrt{2}$

11. Punkt $P = (-3, 1/8)$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{-x}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

48 Zadania 2-9: zaczerpnięte http: //www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
49 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf, 11.03.2013.

12. Wskaż funkcję rosnącą:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

13. Punkt $P = \left(\log_2 \frac{1}{4};\ \log_{\frac{1}{3}} 81\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 2x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = -2x$

ZADANIA OTWARTE

1. **(5 pkt)** Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - a) + b$. Wyznacz wartości parametrów a i b, jeśli wiesz, że dziedziną funkcji jest przedział $(5, +\infty)$ i do wykresu należy punkt $A = \left(5\frac{1}{8}, 9\right)$. Podaj wzór tej funkcji.

4 Stereometria

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- Obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- Zamieniać jednostki objętości.

Zamiana jednostek objętości:

$1cm^3 \rightarrow 1\,000\,mm^3$

$1dm^3(1\,litr) \rightarrow 1000\,cm^3$

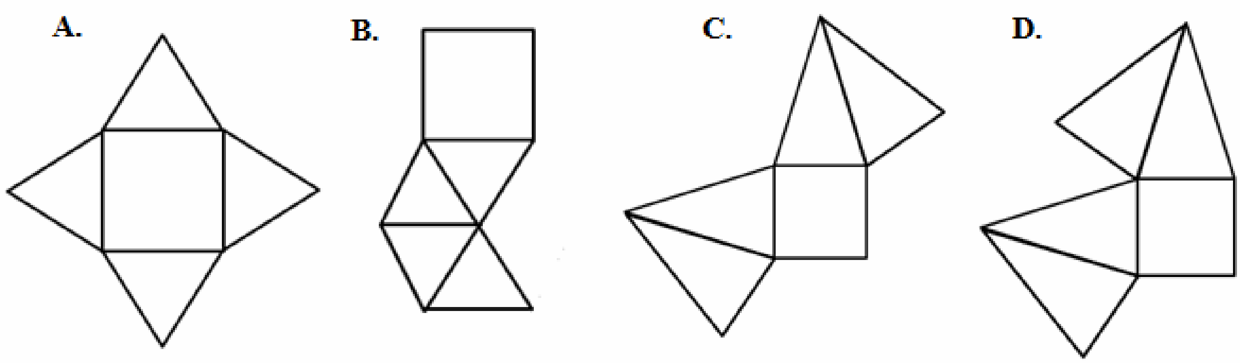
$1cm^3 \rightarrow 1000\,mm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,mm^3$

$1m^3 \rightarrow 1\,000\,dm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,cm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,000\,mm^3$

$1\,hektolitr \rightarrow 100\,litrów \rightarrow 100dm^3$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 Który rysunek nie przedstawia siatki ostrosłupa czworokątnego?



Zad.2 Podstawą graniastosłupa prawidłowego nie może być:

a) kwadrat b) sześciokąt foremny

c) prostokąt d) trójkąt równoboczny

Zad.3 Bok sześcianu ma długość 6 cm, więc długość jego przekątnej wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

Zad.4 Tworząca stożka ma długość 13 cm, a jego wysokość 5 cm. Wynika z tego, że promień podstawy ma długość:

a) $12\ cm$ b) $10\ cm$ c) $6\ cm$ d) $13\ cm$

Zad.5 Jeśli średnica kuli ma 8 cm, to pole powierzchni całkowitej tej kuli wynosi:

a) $16\ \pi$ b) $64\ \pi$ c) 32π d) $256\ \pi$

Zad.6 Przekrojem poprzecznym walca jest:

a) prostokąt b) kwadrat c) kula d) koło

Zad.7 Objętość kuli wynosi $36\pi\ cm^3$. Promień tej kuli ma długość:

a) $9\ cm$ b) $3\ cm$ c) $6\ cm$ d) $27\ cm$

Zad.8 Wiedząc, że wysokość walca wynosi $10\ cm$, a promień jego podstawy $0{,}4\ dm$, to pole jego podstawy jest równe:

a) $16\pi\ cm^2$ b) $1{,}6\pi\ dm^2$ c) $16\pi\ dm^2$ d) $0{,}16\pi\ cm^2$

Zad.9 Pole powierzchni sześcianu jest równe $294cm^2$. Krawędź tego sześcianu wynosi:

a) 7 b) 4 c) 8 d) 6

Zad.10 Które zdanie jest fałszywe:

a) $5\ cm^2 = 500\ mm^2$ b) $1\ ha = 10000\ m^3$

c) $3000\ mm^2 = 30cm^2$ d) $1\ a = 100\ m^2$

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	C	A	B	D	B	D	A	B

ZADANIA OTWARTE

1. Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 108 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli krawędź boczna ma długość 16 cm.

2. Ile litrów wody zmieści się w akwarium o wymiarach $3{,}5\ dm\ \times 0{,}6\ m\ \times 55\ cm$? Odpowiedź wyraź w postaci liczby naturalnej.

3. Oblicz wysokość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach 4 i 5, a pole powierzchni całkowitej wynosi 166.

4. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}cm$.

5. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jej pole powierzchni jest równe $1440\pi\ cm^2$.

Zadania otwarte – odpowiedzi

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	a – krawędź podstawy, b – krawędź boczna $3a + 3b = 108$ $3a + 3 \cdot 16 = 108$ $3a = 60$ $a = 20$ **Odpowiedź:** Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 20.
2	$a = 3{,}5\ dm$ $b = 0{,}6\ m = 6\ dm$ $c = 55\ cm = 5{,}5\ dm$ $V = a \cdot b \cdot c = 3{,}5\ dm \cdot 6\ dm \cdot 5{,}5\ dm = 115{,}5\ dm^3 = 115{,}5\ l$ **Odpowiedź:** W akwarium zmieści się $115\ l$ wody.
3	a, b – krawędzie podstawy prostopadłościanu, x – wysokość prostopadłościanu $a = 4, b = 5\ , P_c = 166$ $2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x = 166$ $18x = 126 \quad \Rightarrow x = 7$ **Odpowiedź:** Wysokość prostopadłościanu wynosi 7.
4	$d = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow a = 5$ $V = a^3 = 5^3 = 125$ $P_c = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ **Odpowiedź:** Objętość sześcianu wynosi $125\ cm^3$, a jego pole powierzchni całkowitej $150\ cm^2$.
5	$R - R -$ promień kuli $P_c = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1440\pi\ /: 4\pi$ $r^2 = 360$ $r = 6\sqrt{10}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(6\sqrt{10}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 10\sqrt{10} = 2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$ **Odpowiedź:** Objętość kuli wynosi $2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$.

4.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni

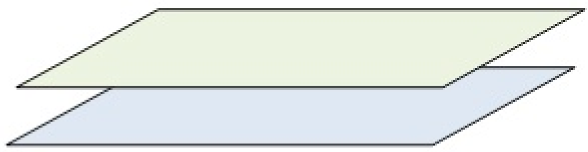
Teraz nauczę się:

- Określać wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni;
- Określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu.

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

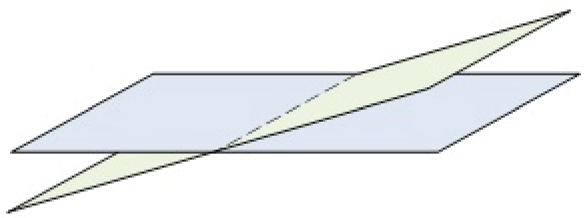
Możliwe są następujące przypadki wzajemnego położenia dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeniach.

Płaszczyzny równoległe



Rysunek 4-1. Płaszczyzny równoległe

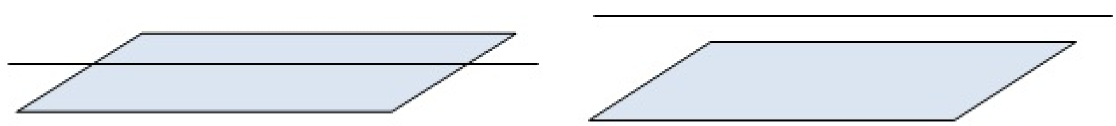
Płaszczyzny przecinające się



Rysunek 4-2. Płaszczyzny przecinające się

Prosta i płaszczyzna mogą znajdować się względem siebie w następującym położeniu:

Prosta równoległa do płaszczyzny

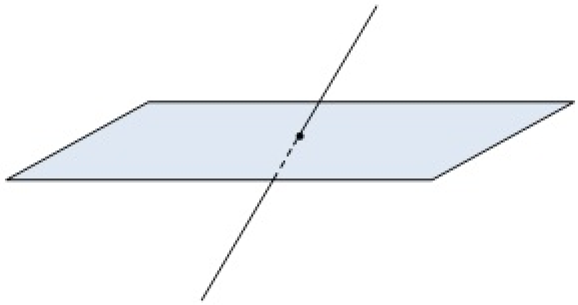


Prosta zawiera się w płaszczyźnie

Prosta nie zawiera się w płaszczyźnie

Rysunek 4-3. Prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta przecina płaszczyznę

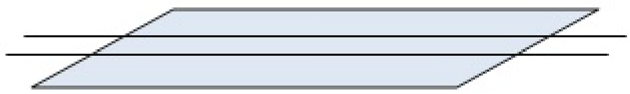


Rysunek 4-4. Prosta przecinająca płaszczyznę

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

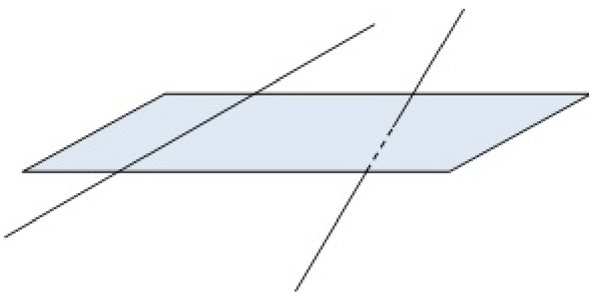
Dwie proste w przestrzeni mogą być:

- Równoległe



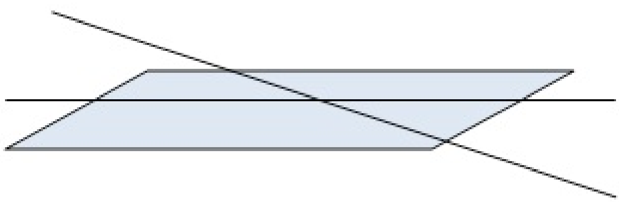
Leżą na płaszczyźnie
i nie mają punktów wspólnych

- Skośne



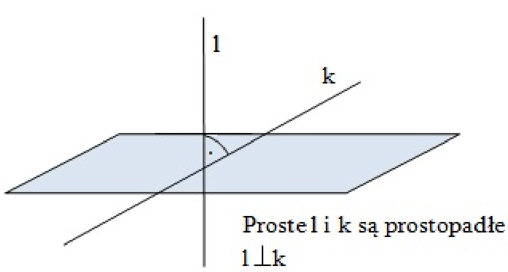
Leżą na różnych płaszczyznach i nie mają punktów wspólnych

- Przecinające się

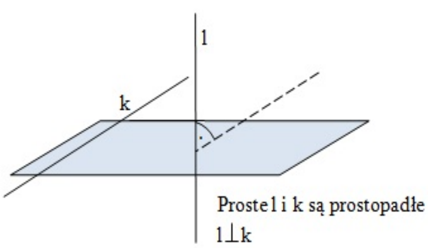


Leżą na jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny

- Prostopadłe



Proste prostopadłe przecinające się

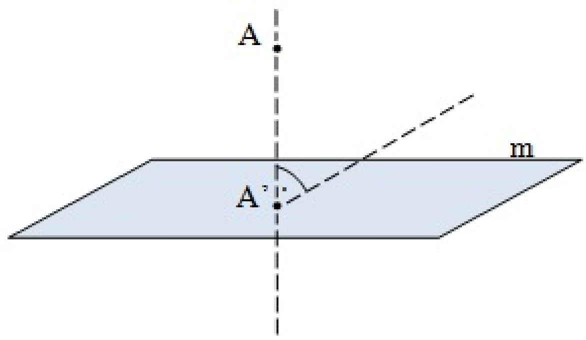


Proste prostopadłe skośne

Rysunek 4-5. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Rzut prostokątny na płaszczyznę

Rzut prostokątny danego punktu na płaszczyznę jest punktem, jaki powstanie, gdy przez dany punkt i płaszczyznę poprowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny.



Punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę m.

Rysunek 4-6. Rzut prostokątny na płaszczyznę

ZADANIA

4.1.1 Wskaż w swoim otoczeniu:

a) proste przecinające się

b) proste równoległe

c) proste skośne

4.1.2 Wskaż w klasie:

a) płaszczyznę i prostą przecinającą tę płaszczyznę

b) płaszczyzny równoległe

c) płaszczyzny przecinające się

d) płaszczyznę i prostą do niej równoległą

4.1.3 Przez dany punkt poprowadź płaszczyznę prostopadłą do danej prostej. Rozpatrz dwa przypadki.

Odpowiedź:

1. Dany punkt C leży na prostej AB. Przez daną prostą przesuńmy dwie dowolne płaszczyzny i z punktu C wystawmy dwie prostopadłe do AB: CD i CE położone na tych płaszczyznach. Wtedy płaszczyzna, wyznaczona przed CD i CE, będzie płaszczyzną szukaną.
2. Dany punkt D leży poza prostą AB. Prosta AB i punkt D, poza nią położony, wyznaczają płaszczyznę P. Poprowadźmy na niej $DC \perp AB$. Następnie przez prostą AB przesuńmy

dowolną płaszczyznę Q i poprowadźmy na niej $CE \perp AB$, wtedy szukaną płaszczyzną jest płaszczyzna R wyznaczona przez CD i CE.

4.1.4 Wykreślić odcinek prostopadły do dwóch prostych skośnych.

Odpowiedź:

Dane są dwie proste skośne AB i CD. Przez dowolny punkt K prostej CD poprowadźmy $A'B' \parallel AB$ i przez dwie przecinające się proste CD i $A'B'$ przesuńmy płaszczyznę P.

Jeżeli teraz z dowolnego punktu E prostej AB poprowadzimy $EF \perp P$, a przez punkt F na tej płaszczyźnie równoległą do $A'B'$, która przetnie CD w punkcie G, to odcinek GH równoległy do EF będzie żądanym odcinkiem.

Istotnie, odcinek HG, jako prostopadły do płaszczyzny P, jest prostopadły do prostej CD położonej na tej płaszczyźnie. Z drugiej strony odcinek $GH = FE$ jest prostopadły również do AB, a więc jest prostopadły do obu danych prostych.

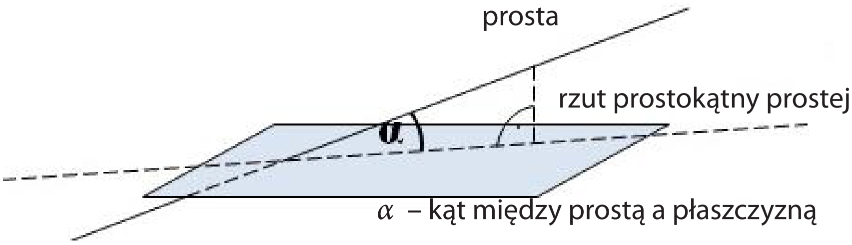
4.2 Kąty między płaszczyznami i w figurach przestrzennych

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać kąty między płaszczyznami;
- Rozpoznawać kąty między ścianami i krawędziami w graniastosłupach i ostrosłupach.

Kąt między prostą a płaszczyzną

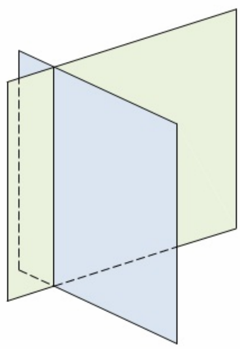
Kąt między prostą a płaszczyzną znajduje się między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



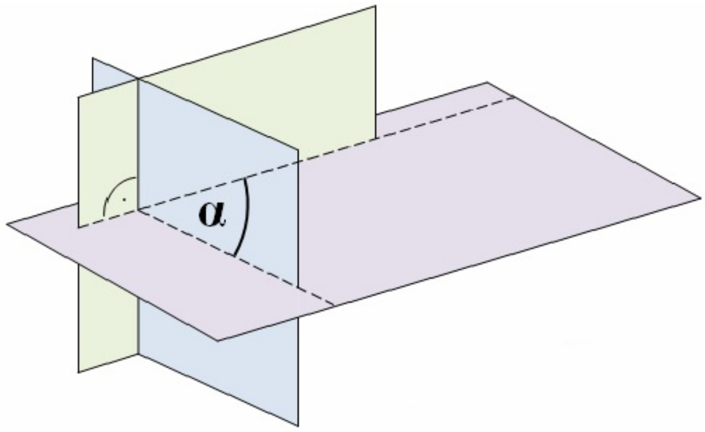
Rysunek 4-7 Kąt między płaszczyzną a prostą

Kąt dwuścienny

To kąt zawierający się pomiędzy dwoma przecinającymi się płaszczyznami:



Kąt dwuścienny wyznaczamy, przecinając obie płaszczyzny trzecią, która jest do nich prostopadła.



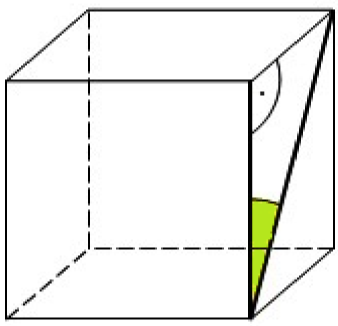
Rysunek 4-8. Kąt dwuścienny

Kąty w bryłach

Często w zadaniach związanych z bryłami pojawiają się wartości kątów między określonymi odcinkami lub ścianami. O prawidłowym rozwiązaniu decyduje wtedy, czy dobrze umiejscowiliśmy dany kąt, a niestety w tym miejscu często pojawiają się błędy. Warto więc wiedzieć, gdzie znajdują się dane kąty.

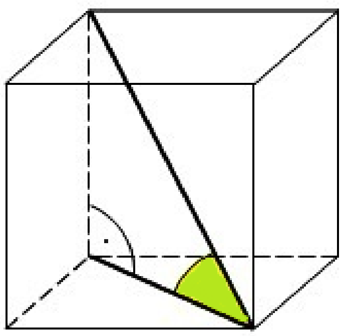
Graniastosłupy

- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną (wysokością)



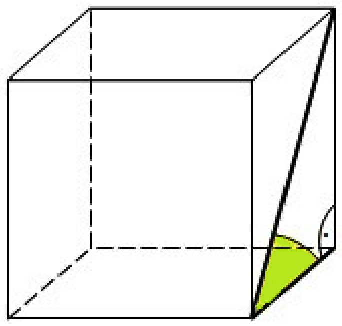
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy czworokąt)



Wysokość graniastosłupa wraz z przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa tworzą trójkąt prostokątny.

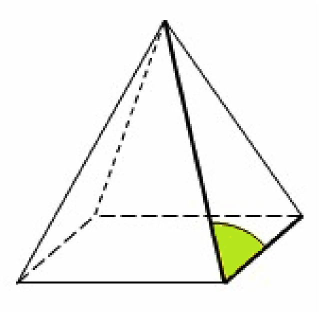
- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy



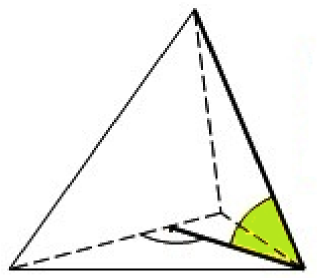
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

Ostrosłupy

- kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

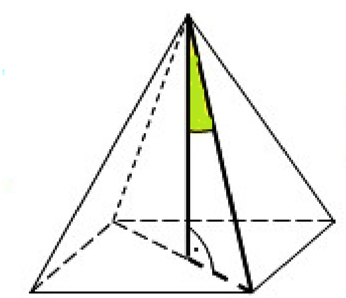


- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie mamy trójkąt równoboczny)



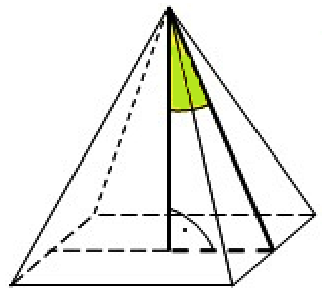
Kąt znajduje się między krawędzią boczną ostrosłupa a wysokością podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



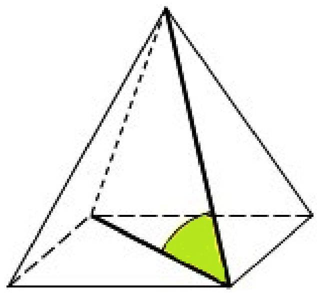
Krawędź boczna i wysokość ostrosłupa wraz z połową przekątnej podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



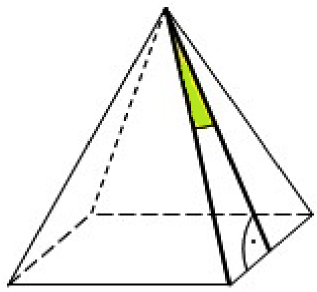
Wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej wraz z połową odcinka, którego długość stanowi połowę długości podstawy, tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



Kąt znajduje się między krawędzią boczną a przekątną podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością ściany bocznej



Krawędź boczna i wysokość ściany bocznej wraz z połową krawędzi podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

ZADANIA

4.2.1 Narysuj sześcian i zaznacz w nim kąt nachylenia:

a) przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

4.2.2 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{3}\ cm$, a wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{3}\ cm$. Oblicz miarę kąta nachylenieaściany bocznej do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

4.2.3 Wskaż w klasie kąty dwuścienne. Podaj miary tych katów.

4.2.4 Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.2.5 Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 6, a długość krawędzi bocznej jest równa $2\sqrt{15}$15. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej piramidy do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

4.2.6 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

4.2.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym zaznacz kąt liniowy kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi.

Odpowiedź: Ostrosłup oznacz literami $ABCS$. Z wierzchołka A i B zaznacz proste prostopadłe do krawędzi bocznej CS przecinające się w punkcie D. Kąt ADB jest kątem liniowym kąta dwuściennego.

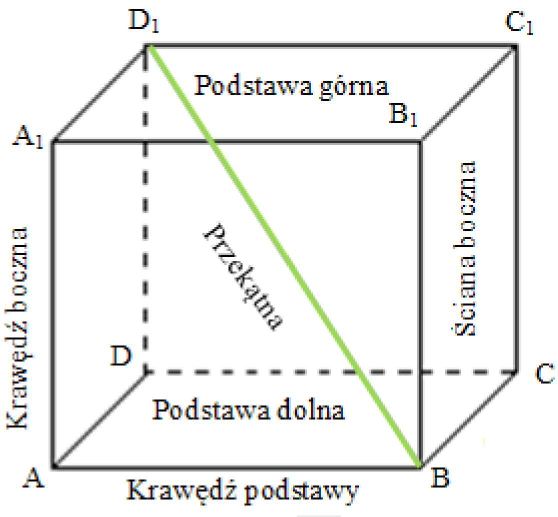
4.3 Graniastosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów;
- Rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Przypomnijmy najpierw najważniejsze pojęcia dotyczące graniastosłupów.

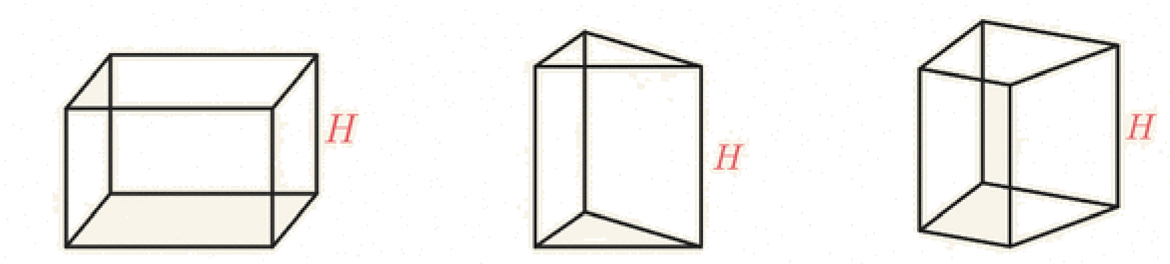
Graniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach, zwanych podstawami graniastosłupa, i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi podstawami są do siebie równoległe.



Rysunek 4-9. Graniastosłup prawidłowy

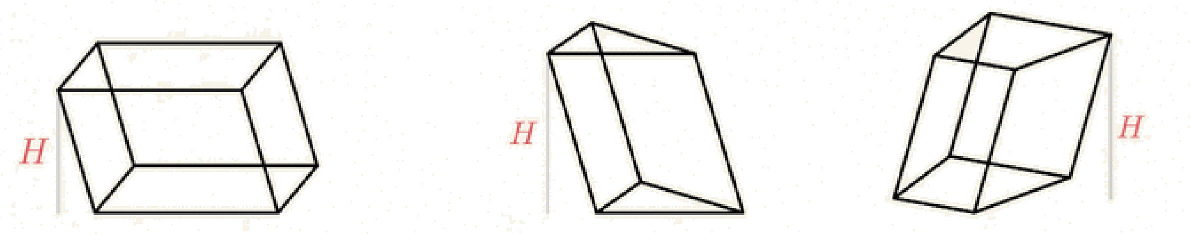
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Przykłady graniastosłupów prostych



Rysunek 4-10. Graniastosłupy proste

Przykłady graniastosłupów pochyłych



Rysunek 4-11. Graniastosłupy pochyłe

Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego dwóch podstaw i polu powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

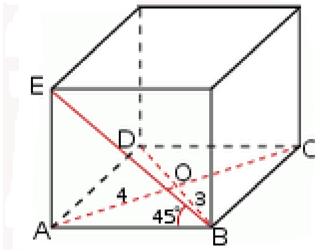
Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości.

$$V = P_p \cdot H$$

Przykład 1

Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych długości $6\ cm$ i $8\ cm$, którego przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze $45°$.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:



Z tego wynika, że $|AE| = |AB| = 5cm$.

Możemy już obliczyć objętość graniastosłupa.

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ cm^2$

$V = P_p \cdot H = 24\ cm^2 \cdot 5\ cm = 120\ cm^3$

Policzymy jeszcze pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

$P_b = 4 \cdot |AB| \cdot |AE| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100\ cm^2$

$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 24\ cm^2 + 100\ cm^2 = 148\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $120\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $148\ cm^2$.

ZADANIA

4.3.1 W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem o polu $P = 400\ cm^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Odpowiedź: $V = 500\ cm^3$, $P_c = 450\ cm^2$.

4.3.2 Oblicz objętość prostopadłościanu, jeżeli kąt między jego przekątną o długość $10\ cm$ a podstawą ma miarę $60°$, a jedna z krawędzi podstawy ma długość $4\ cm$.

Odpowiedź: $V = 60\sqrt{3}\ cm^3$.

4.3.3 Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $a = 4\ cm$. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Odpowiedź: $16\sqrt{3}\ cm^2$.

4.3.4 Kąt zawarty między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą ma miarę $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli jej wysokość ma długość $10\ cm$, a szerokość podstawy wynosi $6\ cm$.

Odpowiedź: $P_c = 376\ cm^2$.

4.3.5 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$.

4.3.6 Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Wyznacz sinus kąta nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.3.7 Oblicz skalę podobieństwa dwóch graniastosłupów prawidłowych czworokątnych. Pierwszy z nich ma wysokość $2\ cm$ i objętość $18\ cm^3$ oraz jest podobny do graniastosłupa, którego krawędź podstawy ma długość $1\ cm$.

Odpowiedź: $k = 3$.

4.3.8 Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $8\ cm$ i kącie między ramionami miary $120°$. Przekątna mniejszej ściany bocznej graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Wyznacz objętość graniastosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{128\sqrt{3}}{9}$.

4.3.9 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego $ABCA_1B_1C_1$, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $|AC| = 6\ cm, |BC| = 8\ cm$, a przekątna AB_1 ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α o mierze $60°$.

Odpowiedź: $P_c = 48(5\sqrt{3} + 1)\ cm^2, V = 240\sqrt{3}\ cm^3$.

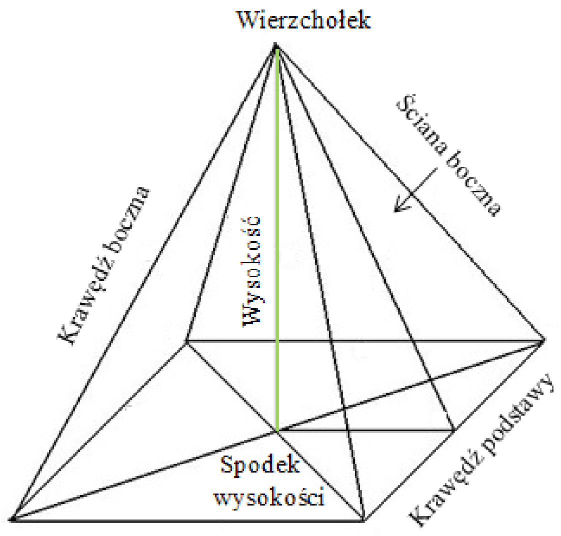
4.4 Ostrosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości ostrosłupów;
- Rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami a płaszczyznami (między krawędziamiai ścianami, przekątnymi a ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Ostrosłup – wielościan, którego wszystkie ściany prócz podstawy są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

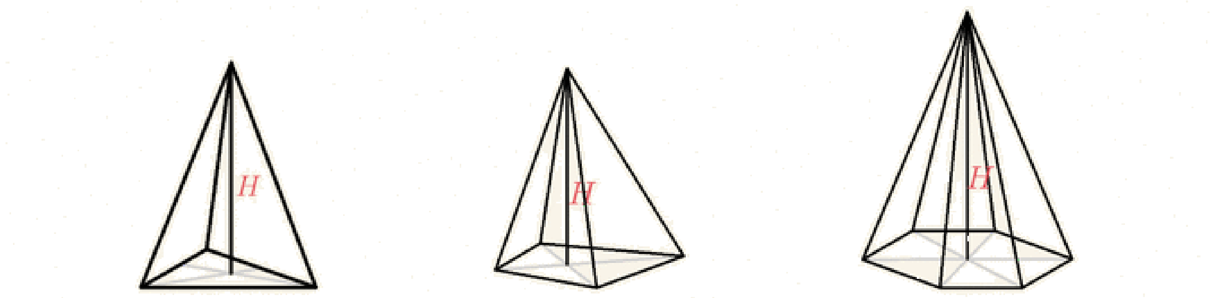
Wysokość ostrosłupa jest to odległość od wierzchołka do płaszczyzny podstawy. Punkt będący rzutem wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywa się spodkiem wysokości.



Rysunek 4-12. Ostrosłup

Ostrosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a jego wysokość pada na środek podstawy. Ściany ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi.

Przykłady ostrosłupów



Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynowi pola podstawy i wysokości.

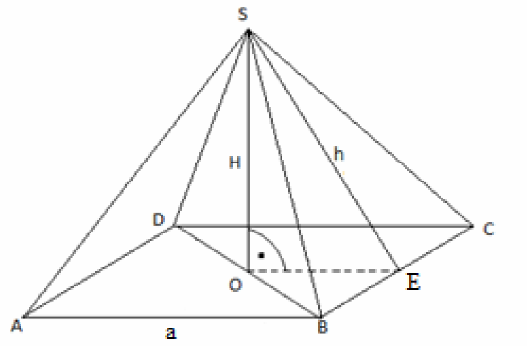
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Przykład 1

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy $a = 6\ cm$, a wysokość ściany bocznej $h = 5\ cm$. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:

Obliczamy wysokość H ostrosłupa, korzystając z trójkąta prostokątnego OES.



$|OE| = \frac{1}{2}a = 3\ cm$

$H^2 = h^2 - |OE|^2$

$H^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow H = 4\ cm$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}6^2 \cdot 4 = 48\ cm^3$

$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 96\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa wynosi $48\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $96\ cm^2$.

ZADANIA

4.4.1 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli jego wysokość ma długość $6\ cm$, a kąt między wysokością a krawędzią boczną ma miarę $30°$.

Odpowiedź: $V = 48\ cm^3$.

4.4.2 Kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę $60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość $12\ cm$.

Odpowiedź: $P_b = 96\sqrt{3}\ cm^2$.

4.4.3 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS_o$ o podstawie $ABCD$. Pole trójkąta ASC jest równe 120, a cosinus kąta ASB jest równy $\frac{144}{169}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 20\sqrt{313}\ cm^2$.

4.4.4 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.4.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy $18\ cm$, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α.

Odpowiedź: $P_b = 648\ cm^2$.

4.4.6 Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = 3$. Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $6\sqrt{3}$. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = 729$.

4.4.7 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi bocznej dwa razy dłuższej od krawędzi podstawy.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

b) Wyznacz długość krawędzi ostrosłupa tak, aby pole jego powierzchni bocznej wynosiło $36\sqrt{15}$.

Odpowiedź: a) $cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) Krawędzie muszą mieć długość 6 i 12 jednostek.

4.4.8 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości $48\ cm^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = \frac{4}{3}$. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 60\ cm^2$.

4.5 Wielościany foremne

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów foremnych.

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez ściany są równe.

Przykład 1

Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi a.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej czworościanu:

$$P_c = 4 \cdot P_{\Delta\, równobocznego}$$

$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Więc $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Obliczamy objętość czworościanu:

ΔOSD jest trójkątem prostokątnym, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = h^2 - r^2$$

ale $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

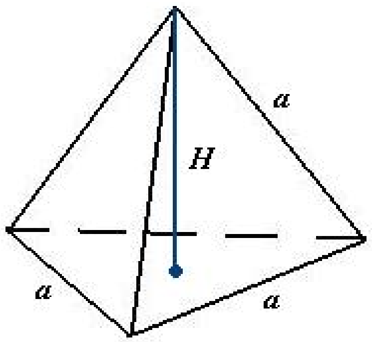
$$H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36} \Rightarrow H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36}$$

Więc $\boldsymbol{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Istnieją następujące wielościany foremne:

Czworościan (tetraedr)



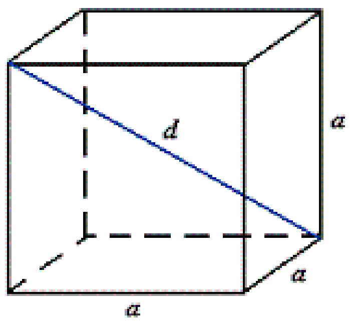
Rysunek 4-13. Czworościan

4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy czworościanem foremnym.

$\boldsymbol{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Sześcian (heksaedr)

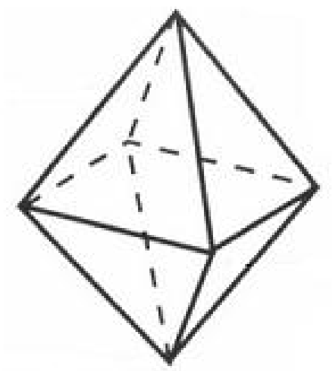


Rysunek 4-14. Sześcian

6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = a^3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P_c = 6a^2}$

Ośmiościan (oktaedr)

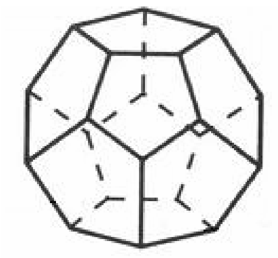


Rysunek 4-15. Ośmiościan

8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V} = \frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{a^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P_c = 2\sqrt{3}a^2}$

Dwunastościan (dodekaedr)

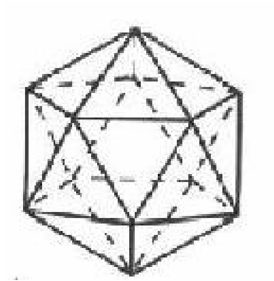


12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków, 30 krawędzi

$V = \frac{(15+7\sqrt{5})}{4} a^3 \qquad P_c = 15(\sqrt{5}+2)a^2$

Rysunek 4-16. Dwunastościan

Dwudziestościan (ikosaedr)



20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków, 30 krawędzi

$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} a^3 \qquad P_c = 5\sqrt{3}a^2$

Rysunek 4-17. Dwudziestościan

Ciekawostka

Wielościany foremne znali już Pitagorejczycy w VI w. p.n.e. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę, a od czasów Platona uważano piąty wielościan foremny, dwunastościan, za postać wszechświata. Wielościany te noszą nazwę **brył platońskich.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Dlaczego wielościanów foremnych nie może być więcej niż pięć?

ZADANIA

4.5.1 Mając daną długość krawędzi a, wyprowadź wzór na:

a) przekątną sześcianu,

b) wysokość czworościanu foremnego.

Odpowiedź: a) $D = a\sqrt{3}$, b) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

4.5.2 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$

4.5.3 Pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni całkowitej czworościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych brył.

Odpowiedź: $2\sqrt{6}$.

4.5.4 Pole powierzchni dwudziestościanu foremnego jest równe $245\sqrt{3}\ cm^2$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego wielościanu.

Odpowiedź: $210\ cm$.

4.5.5 Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano bryłę o sześciu ścianach. Naszkicuj otrzymaną bryłę. Czy jest to wielościan foremny?

Odpowiedź: Nie.

4.5.6 Ściany wielościanu malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:

a) czworościanu foremnego,

b) sześcianu,

c) ośmiościanu foremnego?

Odpowiedź: a) 4, b) 3, c) 2.

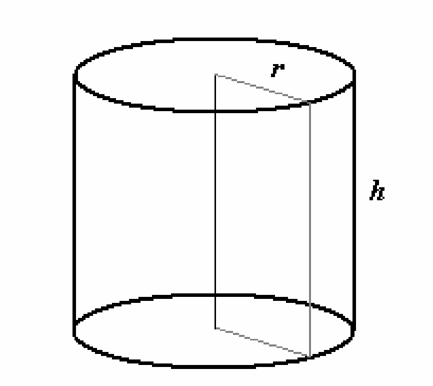
4.6 Walec – jego pole powierzchni i objętość

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości walców;
- Rozpoznawać w walcach kąty między przekątną przekroju osiowego a płaszczyzną podstawy;
- Obliczać miary kątów.

Walec– to bryła otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.

Prostą tę nazywamy **osią walca**. Podstawami walca są koła o takim samym promieniu.



Rysunek 4-18. Walec

Powierzchnią boczną walca nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu.

Tworzącą walca nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.

Przekrojem osiowym walca nazywamy część wspólną walca i płaszczyzny zawierającej oś walca.

Objętość walca wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej walca:

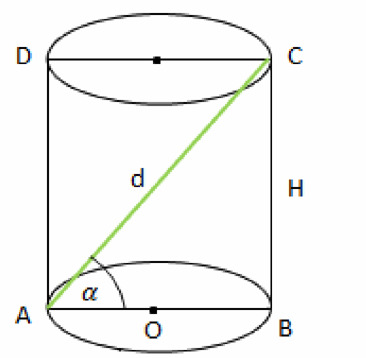
$$\boldsymbol{P_b = 2\pi r H}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 2\pi r(r + H)}$$

Przykład 1

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



ΔABC jest prostokątny, więc $sin\alpha = \frac{H}{d}$

$$H = d \cdot sin\alpha = 10 \cdot sin60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{2r}{d}$$

$$2r = d \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ cm$$

$$r = 2{,}5\ cm$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 5\sqrt{3} = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$V = 31{,}25\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 2{,}5\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 5\pi\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 12{,}5\pi + 25\sqrt{3}\pi$$

$$P_c = 12{,}5\pi\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ cm^2$$

ZADANIA

4.6.1 Oblicz objętość walca, jeśli jego przekrój osiowy jest kwadratem o obwodzie równym 24 cm.

Odpowiedź: $V = 54\pi$.

4.6.2 Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% większy od promienia podstawy drugiego walca. Oblicz stosunek objętości tych walców.

Odpowiedź: $9:4$.

4.6.3 Długość promienia walca zmniejszono dziesięciokrotnie. Ile razy trzeba zwiększyć wysokość tego walca, aby objętość się nie zmieniła?

Odpowiedź: 100–krotnie.

4.6.4 Ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości $1\ km$ i średnicy wewnętrznej równej $50\ cm$?

Odpowiedź: $62{,}5\pi\ m^3$.

4.6.5 Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy $8\ cm$ i wysokości $10\ cm$ jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki, każda o krawędzi $2\ cm$. Czy woda z kubka się wyleje?

Odpowiedź: Nie.

4.6.6 Objętość walca jest równa $108\pi\ cm^3$, a jego wysokość to $12\ cm$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Odpowiedź: $P_c = 90\pi\ cm^2$.

4.6.7 Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego jeden bok ma długość 8 cm, a przekątna jest o 2 cm dłuższa od drugiego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca wiedząc, że dłuższy bok prostokąta jest wysokością walca.

Odpowiedź: $V = 240\pi\ cm^3$, $P_c = 152\pi\ cm^2$.

4.6.8 Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{3}{5}$. Pole przekroju osiowego jest równe 27. Oblicz objętość tego walca.

Odpowiedź: $V = 40{,}5\pi$.

4.6.9 Do naczynia w kształcie walca wypełnionego wodą do wysokości 7 cm włożono metalową kulkę o promieniu 3 cm. Poziom wody podniósł się o 1 cm i zrównał się z górną podstawą walca. Oblicz objętość naczynia. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, wynik podaj z dokładnością do $1 cm^3$.

Odpowiedź: $V = 904\ cm^3$.

4.6.10 Puszka na cukier ma kształt walca.

a) Ile kilogramów cukru zmieści się w puszce, której wymiary wynoszą $d = 14\ cm$ a $h = 20\ cm$? Gęstość cukru wynosi 1,6 kg/litrów. Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

b) Jakiej wysokości musiałaby być ta puszka, by mieścił się do niej dokładnie 1 kg cukru? Wynik zaokrąglij z nadmiarem do 1 cm.

Odpowiedź: a) $1{,}89\ kg$, b) $h = 11\ cm$.

4.7 Stożek – jego pole powierzchni i objętość

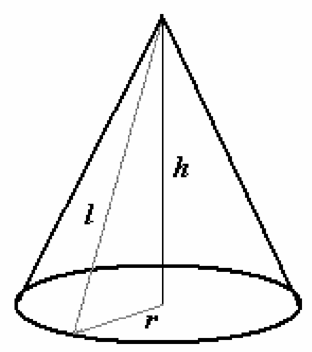
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości stożków;
- Rozpoznawać w stożkach kąty między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą);
- Obliczać miary kątów.

Stożek – to bryła otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta. Prostą tę nazywamy osią stożka.

Podstawą stożka nazywamy koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka.

Wysokością stożka (h) nazywamy przyprostokątną trójkąta zawartą w osi obrotu.



Rysunek 4-19. Stożek

Powierzchnią boczną stożka nazywamy powierzchnię wyznaczoną przez obrót przeciwprostokątnej trójkąta.

Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywam**y wierzchołkiem stożka.**

Tworzącą stożka (l) nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugi należy do podstawy stożka.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy część wspólną stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka.

Objętość stożka wyraża się wzorem:

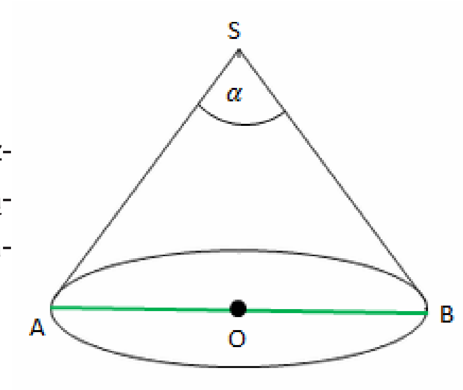
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$$

Pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi r l$$

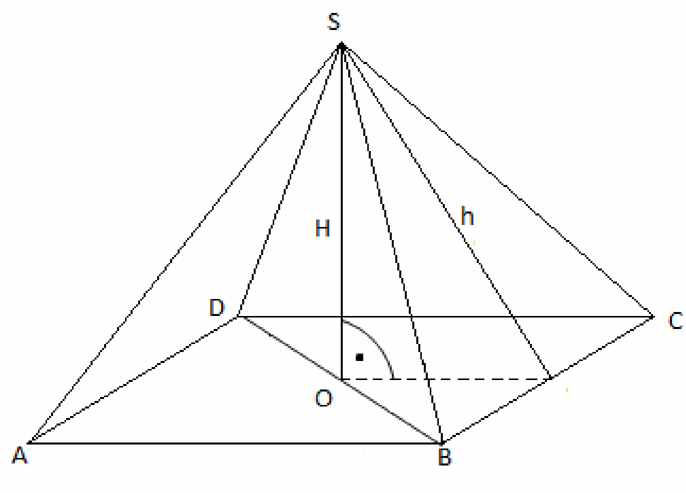
Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = \pi r(r + l)$$



Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka** (kąt α na rysunku).

Przykład 1



Tworząca stożka ma długość $8\ cm$ i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ΔAOS jest prostokątny i $sin\alpha = \frac{H}{l}$

$$H = 8 \cdot sin60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{r}{l}$$

$$r = l \cdot cos\alpha = l \cdot cos60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ cm$$

Podstawiamy do wzoru i obliczamy objętość oraz pole powierzchni całkowitej:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3} cm^3$$

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 8) = 48\pi\ cm^2$$

ZADANIA

4.7.1 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka, jeśli:

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 180°$ c) $\alpha = 240°$ d) $\alpha = 270°$

Odpowiedź:

a) $4\pi\ cm^2$ b) $36\pi\ cm^2$ c) $64\pi\ cm^2$ d) $81\pi\ cm^2$

4.7.2 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu $15\ cm$. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku $6\ cm$. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α.

Odpowiedź: $\alpha = 72°$.

4.7.3 Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu $49\ cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $49\pi(1 + \sqrt{2})\ cm^2$.

4.7.4 Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π cm^2, a średnica jego podstawy ma długość $12\ cm$. Oblicz objętość tego stożka.

Odpowiedź: $96\pi\ cm^3$.

4.7.5 Pole powierzchni bocznej stożka jest cztery razy większe od pola podstawy. Obwód przekroju osiowego stożka jest równy 30. Oblicz objętość tego stożka

Odpowiedź: $V = 9\pi\sqrt{15}$.

4.7.6 Stożek ma wysokość $10\ cm$. Pole przekroju osiowego tego stożka jest równe $30\ cm^2$. Jaką długość ma tworząca tego stożka?

Odpowiedź: $\sqrt{190}\ cm$.

4.7.7 Kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$. Promień podstawy stożka ma długość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Odpowiedź: 32π.

4.7.8 Objętość stożka jest równa 4π, a pole jego podstawy jest równe 4π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $2\pi\left(2 + \sqrt{13}\right)$.

4.7.9 Do naczynia w kształcie odwróconego stożka wrzucono kulkę o promieniu $r = 3\ cm$. Oceń, czy kulka będzie wystawać nad brzeg naczynia. Uzasadnij odpowiedź, wykonując odpowiednie obliczenia, jeżeli wiadomo, że wysokość stożka wynosi $12\ cm$, a promień podstawy to $4\ cm$.

Odpowiedź: Kulka będzie wystawać ponad brzeg naczynia.

4.7.10 Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $V = 9\sqrt{3}\ cm^3$, $P_c = 27\pi\ cm^2$.

4.8 Kula – jej pole powierzchni i objętość

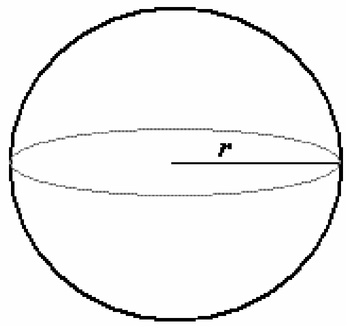
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości kuli.

Kula o środku w punkcie O i promieniu r to bryła będąca zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego – **promieniem kuli.**

Obrót okręgu ograniczonego koło tworzy powierzchnię obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli.** Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.



Rysunek 4-20. Kula

Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Objętość kuli wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 4\pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu $r = 4\ cm$.

Podstawiamy do wzoru $r = 4\ cm$ i obliczamy:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi\ cm^2$$

Przykład 2

Oblicz stosunek objętości kuli o promieniu $r_1 = 8\ cm$ do objętości kuli o promieniu $r_2 = 2\ cm$.

Ponieważ każde dwie kule są bryłami podobnymi, to $\frac{r_1}{r_2} = k$.

$$\frac{8}{2} = k \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_2}^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 4^3 = 64$$

Odpowiedź: Stosunek objętości tych kul jest równy 64.

ZADANIA

4.8.1 Oblicz objętość kuli o promieniu $r = 5\ cm$.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi cm^3$.

4.8.2 Pole powierzchni kuli jest równe $100\pi\ cm^2$. Oblicz objętość tej kuli.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$.

4.8.3 Oblicz pole powierzchni:

a) piłki do koszykówki o średnicy równej $24\ cm$,

b) piłki nożnej o średnicy równej $21{,}8\ cm$.

Odpowiedź: a) $56\pi\ cm^2$, b) $475{,}25\pi\ cm^2$.

4.8.4 Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o $20\ cm$, ich promienie są równe odpowiednio: $r_1 = 16\ cm$ i $r_2 = 12\ cm$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

Odpowiedź: Około $60{,}3\ cm$.

4.8.5 Objętość półkuli jest równa $486\pi\ cm^3$. Oblicz odległość między dwoma najbardziej oddalonymi od siebie punktami tej półkuli.

Odpowiedź: $18\ cm$.

4.8.6 Kopuła olsztyńskiego planetarium jest półkulą o promieniu $8\ m$. Ile [m^2] blachy należy zakupić, aby wymienić pokrycie tej kopuły, dodając 10 % materiału na zakłady i odpady? Wynik podaj w przybliżeniu do części setnych.

Odpowiedź: $442{,}1$ m^2.

4.8.7 Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w czworościan foremny do objętości kuli opisanej na tym czworościanie.

Odpowiedź: $\frac{1}{27}$.

4.8.8 Po zjedzeniu miąższu arbuza, pozostała skórka z niejadalną częścią o grubości 3 cm. Arbuz miał średnicę 30 cm. Jaką jego część stanowił miąższ?

Odpowiedź: $51{,}2\%$.

4.8.9 Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $8\ dm$ od środka kuli. Otrzymany przekrój ma pole $36\ \pi\ dm^2$. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli.

Odpowiedź: $P = 100\pi\ dm^2, V = \frac{1000\pi}{3}\ dm^3$.

4.8.10 W kulę wpisano walec w ten sposób, że objętość walca stanowi $\frac{9}{16}$ objętości kuli. Oblicz stosunek promienia kuli do wysokości walca.

Odpowiedź: 1 lub $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

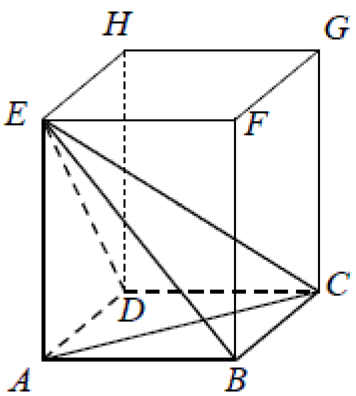
Zadania zamknięte

1.[50] Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa:

a) 6 b) 8 c) 24 d) 64

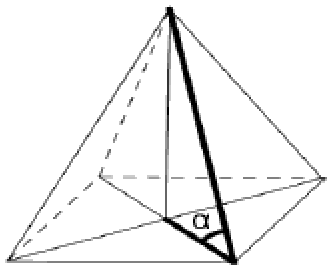
2. Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

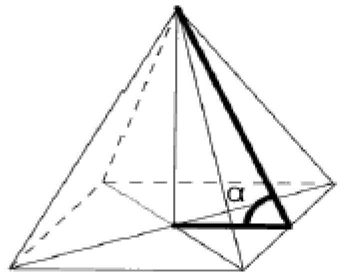
a) $2\sqrt{2}$ b) 16π c) $4\sqrt{2}$ d) 8π

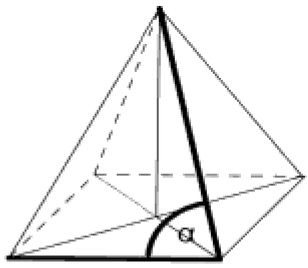


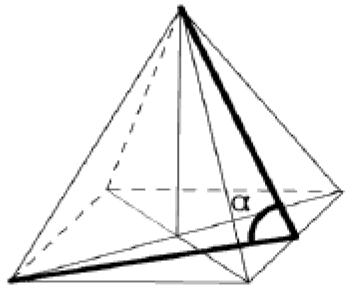
50 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 04.03.2013.

3.[51] Kąt α nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy zaznaczony jest na rysunku:

A. 

C. 

B. 

D. 

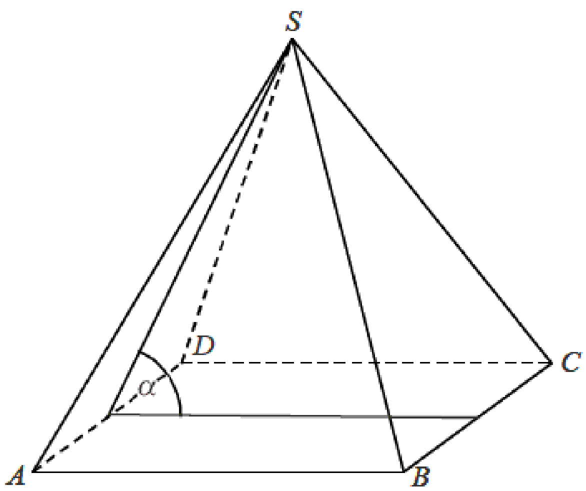
4.[52] Objętość sześcianu, w którym przekątna ściany bocznej ma długość $\frac{\sqrt{2}}{4}$, jest równa

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 16 d) 64

5.[53] Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

a) 512 b) 384 c) 96 d) 16

6. **(4 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



51 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

52 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

53 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 04.03.2013.

7.[54] Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

a) 96π b) 48π c) 32π d) 8π

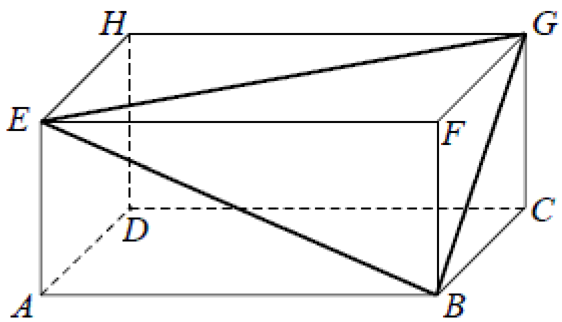
8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to:

a) $r + h = a$ b) $h - r = \frac{a}{2}$ c) $r - h = \frac{a}{2}$ d) $r^2 + h^2 = a^2$

9.[55] Objętość sześcianu jest równa 27. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

10.[56] W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



a) AB b) BG c) GE d) EB

11. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) 9 d) $3\sqrt{3}$

12. Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa:

a) 124π b) 96π c) 64π d) 32π

13.[57] Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe:

a) 94 b) 60 c) 47 d) 20

54 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 04.03.2013.

55 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

56 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 04.03.2013.

57 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.

14. Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

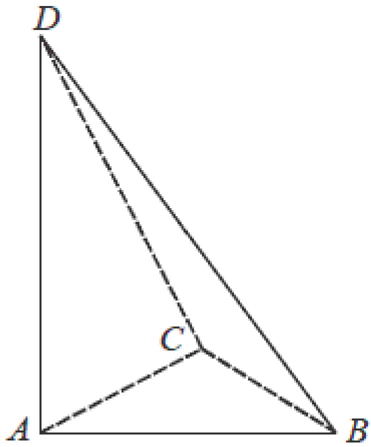
a) 11

b) 18

c) 27

d) 34

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $AD = 12$, $BC = 6$, $BD = CD = 13$.



15.[58] Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są równe 2. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

a) $\sqrt{3}+12$ b) $2\left(\sqrt{3}+6\right)$ c) $2\sqrt{3}+4$ d) $\sqrt{6}+12$

16. Przekątna prostopadłościanu o długości 6 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przekątna podstawy ma długość 3. Jaka jest miara kąta α?

a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$ d) $90°$

17. Producent chce wyprodukować puszkę w kształcie walca o pojemności 3000 m^3 i wysokości 2 dm. Promień podstawy puszki w zaokrągleniu do części dziesiątych wynosi:

a) 6,8 cm b) 6,9 cm c) 7,0 cm d) 7,1 cm

18. Pewien ostrosłup ma 70 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 138 b) 140 c) 69 d) 70

19. Pole powierzchni kuli o objętości 288π wynosi:

a) 144π b) 36π c) 576π d) 452,16

20. Krople deszczu mają zwykle kształt kuli o średnicy 2 mm. Wskaz, ile kropel deszczu napełni szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 8 cm:

a) 108000 b) 432000 c) 54000 d) 162000

21. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest półkolem o promieniu $r = 10$ cm. Pole podstawy stożka wynosi:

a) 100π cm^2 b) 100 cm^2 c) 25π cm^2 d) 25 cm^2

58 Zadania 15-23: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.

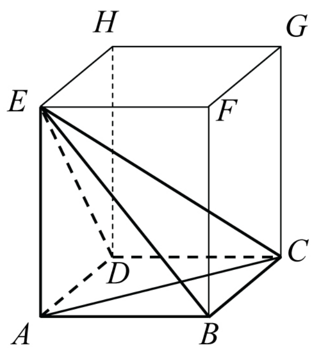
22. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 4 cm i 5 cm. Objętość walca jest równa:

a) 15π cm^3 b) 20π cm^3 c) 25π cm^3 d) 30π cm^3

23. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Objętość stożka jest równa 9π. Tworząca l stożka ma długość:

a) $l = 3\sqrt{2}$ b) $l = 6$ c) $l = 3\sqrt{3}$ d) $l = 7$

24.[59] **(4 pkt)** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



25.[60] **(5 pkt)** Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

26.[61] **(5 pkt)** Krawędź sześcianu jest o 4 krótsza od jego przekątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

27.[62] **(2 pkt)** Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

28. **(5 pkt)** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $tg\alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

29.[63] **(2 pkt)** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

30.[64] ***(4 pkt)*** Zbiornik ma kształt walca z obu stron zakończonego półkulami. Oblicz ile litrów płynu wypełni ten zbiornik, jeśli pole powierzchni całkowitej zbiornika jest równe 3π m^2, a wysokość walca jest równa 2 metry.

59 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 09.03.2013.

60 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

61 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

62 Zadania 27, 28: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 09.03.2013.

63 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.

64 Zadania 30–33: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

31. **(5 pkt)** Pomarańcza ma 5 cm średnicy, a jej skórka ma 5 mm grubości. Wyciśnięty sok stanowi 75% objętości obranej pomarańczy. Ile pomarańczy należy wycisnąć, aby napełnić półlitrowe naczynie? W tym zadaniu przyjmij $\pi = 3$.

32. **(5 pkt)** Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 3 dm $\times$ 0,5 m i wysokości 40 cm, wypełnionego wodą o $\frac{3}{4}$ wysokości, wrzucono dwie sześcienne kostki o krawędzi 10 cm. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

33. **(2 pkt.)** Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 360 cm^2, a pole powierzchni bocznej wynosi 240 cm^2, wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy. Odpowiedź: $tg\alpha = \sqrt{3}$.

5 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

5.1 Średnia arytmetyczna, średnia ważona

Teraz nauczę się:

- Obliczać średnią arytmetyczną i ważoną zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Jeśli przeprowadzasz ankietę, zbierasz dane, dotyczące np. natężenia ruchu w naszym mieście, lub nauczyciele robią zestawienia z testów badających wiedzę swoich uczniów, to po zdobyciu tych informacji potrzebujesz wyciągnąć wnioski, na podstawie których można będzie odpowiedzieć sobie na pewne pytania.

Grupa badanych pewnej populacji nazywa się próbą statystyczną, którą bada się pod kątem pewnej cechy.

Statystyka opisowa – nauka zajmująca się gromadzeniem danych, porządkowaniem ich, analizą i wyciąganiem wniosków.

Dane statystyczne możemy mieć przedstawione w postaci tabel, diagramów, wykresów, ale wcześniej są przedstawiane w postaci skończonego zbioru liczb.

Ze średnią arytmetyczną najczęściej spotykamy się w szkole, kiedy liczymy sobie średnią ocen z danego przedmiotu czy średnią ocen na świadectwie.

Średnią arytmetyczną danego zbioru liczb liczymy dodając do siebie wszystkie liczby należące do zbioru, a następnie dzielimy otrzymaną sumę przez ilość liczb w zbiorze.

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Przykład 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $1, 8, 12, 6, -4, 2, 5, 5, 11, 9$.

$$\bar{x} = \frac{1+8+12+6-4+2+5+5+11+9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna dla tego zestawu liczb wynosi $5{,}5$.

Przykład 2

Średnia arytmetyczna liczb: 4, 2, 2, 6, x, 8 jest równa 5. Oblicz x.

$$\bar{x} = \frac{4+2+2+6+x+8}{6} = 5$$

$$\frac{22+x}{6} = 5$$

$$22 + x = 30 \Rightarrow x = 8$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 8.

Przykład 3[65]

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Jaka jest cena szóstej akcji?

Obliczamy najpierw łączny koszt wszystkich akcji:

$$6 \cdot 500 = 3000$$

Za 5 akcji zapłacono 2300 zł, więc jeśli od ceny wszystkich akcji odejmiemy cenę 5 akcji, to otrzymamy cenę szóstej akcji.

$$3000 - 2300 = 700\ zł$$

Odpowiedź: Cena szóstej akcji wynosi 700 zł.

Przykład 4

Tabelka przedstawia stan wypożyczania książek przez uczniów klasy I C z biblioteki szkolnej.

Liczba uczniów	10	8	5	4	3
Liczba przeczytanych książek	9	33	6	12	0

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 9 + 8 \cdot 33 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 0}{30} = \frac{90 + 264 + 30 + 48}{30} = \frac{432}{30} = 14{,}4$$

Odpowiedź: W klasie I C średnio na jednego ucznia przypada 14,4 książki.

65 Arkusz maturalny CKE, Matura z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, 26.03.2013.

Średnia ważona

Średnią ważoną stosujemy, gdy poszczególne wartości mają przyporządkowane wagi.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie), to liczba

Przykład 5

Oblicz średnią ważoną liczb $1, 2, 3, 4{,}5, 6, 7, 8, 9, 10$, jeśli liczby parzyste mają wagę 4 a nieparzyste 6.

$$\overline{x_w} = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 6 + 6\cdot 4 + 7\cdot 6 + 8\cdot 4 + 9\cdot 6 + 10\cdot 4}{6+4+6+4+6+4+6+4+6+4}$$

$$\overline{x_w} = \frac{6+8+18+16+30+24+42+32+54+40}{50} = \frac{270}{50} = 5{,}4$$

Odpowiedź: Średnia ważona jest równa 5,4.

Przykład 6

Oceny uzyskane w semestrze przez pewnego ucznia z matematyki wraz z ich wagami zostały zestawione w tabeli.Obliczmy średnią tego ucznia.

Ocena	3	1	2	5	4	6	3	4	4
Waga	1	1	1	4	3	5	1	3	3

$$.\overline{x_w} = \frac{3\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+5\cdot4+4\cdot3+6\cdot5+3\cdot1+4\cdot3+4\cdot3}{1+1+1+4+3+5+1+3+3} = \frac{3+1+2+20+12+30+3+12+12}{22} = \frac{95}{22} = 4{,}31$$

Odpowiedź: Średnia ocen wynosi 3,41.

ZADANIA

5.1.1 Oblicz średnią ważoną danych z tabeli:

Wartość	3	4	5	7
Waga	2	1	4	3

Odpowiedź: 5,1.

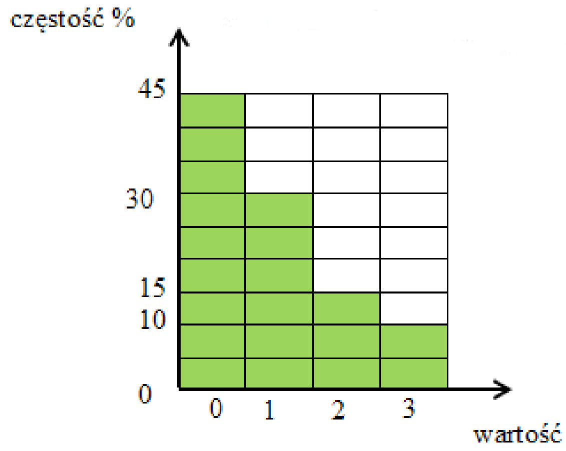
5.1.2 Dla jakiej wartości x średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3?

Odpowiedź: $x = 5$.

5.1.3 Średnia wzrostu 9 osób wynosi $170\ cm$. Jaka będzie średnia wzrostu tej grupy, jeśli dołączy do nich osoba o wzroście $190\ cm$?

Odpowiedź: $172\ cm$.

5.1.4 Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na poniższym diagramie:



Odpowiedź: $0{,}9$.

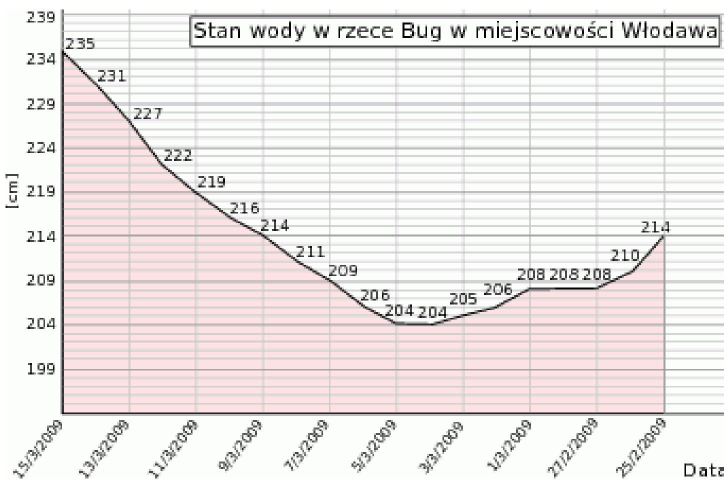
5.1.5 Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 $zł$. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie wynagrodzenie w firmie jest o 2% wyższe niż poprzednio?

Odpowiedź: 2528 $zł$.

5.1.6 Średnia arytmetyczna liczb $a, b, c, d, 22$ jest równa 14. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d?

Odpowiedź: 12.

5.1.7 Na podanym wykresie przedstawiono stan wody w rzece Bug od 25 lutego do 15 marca 2009 roku.



Rysunek 5-1. Stan wody w rzece Bug w miejscowości Włodawa

a) W których dniach stan wody w rzece nie przekraczał 207 cm?

b) Jaki był średni stan wody w rzece w dniach 1-10 marca 2009?

c) O ile procent podniósł się stan wody w rzece między 6 a 12 marca? Wynik podaj z dokładnością do jednego punktu procentowego.

Odpowiedź:

a) Między 2 a 6 marca. b) 208,3 cm. c) O 8%.

5.1.8 Na koniec semestru otrzymasz piątkę, jeśli zdobędziesz średnio co najmniej 70 punktów z pięciu sprawdzianów. Ania otrzymała średnio 68 pkt. z czterech sprawdzianów. Jaką minimalną ilość punktów musi dostać z piątego sprawdzianu, aby na semestr otrzymać piątkę?

Odpowiedź: 78 pkt.

5.1.9 Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci wynosi 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek babci, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 31 lat. Ile lat ma babcia?

Odpowiedź: 63 lata**.**

5.2 Mediana, dominanta

Teraz nauczę się:

- Obliczać medianę i dominantę zestawu danych.

Mediana zestawu liczb

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza uporządkowany rosnąco (lub malejąco) ciąg liczb.

- Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.
- Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Mediana jest to wartość środkowa występująca w uporządkowanym zestawie danych.

Przykład 1

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13.

W tym przykładzie grupa danych jest liczbą parzystą, więc nie istnieje jedna wielkość środkowa. Mamy dwie takie wartości.

$$\underbrace{2,\ 3,\ 4,}_{3\text{ wartości}}\ 6,\ 8,\ \underbrace{9,\ 11,\ 13.}_{3\text{ wartości}}$$

To, że mamy dwie wielkości środkowe, nie oznacza jednak, że mamy dwie mediany. W takim wypadku medianę otrzymujemy, obliczając średnią arytmetyczną dwóch wyznaczonych liczb.

$$M = \frac{6+8}{2} = 7$$

Odpowiedź: Mediana zestawu liczb wynosi 7.

Przykład 2

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Mamy podany uszeregowany ciąg danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Składa się z 9 wartości. Dokładnie pośrodku znajduje się wartość piąta (ponieważ mamy cztery wartości na lewo od niej i cztery na prawo):

$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8,}_{4\ \text{wartości}}\ 10,\ \underbrace{12,\ 14,\ 16,\ 18}_{4\ \text{wartości}}$$

Odpowiedź: Mediana wynosi 10.

Przykład 3

Poniżej przedstawiona jest liczba 100 ankietowanych dzieci.

Liczba osób	0	1	2	3	4	5
Liczba ankietowanych	15	34	27	15	7	2

Mamy do czynienia z parzystą liczbą wartości (100).

W szeregu 100 liczb liczbami środkowymi będą 50 i 51. Należy ustalić, jaką wartość mają te dwie liczby.

Z tabeli wynika:

- liczby od 1 do 15 mają wartość 0
- liczby od 16 do 49 $(15 + 34 = 49)$ mają wartość 1
- liczby od 50 do 76 $(49 + 27 = 76)$ mają wartość 2

Dalej nie musimy sprawdzać, bo ustaliliśmy wartość obu liczb:

- wartość liczby 50 wynosi 2
- wartość liczby 51 wynosi 2

Stąd mediana jest równa 2.

Dominanta

Dominanta (moda) jest to wartość, która w zebranych danych statystycznych pojawia się najczęściej. Oznaczamy ją symbolem D.

Gdy mamy kilka wielkości, które pojawiają się z tą samą największą liczbą razy, mamy do czynienia z kilkoma dominantami.

Przykład 4

Podaj dominantę z następujących liczb: $1, 3, 5, 0, 2, 5, 6, 1, 0, 4, 5, 4, 0, 0, 0, 7, 0$.

Liczba	0	1	2	3	4	5	6	7
Częstość	6	2	1	1	2	3	1	1

Najczęściej występuje liczba 0.

ZADANIA

5.2.1 Korzystając z danych: $3, 4, 1, 8,15, 6, 4, 3, 12, 7, 22, 4, 1, 0, 6, 5, 9,$ określ medianę.

Odpowiedź: 5,5.

5.2.2 Podaj dominantę z następujących liczb:

a) $7, -2, 4, 7, 0, 7, 4,$

b) $1, 5, 6, 1, 6, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 5, 2, 2, 1.$

Odpowiedź: a) 7, b) 1, 5 i 6.

5.2.3 W tabeli przedstawiono wyniki egzaminu dla 100 studentów. Podaj dominantę.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Liczba studentów	22	25	12	25	10	6

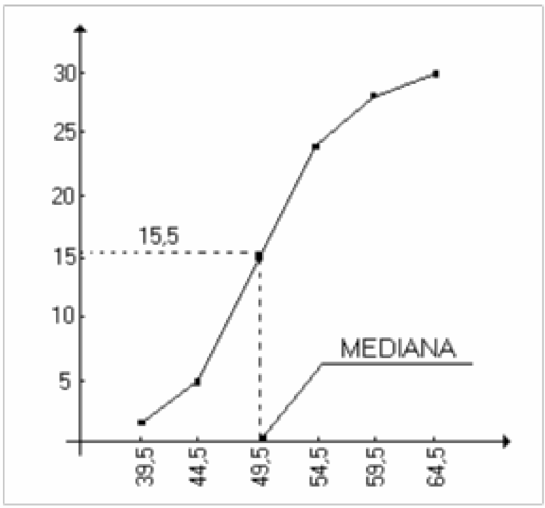
Odpowiedź: $D_1 = 3, D_2 = 4.$

5.2.4 Wyniki konkursu z matematyki podano w punktach: 94, 92, 90, 90, 86, 86, 86, 72. Oblicz medianę tego zestawu danych.

Odpowiedź: 88.

5.2.5 W tabeli przedstawiono wagi uczniów pewnej klasy. Podaj medianę dla tej klasy. Narysuj wykres ilustrujący dane zawarte w tabeli.

Odpowiedź: $M = 49{,}5$.



5.3 Wariancja, odchylenie standardowe

Teraz nauczę się:

- Obliczać wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadkach danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Odchylenie standardowe zestawu liczb ***σ*** (*sigma*)

Wartość odchylenia standardowego mówi nam, jak bardzo zróżnicowane są dane statystyczne. Im większa jest wartość odchylenie, tym dane są bardziej rozproszone wokół średniej.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ, którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Wariancja to kwadrat odchylenia standardowego.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Rozstęp (R) jest to różnica między największą a najmniejszą z liczb.

Przykład 1

Każdy z 6 zawodników podczas treningu oddał z pistoletu po 10 strzałów do tarczy. Po zsumowaniu punktów każdego zawodnika otrzymano następujące wyniki: 99, 96, 92, 98, 94, 97. Oblicz rozstęp wyników, średni wynik oraz odchylenie standardowe i wariancję.

Obliczmy najpierw rozstęp danych:

Wartość max – 99

Wartość min – 32

$R = 99 - 92 = 7$

Obliczmy teraz średnią wyników

$$\bar{x} = \frac{99 + 96 + 92 + 98 + 94 + 97}{6} = \frac{576}{6} = 96$$

Odchylenie standardowe liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(99 - 96)^2 + (96 - 96)^2 + (92 - 96)^2 + (98 - 96)^2 + (94 - 96)^2 + (97 - 96)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 16 + 4 + 4 + 1}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}38$$

Wariancja wynosi $\sigma^2 = 2{,}37^2 = 5{,}67$

ZADANIA

5.3.1 Oblicz wariancję danych ze zbioru $A = \{4, 5, 8, 9,\ 14\}$.

Odpowiedź: 12,4.

5.3.2 Średnia arytmetyczna trzech liczb a, b, c jest równa 2. Wariancja tych liczb wynosi 3. Oblicz sumę kwadratów liczb a, b i c.

Odpowiedź: 21.

5.3.3 Oblicz z dokładnością do 0,1 odchylenie standardowe następujących danych:

a) $-2;\ 0;\ 1;\ 4;\ 7;\ 14.$

b)

Wartość	-3	-1	0	4	6
Liczebność	10	6	4	2	4

Odpowiedź:

a) $\sigma = 5{,}3.$

b) $\sigma = 3.$

5.3.4 Trzech sędziów oceniło zawodnika, przyznając punkty: 2, 3, 7. Ile wynosi odchylenie standardowe od średniej arytmetycznej zestawu tych punktów?

Odpowiedź: $\sigma = 2{,}16.$

5.3.5 Troje przyjaciół ma wzrost równy odpowiednio 140 cm, 150 cm i 160 cm. Oblicz odchylenie standardowe od średniej wzrostu z dokładnością do części tysięcznych.

Odpowiedź: $\sigma = 8{,}165.$

5.4 Zastosowanie statystyki w praktyce

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wiedzę z zakresu statystyki w sytuacjach praktycznych.

ZADANIA

5.4.1 Czterech pracowników brygady zarobiło w lutym po 1300 zł, a ich szef 2000 zł. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$ płac i odchylenie standardowe σ od niej. Wyniki zaokrąglij do 1 grosza.

Odpowiedź: Średnia płac tych pięciu osób w lutym wynosi 1440 zł z odchyleniem standardowym 280 zł.

5.4.2 Obliczymy odchylenie standardowe i wariancję dla zestawu danych: $1, 3, 5, 5, 11.$

Odpowiedź: $\sigma^2 = 11{,}2.$

5.4.3 Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba osób	11	14
Średnia ocen	4,0	3,8
Odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe dla całej klasy. Wyniki podaj z zaokrągleniem do jednego miejsca po przecinku.

Odpowiedź: Średnia: 3,9; odchylenie standardowe: 1,5.

5.4.4 Wagi ośmiu klaczy urodzonych w pewnym gospodarstwie wynoszą: 38 kg, 40 kg, 42 kg, 42 kg, 45 kg, 48 kg, 50 kg, 51 kg. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

Odpowiedź: 4,47 kg.

5.4.5 Właściciel sklepu może zamówić puszki z ananasami u dwóch różnych dostawców A i B. Poniższe tabelki przedstawiają wyniki badania masy produktu bez zalewy w 10 losowo wybranych puszkach od obydwu dostawców:

	DOSTAWCA A				DOSTAWCA B			
Masa produktu bez zalewy (g)	120	130	135	140	125	135	140	145
Liczba puszek	1	4	2	3	3	2	4	1

Oblicz rozstęp i wariancję mas produktu bez zalewy od dostawcy A i B. Oceń, u którego z dostawców powinien zamawiać towar właściciel sklepu.

Odpowiedź:

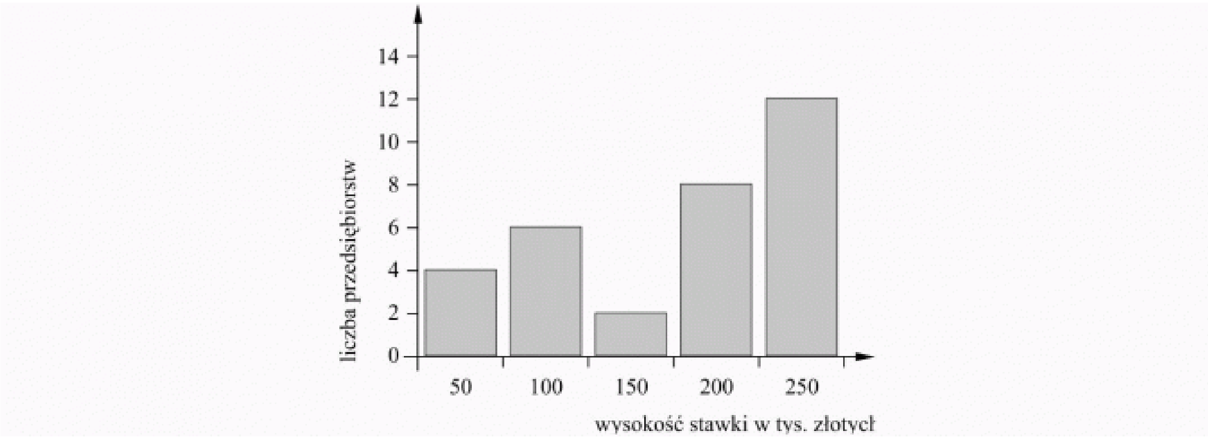
Rozstęp mas produktu bez zalewy od obu dostawców jest taki sam i wynosi 20. Wariancja mas produktu bez zalewy od dostawcy A wynosi 36, a od dostawcy B równa jest 50. Wynika z tego, że właściciel sklepu powinien wybrać dostawcę A.

5.4.6 Diagram przedstawia liczbę przedsiębiorstw w pewnej gminie, płacących podatek roczny w określonej wysokości. Oblicz:

a) średnią stawkę podatku rocznego przypadającego na przedsiębiorstwa z tego zestawienia,

b) podatek dominujący,

c) wysokość podatku, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw,



Rysunek 5-2. Liczba przedsiębiorstw w gminie płacących podatek roczny w określonej wysokości

Odpowiedź:

a) Średnia stawka podatkowa wynosiła $178\ 125\ zł$.

b) Podatek dominujący wynosi $250\ tys.\ zł$.

c) Podatek, którego nie przekroczyła połowa firmy wynosi $200\ 000\ zł$.

d) Rozstęp stawki podatkowej wynosi $200\ 000\ zł$.

5.4.7 W pewnej firmie średnia płaca pracowników produkujących wynosi 2819 zł, zaś średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 2483 zł. Średnia płaca wszystkich pracowników firmy jest równa 2723 zł. Oblicz, jaki procent pracowników produkcyjnych stanowią pozostali pracownicy tej firmy.

Odpowiedź: 40%.

5.5 Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych.

Naukę elementów rachunku prawdopodobieństwa należy rozpocząć od wprowadzenia podstawowych pojęć.

Doświadczenie losowe – w praktyce każde doświadczenie, które może być wielokrotnie powtarzane i którego wyniku nie możemy przewidzieć (np. rzut monetą).

Zdarzenie elementarne – jest to każdy wynik doświadczenia losowego (np. przy rzucie symetryczną kostką do gry może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6).

Zbiór zdarzeń elementarnych – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia (np. przy jednokrotnym rzucie kostką do gry $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać literką Ω (czyt. *Omega*).

Zdarzenie losowe – dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek $\{2, 4, 6\}$).

Zdarzenie losowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \ldots$

Zdarzenia losowe dzielimy na:

- Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – zdarzenie elementarne, które spełnia warunki zdarzenia losowego (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek).

- Zdarzenia pewne – zdarzenie elementarne, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką do gry wypadła liczba oczek większa od 0, ale mniejsza lub równa 6).

- Zdarzenia niemożliwe – zdarzenie elementarne, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne (np. w rzucie sześcienną kostka do gry wypadła siódemka).

Bardzo istotne jest, ile elementów zawiera zbiór. Wartość ta jest nazywana mocą zbioru.

Np. moc zbioru A – $\overline{\overline{A}}$

Przykład 1

Rzucamy trzy razy monetą.

a) Wypisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.

b) Wypisz zbiór sprzyjający zdarzeniu – wypadł co najwyżej jeden orzeł.

a)

R – wypadła reszka

O – wypadł orzeł

W tym doświadczeniu losowym można otrzymać następujące wyniki:

$A = \{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ (O,O,R)\ (O,R,O)\ (R,O,O)\ (O,O,O)\}$

Wszystkich możliwych wyników jest 8, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 8$.

b)

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najwyżej jeden orzeł.

$B = \{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ \}$

Wszystkich możliwych wyników jest 4, więc $\overline{\overline{\mathrm{B}}} = 4$.

ZADANIA

5.5.1 Losujesz dwie niepowtarzające się cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i tworzysz z nich liczbę.

a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia. Ile ich jest?

b) Wylosowałeś cyfry, które dały liczbę parzystą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?

Odpowiedź:

a) $A = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4),\ (2\ 1), (2\ 3), (2,4), (3\ 1), (3\ 2), (3\ 4),\ (4\ 1), (4\ 2), (4\ 3)\}, \overline{\overline{A}} = 12.$

b) $B = \{(1\ 2), (1\ 4), (2,4), (3\ 2), (3\ 4), (4\ 2)\ \}, \overline{\overline{B}} = 6.$

5.5.2 Rzucamy monetą, a następnie sześcienną kostką do gry (o ściankach z numerami: 2, 4, 6, 8, 10, 12).

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

b) Podaj przykład zdarzenia pewnego A i zdarzenia niemożliwego B.

Odpowiedź: a) zbiór zdarzeń elementarnych składa się z 12 elementów.

b) A – wypadnie orzeł lub reszka i parzysta liczba oczek, B – wypadną dwa orły.

5.5.3 Rzucono dwiema zwykłymi sześciennymi kostkami do gry. Zdarzenie A – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest mniejsza od 2, zdarzenie B – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest większa lub równa 2. Jakimi zdarzeniami są zdarzenia A i B.

Odpowiedź: A – niemożliwe, B – pewne.

5.5.4 W urnie są trzy kule: biała, zielona i niebieska. Losujemu kolejno dwie kule bez zwracania. Wybisz zbiór zdarzeń elemnetarnych tego doświadczenia losowego.

Odpowiedź: $\{(b,z),(b,n),(z,b),(z,n),(n,b),(n,z)\}$.

5.6 Własności prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:
- Korzystać z własności prawdopodobieństwa.

Zdarzenia losowe opisywaliśmy jako pewne podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Omówimy teraz niektóre pojęcia, które związane są z własnościami tych zbiorów.

Zdarzenia przeciwne

Zdarzenie przeciwne jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych przestrzeni, które nie sprzyjają danemu zdarzeniu. Zdarzenie przeciwne oznaczamy tą samą literą, co dane zdarzenie, ale ze znakiem prim.

$\boldsymbol{A}$ – dane zdarzenie

$\boldsymbol{A'}$ – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

Przykład 1

Rzucamy jeden raz kostką do gry. Doświadczenie A – polega na wyrzuceniu 1, 3 lub 4.

$A = \{1,3,4\}$

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A będzie zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu jednej z liczb: $2,5,6$.

$A' = \{2,5,6\}$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

Twierdzenie

Jeżeli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to zachodzą równości:

$\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

$\boldsymbol{A \cup A' = 1}$

$\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$

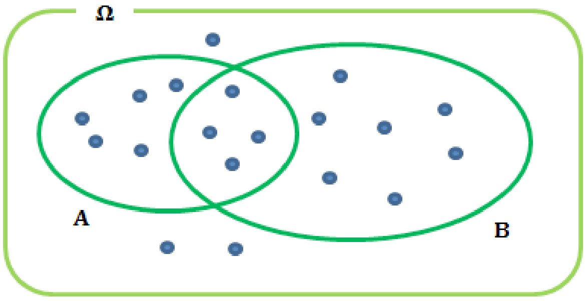
Przykład 2

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają te zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B. Aby obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$, należy ten zbiór wyznaczyć.



Rysunek 5-3. Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

$$P(A \cap B) = \frac{4}{19}$$

Przykład 3

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wypadły co najwyżej cztery oczka.

b) B – wypadła parzysta liczba oczek.

c) $P(A \cap B)$.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 6$

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{\overline{A}} = 4$

Zatem $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $B = \{2, 4, 6\}$

$\overline{\overline{B}} = 3$

Zatem $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

$\overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Zdarzenia wykluczające się

Zdarzenia wykluczające się to zdarzenia, które nie mają części wspólnej.

Przykład 4

Wybieramy losowo literę alfabetu spośród liter: a, b, c, d, e, f, g, h. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu samogłoski, a zdarzenie losowe B na wylosowaniu litery g lub h.

$A = \{a, e\}$

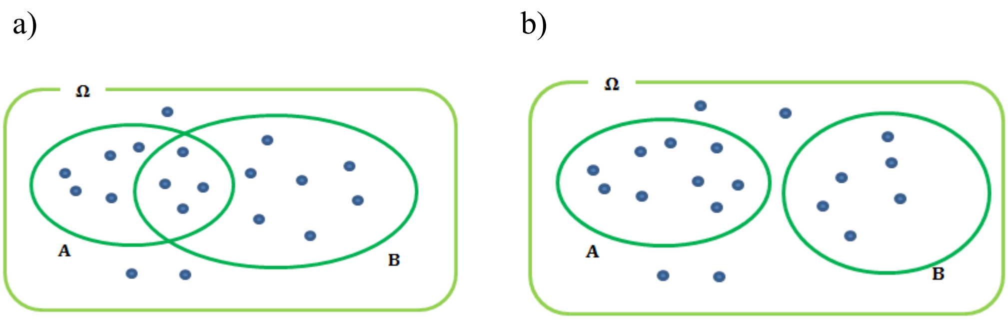
$B = \{g, h\}$

Zdarzenia nie mają żadnego wspólnego zdarzenia elementarnego, a więc wykluczają się. Prawdopodobieństwo części wspólnej dwóch wykluczających się zdarzeń wynosi 0.

$P(A \cap B) = 0$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Przykład 5



Rysunek 5-4. Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Na rysunkach powyżej przedstawiona została przestrzeń zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego.

Obliczymy teraz $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, a następnie sprawdzimy, czy $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

a) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{11}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{16}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{11}{19} = \frac{20}{19}$

Więc $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$

b) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{6}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{15}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{6}{19} = \frac{15}{19}$

Więc: $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

Łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Zależy to od tego, czy zdarzenia te się wykluczają, czy nie.

Twierdzenie

W doświadczeniu losowym dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

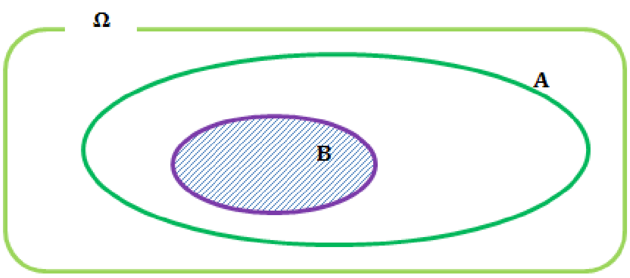
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Przykład 6

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $B \subset A$ oraz $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}3$. Oblicz $P(A \cup B)$.



Skoro $B \subset A$, to: $A \cup B = A$ i $A \cap B = B$

Z twierdzenia: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Skoro $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}3$ i $P(A \cap B) = 0{,}3$, to:

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(A \cup B) = 0{,}7$

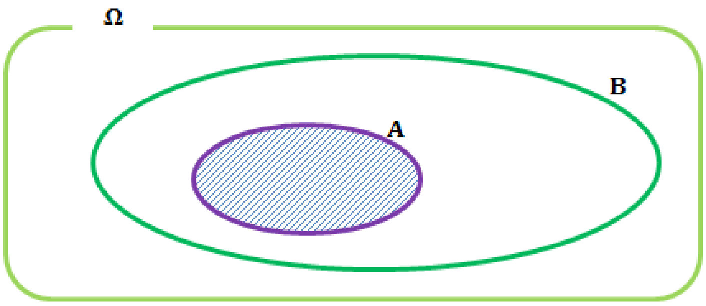
Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń

Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Przykład 7

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy $B \backslash A$.



$$A \subset B \ \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

Korzystając z twierdzenia:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$$

oraz $(B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset (B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$$P(B) = P(B \backslash A) \cup (B \cap A) = P(B \backslash A) + P(B \cap A) - P((B \backslash A) \cap (B \cap A)) \\ = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$$0{,}7 = P(B \backslash A) + 0{,}3$$

$$P(B \backslash A) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$$

Twierdzenie

Dla dowolnych zdarzeń $\boldsymbol{A \ i \ B \subset \Omega}$ zachodzą następujące własności:

$$\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$$

$$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$$

$$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$$

$\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$**, gdy** $\boldsymbol{A \subset B \subset \ \Omega}$

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ZADANIA

5.6.1 Losujemy kulę ze zbioru 14 ponumerowanych kul. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu kuli o numerze parzystym. Zdarzenie losowe B polega na wylosowaniu kuli o numerze większym lub równym 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego część wspólną zdarzeń A i B.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$.

5.6.2 Oblicz prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych A i B oraz prawdopodobieństwo różnicy $B \backslash A$, jeżeli: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{1}{12}, P(B \backslash A) = \frac{1}{4}$.

5.6.3 Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B, wiedząc, że zdarzenia A i B się wykluczają oraz: $P(A) = \frac{1}{10}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź: $P(B) = \frac{1}{2}$.

5.6.4 Jeżeli A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i $P(A) = 5 \cdot P(A')$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{6}$.

5.6.5 A i B są takimi zdarzeniami losowanymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Odpowiedź: $P(A \cup B) = 0{,}4$.

5.6.6 O zdarzeniach losowych A i B wiemy, że: $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \backslash B)$

Odpowiedź:

a) $P(A \cap B) = \frac{11}{30}$.

b) $P(A \backslash B) = \frac{2}{15}$.

5.7 Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia oznaczamy $P(A)$. W nawiasie zapisujemy symbol zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy iloraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A spełnia warunek: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1.}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego 0.

Przykład 1

Rzucamy dwoma identycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

Wyznaczmy najpierw zbiór Ω, czyli przestrzeń, która zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać.

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$$

Wypiszmy teraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

$$A = \{(4,6)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 6$$

Więc prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

5.7.1 Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu w pierwszym i trzecim rzucie reszki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}$.

5.7.2 W grze losowej losowane są kulki z trzech pojemników. W pierwszym znajdują się kulki ponumerowane od 1 do 7. W drugim znajdują się dwie kulki: biała i niebieska, a w ostatnim pojemniku znajduje się sześć kulek oznaczonych literami alfabetu: A, B, C, D, E, F. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania ciągu, w którym liczba jest parzysta, a litera alfabetu jest samogłoską.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{7}$.

5.7.3 Z tali 52 kart losujemy 3 karty. Ile możliwych ciągów kart możemy uzyskać? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy w tym samym rozdaniu jako pierwszą kartę damę pik, a jako drugą jakiegokolwiek króla?

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{663}$.

5.7.4 Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 8 \leq 0$:

a) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma wynosi 8,

b) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych.

Odpowiedź: a) $P(A) = \frac{1}{9}$, b) $P(A) = \frac{1}{6}$.

5.8 Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń za pomocą drzewek

Jeżeli doświadczenie losowe składa się z więcej niż jednego etapu, takich jak serie rzutów kostką lub monetą, zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa bywa skomplikowane. Przydatną wówczas jest tak zwana metoda drzew.

Drzewem nazywamy graf ilustrujący przebieg doświadczenia losowego, na którym każdej krawędzi przyporządkowuje się prawdopodobieństwo.

Przykład 1

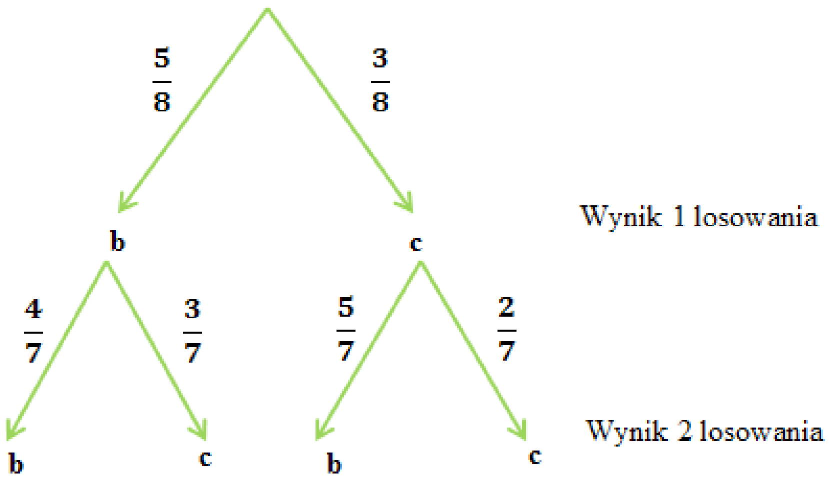
W urnie jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jedną kulę i, bez zwracania, losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wylosowano dwie kule białe.

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów.

Niech b – oznacza kulę białą, a c – kulę czarną.

Budujemy drzewo dla naszego doświadczenia losowego.



Pierwsze losowanie daje nam dwie możliwości, wypadnie kula biała lub kula czarna.

W drugim losowaniu mamy te same możliwości. Osobno rysujemy je dla obu wyników, wynikających z losowania pierwszego.

Reguła iloczynów

Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź.

Reguła sum

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych według reguły iloczynów dla tych gałęzi.

Więc:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych wynosi:
$P(\{(b,b)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej i czarnej wynosi:
$P(\{(b,c)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej i białej wynosi:
$P(\{(c,b)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosi:
$P(\{(c,c)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

a) A – wylosowano dwie kule białe

$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów

$B = \{(b,c),(c,b\}$

Obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystamy z reguły dodawania. Jeżeli zdarzeniu sprzyjają co najmniej dwa wyniki na drzewie, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest sumą prawdopodobieństw tych wyników.

$$P(B) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

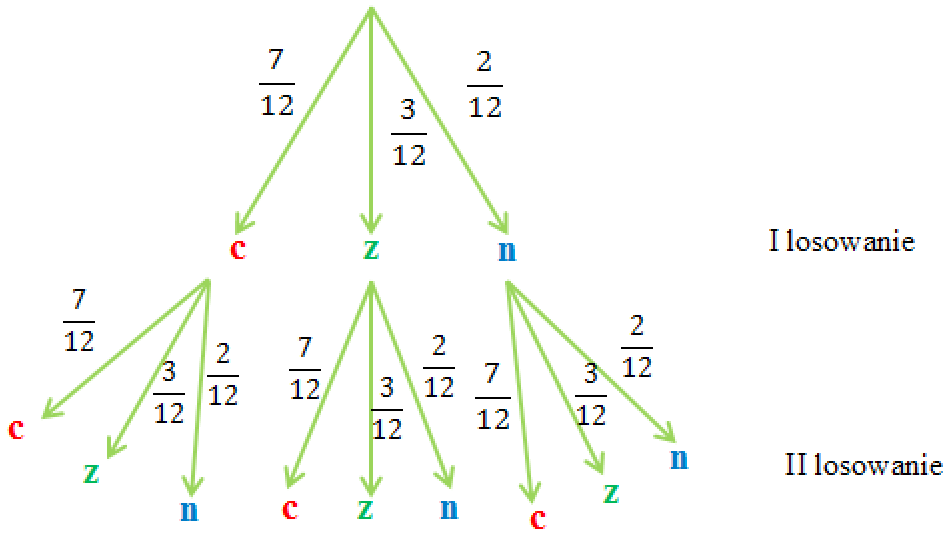
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $P(A) = \frac{5}{14}$, a prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w różnych kolorach wynosi $P(B) = \frac{15}{28}$.

Przykład 2

Mamy 12 kul: 2 niebieskie, 3 zielone, 7 czerwonych. Losujemy kolejno trzy kule (ze zwracaniem). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

A – wylosowanie za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

Budujemy drzewo naszego doświadczenia:



$$P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{14}{144} + \frac{6}{144} + \frac{4}{144} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

5.8.1 W urnie są 3 kule zielone i 1 czerwona. Losujemy kolejno trzy kule (bez zwracania). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowania wszystkich kul zielonych.

b) wylosowania za trzecim razem kuli zielonej.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$.

5.8.2 Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie dwóch czwórek.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{64}$.

5.8.3 Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na:

Zdarzenie A – polegające na tym, że co najmniej raz wypadł orzeł.

Zdarzenie B – polegające na tym, że tylko raz wypadł orzeł.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$.

5.8.4 Gra polega na rzucaniu sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 oczek, to wygrywamy 10 złotych i możemy grać dalej, a jeśli wypadnie inna liczba oczek niż 6, to odpadamy z gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że jeżeli zagramy, wygramy 30 złotych.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{1296}$.

5.8.5 Z zestawu tematów egzaminacyjnych, składającego się z 25 pytań z matematyki (10 dotyczy działań na liczbach, 9 geometrii, 6 rachunku prawdopodobieństwa), wyjęto losowo 1 zagadnienie i, nie oglądając go, odłożono na bok. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano temat z działań na liczbach.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{2}{5}$.

5.8.6 W konkursie omnibus ustalono następujące reguły: dla 1. tury rozgrywek uczestnik losuje jedną z liter wyrazu omnibus i jeśli jest to spółgłoska, to losuje pytanie z urny, w której są 3 pytania z matematyki, 2 z literatury i 3 z muzyki. W przypadku wylosowania samogłoski, uczestnik losuje pytanie z urny, w której są 2 pytania z matematyki, 3 z historii i 3 z geografii. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane pytanie dotyczy matematyki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{28}$.

5.9 Reguła mnożenia i dodawania

Teraz nauczę się:

- Stosować regułę mnożenia i dodawania.

Często mamy do czynienia ze zbiorami, dla których chcielibyśmy znać liczbę elementów. Wygodnie jest, gdy wszystkie elementy są wypisane i można je policzyć. Niekiedy jednak, mając pewien zbiór, budujemy z jego elementów nowe zbiory i chcemy poznać liczbę elementów w tych nowych zbiorach.

Zasada mnożenia

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ sposobów.

Zasada dodawania

Jeżeli wybór polega na jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ sposobów.

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób?

Jest 5 osób i pięć miejsc w kolejce. Pierwszą osobę można ustawić na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3 sposoby, czwartą na 2 sposoby, a piątą tylko na 1 sposób.

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Odpowiedź: Pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

Przykład 2

Podczas egzaminu student wybiera 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?

Student pierwsze pytanie losuje spośród 6, drugie spośród 5, trzecie spośród 4 i czwarte pytanie spośród 3.

Zatem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Kolejność losowania poszczególnych pytań nie jest istotna, dlatego otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień czterech pytań: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360}{24} = 15$$

Odpowiedź: Student może wybrać pytania na 15 sposobów.

Przykład 3

Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ tak, aby cyfry w nich się nie powtarzały?

W tym przypadku nie wykorzystujemy wszystkich cyfr jednocześnie. Tworzymy liczby trzycyfrowe, mając do dyspozycji pięć cyfr. Kolejność wybieranych cyfr jest ważna.

Wśród tych cyfr nie ma zera, zatem każda z nich może być pierwszą cyfrą tworzonej liczby. Mamy 5 możliwych cyfr na pierwsze miejsce, 4 możliwe cyfry na drugim miejscu i 3 na trzecim miejscu.

Zatem liczba wszystkich możliwych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z podanych cyfr jest równa:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Odpowiedź: Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

ZADANIA

5.9.1 Pewna pani dekoruje stół na przyjęcie gości. Ma do wyboru 6 obrusów, 3 wazony i 2 świeczniki. Ile różnych dekoracji może uzyskać?

Odpowiedź: 36 dekoracji.

5.9.2 Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych?

Odpowiedź: 90.

5.9.3 Z urny zwierającej 4 kule (biała, czarna, niebieska, zielona) losujemy trzy kule. Ile jest możliwych losowań, w których cyfry się nie powtarzają.

Odpowiedź: 4 możliwe losowania.

5.9.4 Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4.

Odpowiedź: Liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 jest 18.

5.9.5 Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy trzy cyfry. Ile liczb trzycyfrowych można w ten sposób utworzyć, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać,

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

Odpowiedź: a) 343 liczby, b) 210 liczb.

5.9.6 Na ile sposobów można ustawić w szeregu 3 chłopców i 2 dziewczynki, tak aby:

a) najpierw stały dziewczyny, a następnie chłopcy,

b) pierwsza stała dziewczyna,

c) pierwszy i drugi stał chłopiec,

d) żaden z dwóch chłopców nie stał obok siebie.

Odpowiedź: a) 12, b) 48, c) 36, d) 12.

5.10 *Pojęcie silni

Teraz nauczę się:

- Stosować pojęcie silni do rozwiązywania problemów.

Definicja

Silnią liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$ nazywamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż $\boldsymbol{n}$. W notacji matematycznej $\boldsymbol{n}!$ czytamy, jako „*n silnia*".

Oznaczenie symboliczne $n!$ wprowadził w 1808 roku francuski matematyk Christian Kramp.

Symbolicznie można zapisać:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Definicja

$$\boldsymbol{n}! = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{dla\ n = 0} \\ \boldsymbol{n(n-1)!} & \boldsymbol{dla\ n \geq 1} \end{cases}$$

Przykład 1

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Przykład 2

Oblicz $5! - 2! \cdot 3!$

$5! - 2! \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 120 - 12 = 108$

Przykład 3

Oblicz $\frac{12!}{10! \cdot 5!}$

$12!$ możemy zapisać jako $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 10! \cdot 11 \cdot 12$

Przykład 4

Doprowadź wyrażenie $\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!}$ do najprostszej postaci.

Rozpiszmy najpierw $(2n+2)!$

$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$

oraz $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

Wracamy do przykładu, i otrzymujemy:

$$\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$$
$$= \frac{(2n+1) \cdot 2(n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}$$

Zadania

5.10.1 Oblicz:

a) $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ b) $\frac{12!}{11!\cdot 4!}$ c) $\frac{9!\cdot 7!}{(6!)^3}$

Odpowiedź:

a) 45. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{49}{10}$.

5.10.2 Uprość:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} =$ b) $\frac{(n+2)!}{n!} =$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} =$

d) $\frac{n!}{(n-3)!} =$ e) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!} =$ f) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!} =$

Odpowiedź:

a) $n+1$. b) $(n+1)(n+2)$. c) $(n+3)$.

d) $(n-2)(n-1)n$. e) $\frac{1}{(n-2)(n-1)}$. f) $\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n}$.

5.11 *Kombinatoryka

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: „ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",„Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 24 osobowej?" itp.

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.

Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy $k-$ elementowy podzbiór tego zbioru.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Przykład 1

Oblicz:

a) $C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$

b) $C_7^3 \cdot C_4^2 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2} 35 \cdot 6 = 210$

Przykład 2

Na ile sposobów z grupy 12 osób można wybrać trzech przedstawicieli?

Wybierając przedstawicieli tej grupy tworzymy 3-osobowy podzbiór.

Jest to 3-elementowa kombinacja ze zbioru 12-elementowego.

Więc:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{9!\cdot 2\cdot 3\cdot} = 220$$

Odpowiedź: z grupy 12 osób, trzech przedstawicieli można wybrać na 220 sposobów.

Przykład 3

Obliczmy teraz trzy przykłady:

a) C_n^0

b) C_n^n

c) C_n^1

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!} = n$$

Wniosek

Jeżeli $n \in N$, to:

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1, \qquad C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = n}$$

ZADANIA

5.11.1 Oblicz:

a) C_8^2 b) $C_{10}^3 \cdot C_6^1$ c) $\frac{C_{12}^3}{C_{14}^5}$ d) $C_{25}^{23} + C_{25}^{24}$

Odpowiedź:

a) 28 b) 720 c) $\frac{10}{91}$ d) 325

5.11.2 W klasie jest 10 dziewcząt i 14 chłopców. Na ile sposobów możesz wybrać grupę, w której są dwie dziewczyny i 4 chłopców?

Odpowiedź: na 45045 sposobów.

5.11.3 Spośród 50 losów na loterii tylko 10 jest wygrywających. Na ile sposobów można wybrać 4 losy tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający.

Odpowiedź: Wszystkich sposobów wylosowania 4 losów w tej loterii tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający, jest 138 910.

5.11.4 Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i trzy trójki.

Odpowiedź: Szukanych liczb ośmiocyfrowych jest 192080.

Wariacje

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład 4

W finale konkursu matematycznego bierze udział 10 uczestników. Ile jest możliwości zajęcia przez nich trzech pierwszych miejsc, jeżeli uwzględniamy kolejność (I, II i III miejsce)?

$$V_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 720.

Przykład 5

Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:

$$V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

Odpowiedź: Istnieje 5040 czterocyfrowych kodów o różnych cyfrach.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k –wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Liczba k –wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = n^k}$$

Przykład 6

Ile słów sześcioliterowych (z sensem lub bez) można utworzyć z liter $\{A, B, C\}$? Na każde z 6 miejsc możemy wybrać jedną z 3 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$V_3^6 = 3^6 = 729$$

Odpowiedź: Można utworzyć 729 wyrazów.

Przykład 7

Wypełniając test składający się z 10 pytań, można zakreślić tylko jedną z trzech odpowiedzi. Na ile sposobów można rozwiązać ten test?

Przyjmijmy, że pierwsza odpowiedź to „A”, druga „B”, a trzecia „C”.

Będą to 10-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru 3-elementowego $\{A, B, C\}$.

$$V_3^{10} = 3^{10} = 59049$$

Odpowiedź: Test można rozwiązać na 59049 sposoby.

ZADANIA

5.11.5 Na ile sposobów można ustawić pięcioosobową kolejkę, wybierając ludzi spośród 10 osób?

Odpowiedź: Na 30240 sposobów.

5.11.6 Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5?

Odpowiedź: Wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5 jest 5712.

5.11.7 Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A, B, C, D\}$?

Odpowiedź: 16 wyrazów.

5.11.8 Budynek składa się z 4 pięter. Do windy wchodzi na parterze 6 osób. Na ile sposobów mogą oni opuścić windę na kolejnych piętrach?

Odpowiedź: Na 4096 sposobów.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

1.[66] Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa:

a) 100

b) 99

c) 90

d) 19

2. Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa:

a) 400 zł b) 500 zł c) 600 zł d) 700 zł

3.[67] W loterii liczbowej wylosowano dziesięć liczb: 4, 3, 3, 3, 4, 6, 1, 5, 1, 6. Mediana tych danych jest równa:

a) 5 b) 3,6 c) 3,5 d) 3

4. **(1 pkt)** Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfra jedności należy do zbioru A {2, 4, 5, 7}, cyfra dziesiątek do zbioru B = {6, 7, 8}, a cyfra setek do zbioru C = {2, 4, 5, 6}, jest:

a) 48 b) 36 c) 24 d) 12

66 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

67 Zadania 3, 4: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.

5.[68] Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawione są w tabeli:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	7	6	4	2

Mediana ocen ze sprawdzianu jest równa:

a) 3,5 b) 3, c) 4 d) 4,5

6. W pudełku są 4 kule białe i x kul czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{5}$, gdy:

a) $x = 6$ b) $x = 8$ c) $x = 10$ d) $x = 12$

7.[69] Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

a) $\frac{4}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

8. W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

a) 1 b) 14 c) 7 d) 8

9.[70] Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Mediana zarobków tych 6 osób jest równa:

a) 3400 zł b) 3500 zł c) 6000 zł d) 7000 zł

10. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4. Wówczas:

a) $p < \frac{1}{5}$ b) $p = \frac{1}{5}$ c) $p = \frac{1}{4}$ d) $p > \frac{1}{4}$

11.[71] W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa:

a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 5

12. Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi, B' jest zdarzeniem przeciwnym do B, $P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,12 b) 0,18 c) 0,6 d) 0,9

68 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.
69 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
70 Zadania 9, 10: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 08.03.2013.
71 Zadania 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.

13.[72] Tabela przedstawia zestawienie liczby błędów popełnionych przez zdających część teoretyczną egzaminu na prawo jazdy.

Liczba błędów	0	1	2	x
Liczba zdających	8	4	10	8

Średnia arytmetyczna liczby tych błędów popełnionych przez jednego zdającego jest równa 1,6. Wynika stąd, że:

a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ d) $x = 6$

14. O zdarzeniach A oraz B zawartych w Ω wiadomo, że $P(A) = \frac{5}{6}, P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Wtedy:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ b) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ c) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ d) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

15.[73] Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{18}$

16. Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?". Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

17.[74] Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy:

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

18.[75] Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy?

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

---

72 Zadania 13, 14: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
73 Zadania 15, 16: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
74 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 09.03.2013.
75 Zadanie 18: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

19.

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	15	17	19	15	19	15

Podaj medianę i dominantę rzutu kostką.

Odpowiedź: $M = 3$, $D = 3$ lub $D = 5$.

ZADANIA OTWARTE

1.[76] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

2.[77] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5} losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania, tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba jest mniejsza od 432.

3.[78] **(4 pkt)** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednej reszki czy wyrzucenie orła w co drugim rzucie?

4.[79] **(2 pkt)** Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości, średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

5.[80] **(2 pkt)** Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

6.[81] **(4pkt)** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki: (1) liczba jest podzielna przez 25, (2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste, (3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

7.[82] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1 ,2, 3,..., 7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

---

76 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 10.03.2013.

77 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

78 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

79 www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 10.03.2013.

80 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 10.03.2013

81 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 10.03.2013.

82 www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 10.03.2013.

8.[83] **(4 pkt)** Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

9.[84] **(4 pkt)** W grupie 200 osób 65% uczy się języka angielskiego, 47% uczy się języka rosyjskiego, a 30% uczy się obu tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z tej grupy osoba nie uczy się żadnego z wymienionych języków.

10. **(2 pkt)** Doświadczenie polega na rzucie dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek będzie większa od 7, ale nie przekroczy 11.

11. **(2 pkt)** Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 6.

12. **(2 pkt)** Z liczb dwucyfrowych wybrano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 5?

13. **(4 pkt)** W urnie A jest 5 kul białych i 3 czarne, w urnie B są 4 kule białe i 6 czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej z urn. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyjmiemy kule w jednym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

14. **(4 pkt)** W urnie jest 7 kul białych i 3 czarne. Losujemy z tej urny jedną kulę, a następnie z pozostałych znowu jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ten sposób wyjmiemy kule w różnych kolorach. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

15. **(5 pkt)** W urnie jest 5 kul białych, 8 zielonych i n niebieskich. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej lub niebieskiej jest równe $\frac{3}{4}$. Wyznacz liczbę n. Odpowiedź: $n = 7$.

16. **(2 pkt)** W urnie jest 16 kul białych, 14 kul zielonych, 6 niebieskich i 4 żółte. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, ęe będzie to kula zielona lub żółta.

17. **(6 pkt)** W urnie znajdują się kule białe, czerwone i zielone. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej jest trzykrotnie większe od prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej lub zielonej. Wiedząc, że co czwarta kula jest biała, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej.

83 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 10.03.2013.
84 Zadania 9–17: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*.
2. Testy maturalne. *Matematyka 2010*, Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań*.
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*. Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*. Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29
2. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o
3. www.math.edu.pl/symetria
4. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram
5. www.violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom
7. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski
8. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
11. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
12. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
13. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
14. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
15. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
16. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
20. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
21. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
22. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
23. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian
24. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu
25. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia
26. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
27. www.zadania.info
28. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_351687432168743168741687651646 87/mat_ark_pdst.pdf
29. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
30. www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39funkcja_fxa_x_homograficzna
31. www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne
32. www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
34. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

35. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
36. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
37. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
38. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
39. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
40. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. II

Matematyka

KLASA I

Podręcznik dla nauczycieli – Technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują się pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Ja w świecie liczb

Z liczbami spotykasz się na każdym kroku, każdego dnia, dlatego musisz sprawnie wykonywać różnego rodzaju działania na liczbach rzeczywistych. Przypomnij sobie, czego nauczyłeś się w gimnazjum, i postaraj się jak najlepiej opanować nowe wiadomości i umiejętności, które w życiu na pewno ci się przydadzą.

To już potrafię:

1. Odczytać i zapisać liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
2. Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych;
3. Zamienić ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienić ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
4. Zaokrąglić rozwinięcia dziesiętne liczb;
5. Obliczyć wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne;
6. Szacować wartości wyrażeń arytmetycznych;
7. Stosować obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.);
8. Interpretować liczby wymierne na osi liczbowej;
9. Obliczyć odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
10. Wskazać na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$;.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. W 2005 roku Szanghaj liczył około 14 600 00 mieszkańców. W postaci wykładniczej liczbę tę zapisuje się jako:

a) $146 \cdot 10^5$

b) $14{,}6 \cdot 10^6$

c) $0{,}146 \cdot 10^8$

d) $1{,}46 \cdot 10^7$

Zad.2. Liczbę $\sqrt{72}+\sqrt{32}-\sqrt{98}$ można zapisać w postaci:

a) $2\sqrt{6}+4\sqrt{2}-7\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$

d) $17\sqrt{2}$

Zad.3. Dane są liczby zapisane w systemie rzymskim, największa z nich to:

a) MCMLX

b) MCMXCIX

c) MMVII

d) MCMLXXIV

Zad.4. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{7}{\sqrt{5}}$, należy mianownik tego ułamka pomnożyć przez:

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{5}-1$

d) $\sqrt{5}+1$

Zad.5. Drut o długości 45 m przecięto na trzy części, których stosunek długości jest równy 1: 3: 5. Najdłuższa z tych części ma długość:

a) $15\ m$

b) $5\ m$

c) $25\ m$

d) $9\ m$

Zad.6. Przybliżona wartość$\sqrt{13}$ wynosi:

a) 3,62

b) 3,60

c) 3,61

d) 3,63

Zad.7. Ile jest liczb ujemnych wśród liczb przeciwnych do: $-\frac{1}{4}, 2,\ \frac{3}{5},\ 5\frac{1}{2}, -0{,}75$?

a) 5

b) 3

c) 2

d) 4

Zad.8. O godzinie 4^{00} termometr wskazywał $-12°C$, a o godzinie 10^{00} ten sam termometr wskazywał $+2°C$. Różnica temperatur w tym dniu wynosiła:

a) -10

b) 14

c) -14

d) 10

Zad.9. Jeśli jest godzina 13^{14}, to do godziny 15^{32} pozostało sekund:

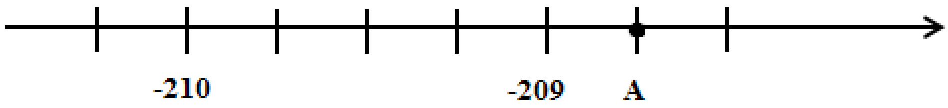
a) $10\ 000$

b) 8280

c) 7500

d) 2180

Zad.10. Punkt A na osi liczbowej ma współrzędne:



a) $-208,75$

b) $-209,25$

c) $208,75$

d) $209,75$

ZADANIA OTWARTE

1. Masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24} kg$, masa Księżyca $7 \cdot 10^{22} kg$. Ile wynosi stosunek masy Ziemi do masy Księżyca? Wynik podaj w przybliżeniu.

2. Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1,5)^{-2}}$?

3. Zapisz wyrażenie $\left[\frac{(a^7:a^5)^3\cdot a^4}{a^{13}:a^2}\right]^3$ w postaci potęgi liczby a

4. Z dwóch przystani na rzece odległych od siebie o 100 km wyruszają dwie łódki. Jedna płynie z A do B z prędkością 12 km/h, druga z B do A z prędkością 13 km/h. Po jakim czasie łódki się miną?

5. Jednego dnia cenę pewnego towaru zwiększono o 15%, zaś następnego dnia zmniejszono o 20%. Oblicz początkową cenę tego towaru, jeśli ostatecznie po tych zmianach wynosiła ona 345 zł.

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	4	C	C	B	C	B	A

Zadania otwarte

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – Masa ziemi – $6 \cdot 10^{24} kg$ y – Masa księżyca – $7 \cdot 10^{22} kg$ $\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{7 \cdot 10^{22} kg} = \frac{6}{7} \cdot 10^2 = \frac{600}{7} \approx 85{,}714$
2	$\frac{\sqrt[3]{64} - (\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + (-1{,}5)^{-2}} = \frac{4 - (7 - 4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{20}{9}} = \frac{9}{20}$ $1{,}8 - 100\%$ $\frac{9}{20} - x$ $45 = 1{,}8x \Rightarrow x = 25\%$
3	$\left[\frac{(a^7 : a^5)^3 \cdot a^4}{a^{13} : a^2}\right]^3 = \left[\frac{(a^2)^3 \cdot a^4}{a^{10}}\right]^3 = \left[\frac{a^{10}}{a^{10}}\right]^3 = a^0$
4	x – czas do spotkania $12x$ – droga I łódki $13x$ – droga II łódki $14x + 13x = 100 \Rightarrow x = 4$ Odp. Łódki miną się po 4 godzinach.
5	x – cena początkowa $x + 0{,}15x - 0{,}20 \cdot 1{,}15x = 345 \Rightarrow x = 375\ zł$ Odp. Początkowa cena wynosiła 375 zł.

1.1 Zbiory liczbowe

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości i inne wytwory dzieł ludzkich, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próbę liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano dobra, dni, czy np. ludzi w konkurencyjnej grupie. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce[1].

Zbiór liczb naturalnych (N) – nazywamy zbiór liczb 0,1,2,3,4,5,6,7,8...

Zapis matematyczny zbioru:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Zbiór ten jest zbiorem nieskończonym. Najmniejsza liczba naturalna w tym zbiorze to 0. Największa liczba naturalna nie istnieje. Podzbiorem liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych dodatnich:

$$\mathbb{N}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\} = \mathbb{N} \backslash \{\mathbf{0}\}$$

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb, 10.02.2013

Zbiór liczb całkowitych (Z) – stanowią wszystkie liczby naturalne N i liczby do nich przeciwne ...–5,–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,5...

Zapis matematyczny zbioru:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

Zbiór liczb całkowitych jest zbiorem nieskończonym. Nie istnieje najmniejsza i największa liczba całkowita. Zbiór ten możemy podzielić na dwa podzbiory: liczb całkowitych dodatnich oznaczanych jako $\mathbf{C}_+ = \{1,2,3,\dots\}$ oraz liczb całkowitych ujemnych oznaczanych jako $\mathbf{C}_- = \{\dots,-3,-2,-1\}$.

Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.

Zbiór liczb wymiernych (W) to zbiór wszystkich liczb, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i q jest różne od 0. Jest to zbiór nieskończony. Postać p/q liczby wymiernej nazywamy postacią ułamkową tej liczby.

Podzbiorem liczb wymiernych jest zbiór liczb naturalnych i całkowitych. Oznacza to, że każda liczba całkowita i naturalna jest jednocześnie liczbą wymierną.

Przykłady liczb wymiernych[2]:

$$-0.04=\frac{-4}{100}=\frac{-1}{25}$$
$$\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$$
$$-\sqrt[3]{27}=-3=\frac{-3}{1}$$
$$0.166(6)=\frac{1}{6}$$
$$5=\frac{5}{1}$$

Rysunek 1-1 – Liczby wymierne

Jak widać, każdą z nich da się zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Zbiór liczb niewymiernych (NW) – nazywamy zbiór liczb, które nie dadzą się przedstawić w postaci ułamka p/q, gdzie p i q należą do zbioru liczb całkowitych i dodatkowo q jest różne od 0.

Przykłady liczb niewymiernych[3]:

$$\pi$$
$$\sqrt[2]{2}$$
$$-\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[5]{7}$$
$$\sqrt[2]{\pi}$$
$$\frac{1}{\pi}$$

Rysunek 1-2 – Liczby niewymierne

2 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png, 10.02.2013
3 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png, 10.02.2013

Zbiór liczb rzeczywistych (R) – jest sumą zbiorów liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych. Jest uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych.

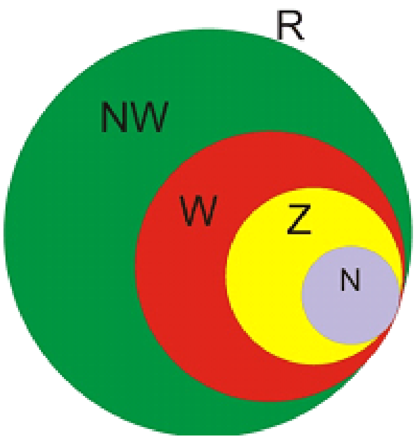
Przykłady liczb rzeczywistych[4]:

0
π
-0.123
$\sqrt{5}$
$\sqrt[5]{7}$
-3
$\frac{3}{4}$
1230

Rysunek 1-3 – Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych dzieli się na dwa podzbiory: zbiór liczb rzeczywistych **dodatnich** $\mathbb{R}_+$ i **ujemnych** $\mathbb{R}_-$.

Zależności między zbiorami liczbowymi:



Symbol $\subset$ czytamy „zawiera się”.

- $N \subset Z$
- $N \subset W$
- $Z \subset W$
- $W \subset R$
- $NW \subset R$

Rysunek 1-4 – Zależności między zbiorami liczbowymi

ZADANIA

1.1.1 Z podanych liczb wypisz liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne.

Które z nich mają rozwinięcie nieskończone okresowe?

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{2}{13}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 44, 0, (123), $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{27}$, –3, 16, $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt[3]{5}$, –5

4 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png, 10.02.2013

Odpowiedź:

0, (6); 0,125; –0,(153846); 1,118…; 1,5707…; 44; 0,123123…; 1,732…; –3; –3,16; 1,4142…; 0; 1,709…; –5

N={0; 44}, Z={–5;–3; 0; 44 }, W={–5; –3,16; –3; $-\frac{2}{13}$, 0; 0,(123); ;$\frac{2}{3}$, 44}, NW={$\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$}

1.1.2 Wypisz wszystkie elementy zbioru A wiedząc, że A jest zbiorem:

a) wszystkich całkowitych, jednocyfrowych liczb nieparzystych,

b) wszystkich liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 20, podzielnych przez 3,

c) wszystkich dwucyfrowych liczb pierwszych mniejszych od 30,

d) wszystkich dodatnich dzielników liczby 12.

Odpowiedź: a) 1, 3, 5, 7, 9; b) 3, 6, 9, 12, 15,18; c) 11, 13, 17, 19, 23, 29; d) 1, 2, 3, 6, 12

1.1.3 Wypisz wszystkie elementy zbioru A, jeśli:

a) A = $\{x: x|20 \wedge x > 0\}$

b) A = $\{x: x \in N \wedge x < 20 \wedge NWD(x,18) = 1\}$

c) A = $\{x: x \in N \wedge x < 25 \wedge NWD(x,24) = 2\}$

d) A = $\{x: x \in N \wedge NWW(x,12) = 48\}$

Odpowiedź: a) A = {1,2,4,5,10, 20}; b) A = {1,5,7,11, 13, 17, 19}; c) A = {2,10, 14 }; d) A = {48}

Ciekawostka

Zbiór liczb rzeczywistych najprościej określamy mówiąc, że są to „wszystkie liczby". Jest to pewne uproszczenie, ponieważ istnieją liczby, które nie należą do zbioru liczb rzeczywistych – są nimi liczby zespolone.

Zbiór liczb zespolonych został wprowadzony ze względu na to, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie można było wykonywać pierwiastkowania liczb ujemnych. Liczby zespolone mają postać: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{i}$, gdzie $\boldsymbol{i} = \left(\sqrt{-1}\right)$ nazywa się jednostką urojoną. Liczba a jest nazywana częścią rzeczywistą, liczba b częścią urojoną.

1.2 Różne postacie liczb rzeczywistych

Teraz nauczę się:

Przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków i potęg).

Po usystematyzowaniu wiedzy na temat zbiorów liczbowych, zastanówmy się, w jaki sposób możemy przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego czy ułamka dziesiętnego okresowego).

Aby otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby zapisanej w postaci ułamka zwykłego, należy podzielić jego licznik przez mianownik, np. $\frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{25} = 0{,}04; \frac{1}{3} = 0{,}333\ ...$

A w jaki sposób przejdziemy z rozwinięcia dziesiętnego na postać ułamka zwykłego?

Przykład 1

Zapisz liczbę $0{,}333\ ...$ w postaci ułamka zwykłego

$0{,}333\ ... = x\ /\cdot 10$

$3{,}333\ ... = 10x$

$3 + 0{,}333\ ... = 10x$

$3 + x = 10x$

$3 = 9x /: 9$

$x = \frac{3}{9}$ ostatecznie otrzymujemy:

$x = \frac{1}{3}$

Przykład 2

Zapisz liczbę $0,(125)$ w postaci ułamka zwykłego

$0,(125) = 0{,}125125\ ...$

$0{,}125125\ ... = x\ /\cdot 1000$

$125{,}125125\ ... = 1000x$

$125 + 0{,}125125\ ... = 1000x$

$125 + x = 1000x$

$125 = 999x /: 999$

szukanym ułamkiem jest:

$x = \frac{125}{999}$

Przykład 3

Zapisz liczbę $3{,}7235235235\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$3{,}7235235235\ldots = x \ / \cdot 10$

$37{,}235235235\ldots = 10x \ / \cdot 1000$

$37235{,}235235\ldots = 10000x$

Jeżeli: $37235{,}235235\ldots - 37{,}235235235\ldots = 37198$, czyli

$10000x - 10x = 37198,$

$9990x = 37198 \ /: 9990$

więc $x = \frac{37198}{9990} = \frac{18599}{4995}$

Nie wszystkie liczby rzeczywiste można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego skończonego czy też rozwinięcia nieskończonego okresowego. **W takiej formie można zapisać wszystkie liczby wymierne.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Stosując algorytm podany powyżej wykaż, że $0{,}999\ldots = 1$.

Rozwiązanie:

$0{,}999\ldots = x \ / \cdot 10$

$9{,}999\ldots = 10x, \mathit{ponieważ}\ 0{,}999\ldots = x$

Jeżeli: $9 + 0{,}999\ldots = 9{,}999\ldots$

$to\colon 9 + x = 10x$

$9 = 9x \ /: 9$

$x = 1$

Skoro, to: $0{,}999\ldots = x,$

to $0{,}999\ldots = 1$ c.n.d

ZADANIA

1.2.1 Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamków. Wskaż wśród nich liczby niewymierne.

$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{33}, \frac{8}{15}, \frac{9}{25}, \frac{1}{4}$

Odpowiedź: 0,1(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,4; 0,(15); 0,5(3); 0,36; 0,25

NW = {1,(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,(15); 0,5(3)}

1.2.2 Przedstaw poniższe liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych:

a) 0,(17) b) 0,(453) c) 0,3(8)

d) 0,25(6) e) 2,6(13) f) −2,34(5)

Odpowiedź: a) $\frac{17}{99}$; b) $\frac{453}{999}$; c) $\frac{35}{90}$; d) $\frac{231}{900}$; e) $\frac{2587}{990}$; f) $\frac{21111}{900}$

1.2.3 Znajdź rozwinięcie dziesiętne różnicy liczb:

a) 1,3(5) – 0,7(4) b) 0,8(7) – 0,3 (6)

c) 0,(67) – 0,(33) d) 0,23(5) – 0,1(1)

Odpowiedź:

a) $\frac{122}{90} - \frac{67}{90} = \frac{55}{90} =$ 0,6(1); b) $\frac{79}{90} - \frac{33}{90} = \frac{46}{90} =$ 0,5 (1); c) $\frac{67}{99} - \frac{1}{3} = \frac{102}{297} =$ 0,(34); d) $\frac{212}{900} - \frac{10}{90} = \frac{112}{900} = 0{,}12(4)$

1.2.4 Zbadaj, czy zachodzi równość:

a) $0{,}0(6) + 0{,}0(3) = \frac{2}{15}$ b) $0{,}(3) - 0{,}(2) = \frac{1}{6}$

c) $0{,}(1) \cdot 0{,}(1) = 0{,}(1)$ d) $3 \cdot 1{,}(4) = 4{,}(3)$

Odpowiedź:

a) $\frac{6}{90} + \frac{3}{90} = \frac{9}{90} = 0{,}1$ NIE; b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ NIE;

c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ NIE; d) $3 \cdot \frac{13}{90} = \frac{39}{90} = 0{,}4(3)$ TAK

1.3 Wartości wyrażeń arytmetycznych

Teraz nauczę się:

Obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Wyrażenie wymierne[5] to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych (liter) o tej własności, że występują w nim wyłącznie takie operacje arytmetyczne, które po podstawieniu za zmienne liczb wymiernych dają w wyniku liczbę wymierną.

Aby obliczyć wartość wyrażenia wymiernego, wykonujemy we właściwej kolejności podane działania, a wynik zapisujemy w najprostszej postaci.

Ustalenie właściwej kolejności wykonywania działań podlega następującym zasadom:

1. Jeśli w wyrażeniu występują nawiasy, w pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach.
2. Jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów lub działania w nawiasach zostały już wykonane, to pozostałe działania wykonujemy w następującej kolejności:

- potęgowanie i pierwiastkowanie,
- mnożenie i dzielenie,
- dodawanie i odejmowanie.

ZADANIA

1.3.1 Wykonaj obliczenia:

a) $\dfrac{\left(2\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}\right)\cdot 7\frac{2}{8}}{\left(8-\frac{4}{6}\right):4\frac{1}{7}} =$

b) $\left(6\frac{2}{5}-4\frac{3}{16}\right)\cdot 2\frac{2}{3} =$

c) $\dfrac{\left(6\frac{1}{8}-2\frac{3}{5}\right):\left(1\frac{2}{15}-3\frac{4}{6}\right)}{\left(16\frac{2}{5}+14\frac{1}{7}\right)\cdot 2\frac{3}{10}} : \dfrac{141}{76} =$

d) $\dfrac{371}{285} : \dfrac{6\frac{1}{5}-7\frac{1}{6}+2\frac{1}{5}\cdot 3\frac{2}{8}}{5\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}\cdot 3\frac{6}{12}} =$

Odpowiedź: a) $-11\frac{11}{90}$; b) $5\frac{27}{30}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) -1

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne, 11.02.2013

1.3.2 Oblicz:

a) $$\frac{2{,}4:1{,}32-0{,}12:1{,}5}{2{,}3\cdot 0{,}25+1{,}18:3{,}2}=$$

b) $$\frac{3\cdot(0{,}15-1{,}57)+(23{,}58-3{,}24):2{,}3}{2{,}6\cdot(0{,}12+4{,}35):2{,}33}=$$

c) $$\frac{(6{,}25:0{,}023-1{,}22):0{,}05}{13{,}24-1{,}45\cdot 2{,}8:1{,}13}=$$

d) $$\frac{(1{,}55:0{,}23)\cdot 2{,}15+(8{,}43-2{,}11)}{5{,}3:(1{,}24+2{,}98)\cdot 0{,}008}=$$

Odpowiedź: a) 1,84; b) 0,9; c) 508; d) 0,13

1.3.3 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $$\frac{0{,}125\cdot 3\frac{1}{5}-(0{,}24:0{,}12)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{10:3\frac{1}{3}-6\cdot\frac{2}{3}+1\frac{7}{20}:5{,}4}=$$

b) $$3{,}4:\left(\frac{2{,}4-3\frac{3}{4}+1{,}2:\frac{1}{8}}{6:2{,}25-1{,}45\cdot 1\frac{2}{3}}\right)\cdot\frac{372}{34}=$$

c) $$\left\{4\frac{1}{9}-2{,}5:\left(1\frac{2}{15}+3\frac{4}{3}\right):13{,}3\right\}:\frac{400147}{98154}=$$

d) $$-\frac{14985}{1969}+\frac{4{,}55\cdot\frac{5}{11}+(-2{,}5)\cdot 0{,}9}{[0{,}7\cdot(-0{,}34)-0{,}120]:3\frac{3}{2}}:\frac{1\frac{2}{3}}{5\frac{11}{20}}=$$

e) $$\frac{\left[\left[3{,}32:2\frac{1}{6}-\frac{7}{8}\cdot 0{,}6\right]\cdot 1{,}2+\frac{3}{6}\right]:\frac{975}{1012}}{\left(1{,}2+1\frac{1}{3}\cdot 0{,}21:1{,}3\right)\cdot\frac{11}{15}}:\left(-\frac{11107}{13000}\right)=$$

Odpowiedź: a) $-2\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 0; e) -2

1.4 Potęgi

Teraz nauczę się:

- Obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych i stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- Wykorzystywać podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką).

Definicja[6]

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę mnożąc przez siebie n-razy liczbę a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ czynnikow}$$

Prawa działań na potęgach

Niech n, m będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

1) **Iloczyn potęg o tych samych podstawach:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) **Iloraz potęg o tych samych podstawach:** $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3) **Potęga iloczynu:** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4) **Potęga ilorazu:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5) **Potęga potęgi:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
6) **Potęga ilorazu o wykładniku ujemnym:** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz:

a) 2^3 b) $(-4)^2$ c) $(-\frac{2}{5})^4$ d) $(-\frac{1}{3})^3$

e) $(-1\frac{1}{4})^2$ f) $(2\frac{2}{3})^0$ g) $(0{,}4)^3$ h) $(0{,}02)^4$

i) $(-0{,}5)^2$ j) $(\sqrt{3})^2$ k) $(\sqrt[3]{2})^3$ l) $(-2\sqrt{3})^4$

Odpowiedź:

a) 8; b) 16; c) $\frac{16}{625}$; d) $-\frac{1}{27}$;

e) $\frac{25}{16}$; f) 1; g) 0,064; h) 0,00000016;

i) 0,25; j) 3; k) 2; l) 144

1.4.2 Zastosuj prawa działań na potęgach:

a) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^1 \cdot 3^{-2}$ b) $(0{,}4)^1 . (0{,}4)^3 . (0{,}4)^{-3}$ c) $(2\frac{3}{4}) \cdot (2\frac{3}{4})^0 \cdot (2\frac{3}{4})^2 \cdot (2\frac{3}{4})^3$

d) $(-4)^4 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^1 \cdot (-4)^{-5}$ e) $3^2 \cdot 22^2 \cdot (-1)^0$ f) $(\frac{1}{5})^5 \cdot (2\frac{3}{4})^5 \cdot 3^5$

g) $(4{,}2)^3 \cdot (\frac{2}{6})^3 \cdot (1\frac{4}{12})^3$

Odpowiedź:

a) $3^8 = 6561$; b) 0,4; c) $(2\frac{3}{4})^6$; d) $(-4)^{-2} = 16$; e) $66^2 = 4356$; f) $(\frac{33}{20})^5$; g) $(\frac{28}{15})^3$

1.4.3 Oblicz:

a) $\frac{10^3}{12^3}$. b) $\frac{(1{,}2)^4}{120^4}$ c) $\frac{(2{,}2)^2}{(0{,}16)^2}$

d) $(4\frac{5}{6})^3 : (1\frac{1}{5})^3$ e) $(3{,}4)^2 : (\frac{7}{2})^2$ f) $(\sqrt[3]{12})^3 : (-2)^3 : (-22)^0$

Odpowiedź: a) $(\frac{5}{6})^3$; b) $(0{,}01)^4$; c) $(13{,}75)^2$; d) $(\frac{145}{36})^3$; e) $(\frac{34}{35})^2$; f) 1,5

1.4.4 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 : \left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}{0{,}36 : \left(\frac{2}{12}\right)^4} =$ b) $\frac{5^4 - 5^3}{5^2} : \frac{2^5}{\frac{1}{5}} =$ c) $\frac{7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7^5}{7^{10} \cdot 4 - 7^6} \cdot 7^3 =$ d) $\frac{(3 \cdot 2^8 - 2^4 \cdot 6)}{9 : 3^3 \cdot 3^3} : 2^4 =$

Odpowiedź: a) $\frac{100}{36^4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{4949}{9603}$; d) 378

1.4.5 Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:

a) $\frac{a^5 \cdot a^3 : a^2}{a^0 \cdot (a^{10})^2 : a} =$ b) $\frac{(a^4 \cdot a^7) : a^3 \cdot a^8}{a^6 : a^0 \cdot (a^9)^4} =$

c) $\frac{(a^5)^3 \cdot (a^6)^{11} : (a^4)^7}{(a^9)^5 : (a^3)^2} \cdot a^6 =$ d) $\frac{(-a)^4 : (-a)^{-5}}{((-a)^{-2})^4 \cdot a^3} =$

Odpowiedź: a) a^{-13}; b) a^{41}; c) 2^{20}; d) $(-a)^{14}$

1.4.6 Oblicz:

a) $(0{,}4)^{-3} \cdot (1\frac{4}{5})^{-2} =$ b) $(1{,}2)^{-3} \cdot (-4{,}3)^{-2} =$ c) $\frac{22^{-1} + 66^0}{(0{,}6)^{-2} - 3^{-1}} =$

d) $\frac{(1{,}3)^{-3} - 2^{-4}}{(5 : 2^3) : (3{,}3)^{-2} - (-6)} =$ e) $[(3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1}) + 2^{-2}] + 2^{-2} =$ f) $[(\frac{1}{5})^{-2} + (\frac{1}{5})^{-2} \cdot (\frac{1}{5})^{-2}] : (\frac{1}{5})^{-2} =$

Odpowiedź:

a) 253,125; b) 0,03; c) $\frac{138}{781}$; d) 0,0663; e) 2,5; f) 26

1.4.7 Oblicz:

a) $\frac{27^3 \cdot 9^2 \cdot 2^4 \cdot 81}{2^3 \cdot 3^{14}} =$ b) $\frac{(-0{,}2)^5 \cdot (-5^2)^{-3}}{125^{-2} : (-5)^5}$

Odpowiedź: a) $\frac{2}{27}$; b) 1

Ciekawostka

Postać wykładnicza (notacja naukowa) to zapis liczby bezpośrednio w formie iloczynu postaci[7]:

$$\pm M \cdot 10^E$$

gdzie: M jest mantysą należącą do przedziału $\langle 1, 10)$, E jest wykładnikiem całkowitym.

PRACA SAMODZIELNA:

1.4.8 Przedstaw w postaci wykładniczej z zaokrągleniem do 2 cyfr po przecinku:

a) 0,000004359

b) 0,000000678

Odpowiedź: a) $4{,}36 \cdot 10^{-6}$; b) $6{,}78 \cdot 10^{-7}$

1.4.9 Wyszukaj w Internecie potrzebne informacje i zapisz podane wielkości w postaci wykładniczej:

a) prędkość światła w próżni

b) masa największej ryby świata

c) masa Ziemi

d) wiek Wszechświata

e) elementarny ładunek elektryczny

f) jednostka astronomiczna 1AU

g) masa atomu wodoru

h) liczba ludności świata według danych z 31.10.2011 r.

i) podaj inne ciekawe propozycje takich liczb

Odpowiedź: a) $3 \cdot 10^8$ m/s; b) płetwal błękitny $1{,}2 \cdot 10^5$ kg; c) $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg; d) $14 \cdot 10^9$ lat; e) $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; f) $1{,}5 \cdot 10^8$ km; g) $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; h) $7 \cdot 10^9$.

Ciekawostka

Zapis potęgowania przy użyciu indeksu górnego wprowadził Kartezjusz w XVII wieku. Naturalne potęgi liczby 2 są podstawą **arytmetyki komputerów**. Na przykład 2^n jest liczbą możliwych wartości zmiennej składającej się z n bitów (każdy bit może mieć wartość 0 lub 1, razem jest ich *n*). Z tego powodu zwykle operuje się też wielokrotnościami liczby 2 (bądź jej pewnej potęgi). Osiem bitów tworzy oktet (lub bajt). Większe wartości również są wielokrotnościami liczby 2, nie zaś 10, jak wskazywałyby ich nazwy, np. kilobajt to 1 024, a nie 1 000 bajtów[8].

7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza, 17.02.2013

8 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 17.02.2013.

Za pomocą potęg wyrażone są również jednostki miar układu SI, np.:

- 10^9 to miliard (przedrostek G), GHz – gigaherc
- 10^{12} to bilion (przedrostek T), Tm – terametr
- 10^{15} to biliard (przedrostek P), Ps – petasekunda
- 10^{18} to trylion (przedrostek E), EB – eksabajt
- 10^{21} to tryliard (przedrostek Z), Zm – zettametr
- 10^{24} to kwadrylion (przedrostek Y), Yg – jottagram

Praca dla chętnych

Wyszukaj informacje na temat innych potęg układu SI. Podaj przykłady ich wykorzystania.

1.5 Pierwiastki

Teraz nauczę się:

- Posługiwać się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosować prawa działań na pierwiastkach.

Początki symbolu pierwiastka są dość niejasne. Niektóre źródła podają, że symbol został wprowadzony przez Arabów[9].

Definicja

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką,

że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość:

$|a| = \sqrt{a^2}$

$\sqrt[2]{a}^2 = a$

$\sqrt[3]{a}^3 = a$

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

9 www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie, 19.02.1013

Prawa działań na pierwiastkach

Dla $a, b \geq 0, n \in N$ zachodzą następujące prawa działań na pierwiastkach:

1) **Iloczyn pierwiastków** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

2) **Iloraz pierwiastków** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

3) **Potęgowanie pierwiastków** $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

4) **Pierwiastek z pierwiastka** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Co łączy potęgi i pierwiastki?

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi.

1) **Potęga o wykładniku równym zero dla** $a \neq 0$: $a^0 = 1$

2) **Potęga o wykładniku ujemnym dla** $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3) **Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim dla** $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4) **Potęga o wykładniku wymiernym ujemnym dla** $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

ZADANIA

1.5.1 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}25}$ b) $\sqrt{2{,}56}$ c) $\sqrt{0{,}0144}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt{\frac{100}{169}}$ f) $\sqrt{2025}$ g) $\sqrt{5929}$

Odpowiedź: a) 0,5; b) 1,6; c) 0,12; d) −2; e) $\frac{10}{13}$; f) 45; g) 77

1.5.2 Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{500}$ b) $\sqrt{3{,}84}$ c) $\sqrt{2x^4}$ d) $\sqrt{16x^3y}$

e) $\sqrt{24x^8}$ f) $\sqrt{30xy^6}$ g) $\sqrt[3]{\frac{10000x}{a^3}}$ h) $\sqrt[3]{64a^4}$

Odpowiedź: a) $10\sqrt{5}$; b) $0{,}8\sqrt{6}$; c) $x^2\sqrt{2}$; d) $4x\sqrt{xy}$; e) $2x^4\sqrt{6}$; f) $y^3\sqrt{30x}$; g) $\frac{10}{a}\sqrt[3]{10x}$; h) $4a\sqrt[3]{a}$

1.5.3 Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $3\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{13}$ c) $0{,}1\sqrt{37}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{23}$

e) $0{,}2\sqrt{21}$ f) $4\sqrt[3]{33}$ g) $3\sqrt[4]{6}$ h) $4\sqrt[5]{15}$

Odpowiedź: a) $\sqrt{63}$; b) $\sqrt{468}$; c) $\sqrt{0{,}37}$; d) $\sqrt[3]{\frac{184}{27}}$; e) $\sqrt{\frac{21}{100}}$; f) $\sqrt[3]{2112}$; g) $\sqrt[4]{486}$; h) $\sqrt[5]{15360}$

1.5.4 Oblicz, stosując prawa działań na pierwiastkach:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ d) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

Odpowiedź: a) 4; b) 5; c) 4; d) 5

1.5.5 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}81}$ b) $\sqrt{(12{,}34)^2}$ c) $\left(\sqrt{28{,}16}\right)^2$ d) $\sqrt{3^2+4^2}$

e) $\sqrt{3^2\cdot 4^2}$ f) $\sqrt{4^2-3^2}$ g) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$

Odpowiedź: a) 0,9; b) 12,34; c) 28,16; d) 5; e) 12; f) $\sqrt{7}$; g) $\frac{13}{9}$

1.5.6 Wykonaj działania:

a) $\frac{3\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{25}}\cdot\sqrt[3]{81}$ b) $(\sqrt[3]{0{,}04}:\sqrt[3]{0{,}01})\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$

c) $(\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}):\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{32}}:\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$

Odpowiedź: a) $-\frac{27\sqrt{3}}{5}$; b) $\sqrt[3]{0{,}004}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

1.5.7 Ustaw następujące liczby w porządku rosnącym:

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{18}$ b) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$

c) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[10]{25}$ d) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$

Odpowiedź: a) $\sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{18} < \sqrt{3}$; b) $\sqrt[5]{3} < \sqrt[15]{30} < \sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[10]{25}$;
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}} < \sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}} < \sqrt[16]{64}$

1.5.8 Zapisz liczby w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\sqrt[3]{9:\sqrt[3]{27}}$

Odpowiedź: a) $3^{-\frac{3}{5}}$; b) $2^{\frac{3}{4}}$; c) $3^{\frac{1}{3}}$; d) $2^{\frac{12}{5}}$; e) $3^{\frac{1}{6}}$; f) $2^{\frac{1}{4}}$

Ciekawostka

Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir, gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go wszystkim, czego zapragnie, zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno ziarenko złożone na pierwszym polu. Władca Indii nie był w stanie takiego honorarium uiścić. Owa zapłata to suma szeregu złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co daje: 18 446 774 073 709 551 615 ziaren. Aby osiągnąć taką ilość zboża, należałoby zasiać całą ziemię kilkakrotnie i zebrać żniwo. I tak oto okazało się, że władca nie wszystkim może obdarować wynalazcę[10].

10 www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html, 1.03.2013

1.6 Przybliżenia liczbowe

Teraz nauczę się:

- Obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Na co dzień często korzystamy z przybliżeń liczbowych, np. uczeń obliczając średnią swoich ocen z przedmiotów, stosuje zaokrąglenie do części setnych, podatnik rozliczając się z urzędem skarbowym również przybliża liczbę do dwóch miejsc po przecinku (do groszy).

Podczas zaokrąglania liczb, gdy otrzymujemy wartość przybliżoną, **liczba ulega zmniejszeniu lub zwiększeniu.** Zależy to od tego, czy nie zmieniamy ostatniej pozostawionej cyfry, czy zwiększamy ją o jeden. W związku z tym wyróżniamy przybliżenia:

z nadmiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o jeden.

Przykład 1[11]

Zaokrąglamy liczbę 12,399367 do pierwszego miejsca po przecinku.

$12{,}399367 \approx 12{,}4$

Podczas zaokrąglania do pierwszego miejsca po przecinku, stojącą w tym miejscu cyfrę (3) musieliśmy zwiększyć o jeden, bo następna cyfra jest większa od 5 (9). W efekcie liczba uległa zwiększeniu.

z niedomiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, ostatnia pozostawiona cyfra nie zmienia się.

Przykład 2[12]

$6{,}963902 \approx 6{,}96$

Podczas zaokrąglania do drugiego miejsca po przecinku, stojąca w tym miejscu cyfra (6), nie zmienia się, bo znajdująca się po niej cyfra jest mniejsza od 5 (3). W efekcie liczba uległa zmniejszeniu o „obciętą" wartość.

przecinku.

Błędy przybliżenia powstają podcza obliczeń jako różnica między dokładną wartością a liczbą użytą w obliczeniach, np. $\sqrt{3} \approx$ 1,7 błąd przybliżenia to 1,7 – $\sqrt{3}$. Pojawiają się na skutek błędów wartości pomiarowych, np. odczytując długość odcinka porównujemy go z podziałką na linijce i niedokładnie przykładamy linijkę, błędnie odczytamy wynik pomiaru lub przyrząd pomiarowy jest niedoskonały. Dokładne wyliczenie jakiejś wartości nie jest możliwe ze względów obliczeniowych. Błędów pomiarowych nie da się zupełnie wyeliminować, ale można je ograniczyć do minimum, np. stosując coraz dokładniejsze przyrządy.

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń:

x – dana liczba

Δx – przybliżenie liczby

11 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013
12 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013

błąd bezwzględny – obliczamy jako wartość bezwzględną z różnicy przybliżenia i danej liczby. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$B = |\Delta x - x|$$

błąd względny – obliczamy jako stosunek błędu bezwzględnego do wartości zmierzonej i wyrażamy w procentach, pokazuje on jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką obniżyliśmy lub powiększyliśmy liczbę: $W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\%$

Przykład 3

Zaokrąglij liczbę 12,647890 do części setnych i określ błąd względny i bezwzględny przybliżenia.

12,647890 ≈ **12,65**

Błąd bezwzględny: $B = |\Delta x - x| = |12{,}65 - 12{,}647890| = |-0{,}00211| = 0{,}00211$

Błąd względny: $W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\% = \frac{0{,}00211}{12{,}647890} \cdot 100\% = 0{,}0001668 \cdot 100\% = 0{,}01\%$

Ciekawostka

Liczba π (czytaj: **liczba pi**), **ludolfina** – jest to liczba niewymierna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy lub polu koła o promieniu równym 1.

Liczba π z dokładnością do 200 miejsc po przecinku:

π =3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196...

Światowy potwierdzony rekord w zapamiętywaniu ciągu cyfr liczby π należy aktualnie do Japończyka Akiry Haraguchi, który podał ją z dokładnością do 100 tysięcy miejsc po przecinku bijąc własny rekord z roku 1995[13].

ZADANIA

1.6.1 Podaj przybliżenie liczby π z dokładnością do:

a) części setnych

b) części tysięcznych

c) dziesięciu miejsc po przecinku

d) jedności

Jak nazywamy to przybliżenie?

13 www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi, 04.03.2013

Odpowiedź:

a) 3,14 z niedomiarem; b) 3,142 z nadmiarem; c) 3,14159 26536 z nadmiarem; d) z niedomiarem

1.6.2 Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd względny i bezwzględny swojego przybliżenia:

a) $45{,}673 : 4$ b) $2{,}384 + 21{,}287$ c) $6 \cdot 3{,}563 - 2{,}12$

d) $44{,}11 - 3 \cdot 6{,}72$ e) $128{,}69 \cdot 2 + 301{,}25$ f) $268{,}9 : 26{,}6 + 243{,}2 : 5{,}1$

1.6.3 Oblicz błąd względny i bezwzględny (z dokładnością do 0,01%), który popełniono przybliżając liczbę a liczbą b.

a) a = 19,458; b = 19,46 b) a = 20,458; b = 20,5

c) a = 17,458; b = 17 d) a = 19,458; b = 20

e) a = 98,5 cm, b = 1m f) a = 4700 cm3, b = 5l

g) a = 372 min, b = 6h h) a=7806s, b=2h 10 min

Odpowiedź:

a) B = 0,002; W = 0,01%, b) B = 0,042; W = 0,21%, c) B = 0,458; W = 2,62%,

d) B = 0,542; W = 2,79%, e) B = 1m – 98,5 cm = 1,5 cm; W = 1,5:98,5×100 = 1,52%,

f) 5 litrów = 5 dm^3 – 4700 cm^3, 1dm^3 = 1000 cm^3, 5dm^3 = 5000 cm^3,

B = 5000 cm^3 – 4700 cm^3 = 300 cm^3; W = 300:4700 × 100 = 6,38%,

g) 6h = 360 minut, B = 372 – 360 = 12; W = 12:372 × 100 = 3,23%,

h) 2h 10 minut = 7200 s + 600 = 7800 s,

B = 7806 – 7800 = 6; W = 6:7806 × 100 = 0,08%

Ciekawostka

Różne komputerowe operacje arytmetyczne wykonywane na liczbach mogą powodować nieoczekiwane wyniki, gdy wynik obliczeń przekracza dopuszczalny zakres danych. Możemy tutaj wyróżnić dwie sytuacje:

Nadmiar – „przekręcenie licznika" w grach komputerowych, gdy ktoś zdobędzie zbyt dużo punktów

Niedomiar – liczba jest tak mała, że nie może zostać dokładnie zaokrąglona do zera

ZADANIE DLA CHĘTNYCH:

Napisz program, który obliczy:

a) $10^{40} \cdot 10^{40} = \ldots$

b) $10^{-40} - 10^{-41} = \ldots$

Jaki jest wynik działania programu? Czy jest zgodny z twoimi matematycznymi obliczeniami?

Algorytmy, które charakteryzują się kumulowaniem błędów, nazywamy niestabilnymi.

1.7. Obliczenia procentowe

Teraz nauczę się:

Wykonywać obliczenia procentowe.

Procent

Słowo **procent** pochodzi z łacińskiego od *per centum*, „przez sto" i oznacza sposób wyrażenia liczby jako ułamka o mianowniku 100 i oznaczamy symbolem %[14].

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Przykład 1

$$23\% = \frac{23}{100}$$

Procenty umożliwiają wyrażenie danej wielkości w stosunku do innej, przy czym pierwsza wielkość oznacza zwykle część lub zmianę w drugiej.

14 www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent, 06.03.2013.

Przykład 2

Obliczyć 4,5% liczby 6.

$4{,}5\% \cdot 6 = \frac{4{,}5}{100} \cdot 6 = 0{,}27$

Przykład 3

Liczbę 50 zwiększyć o 10%.

$50 + 10\% \cdot 50 = 50 + 0{,}1 \cdot 50 = 55$

Przykład 4

Cena zeszytu wynosi 3,50 zł. Oblicz jego cenę po podwyżce o 1,5%.

$3{,}50 + \frac{1{,}5}{100} \cdot 3{,}50 \approx 3{,}55$ zł

Przykład 5

Znajdź liczbę, której $33\frac{2}{3}\%$ jest równe 6.

$33\frac{1}{3}\% \cdot x = 6$

$\frac{\frac{100}{3}}{100} \cdot x = 6$

$x = 18$

Przykład 6

Oblicz, jakim procentem liczby 90 jest liczba 15.

$p\% \cdot 90 = 15$

$p\% = \frac{15}{90} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$

Przykład 7

Cena kurtki wynosi 120 zł.

a) Oblicz jej cenę po dwukrotnej obniżce o 30%.

$120 - 30\% \cdot 120 = 120 - 0{,}3 \cdot 120 = 84$

$84 - 30\% \cdot 84 = 84 - 0{,}3 \cdot 84 = 58{,}80$ zł

b) Oblicz cenę kurtki przy obniżce jednokrotnej o 60%.

$120 - 60\% \cdot 120 = 48$ zł

Punkt procentowy – to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości wyrażonymi w procentach.

Przykład 8

Frekwencja klasy Ib w I semestrze wyniosła 88%, a w drugim 92%. Mówimy, że frekwencja wzrosła o 4 punkty procentowe.

W zadaniach pomijamy podatek Belki, który został wprowadzony 01.12.2001 r.

Przykład 9

Jaś chciał w lipcu 2001 r. wpłacić do banku zaoszczędzone przez siebie pieniądze – 3000 zł, z oprocentowaniem 6% w skali roku, ale nie mógł się zdecydować na rodzaj lokaty.

Miał do wyboru lokatę:

a) roczną b) kwartalną c) półroczną d) miesięczną

Oblicz, ile odsetek po roku zostanie naliczonych Jasiowi w każdym przypadku. Którą lokatę powinien wybrać?

Odpowiedź:

a) 6% z 3000 zł = 180 zł

b) $\frac{3}{12} \cdot$ 6% z 3000 zł = 45 zł

c) $\frac{1}{2} \cdot$ 6% z 3000 zł = 90 zł

d) $\frac{1}{12} \cdot$ 6% z 3000 zł = 15 zł

Przykład 10[15]

Ania wpłaciła na lokatę 2000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 3,5% w skali 2 lat (24 miesięcy, a czas zapadalności[16] dokładnie 3 lata (36 miesięcy). Ile odsetek naliczy jej bank? Jaką kwotę będzie miała po 3 latach na swoim koncie?

Najpierw obliczamy odsetki:

$$\frac{36}{24} \cdot 3{,}5\% \cdot 2000 = \frac{36}{24} \cdot \frac{3{,}5}{100} \cdot 2000 = 105 \text{ zł}$$

Kwota końcowa to: $2000\ zł + 105\ zł = 2105\ zł$

Przykład 11

Kasia wpłaciła na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku kwotę 1000 zł. W dniu zapadalności bank naliczył jej 20 zł odsetek. Na ile miesięcy Kasia założyła tę lokatę?

Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{x}{12} \cdot \frac{5}{100} \cdot 1000 = 20{,}83$$

x = 5 miesięcy

15 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.
16 Czas zapadalności to czas trwania lokaty.

ZADANIA

1.7.1 Oblicz:

a) 4% liczby 85 b) $3\frac{1}{2}\%$ liczby $30\frac{1}{4}$ c) 112% liczby 80

d) $1,6\%$ liczby 1000 e) $0,3\%$ liczby 900 f) 150% liczby 27

Odpowiedź: a) $3,4$; b) $\frac{847}{800}$; c) $89\frac{3}{5}$; d) 16; e) $2,7$; f) $40\frac{1}{2}$

1.7.2 Cenę wycieczki obniżono o $p\%$. Wycieczka kosztuje obecnie x $zł$. Jaka była cena wycieczki przed obniżką?

Odpowiedź: $\frac{100a}{100-p} zł$, $p < 100 \wedge p > 0$

1.7.3 Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a następnie nową cenę podwyższono o 30%. Czy cena końcowa jest taka sama jak początkowa? Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Końcowa cena stanowi 91% ceny początkowej.

1.7.4 Znajdź:

a) Liczbę, której 7% wynosi 56

b) Liczbę, której $0,2\%$ wynosi $2\frac{3}{5}$

c) Liczbę, której 112% wynosi $5,6$

d) Liczbę, której $0,25\%$ wynosi $0,3$

Odpowiedź: a) 800; b) 1300; c) 5; d) 120

1.7.5 Aby zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym, wystarczy otrzymać 30% możliwych do uzyskania punktów. Jaka minimalna liczba punktów gwarantuje zdanie egzaminu, gdy maksymalnie można otrzymać 50 pkt.

Odpowiedź: 15 punktów.

1.7.6 Tomek wpłacił na lokatę oprocentowaną 7% w skali roku kwotę 2135 zł. W dniu zapadalności bank naliczył mu 12,45 zł odsetek. Na ile miesięcy Tomek założył tę lokatę?

Odpowiedź: Na 1 miesiąc.

1.7.7 Wojtek wpłacił na lokatę czteromiesięczną z naliczaniem odsetek na zakończenie kwotę 1500 zł. Po upływie tego okresu bank naliczył mu 40 zł odsetek. Ile wynosiło oprocentowanie tej lokaty w skali roku?

Odpowiedź: 8%.

1.7.8 Przypuśćmy, że zakładasz lokatę na 5 miesięcy, jej oprocentowanie w skali roku wynosi 4,5%, a odsetki naliczane na zakończenie wyniosły 100 zł. Oblicz, jaką kwotę powinieneś wpłacić na tę lokatę.

Odpowiedź: 5333 zł.

1.7.9 Kasia wraz ze swoim mężem Piotrem miesięcznie na opłaty wydają 40% tego, co razem zarobią. Z tego, co pozostanie, 60% przeznaczają na zakup żywności dla siebie oraz swoich dzieci. Ile procent ich łącznych miesięcznych zarobków pochłaniają miesięczne wydatki?

Odpowiedź: 64%.

1.7.10 Pan Czesław w pierwszych 2 tygodniach poprzedniego miesiąca sprzedał 15% sprowadzonego do swojego sklepu towaru. W następnych 2 tygodniach sprzedał jeszcze 40% tego towaru, który pozostał. Jaki procent sprowadzonego towaru pozostał panu Czesławowi na koniec poprzedniego miesiąca?

Odpowiedź: 49%.

1.7.11 W 5 kolejnych sesjach giełdowych cena akcji firmy X na zamknięciu dnia osiągała następujący wynik procentowy: –6%, +15%, –3%, +5%, +2%. Oblicz, czy cena końcowa tej akcji jest wyższa, czy niższa od ceny pierwotnej i o ile procent.

Odpowiedź:

x – cena początkowa, y – cena końcowa

$x \cdot 94\% \cdot 115\% \cdot 97\% \cdot 105\% \cdot 102\% = y$

$x \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}97 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}02 = 1{,}12$

$x \cdot 1{,}12 = y$

Cena końcowa akcji jest wyższa od ceny początkowej o 12%.

1.7.12 Pracodawca zaproponował Kasi pensję w wysokości 3000 zł brutto i obiecał, że jeśli się sprawdzi na powierzonym stanowisku, to po roku jej pensję zwiększy o 3%, a w następnych latach o 1 p.p.[17] względem pensji sprzed roku. Jaką pensję otrzyma Kasia w czwartym roku pracy w tej firmie przy założeniu, że się sprawdzi na powierzonym stanowisku i nie zostanie zwolniona lub sama się nie zwolni?

Odpowiedź: w drugim roku: 3000 · 103% = 3090 zł, w trzecim roku: 3090 · 104% = 3214 zł, w czwartym roku: 3214 · 105% = 3374 zł.

Punkt bazowy to inaczej punkt procentowy. Zamiast mówić, że różnica między np. 5,63% a 5,61% wynosi 0,02 p.p., możesz powiedzieć, że ta różnica wynosi 2 p.b.

17 Skrót p.p. oznacza „punkty procentowe".

1.7.13 Oblicz, ile punktów bazowych (p.b.) wynosi różnica pomiędzy podanymi procentami?

a) 18,45% i 18,32%

b) 34,86% i 34,12%

c) 88,06% i 87,04%

d) 56,2% i 53,05%

Odpowiedź: a) 13 p.b.; b) 74 p.b.; c) 102 p.b.; d) 315 p.b.

Ciekawostka

Punktów bazowych często używa Rada Polityki Pieniężnej, czyli grupa ludzi odpowiedzialna za system finansowy całej Polski. Decyzje podjęte przez tę radę mają wpływ na wysokość lokat bankowych, oprocentowania kredytów i pożyczek oraz na stabilność ekonomiczną Polski. Przeciętny Polak nie spotyka się bezpośrednio z punktami bazowymi, ale odczuwa zmiany finansowe wyrażone w punktach bazowych, gdy np. pójdzie do banku.

Podatek Belki to automatycznie pobierana przez bank opłata od zysków kapitałowych. Został on wprowadzony 01.12.2001 przez Marka Belkę (stąd jego nazwa) – ówczesnego ministra finansów i dotyczył wyłącznie lokat oraz depozytów bankowych. Jego stawka wynosiła 20% naliczonych odsetek. W 2004 r. obniżono go do 19%, ale kosztem tego, że dodatkowo objęto nim inne zyski kapitałowe, np. pochodzące ze sprzedaży papierów wartościowych. Podatek Belki od 01.01.2004 do 31.12.2006 wyliczano mnożąc naliczone odsetki przez 19% i zaokrąglając otrzymany wynik do 1 grosza[18].

Wprowadzenie podatku Belki w 2001 r. spowodowało, że w bankowości pojawiły się 2 nowe terminy:

zysk brutto – naliczone odsetki bez potrącania podatku Belki

zysk netto – odsetki uzyskane po odjęciu zaokrąglonego podatku Belki do 1 grosza

1.7.14 Jako pracodawca sporządź listę płac w tabeli.

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%				
2	Belka	Robert	720 zł	5%				
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%				
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%				
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%				
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%				
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%				
8	Podkowa	Robert	1057,63	1%				
9	Sowa	Zofia	1046,4	1%				
10	Zys	Julia	1280	5%				

18 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

Odpowiedź:

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%	78,75 zł	953,75 zł	181,21 zł	772,50 zł
2	Belka	Robert	720 zł	5%	36,00 zł	756,00 zł	143,64 zł	612,36 zł
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%	118,40 zł	1 105,10 zł	209,97 zł	895,13 zł
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%	80,48 zł	1 086,48 zł	206,43 zł	880,05 zł
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%	30,00 zł	630,00 zł	119,70 zł	510,30 zł
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%	60,94 zł	1 279,69 zł	243,14 zł	1 036,55 zł
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%	111,60 zł	1 351,60 zł	256,80 zł	1 094,80 zł
8	Podkowa	Robert	875 zł	1%	105,76 zł	1 163,39 zł	221,04 zł	942,35 zł
9	Sowa	Zofia	720 zł	1%	104,64 zł	1 151,04 zł	218,70 zł	932,34 zł
10	Zys	Julia	986,7 zł	5%	64,00 zł	1 344,00 zł	255,36 zł	1 088,64 zł

1.7.15 Na podstawie poniższej tabeli:

a) oblicz wynagrodzenie netto pracownika,

b) oblicz, jaki procent wynagrodzenia brutto stanowi ubezpieczenie emerytalne, chorobowe, rentowe oraz ubezpieczenie zdrowotne,

c) oblicz, jaki procent całej pensji brutto stanowi podatek.

Wynagrodzenie brutto	3 000
Składki ZUS	
Ubezpieczenie emerytalne	292,80
Chorobowe	73,50
Rentowe	45,0
Razem składki ZUS	
Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne	2588,70
Ubezpieczenie zdrowotne	232,98
Koszty uzyskania przychodu	111,25
Podstawa opodatkowania	2477,45
Kwota zwolniona od podatku	46,33
Podatek	199,00
Pensja netto	

Odpowiedź:

a) Razem składki ZUS wyniosły 411,30, wynagrodzenie netto pracownika = wynagrodzenie brutto – składki ZUS – koszty uzyskania przychodu – ubezpieczenie zdrowotne – podatek = 1985,47 zł; b) 21,48%; c) 6,63%.

1.7.16 Oblicz wysokość wszystkich podstawowych składek społecznych (emerytalnej i rentowej – 6%, chorobowej i zdrowotnej – 9%), jakie zostaną odliczone z pensji Pana Kowalskiego, która wynosi 1700 zł brutto.

Odpowiedź: 225 zł.

1.7.17 Oceń, ile czteroosobowa rodzina osiągająca dochody netto w wysokości 6000 zł może przeznaczyć na miesięczną spłatę raty kredytu hipotecznego. W ocenie uwzględnij przeciętne miesięczne wydatki rodziny na opłaty, żywność itp. Następnie oblicz, na ile lat musiałaby ona zaciągnąć taki kredyt oprocentowany 7% w skali roku, aby zakupić mieszkanie o wartości 300 000zł.

1.7.18 Firma oferuje ratalną sprzedaż samochodu. Raty rozłożone są na 4 lata, przy czym miesięczna kwota spłaty wynosi 900 zł. Cena samochodu wynosi 30000 zł. Jakie oprocentowanie oferuje sprzedawca w skali miesięcznej i w skali roku?

Uwaga: Rozwiąż zadanie w arkuszu kalkulacyjnym (skorzystaj z funkcji FV).

Odpowiedź: miesięczna 1,6%, a roczna 19,2%.

1.7.19 Oblicz wartość podatku Belki oraz zysk netto zgodnie z ordynacją podatkową obowiązującą od 01.01.2007 do 30.03.2012, jeśli odsetki z lokaty wyniosły:

a) 25,72 zł b) 63,32 zł c) 122,75 zł d) 137,20 zł

Odpowiedź: a) odsetki: 25,72 zł, podstawa opodatkowania: 26 zł, podatek Belki: 4,94 zł, zaokrąglenie podatku: 5 zł, zysk netto: 20,72 zł; b) 51,32 zł; c) 99,75 zł; d) 111,20 zł.

Uwaga: Odsetki zaokrągla się do pełnych złotych i nazywa się tę zaokrągloną liczbę podstawą opodatkowania, z której oblicza się 19% podatku Belki; otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych złotych. Aby wyliczyć zysk netto z lokaty, trzeba od odsetek odjąć otrzymany wynik.

Ciekawostka

Banki, aby uniknąć podatku Belki, wprowadziły częstą kapitalizację odsetek. Obowiązujący obecnie system podatkowy sprawia, że od zysku poniżej 2,49 zł nie trzeba płacić podatku. Wszystko za sprawą zaokrągleń podstawy opodatkowania i samego podatku. Zgodnie z zapisami w ordynacji podatkowej odsetki w kwocie 2,49 zł należy zaokrąglić „w dół" do pełnej złotówki, czyli do 2 zł. Podatek od zysku w wysokości 2 zł wynosi 38 groszy. Tu także zaokrąglamy do pełnej złotówki, czyli do zera. W ten sposób od tak niewielkiego zysku z lokaty nie trzeba płacić podatku. Z tego też względu banki proponują lokaty z dzienną kapitalizacją odsetek. Niewielkie odsetki dopisywane są do salda lokaty codziennie i w ten sposób klient nie płaci 19 proc. podatku od zysku. Jeśli we wspomnianej wyżej lokacie zastosowalibyśmy mechanizm dziennej kapitalizacji, to zysk po roku wyniósłby 513 zł już bez podatku. W rezultacie oprocentowanie efektywne wspomnianej lokaty wyniesie 5,13%[19].

19 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

1.7.20 Jaką maksymalnie kwotę trzeba wpłacić na 2-miesięczną lokatę oprocentowaną 6,2% w skali roku, aby legalnie ominąć płacenie podatku Belki wyliczanego zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012?

Odpowiedź:

$\frac{2}{12} \cdot 6{,}2\% \cdot x = 2{,}495$

$x = 242{,}23$ zł

1.7.21 W 2007 roku pani Kasia założyła lokatę jednodniową oprocentowaną 3,8% w skali roku na kwotę 1600 zł. Oblicz, ile dziennie będzie dostawać odsetek od takiej kwoty? Czy uniknie podatku Belki?

Odpowiedź:

$\frac{1}{365} \cdot 3{,}8\% \cdot 1600$ zł $= 0{,}17$ zł $< 2{,}50$ zł. W tym roku uniknie podatku Belki.

1.7.22 Ile wyniosą odsetki od lokaty jednodniowej oprocentowanej 6,84% w skali roku założonej na kwotę 15000 zł w 2012 roku? Jaki będzie zysk netto z tej lokaty po 300 dniach, jeśli w międzyczasie bank nie zmieni oprocentowania?

Odpowiedź: Dokładnie 1,80 zł dziennie; 540 zł po 300 dniach.

1.7.23 W państwie A produkt PKB wzrasta co roku o 8%, a w państwie B o 6%. Po ilu latach w każdym z państw nastąpi potrojenie PKB?

Odpowiedź:

Wskazówka: mając kapitał k przy rocznej kapitalizacji odsetek p% w skali roku, po n latach kapitał wzrasta do $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

A – po 16 latach,

B – po 19 latach.

1.8 Przedziały liczbowe

Teraz nauczę się:

- Posługiwać pojęciem przedziału liczbowego,
- Zaznaczać przedziały na osi liczbowej.

Przedział – zbiór elementów danego zbioru częściowo uporządkowanego, zawartych między dwoma ustalonymi elementami tego zbioru, nazywanymi początkiem i końcem przedziału[20].

20 www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy, 26.02.2013

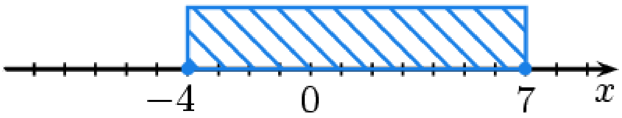
Oznaczenia przedziałów:

Przedziałem domkniętym $< a; b >$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x \leq b$

$\langle a; b \rangle = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

Przykład 1

Przedział domknięty $< -4; 7 >$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



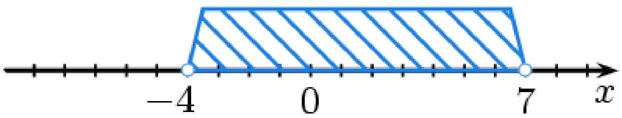
Rysunek 1-5 – Przedział domknięty

Przedziałem otwartym (a;b) o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x < b$

$(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}$

Przykład 2

Przedział otwarty $(-4; 7)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



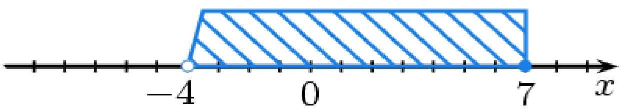
Rysunek 1-6 – Przedział otwarty

Przedziałem lewostronnie otwartym (prawostronnie domkniętym) $(a; b\rangle$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$

$(a; b\rangle = \{x \in R : a < x \leq b\}$

Przykład 3

Przedział lewostronnie otwarty $(-4; 7\rangle$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-7 – Przedział lewostronnie otwarty a prawostronnie domknięty

Przedziałem prawostronnie otwartym (lewostronnie domkniętym) $\langle a; b)$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$

$(a; b > = \{x \in R : a \leq x < b\}$

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym $(a; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych od a.

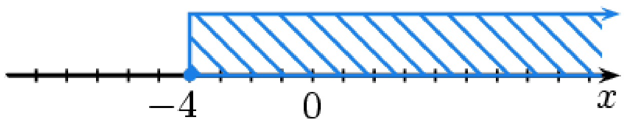
$(a; +\infty) = \{x \in R : x > a\}$

Podobnie przedziałem lewostronnie domkniętym nieograniczonym $\langle a; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych bądź równych a.

$(\boldsymbol{a}; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 5

Przedział $\langle 4; +\infty)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-8 – Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony

Przedziałem prawostronnie otwartym nieograniczonym $(-\infty; \boldsymbol{a})$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych od a.

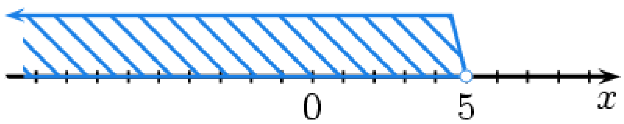
$(-\infty; \boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} < a\}$

Podobnie przedziałem prawostronnie domkniętym nieograniczonym $(-\infty; \boldsymbol{a}\rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych bądź równych a.

$(-\infty; \boldsymbol{a} > = \{x \in R: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 6

Przedział $(-\infty; 5)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



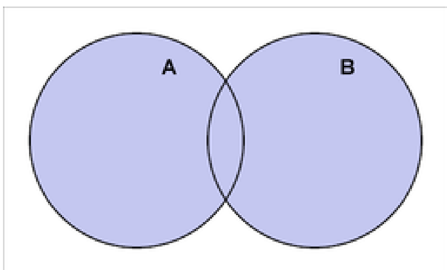
Rysunek 1-9 – Przedział prawostronnie otwarty nieograniczony

Ponieważ przedział jest zbiorem, więc możemy wyznaczać między innymi sumę, iloczyn czy też różnicę przedziałów.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Sumą zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B, matematycznie zapisujemy ją tak: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



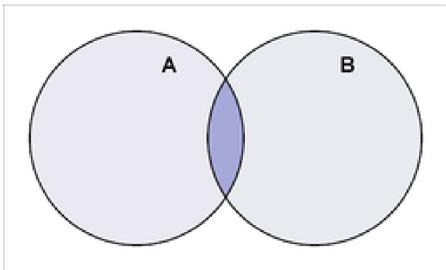
Rysunek 1-10 – Suma zbiorów

Przykład 7

Jeżeli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. Pomimo tego, że 1 występuje w obydwu zbiorach, w sumie tych zbiorów występuje tylko jeden raz.

Iloczynem, czyli częścią wspólną zbioru *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru *A* i do zbioru *B*, formalnie zapisujemy ją tak: $A \cap B = \{x: x \in A \land x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



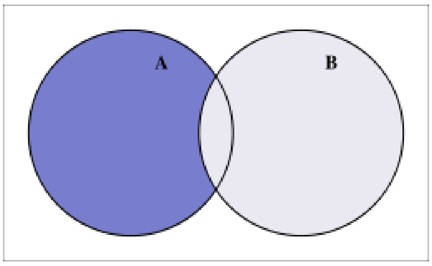
Rysunek 1-11 – Iloczyn zbiorów

Przykład 8

Jeśli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \cap B = \{1\}$. Liczba 1 jest jedynym wspólnym elementem tych zbiorów.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A*, a które nie należą do zbioru *B*, możemy ją zapisać tak: $A \backslash B = \{x: x \in A \land x \notin B\}$**.**

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-12 – Różnica zbiorów

Przykład 9

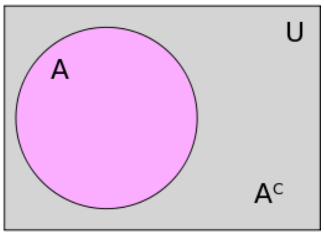
Jeśli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \backslash B = \{2,5\}$. Jedynym wspólnym elementem obydwu zbiorów jest liczba 1, więc otrzymany zbiór będzie bardzo podobny do zbioru *A*, lecz nie posiadający liczby 1.

Dopełnieniem zbioru *A* z przestrzeni *U* nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni *U*, które nie należą do zbioru *A*. Dopełnienie zbioru *A* oznaczamy jako A'**.**

$$A' = U \backslash A$$

$$A' = \{x: x \in U \land x \notin A\}$$

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-13 – Dopełnienie zbiorów

Przykład 10

Jeśli $A = \{1,2,3\}$, a przestrzenią *U* jest zbiór wszystkich liczby całkowitych dodatnich, to dopełnieniem zbioru *A* będzie zbiór $A' = \{4,5,6,7,8, \dots\}$.

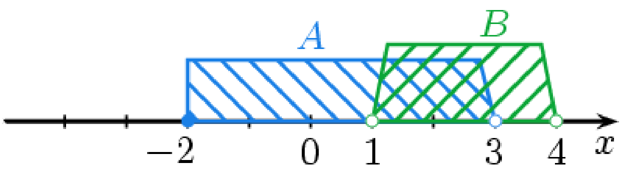
Zbiory A i B nazywamy rozłącznymi wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zauważmy, że: $\boldsymbol{A \cup A' = U}$ oraz $\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

Przykład 11`

Wyznaczmy $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, A', B'$, gdzie $A = [-2; 3), B = (1; 4)$.

Zaznaczmy najpierw oba przedziały na osi liczbowej:



Z rysunku widzimy, że:

- $A \cup B = [-2;\ 4)$
- $A \cap B = (1;\ 3)$
- $A \backslash B = [-2;\ 1]$
- $B \backslash A = [3;\ 4)$
- $A' = (-\infty;\ -2) \cup [3;\ +\infty)$
- $B' = (-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$

Własności działań na zbiorach

Dla dowolnych zbiorów *A, B, C* zachodzą prawa:

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – I prawo De Morgana
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – II prawo De Morgana
- $A \cup B = B \cup A$ – przemienność dodawania zbiorów
- $A \cap B = B \cap A$ – przemienność mnożenia zbiorów
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – łączność dodawania zbiorów
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – łączność mnożenia zbiorów
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania

Przykład 12

Mamy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 5, 9\}$. Obliczyć $D = A \cap (B \cup C)$.

$D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 9\}) =$
$= (\{1, 3\} \cup \{3\}) = \{1, 3\}$

ZADANIA

1.8.1 Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały:

a) $(-2; 5)$ b) $\langle -\infty;\ 3)$ c) $\langle 0; 6\rangle$

d) $\{2,3,4,5\}$ e) $(-\infty;\ -3)$ f) $(-5;\ 1\rangle$

g) $\langle -7; 5\rangle$ h) $\langle 0;\ 4)$ i) $\langle -2;\ +\infty)$

1.8.2 Wyznacz zbiory:

a) N∪W b) $R \cup NW$ c) N ∪ R d) $N\ \cup C$

e) C ∩ W f) $C\ \cap N$ g) $NW\ \cap C$ h) R ∩ C

i) C \ W j) R \ W k) N \ NW

Odpowiedź:

a) W; b) R; c) R; d) C; e) C; f) N; g) Ø; h) C; i) Ø; j) NW; k) N.

1.8.3 Podaj wszystkie liczby całkowite, które należą do przedziału:

a) $\left\langle -\frac{1}{2}; 6\right)$ b) $(-5;\ \pi)$ c) $\langle 0; 2\rangle$ d) $\langle -\pi;\ \pi\rangle$

Odpowiedź:

a) $\{0,1,2,3,4,5\}$, b) $\{0,1,2,3\}$, c) $\{0,1,2\}$, d) $\{0,1,2,3\}$.

1.8.4 Zaznacz na osi liczbowej zbiór A′ wiedząc, że:

a) $A = (-3; 7\rangle$ b) $A =\ (-\infty;\ 5)$ c) $A = \langle 2; 6\rangle$

d) $A = (-\infty; 4)\ \cup\ (6; 12\rangle$ e) $A = (-5; +\infty)$

Odpowiedź:

a) $(-\infty; -3\rangle \cup\ (7; +\infty)$; b) $\langle 5; +\infty)$; c) $(-\infty; 2)\ \cup\ (6; +\infty)$;

d) $\langle 4; 6\rangle \cup\ (12; +\infty)$; e) $(-\infty; 5)$

1.8.5 Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: A ∩ B, A ∪ B, A\B, B\A:

a) $A = (-3;\ 5),\ \ B = \langle -1;\ 8\rangle$ b) $A = \langle -4;\ 6),\ \ B = \langle 5;\ +\infty)$

c) $A = (-4;\ 1),\ \ B = (0;\ 2\rangle$ d) $A = (-\infty;\ 3),\ \ B = \langle 1;\ 4\rangle$

e) $A = (-\infty;\ 5\rangle\ \ B = (-2;2)$

Odpowiedź:

a) $A\cap\ B = \langle -1;\ 5), A\cup B = (-3;\ 8\rangle, A\backslash B = (-3;\ -1), B\backslash A = \langle 5;\ 8\rangle$

b) $A\cap\ B = \langle 5;\ 6), A\cup B = \langle -4;\ +\infty), A\backslash B = \langle -4;5), B\backslash A = \langle 6;\ +\infty)$

c) $A\cap\ B = (0;\ 1), A\cup B = (-4;\ 2\rangle, A\backslash B = (-4;\ 0\rangle, B\backslash A = \langle 2;\ 2\rangle$

d) $A\cap\ B = \langle 1;\ 3), A\cup B = (-\infty;\ 4\rangle, A\backslash B = (-\infty;\ 1), B\backslash A = \langle 3;\ 4\rangle$

e) $A\cap\ B = (-2;\ 2), A\cup B = (-\infty;\ 5\rangle, A\backslash B = (-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 2;5\rangle, B\backslash A = \emptyset$

1.8.6 Niech $A = \langle -3;5\rangle, B = (-6;7), C = (-\infty;\ 4\rangle$. Wyznacz następujące zbiory i zilustruj je na osi liczbowej:

a) A$\cap B$ b) $A\backslash B$ c) C \ A d) B \ C

e) $(A\cup B)\backslash C$ f) $A'\cap C$ g) $C\cap (A\cup B)'$

Odpowiedź: a) $\langle -3;5\rangle$; b) Ø; c) (–∞; 3); d) 4;7); e) (4;7); f) (–∞;3); g) $(-\infty;\ 4\rangle$.

1.8.7 Mając dane zbiory A i B, zaznacz na osi liczbowej zbiory: A′, B′, A′ ∩ B′ oraz A′ ∪ B′.

a) $A = (-\infty;\ 3), B = (4;\ +\infty)$ b) $A = (-\infty;\ -5) \cup\ (4;6), B = \langle 2;7\rangle$

c) $A = (0;\ 2\rangle \cup\ (6;+\infty), B = (-5;8\rangle$ d) $A = \langle 2;4\rangle, B = (1;+\infty)$

e) $A = (-\infty;\ -3) \cup \langle 1;2\rangle, B = (0;4)$

Odpowiedź:

a) $A' =\ \langle 3;+\infty), B' = (-\infty;4\rangle, A'\cap\ B' = \langle 3;4\rangle, A'\cup B' = R$

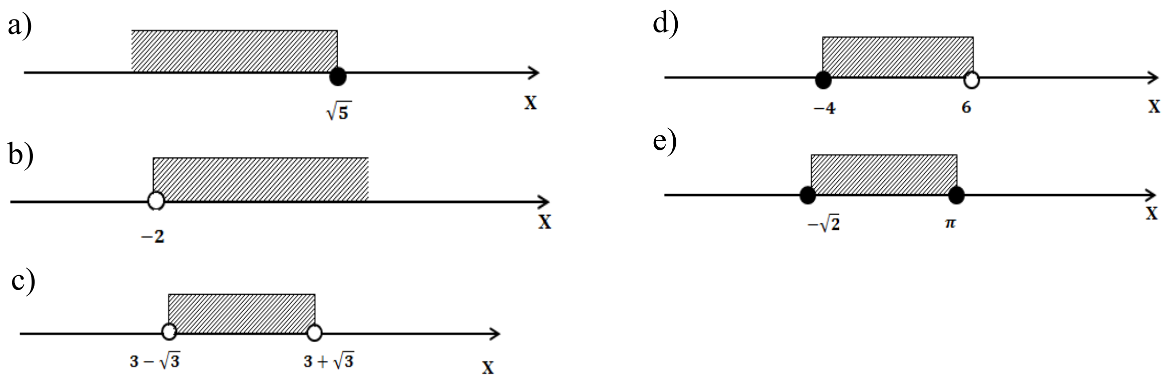
b) $A' = \langle -5;4\rangle\ \cup\ \langle 6;+\infty), B' = (-\infty;2)\ \cup\ (7;+\infty),$
$A'\cap\ B' = \langle -5;\ 2) \cup (7;+\infty), A'\cup B' = (-\infty;4\rangle \cup \langle 6;+\infty)$

c) $A' = (-\infty;0\rangle \cup\ (2;6\rangle, B' = (-\infty;-5\rangle \cup (8;+\infty), A'\cap\ B' = (-\infty;\ -5\rangle,$
$A'\cup B' = (-\infty;\ 0\rangle \cup\ (2;6\rangle \cup\ (8;+\infty)$

d) $A' = (-\infty;2)\ \cup\ (4;+\infty), B' = (-\infty;1\rangle, A'\cap\ B' = (-\infty;1\rangle,$
$A'\cup B' = (-\infty;2)\ \cup (4;+\infty)$

e) $A' = \langle -3;1)\ \cup\ (2;\ +\infty), B' = (-\infty;0\rangle \cup \langle 4;+\infty), A'\cap\ B' = \langle -\infty;0\rangle \cup \langle 4;+\infty)$
$A'\cup B' = (-\infty;1)\ \cup\ (2,+\infty)$

1.8.8 Zapisz w postaci nierówności i przedziału liczbowego zbiór liczb zaznaczonych na osi liczbowej:



Odpowiedź:

a) $x \leq \sqrt{5},\ x \in \left(-\infty;\ \sqrt{5}\right\rangle$

b) $x > -2, \quad x \in (-2;\ +\infty)$

c) $3 + \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}, \quad x \in \left(3 - \sqrt{3};\ 3 + \sqrt{3}\right)$

d) $-4 \leq x < 6, \quad x \in \langle -4;\ 6)$

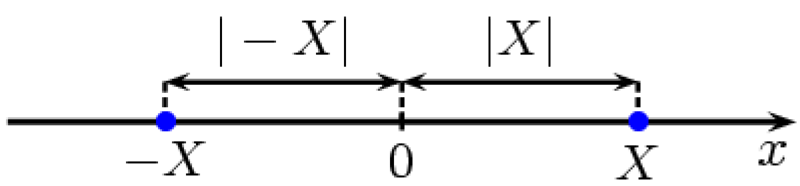
e) $-\sqrt{2} \leq x \leq \pi, \quad x \in \langle -\sqrt{2};\ \pi\rangle$

1.8 Wartość bezwzględna*

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną,
- Zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| < b$, $|x - a| = b$, $|x - a| \geq b$.

Wartość bezwzględna liczby[21] nazywana też modułem lub wartością absolutną liczby, jest to odległość na osi liczbowej od danej liczby do zera.



Rysunek 1-14 – Wartość bezwzględna

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

21 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna, 10.03.2013.

Przykład 1

Wartość bezwzględna z liczby dodatniej to ta sama liczba

$|4| = 4$

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna

$|-5| = 5$

Aby rozwiązać równanie $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \boldsymbol{b}$, należy znaleźć liczby, których odległość od liczby a jest równa b.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|2x - 3| = 5$

Rzpatrujemy dwa przypadki:

$2x - 3 = 5, \quad \vee \ 2x - 3 = -5$

Otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_1 = 4$ lub $x_2 = -1$.

Własności wartości bezwzględnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *x* i *y* zachodzą poniższe własności:

$$|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$$

$$|\boldsymbol{x}| = |-\boldsymbol{x}|$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2}$$

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystać następujące własności:

$$|x| < a \iff -a < x < a \iff (x > -a \wedge x < a)$$

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \iff (x \geqslant -a \wedge x \leqslant a)$$

$$|x| > a \iff (x < -a \vee x > a)$$

$$|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a \vee x \geqslant a)$$

Przykład 3

Rozwiążmy nierówność $|x + 5| \leq 10$, wykorzystując własność $|x| \leq a$ otrzymujemy:

$x \geq -a \wedge x \leq a$, gdzie zamiast x postawiamy x+5, a zamiast a liczbę 10 otrzymujemy:

$x + 5 \geq -10 \wedge x + 5 \leq 10$, stąd

$x \geq -15 \wedge x \leq 5$, co ostatecznie zapisujemy za pomocą przedziału $x \in \langle -15; 15 \rangle$.

Przykład 4

Nierówności z wartością bezwzględną możemy zapisać za pomocą przedziałów:

a) $|x| \leq b$, czyli $x \in \langle -b; b\rangle$

b) $|x| < b$, czyli $x \in (-b; b)$

c) $|x| > b$, czyli $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$

d) $|x| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; -b\rangle \cup \langle b; +\infty)$

e) $|x - a| < b$, czyli przedział o środku w punkcie a i długości b, $x \in (a - b; a + b)$

f) $|x - a| \leq b$, czyli $x \in \langle a - b; a + b\rangle$

g) $|x - a| > b$, czyli $x \in (-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)$

h) $|x - a| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; a - b\rangle \cup \langle a + b; +\infty)$

ZADANIA

1.9.1 Oblicz:

a) $|-\mathbf{34,5}| + |\mathbf{34,5}|$

b) $|-2 - 34| - |12 - 15|$

c) $|-\sqrt{7} - 2|$

d) $|2 - \sqrt{3}|$

e) $|-x^2|$

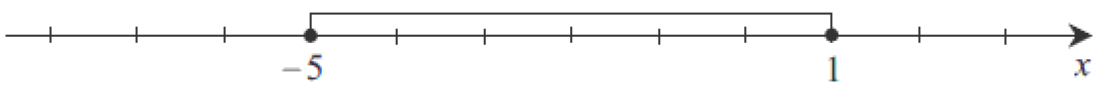
Odpowiedź: a) 69; b) 33; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$ –2 e) x^2

1.9.2 Rozwiąż równanie:

a) $|x - 5| = 7$ b) $|2x + 6| = 1$ c) $|3x - 3| = 1$ d) $|-x + 1| = 2$

Odpowiedź: a) 12 i –2; b) –2,5 i –3,5; c) $\frac{2}{3}$ i 1 $\frac{1}{3}$; d) –1 i 3.

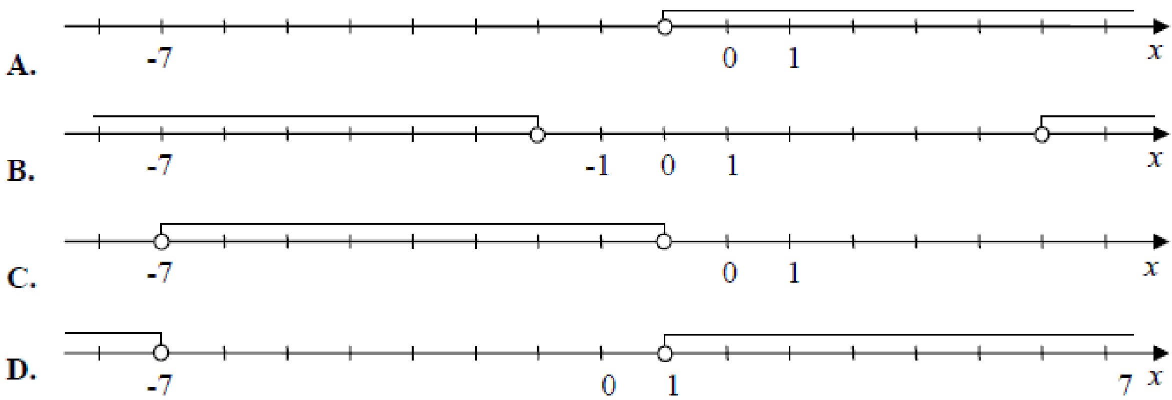
1.9.3 Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej:



A. $|x + 2| \leq 3$ B. $|x - 2| \leq 3$ C. $|x - 3| \leq 2$ D. $|x + 3| \leq 2$

Odpowiedź: D

1.9.4 Wskaż, który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x+3|>4$?



Odpowiedź: D.

1.9.5 Zapisz za pomocą przedziału liczbowego i zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $|x-5| \geq 3$ b) $|x-2| < 4$ c) $|x+1| > 3$

d) $|x+3| \geq 2$ e) $2 < |x| < 5$ f) $1 \leq |x| \leq 4$

g) $|5+x| \leq 1$ h) $|2+x| < 3$

Odpowiedź: a) $(-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 8;+\infty)$; b) $(-2;6)$; c) $(-\infty;\ -4) \cup (2;+\infty)$; d) $(-\infty;\ -5\rangle \cup \langle -1;+\infty)$; e) $(-5;-2) \cup (2;5)$; f) $\langle -4;-1) \cup (1;4\rangle$; h) $\langle -6;-4\rangle$.

1.9 Logarytmy

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać definicję logarytmu i stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Dawniej logarytmy używane były do szybkiego mnożenia liczb za pomocą *tablic logarytmicznych*, które były podstawową pomocą do obliczeń naukowych, geodezyjnych, astronomicznych i inżynierskich. Dzisiaj zastąpiły je kalkulatory i komputery.

Logarytm zapisujemy następująco:

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a>0$, $a \neq 0$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c = b$ (jest to potęga, do jakiej należy podnieść „a”, aby otrzymać „b”).

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x$$

Z definicji wynika, że dla $b > 0$ mamy $b = a^{\log_a b}$

Przykład 1

$\log_2 8 = 3 \qquad bo\colon 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \qquad bo\colon 3^4 = 81$

$\log_a a = 1$ **Jeżeli podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są takie same, to wynik logarytmowania zawsze wynosi 1.**

bo: $a^1 = a$ (niezależnie od wartości „a")

$\log_a 1 = 0$ **Jeżeli liczba logarytmowana wynosi 1, to wynik logarytmowania wynosi 0.**

bo: $a^0 = 1$

Przykład 2

$\log_6 6 = 1 \qquad bo\colon 6^1 = 6$

$\log_{15} 1 = 0 \qquad bo\colon 15^0 = 1$

Prawa działań na logarytmach:

1) Logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_b c$$

2) Logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

3) Inne prawa:

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \qquad \log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Przykład 3

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

$$\log_{16} 0{,}25 = -\log_{16} 4 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_7 \frac{63}{5} - \log_7 \frac{9}{5} = \log_7 \frac{\frac{63}{5}}{\frac{9}{5}} = \log_7 7 = 1$$

$$\frac{\log_7 32}{\log_7 8} = \frac{\log_7 2^5}{\log_7 2^3} = \frac{5\log_7 2}{3\log_7 2} = \frac{5}{3}$$

$$\log_2 3 \cdot \log_9 2 = \log_9 2^{\log_2 3} = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

Ciekawostka

Najczęściej używa się logarytmów dziesiętnych oraz logarytmów naturalnych, tj. o podstawach równych odpowiednio 10 i e.

Przy odwzorowaniu wielkości w skali logarytmicznej, używane są często specyficzne jednostki miary, właściwe dla danej dziedziny, np. bele (B) i decybele (dB) w elektronice i przetwarzaniu sygnałów czy nepery w akustyce[22].

Skale logarytmiczne są szeroko stosowane w nauce i technice dla odwzorowania wielkości, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, np.:

- Skala Richtera – do określania amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych.

Skutki trzęsienia ziemi w zależności od jego wielkości w skali Richtera:

Skala Richtera	Skutki	Średnia liczba trzęsień rocznie
< 2,0	Najmniejsze wstrząsy, nieodczuwalne przez człowieka ani przez sejsmograf.	ok. 2 920 000 (8000 dziennie)
2,0-3,4	Wstrząsy nieodczuwalne dla człowieka, lecz rejestrowane przez sejsmograf.	ok. 800 000
3,5-4,2	Bardzo małe wstrząsy, odczuwane tylko przez niektórych ludzi.	ok. 30 000
4,3-4,8	Odczuwane przez większość osób, nieszkodliwe.	ok. 4 800
4,9-5,4	Odczuwane przez wszystkich, powoduje bardzo niewielkie zniszczenia.	ok. 1 400
5,5-6,1	Średnie wstrząsy, powoduje mniejsze uszkodzenia budynków.	ok. 500
6,2-6,9	Duże wstrząsy, powodują znaczne zniszczenia.	ok. 100
7,0-7,3	Poważne zniszczenia.	ok. 15
7,4-8,0	Ogromne zniszczenia.	ok. 4
8,0-8,9	Ogromne zniszczenia, katastrofalne skutki dla wielu krajów.	ok. 1
≥ 9,0	Trzęsienie, które może zburzyć wszystkie miasta na terenie większym niż kilkanaście tysięcy km^2.	ok. raz na 20 lat

Tabela 1-1 – Skala Richtera

- Skala decybelowa – do określania poziomu wielkości elektrycznych i akustycznych.
- Skala pH – do określania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych.

22 www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna, 25.02.2013

- Interwały w muzyce.
- Skala entropii w termodynamice.
- Skala Krumbeina – dla określania wielkości ziaren w geologii.
- Skala wielkości gwiazdowych.
- Skala logarytmiczna jest w pewnych zastosowaniach skalą naturalną, ze względu na to, że zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat innych skal logarytmicznych lub innego zastosowania logarytmów.

ZADANIA

1.10.1 Oblicz $\log_3 b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 27 b) $\frac{3}{9}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[5]{81}$

Odpowiedź: a) 3; b) –1; c) –1; d) $\frac{4}{5}$.

1.10.2 Oblicz wiedząc, że b jest równe:

a) 9 $\log_{\frac{1}{3}} b$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$

Odpowiedź: a) –2; b) 1; c) $-\frac{4}{3}$; d) $-\frac{2}{5}$.

1.10.3 Oblicz b, jeżeli $\log_2 b$ wynosi:

a) $\sqrt[4]{2}$ b) 4 c) –3 d) 0,125 e) 1

Odpowiedź: a) $-\frac{7}{4}$; b) 16; c) $2^{2^{\frac{1}{4}}}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 2.

1.10.4 Oblicz b, jeżeli $\log_{\frac{1}{2}} b$ wynosi:

a) 0,125 b) 0,25 c) 64 d) $\frac{1}{16}$

Odpowiedź: a) 3; b) 2; c) –5; d) 4.

1.10.5 Oblicz:

a) $\log_4 16$ b) $\log_3 \sqrt[3]{3}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{4}$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{8}{2})2$

e) $\log_{\frac{3}{5}}(\frac{18}{50})3$ f) $3\log_{2,5}\frac{2}{5}$ g) $\log_{\frac{1}{3}}(64)–1$ h) $\log_2(\frac{1}{64})^{-2}$

i) $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ j) $2\log_{\frac{1}{3}} 9$

Odpowiedź: a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{2}{3}$; d) –4; e) 6; f) –3; g) 2; h) 12; i) –6; j) –4.

1.10.6 Oblicz, stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_2 4 + 2\log_3 1$ b) $(\log_5 5 - \log_5 125)^3$ c) $2\log_3 27 - \log_3 81$

d) $\log_2 4 + 2\log_2 1$ e) $\log_3 21 - \log_3 7$ f) $\log_5 10 + \log_5 24{,}3$

g) $\log_4 2 + \log_4 32$ h) $\log_4 8 + \log_4 2$

Odpowiedź: a) 2; b) –1; c) 9; d) 2; e) 1; f) 5; g) 3; h) 2.

1.10.7 Oblicz podstawę logarytmu wiedząc, że:

a) $\log_a 25 = 4$ b) $\log_a 0{,}01 = 3$ c) $\log_a 27 = 3$

d) $\log_a \frac{1}{27} = 2$ e) $\log_a \frac{3}{18} = 4$

Odpowiedź: a) $\sqrt[4]{25}$; b) $\sqrt[3]{0{,}01}$; c) 3; d) $\sqrt{27}$; e) $\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

1.10.8 Oblicz:

a) $\log_3 \left(2 - (\log_4 \sqrt{4}) \cdot \log_{\sqrt{4}} \frac{1}{4} \right)$ b) $\log_3 9 \cdot \log_4 16 \cdot \log_5 25 + 1$

c) – log3log2log2256 d) –log3log4$\sqrt[5]{\sqrt[4]{4}}$

Odpowiedź: a) 1; b) 9; c) –1; d) 2.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Na seans filmowy sprzedano 280 biletów. W tym 126 ulgowych. Jaki procent sprzedanych biletów stanowły bilety ulgowe?[23]

a) 22% b) 33% c) 45% d) 63%

2. 6% liczby x jest równe 9. Wtedy:

a) $x = 240$ b) $x = 150$ c) $x = 24$ d) $x = 15$

3. Iloraz $32^{-27} \div \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy:

a) 2^{-27} b) 2^{-3} c) 2^3 d) 2^{27}

4. O liczbie x wiadomo, że $\log_3 x = 9$. Zatem:

a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 3^9$ d) $x = 9^3$

5. Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?[24]

a) 163,80 b) 180 c) 294 d) 420

23 Zadania: 1, 2, 3, 4 zaczerpnięte z CKE, Próbna matura, listopad 2009.
24 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpięte z CKE, maj 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).

6. Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa:

a) 1 b) 4 c) 9 d) 36

7. Liczba jest równa $\log_4 8 + \log_4 2$:

a) 1 b) 2 c) $\log_4 6$ d) $\log_4 10$

8. Liczba $|5-7| - |-3+4|$ jest równa:[25]

a) –3 b) –5 c) 1 d) 3

9. Samochód kosztował 30000 zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Po tych obniżkach samochód kosztował:

a) 24400 zł b) 24700 zł c) 24000 zł d) 300 zł

10. Dana jest liczba $x = 63^2 \cdot (\frac{1}{3})^4$. Wtedy:

a) $x = 7^2$ b) $x = 7^{-2}$ c) $x = 3^8 \cdot 7^2$ d) $x = 3 \cdot 7$

11. Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa:

a) -2 b) -1 c) $\frac{1}{25}$ d) 4

12. Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje:[26]

a) 1701 zł b) 2100 zł c) 1890 zł d) 2091 zł

13. Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%, w wyniku obu obniżek cena nart zmiejszyła się o:[27]

a) 44% b) 50% c) 56% d) 60%

14. Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16\frac{3}{4}$ jest równa:

a) -8 b) -4 c) 2 d) 4

15. Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy:

a) –6 b) –4 c) –1 d) 1

16. Liczba $\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 \cdot 0{,}5}$ jest równa:

a) 1 b) –1 c) 2 d) 4

25 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpięte z CKE, listopad 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd, 20.03.2013).

26 Zadanie 20 zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20,03,2013).

27 Zadania: 13, 14, 15 zaczerpięte z CKE, maj 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).

17. Liczba $\log_3 36 - \log_3 4$ jest równa:

a) $\log_3 32$ b) $\log_3 14$ c) 2 d) 9

18. Stół kosztował 320 zł. Ile kosztuje stół po podwyżce ceny o 20%?

a) 384 zł b) 256 zł c) 340 zł d) 400 zł

19. Liczba $27^{-2} \cdot 9^{6}$ jest równa:[28]

a) 9^5 b) 3^{16} c) 6^4 d) 3^6

20. Liczba log0,1+$\log_2$16 jest równa:

a) 6 b) –5 c) 3 d) 7

21. Torba kosztowała 40 zł, a po podwyżce 50 zł. O ile procent podwyższono cenę tej torby?

a) 10% b) 25% c) 75% d) 20%

22. Liczba $\dfrac{\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}}$ jest równa:[29]

a) -1 b) $\dfrac{4}{49}$ c) $-2\dfrac{1}{4}$ d) 1

23. Liczba log6 jest równa:

a) $\log 2 \cdot \log 3$ b) $\dfrac{\log 12}{\log 2}$ c) $\log 2 + \log 3$ d) $\log 2 - \log 3$

24. 20% pewnej liczby jest o 16 mniejsze od tej liczby. Tą liczbą jest:

a) 32 b) 20 c) –2 d) –20

25. Liczbę $x = 2^2 \cdot 16^{-4}$ można zapisać w postaci:[30]

a) $x = 214$ b) $x = 2–14$ c) $x = 32–2$ d) $x = 2–6$

26. Hania pokonuje drogę $S = 100\ m$ z domu do szkoły w czasie 30 min. Z jaką średnią prędkością idzie Hania?

a) 0,05 $\frac{km}{h}$ b) 0,2 $\frac{km}{h}$ c) 5 $\frac{km}{h}$ d) 3,3 $\frac{km}{h}$

27. Liczba $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ jest równa:

a) 6 b) –3 c) 3 d) –6

28 Zadania 19, 20, 21 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2009.

29 Zadania 22, 23, 24 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011 (www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 20.03.2013).

30 Zadania 25, 26, 27, 28 zaczerpnięte z OKE Poznań, styczeń, 2013 (www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc-0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 21.03.2013).

28. Odległość z Elbląga do Legnicy jest równa 468 km, natomiast po zaokrągleniu do setek kilometrów 500 km. Błąd względny tego przybliżenia jest równy:

a) 32 km b) 68 km c) około 6,8% d) 0,32%

29. Liczba $|5-2|+|1-6|$ jest równa:[31]

a) 8 b) 2 c) 3 d) −2

30. Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

31. **(2 pkt)**[32] Miesięczny koszt ogrzewania domu wynosi 200 zł. Dla zmniejszenia tych kosztów planuje się położenie dodatowej izolacji cieplnej, której wartość wynosi 4200 zł. Jeśli ta izolacja daje 30% oszczędności w wydatkach na ciepło, to po ilu latach poniesione koszty zwrócą się?

32. **(2pkt)** Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.

33. **(2 pkt)** Wiedząc, że $\sqrt{x}=16$, $\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}$ oblicz $\sqrt[5]{xy}$.

34. **(2 pkt)** Dana jest liczba 2,363636... Podaj zaokrąglenie tej liczby z dokładnością do 0,001 i oblicz błąd względny tego przybliżenia.

35. **(5 pkt)** Siostry Zosia i Zuzia są współwłaścicielkami działki, przy czym część Zosi jest o 40% więsza od części Zuzi. Zuzia przeznaczyła na budowę altany 21% powierzchni swojej działki, to jest 210 m^2. Oblicz pole powierzchni całej działki. Jaki procent pola powierzchni całej działki stanowi działka Zuzi? Wynik zaokrągij do 1%.

36. **(2 pkt)** Aby obliczyć kwadrat liczby trzycyfrowej, można skorzystać ze wzoru: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, na przykład:

$$172 = (100+70+2)^2 = 100^2+70^2+2^2+2*100*70+2*100*2+2*70*2$$
$$= 10000+4900+4+14000+400+280 = 29584$$

37. **(2 pkt)** O ile procent zwiększy się pole powierzchni działki w kształcie prostokąta, jeśli długość każdego boku powiększymy o 30%?

38. **(2 pkt)** Liczbę 0,(4) – 0,2(1) zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

39. **(3 pkt)** Podaj liczby całowite, które należą do zbioru:

a) $(-\infty,2\rangle \cap (1;5)$ b) $\langle -2;3) \cup (3;5\rangle$ c) $(-5;7)/\langle 0;+\infty)$

40. **(4 pkt)** Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:

$A=\log_6(\log_2 64)$; $B=\log_{\frac{2}{3}}\frac{81}{16}$; $C=\log_{\frac{1}{2}}2\frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{2}}1\frac{1}{8}$; $D=\log_3 3\frac{6}{7}+\log_3 2\frac{1}{3}$

41. **(2 pkt)** Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{(0{,}75)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}$?

31 Zadania: 29, 30 zaczerpnięte z matury poprawkowej, sierpień, 2011 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 21.03.2013).

32 Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2 Wyrażenia algebraiczne

Algebra jest jednym z najstarszych działów matematyki. Około 300 r. n.e. starożytny myśliciel Diofantos po raz pierwszy niewiadome oznaczał literami. Za twórcę współczesnej algebry uznaje się jednak Francioisa Viete. Ten francuski matematyk pierwszy szeroko wprowadził oznaczenia literowe dla niewiadomych oraz dla współczynników.

To już potrafię:

1. Opisywać za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
2. Obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3. Redukować wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4. Dodawać i odejmować sumy algebraiczne;
5. Mnożyć jednomiany, sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnożyć sumy algebraiczne.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Wyrażenie $(2ab^2c^3)^3$ można zapisać jako:

a) $2ab5c^2$ b) $2ab^6c^9$ c) $8a^3b^5c^6$ d) $8a^3b^6c^9$

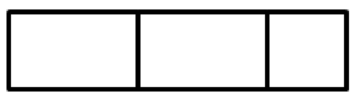
Zad.2. Wyrażenie $25 - a^2 + a$, dla $a = -3$ jest równe:

a) 13 b) 31 c) 19 d) 16

Zad.3. Wyrażenie $(n - 3m)(n + 3m)$ jest równe wyrażeniu

a) $n^2 - 6nm + 9n^2$ b) $n^2 - 6m^2$ c) $n^2 - 6nm + 6n^2$ d) $n^2 - 9m^2$

Zad.4. Na ceglanej elewacji jednego z budynków w mieście powtarza się wzór. Przez *n* oznaczmy długość dłuższej cegły, a przez *m* długość krótszej cegły. Łączną długość pięciu takich wzorów opisuje wyrażenie:



a) $5 \cdot 2n + m$ b) $2n + 5m$ c) $5(2n + m)$ d) $5(2n + 2m)$

Zad.5. Wyrażenie $9b^2 + 6ab - 3b$ jest równe:

a) $3b^2(3 + 2a - 1)$ b) $3b(b + 3a - 1)$

c) $3b(3b + 2a - 1)$ d) $3(b + 2a - 1)$

Zad.6. W sklepie było 20 kilogramów pomarańczy po 3 zł za kilogram, 35 kilogramów mandarynek po 2,50 zł za kilogram. Sprzedano owoce o wartości 130 zł. Które z wyrażeń przedstawia wartość owoców pozostawionych w sklepie?

a) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 - 130$ b) $130 - (20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50)$

c) $(20 + 35) \cdot (3 + 2{,}50) - 130$ d) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 + 130$

Zad.7. Ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$ wyznacz zmienną v

a) $v = \frac{2m}{E}$ b) $v = \sqrt{\frac{2m}{E}}$ c) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ d) $v = \sqrt{2Em}$

Zad.8. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $(5x^2 + 4x) - 7y^2 - (3x^2 + 3y^2)$ otrzymamy:

a) $2x^2 - 4y^2 + 4x$ b) $2x^2 - 10y^2 - 4x$

c) $2x^2 + 10y^2 + 4x$ d) $2x^2 - 10y^2 + 4x$

Zad.9. Liczbę 4 razy mniejszą od kwadratu liczby n przedstawia wyrażenie:

a) $n^2 : 4$ b) $n^2 - 4$ c) $\frac{1}{4n^2}$ d) $4 : n^2$

Zad.10. Różnica kwadratu potrojonej liczby x i ćwierci sześcianu liczby y, to:

a) $3x^2 - 0{,}25y^3$

b) $(3x)^2 - 0{,}25y^3$

c) $3x^2 - (0{,}25y)^3$

d) $(3x)^2 - (0{,}25y)^3$

Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	C	C	A	C	D	A	A

ZADANIA OTWARTE

1. Ze szkoły liczącej n uczniów $x\%$ wyjeżdża w czasie wakacji na obozy, $y\%$ do znajomych w góry, a $z\%$ z rodzinami na wczasy. Ile osób pozostaje w miejscu zamieszkania?

2. Zapisz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych w postaci wyrażenia algebraicznego.

3. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych

$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)$

4. Sprowadź do najprostszej postaci i oblicz wartość liczbową wyrażenia dla $x=-5, y=\frac{1}{2}$

$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)$

5. Uzasadnij, że $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ dla $a,b>0$

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	n – wszyscy uczniowie $x\%\cdot n$ – ilość uczniów na obozach $y\%\cdot n$ – ilość uczniów w górach $z\%\cdot n$ – ilość uczniów na wczasach $a\%\cdot n$ – uczniowie pozostający w domu $x\%\cdot n+y\%\cdot n+z\%\cdot n+a\%\cdot n=n$ $xn+yn+zn+an=100n$ $an=100n-xn-yn-zn$ $a=\frac{n(100-x-y-z)}{n}$ uczniów
2	n– liczba naturalna $2n$ – liczba parzysta $2n+1$ – liczba nieparzysta $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=2n+1+2n+3+2n+5=6n+9=3(2n+3)$
3	$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)=2x+5+3x-2y+2x+3-4y-1$ $=7x-6y+7$
4	$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)=x^2-4y^2+x^2+2xy+y^2-4xy+4y^2$ $=2x^2+y^2-2xy=2\cdot(-5)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-5)\cdot\frac{1}{2}=50+\frac{1}{4}+5=55\frac{1}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}(2-\sqrt{b})}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2-\sqrt{b}+\sqrt{b}=2$

2.1 Wartość liczbowa wyrażeń

Teraz nauczę się:

Stosować wzory skróconego mnożenia na:

- Kwadrat sumy: $(a+b)^2$
- Kwadrat różnicy: $(a-b)^2$
- Różnicę kwadratów: a^2-b^2

Wyrażenia algebraiczne powstają przez łączenie symboli literowych oraz liczb znakami działań i nawiasów.

Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$x, 25,\ \ 2y^3, -\frac{1}{2}ab^2, 5(x-2),\ \ a+3b^2,\ \ \frac{(a+b)}{2}\cdot h,\ \ 3(2+2a)+4-6a$$

Wyrażenia algebraiczne występują w różnych wzorach, twierdzeniach czy dowodach.

Wyrażenia takie, jak $3x, \frac{1}{5}ab, -2y^2, 3ab^2c^3, -1$ nazywamy jednomianami. Możemy wśród nich wyróżnić jednomiany podobne, czyli takie, które różnią się między sobą tylko współczynnikiem liczbowym.

Przykłady jednomianów podobnych:

$1;\ 4;\ \frac{3}{8};\ 15, \ldots$

$x;\ 5x;\ -0{,}75x;\ 1\frac{1}{5}x, \ldots$

$a^2bc^3;\ 4a^2bc^3;\ -2\frac{4}{5}a^2bc^3;\ 0{,}63a^2bc^3$

Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.

$$xy-2x+y-2-x+2xy+4y-5=-3x+5y+3xy-7$$

$$4a^2-3b-\frac{1}{2}a+2b^2-12+2\frac{3}{4}a-3a^2+5b=a^2+2b^2+2\frac{1}{4}a+2b-12$$

$$3a-8b^2+14ac+\frac{1}{2}a+7-10ca+5\frac{3}{4}b^2-4=-2\frac{1}{4}b^2+3\frac{1}{2}a+4ac+3$$

Taki zabieg nazywa się **redukcją wyrazów podobnych**.

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażeń algebraicznych, w miejsce liter należy wstawić liczby i wykonać określone działania.

Przykład 1

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3x^2+2x-4$ dla $x=-2$.

$$3x^2 + 2x - 4 = 3(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = 3 \cdot 4 - 4 - 4 = 12 - 4 - 4 = 4$$

Przykład 2

Zdredukuj wyrazy podobne i oblicz wartość liczbową danego wyrażenia dla $x = -3, y = 2$.

a) $4x^2 + 2x - 8 + 3x - \frac{1}{3}x^2 + 4 - 5x = 3\frac{2}{3}x^2 - 4 = 3\frac{2}{3} \cdot (-3)^2 - 4 = \frac{11}{3} \cdot 9 - 4 =$
$33 - 4 = 29$

b) $12x - 8x^2 + \frac{4}{3}x - 7 + 12x^2 - 14 + 9x = 4x^2 + 21\frac{4}{3}x - 21 =$
$= 4 \cdot (-3)^2 + \frac{67}{3} \cdot (-3) - 21 = 4 \cdot 9 - 67 - 21 = 36 - 88 = -52$

c) $3x^2y + 5y - 6 + 3y^2x - 4y + 7x + 6x^2y - 4y^2x - 12x =$
$= 9x^2y - y^2x - 5x + y - 6 = 9 \cdot (-3)^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-3) + 2 - 6$
$= 9 \cdot 9 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 15 + 2 - 6 = 162 + 12 + 15 + 2 - 6 = 185$

d) $-\frac{2}{5}x + 1\frac{1}{4}x - 0,3y = -\frac{8}{20}x + 1\frac{5}{20}x - 0,3y = \frac{17}{20}x - 0,3y =$
$= \frac{17}{20} \cdot (-3) - 0,3 \cdot 2 = -\frac{51}{20} - \frac{6}{10} = -\frac{51}{20} - \frac{12}{20} = -\frac{63}{20} = -3,15$

ZADANIA

2.1.1 Znajdź wartości liczbowe wyrażenia $(2x^2 - 2xy)^2$ przy następujących wartościach:

a) $x = 3;\ y = 2$

b) $x = 0,5;\ y = 0,2$

c) $x = 3\frac{1}{2};\ y = 1\frac{1}{2}$

d) $x = 2,5;\ y = 1,75$

Odpowiedź: a) 36; b) 0,09; c) 196; d) $14\frac{1}{16}$.

2.1.2 Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $3(x^2 - 3y + 4) - 8$, dla $x = 2; y = \frac{4}{3}$

b) $10(x - 2) - 4(y + 3) + 6$, dla $x = 1\frac{1}{2}; y = 0,75$

c) $20 - 4(2x^3 - 8x + 1) + 3$, dla $x = -\frac{1}{2}$

d) $x + 5 - (x - 3) + 4y - 7$, dla $x = -5; y = 3$

Odpowiedź: a) 4; b) –14; c) 4; d) 13.

2.1.3 Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $(5x - 2)^2 - (5x - 2)(5x + 2)$, dla $x = -0,2$

b) $\frac{4x}{y(x+y)}$, dla $x = 6, y = -2$

c) $(a^2 - 16)(a + 2)$, dla $a = \sqrt{2}$

d) $\frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1}$, dla $x = 4$

Odpowiedź: a) 12; b) –3; c) $-14(\sqrt{2}+2)$; d) $1\frac{1}{5}$.

2.2 Działania na wyrażeniach algebraicznych

Poza dodawaniem sum algebraicznych można na wyrażeniach algebraicznych wykonywać także inne działania: mnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożyć dwie sumy algebraiczne i wyłączać wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias.

Do przekształcania wyrażeń wykorzystuje się prawa działań na liczbach rzeczywistych.

Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian polega na zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Przykład 1

$$-5(3x+y) = -5 \cdot 3x + (-5) \cdot y = -15x - 5y$$

$$2x(x^2-5y) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-5y) = 2x^3 - 10xy$$

$$3a(2x^2+4x-2) = 3a \cdot 2x^2 + 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-2) = 6ax^2 + 12ax - 6a$$

Mnożenie sum algebraicznych polega na pomnożeniu każdego składnika pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Przykład 2

$$(x+3)(2x-1) = x \cdot 2x + x \cdot (-1) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-1) = 2x^2 - x + 6x - 3$$

$$\begin{aligned}(3x-2y)(-2x-5) &= 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot (-5) + (-2y) \cdot (-2x) + (-2y) \cdot (-5)\\ &= -6x^2 - 15x + 4xy + 10y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2x+3y-7)(x-2y) =\\ &\quad = 2x \cdot x + 2x \cdot (-2y) + 3y \cdot x + 3y \cdot (-2y) + (-7) \cdot x + (-7) \cdot (-2y)\\ &\quad = 2x^2 - 4xy + 3xy - 6y^2 - 7x + 14y = 2x^2 - 6y^2 - xy - 7x + 14y\end{aligned}$$

ZADANIA

2.2.1 Uprość wyrażenia, a następnie oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $x^2 - 2y^2 + xy$ dla $x = 2$ i $y = -5$

b) $\sqrt{x^2+y^2}$ dla $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{4}{5}$

c) $3x^2 - 4x + 7 + x^2 - 5x - 8$ dla $x = -1$

d) $5x - 3(4 - 2x) + 2(-x + 1)$ dla $x = -2$

e) $(x - 3)(x + 2 - 4)$ dla $x = 3$

f) $4x^2 - x(x + 3) - 5x$ dla $x = \frac{1}{3}$

g) $x(x - 3y) + 2xy - y^2(2 - y)$ dla $x = 2$ i $y = -3$

h) $3x - 4 - [2x^2 - 5x - (3 - 4x + 3x^2)]$ dla $x = -\frac{1}{2}$

i) $\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2} + \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}$ dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$

Odpowiedź: a) -56; b) 1; c) 16; d) -28; e) 0; f) $-2\frac{1}{3}$; g) $-2{,}75$

2.2.2 Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $(x - 5)(x + 2) =$

b) $(2x - 3)(x - 1) + 5x - 4(5 - 3x) =$

c) $2(2x - 5y) - 3(4x + 3y) =$

d) $(-x - 2y)(-1) + 3(x + y + 5) =$

e) $2x(x - 5) - (x - y)(x + 1) - 5x\left(\frac{2}{5}y - 2\right) =$

f) $5x(1 - x^2) - (x - 3)(-2x^2) =$

g) $-(3x - 2y + 1) + (5x - 4y + 4z) - (x - 5y - z) =$

h) $2x - 3y + 4z - \{3x + y - 2z - [3x - 2y - 2z - (3x + 5y - 7z)]\} =$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 2x - 10$; b) $2x^2 + 12x - 17$; c) $-8x - 19y$; d) $4x + 5y + 15$;

e) $x^2 - x + y - xy$; f) $-x^3 - 6x^2 + 5x$; g) $x + 3y + 5z - 1$; h) $-x - 11y + 11z$.

2.2.3 Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia.

a) $(2x + y)(3y - 5x) - 4x(x - y)$, dla $x = 1, y = -2$

b) $p(p - 3k) + 2pk - k^2(2 - k)$, dla $p = 2, k = -4$

c) $\frac{(2a-3b)(b-4a)-2b^2}{3a(4-b)-5b(a+3)}$, dla $a = -2, b = -4$

d) $(a + 1)(b + 2) + (b + 3)(c + 4) + (a + 5)(c + 6)$, dla $a = 1, b = 2, c = 3$

Odpowiedź: a) –12; b) –35; c) 0; d) 9; e) 7.

2.2.4 Wiedząc, że $x = 2 + \sqrt{5}$ i $y = 1 - 2\sqrt{5}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{xy}{2x+y}$

Odpowiedź: $\frac{-8-3\sqrt{5}}{5}$

2.2.5 Uzasadnij, że dla $a, b > 0$ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}-a}{a-b} = 1$

2.3 Wzory skróconego mnożenia

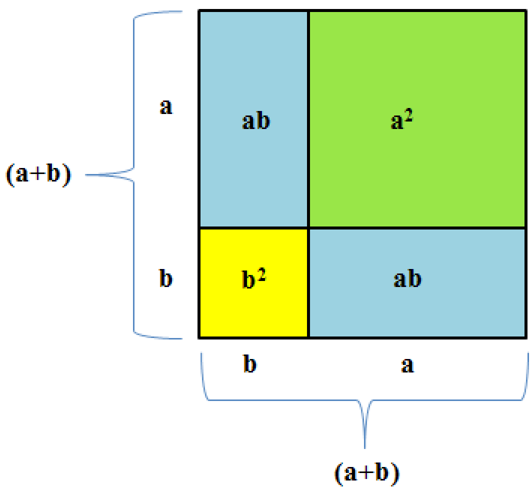
Wzory skróconego mnożenia – kwadrat sumy

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów powiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a + b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a + b)^2$ i jest sumą pól czterech figur.



$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Rysunek 2-1 – Kwadrat sumy

Interpretacja algebraiczna

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Przykład 1

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$$(2a + 4)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 4 + 4^2 = 4a^2 + 16a + 16$$

$$(2k + 5l)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 5l + (5l)^2 = 4k^2 + 20kl + 25l^2$$

$$\left(a\sqrt{2} + 2\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 4$$

Przykład 2

$$(102)^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

$$(120)^2 = (100+20)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 20^2 = 10000 + 4000 + 400 = 14400$$

$$(27)^2 = (20+7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 400 + 280 + 49 = 729$$

Przykład 3

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$$49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + x^2 = (7+x)^2 = (7+x)(7+x)$$

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$$

$$9 + 6x\sqrt{3} + 3x^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)\left(3 + x\sqrt{3}\right)$$

Wzory skróconego mnożenia – kwadrat różnicy

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów pomniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

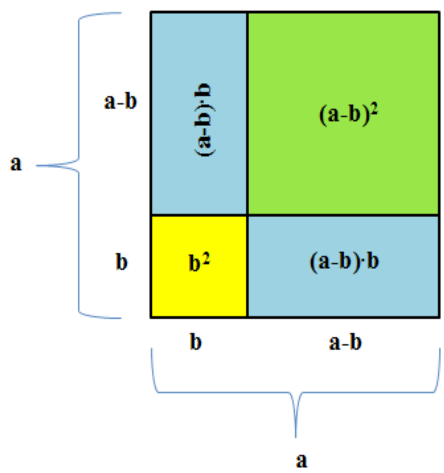
Interpretacja algebraiczna

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a-b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a-b)^2$

i jest równe sumie pól kwadratów o boku a i o boku b zmniejszonej o pole dwóch prostokątów o bokach a, b.



$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Rysunek 2-2 – Kwadrat różnicy

Przykład 4

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(4x-3)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3+3^2=16x^2-24x+9$

$(3a-5b)^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 5b+(5b)^2=9a^2-30ab+25b^2$

$\left(1-x\sqrt{3}\right)^2=1^2-2\cdot 1\cdot x\sqrt{3}+\left(x\sqrt{3}\right)^2=1-2x\sqrt{3}+3x^2$

Przykład 5

$(198)^2=(200-2)^2=200^2-2\cdot 200\cdot 2+2^2=40000-800+4=39204$

Przykład 6

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$a^2-16a+64=a^2-2\cdot a\cdot 8+8^2=(a-8)^2=(a-8)(a-8)$

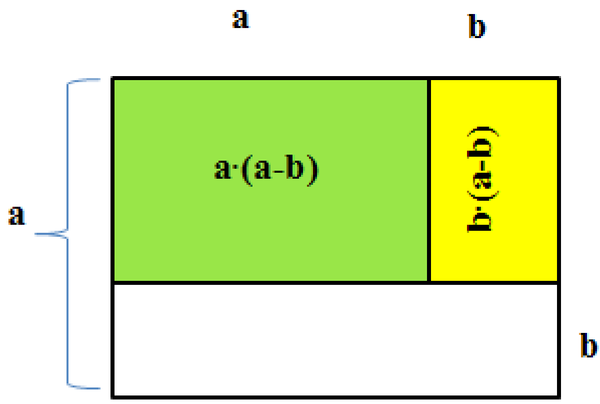
$9-6y\sqrt{5}+5y^2=9-2\cdot 3\cdot y\sqrt{5}+\left(y\sqrt{5}\right)^2=\left(3-y\sqrt{5}\right)^2=\left(3-y\sqrt{5}\right)\left(3-y\sqrt{5}\right)$

$36x^2-36xz+9z^2=(6x)^2-2\cdot 6x\cdot 3z+(3z)^2=(6x-3z)^2=(6x-3z)(6x-3z)$

Wzory skróconego mnożenia – różnica kwadratów

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń a i b przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$



Rysunek 2-2– Różnica kwadratów

Interpretacja geometryczna

Pole pokolorowanego prostokąta jest równe:

$P=(a+b)(a-b)$

$P=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

Zatem $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Interpretacja algebraiczna

$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

Przykład 7

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$

$(3z+2y)(3z-2y)=(3z)^2-(2z)^2=9z^2-4y^2$

$(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5)=(\sqrt{7})^2-5^2=7-25=-18$

Przykład 8

Zapisz różnicę w postaci iloczynu.

$16b^2-25c^2=(4b)^2-(5c)^2=(4b-5c)(4b+5c)$

$2x^2-4y^2=(x\sqrt{2})^2-(2y)^2=(x\sqrt{2}+2y)(x\sqrt{2}-2y)$

$a^4-64=(a^2)^2-8^2=(a^2-8)(a^2+8)=(a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})(a^2+8)$

Przykład 9

Oblicz $399\cdot 401$.

$399\cdot 401=(400-1)(400+1)=400^2-1^2=160000-1=159999$

ZADANIA

2.3.1 Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia.

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+6)^2$ c) $(2+5y)^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)^2$

e) $(6x+5y)^2$ f) $(y-5)^2$ g) $(2y-4x)^2$ h) $(-3-x)^2$

i) $(y-5)^2$ j) $\left(6y-\frac{1}{3}x\right)^2$

Odpowiedź:

a) x^2+6x+9; b) $4x^2+24x+36$; c) $4+20y+25y^2$;

d) $\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$; e) $36x^2+60xy+25y^2$; f) $y^2-10y+25$;

g) $4y^2-16xy+16x^2$; h) $9+6x+x^2$; i) $y^2-10y+25$;

j) $36y^2-4x+\frac{1}{9}x^2$.

2.3.2 Oblicz.

a) 103^2 b) 78^2 c) 503^2 d) 99^2 e) 498^2 f) 303^2

Odpowiedź: a) 10609; b) 6084; c) 253009; d) 9801; e) 248004; f) 91809.

2.3.3 Oblicz, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

a) $\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ b) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$

c) $\left(2\sqrt{2}-5\right)^2$ d) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

Odpowiedź: a) $4\sqrt{3}+7$; b) $2\sqrt{21}+10$; c) $33-20\sqrt{2}$; d) $18+12\sqrt{2}$.

2.3.4 Zapisz wyrażenia w postaci iloczynu.

a) x^2-25 b) $4x^2-9y^2$ c) x^4-49y^2

d) $64-0{,}36x^2$ e) $\frac{64}{81}x^2-121y^2$ f) $3x^2-7y^2$

Odpowiedź:

a) $(x-5)(x+5)$; b) $(2x-3)(2x+3y)$; c) $(x-7y)(x+7y)$;

d) $(8-0{,}6x)(8+0{,}6x)$; e) $\left(\frac{8}{9}x-11y\right)\left(\frac{8}{9}x+11y\right)$; f) $\left(\sqrt{3}x-\sqrt{7}y\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{7}y\right)$.

2.3.5 Zapisz w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

a) $(x-2)(x+2)$ b) $(2x-3y)(2x+3y)$ c) $-\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right)$

d) $\left(\sqrt{2}-5\right)\left(\sqrt{2}+5\right)$ e) $\left(3\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-3\right)$ f) $(-5x-6)(5x-6)$

Odpowiedź: a) x^2-4; b) $4x^2-9y^2$; c) $-\frac{1}{4}x^2+y^2$; d) -23; e) 54; f) $36-25x^2$.

2.4 Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Wzory skróconego mnożenia stosuje się także do **usuwania niewymierności** z mianownika ułamka. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez taki czynnik, który da w mianowniku liczbę całkowitą. Jeżeli w mianowniku mamy sumę lub różnicę, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Przykład 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+5)}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{18+15\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{18+15\sqrt{3}}{12-5}=\frac{3(6+5\sqrt{3})}{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=$$

$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

ZADANIA

2.4.1 Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$ c) $\frac{7}{\sqrt[3]{8}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ f) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ h) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$

Odpowiedź:

a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; c) 3,5; d) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{4\sqrt{33}-4\sqrt{6}-\sqrt{22}+11}{9}$; f) $2\sqrt{2}-2$; g) $15+5\sqrt{6}$; h) $\frac{-7-2\sqrt{10}}{3}$.

2.4.3 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2}{5+\sqrt{5}}$, $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2\sqrt{3}+5}{6+2\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Odpowiedź:

a) $\sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-3, 0{,}5-0{,}1\sqrt{5}, -3(2+\sqrt{5})$;

b) $\frac{6-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}, -5-2\sqrt{6}, \frac{3}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.4.4 Usuń niewymierność, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $\frac{5}{4+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Odpowiedź: a) $\frac{-30+25\sqrt{3}-15\sqrt{7}+10\sqrt{21}}{12}$; b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

2.5 Rozkład wielomianu na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias to nic innego, jak zamiana sumy algebraicznej na iloczyn wyrażeń. Umiejętność ta jest przydatna do rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Przykład

$$3x+6y-12z = 3\cdot z + 3\cdot 2y - 3\cdot 4z = 3(z+2y-4z)$$

$$-2abc+6a^2bc-10ac^2 = -2abc + (-2)\cdot 3aabc + (-2)\cdot 5acc$$
$$= -2ac(b+3ab+5c)$$

$$x(2a+b)-y(2a+b) = (2a+b)(x-y)$$

$$x(y-z)-(y-z) = x(y-z)-1(y-z) = (y-z)(x-1)$$

ZADANIA

2.5.1 Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5x+x^2=$ b) $6x^2-3x=$

c) $6x + 10xy + 8xz =$ d) $8x^2y + 4xy - 2y =$

e) $3xyz + 6xzt - 9xyt =$ f) $5x^4 - 25x^3 - 10x^2 =$

g) $2(x + y) + (x + y)z =$ h) $(2x - 3y) - a(2x - 3y) =$

i) $(5 - x)y^2 - 9(5 - x)y - (x - 5) =$

Odpowiedź:

a) $x(5 + x)$; b) $3x(2x - 1)$; c) $2x(3 + 5y + 4z)$; d) $2y(4x^2 + 2x - 1)$; e) $3x(yz + 2zt - 3yt)$;

f) $5x^2(x^2 - 5x - 2)$; g) $(x + y)(2 + z)$; h) $(2x - 3y)(1 - a)$; i) $(5 - x)(y^2 - 9y + 1)$.

2.5.3 Zapisz w postaci iloczynowej:

a) $3x^2 - 6$ b) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ c) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

d) $3x^3 - 15x^2 - 6x + 30$ e) $x^4 - x^3 - 8x + 8$

Odpowiedź:

a) $3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$; c) $(x + 2)(x^2 + 9)$;

d) $3(x - 5)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; e) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Równość $(a + 4\sqrt{2})^2 = a^2 + 32\sqrt{2} + 32$ zachodzi dla:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$ d) $a = 4\sqrt{2}$

2. Liczba $(2 - 3\sqrt{2})^2$ jest równa:[33]

a) -14 b) 22 c) $-14 - 12\sqrt{2}$ d) $-22 - 12\sqrt{2}$

3. Równość $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$ zachodzi dla:

a) $a = 14$ b) $a = 7\sqrt{2}$ c) $a = 7$ d) $a = 2\sqrt{2}$

33 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z „Poprawkowy egzamin maturalny z matematyki", sierpień, 212 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 23.03.2013).

4. Liczba x stanowi 20% liczby y. Zatem prawdziwe jest następujące równanie:

a) $0{,}2x = y$ b) $y = 5x$ c) $1{,}2x = y$ d) $x = 1{,}2\,y$

5. Liczba $(3-\sqrt{2})^2 + 4(2-\sqrt{2})$ jest równa:[34]

a) $19-10\sqrt{2}$ b) $17-4\sqrt{2}$ c) $15+14\sqrt{2}$ d) $19+6\sqrt{2}$

6. Wyrażenie $8x^2 - 4xy + 6x$ jest równe iloczynowi:

a) $2x(4x-2y+6)$ b) $2x(4x-2y+3)$

c) $2x(4x^2-2y+3x)$ d) $2x(4x-y+3)$

7. Wartość wyrażenia $(\sqrt{x+1}+1)(1-\sqrt{x+1})$ dla $x=\sqrt{2}-2$ jest równa:

a) $2-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}-2$ c) $\sqrt{2}-3$ d) $4-\sqrt{2}$

8. Liczba a stanowi 60% liczby b. Wówczas:[35]

a) $a = b - 0{,}4$ b) $b = 0{,}4\,a$ c) $b = \frac{5}{3}a$ d) $a = \frac{5}{3}b$

9. Wartość wyrażenia $\frac{2a+12}{-a^2}$ dla $a = -2\sqrt{3}$ jest równa:

a) $4\sqrt{3}-1$ b) $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$ c) $\frac{-\sqrt{3}+3}{3}$ d) $-4\sqrt{3}+1$

10. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36 = x(x+3)$ należy do przedziału:

a) $(3{,}10)$ b) $(11,+\infty)$ c) $(-5{,}9)$ d) $(-\infty, 5)$

11. Różnica liczby x i 15% tej liczby jest równa 255. Równaniem opisującym tę zależność jest:

a) $x - 0{,}15 = 255$ b) $1{,}85 \cdot x = 255$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 255$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 255$

12. Jeżeli $x = 1 - 2\sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2}$, to xy równe jest:[36]

a) $\sqrt{2}-4$ b) $4-\sqrt{2}$ c) -3 d) $-\sqrt{2}$

13. Wyrażenie $x(x-2)(x+2)$ jest równe:

a) $(x-2)^3$ b) x^3-4x c) x^3-2 d) x^3-2x

34 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpnięte z „Egzamin maturalny z matematyki", maj, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 23.03.2013).

35 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturaly z matematyki, CEN, Bydgoszcz.

36 Zadania: 12, 13, 14 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturalny z matematyki, OKE, Poznań.

14. Wyrażenie $27x^3+y^3$ jest równe iloczynowi

a) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$ b) $(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)$

c) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$ d) $(3x-y)(9x^2-3xy+y^2)$

15. Kwadrat liczby $x=5+2\sqrt{3}$ jest równy:[37]

a) 37 b) $25+4\sqrt{3}$ c) $37+20\sqrt{3}$ d) 147

16. Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi:[38]

a) 5a2(1–10b+3) b) 5a (a–2b+3)

c) 5a (a–10b+15) d) 5(a–2b+3)

17. Liczba $(3-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})$ jest równa:[39]

a) $19-10\sqrt{2}$ b) $17-4\sqrt{2}$ c) $15+14\sqrt{2}$ d) $19+6\sqrt{2}$

18. Dla pewnych a i b zachodzą równości $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych a i b wartość wyrażenia $a - b$ wynosi:[40]

a) 25 b) 16 c) 10 d) 2

19. **(2 pkt)** Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} > \frac{a+1}{2}$.[41]

20. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

21. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

22. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a,b,c spełniają nierówność $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

23. Uprość wyrażenie: $-9(2m-3)+(m-3)^3-(m+2)(m-2)-m^3$, a następnie oblicz jego wartość dla $m=\sqrt{3}$[42].

24. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

25. Oblicz wartość wyrażenia: $(2x+3y)\cdot(2x-3y)-(2x-3y)^2$ dla $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{8}$

37 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z CKE, 2010 (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 20.03.2013).
38 (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
39 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).
40 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 24.03.2013).
41 (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
42 Zadania: 23, 24, 25 zaczerpnięto z Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności

To już potrafię:

- Zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
- Sprawdzić, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- Sprawdzić, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- Rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi oraz zadania osadzone w kontekście praktycznym.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Liczba 7 jest rozwiązaniem równania:

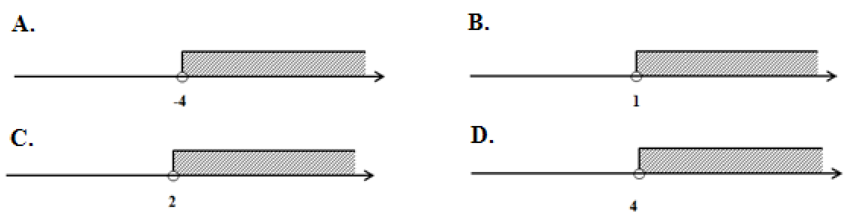
a) $2x + 1 = 3x - 2$ b) $2(x + 1) = 3x - 2$

c) $2x + 1 = 3(x - 2)$ d) $2x + 1 = 3x + 2$

Zad.2. Po obniżce o 30% płaszcz kosztuje 392 zł. Jaka jest pierwotna cena płaszcza?

a) 500 b) 560 c) 650 d) 600

Zad.3. Wybierz rysunek, który przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $x - 3 > 1$



Zad.4. Które z równań należy dopisać do równania $x - 2y = 8$, aby utworzony układ równań był sprzeczny?

a) $6x + 2y = 13$ b) $2x + 2y = 4$

c) $x - 2y = 4$ d) $2x - 4y = 16$

Zad.5. Układ równań $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

a) Ma dokładnie jedno rozwiązanie b) Nie ma rozwiązań

c) Ma dwa rozwiązania d) Ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zad.6. Jeżeli y jest liczbą szklanek o pojemności $0{,}2$ litra, które można napełnić sokiem z pełnego naczynia o pojemności $1{,}5$ litra, to opisuje to nierówność:

a) $0{,}2y \geq 1{,}5$ b) $0{,}2y > 1{,}5$

c) $0{,}2y \leq 1{,}5$ d) $1{,}5y < 0{,}2$

Zad.7. Ile litrów wody należy dolać do 3 litrów 10% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 6%? Załóż, że gęstość roztworu jest równa gęstości wody.

a) 1 litr b) 4 litry c) 3 litry d) 2 litry

Zad.8. Nierównością równoważną nierówności $x > 1$ jest:

a) $x - 1 < 0$ b) $-x > -1$ c) $x - 2 > -1$ d) $\frac{x}{2} > 1$

Zad.9. Po wyznaczeniu y ze wzoru $2y = z - \frac{1}{3}y$, otrzymamy:

a) $y = \frac{3}{4}z$ b) $y = \frac{3}{7}z$ c) $y = \frac{4}{3}z$ d) $y = \frac{7}{3}z$

Zad.10. Pan Marek zebrał m kg jagód, pan Janek o 5 kg więcej niż pan Marek, a pani Ewa 2 razy mniej niż pan Marek i pan Janek razem. Łącznie zebrali 40 kg jagód. Wskaż odpowiednie równanie opisujące tę sytuację.

a) $m + m + 5 - \frac{1}{2}(m - 5 + m) = 40$

b) $m + m + 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$

c) $m + m - 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$

d) $m + m - 5 - \frac{1}{2}(m - 5 - m) = 40$

Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	A	C	D	C	B	B

ZADANIA OTWARTE

1. Za dwa filmy zapłacono 60,20 zł. Ile kosztuje każdy film, jeżeli jeden jest o 15% droższy od drugiego?

2. Korzystając z własności proporcji, rozwiąż równanie $\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$.

3. Za jedną książkę droższą i jedną tańszą zapłacono 19 zł, a za pięć książek droższych i sześć książek tańszych zapłacono 104 zł. Jaka była cena książki droższej, a jaka książki tańszej?

4. Kupując telewizor, Tomek wpłacił 30% jego wartości. Pozostałą część należności postanowił spłacić na raty. Płatność miała się odbyć w 9 ratach po 140 zł. Ile kosztował telewizor?

5. O godzinie 10^{00} Adam wyruszył piechotą z miejscowości A do miejscowości B. O godzinie 11^{30} z miejscowości A wyruszyła Ewa i jadąc na rowerze z prędkością 24 km/h, dogoniła Adama o godzinie 12^{15}. Z jaką średnią prędkością szedł Adam?

Odpowiedzi:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – cena I filmu $x + 15\%x$ – cena II filmu $x + x + 15\%x = 60{,}20$ $2{,}15x = 60{,}20 \Rightarrow x = 28$ Odp. Jeden film kosztuje 28 zł, a drugi 32,20 zł.
2	$\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$ $6x + 4 = 12 + 4x$ $2x = 8 \Rightarrow x = 4$
3	x – tańsza książka y – droższa książka $\begin{cases} x + y = 19 \\ 5x + 6y = 104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ Odp. Tańsza książka kosztowała 9 zł, a droższa 10 zł.
4	x – cena komputera $30\%x + 9 \cdot 140 = x$ $1260 = 0{,}7x \Rightarrow x = 1800$ Odp. Komputer kosztował 1800 zł.
5	$2\,h\ 15\,min$ – czas podróży Adama, $45\,min$ – czas podróży Ewy x – prędkość Adama $x \cdot 2\frac{15}{60}$ – droga przebyta przez Adama $24 \cdot \frac{45}{60}$ – droga przebyta przez Ewę $x \cdot 2\frac{15}{60} = 24 \cdot \frac{45}{60} \Rightarrow x = 8$ Odp. Adam szedł ze średnią prędkością 8 km/h.

3.1 Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Teraz nauczę się:

- Sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania,
- Rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Nazywać równania w zależności od liczby rozwiazań (sprzeczne, oznaczone, nieoznaczone),
- Korzystać z proporcji do rozwiązywania zadań.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy zbiorem rozwiązań tego równania.

Równanie o postaci $ax+b=0$, gdzie x jest niewiadomą, natomiast a i b są dowolnymi liczbami, nazywamy **równaniem liniowym.** Aby rozwiązać równanie liniowe, należy sprowadzić je w wyniku przekształceń równoważnych do równania elementarnego $ax=-b$ i obustronnie podzielić przez współczynnik występujący przy niewiadomej x.

Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą zmieniają swój znak!

Przykład 1

$5x-10=0$

$5x=10/:5$

$x=2$

Równanie liniowe może mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Takie równanie nazywamy **oznaczonym.**

Przykład 2

a) $2x+1=-2(x+3)-1$

$2x+1=-2x-6-1$

$2x+2x=-6-1-1$

$4x=-8$

$x=-2$

b) $2x+3(3x-5)-10=5x+5$

$$2x + 3(3x - 5) - 10 = 5x + 5$$

Zgodnie zasadą mnożenia liczby przez nawias w wyrażeniach algebraicznych. Mnożymy przez 3 kolejne wyrażenia z nawiasu: 3x i (-5).

$$2x + 9x - 15 - 10 = 5x + 5$$

Po lewej stronie można jeszcze zredukować wyrażenia podobne:
2x+9x=11x
-15-10=-25

$$11x - 25 = 5x + 5$$

Uwaga!!!

Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą, zmieniają swój znak!

$$11x - 25 = 5x + 5$$

Przenosimy 5x na lewo. W związku z tym zmieniamy znak i po lewej zapisujemy: -5x

Przenosimy (-25) na prawo. W związku z tym zmieniamy znak i po prawej zapisujemy: +25

$$11x - 5x = 5 + 25$$

Wykonujemy ostatnie działania po obu stronach równania.

$$6x = 30$$

$$6x = 30 \quad /\div 6$$

30 : 6 = 5

$$x = 5$$

Sprawdzenie

Sprawdzenie warto wykonać zawsze, niezależnie od tego, czy jest wymagane w zadaniu, czy nie. Aby je wykonać, do pierwotnej formy równania podstawiamy zamiast „*x*" otrzymaną wartość, zgodnie z zasadami podstawiania wartości liczbowych za symbole w wyrażeniach algebraicznych. Zapisujemy zamiast „*x*" otrzymaną wartość, a między liczbą i podstawianą wartością zapisujemy mnożenie.

Równanie zostało dobrze wykonane, gdy po obu stronach uzyskujemy taką samą wartość i możemy zapisać: L = P.

$$2x + 3(3x - 5) - 10 = 5x + 5$$

$$2 \cdot 5 + 3(3 \cdot 5 - 5) - 10 = 5 \cdot 5 + 5$$
$$10 + 3(15 - 5) - 10 = 25 + 5$$
$$10 + 3 \cdot 10 - 10 = 30$$
$$10 + 30 - 10 = 30$$
$$30 = 30$$
$$L = P$$

Równanie liniowe może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Takie równanie nazywamy **nieoznaczonym (tożsamościowym).**

$$\begin{aligned} 2(x-1)+4&=2x+2\\ 2x-2+4&=2x+2\\ 2x+2&=2x+2\\ 2x-2x&=2-2\\ 0&=0 \end{aligned}$$

$\downarrow$

0 = 0 !
Piszemy więc:

$\downarrow$

Równanie jest tożsame

$x \in R$

Równanie liniowe może nie mieć rozwiązań. Takie równanie nazywamy sprzecznym.

Równanie sprzeczne nie ma rozwiązań. W trakcie liczenia, dochodzimy do momentu, w którym powstaje sprzeczność (np. $0 = 9$), wtedy znak równości przekreślamy: ($0 \neq 9$). Następnie należy zapisać: „Równanie jest sprzeczne" oraz $x \in \emptyset$ (czyt. x należy do zbioru pustego), można też zapisać słownie: „Brak rozwiązań".

Przykład 4

$$\begin{aligned} 5x-9&\neq 2x+3(x-2)\\ 5x-9&\neq 2x+3x-6\\ 5x-9&\neq 5x-6\\ 5x-5x&\neq -6+9\\ 0&\neq 3 \end{aligned}$$

$\downarrow$

$0 \neq 3$!
Piszemy więc:

$\downarrow$

Równanie jest sprzeczne

$x \in \emptyset$

Jeśli $b \neq 0$ **i** $d \neq 0$**, to proporcję:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **możemy zastąpić równością** $\boldsymbol{d} \quad = b$ **.**

Przykład 5

$$\frac{2x-5}{x+1} = \frac{5}{3}$$

Z: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$\begin{aligned} 3(2x-5)&=5(x+1)\\ 6x-15&=5x+5\\ 6x-5x&=5+15\\ x&=20 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x = 20$.

Zdarzają się równania, które zawierają pewne „utrudnienie" w formie postaci ułamkowych. Łatwo można jednak ten problem rozwiązać. Należy „pozbyć" się mianowników, mnożąc całe równanie przez wspólny mianownik.

Wspólnym mianownikiem dla 4, 8 i 2 jest 8, dlatego mnożymy całe równanie przez 8.

$$\frac{2x+3}{4}-\frac{x-3}{8}+2x=\frac{-2x+4}{2}+5 \quad /\cdot 8$$

UWAGA: Pamiętajmy by przemnożyć każde wyrażenie.

$$\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{2x+3}{\cancel{4}_1}-\overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{x-3}{\cancel{8}_1}+8\cdot 2x=\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\frac{-2x+4}{\cancel{2}_1}+8\cdot 5$$

Skracamy mianowniki z 8, a następnie przepisujemy równanie, pomijając uzyskane w mianownikach 1 (bo dzielenie przez 1 nie zmienia wartości). UWAGA: Pamiętajmy by liczniki zapisać w nawiasach.

$$2\cdot(2x+3)-(x-3)+16x=4(-2x+4)+40$$

Od tego momentu mamy do rozwiązania „normalne" równanie:

$$4x+6-x+3+16x=-8x+16+40$$
$$4x-x+16x+8x=16+40-3-6$$
$$27x=47$$
$$x=\frac{47}{27}=1\frac{20}{27}$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x=1\frac{20}{27}$.

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $6x+7+2x=8-x+1+80$ b) $-4(2x-5)=2(3x+7)$

c) $(8x-5)+(2x-3)=(x-2)-(3x+4)$ d) $x(x-3)=(x+2)^2$

e) $(3x+5)^2+(4x+6)^2=(5x+6)^2+37$ f) $\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{7}{15}(3+x)$

g) $\frac{5x-4}{6}-\frac{7-2x}{2}=0$ h) $\frac{x(3-x)}{3}-\frac{3-2x^2}{6}=2x$

i) $3-\frac{2x+3}{2}=\frac{17}{6}-\frac{3x+2}{2}$ j) $\frac{0{,}7x+5}{7}=0{,}1\left(x+\frac{2}{7}\right)$

1. Odpowiedź: a) $9\frac{1}{9}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{-4}{7}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{84}{11}$; g) $\frac{25}{11}$; h) $\frac{-1}{2}$; i) $\frac{2}{3}$; j) równanie sprzeczne.

3.1.2 Rozwiąż równania:

a) $x-2(x+5)=-3(4+x)+8$

b) $\frac{x}{2}-3(x-2)=-5x+16$

c) $\frac{x+1}{3}-2(x-1)=\frac{x}{2}-x$

d) $(x+2)^2=2x+(x-3)^2$

e) $(x-2)(x+2)=(x-1)^2$

f) $2(x-4)(x+5)=x(2x-10)-14$

Odpowiedź: a) 3; b) 4; c) 2; d) $\frac{5}{8}$; e) 2,5; f) $2\frac{1}{6}$.

3.1.3 Podaj liczbę rozwiązań równania:

a) $2(3x-2)-5=7-2x$

b) $5x-3=2(x+4)+3x$

c) $(x-2)^2=(x-1)(x+1)-4x$

d) $8-(2x-4)=-2(x-1)+10$

e) $\frac{3x-2}{3}-2x=-\frac{2}{3}-x$

f) $(x+3)^2-(x-3)(x+3)=5$

Odpowiedź:

a) $x = 2$ oznaczone; b) $0 = 11$ sprzeczne; c) $0 = -5$ sprzeczne; d) $0 = 0$ nieoznaczone; e) $0 = 0$ nieoznaczone; f) –2 i 1/6 oznaczone.

3.1.4 Rozwiąż równanie podane w postaci proporcji (najpierw przyjmij odpowiednie założenia):

a) $\frac{5}{4x+3}=\frac{2}{x}$

b) $\frac{x}{x-1}=\frac{5x+1}{5x+3}$

c) $\frac{3+x}{x-2}=\frac{5-x}{-x+1}$

d) $\frac{x-2}{-x}=\frac{1-x}{x-2}$

e) $\frac{7}{7x-10}=\frac{5}{5x-20}$

Odpowiedź: a) –2; b) $\frac{-1}{9}$; c) $\frac{13}{9}$; d) $\frac{4}{3}$; e) sprzeczne.

3.2 Nierówności liniowe

Teraz nauczę się:

- Rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Zaznaczać zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisywać w postaci przedziału.

Rozwiązywanie nierówności nie różni się znacząco od rozwiązywania równań.

W nierównościach zamiast znaku „=" mamy znak nierówności.

W porównywaniu do równań mamy tu do czynienia z dwoma podstawowymi różnicami:

1) W trakcie obliczeń, gdy zachodzi konieczność pomnożenia lub podzielenia całego równania przez liczbę ujemną, należy obrócić znak nierówności w drugą stronę.

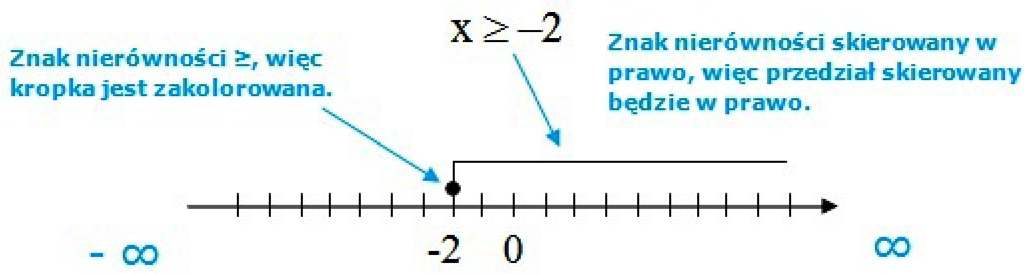
2) Po uzyskaniu rozwiązania, należy zaznaczyć je na osi oraz za pomocą przedziału liczbowego.

Przykład 1

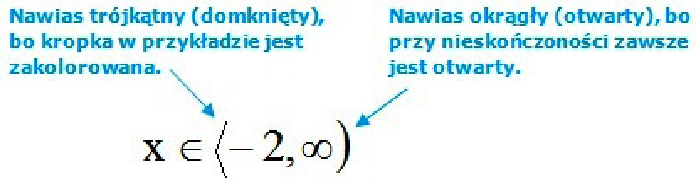
$$2(x+1)-3 \le 4x+3$$
$$2x+2-3 \le 4x+3$$
$$2x-1 \le 4x+3$$
$$2x-4x \le 3+1$$
$$-2x \le 4 \,/ \div (-2)$$
$$x \ge -2$$

Dzielimy całe równanie przez (-2), w związku z czym **musimy obrócić znak nierówności.**

Teraz należy zaznaczyć wynik na osi liczbowej.



Po narysowaniu przedziału na osi, należy jeszcze go zapisać.



Przykład 2

Rozwiąż nierówność $5(x-1)-2x+3>2x$

$$5(x-1)-2x+3>2x$$
$$5x-5-2x+3>2x$$
$$3x-2>2x$$
$$3x-2x>2$$
$$x>2$$

$x \in (2;\ \infty)$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż nierówności:

a) $5(x-1)-2x+3 \rangle 2x$

b) $-2(x+6) \rangle 4(3+2x)$

c) $3(2-x) \leq -\frac{2}{3}(6x-21)$

d) $1-\frac{2x-5}{3} \langle 3$

e) $\frac{5x+1}{2} \geq \frac{2-5x}{-3}$

f) $2-3(3-2x) \rangle 3-\frac{19-12x}{2}$

g) $5-\frac{2x-3}{3} \rangle 4-\frac{4x+2}{6}$

3.3 **Odpowiedź:** a) $(2,+\infty)$; b) $(-\infty;-2{,}4)$; c) $(-\infty,8\rangle$; d) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; e) $\langle -\frac{7}{5},+\infty)$; f) $\varnothing$; g) R.

3.3 Przekształcanie wzorów

Teraz nauczę się:

- Przekształcać wzory matematyczne, fizyczne, chemiczne

Przekształcanie wzorów często sprawia uczniom wiele problemów, a jest to naprawdę bardzo proste. Pamiętaj, że każdy wzór możesz potraktować jako równanie. Działania wykonujesz zawsze po obu stronach równania. Aby pozbyć się jakiejś wielkości, wykonujesz działanie odwrotne do danego.

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczaniu jednej zmiennej, która we wzorze występuje jako niewiadoma.

Przykład 1

Znając wzór na siłę, wyznacz wzór na przyspieszenie ciała.

$$F = m \cdot a$$

Podziel obie strony równania przez m

$$a = \frac{F}{m}$$

Przykład 2

Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$ wyznacz czas.

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Pomnóż obie strony równania przez $\frac{2}{5}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Wyciągnij pierwiastek z obu stron równania

ZADANIA

3.3.1 Przekształć wzory fizyczne , tak aby wyznaczyć:

a) m, v ze wzoru na pęd $p = m \cdot v$

b) T ze wzoru na częstość $f = \frac{1}{T}$

c) m, v ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$

d) l, g ze wzoru na okres wahadła matematycznego $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

e) x, y z równania soczewki $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

f) l, s ze wzoru na opór $R = \rho \frac{l}{s}$

g) q, r z prawa Coulomba $F = k\frac{q^2}{r^2}$

Odpowiedź:

a) $m = \frac{p}{v}$, $v = \frac{p}{m}$; b) $T = \frac{1}{f}$; c) $m = \frac{2E}{v^2}$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$; d) $l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$, $g = \frac{4l\pi^2}{T^2}$;

e) $x = \frac{fy}{y-f}$, $y = \frac{fx}{x-f}$; f) $l = \frac{Rs}{\rho}$, $s = \frac{\rho l}{R}$; g) $q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}}$.

3.3.2 Ze wzoru na stężenie procentowe wyznacz:

a) masę substancji m_s

$$c_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$$

b) masę roztworu m_r

Odpowiedź: a) $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$; b) $m_r = \frac{m_s \cdot 100\%}{c_p}$.

3.3.3 Przekształć wzory matematyczne tak, aby wyznaczyć:

a) promień r, ze wzoru na objętość kuli $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) bok trójkata równobocznego, ze wzoru na pole trójkata $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) a, b, ze wzoru na pole trapezu $p = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

d) promień r, ze wzoru na pole koła $p = \pi r^2$

Odpowiedź: a) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$; b) $a = \sqrt{\frac{4p\sqrt{3}}{3}}$; c) $a = \frac{2p-bh}{h}$, $b = \frac{2p-ah}{h}$; d) $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$.

3.3.4 Wyznacz a z wyrażeń:

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{3b}=\frac{c}{d}$ b) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b-c}=\frac{1}{c}$

c) $(\frac{(a+2b)}{2}:\frac{3a}{b}):2d=e$ d) $\sqrt{\frac{2a}{a+c}}=2d$

Odpowiedź: a) $a=\frac{3db}{2d-3bc}$; b) $a=\frac{bc-c^2-b^2}{2c+b}$; c) $a=\frac{2b^2}{12ed-b}$; d) $a=\frac{4cd^2}{2-4d^2}$.

3.4 Rozwiązywanie zadań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się:

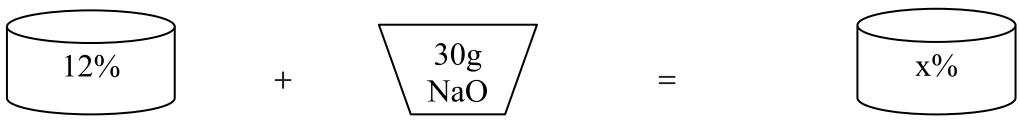
- Układać i rozwiązywać równania i nierówności liniowe do zadań z treścią.

Zadania chemiczne można rozwiązywać różnymi metodami. Często korzystamy ze wzorów chemicznych, które należy przekształcić do odpowiedniej postaci. Istnieją też inne sposoby. A oto jeden z nich:

Przykład 1

Do 130 g 12% roztworu NaOH wrzucono 40 g NaOH. Jakie jest jego stężenie procentowe

Rozwiązanie



130 g roztworu substancji rozpuszczanej 130g + 30g = 160g roztworu

Układamy równanie:

$12\% \cdot 130g + 30g = 160g \cdot x\%$

stąd $x = 28{,}5\%$

Przykład 2

Ile wody należy odparować z 200 gramów 25% roztworu Na_2SO_4, aby otrzymać roztwór o stężeniu 30%?

Rozwiązanie

W 200 g 25% roztworu znajduje się 0.25 · 200 = 50g czystego Na_2SO_4 i 150 g wody. Stężenie procentowe roztworu, jaki chcemy otrzymać, wynosi 30%. Jeśli masę rozpuszczalnika oznaczymy jako x, ze wzoru na stężenie procentowe otrzymamy równanie:

$$c_p = \frac{m_s.100\%}{m_r}$$

$$30\% = \frac{50}{150+x}$$

$$x = 18,(3)$$

Należy więc odparować 150 g – 18,(3) g = 131,7 g wody.

Rozwiązując zadania fizyczne, pamiętaj o jednostkach.

Przykład 3[43]

Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością 20 m/s, a drugą połowę ze stałą prędkością 30 m/s. Obliczycz średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi.

Rozwiązanie

Średnia prędkość samochodu wynosi $\mathbf{v}_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdzie

$\Delta s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = \mathbf{s}$ całkowita droga przebyta przez samochód,

$\Delta t = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ całkowity czas ruchu samochodu,

$t_1 = \frac{s}{2v_1}$ czas, w którym samochód przebył pierwszą połowę drogi jadąc z prędkością v_1

$t_2 = \frac{s}{2v_2}$ czas, w którym samochód przebył drugą połowę drogi z prędkością v_2

zatem średnia prędkość samochodu jest równa:

$v śr = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 24 \frac{m}{s}$

Uwaga: Średnia prędkość samochodu nie jest, w tym przypadku, średnią arytmetyczną prędkości.

Przykład 4

Adam wyjeżdża w trasę o godzinie 13.00 i jedzie motocyklem ze średnią prędkością 70 $\frac{km}{h}$. Piotr wyjeżdża godzinę póniej i ma do pokonania dwa razy krótszą trasę. Jedzie motocyklem z szybkością 50 $\frac{km}{h}$. Oblicz, jakie trasy mieli do pokonania motocykliści, jeżeli wiadomo, że skończyli jazdę o tej samej godzinie.

Rozwiązanie

Zauważ, że:

$t_1 = t_2 + 1$

$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 70(t_2 + 1)$

$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 50\, t_2$

$s_1 = 2s_2$

stąd otrzymujemy równanie

$70(t_2 + 1) = 100\, t_2$

Odpowiedź:

$t_2 = 2\frac{1}{3}\, h, \quad t_1 = 3\frac{1}{3}\, h, \quad s_2 = 116{,}7\, km, \quad s_1 = 233{,}4\, km$

43 www.mif.pg.gda.pl/zz/3%20Kinematyka.pdf, 12.03.2013.

ZADANIA

3.4.1 Paweł jedzie do pracy ze średnią szybkością 50 $\frac{km}{h}$. W pogodny dzień podróż zajmuje mu 1,4 h. W deszczowy dzień jego średnia szybkość wynosi 35 $\frac{km}{h}$. Oblicz jaką drogę pokonuje Paweł do pracy i ile minut więcej zajmuje mu pokonanie tej trasy w deszczowy dzień.

Odpowiedź: s = 70 km, t_2-t_1 = 36 min

3.4.2 Oblicz średnią szybkość Ziemi w ruchu dookoła Słońca, wiedząc że w ciągu roku planeta pokonuje drogę 10^9 km.

Odpowiedź: $v = 1{,}14 \cdot 10^5 \frac{km}{h}$

3.4.3 Samolot leciał z szybkością v = 780 $\frac{km}{h}$ i pokonał drogę 1800 km, następnie 1400 km leciał z wiatrem, którego szybkość wynosiła 150$\frac{km}{h}$. Oblicz czas przelotu całej trasy i średnią szybkość samolotu.

Odpowiedź: t = 3 h 12 min, $v = 846 \frac{km}{h}$

3.4.4 Karuzela wykonała 4 okrążenia o promieniu r = 15 m wokół własnej osi w czasie t = 100 s. Oblicz średnią szybkość karuzeli.

Odpowiedź: $v = \frac{\mathrm{n}2\pi r}{t} = 3{,}77 \frac{m}{s}$

3.4.5 Statek wycieczkowy płynie z miejscowości A do B, tam i spowrotem. Prędkość statku względem wody to 40 $\frac{km}{h}$, a prędkość wody względem brzegu rzeki to 2 $\frac{m}{s}$. Oblicz średnią prędkość statku na całej trasie.

Odpowiedź:

(Pamiętaj o zamianie jednostek. Wykorzystaj wzór z przykładu 3, rozważ ruch w obu kierunkach).
$v_{śr} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1} = 10{,}75 \frac{m}{s}$

3.4.6 Swobodnie puszczona kulka stalowa odbija się (bez strat energii) od poziomej, doskonale sprężystej powierzchni, uderzając w nią co 1,2 s. Jak wysoko podskakuje kulka? Przyjmij $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Odpowiedź: Skorzystaj ze wzoru $h = \frac{gt^2}{2}$, za czas podstaw $\frac{t}{2}$ (pomyśl dlaczego), h = 1,8 m.

3.4.7 Z miast odległych o 150 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwa samochody. Średnia prędkość jazdy jednego z nich wynosi 80 $\frac{km}{h}$, a drugiego 60 $\frac{km}{h}$. O której godzinie i w jakiej odległości od każdego z miast nastapi ich spotkanie?

Odpowiedź: (Pamiętaj, że jadą tyle samo czasu).

$s_1 = v_1 \cdot t = 80t$

$s_2 = v_2 \cdot t = 60t$

$s = 80t + 60t = 150$

$t = 1{,}0714\, h = 1h\, 4\, min$

$s_1 = 85{,}7\, km$

$s_2 = 64{,}3\, km$

Samochody spotkają się o godzinie 9.04.

3.4.8 Ile gramów 30% roztworu LiOH należy dodać do 200 gramów 15% roztworu tego związku, aby otrzymać roztwór 20%?

Odpowiedź: $0{,}3x + 0{,}15 \cdot 200 = 0{,}2(200 + x)$

$x = 100g$

3.4.9 Odparowano 35 g 12% roztworu NaCl. Jaką masę osadu otrzymano?

Odpowiedź: $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$

$m_s = 12 \cdot 35/100 = 4{,}2$ g

3.4.10 Ile $CaCl_2$ należy dodać do 300 gramów 25% roztworu $CaCl_2$, aby otrzymać roztwór o stężeniu 40%?

Odpowiedź: $0{,}25 \cdot 300 + x = 0{,}4x + 0{,}4 \cdot 300$

$x = 75$ g

3.4.11 Zmieszano 120 g 18% roztworu KOH i 35 g 25% roztworu tego związku. Jakie jest stężenie procentowe powstałego roztworu?

Odpowiedź: $ms = 120 \cdot 18\% + 35 \cdot 25\% = 30{,}35$ g

$mr = 120 + 35 = 155$ g

$Cp = 19{,}58\%$

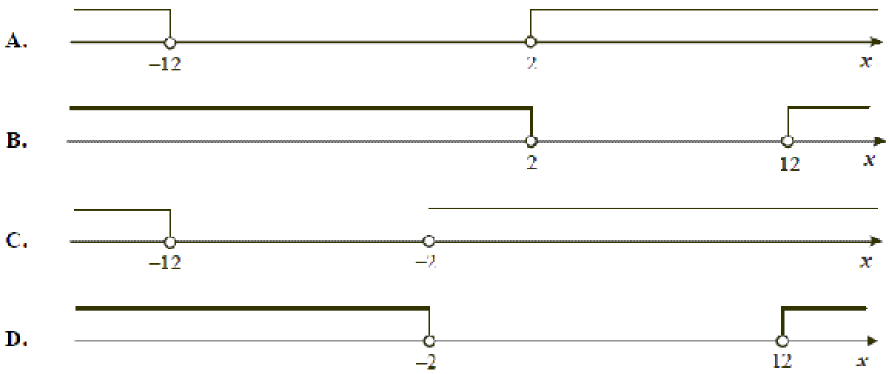
1. Wskaż nierówność, która opisuje sumę przedziałów zaznaczonych na osi liczbowej:[44]

a) $|x-2|>4$ b) $|x-2|<4$ c) $|x-4|<2$ d) $|x-4|>2$

2. Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3}=\frac{2}{3}$ jest liczba:

a) 21 b) 7 c) 17/3 d) 0

3. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$[45]



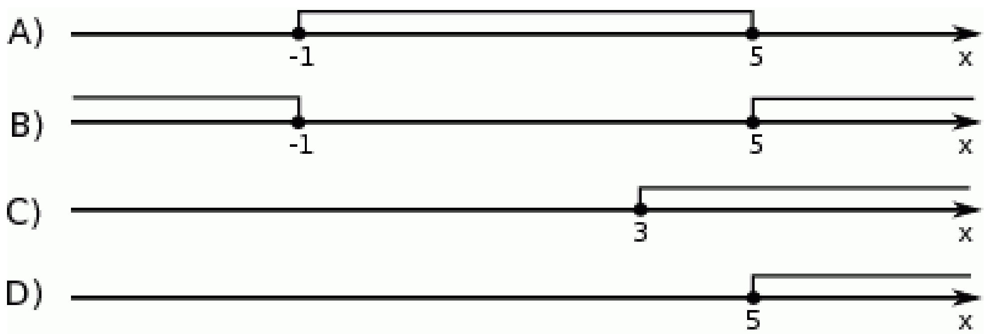
4. Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest:

a) 1 b) 7/3 c) 4/7 d) 7

5. Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3)<0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

6. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x-2|\geq 3$.[46]



7. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.[47]

a) $|x+1|>5$ b) $|x-1|<2$ c) $|x+\frac{2}{3}|\leq 3$ d) $|x-\frac{1}{3}|\geq 3$

44 Zadania: 1, 2 zaczerpnięte z Próbna matura, CKE, listopad, 2010.
45 Zadania: 3, 4, 5 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010.
46 Arkusz maturalny, Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
47 Zadania: 7, 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011.

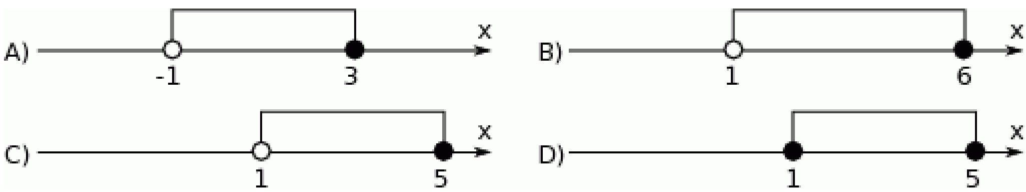
8. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36=x(x+3)$ należy do przedziału:

a) (3, 10) b) (11, +∞) c) (–5, 9) d) (–∞, 5)

9. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}<\frac{5x}{12}$ jest:

a) 1 b) 2 c) –1 d) – 2

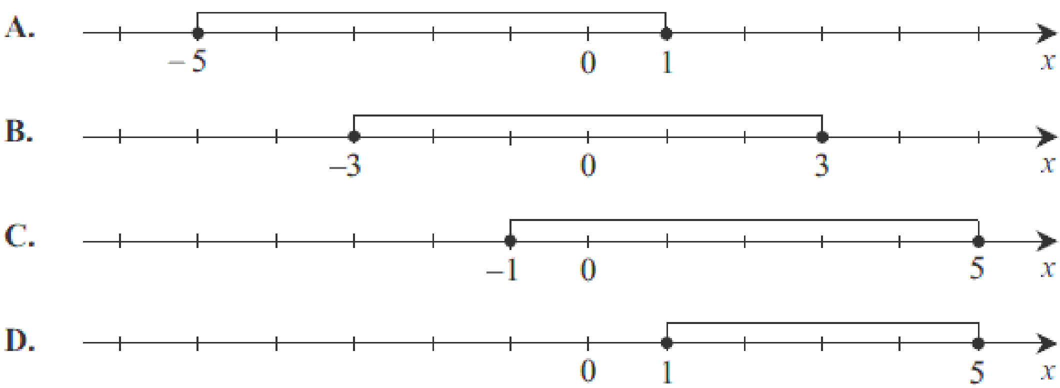
10. Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\leq 0$ i $x>1$.



11. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1|=4x$.[48]

a) $x=-1$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=-2$

12. Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\leq 3$:[49]



13. **Rozwiązaniem równania** $\frac{x-6}{2x-4}=\frac{2}{3}$ **jest:**

a) 8 b) 10 c) $\frac{1}{2}$ d) –10

14. Największa liczba naturalna n spełniająca nierówność $n<2\pi-1$ to:[50]

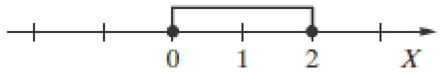
a) 3 b) 5 c) 6 d) 0

15. Rozwiązaniem równania $-2=\frac{x-1}{x+2}$ jest liczba:

a) –1 b) 1 c) 0 d) $\frac{5}{3}$

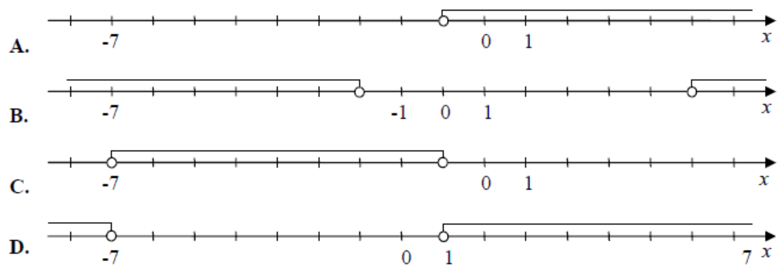
48 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2012.
49 Zadania: 12, 13 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2010.
50 Zadania: 14, 15, 16 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011.

16. Przedział zaznaczony na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



a) $|x+1| \leq 1$ b) $|x+1| \geq 2$ c) $|x-1| \geq 1$ d) $|x-1| \leq 1$

17. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+3| > 4$ jest przedstawiony na rysunku:[51]



18. Rozwiązaniem równania $3(2-3x) = x-4$ jest:[52]

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

19. Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tą zależność jest:

a) $0{,}15 \cdot x = 230$ b) $0{,}85 \cdot x = 230$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 230$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 230$

20. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $2x+1 = 2-\sqrt{3}x$ i rozstrzygnij, czy rozwiązanie jest liczbą wymierną?[53]

21. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójata. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

22. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$[54]

23. **(4pkt)** Uzasadnij, że $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}^{40} \cdot (3{,}1)^{22}}{6^2} < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{22}$.

24. **(2 pkt)** Oblicz, dla jakich wartości parametru a wartość wyrażenia $|3a-1|$ nie jest większa od 3.

25. **(2 pkt)** Trzej wspólnicy postanowili podzielić zysk w wysokości 6500 zł w stosunku $1 : 4 : 8$. Jakie kwoty dostaną ci wspólnicy?

26. **(2 pkt)** Sprowadź wyrażenie $|x-1| + |x| - |-x+1|$ do najprostszej postaci, gdy $x \in (0,1)$[55].

27. **(2 pkt)** Za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu. Ile lat ma Julka?

51 Arkusz maturalny z matematyki, OKE, Poznań, 2013.
52 Zadania 18, 19 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, sierpień, 2011.
53 Zadania 20, 21 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
54 Zadania 22, 23, 24, 25 zaczerpnięte z informatora CKE, 2007.
55 Zadania 26, 27 zaczerpnięte z próbnej matury z Operonem, listopad, 2009.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia*. *Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb
2. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png
3. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png
4. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png
5. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
7. www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza
8. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
9. www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie
10. www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html
11. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
12. www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi
13. www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent
14. www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf
15. www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy
16. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna
17. www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna
18. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
19. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd
20. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
21. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
22. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
23. www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
24. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
25. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
26. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
28. www.wiking.edu.pl/article.php?id=269
29. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. II

Matematyka

KLASA II

Podręcznik dla nauczyciela – Technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Układy równań pierwszego stopnia

1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony,
- nieoznaczony,
- sprzeczny.

Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie.**

Przykład 1

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość $x=2$ do pierwszego równania:

$$2+y=3$$
$$y=1$$
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 2

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{cases}$$
$$0=0$$

Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania.**

Przykład 3

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \,/\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-2 \end{cases}$$

$$0=-1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax+by=A \\ cx+dy=B \end{cases}$$

Przykład 4[1]

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2}=\dfrac{2-y}{4}+6 \quad /\cdot 4 \\ 6(x-1)-2x+4=y-8 \end{cases}$$

Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{3x}{2}=4\cdot\dfrac{2-y}{4}+4\cdot 6 \\ 6x-6-2x+4=y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3x=2-y+24 \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 6x=26-y \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" i z „y" na lewo, a liczby na prawo.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-8+2 \end{cases}$$

Wykonujemy końcowe obliczenia.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-6 \end{cases}$$

1 http://www.matematykam.pl/upraszczanie_ukladu.html, 17.02.2013.

Krótkie przypomnienie z gimnazjum

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODA PODSTAWIANIA

Przykład 5[2]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} \boxed{2x + 4y = 10} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} \boxed{2x = 10 - 4y} \quad / \div 2 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} \boxed{x = 5 - 2y} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać: x = 5 - 2y. Uzyskane wyrażenie (5 – 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x = \boxed{5 - 2y} \\ -3(5 - 2y) - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + 6y - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + y = -13 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = -13 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

2 http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej y=2, do wcześniej wyprowadzonej postaci: x = 5 - 2y
Po podstawieniu obliczamy drugą niewiadomą (x).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu niewiadomych.

METODA PRZECIWNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 6[3]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą x (bo ma najmniejszą wartość w obu równaniach).

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 4y = 10 & / \cdot 3 \\ \boxed{3x} - 5y = -7 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest 6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 – w ten sposób w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „–" (tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaliśmy mnożenie równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia, przez liczby określone w poprzednim kroku.

3 http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases} \quad +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x - 6x} + 12y + 10y = 30 + 14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x" skracają się do „0"

$$12y + 10y = 30 + 14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y = 44$$
$$y = 2$$

$$2x + 4y = 10$$
$$2x + 4 \cdot 2 = 10$$
$$2x + 8 = 10$$
$$2x = 10 - 8$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik y=2).

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

1.2 Graficzna interpretacja układów równań

Teraz nauczę się wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1[4]

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

4 http://www.matematykam.pl/metoda_graficzna.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 & / \div 2 \\ -y = -3x + 8 & / \div (-1) \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y" (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu (x, y), to nasze rozwiązanie.

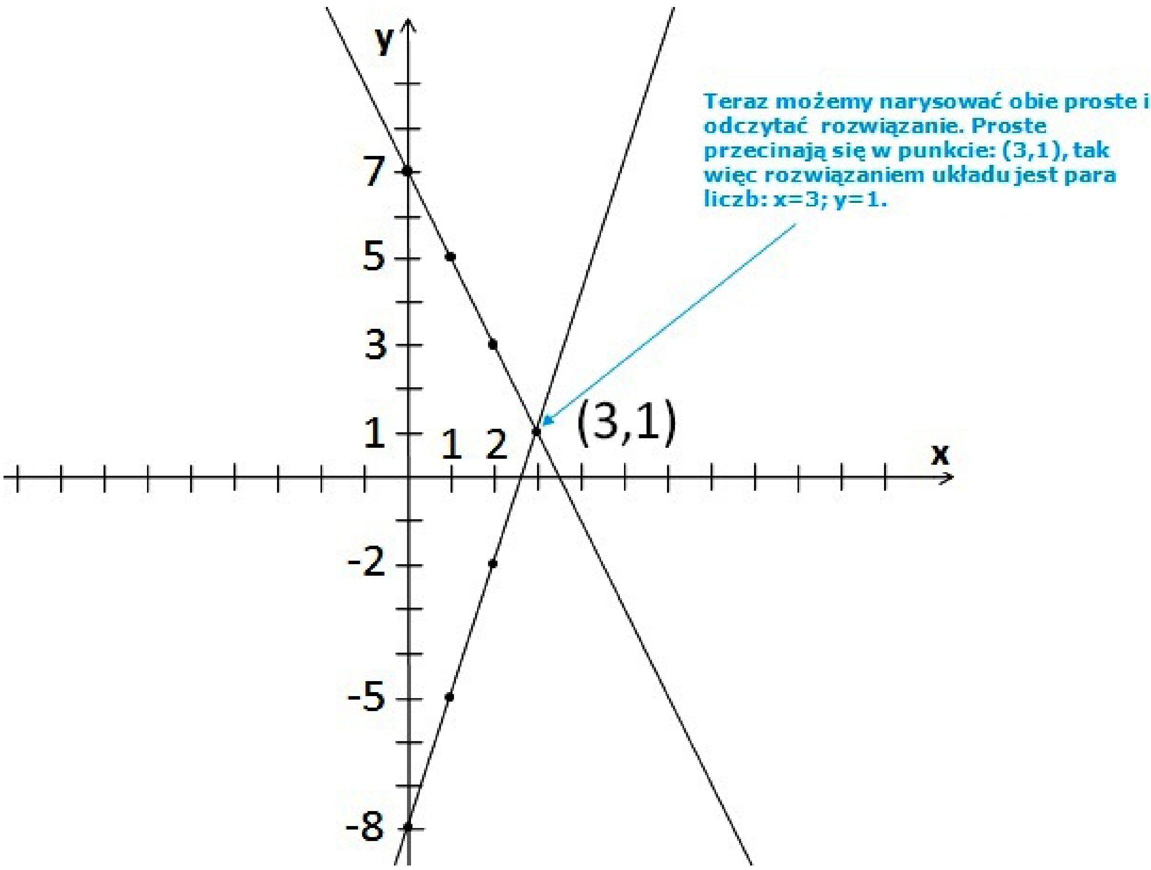
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	7	5	3

x	0	1	2
y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - y = 18 \\ \hline 5x + 2\frac{1}{2}y = 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}3 \\ 2x + 5y = 8{,}6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 0{,}2y = 35 \\ 2{,}5x - 5y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \dfrac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1 - 0{,}3(y - 2) = \dfrac{x+1}{5} \\ \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{4x+9}{20} - 1{,}5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - 2y) = -7x - 2 \\ 5(x + 1) - 2(3 - y) = -4(x + 2) \end{cases}$

n) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5} + \dfrac{5x-3y}{3} = x + 1 \\ \dfrac{2x-3y}{3} + \dfrac{4x-3y}{2} = y + 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

a) Układ równań nieoznaczony

b) Układ równań sprzeczny

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, układ równań oznaczony

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, układ równań oznaczony

e) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

f) $\begin{cases} x = 1{,}3 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

g) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 40 \end{cases}$, układ równań oznaczony

h) $\begin{cases} x = 3\frac{3}{23} \\ y = -1\frac{5}{23} \end{cases}$, układ równań oznaczony

i) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

j) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

k) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$, układ równań oznaczony

l) $\begin{cases} x = 5\frac{3}{11} \\ y = -1\frac{9}{11} \end{cases}$, układ równań oznaczony

m) $\begin{cases} x = -\frac{13}{15} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$, układ równań oznaczony

n) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

Wnioski:

- Dla układu oznaczonego proste przecinają się w 1 punkcie.
- Dla układu nieoznaczonego proste pokrywają się.
- Dla układu sprzecznego proste są równoległe i nie pokrywają się.

1.1.2. Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$

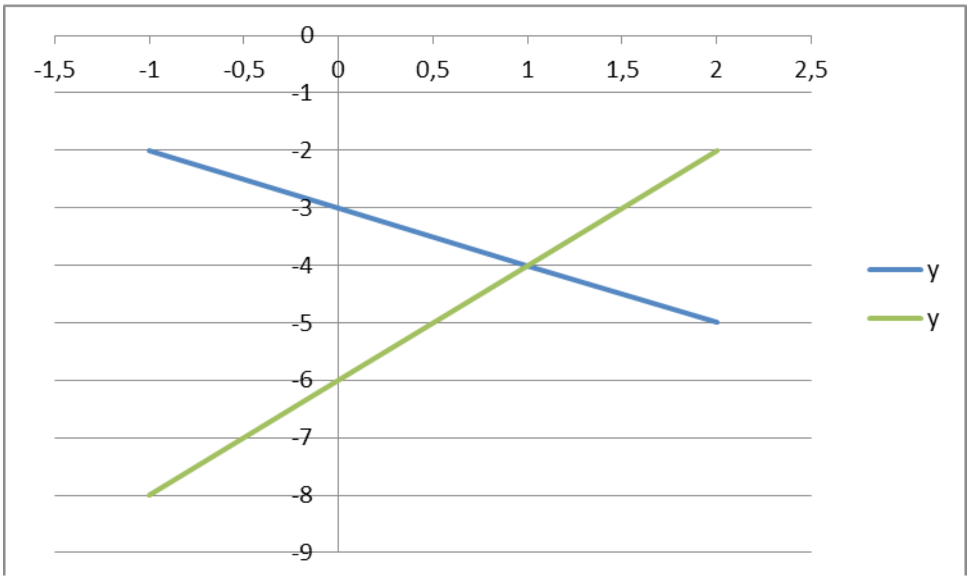
b) $\begin{cases} 3x + y = -(x - 8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$

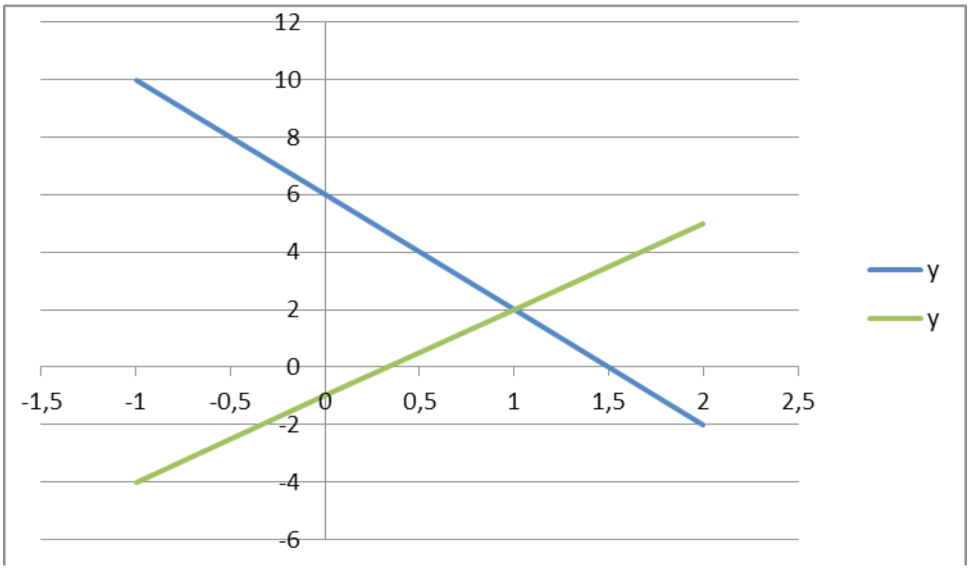
d) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

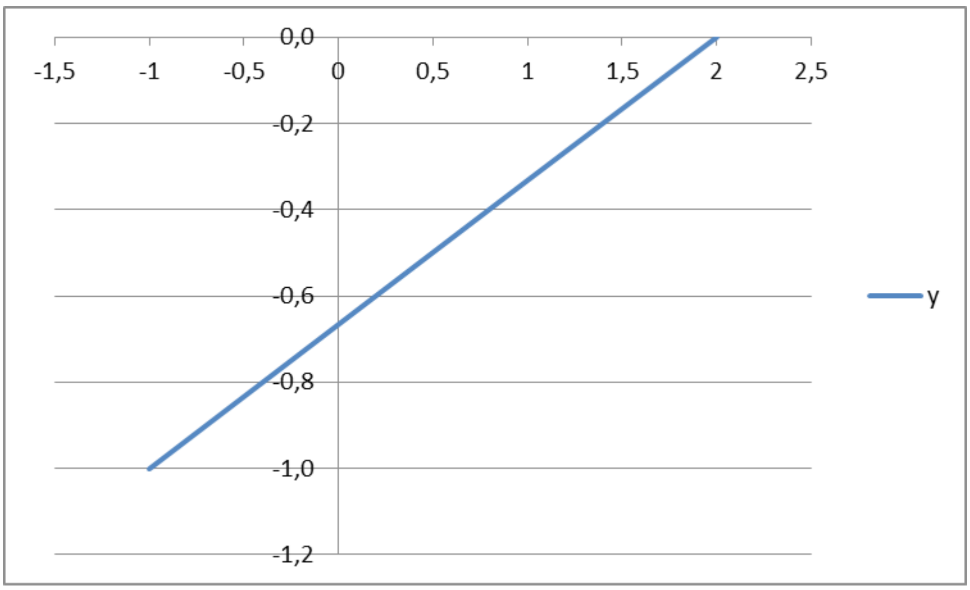
a) $x = 1 \quad y = -4$



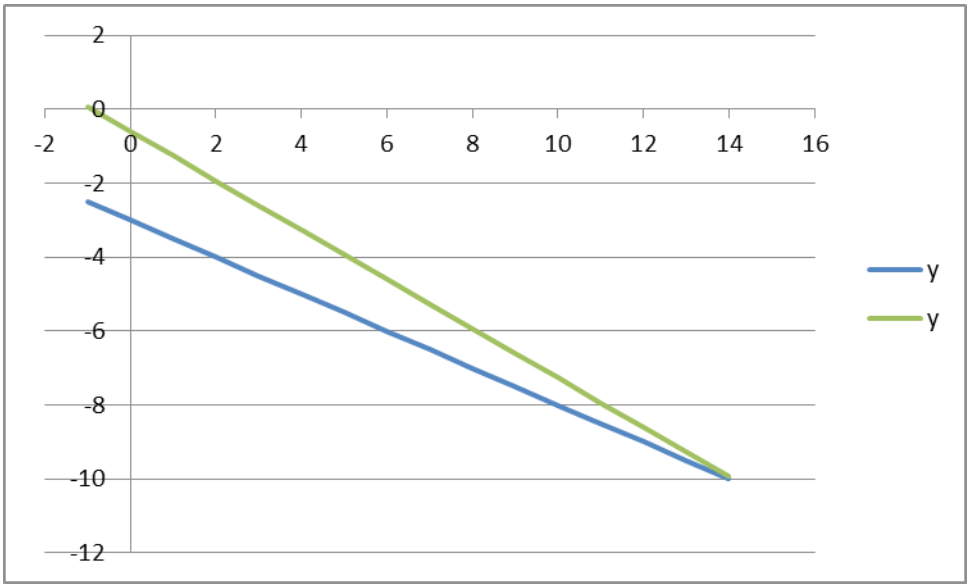
b) $x = 1 \quad y = 2$



c) rozwiązaniem jest R



d) $x = 13, y = -9{,}3$



1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową 10 $\frac{m}{s}$ i poruszał się z przyspieszeniem 1 $\frac{m}{s^2}$ Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość 20 $\frac{m}{s}$ i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 10\frac{m}{s}$, $v = 20\frac{m}{s}$, a=1 $\frac{m}{s^2}$, s_0= 100 m

Szukamy: t, s

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

Odpowiedź:

$t = 10$ s, $s = 250$ m

Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się 120 m^3 wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

Odpowiedź:

v_1 – objętość pierwszej rury

v_2 – objętość drugiej rury

p_1 – przepustowość pierwszej rury

p_2 – przepustowość drugiej rury

t_1 – czas napełniania przez pierwszą rurę

t_2 – czas napełniania przez drugą rurę

$v = p \cdot t$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$p_1 . 2 + p_2 = 120$

$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$

Odpowiedź:

Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi 40 m^3.

ZADANIA

1.1.3. W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością 20 $\frac{m}{s}$ przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem 2 $\frac{m}{s^2}$ w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_1 = 20\frac{m}{s}$, a = $2\frac{m}{s^2}$,

Szukamy: s, t, v_2

Układamy równania ruchu pojazdów. Zauważ, że drogi pojazdów są jednakowe.

$$\begin{cases} s = v_1 t \\ s = \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie:

$v_1 t = \frac{at^2}{2}$, stąd $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

Odpowiedź:

$t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

1.1.4. Z balkonu, znajdującego się na wysokości 50 m, spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?

Rozwiązanie

Mamy dane: $h = 50$ m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$

Szukamy: t, v

Doniczka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ziemskim g.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} h = \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{cases}$$

Odpowiedź:

$t = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ s

$v = 31{,}6 \frac{m}{s}$

1.1.5. Samolot podczas lądowania z szybkością 200 $\frac{m}{s}$ wyhamował na drodze 1000 m. Z jakim opóźnieniem lądował samolot?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 200 \frac{m}{s}$, $s = 1500$ m, $v_k = 0$

Szukamy: a

Samolot poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Układamy równania ruchu:

$$\begin{cases} s = v_0 - \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

$t = \frac{v_0}{a}$, podstawiamy do pierwszego równania

$s = \frac{v_0^2}{2a}$, stąd $a = \frac{v_0^2}{2s} = 20 \frac{m}{s^2}$

Odpowiedź:

$a = 20 \frac{m}{s^2}$

1.1.6. Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?

Odpowiedź: 2:5

1.1.7. Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty". Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Odpowiedź: Stefan miał 10 zł, a Jan 8 zł

1.1.8. Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?

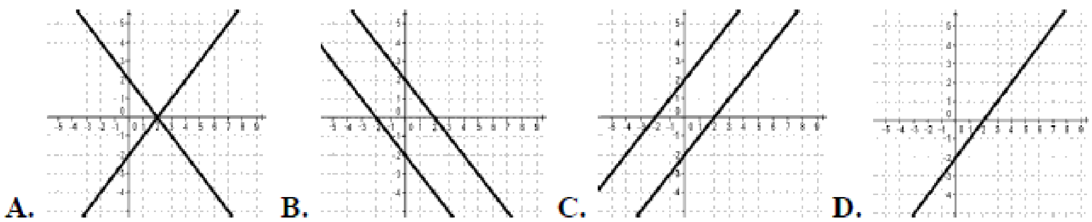
Odpowiedź: 2 długopisy, 9 ołówków

1.1.9. Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł. W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje 1 m^3 wody zimnej, a ile ciepłej?

Odpowiedź: 1 m^3 ciepłej wody kosztuje 6 zł, a zimnej 2 zł

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[5] Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:



Odpowiedź: c

2.[6] Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

5 Zadanie 1: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 18.02.2013.
6 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.

Odpowiedź: d

3.[7] Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$$y = -2x - \frac{1}{4} \text{ i } 4x - 4y + 5 = 0$$

Odpowiedź: (–1/2,3/4)

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

a) $x = 1, y = -1$ $x = -1, y = 1$

b) $x = -1, y = -1$ $x = 1, y = 1$

Odpowiedź: d

5.[8] Aby układ $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ był układem nieoznaczonym, należy w miejsce a wstawić:

a) 10   b) –5   c) 5   d) –6

Odpowiedź: c

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia x – liczba uczniów klasy I, y – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

a) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}08x + 0{,}075y = 51 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}80 + 0{,}75y = 51 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0{,}8x + 0{,}75y = 66 \end{cases}$

Odpowiedź: c

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

a) 3   b) 4   c) 6   d) 8

Odpowiedź: a

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

Odpowiedź: 15 kg wafli po12 zł i 5 kg wafli po 8 zł

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odpowiedź: $a = 6$, $b = 7$ lub $a = 7$, $b = 6$

7 Zadanie 3, 4: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.

8 Zadania 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2. Funkcja liniowa

To już potrafię:

- Zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych.
- Odczytać współrzędne danych punktów.
- Odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero.
- Odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).
- Obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

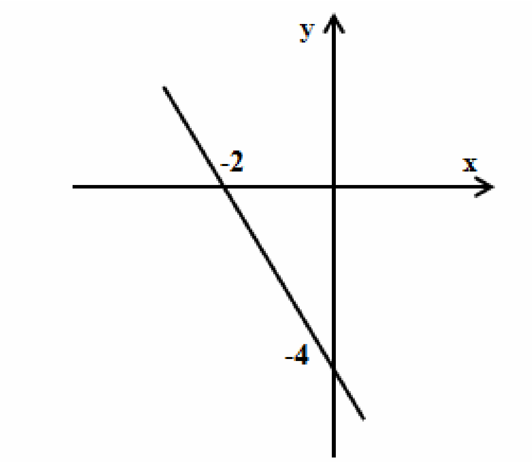
Zad.1. Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje wartości ujemne dla argumentów:

A. $x < -4$

B. $x < -2$

C. $x > -2$

D. $x < -3$



Zad.2. Na odcinku trasy o długości 120 km samochód jechał z prędkością y km/h. Wzór funkcji określającej zależność czasu od prędkości, to:

A. $y = 120x$ **B.** $y = \frac{120}{x}$

C. $\frac{x}{y} = 120,\ y \neq 0$ **D.** $\frac{y}{x} = 120,\ x \neq 0$

Zad.3. Które przyporządkowanie nie jest funkcją:

A. Każdemu nauczycielowi przyporządkujemy ucznia, którego uczy.

B. Każdemu wielokątowi przyporządkujemy liczbę jego boków.

C. Każdej figurze geometrycznej przyporządkowana jest jej nazwa.

D. Każdej liczbie całkowitej jest przypisana liczba do niej przeciwna.

Zad.4. Miejscem zerowym funkcji $y = -6x + 3$ jest:

A. Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **B.** $x = \frac{1}{2}$

C. Punkt $(0,3)$ **D.** $x = 3$

Zad.5. Wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x(2 - x)$ dla argumentu $x = 4$ wynosi:

A. -16 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 0

Zad.6. Które zdanie dotyczące funkcji $y = 2x - 4, x \in R$ jest prawdziwe:

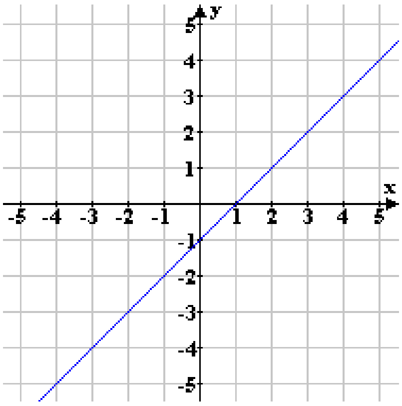
A. Funkcja jest malejąca.

B. Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(2,4)$.

C. Miejscem zerowym tej funkcji jest 2.

D. Funkcja jest stała.

Zad.7. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej. Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?



A. 4 **B.** 2 **C.** -4 **D.** 2

Zad.8. $y = 5$ jest to funkcja:

A. Rosnąca **B.** Stała **C.** Malejąca **D.** Nie jest to funkcja

Zad.9. Do wykresu funkcji $y = ax, x \in R$, należy punkt $A = (-2,5)$. Wzór tej funkcji to:

A. $y = 5x$

B. $y = -2x$

C. $y = 2\frac{1}{2}x$

D. $y = -2{,}5x$

Zad.10. Funkcja określona jest następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkujemy sumę jej cyfr. Dziedziną tej funkcji jest:

A. Zbiór wszystkich liczb naturalnych.

B. Zbiór liczb naturalnych większych od 9, a mniejszych od 100.

C. Zbiór liczb wymiernych większych od 9, a mniejszych od 100.

D. Zbiór liczb całkowitych.

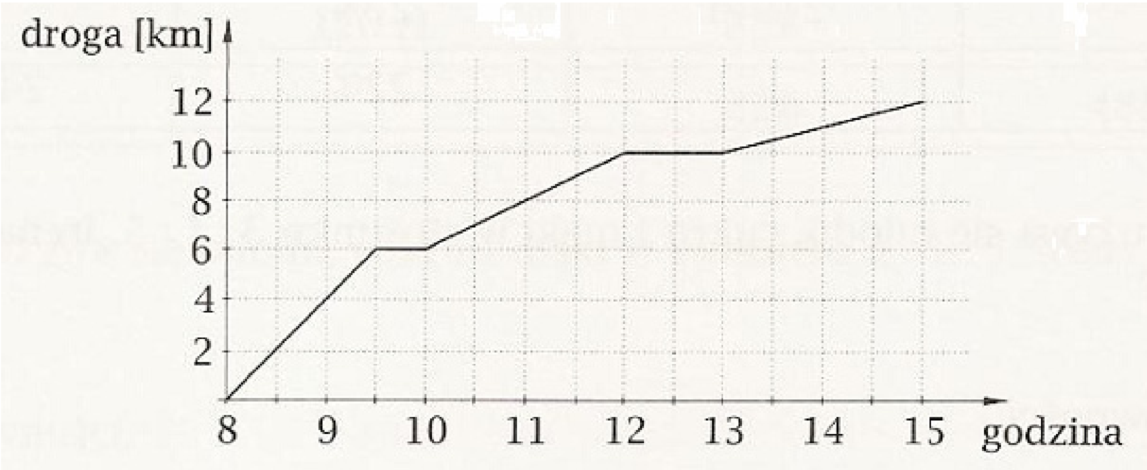
Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	A	C	B	B	D	B

ZADANIA OTWARTE

Zad.1. Trzech pracowników może oczyścić basen w ciągu 5 godzin. Napisz wzór funkcji określającej zależność liczby pracowników (y) od liczby godzin pracy (x). Podaj współczynnik proporcjonalności tej funkcji.

Zad.2. Wykres przedstawia odległość, jaką pokonała Małgosia w zależności od czasu.



Na podstawie wykresu uzupełnij poniższy tekst.

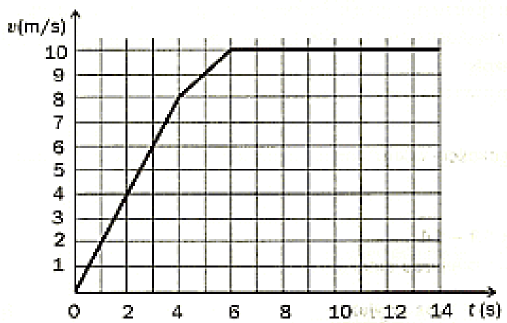
Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła…

Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie…

Pierwsze 8 km pokonała w czasie…

Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością…

Zad.3. Wykres przedstawia zależność szybkości od czasu w pewnym ruchu.



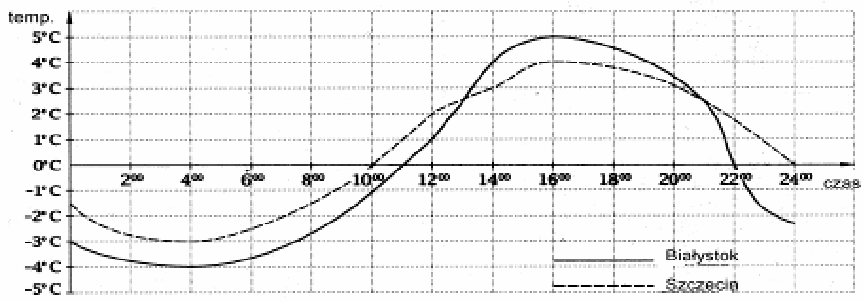
Odpowiedz na pytania:

Kiedy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a kiedy jednostajnym?

Jaką drogę przebyło ciało między 6 a 8 sekundą ruchu?

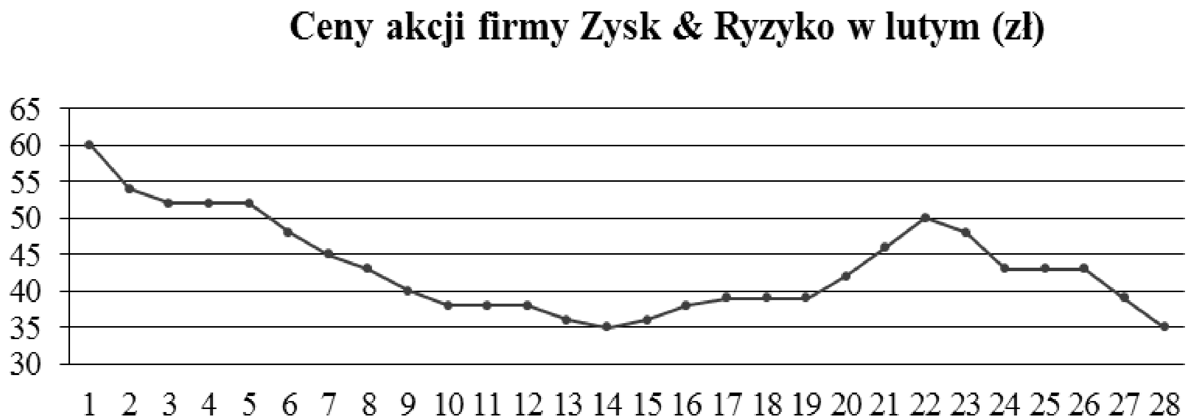
Jaka była maksymalna szybkość tego ciała?

Zad.4. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Białymstoku i Szczecinie.



Jaką temperaturę pokazywał termometr w obu miastach o 12^{00}?
O której godzinie temperatura w tych miastach wynosiła 0°C?
W jakich godzinach temperatura w Białymstoku była ujemna?
O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?
W jakich godzinach w Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie?
Jaka była najwyższa temperatura w Białymstoku, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?
Jaka temperatura była w Białymstoku, gdy w Szczecinie były 3°C?

Zad.5. Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.



a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

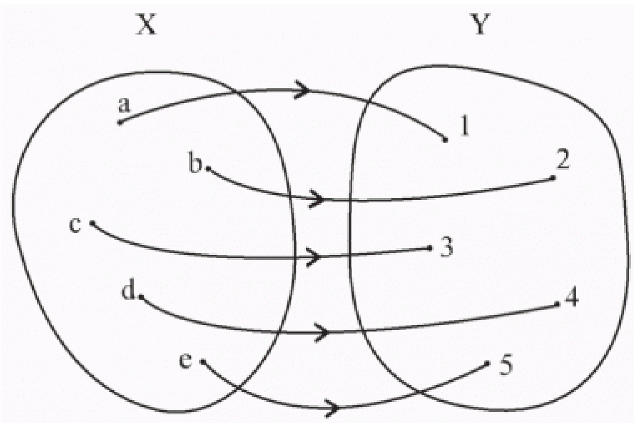
c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Odpowiedzi

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$y = \frac{15}{x}$, $x \in R_+$, $a = 15$
2	Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła 4 km. Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie 9^{30}. Pierwsze 8 km pokonała w czasie 3 godzin. Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością 1 km/h.
3	a) Ciało poruszało się ruchem przyspieszonym w pierwszych czterech sekundach ruchu oraz od czwartej do szóstej sekundy ruchu – z innym przyspieszeniem. Z ruchem jednostajnym mamy do czynienia od szóstej do czternastej sekundy ruchu. b) $s = 10\frac{m}{s} \cdot 2s = 20m$. c) Maksymalna szybkość, którą osiągnęło to ciało, wynosi $10\frac{m}{s}$.
4	a) O godzinie 12^{00} w Szczecinie były 2°C, a w Białymstoku 1°C. b) 0°C w Białymstoku było o godzinie 11^{00}, a w Szczecinie o 10^{00}. c) W Białymstoku temperatura ujemna była w godzinach 0^{00} – 11^{00}. d) Temperatura w obu miastach była taka sama o godz. 13^{00} i 21^{00}. e) W Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie w godzinach 13^{00} – 21^{00}. f) Najwyższa temperatura w Białymstoku wynosiła 5°C (godz. 16^{00}), a w Szczecinie 4°C (również o godz. 16^{00}). g) Gdy w Szczecinie było 3°C, to w Białymstoku było 4°C.
5	a) Wartość akcja spadła w lutym o 25 zł. b) Kupując i sprzedając akcje w ciągu lutego można było na nich zarobić. Aby zysk był możliwie największy (15 zł za akcję), należało kupić akcje 14 lutego, a sprzedać 22 lutego. c) Poniedziałki były: 5, 12, 19, 26 lutego.

2.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji

Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory i pewne przyporządkowanie.



WAŻNE!

Zauważ, że każdy punkt zbioru X jest początkiem **tylko jednej** strzałki.

Symbolicznie zapisujemy to jako f: X → Y

Zbiór x nazywamy **dziedziną** funkcji (D_f), a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**. Zbiór y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

Zmienną x nazywamy też **zmienną niezależną**, a y **zmienną zależną**.

$\boldsymbol{X = \{a, b, c, d, e\}}$ **– zbiór argumentów (dziedzina funkcji)**

$\boldsymbol{Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ **– zbiór wartości funkcji**

Bardzo ważne!

Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość (z jednego punktu grafu może wychodzić tylko jedna strzałka).

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h,...

Nasza funkcja f jest ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$ do zbioru {1, 2, 3, 4}.

Funkcja f liczbie a przyporządkowuje liczbę 2.

Zapisujemy to tak:

$f(a) = 2$ – czytamy: f od a równa się 2

Liczbie b funkcja f przyporządkowuje liczbę 1, piszemy:

$f(b) = 1$ – czytamy: f od b równa się 1

Liczbie c funkcja f przyporządkowuje liczbę 3, piszemy:

$f(c) = 3$ – czytamy: f od c równa się 3

Liczbie d funkcja f przyporządkowuje liczbę 4, co zapisujemy:

$f(d) = 4$ – czytamy: f od d równa się 4

lub: dla argumentu d wartość funkcji wynosi 4.

Liczbie e funkcja f przyporządkowuje liczbę 5, piszemy:

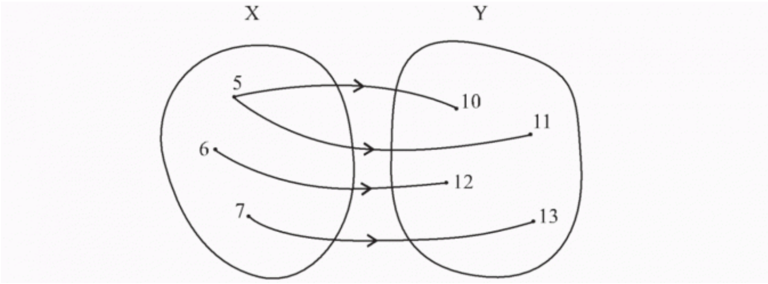
$f(e) = 5$ – czytamy: f od e równa się 5

lub: dla argumentu e wartość funkcji wynosi 5.

Uwaga!

Nie każde przyporządkowanie między dwoma zbiorami nazywa się funkcją.

Funkcją nazywamy tylko takie przyporządkowanie, według którego **każdemu elementowi z dziedziny** (ze zbioru X) przyporządkowany jest **dokładnie jeden element z przeciwdziedziny** (ze zbioru Y).



Rysunek 2-1. Funkcja

Ten graf nie opisuje funkcji, bo liczbie 5 ze zbioru x przyporządkowane zostały dwie liczby: 10 i 11 ze zbioru Y. Zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi zbioru x ma być przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru Y.

Nie ma żadnych zastrzeżeń co do natury zbiorów X i Y. Mogą być to zupełnie dowolne zbiory.

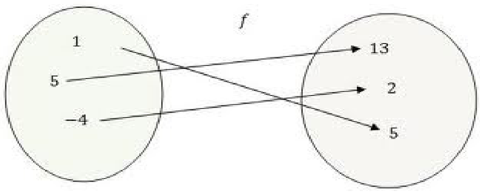
My jednak będziemy zajmować się tylko przypadkiem, gdy zbiory X i Y będą pewnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Innymi słowy, argumentami i wartościami funkcji będą... no właśnie... będą liczby.

SPOSOBY OKREŚLANIA FUNKCJI

Funkcje można określić za pomocą:

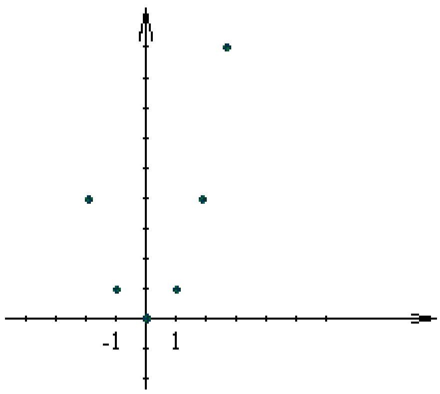
- **grafu**

Przykład 1



Rysunek 2-2. Graf

- **wykresu**



Rysunek 2-3. Wykres

Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

wzoru

Przykład 2

$y = x^2$, dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ Używa się również zapisu $f(x) = x^2$ lub $f\colon x \to x^2$.

tabelki

Przykład 3

x	−7	−5	−3	−2	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	5	7	6	5	3	−2

Rysunek 2-4. Tabelka

opisu słownego

Przykład 4

Mamy daną funkcję określoną opisem słownym:

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

–zbioru par uporządkowanych

Przykład 5

$\{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$ Takie określenie funkcji jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Przykład 6

Funkcję „Każdej liczbie ze zbioru $X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}$ przypisujemy liczbę o 2 od niej mniejszą", przedstaw w postaci wzoru, tabeli i wykresu.

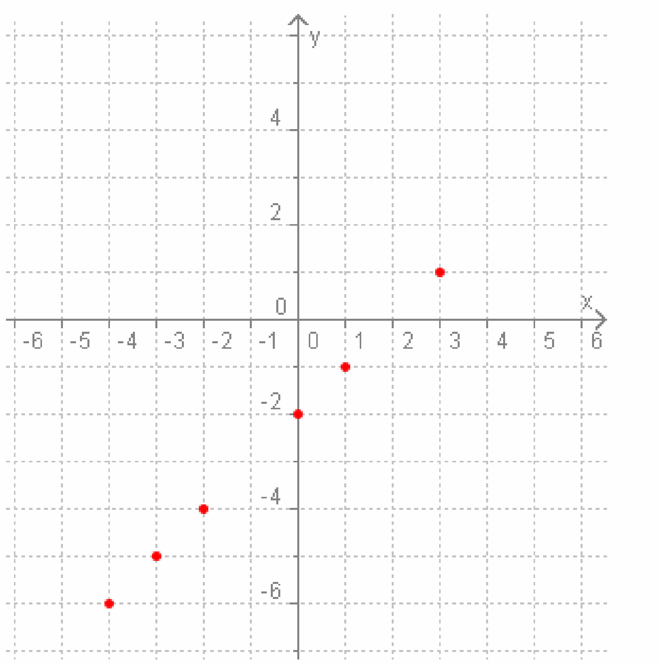
Wzór:

$y = x - 2$

Tabela:

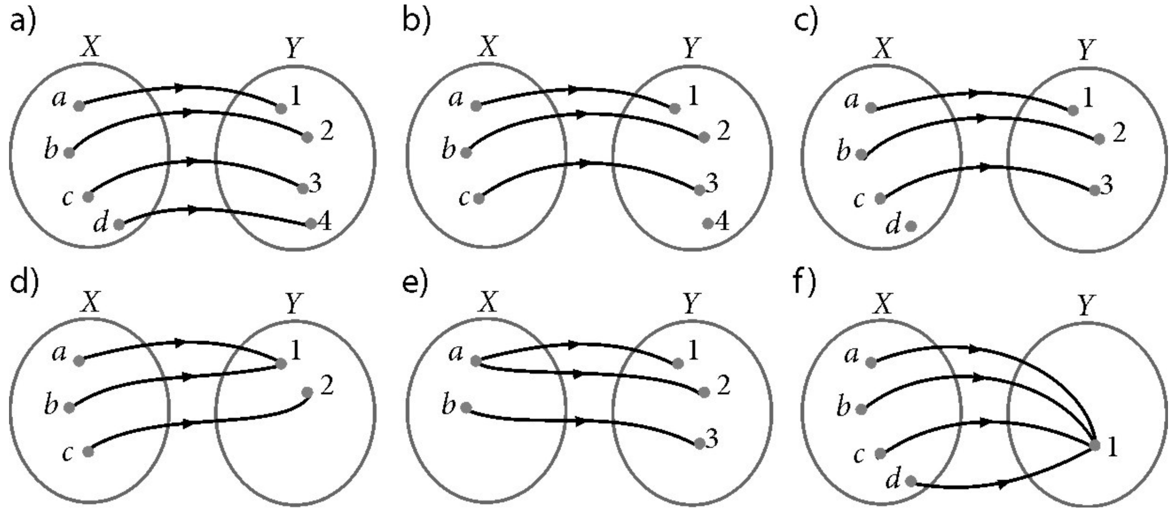
x	−4	−3	−2	0	1	3
y	−6	−5	−4	−2	−1	1

Wykres:



Zadania

2.1.1 Który z grafów określa funkcję:



Odpowiedź: a, b, d, f

2.1.2 Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

b) Każdej liczbie różnej od 0 przyporządkowano odwrotność tej liczby.

c) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

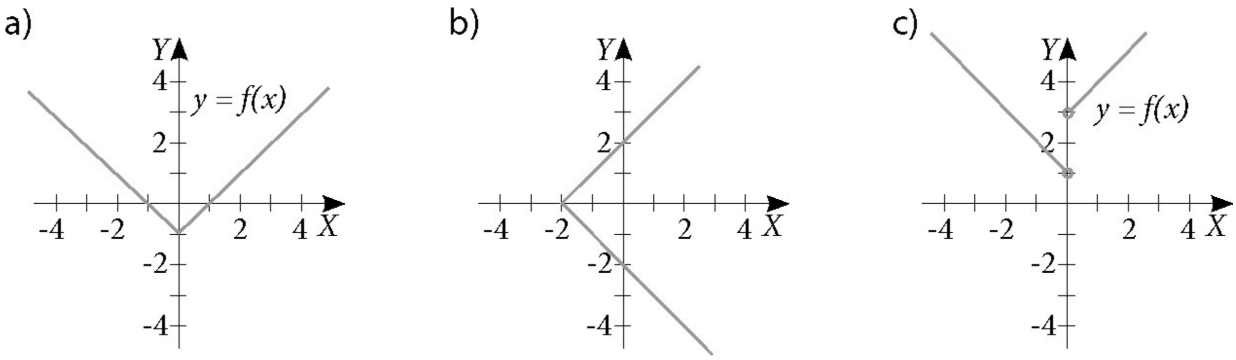
f) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

g) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

h) Każdej liczbie przyporządkowano kwadrat tej liczby.

Odpowiedź: a, b, c ,d, e, f, g, h – tak

2.1.3 Podaj, które z wykresów przedstawiają funkcję. Odpowiedź uzasadnij.



Odpowiedź: a, c

2.1.4 Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej dwukrotność tej liczby powiększoną o jeden. Opisane słowami przyporządkowanie opisz:

a) wzorem

b) tabelką dla argumentów –3,–2,–1,0,1,2,3

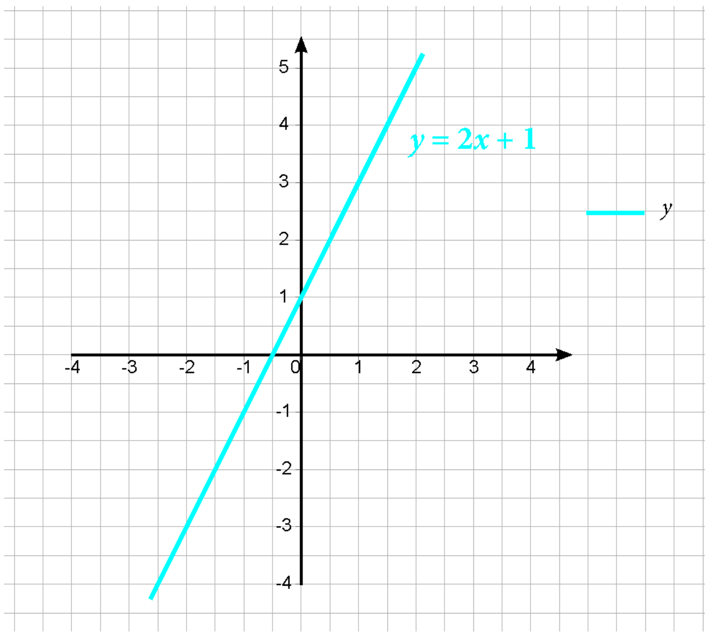
c) wykresem

Odpowiedź: a) $y = 2x + 1$.

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)



2.2 Własności funkcji

Teraz nauczę się:

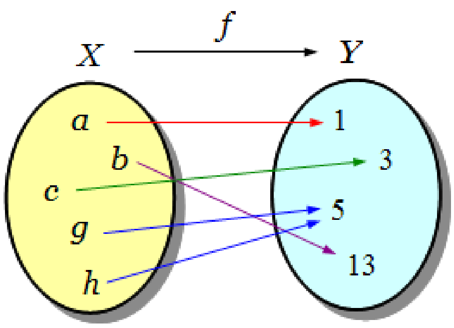
- Obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu;
- Posługiwać się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczania, dla jakiego argumentu przyjmuje daną wartość;
- Wyznaczać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą.

Przyporządkowanie, będące funkcją, możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

Dziedzina i wartość funkcji

Wiemy już z poprzedniego działu, że zbiór X, na którym określona jest funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji, a zbiór y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Przykład 1



Rysunek 2-5. Dziedzina i przeciwdziedzina

$X = \{a, b, c, g\ h\}, Y = \{1, 3, 5, 13\}\ Y = \{1, 3, 5, 13\}$

Zbiorem wartości funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$

Przykład 2

Wyznacz dziedzinę funkcji podanej wzorem:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla $x = 2$ w mianowniku wyrażenia będziemy mieli 0, a więc wyrażenie nie będzie miało sensu: $X = D_f = R / \{2\ \}$

Możemy zapisać dziedzinę inaczej: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Wskazówka:

Dziedziną funkcji danej wzorem jest zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określoną.

b) $f(x)=\sqrt{x-2}$

Rozwiązanie

$x-2\geq 0$

$x\geq 2$

$X=D_f : x\in\langle 2,+\infty\ )$

c) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$

Rozwiązanie

$x+4\rangle 0$

$x\rangle -4$

$X=D_f :(-4,+\infty)$

ZADANIA

2.2.1 Dana jest funkcja:

a) $f(x)=3x+4$

b) $f(x)=2x^2+1$

c) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Oblicz:

$f(0)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x-1)$, $f(x^2)$

Odpowiedź:

a) $f(0)=4$, $f(1)=7$, $f(\sqrt{2})=4+3\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}+4$, $f(x-1)=3x+1$, $f(x^2)=3x^2+4$

b) $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(\sqrt{2})=7$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x^2}+1$, $f(x-1)=2x^2-4x+3$, $f(x^2)=2x^4+1$

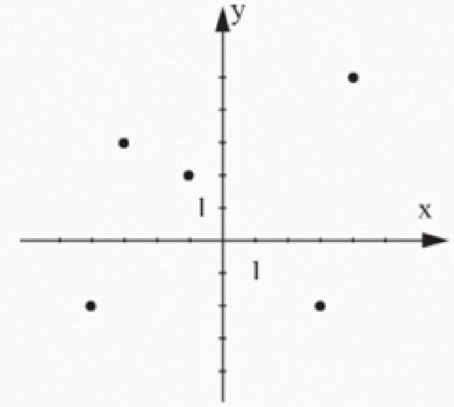
c) $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x+1}$, $f(x-1)=\dfrac{x-1}{x}$, $f(x^2)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

2.2.2 Dla każdej z tych funkcji odczytaj dziedzinę i zbiór wartości:

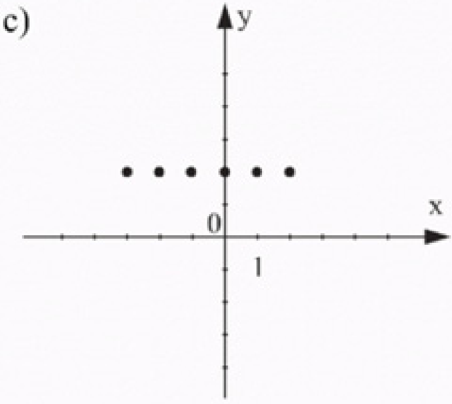
a)

x	-2	-1	0	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
y	4	3	5	0	$-2\frac{1}{2}$

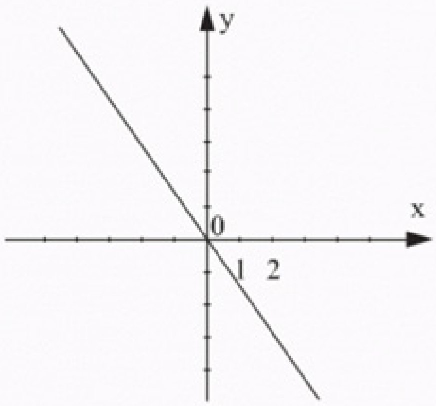
b)



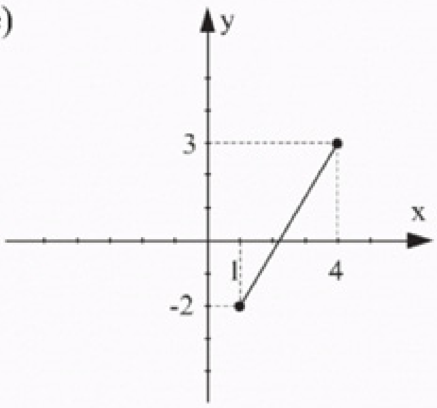
c)



d)



e)



Odpowiedź:

a) $Df = \{-2, -1. 0, 1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{3}\}$ $y = \{-2\frac{1}{2}, 0, 3,4,5\}$,

b) $Df = \{-4,-3,-1,3,4\}$ $y = \{-2,2,3,\%\}$,

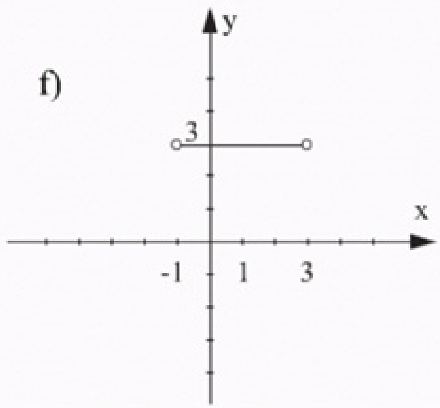
c) $Df = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ $y = \{2\}$,

d) $Df = R$ $y = R$,

e) $Df : x \in <1,4>$ $y \in <-2,3>$,

f) $Df\!: x \in (-1,3)$ $y = \{3\}$

f)



2.2.3 Funkcja określona jest tabelką:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	–3	3	–1	–2	5	2

a) podaj zbiór argumentów i zbiór wartości funkcji,

b) wymień wszystkie ujemne argumenty tej funkcji,

c) odczytaj wartość dla argumentu $x = 0$ oraz dla argumentu $x = 3$,

d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2?

e) czy punkt (–1,–3) należy do wykresu funkcji?

f) narysuj wykres tej funkcji.

Odpowiedź:

a) $X = \{-3, -2, -1,0,1,2,3,4\}$ $Y = \{-3, -2, -1,1,2,3,5\}$

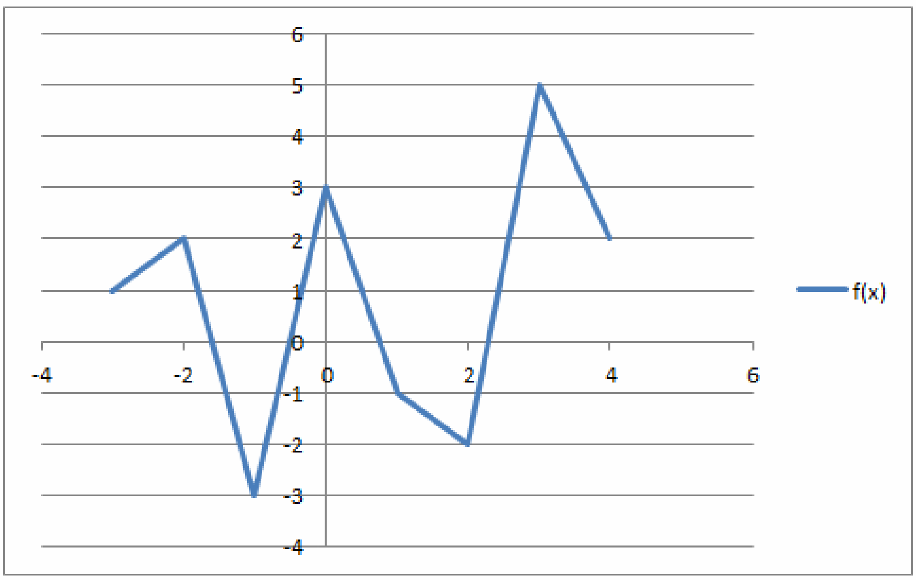
b) $-3, -2, -1$

c) $f(0) = 3, f(3) = 5$

d) $x = 4, x = -2$

e) tak

f)



2.2.4 Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-3)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 10x + 25}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$

g) $f(x)=\sqrt{x+1}$

h) $f(x)=\sqrt{x+3}-\frac{x}{x+4}-\frac{1}{x-1}$

i) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x+3}$

j) $f(x)=-3x^2+7x-8$

k) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$

l) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{2x-4}{x+2}$

m) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{4}{x^2}$

n) $f(x)=\sqrt{\frac{3}{x-2}}$

o) $f(x)=\frac{3-2x}{\sqrt{2-x}}+\frac{x+6}{\sqrt{x+4}}$

p) $f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{x^2-16}$

Odpowiedź:

a) R,
b) R/ {–1, 3},
c) R/ {–3, 3},
d) R,
e) R,
f) $x \in (-\infty, 4)$,
g) $x \in < 1, +\infty)$,
h) $x \in < -3, 1) \cup (1, +\infty)$,
i) R\ {–3, 1},
j) R,
k) R,
l) R\ {–2,0},
m) R\ {–3,0,3},
n) X $\in (2, +\infty) \in (2, +\infty)$,
o) $x \in \ \in (-4,2)$,
p) $x \in (4,+\infty)$

Miejsca zerowe

Argument x, dla którego $f(x) = 0$, nazywamy **miejscem zerowym** funkcji f.

Przykład 3

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{x-1}}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$

Rozwiązania

a)
$$D_f = R$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0$$
$$x-1=0 \text{ lub } x+1=0$$

zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji f to $x = 1$ oraz $x = -1$

a) $D_f = (1, +\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0$

$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$

$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in D_f \quad -\sqrt{2} \notin D_f$

Miejscem zerowym funkcji *f* jest $x = \sqrt{2}$

a) $D_f : x \in R / \{4\ \}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ \ + 2 = 0$

$x = -2 \in D_f$

Miejscem zerowym funkcji jest $x = -2$

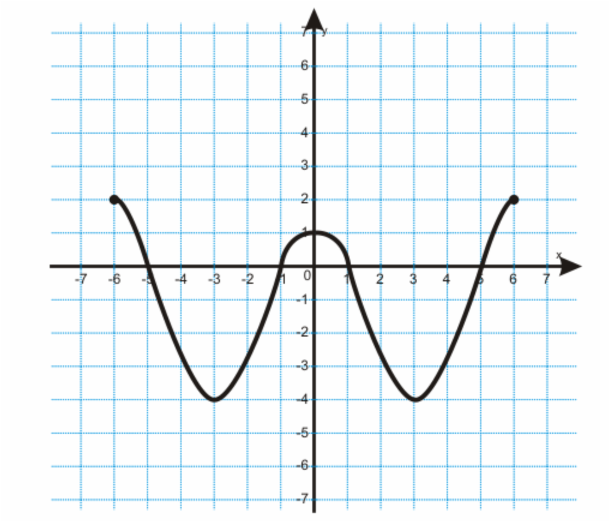
Przykład 4

Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe, dziedzinę i przeciwdziedzinę.

Dziedzina: $D_f = \langle -6; 6 \rangle$

Zbiór wartości: $Z_w = \langle -4; 2 \rangle$

Miejsca zerowe: $x = -5, x = -1, x = 1, x = 5$



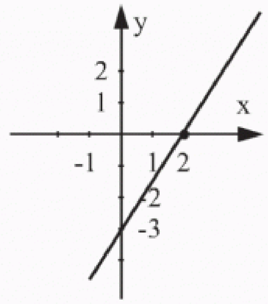
ZADANIA

2.2.5 Wypisz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

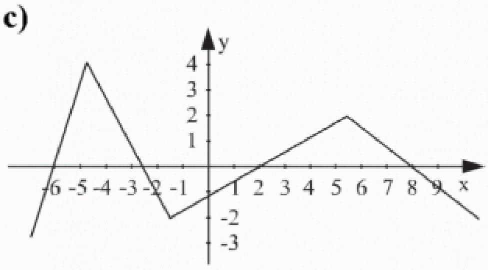
a)

x	-5	0	1	5
y	2	3	4	0

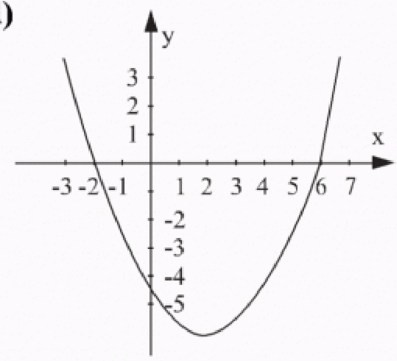
b)



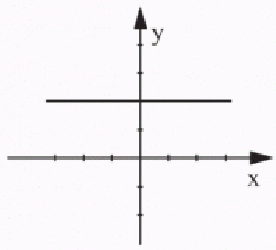
c)



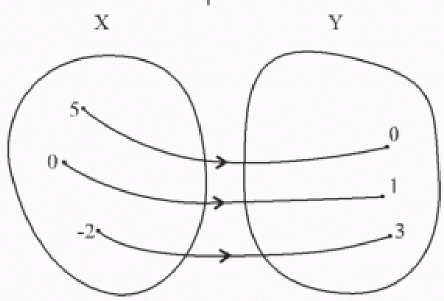
d)



e)



f)



Odpowiedź:

a) $x = 5$, b) $x = 2$, c) $-6; -2{,}5; 2;8$,

d) 2,6, e) brak miejsc zerowych, f) $x = 5$

2.2.6 Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 3}$ d) $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{4x - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - 2}}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2}}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ h) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

i) $f(x) = \sqrt{x + 9}$ j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 3}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x}$ l) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$

m) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 9}$

Odpowiedź:

a) Df R/−2; $x = 2$,

b) Df R/2; $x = -2$,

c) Df R/3; brak miejsc zerowych,

d) Df R oprócz 1/2; $x = -1/2$,

e) Df (2,+∞); brak miejsc zerowych,

f) Df (−2;+∞) $x = 0$,

g) Df R/{−3,3}; brak miejsc zerowych,

h) Df R/{−2,2}, brak miejsc zerowych,

i) Df<−9,+∞) ; $f(-9) = 0$,

j) Df<0,3) suma (3,+∞); $f(0) = 0$,

k) Df<3,+∞); $f(3) = 0$,

l) Df (−3,+∞); $f(0) = 0$,

m) Df = R; $f(-1) = 0$

2.3 Monotoniczność funkcji

Monotoniczność jest to pewna cecha funkcji, która mówi nam, co się dzieje z wartościami funkcji podczas zwiększania wartości liczbowych argumentów funkcji. Z tego względu wyróżniamy następujące funkcje:

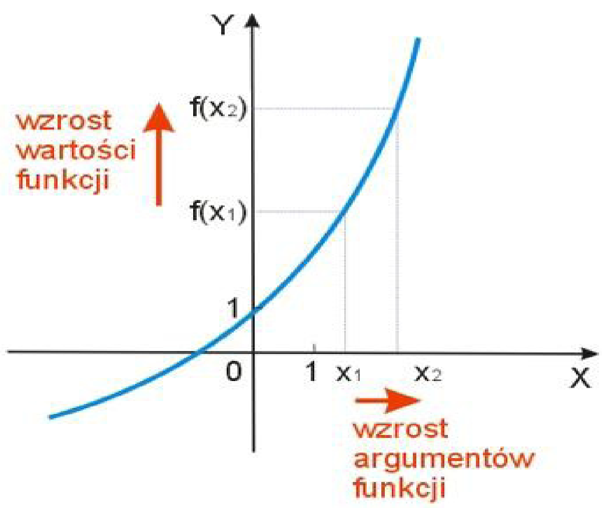
– rosnące
– malejące
– nierosnące
– niemalejące

Warto tu jeszcze wspomnieć o funkcji stałej, choć nie mówimy o niej, jak o funkcji monotonicznej.

Funkcja rosnąca

Funkcja f jest **rosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

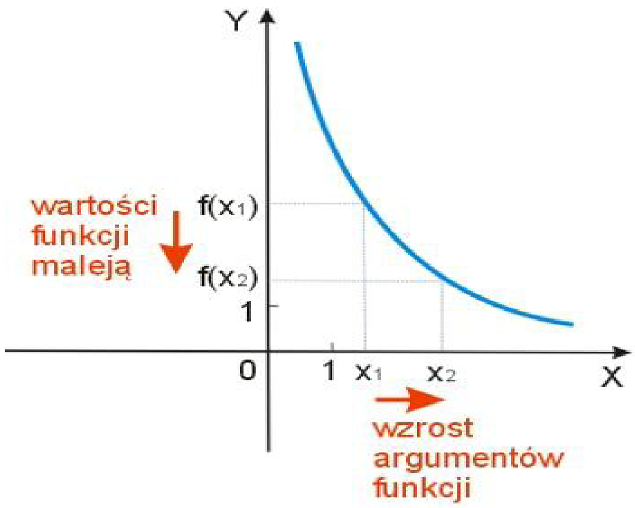


Cechą charakterystyczną wykresu funkcji rosnącej jest to, że zdaje się wznosić ku górze.

Funkcja malejąca

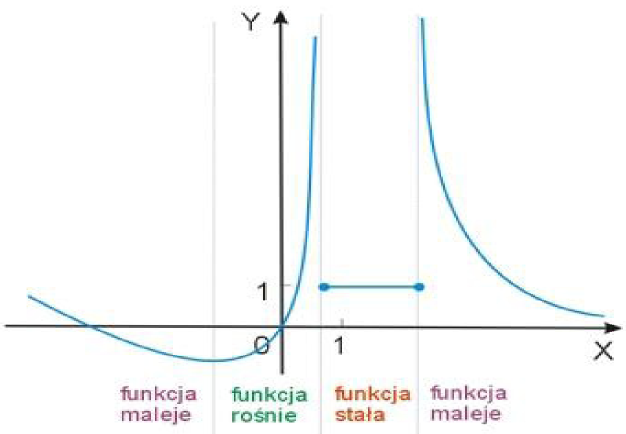
Funkcja *f* jest **malejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Cechą charakterystyczną wykresu funkcji malejącej jest to, że zdaje się opadać w dół.

Czy funkcja może być jednocześnie malejąca i rosnąca w różnych przedziałach liczbowych? Oczywiście, że tak. Poniżej przykład takiej funkcji wraz z określonymi przedziałami, w których funkcja rośnie i maleje oraz jest stała.



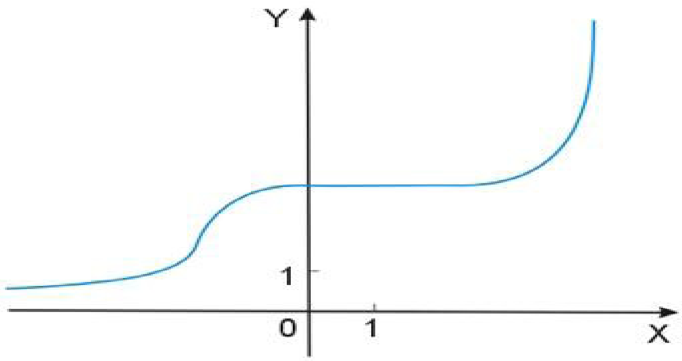
Funkcja niemalejąca

Funkcja *f* jest **niemalejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Zatem definicja funkcji niemalejącej przypomina definicję funkcji rosnącej, z tym że w przypadku funkcji niemalejącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała.

Oto ilustracja funkcji niemalejącej.

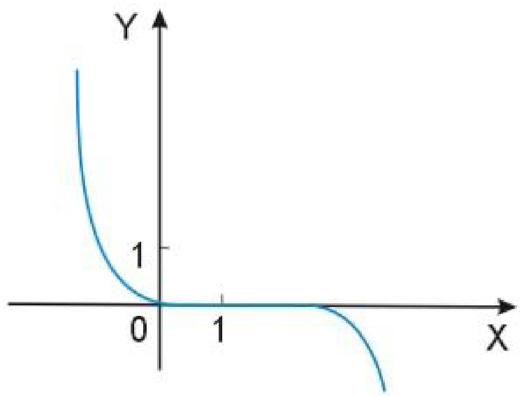


Funkcja nierosnąca

Funkcja f jest **nierosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

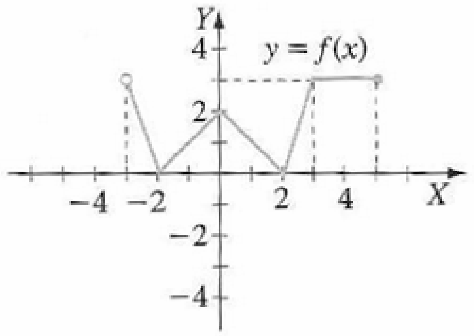
Zatem definicja funkcji nierosnącej przypomina definicję funkcji malejącej, z tym że w przypadku funkcji nierosnącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała. Oto ilustracja funkcji nierosnącej.

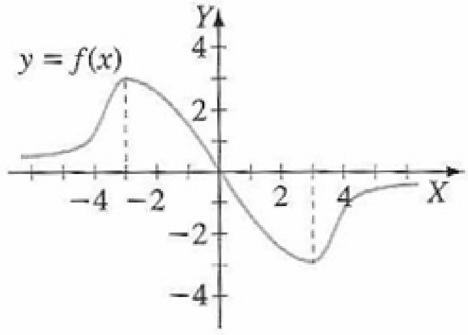


Uwaga: Symbole 〈 , 〉 oznaczają tak zwane **nierówności mocne** (ostre), symbole ≤,≥ oznaczają tak zwane **nierówności słabe** (nieostre).

ZADANIE

2.3.1 Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca i stała.





Odpowiedź:

a) rosnąca $x \in (-2;0) \cup (2;3)$, malejąca $x \in (-3;-2) \cup (0;2)$, stała $x \in (3;4)$

b) rosnąca $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$, malejąca $x \in (-3;3)$

2.4 Sporządzanie wykresów funkcji

Teraz nauczę się:

Szkicować wykres funkcji za pomocą wzoru lub tabeli;

Odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

Aby narysować wykres funkcji, należy wykonać dwie następujące po sobie czynności. Powstawanie wykresu funkcji $y = -2x + 4$ przedstawimy na przykładzie: I. Za pomocą wzoru określamy kilka punktów należących do funkcji (minimum 3). W tym celu wybieramy wartości x, podstawiamy je do wzoru i obliczamy wartości y. Wartości x i y pomocniczo możemy zapisywać w tabeli:

x			
y			

Wybieramy sami argumenty (x), najlepiej jak najmniejsze (0,1,2).

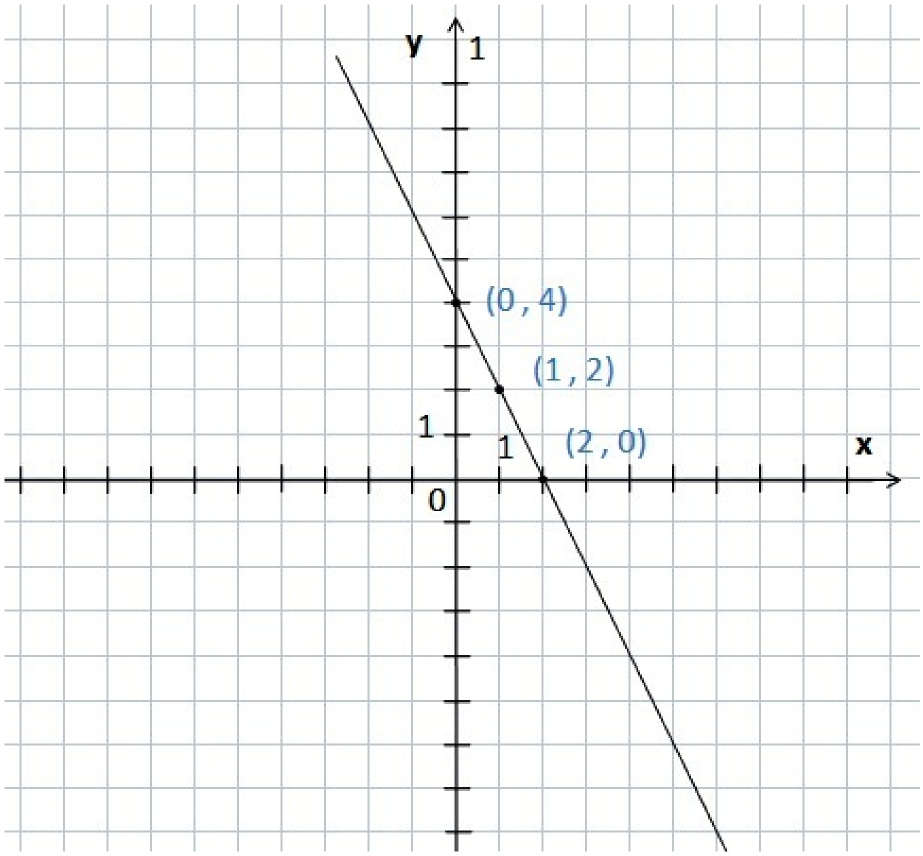
x	0	1	2
y	4	2	0

Podstawiamy kolejno wybrane przez nas argumenty (1, 2, 3) do wzoru i obliczamy wartości (y):

$y = -2x + 4$
$y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$
$y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$
$y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$

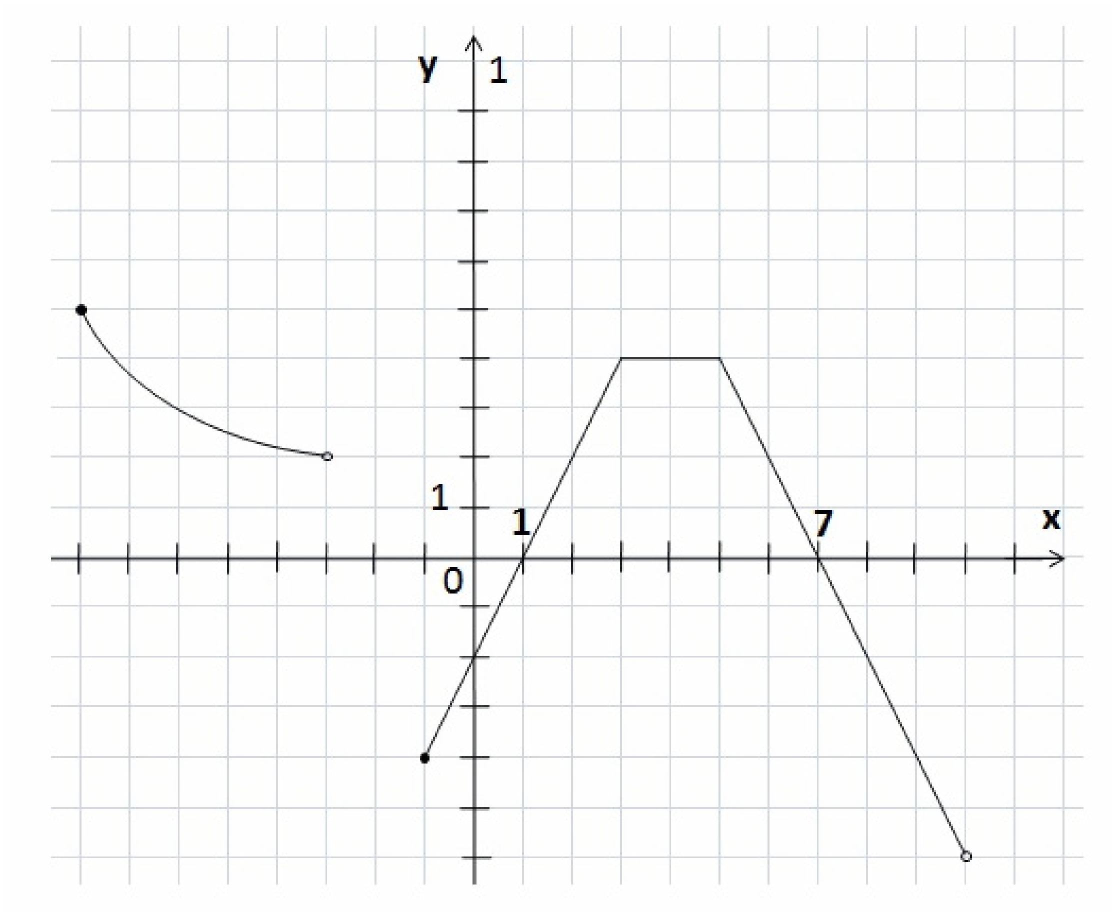
Otrzymujemy więc punkty: (0,4), (1,2),(2,0)

II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je prostą.



Przykład 1

Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:



Uwaga: *Minimalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{min}$ *lub* y_{min}*. Maksymalną wartość oznaczamy:* $f(x)_{max}$ *lub* y_{max}*. Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna – punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości wypada podać argument (x) lub przedział argumentów, dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.*

Odpowiedzi:

Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0X): Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu, to dwa przedziały, zgodne z zakresami liczb widocznymi na powyższym rysunku: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$\boldsymbol{D = \langle -8;\ -3) \cup \langle -1;\ 10)}$

Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0Y):

Zbiór wartości to jeden przedział. Powyżej widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$\boldsymbol{Z_w = (-6;\ 5\rangle}$

Monotoniczność

Funkcja malejąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam, gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy –8), nawias jest trójkątny, tam, gdzie jest pusta (–3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam, gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$f(x)\searrow f(x)\searrow$ w przedziałach $\langle -8;\ -3) \cup \langle 5;\ 10)$

Funkcja rosnąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca. Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3 nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt, w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$f(x)\nearrow f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle -1;\ 3\rangle$

Funkcja stała

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$f(x)_{\rightarrow}$ w przedziale $\langle 3, 5\rangle$

Miejsce zerowe:

$x_1 = 1 \lor x_2 = 7$

Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych Punkty przecięcia z osią $0X$: $(1{,}0);\ (7{,}0)$
Punkt przecięcia z osią $0Y$: $(0, -2)$

Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia/ ujemna

Przy liczbie –8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie –3 nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX.

$f(x) > 0$ dla $x \in \langle -8;\ -3) \cup (1; 7)$

Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX. Przy liczbie 10 nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta.

$f(x) < 0$ dla $x \in \langle -1;\ 1) \cup (7; 10)$

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Dla wartości –5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.
$f(x) = -5$ dla $x = 8{,}5$

Dla wartości –2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 7. Rozwiązaniem jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$\boldsymbol{f(x) = -2}$ dla $\boldsymbol{x \in \{0, 7\}}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argument –7, 3. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i dwuelementowego zbioru.

$\boldsymbol{f(x) = 4}$ dla $\boldsymbol{x \in \langle 3, 5\rangle \cup \{-7, 3\}}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$\boldsymbol{f(x) = 6}$ Brak argumentów

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2, 4), B = (6, 2)$

Punkt A nie należy do wykresu funkcji. Punkt B należy do wykresu funkcji.

Maksimum i minimum

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka.

Minimum funkcji: brak

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego –8.

Maksimum funkcji $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

ZADANIA

2.4.1 Uzupełnij tabelkę funkcji $f : R \to R$ i narysuj jej wykres. Zadanie wykonaj również w arkuszu kalkulacyjnym.

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...								...

a) $y = x$

b) $y = \frac{1}{2}x+1$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = 3x+5$

e) $y = -x + 3$

f) $y = x\frac{3}{4}x - 2$

g) $y = |x|$

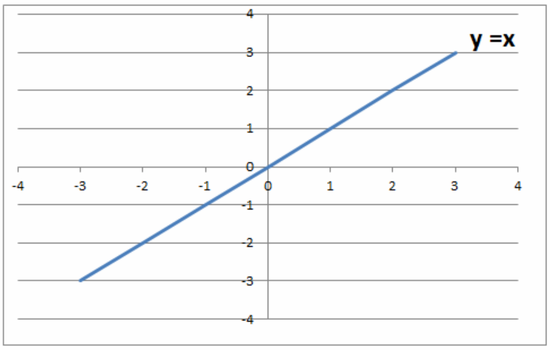
h) $y = |x + 2|$

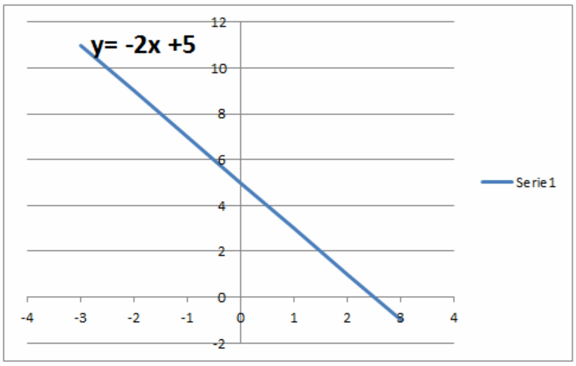
i) $y = |x| - 1$

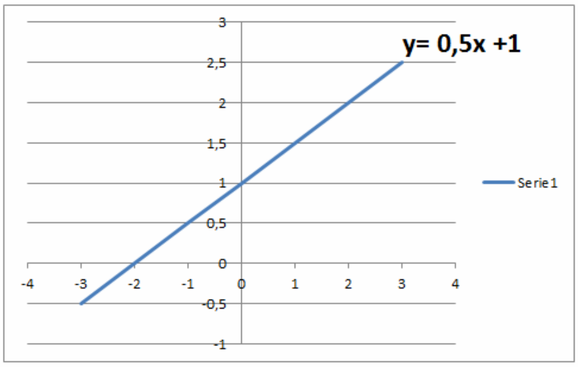
j) $y = \frac{1}{2}|x|$

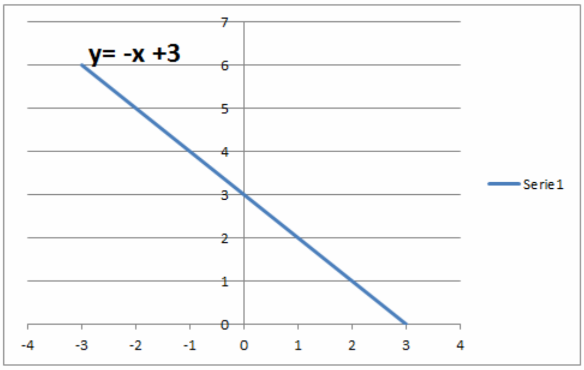
k) $y = 3|x|$

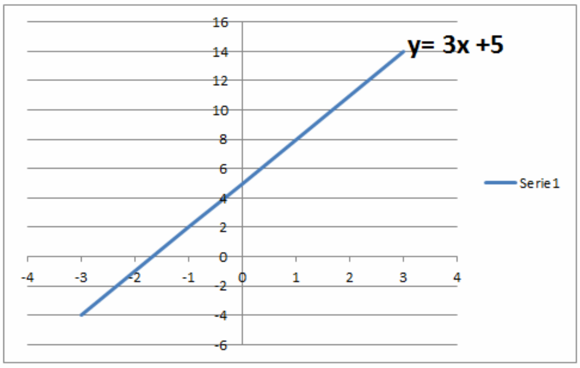
Odpowiedź:

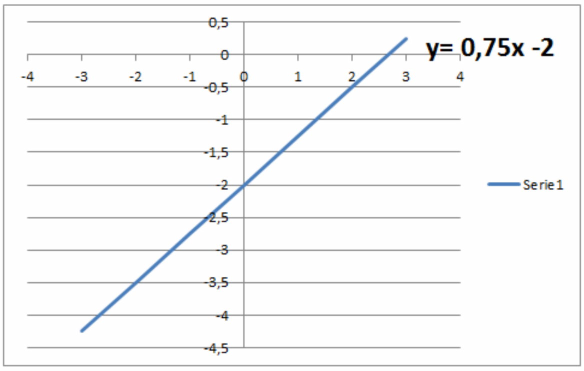

y =x

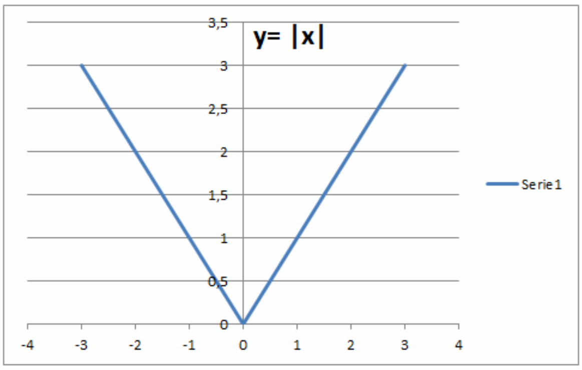

y= -2x +5
Serie1

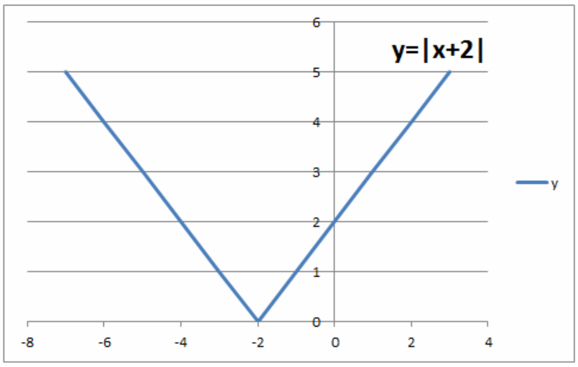

y= 0,5x +1
Serie1

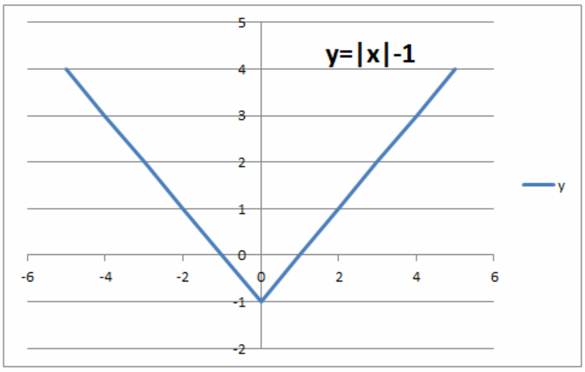

y= -x +3
Serie1

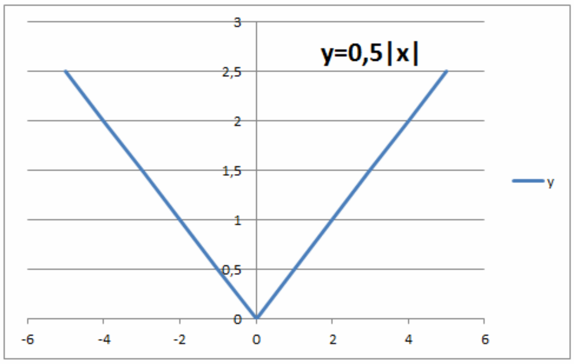

y= 3x +5
Serie1


y= 0,75x -2
Serie1

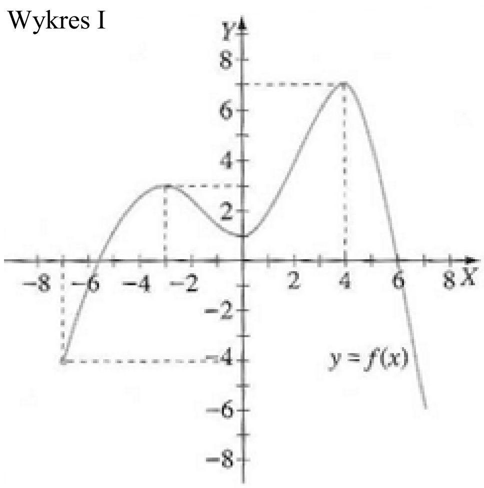

y= |x|
Serie1

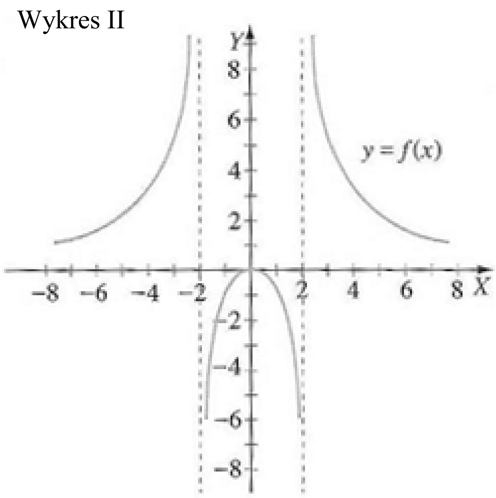

y=|x+2|
y





2.4.2 Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ:





a) dziedzinę funkcji,
b) zbiór wartości funkcji,
c) miejsca zerowe funkcji,
d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
e) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała,
f) wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją).

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-7; +\infty)$

b) $y \in (-\infty; 7)$

c) $x = -5{,}5; x = 6$

d) $y > 0$ dla $x \in (-5{,}5; 6)$ $y < 0$ dla $x \in (-\infty; -5{,}5) \cup (6; +\infty)$

e) f rosnąca dla $x \in <-7; 4>$ f malejąca dla $x \in <4; +\infty)$

f) $y_{max} = 7$ dla $x = 4$ y_{min} nie istnieje

Wykres II

a) $x \in (-\infty; -2) \cup\cup(-2;2) \cup (2;+\infty)$

b) $y \in (-\infty;+\infty)$

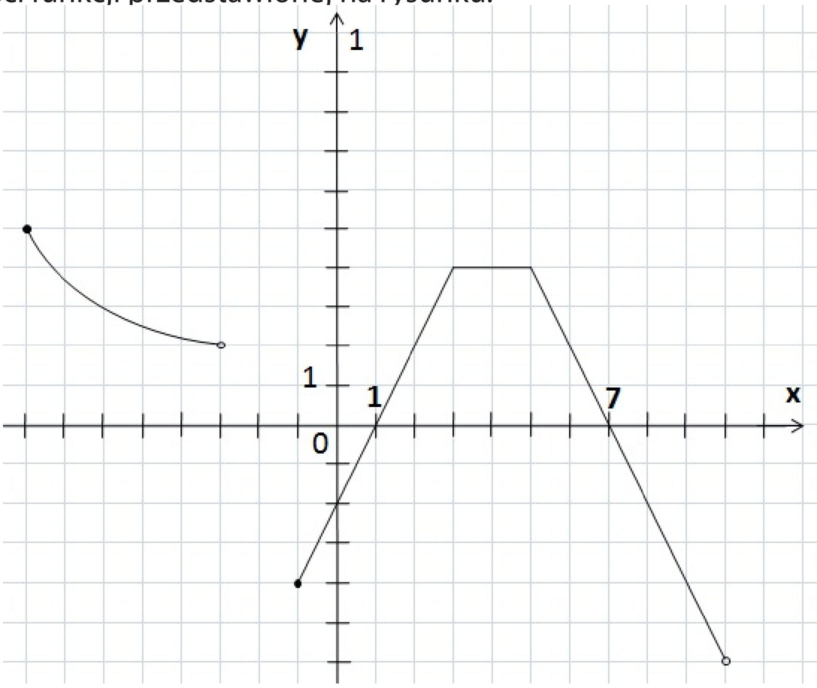
c) $x = 0$

d) $y > 0$ *dla* $x \in (-\infty; -2) \cup (2;+\infty)$ $y < 0$ *dla* $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

e) f *rosnąca dla* $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;0)$ f *malejąca dla* $x \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$

f) y_{max} *nie istnieje* y_{min} *nie istnieje*

2.4.3 Określ własności funkcji przedstawionej na rysunku:



a) Dziedzina funkcji

b) Zbiór wartości

c) Przedziały monotoniczności

d) Miejsce zerowe

e) Punkty przecięcia z osiami

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość:
$f(x) = 5, f(x) = -2, f(x) = 4, f(x) = 6$

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\leftarrow 2$; $f(x) \le -2$

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (−2, 4), B = (6, 2) należą do wykresu funkcji f

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji

Odpowiedź:

a) $x \in <-8; -3) \cup <-1; 10)$,

b) $y \in (-6;5>$,

c) f rosnąca dla $x \in$ <–1;3>, f malejąca dla $x \in$ <–8;–3) ∪ <5; 10), f stała dla $x \in$ <3;5>,

d) $x = 1$, $x = 7$,

e) $x = 0$ $y = -2$; $y = 0$ $x = 1$ i $x = 7$,

f) funkcja jest dodatnia dla $x \in$ <–8;–3) ∪ (1; 7),

g) funkcja jest ujemna dla $x \in$ <–1;1) ∪ (7; 10),

h) $f(x) = 5$ dla $x = -8$, $f(x) = -2$ dla $x = 0$, $f(x) = 4$ dla $x \in$ <3;5>, $f(x) = 6$ nie ma takich x,

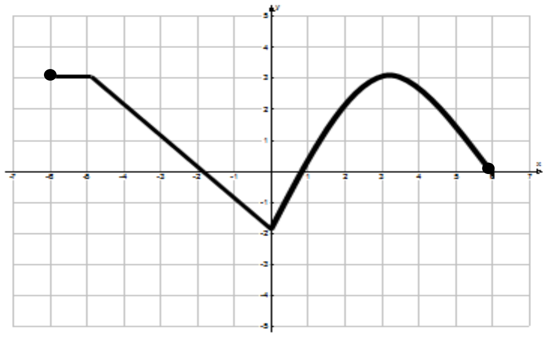
i) $f(x) < -2$ dla $x \in$ <–1;0) ∪ (8; 10), $f(x) \leq -2$ dla $x \in$ <–1;0> ∪ <8; 10),

j) A nie należy, B $\in f$,

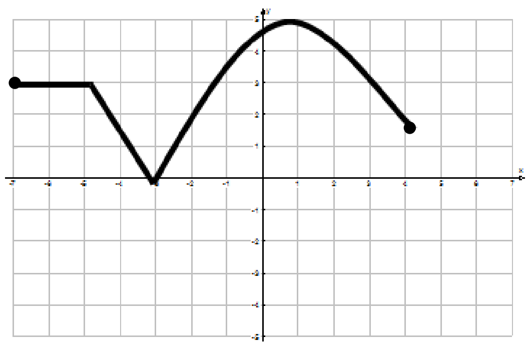
k) $y_{max} = 5$ dla $x = -8$, y_{min} nie istnieje

2.4.4 Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:

Wykres I



Wykres II



a) Dziedzina funkcji

b) Zbiór wartości

c) Przedziały monotoniczności

d) Miejsce zerowe

e) Punkty przecięcia z osiami

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość: $f(x) = 3$, $f(x) = 1$

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f\,(x)\langle 3$

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–4, 2), B = (5, 1) należą do wykresu funkcji f

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in$ <–6,6>

b) $y \in$ <–2,3>

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in$ <3,1> f jest malejąca dla $x \in$ <–5,0> ∪ <3; 6)
f jest stała dla $x \in$ <–6,–5>

d) $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$

e) (–2,0); ($\frac{1}{2}$, 0); (6,0); (0,–2)

f) $x \in$ <–6,–2) ∪ <$\frac{1}{2}$; 6)

g) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-6,-5> \cup <\{3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3, 1\}$

i) $x \in (-5,3)$

j) tak

k) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -2$

Wykres II

a) $x \in <-7,4>$

b) $y \in <0,5>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <0,\frac{1}{2}>$ f jest malejąca dla $x \in <-5,0) \cup <\frac{1}{2}; 4>$
f jest stała dla $x \in <-7,-5>$

d) $x \in \{-3\}$

e) (3,0); $(0;4\frac{1}{2})$

f) $x \in <-7,-3) \cup (-3; 4)$

g) $x \in \{\emptyset\}$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-7,-5> \cup <\{-1\frac{1}{2}, 3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\}$

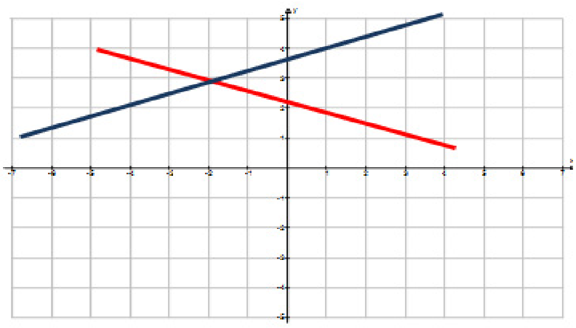
i) $x \in (-5,-1\frac{1}{2}) \cup (3;4)$

j) nie

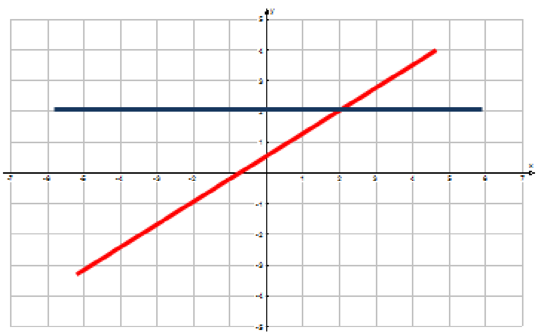
k) $y_{max} = 5$, $y_{min} = 0$

2.4.5 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) = g(x)$.

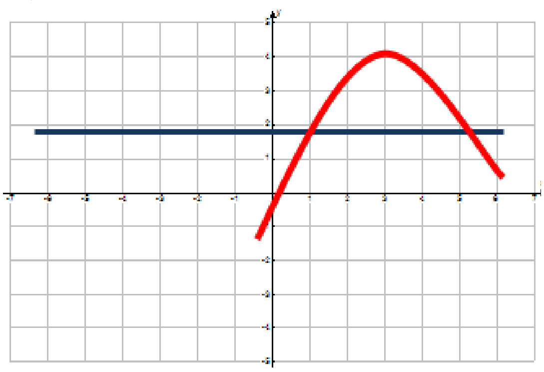
a)



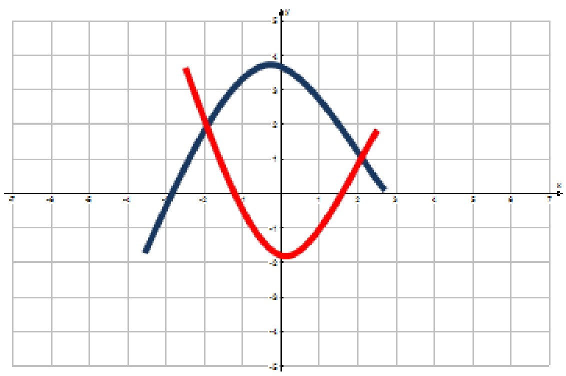
b)



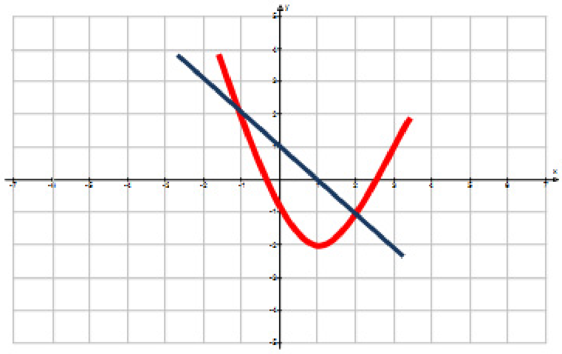
c)



d)



e)



Odpowiedź:

a) $(-2\frac{1}{2},1)$,

b) $(2,2)$,

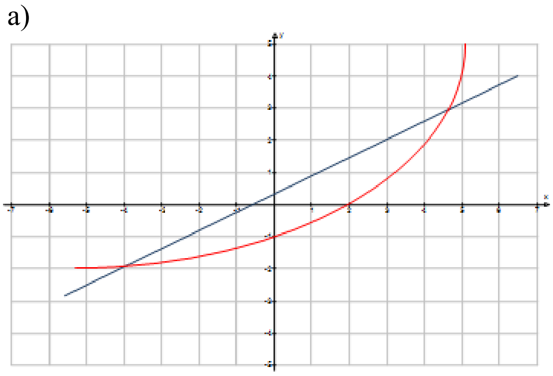
c) $(1,2); (5,2)$,

d) $(-2,2); (2,1)$,

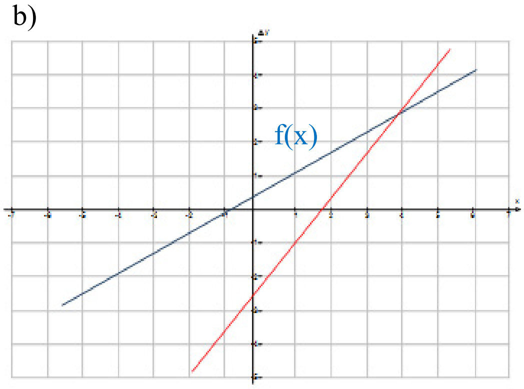
e) $(-1,2); (2,-1)$

2.4.6 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) \geq g(x)$ oraz $f(x) < g(x)$

a)



b)



Odpowiedź:

a) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle -4, 4\frac{1}{2} \rangle$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in \langle -\infty, -4) \cup (4\frac{1}{2}, +\infty)$

b) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle -\infty, 4 \rangle$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (4, +\infty)$

c) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-1, 2) \cup (5, +\infty)$

2.5 Przekształcanie wykresów funkcji

Teraz nauczę się:

Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = -f(x)$;

Narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

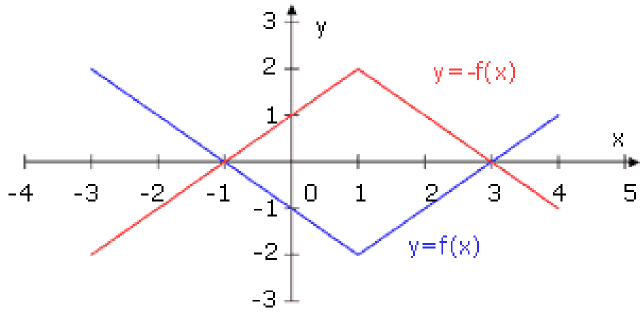
Wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

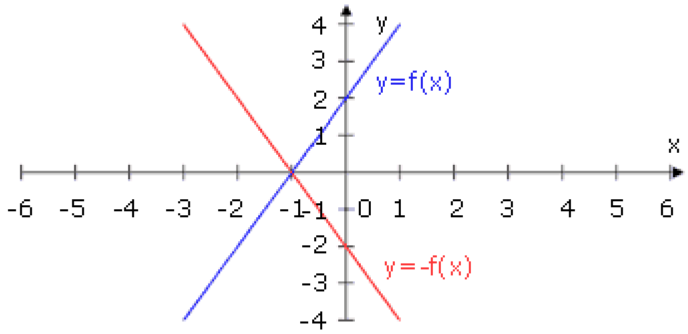
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = |f(x)|$,

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

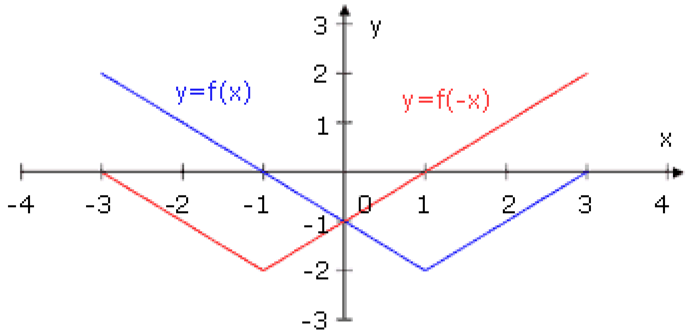
Przykład





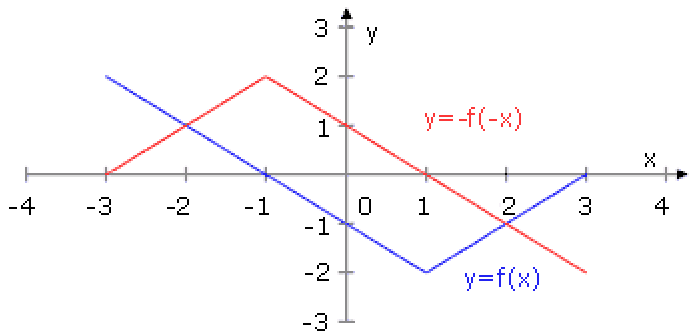
$x \to y = f(-x)$

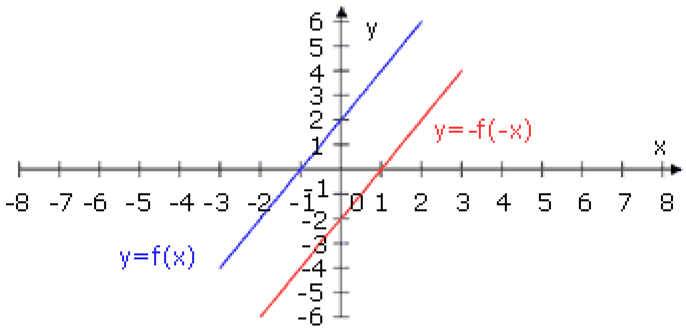
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

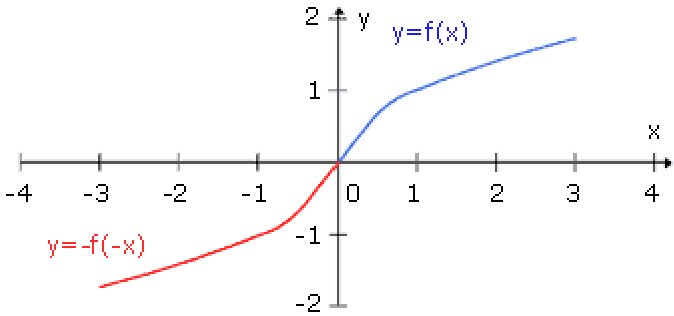


$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$.

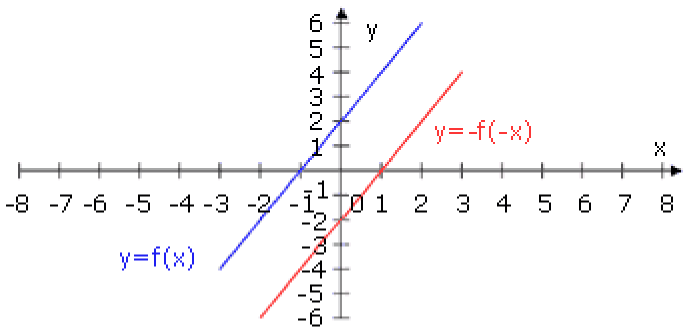






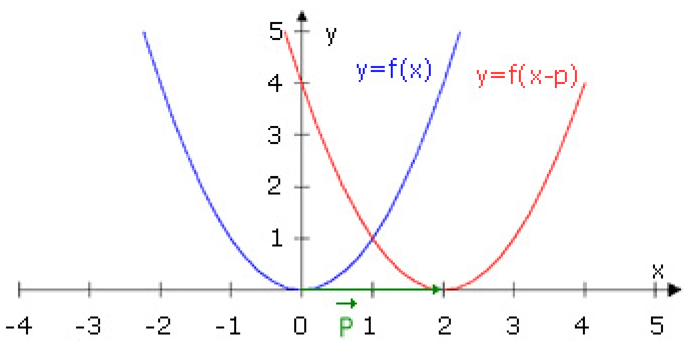
$x \rightarrow y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0, q]$).



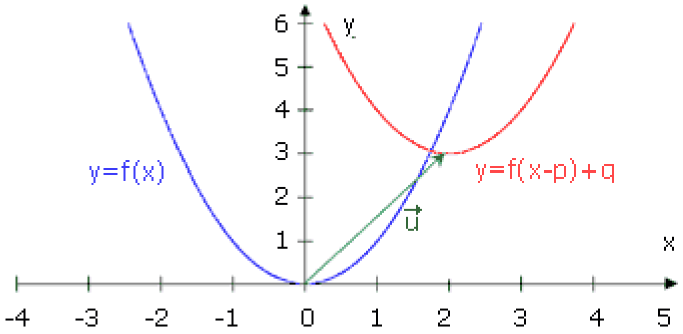
$x \rightarrow y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $[p, 0]$.



$x \to y = f(x-p)+q$

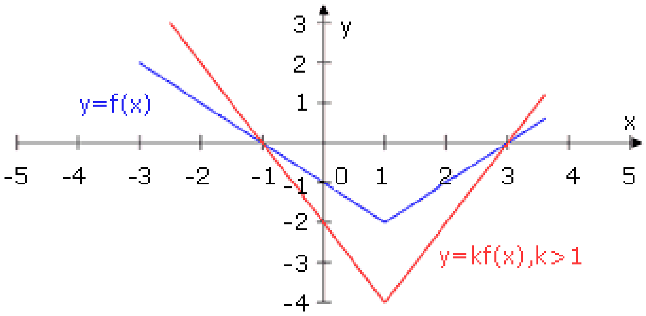
Wykres funkcji $y = f(x-p)+q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

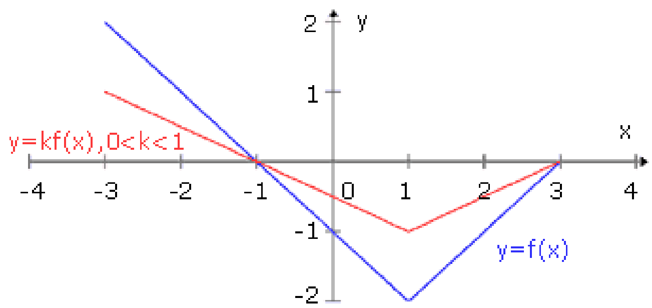


$x \to y = k \cdot f(x)$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k-krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

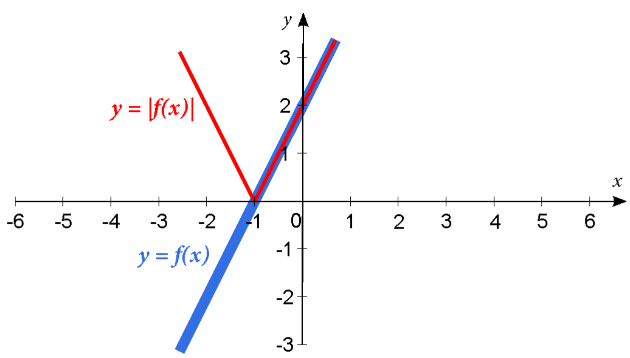
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY). Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).





$* \; x \to y = |f(x)|$

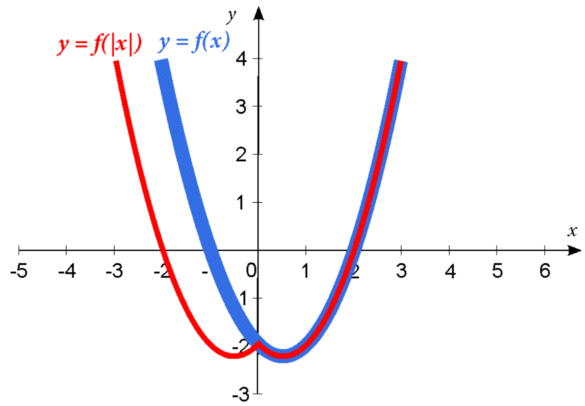
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$, leżącą nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX, odbić symetrycznie względem osi OX.

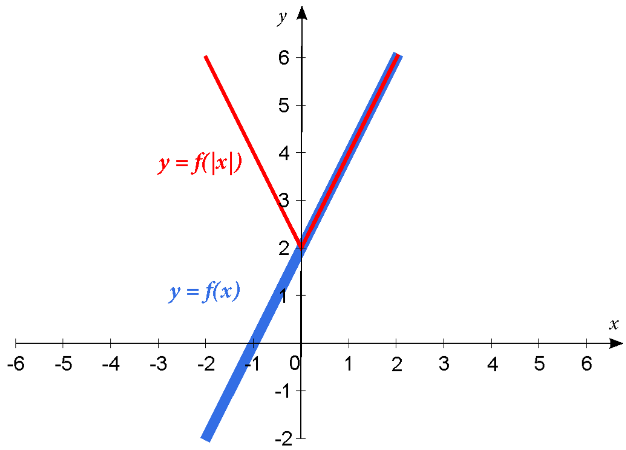


$* x \rightarrow y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

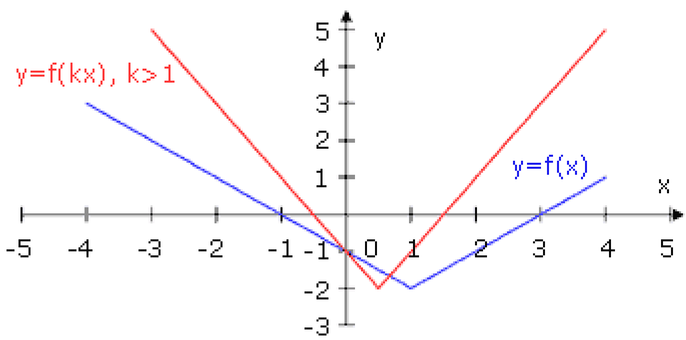


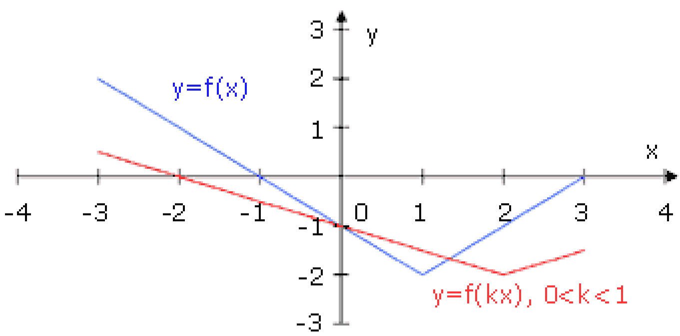


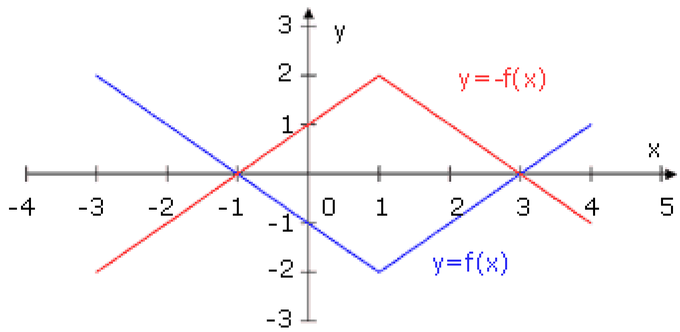
$* x \rightarrow y = f(k * x)$

Wykres funkcji $y = f(k * x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX. Dla k $\in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.







ZADANIA

2.5.1 Mając dane funkcje:

$$f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = -2x - 1, f(x) = -x + 4$$

Zapisz wzory funkcji i naszkicuj wykresy:

a) $x \to f(x)$

b) $x \to -f(x)$

c) $x \to f(-x)$

d) $x \to f(x) - 1$

e) $x \to f(x+1)$

f) $x \to |f(x)|$

g) $x \to f(|x|)$

h) $x \to |f(x) - 1|$

Odpowiedź:

a) $y = -f(x) = -2x$

b) $y = -f(x) = -2x$

c) $y = f(-x) = -2x$

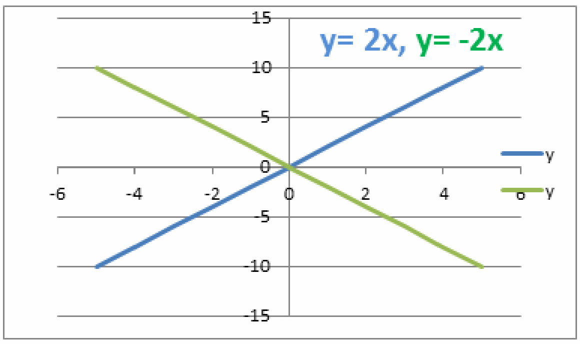
d) $y = f(x) - 1 = 2x - 1$

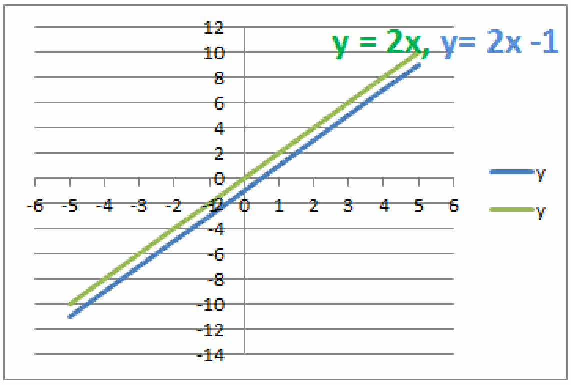
e) $y = f(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$

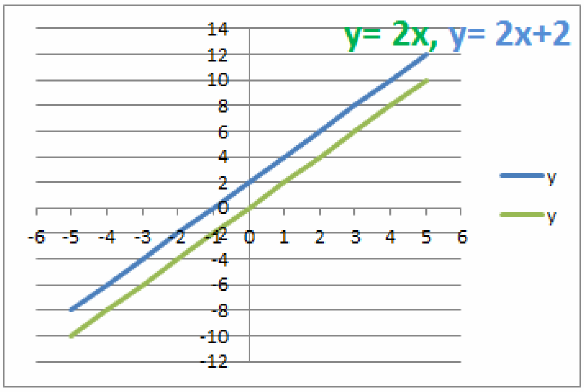
f) $y = |f(x)| = |2x|$

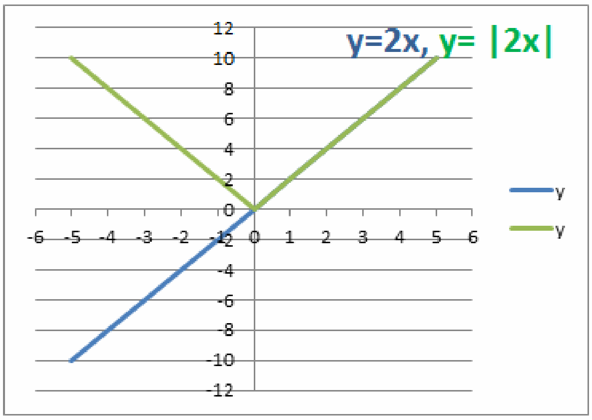
g) $y = f(|x|) = 2|x|$

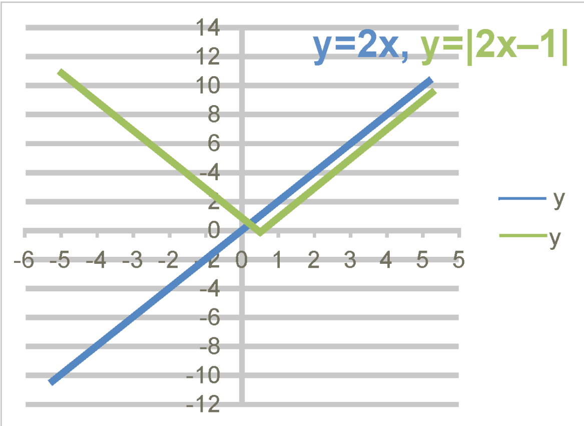
h) $y = |f(x) - 1| = |2x - 1|$

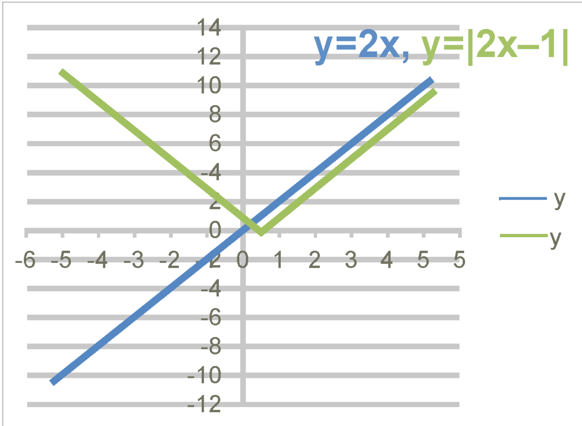












$f(x) = 3x + 1$, $y = -f(x) = -3x - 1$, $y = f(-x) = -3x + 1$, $y = f(x) - 1 = 3x$, $y = f(x+1) = 3x + 4$,

$y = |f(x)| = |3x + 1|$, $y = f(|x|) = 3|x| + 1$, $y = |f(x) - 1| = |3x|$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = -f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $y = f(-x) = \frac{1}{2}x + 2$, $y = f(x) - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = f(x+1) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$,

$y = |f(x)| = |-\frac{1}{2}x + 2|$, $y = f(|x|) = -\frac{1}{2}|x| + 2$, $y = |f(x) - 1| = |-\frac{1}{2}x + 1|$

$f(x) = -2x - 1$, $y = -f(x) = 2x + 1$, $y = f(-x) = 2x - 1$, $y = f(x) - 1 = -2x - 2$,

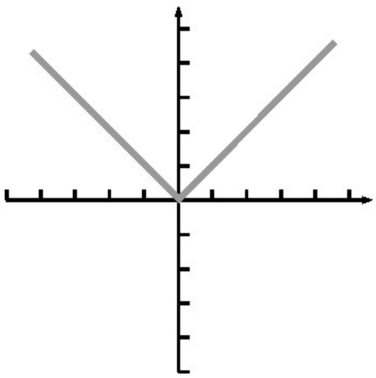
$y = f(x+1) = -2x - 3$, $y = |f(x)| = |-2x - 1|$, $y = f(|x|) = -2|x| - 1$, $y = |f(x) - 1| = |-2x - 2|$

$f(x) = -x + 4$, $y = -f(x) = x - 4$, $y = f(-x) = x + 4$, $y = f(x) - 1 = -x + 3$, $y = f(x+1) = -x + 3$,

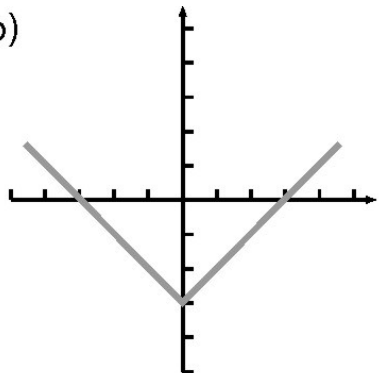
$y = |f(x)| = |-x + 4|$, $y = f(|x|) = -|x| + 4$, $y = |f(x) - 1| = |-x + 3|$

2.5.2 Dla każdego z poniższych wykresów funkcji opisz, jak go otrzymano, przesuwając odpowiedni wykres funkcji $y = |x|$. Podaj wzór funkcji o danym wykresie.

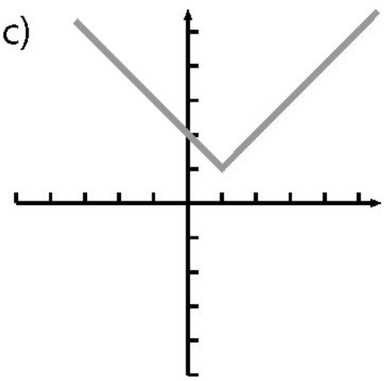
a)



b)



c)



Odpowiedź:

a) $y = |x|$ przesunięto o wektor [1,0] y = $|x-1|$

b) $y = |x|$ przesunięto o wektor [0,–3] $y = |x| - 3$

c) $y = |x|$ przesunięto o wektor [3,1] $y = |x-3| + 1$

2.5.3 Zadanie 1 i 2 rozwiąż za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

2.6 Funkcja liniowa i jej własności

Teraz nauczę się:

- Zapisywać funkcję w postaci ogólnej i kierunkowej;
- Interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- Określać monotoniczność funkcji na podstawie jej wzoru i wykresu;
- *Badać monotoniczność funkcji w zależności od parametru.

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są współczynnikami liczbowymi, nazywamy **funkcją liniową**. **Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.**

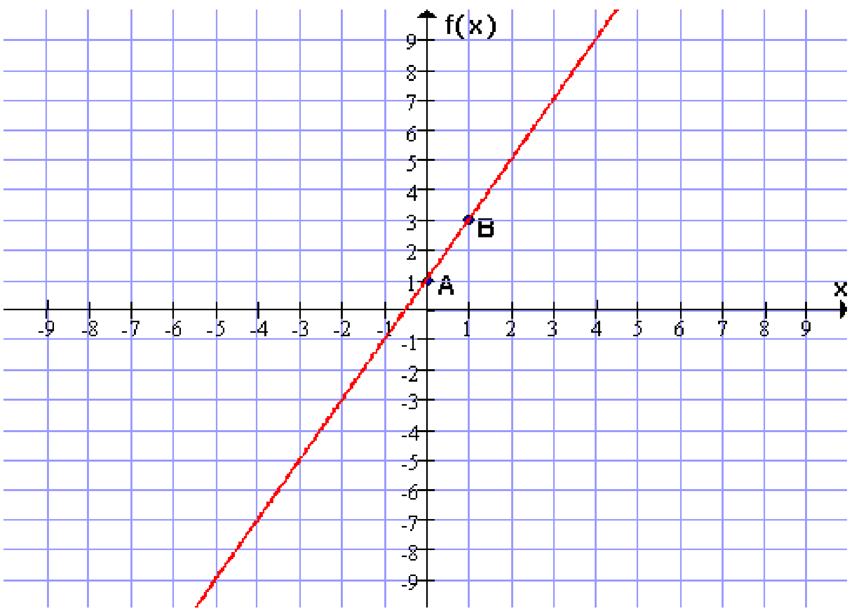
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej.**

Wykresem każdej funkcji liniowej **jest linia prosta**. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty.

Przykład 1

Narysuj prostą: $y = 2x + 1$ Jeżeli $x = 0$, to $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{A}\,(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ Jeżeli $x = 1$, to $y = 3 \rightarrow \boldsymbol{B}\,(\mathbf{1}, \mathbf{3})$

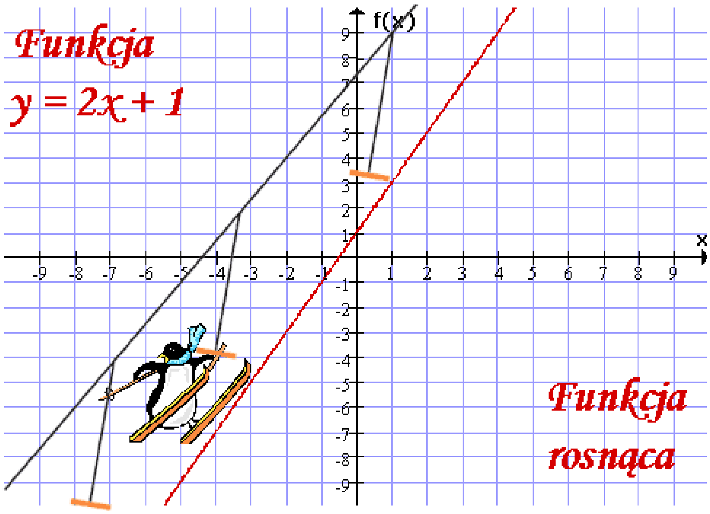


Rysunek 2-6. Wykres funkcji y = 2x + 1

Monotoniczność funkcji liniowej

Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz większe wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **rosnąca**.

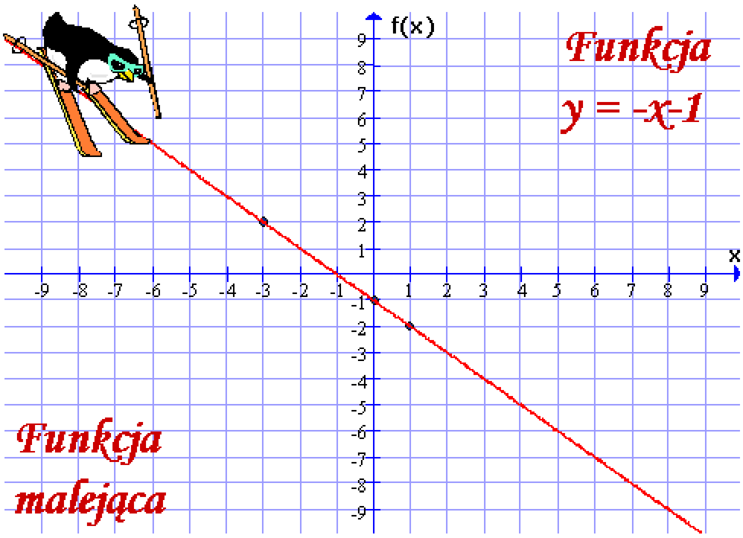
Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy rosnącą, jeżeli $a > 0$.



[9]

Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz mniejsze wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **malejąca**.

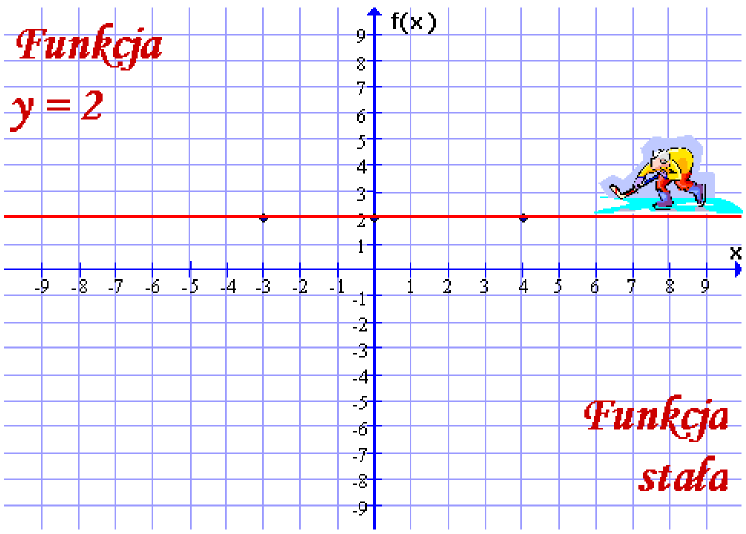
Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy malejącą, jeżeli $a < 0$.



- Jeżeli dla wszystkich argumentów funkcja przyjmuje taką samą wartość, to o takiej funkcji mówimy, że jest **stała**.

Jeżeli $a = 0$, to funkcja $y = ax + b$ jest stała. Jej wzór przyjmuje postać: $y = b$.

9 https://sites.google.com/site/wlasnoscfunkcji/monotoniczno%C5%9B%C4%87.

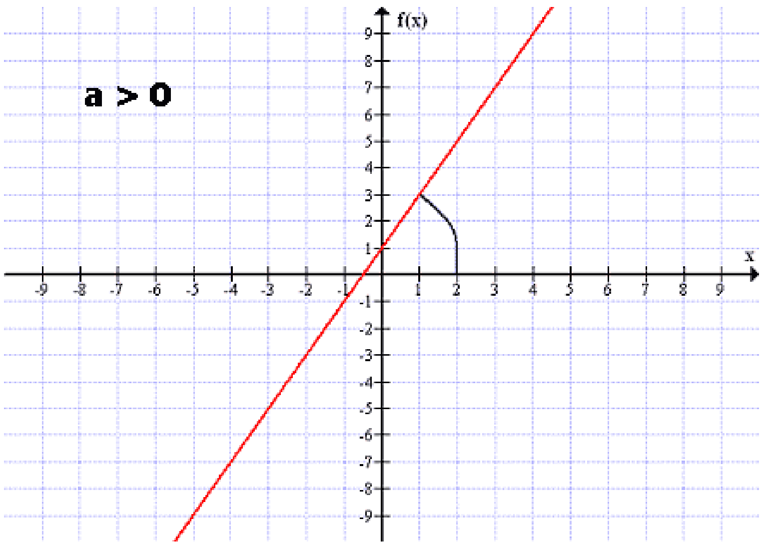


Współczynnik *a*

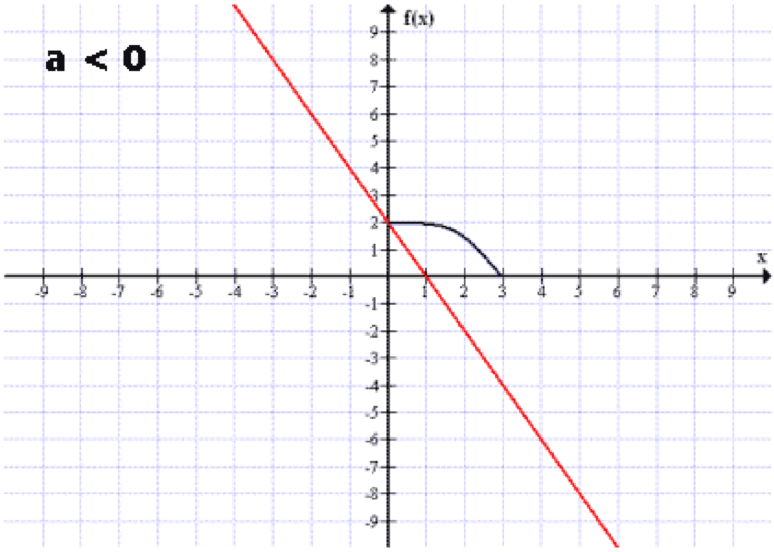
Współczynnik *a* mówi o kierunku prostej, która jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$. Liczba *a* jest więc nazywana **współczynnikiem kierunkowym** funkcji $y = ax + b$.

Liczba *a* to współczynnik kierunkowy prostej $a = tg\,\alpha$. Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

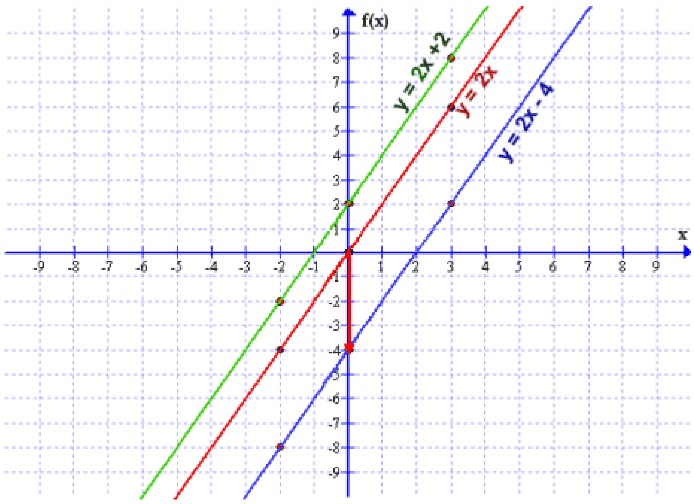
- Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, kąt nachylenia do osi x jest wyrażony jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Jeżeli liczba *a* jest dodatnia, to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem ostrym (im większa jest liczba *a*, tym kąt ten jest większy):



Jeżeli liczba *a* jest ujemna, kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem rozwartym:



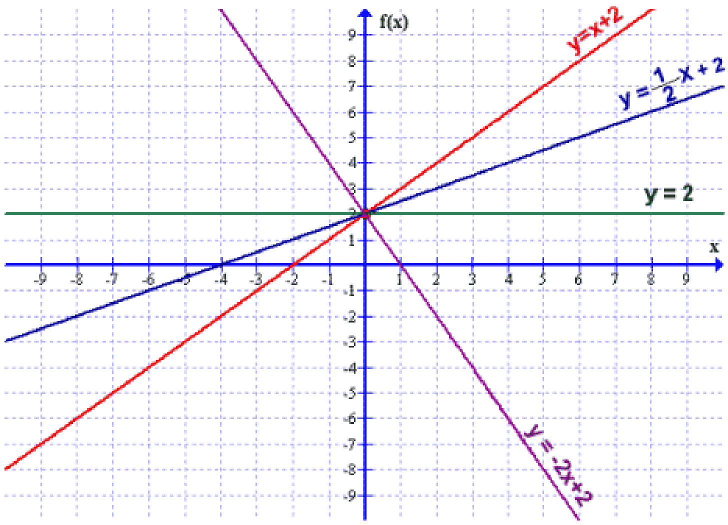
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Współczynnik b

Współczynnik *b* mówi o tym, w którym punkcie wykres funkcji $y = ax + b$ przecina oś OY, czyli wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych (0,b).

Wykres



Miejsce zerowe – jest to taki argument (x), dla którego wartość (y) wynosi 0.

UWAGA!!!!

Funkcja stała nie ma miejsca zerowego z wyjątkiem funkcji $y = 0$, która ma ich nieskończenie wiele.

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy miejsca zerowego, podstawiając za y wartość 0, i z tak powstałego równania liczymy x (czyli miejsce zerowe).

Przykład 2

$$y = 2x - 4$$

Podstawiamy za y wartość 0 i rozwiązujemy równanie.

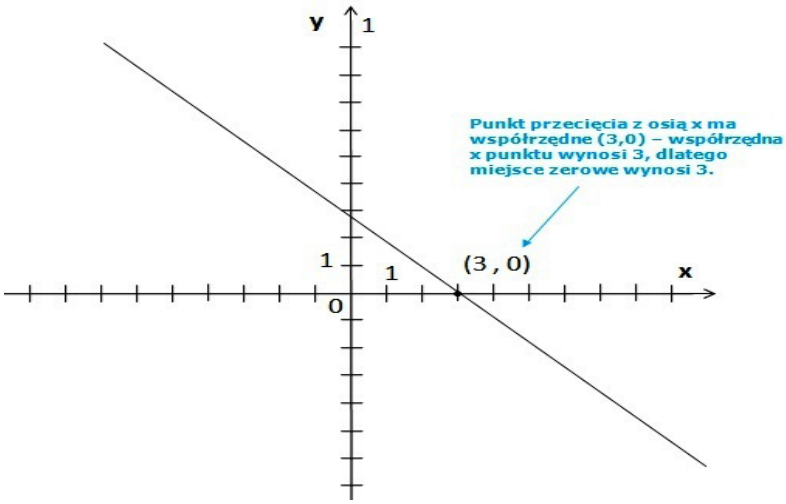
$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 \qquad /\div(-2)$$

$$x = 2$$

Piszemy: Miejsce zerowe funkcji wynosi: $x = 2$

Mając do dyspozycji wykres, szukamy punktu przecięcia wykresu z osią odciętych (x), i odczytujemy wartość argumentu (x), który jest miejscem zerowym.



Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y - ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.

Przykład 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 4$

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$$

Funkcja ma miejsce zerowe równe: $x_0 = 2$

Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

– **punktu przecięcia z osią x** – podstawiając za y wartość 0, i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe znajduje się w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład 4

$y = 4x + 12$

$0 = 4x + 12$

$-4x = 12 \ / \div (-4)$

$x = -3$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: (–3,0)

– **punktu przecięcia z osią y** – podstawiając za x wartość 0, i obliczając y.

Przykład 5

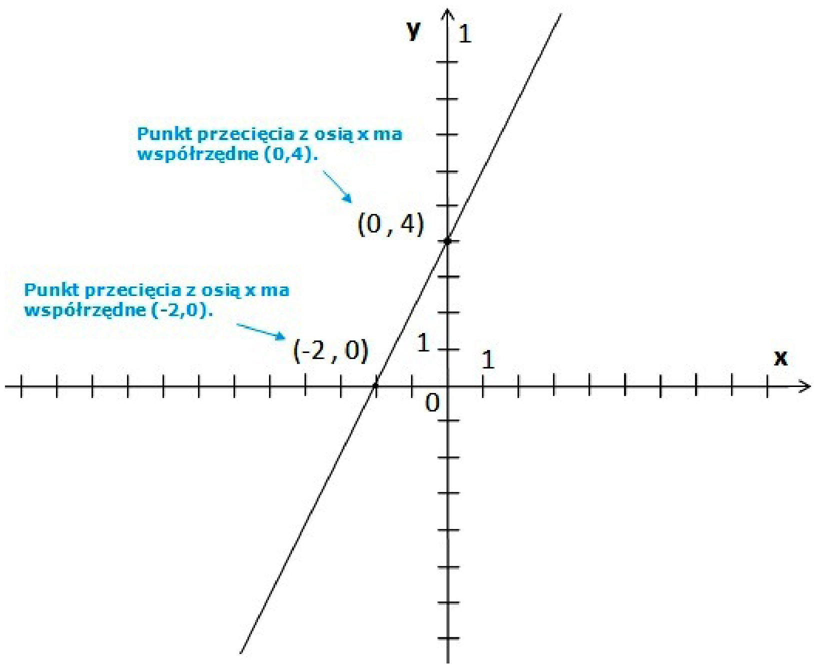
$y = 4x + 12$

$y = 4 \cdot 0 + 12$

$y = 12$

Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: (0,12)

Mając do dyspozycji wykres, odczytujemy współrzędne obu punktów z wykresu.



Punkt przecięcia z osią x: $(-2{,}0)$ Punkt przecięcia z osią y: $(0{,}4)$

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji i wykonać obliczenia po obu stronach powstałego równania, aby sprawdzić, czy lewa strona będzie równała się prawej. Jeżeli tak jest, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, znaczy to, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

Przykład 6

Sprawdź, czy punkty: A = (1,2); B = (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.

Sprawdzamy osobno oba punkty:

$$y = 3x - 1$$

Podstawiamy punkt (1,2)

$$2 = 3 \cdot 1 - 1$$
$$2 = 2$$
$$L = P$$

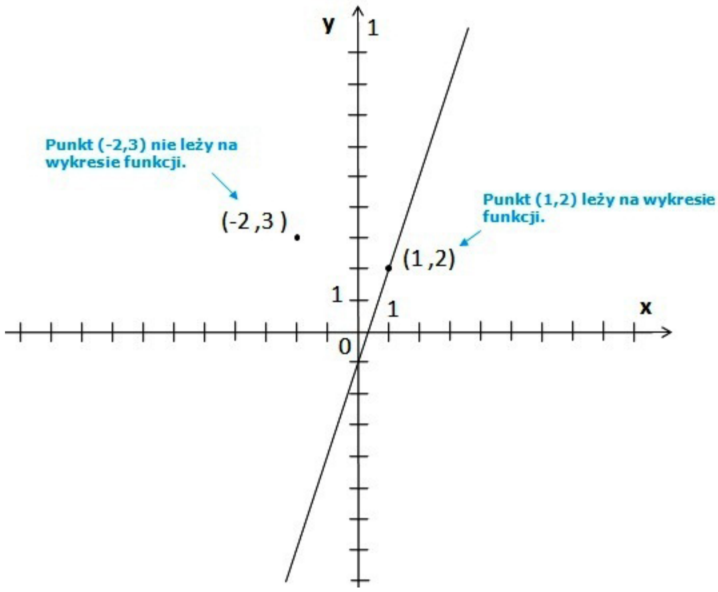
Podstawiamy punkt (-2,3)

$$3 = 3 \cdot (-2) - 1$$
$$3 \neq -7$$
$$L \neq P$$

Punkt (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt (–2,3) nie należy. Mając do dyspozycji wykres funkcji, wystarczy znaleźć dany punkt w układzie współrzędnych – jeżeli leży on na prostej, która jest wykresem funkcji, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, znaczy to, że nie należy.

Przykład:

Sprawdź, czy punkty: (1,2); (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.



Punkt A = (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt B = (–2,3) nie należy.

ZADANIA

2.6.1 Podane równanie sprowadź do postaci kierunkowej:

a) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$

b) $x + y - 4 = 0$

c) $2x + 2y + 3 = 0$

d) $x + 2y = 12$

e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

f) $\frac{x-1}{2}+\frac{y+2}{3}=2$

Odpowiedź:

a) $y = 3x + 0{,}5$,

b) $y = -x + 4$,

c) $y = -x - 1\frac{1}{2}$,

d) $y = -\frac{1}{2}x - 6$,

e) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$

2.6.2 Które spośród punktów A, B, C, D należą do wykresu funkcji: $\mathbf{f_1}(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $\mathbf{f_2}(x) = \frac{x+1}{2}$:

a) A = (2,1) B = $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ C = (–2,1), D = (0, 2),

b) A = (1,1), B = (2,2), C = (–3,–1), D = $(2, \frac{3}{2})$

Odpowiedź:

A ∈ f_1, D ∈ f_1, A ∈ $f_2(x)$, C ∈ $f_2(x)$, D ∈ $f_2(x)$

2.6.3 Narysuj wykresy funkcji, a następnie:

- określ monotoniczność,
- oblicz miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- sprawdź, czy punkt A = (1,3) należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x - 1$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = -9x - 3$

d) $f(x) = 0{,}4x + 0{,}1$

e) $f(x) = \frac{-x+2}{2}$

f) $f(x) = \frac{2-2x}{-4}$

g) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$

h) $f(x) = \frac{1-6x}{3} + 2x$

Odpowiedź:

a) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y (0, –1); nie należy

b) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4}, 0)$; z osią y $(0, \frac{1}{2})$; nie należy

c) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{3}$; z osią x $(-\frac{1}{3}, 0)$; z osią y (0,–3); nie należy

d) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{10})$; nie należy

e) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = 2$; z osią x (2,0); z osią y (0,1); nie należy

f) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y $(0, -\frac{1}{2})$; nie należy

g) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -4$; z osią x (–4,0); z osią y (0,–2); nie należy

h) funkcja stała; miejsce zerowe brak; brak; brak; nie należy

2.6.4 Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-1)x+1$

b) $f(x) = (-m+2)x-4$

c) $f(x) = (m-\frac{\sqrt{3}}{2})x-\sqrt{3}$

Odpowiedź: a) $m > \frac{1}{2}$, b) $m < 2$, c) $m > \sqrt{\frac{3}{2}}$

2.6.5 Przez które ćwiartki przechodzą proste $\mathbf{y_1 = 2x + 1}$ **i** $\mathbf{y_2 = \frac{1}{2}x - 5}$? Która z prostych tworzy z osią OX większy kąt? W której ćwiartce przecinają się proste?

Odpowiedź: y_1 przez I, II, III; y_2 przez I, III, IV

2.7 Zastosowanie funkcji do opisywania zjawisk z życia codziennego

Teraz nauczę się:

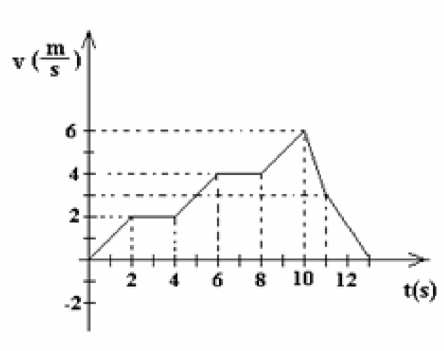
Wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Funkcje wykorzystywane są w wielu dziedzinach życia, np.:

- W badaniach statystycznych – kurs walut.
- W balistyce – zapisywanie toru lotu pocisku.
- Do obliczania maksymalnej prędkości samochodu, z jaką bezpiecznie może pokonać dany zakręt, oraz wiele innych.

W fizyce często do opisywania zjawisk z życia codziennego korzystamy z wykresów funkcji. Analizując dane przedstawione na wykresie, najpierw sprawdzamy, jakie wielkości fizyczne i ich jednostki zostały na nim zaznaczone.

Przykład 1



Jak zinterpretować dane na powyższym wykresie? Zauważ, że mamy do czynienia z dwiema wielkościami: szybkością i czasem. Co się dzieje z szybkością ciała w poszczególnych przedziałach czasu?

Na początku ciało spoczywało, następnie przez 2 sekundy jego szybkość wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu (ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym), przez kolejne 2 sekundy ciało poruszało się ze stałą prędkością, od 4 do 6 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 6 do 8 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne dwie sekundy jego szybkość wzrastała, następnie ciało zmieniło zwrot prędkości (zawraca) i przez pierwszą sekundę porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 11 do 12 sekundy jest to również ruch jednostajnie przyspieszony. Obliczmy przyspieszenie ciała w poszczególnych przedziałach czasu. Wiedząc, że przyspieszenie jest równe ilorazowi zmiany szybkości ciała do zmiany czasu a = $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Z wykresu odczytujemy:

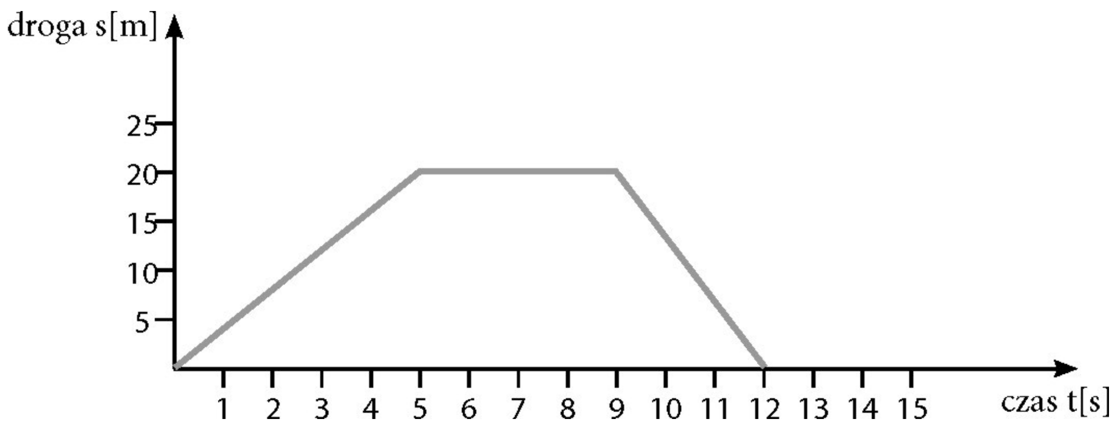
$v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 4, v_5 = 4, v_6 = 6,$

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11, t_7 = 12,$ stąd

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{2m/s}{2s} = 1\frac{m}{s^2}$ i analogicznie

$a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, a_4 = -3\frac{m}{s^2}, a_5 = -1{,}5\frac{m}{s^2}.$

Przykład 2



Przeanalizujmy podobny wykres. Zauważmy, jakie wielkości fizyczne mamy teraz zaznaczone na wykresie? Przez pięć pierwszych sekund droga rosła proporcjonalnie do czasu, to znaczy, że ciało poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne 4 sekundy ciało spoczywa, a przez następne 3 sekundy zawraca, poruszając się ze stałą prędkością. Obliczmy $v_1,\ v_2,\ i\ v_3$ Z lekcji fizyki pamiętasz, że:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, stąd\ v_1 = 4\frac{m}{s}, v_2 = 0\frac{m}{s}, v_3 = -6\frac{2}{3}\frac{m}{s}.$$

Przykład 3

Zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita a wyrażoną w stopniach Celsjusza, jest zależnością liniową.

a) Znajdź tę zależność, wiedząc że $32°F = 0°C$, a $5°F = -15°C$.

b) 22 lipca w San Diego temperatura o godzinie 12^{00} była o $12{,}5°C$ wyższa niż temperatura o godzinie 6^{00}. Wyraź wzrost temperatury w stopniach Fahrenheita.

Jeżeli F jest temperaturą w Fahrenheitach, a C w Celsjuszach, to wiemy, że $F = aC + b$. Stałe a i b wyznaczymy z podanych informacji.

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a(-15) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 32 \\ 15a = b - 5 = 27 \Rightarrow a = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$

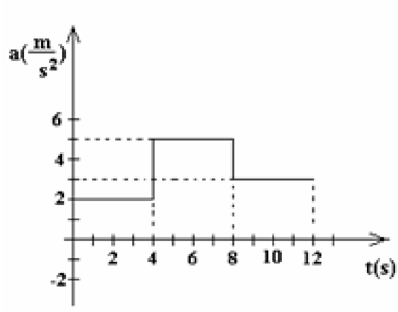
Skorzystamy ze wzoru z podpunktu a).

$$F_2 - F_1 = T_F = \frac{9}{5} C_2 + 32 - \frac{9}{5} C_2 - 32 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$$

Odpowiedź: $22{,}5°F$

ZADANIA

2.7.1 Na podstawie poniższego wykresu dokonaj analizy ruchu ciała i sporządź wykres zależności $v(t)$, $s(t)$.

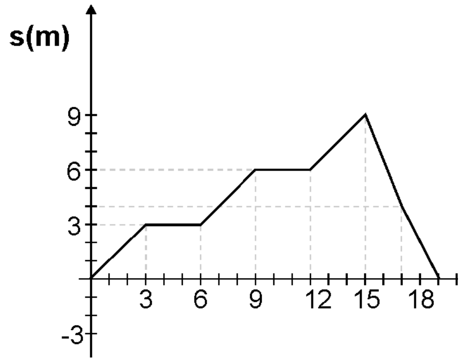


Odpowiedź:

Przez pierwsze dwie sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym a = 2 $\frac{m}{s^2}$, przez kolejne z przyspieszeniem a = 5 $\frac{m}{s^2}$, od 8 do 12s z przyspieszeniem a = 3 $\frac{m}{s^2}$.

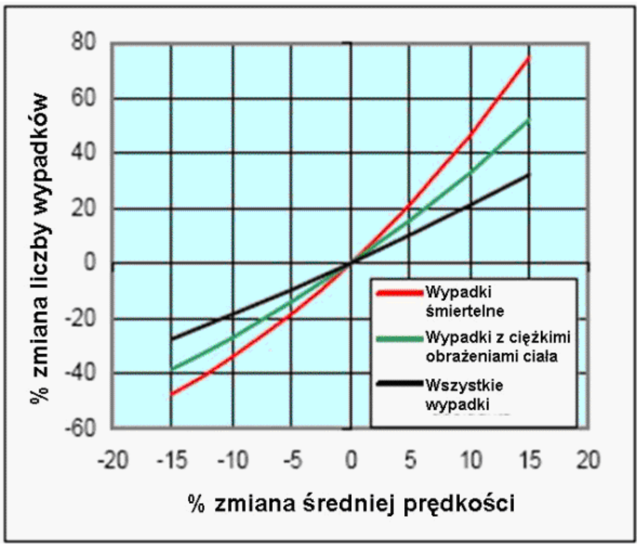
Podstawiamy do wzoru $v = at$ kolejne sekundy czasu i obliczamy odpowiadające jej szybkości.

2.7.2 Opisz zachowanie ciała na podstawie wykresu.



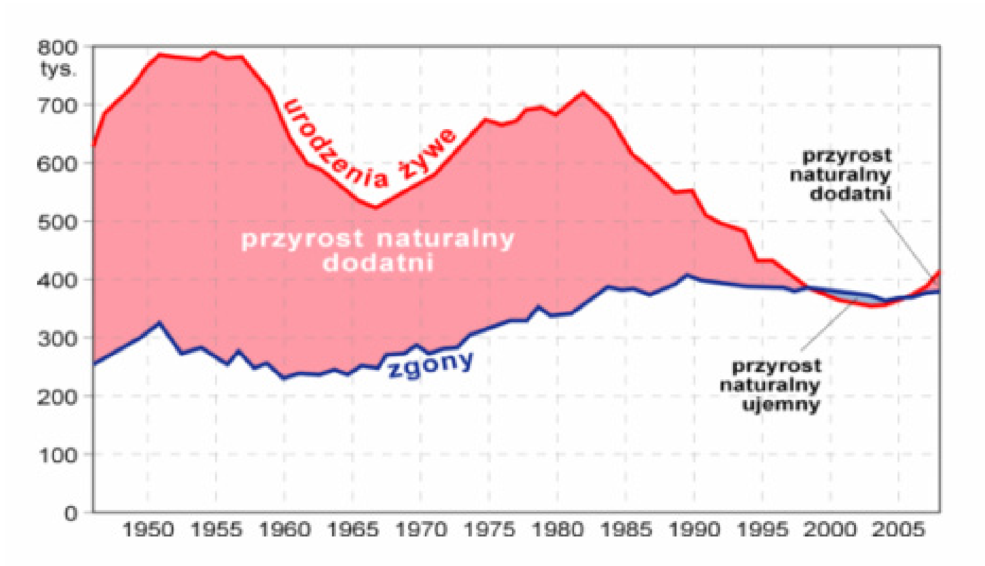
Odpowiedź: Przez pierwsze 3s ciało porusza się ruchem jednostajnym, następnie spoczywa, i tak na zmianę, w 15s zawraca, dalej poruszając się ruchem jednostajnym, ale z inną szybkością.

2.7.3 Jakie informacje można odczytać z poniższego wykresu? Wyciągnij odpowiednie wnioski.



Zależność między zmianami średniej prędkości jazdy a liczbą wypadków

2.7.4 Wykres przedstawia, jak zmieniał się przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1950 – 2005.[10]



Przyrost naturalny w Polsce w latach 1946 – 2008

10 (www.wiking.edu.pl/article.php?id=269, 25.03.2013).

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak zmieniała się liczba urodzeń w latach 1950 – 2005?
2. W którym roku liczba urodzeń była największa, a w którym najmniejsza?
3. Jak w tym czasie kształtowała się liczba zgonów?
4. W którym roku przyrost naturalny ludności był najwyższy, a w którym najniższy?

Informacja do zadania 2.6.5:

Prędkość rzeki zależy od takich czynników, jak: głębokość rzeki, nachylenie terenu, rodzaj podłoża tworzącego dno i brzegi rzeki.

Większość rzek zwalnia pod koniec swojego biegu, ponieważ nachylenie terenu, czyli spadek wody, znacznie się zmniejsza. Gdyby przeanalizować przekrój rzeki, można by zauważyć, że prędkość różni się w różnych obszarach, najmniejsza jest na dnie rzeki, a największa na jej powierzchni. Powodem tego jest tarcie pomiędzy przepływającą wodą a powierzchnią dna rzeki.

Przy brzegach rzeki, szczególnie na zakrętach, przepływ wody jest najszybszy z powodu siły odśrodkowej.

Zwykle prędkość V wyrażamy w $\left[\frac{m}{s}\right]$ metrach na sekundę, natomiast współczynnik rodzaju podłoża oznaczamy k i wyrażamy w $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$. Poziom wody oznaczamy T i wyrażamy w metrach, do wyznaczenia prędkości używamy również współczynnika nachylenia, spadku terenu S.

Prędkość przepływu wody obliczamy ze wzoru: $V = k \cdot \sqrt[3]{T^2} \cdot \sqrt{S}$

Wskazówka: współczynnik nachylenia S = (różnica poziomów)/(długość rzeki)

2.7.5 Dwie stacje pomiarowe Berthelsdorf i Nossen znajdują się na rzece Mulde. Pomiędzy tymi stacjami średni poziom wody wynosi 35 cm. Wysokość nad poziomem morza w Berthelsdorf wynosi 376,61 m, a w Nossen – 203,76 m. Długość rzeki na tym odcinku wynosi 42,3 km. Dno rzeki jest wyboiste i wartość współczynnika rodzaju podłoża wynosi 30 $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$.

a) Oblicz prędkość rzeki na tym odcinku.

b) Raz na 20 lat poziom wody rzeki Mulde osiąga 2,5 m. Oblicz, jaką wówczas prędkość osiąga rzeka.

c) 30 sierpnia 2008 roku po długim okresie deszczowym prędkość rzeki osiągnęła wartość 1,68 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Oszacuj, jak wysoki był wówczas poziom wody.

2.7.6 Prędkość rzeki można również wyrazić w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Tak wyrażona, daje nam informację, jak dużo wody przepływa w ciągu sekundy. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki pomiarów poziomu wody w rzece i jej przepływu.

Data	Godzina	Poziom wody w [cm]	Przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
26.10	01:00	41	2,04
	07:00	39	1,81
	13:00	40	1,92
	19:00	40	1,92
27.10	01:00	40	1,92
	07:00	40	1,92
	13:00	41	2,04
	19:00	44	2,42
28.10	01:00	45	2,55
	07:00	45	2,55
	13:00	41	2,04
	19:00	41	2,04
29.10	01:00	41	2,04
	07:00	41	2,04
	13:00	53	3,78
	19:00	56	4,31
30.10	01:00	73	8,07
	07:00	83	10,9
	13:00	103	19,3
	19:00	106	20,7
31.10	01:00	93	14,8
	07:00	81	10,3
	13:00	75	8,6
	19:00	71	7,56
01.11	01:00	70	7,31
	07:00	66	6,36

a) Przedstaw na wykresie zależność prędkości przepływu od poziomu wody w dniach od 30 października (godz. 01:00) do 31 października (godz. 01:00).

b) Za pomocą jakiej funkcji można opisać tę zależność?

c) Za pomocą programu Exel lub kalkulatora graficznego znajdź wzór funkcji, która w przybliżeniu opisuje tę zależność.

d) Wykorzystując otrzymaną funkcję, oszacuj, ile będzie wynosić prędkość przepływu w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$, jeśli poziom wody osiągnie 2,5 m.

e) Przedstaw chronologicznie na wykresie prędkość przepływu wody w dniach od 30 października (godz. 01:00) do 31 października (godz. 01:00). Wyraź przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$.

f) Jaką wartość wyraża obszar zawarty pomiędzy wykresem funkcji a osią x?

g) Oblicz pole powierzchni tego obszaru (wyznacz pole powierzchni tego obszaru na różne sposoby).

h) Wywnioskuj, jak będzie się zmieniać wartość współczynnika *k*, jeżeli dno rzeki będzie bardziej gładkie.

i) Wyjaśnij, dlaczego prędkość przepływu nie jest liniowo zależna od poziomu wody.

j) Wykorzystanie rzek jako drogi wodnej dla statków wymaga czasem pogłębiania koryta rzeki. Jakie może to mieć konsekwencje dla środowiska?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

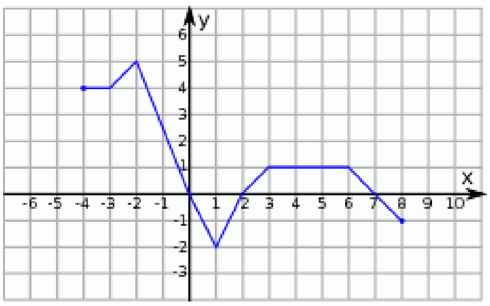
1. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:[11]

a) $-1/3$ b) -3 c) $1/3$ d) 3

2. Zbiorem wartości funkcji f jest:[12]

a) $< -2,5 >$ b) $< -4,8 >$ c) $< -1,4 >$ d) $< 5,8 >$

3. Korzystając z wykresu funkcji *f*, wskaż nierówność prawdziwą:



a) $f(-1) < f(1)$ b) $f(1) < f(3)$ c) $f(-1) < f(3)$ d) $f(3) < f(0)$

4. Wskaż m, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała:

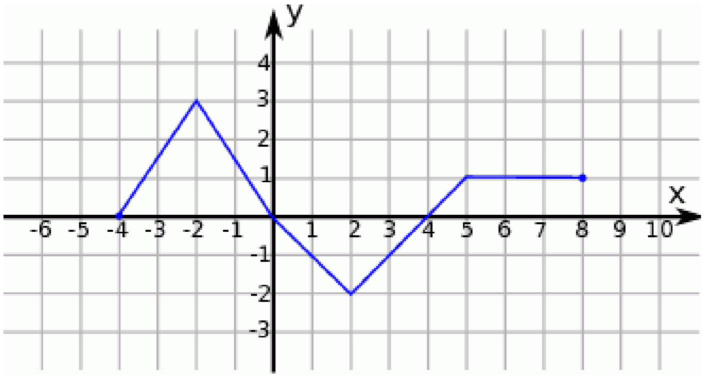
a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = -1$

5. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:[13]

a) $-2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Odczytaj z wykresu i zapisz:

11 Arkusz próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.
12 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2010.
13 Zadania: 5, 6 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2010.



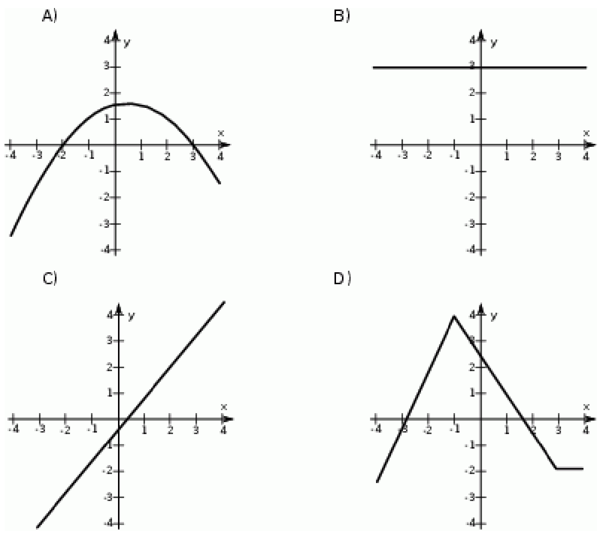
a) zbiór wartości funkcji f

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Wówczas spełniony jest warunek:[14]

a) $f(x) > 1$ b) $f(2) = 2$ c) $f(3) < 3$ d) $f(4) = 4$

8. Wskaż wykres funkcji, która w przedziale <–4,4> ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



9. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:[15]

a) $m = 6$ b) $m = 1,5$ c) $m = 1$ d) $m = 5$

10. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

a) 4 b) –2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

11. Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt A = (2,–4), gdy:[16]

a) $m = 5$ b) $m = -5$ c) $m = 1$ d) $m = -4$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

a) $x < 6$ b) $x > 6$ c) $x > -6$ d) $x < -6$

14 Zadania: 7, 8 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
15 Zadania: 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2010.
16 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2009

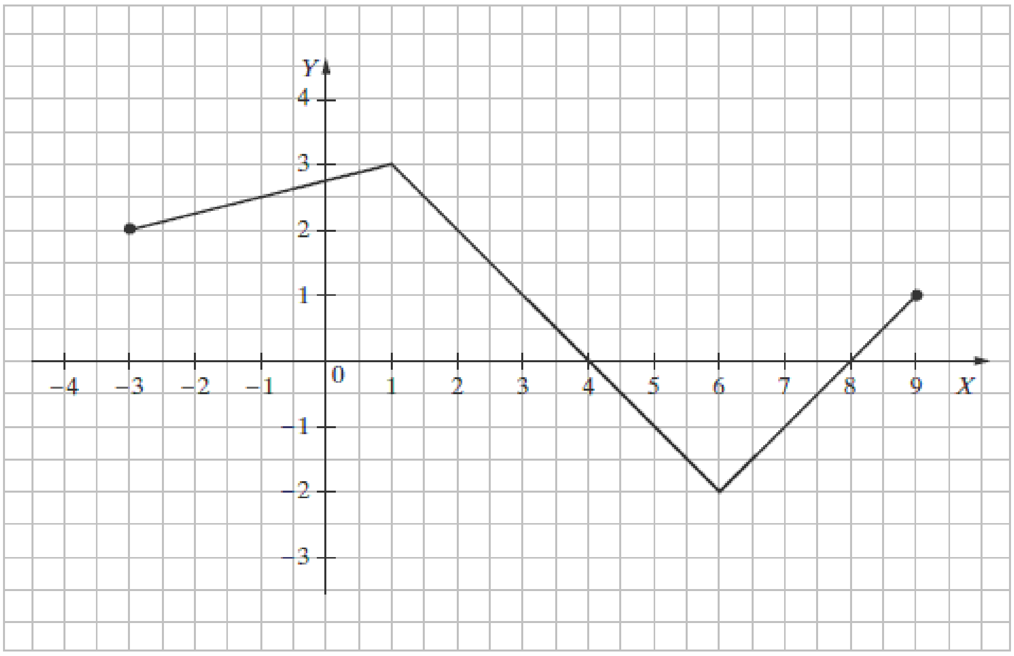
13. Dziedziną funkcji $F(x) = \begin{cases} -2x+1, & gdy\ x \le 3 \\ -x, & gdy\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$ jest zbiór:[17]

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle 1,4\rangle$ c) $\langle 0,4\rangle$ d) $(-\infty, 1)$

14. Funkcja liniowa $f(x) = (m+2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

a) $m < -2$ b) $m < 2$ c) $m > -2$ d) $m > -4$

15. Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

a) $\langle 0,4\rangle$ b) $\langle 1,6\rangle$ c) $\langle 0,6\rangle$ d) $\langle -2,4\rangle$

16. Punkt P = $(a + 1,2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

a) 0 b) –1 c) 2 d) 1

17. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 2)x - 11$ jest rosnąca dla:

a) $m > 2$ b) $m > 0$ c) $m < 13$ d) $m < 11$

18. Funkcja liniowa $f(x) = 3ax - b$ jest malejąca, natomiast funkcja liniowa $g(x) = bx - 3a$ jest rosnąca. Wykresy funkcji f i g przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Oblicz odciętą punktu A oraz wyznacz wzory funkcji f i g wiedząc, że ich wykresy są prostopadłe. [18]

19. Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & dla\ x \in (0,3\rangle \\ \sqrt{3}-3 & dla\ x \in (3,10 \end{cases}$$

17 Zadania: 13, 14, 15, 16, 17 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011.
18 Zadania: 18, 19 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności kwadratowe

3.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$, bo można przekształcić do postaci: $3x^2 - 1 = 0$, gdzie a = 3, b = 0, c = −1
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$, gdzie a = 5,b = 3, c = 7
- $8x = 3x^2 + 1$, bo można przekształcić do postaci $3x^2 - 8x + 1 = 0$, gdzie a = 3, b = −8, c = 1
- $x^2 + 5x = 0$, gdzie a = 1, b = 5, c = 0

Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + c = 0$, gdy $a \neq 0$, b = 0 i c ≠ 0

- $x^2 - 16 = 0$

  $x^2 = 16$

  $x = 4 \text{ lub } x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$

  $-3x^2 = 6 / \div (-3)$

  $x^2 = -2$ sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x-2)^2 = 4(1-x)$

  $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$

  $x^2 = 0$

  $x = 0$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu $ax^2+bx=0$, gdy $a\neq 0, b\neq 0$ i $c=0$

- $5x^2-3x=0$
  $x(5x-3)=0$
  $x=0$ lub $5x-3=0$
  $x=0$ lub $x=\frac{5}{3}$
- $-5x-4x^2=0$
  $-x(5+4x)=0$
  $-x=0$ lub $5+4x=0$
  $x=0$ lub $4x=-5$
  $x=0$ lub $x=-\frac{5}{4}$

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2+16=0$	b) $-\frac{1}{3}x^2+3=0$	c) $2x^2+8=0$
d) $2x^2-5x=0$	e) $-3x^2+6x=0$	f) $-x^2-2=0$
g) $x(x-3)=0$	h) $(x+2)(x-4)=0$	i) $\frac{1}{2}x^2=0$
j) $5x2-7x=0$	k) $-3x2+1=0$	l) $5x2=1$
m) $-x2-3=0$	n) $9x2+\frac{x}{3}=0$	o) $x2=(1-x)(1+x)$

Odpowiedź:

a) $x=-4$ lub $x=4$	b) $x=-3$ lub $x=3$	c) brak rozwiązań
d) $x=0$ lub $x=\frac{5}{2}$	e) $x=0$ lub $x=2$	f) brak rozwiązań
g) $x=0$ lub $x=3$	h) $x=-2$ lub $x=4$	i) $x=0$
j) $x=0$ lub $x=\frac{7}{5}$	k) $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	l) $x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$
m) brak rozwiązania	n) $x=-\frac{1}{27}$ lub $x=0$	o) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

Teraz nauczę się:

- obliczyć wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne.

Rozwiążmy równanie typu $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$.

Aby rozwiązać równanie $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), najpierw obliczamy wartość wyrażenia

$\Delta = b^2 - 4ac$

- jeśli $\Delta \rangle 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{-b}{2a}$;
- jeśli $\Delta \langle 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole Δ i δ to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga mała litera delta. Z symbolem δ spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

Przykład 1

- $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4\cdot 6\cdot 5 = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$$x_1 = \frac{-(-13)-7}{2\cdot 6} = \frac{13-7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-13)+7}{2\cdot 6} = \frac{13+7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$x_1 = \dfrac{1}{2}$ lub $x_2 = \dfrac{5}{3}$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

- $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 6\cdot 2 = -23$

Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3

➢ $$6x^2+4x+\frac{2}{3}=0$$

$$\Delta=4^2-4\cdot6\cdot\frac{2}{3}=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{4}{2\cdot6}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ PROWADZĄCE DO RÓWNAŃ KWADRATOWYCH.

Równanie typu $ax^4+bx^2+c=0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym.**

Przykład 4

$x^4+6x^2+5=0$ $(x^2)^2+6x^2+5=0$

Podstawiam $x^2=t$ w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać:

$t^2+6t+5=0$

$a=1$ $b=6$ $c=5$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=6^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16$

$\Delta>0$ wyznaczamy dwa miejsca zerowe:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow t_1=\frac{-6-\sqrt{16}}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow t_1=\frac{-6+\sqrt{16}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Wracamy do podstawienia $x^2=t$

$x^2=-5 \quad \vee \quad x^2=-1$

$x\in\emptyset \qquad\qquad x\in\emptyset$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań $=\emptyset$)

Przykład 5

Rozwiąż równania:

$$5x - \frac{15}{x} = 10$$

Rozwiązanie

Założenie : $x \neq 0$

$$Df : x \in R/\{0\}$$

$$5x - \frac{15}{x} = 10 / \cdot x$$

$$5x^2 - 15 = 10x$$

$$5x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)$$

$$\Delta = 400$$

$$\sqrt{\Delta} = 20$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 20}{10} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 20}{10} = 3$$

$$\frac{8}{4 - x} = \frac{x}{x - 4}$$

Założenie: $4 - x \neq 0$ i $x - 4 \neq 0$

$x \neq 4$ i $x \neq 4$

$$Df : x \in R/\{4\}$$

$$8 \cdot (x - 4) = (4 - x) \cdot x$$

$$8x - 32 = 4x - x^2$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$$

$$\sqrt{\Delta} = 12$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 12}{2} = -8$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

$x_2 \notin Df$, stąd rozwiązaniem jest $x_1 = -8$

ZADANIA

3.2.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2-2=0$
b) $x\sqrt{3}-\sqrt{2}x^2=0$
c) $x(x-3)=0$
d) $(x-4)(x+2)=0$
e) $(x-2)^2-9=0$
f) $16-(x+3)^2=0$
g) $(3x+2)^2=25$
h) $x^2+6x+5=0$
i) $x^2-10x+25=0$
j) $x^2+2x-120=0$
k) $12x^2+7x-12=0$
l) $3x^2-7x+2=0$
m) $9x^2-24x-20=0$
n) $-3x^2+1{,}5x+54=0$

Odpowiedź:

a) brak rozwiązania
b) $x=0$ lub $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $x=0$ lub $x=3$
d) $x=-2$ lub $x=4$
e) $x=-1$ lub $x=5$
f) $x=-7$ lub $x=1$
g) $x=-\frac{7}{3}$ lub $x=1$
h) $x=-5$ lub $x=-1$
i) $x=5$
j) $x=-12$ lub $x=10$
k) $x=-\frac{4}{3}$ lub $x=\frac{3}{4}$
l) $x=\frac{1}{3}$ lub $x=2$
m) $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\frac{10}{3}$
n) $x=-4$ lub $x=\frac{9}{2}$

3.2.2 Rozwiąż równania:

a) $(3x-2)^2+2=6$
b) $3(4x-1)^2+1=28$
c) $2(5x-2)^2+5=13$
d) $x(3x-5)=12$
e) $(2x-5)^2+(x+4)^2=41$
f) $\frac{x(x-2)}{5}-3x=2x^2+\frac{x(x+1)}{3}$
g) $(x-2)(x+5)-(x-7)(x+1)=(x+2)(x-3)$
h) $3x^2-6x-24=0$
i) $4x^2-20x+25=0$
j) $x^2-2x+4=0$
k) $4x^2-4x-1=0$
l) $3x^2+2x+2=3x+4x^2-3$

Odpowiedź:

a) 0 lub $\frac{4}{3}$
b) $-\frac{1}{2}$ lub 1
c) 0 lub $\frac{4}{5}$
d) $-\frac{4}{3}$ lub 3
e) 0 lub $\frac{12}{5}$
f) $-\frac{7}{4}$ lub 0
g) $5-2\sqrt{7}$ lub $5+2\sqrt{7}$
h) -2 lub 4
i) $\frac{5}{2}$
j) brak rozwiązań
k) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
l) brak rozwiązań

3.2.3 Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+3}{x-1}=0$

b) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$

c) $\frac{x+1}{4x}=\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x-3}{6x}=\frac{2}{2x+3}$

e) $\frac{5-x}{5x}=\frac{2}{5x}$

f) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{-3}{3x-1}$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$

b) $x=-1$ $x=3$

c) $x=2-\sqrt{5}, x=2+\sqrt{5}$

d) $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}, x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=-5-5\sqrt{2}, x=-5+5\sqrt{2}$

f) równanie sprzeczne

3.2.4 Rozwiąż równania:

a) $x^4-4=0$

b) $x^4-4x^2=0$

c) $x^4-x^2-2=0$

d) $x^4-5x^2+4=0$

e) $x^4-4x^2+4=0$

f) $x^4+2x^2-3=0$

g) $x^4-x^2+1=0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą $x^2=t$, dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe.)

Odpowiedź:

a) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

b) 0,–2,2

c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

d) –1,1,–2,2

e) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

f) –1,1

g) brak pierwiastków rzeczywistych

3.3 *Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

TWIERDZENIE[19]

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ ma rozwiązania x_1, x_2, to: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Dowód

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4a\ \right)}{4a^2}=\frac{4a}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

UWAGA!

Wzory Viete'a mają szerokie zastosowanie przy **rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.**

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

Jeżeli...

- $\Delta < 0$ – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta = 0$ – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta \geq 0$ – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta > 0$ – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

$x_1 \cdot x_2 < 0$ to są one różnych znaków,

$x_1 \cdot x_2 > 0$ – to mają one takie same znaki,

$x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ – to są one dodatnie,

$x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$ – to są one ujemne.

Przykład 1 Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji $y=x^2+5x+6$.

Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości a, b, c do wzorów:

19 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 19.02.2013.

$$x_1 + x_2 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_2 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba –5, a iloczynem liczba 6?". Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb –2 i –3.

Rozwiązaniami są więc: $x_1 = -2$ i $x_2 = -3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

3.3.1 Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a, oraz zastosuj je tak, aby uzyskać:

a) kwadrat sumy pierwiastków,

b) sumę kwadratów pierwiastków,

c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków,

d) kwadrat różnicy pierwiastków,

e) sumę sześcianów pierwiastków.

Odpowiedź:

a) $(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$

d) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}$

e) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$
$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right)$

3.3.2 Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$,

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2 - 300x - 200 = 0$,

c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2 - x + 21 = 0$.

Odpowiedź:

a) $-\frac{115}{203}$ b) 90400 c) $\frac{43}{441}$

Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m = 0$ ma:

a) dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$

Z założenia $m^2 + 4m > 0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$

a) jeden pierwiastek

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$

Z założenia $m^2 + 4m = 0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m = -- 4$, $m = 0$

nie ma pierwiastków

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$

Z założenia $m^2 + 4m < 0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m \in (-4;0)$

ZADANIA

3.3.3 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a) $-2x^2 + 3mx - 1 = 0$ b) $mx^2 + 2x + m = 0$

Odpowiedź:

a) $m = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $m = -1$

3.3.4 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 1 = 0$ ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: $m \in \left(-\infty; 2\sqrt{2}\right)$

3.3.5 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Odpowiedź: $m \in (-1;2)$

3.3.6 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Odpowiedź: brak rozwiązań

3.3.7 Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$ jest najmniejsza?

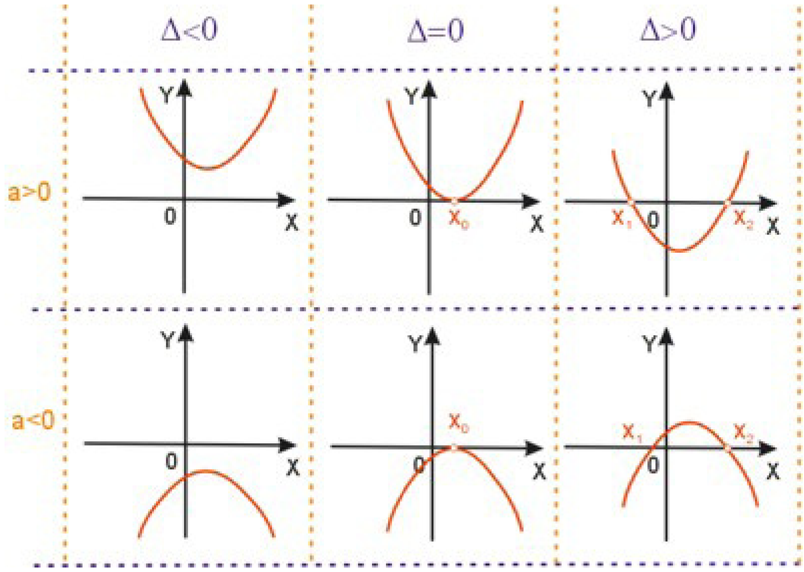
Odpowiedź: $m = 4$

3.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego.** Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika *a* oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

Przykład 1[20]

$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Krok 1. Wyznaczamy miejsca zerowe, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia.
Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

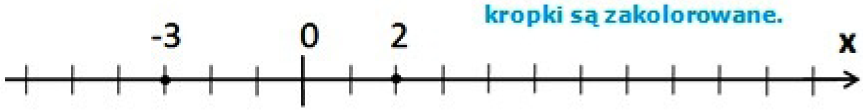
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2+10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2-10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Krok 2. Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

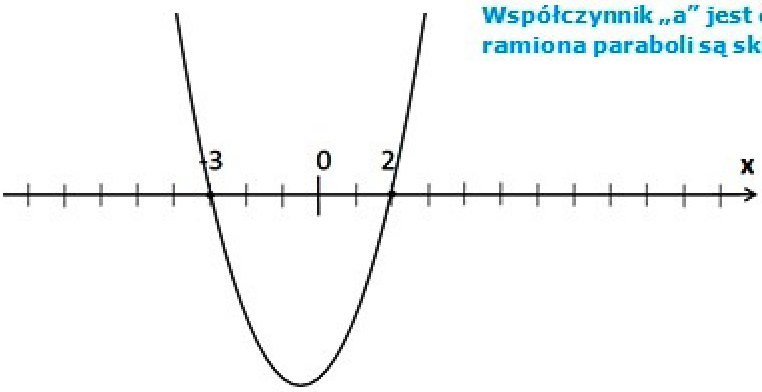
- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

Ze względu na znak nierówności (≥)
kropki są zakolorowane.



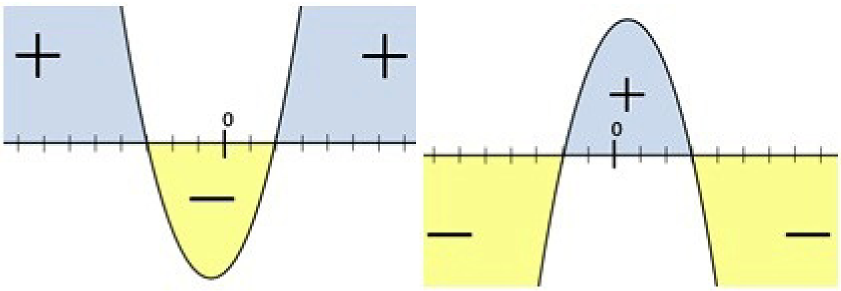
- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istoty jest jedynie kierunek ramion paraboli.

20 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.



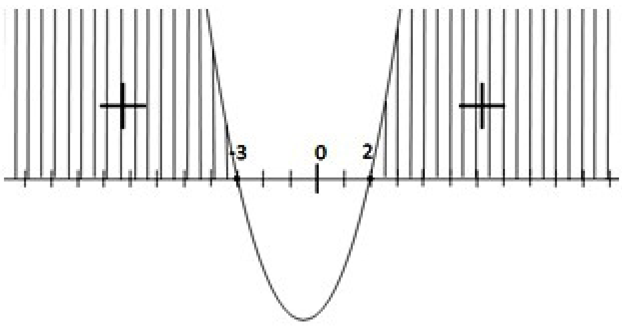
Współczynnik „a" jest dodatni (2), dlatego ramiona paraboli są skierowane w górę.

Krok 3. Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zacznijmy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę). Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy" (<) lub „mniejszy lub równy" (≤), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy" (>) lub „większy lub równy" (≥), zakreślamy obszar dodatni. W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem: ≥, dlatego zakreślamy obszar dodatni:

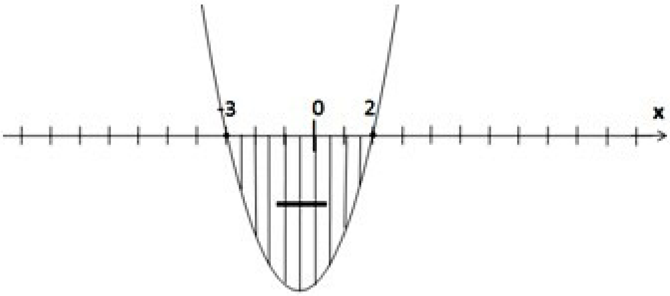


Krok 4. Odczytujemy rozwiązanie. Jest nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in \left(-\infty,\ -3\right\rangle \cup \left\langle 2,\ \infty\right)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę (≤), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



$x \in \langle -3,\ 2 \rangle$

INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI…

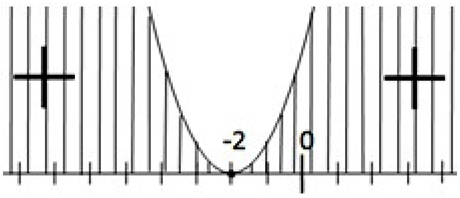
Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie posiadać go wcale. Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

- Z jednym miejscem zerowym – gdy ramiona paraboli są skierowane w górę

Przykłady

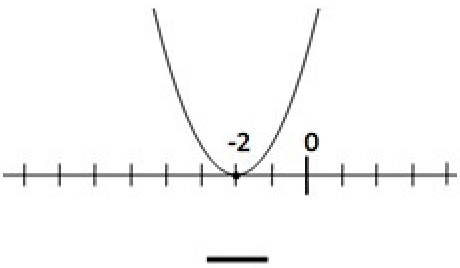
Znak nierówności ≥



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$x \in R$

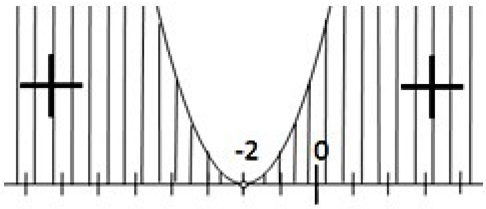
Znak nierówności ≤



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

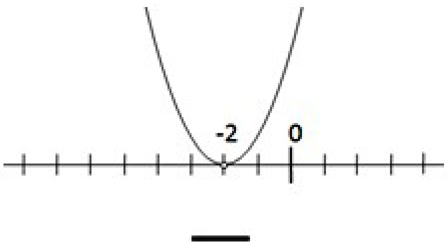
Znak nierówności >



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

Znak nierówności <



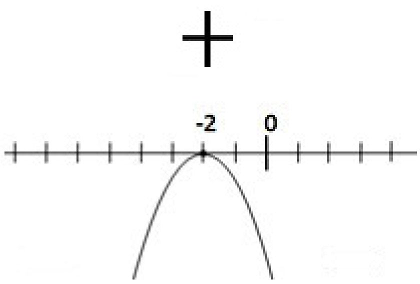
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

- gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

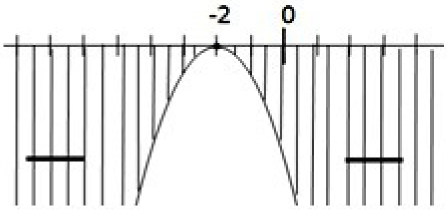
Znak nierówności ≥



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

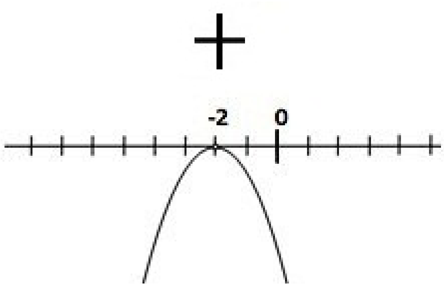
Znak nierówności ≤



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero (–2), także należy do rozwiązania.

$x \in R$

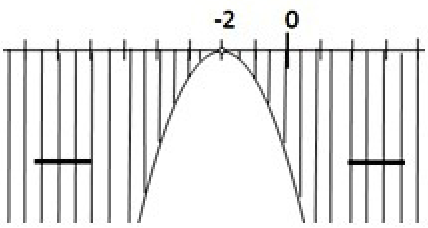
Znak nierówności >



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

Znak nierówności <



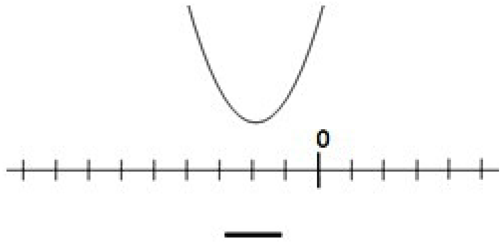
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

- Bez miejsc zerowych
- gdy ramiona paraboli są skierowane w górę

Przykłady:

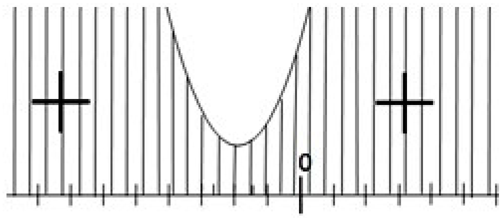
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in \varnothing$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$

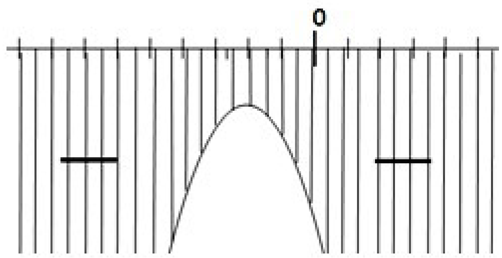


Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.
$x \in R$

- gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

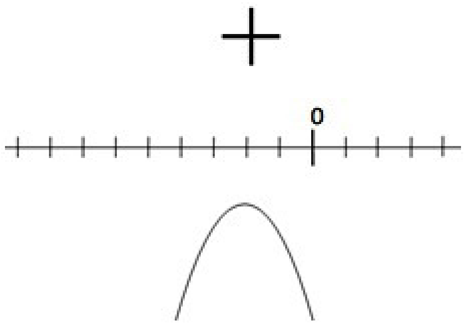
Przykłady:

Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.
$x \in R$

Znak nierówności ≥ lub >



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in \varnothing$

ZADANIA

3.4.1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)\rangle 0$

b) $x(x+4)\langle 0$

c) $(x-7)(x+6) \geq 0$

d) $2x^2 - 8x \leq 0$

e) $x^2 - 16\rangle 0$

f) $x^2 \leq 4$

g) $8x^2 \geq 24$

h) $48\langle x^2$

i) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

j) $x^2 + 12x + 24\rangle 0$

k) $x^2 + 12x + 24\langle 0$

l) $x^2\langle -4(x+1)$

m) $(2x-6)^2 \leq 4x - 13$

n) $(2x-6)x \geq 0$

o) $(x-1)(x+3) > 0$

p) $(2-x)(2x-3) \leq 0$

q) $-3x^2 - 8x > 0$

r) $6x - 2x^2 \leq 0$

s) $3x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \leq 0$

t) $(x-3)(3x-4) - (x-3)(x+2) > 0$

u) $(x+5)^2 + (x+5)(x-3) \leq 0$

v) $(3x-4)(x+2) > (x+2)(x-1)$

w) $(4x-5)(x+4) > (x+4)^2$

x) $9x^2 + 6x + 4 < 3$

y) $-\frac{3}{4}x^2 + x + 4 \leq 10$

z) $5x - 10 < 2x^2$

Odpowiedź:

a) $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

b) $(-4,0)$

c) $\left(-\infty,-6\right\rangle \cup \left\langle 7,+\infty\right)$

d) $\langle 0,4\rangle$

e) $(-\infty,-4) \cup (4,+\infty)$

f) $\langle -2,2\rangle$

g) $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{3},+\infty\right)$

h) $\left(-\infty,-4\sqrt{3}\right) \cup \left(4\sqrt{3},+\infty\right)$

i) $\left(-\infty,-2\right\rangle \cup \left\langle 4,+\infty\right)$

j) $\left(-\infty,-6-\sqrt{3}\right) \cup \left(-6+2\sqrt{3},+\infty\right)$

k) $\left(-6-2\sqrt{3},-6+2\sqrt{3}\right)$

l) $\varnothing$

m) $\frac{7}{2}$

n) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

o) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

p) $(-\infty,\frac{3}{2}>\cup<2,\infty)$

q) $(0,4)$

r) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

s) $\left\langle-\frac{1}{6},1\right\rangle$

t) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

u) $\langle-5,-1\rangle$

v) $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},\infty)$

w) $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

x) brak rozwiązania

y) $x\in R$

z) $x\in R$

3.4.2 Znajdź wszystkie liczby całkowite x, spełniające nierówność:

a) $(x-1{,}2)(x-3{,}4)\langle 0$

b) $-x^2+3{,}6x\geq 0$

c) $x^2-6{,}25\langle 0$

d) $2x^2-0{,}6x-16{,}2\langle 0$

Odpowiedź:

a) $\{2,3\}$

b) $\{0,1,2,3\}$

c) $\{-2,-1,0,1,2\}$

d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

3.4.3 Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności, oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a) $x^2-1\rangle 0,\ x^2+3x\leq 0$

b) $9x^2+9x+2\langle 0,\ x^2-9x+2\langle 0$

c) $x2\geq 9$; $(x+7)(x-3)(5x+1)>0$

Odpowiedź:

a) $\langle-3,-1\ );\ x\in(\ -\infty,0\ \rangle\cup(1,+\infty)$

b) zbiór pusty; $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\setminus\{-7\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[21] Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa:

a) $-\frac{7}{2}$ b) $-\frac{7}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{4}$

21 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 19.02.2013..

Odpowiedź: c

2.[22] Rozwiąż nierówność: $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in < -2,4 >$

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 4$ jest:

a) (–2;2) b) (–∞;–2) ∪ (2;∞) c) (–∞;2) d) <–2;2>

Odpowiedź: a

4. Uzasadnij, że równanie $x^2 + (b - 2)x - 2b = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej b ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

5.[23] Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-3,3)$

6.[24] Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x + 6) < 0$ jest:

a) (–6;0) b) (0;6) c) (–∞;–6) ∪ (0;∞) d) (–∞;0) ∪ (6;∞)

Odpowiedź: a

7. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,1 > \cup < 7,\infty)$

8.[25] Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-2,5)$

9.[26] Liczba wszystkich rozwiązań równania $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

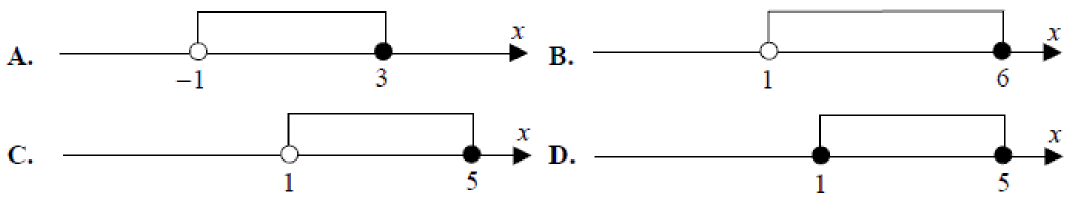
Odpowiedź: d

10. Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,-\frac{1}{2} > \cup < 2,\infty)$

11.[27] Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x - 1)(x - 5) \leq 0$ i $x > 1$.

22 Zadanie 2,3,4: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 19.02.2013..
23 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012–listopad.pdf, 19.02.2013.
24 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.
25 Zhttp://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf,19.02.2013.
26 http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 19.02.2013.
27 Zadania 11,12: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013.



Odpowiedź: d

12. Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

13.[28] Do zbioru rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) < 0$, należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

Odpowiedź: d

14. Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \le 0$.
Odpowiedź: $x \in \langle -1, 2 \rangle$

15.[29] Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 4 i 1 lub –4 i –1

16. Wartość k, dla której jeden z pierwiastków równania $x^2 + 9x + k = 0$ jest równy –3, wynosi:
a) –6 b) –18 c) 18 d) 6
Odpowiedź: c

17. Równanie $2x^2 - 4x - 3 = 0$:
a) nie ma rozwiązań,

b) ma jedno rozwiązanie,

c) ma dwa rozwiązania,

d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: c

18. Rozwiązaniem równania $2(x-2)^2 = (x-2)(x+3)$ jest:

a) $x = -2$ i $x = -1$

b) $x = 7$

28 Zadania 13,14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013..
29 Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń..

c) $x = 2$ i $x = 7$

d) $x = 1$ i $x = 2$

Odpowiedź: c

19. Podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich spełniających nierówność $(3-x)(3+x) > 0$ ma:

a) dwa elementy,
b) skończoną liczbę elementów,
c) co najmniej 4 elementy,
d) nieskończenie wiele elementów.

Odpowiedź: a

20. Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x-1)^2 \geq 5(x-1)$ jest:

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle -4, 1\rangle$ c) $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty)$ d) $\langle 1, \infty)$

Odpowiedź: b

21. Rozwiązaniem równania $x^2 + x = (x+1)^2 - 7(x+2)$ jest liczba:

a) $\frac{15}{8}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $-\frac{13}{6}$

Odpowiedź: d

22. Ile liczb pierwszych zawiera zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej $(x+1)(x-10) < 0$?

a) 5 b) 4 c) więcej niż 10 d) 6

Odpowiedź: b

23. Kwadrat piątej części stada małp pomniejszonej o 3 schował się w jaskini. Jedna małpa pozostała na drzewie. Ile małp liczy stado?

Odpowiedź: 50 małp

24. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

Odpowiedź: $a \in (3, \infty)$

25. Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

Odpowiedź: $x \in \{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$

26. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: –9, –7, –5 lub 5, 7, 9

3.5 *Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego

Teraz nauczę się rozwiązywać układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań metodą algebraiczną:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podstawiamy wyznaczone y z pierwszego równania do drugiego równania i otrzymujemy:

$$2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 / \div 2$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy $\Delta = 9$, a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego: $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone x_1 i x_2 do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 1 \quad = -1$$

$$y_2 = 2x_2 + 1 \quad = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji: $y = 2x^2 + 20x + 47$ i $y = 2x + 1$ w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

ZADANIA

3.5.1 Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną.

a) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7{,}2 \end{cases}$

Odpowiedzi:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

b) brak rozwiązania

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -6\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -7\frac{1}{2} \end{cases}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[30] Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

2.[31] Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 *k*m mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: 28 km

3.[32] W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Odpowiedź: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m × 8 m, a w drugim hotelu 35 m × 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m × 12 m, a w drugim hotelu 25 m × 14 m.

4.[33] Turysta pokonał pieszo trasę o długości 30 km z miejscowości *A* do miejscowości *B* ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $v = 6$ km/h, $t = 5$h

5.[34] Z miast A i B, odległych o 330 km, wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km, licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Odpowiedź: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

---

30 Zadanie 1: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.02.2013.
31 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
32 Zadanie 3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
33 Zadanie 4: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 20.02.2013.
34 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 20.02.2013.

6.[35] Miasto *A* i miasto *B* łączy linia kolejowa o długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąć pospieszny pokonał trasę z miasta *A* do miasta *B*.

Odpowiedź: Pociąg pospieszny pokonał tę trasę w 2,5 godziny.

7.[36] Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440 zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż planowano, co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Podaj:

a) ilu uczniów pojechało na wycieczkę;

b) jaki był całkowity koszt wycieczki?

Odpowiedź: 45 osób, koszt dla uczestnika to 32 zł

8. Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań). W sumie rozwiązała 448 zadań. Jeśli rozwiązywałaby codziennie o 4 zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o 2 dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

Odpowiedź: 16 dni, 28 zadań

35 Zadanie 6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.

36 Zadania 7-8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

4 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych
- współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

4.1 Jednomian kwadratowy

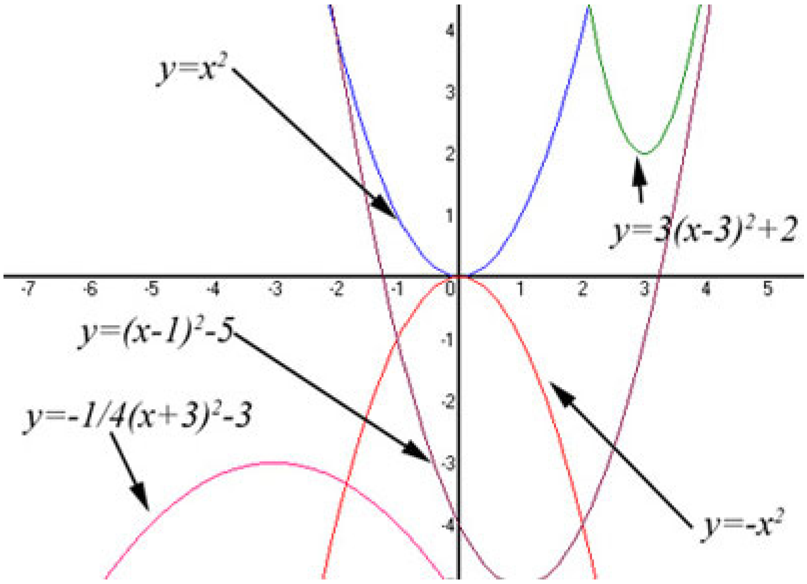
Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**.[37]

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Gdy współczynnik a jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry. Gdy współczynnik a jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

37



Przykłady funkcji kwadratowych:

$y = 5x^2 + 9x - 4$

$y = -x^2 - x$

$y = 2x^2 - 7$

$y = x^2$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy). Jest to funkcja w postaci $y = ax^2$. Jest to więc przypadek, w którym $a \neq 0$ i $b = c = 0$.

Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$y = x^2$

$y = -x^2$

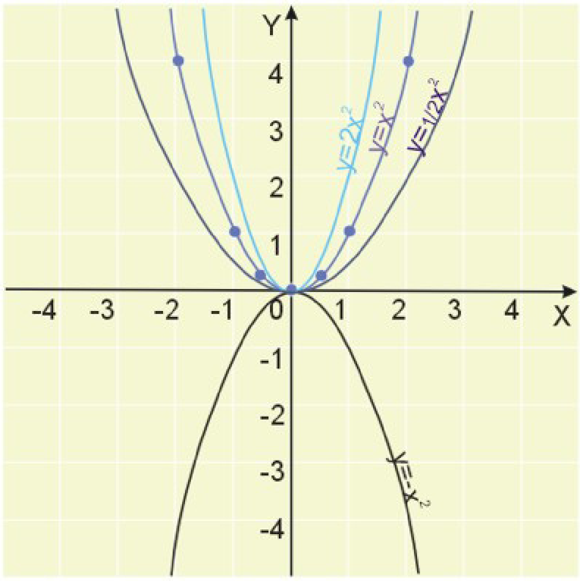
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie a jest dowolną liczbą.

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

x	–2	–1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	–4	–1	0	–1/4	–1	–4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2

Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji:



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**. Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik $a > 0$, oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik $a < 0$.
- Im większy jest współczynnik a, tym parabola jest „węższa".
- Parabola posiada jeden **wierzchołek** w punkcie (0,0).
- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór $\langle 0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz $(-\infty;0\rangle$, gdy $a < 0$.
- Oś OY jest **osią symetrii** paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.
- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale $(-\infty;0)$ i rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz rośnie w przedziale $(-\infty;0)$ i maleje w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a < 0$.
- Gdy $a < 0$, funkcja osiąga wartość największą (**maksimum**) w punkcie $x = 0$ równe 0, natomiast dla $a > 0$ funkcja osiąga wartość najmniejszą (**minimum**) w punkcie $x = 0$ równe 0.
- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe, gdy $x_0 = 0$.

ZADANIA

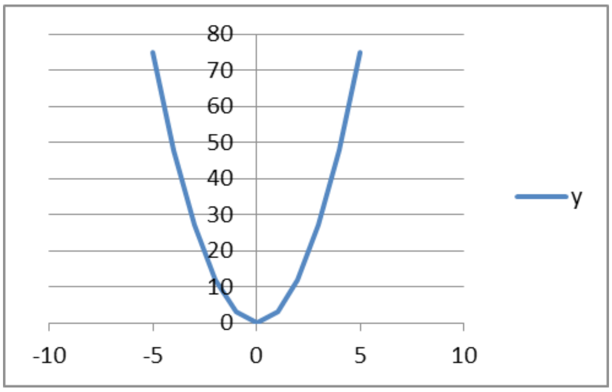
4.1.1 Sporządź tabelkę wartości funkcji i naszkicuj wykres funkcji f:

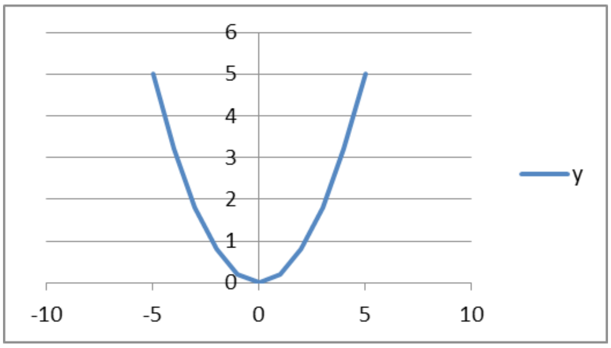
a) $f(x) = 3x^2$

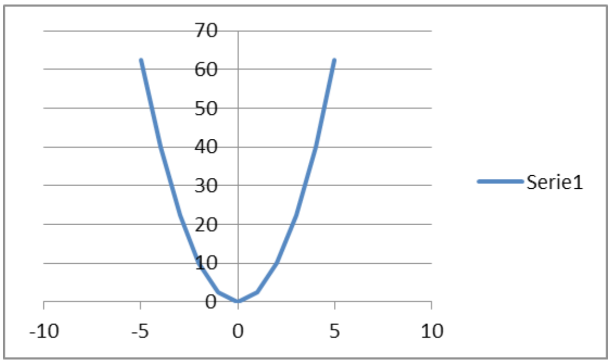
b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

c) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

Odpowiedź:

a) 

b) 

c) 

4.1.2 Sprawdź, czy punkt K należy do paraboli $y = 4x^2$:

a) K = (4,32) b) K = (–2,16) c) $K = \left(-\frac{1}{4},1\right)$ d) $K = \left(\frac{1}{2},1\right)$

Odpowiedź:

a) nie należy b) należy c) nie należy d) należy

4.1.3 Omów następujące własności,

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x)=-x^2$

c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$

Odpowiedź:

a) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

b) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

c) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

d) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

4.2 Parabola w układzie współrzędnych

Teraz nauczę się interpretować współczynniki występujące w wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników a, b, c.

➡ Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

1. znaku współczynnika a, który warunkuje skierowanie ramion paraboli,

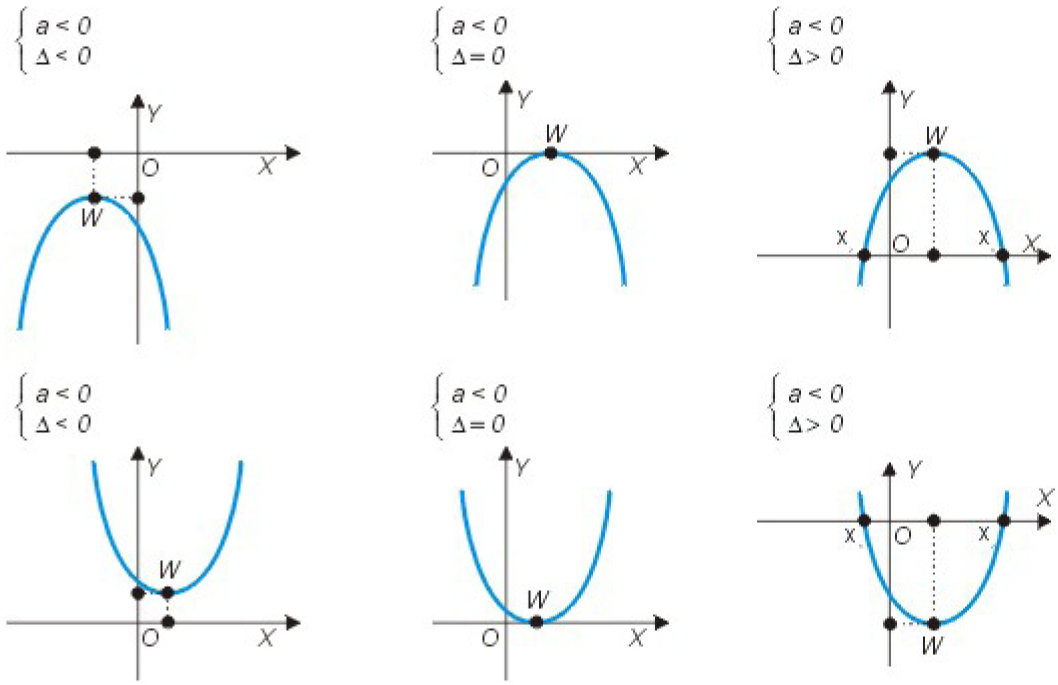
2. wartości wyróżnika Δ, która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią OX:

dla $\Delta < 0$ parabola leży pod ($a < 0$) lub nad ($a > 0$) osią OX, nie ma z osią OX punktów wspólnych,

dla $\Delta = 0$ parabola jest styczna do osi OX,

dla $\Delta > 0$ parabola przecina oś OX w dwóch punktach.

Rożne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



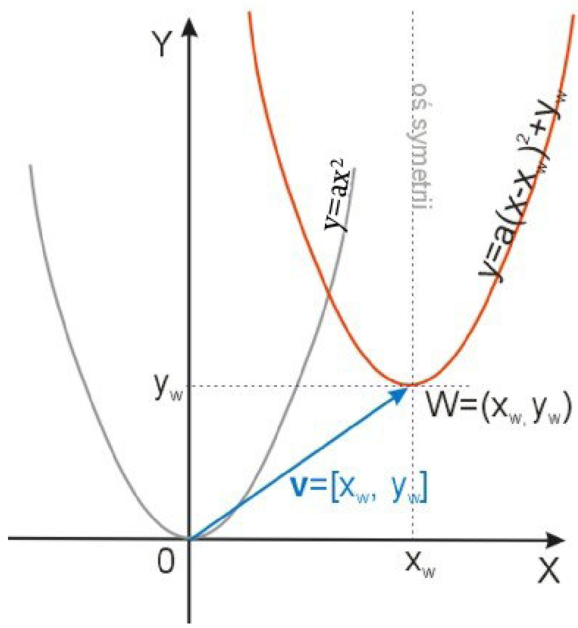
Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$ jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [x_w, y_w]$, przy czym:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$$

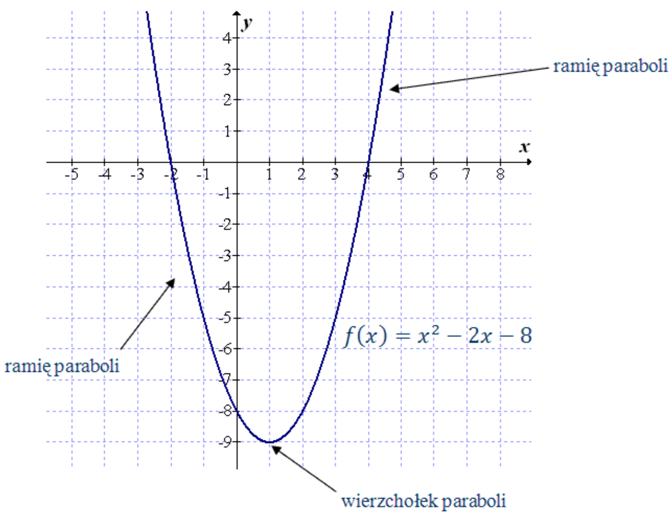
W przypadku dodatniego współczynnika a, mamy:



Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.
- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli $a > 0$, w dół w przypadku gdy $a < 0$.
- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.
- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli $\Delta > 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta = 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$.
- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funkcja przyjmuje minimum dla $a > 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Funkcja przyjmuje maksimum dla $a < 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Gdy $a > 0$, funkcja maleje w przedziale $x = (-\infty; \frac{b}{2a})$ i rośnie w przedziale $y = (\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Gdy $a < 0$, funkcja rośnie w przedziale $x = (-\infty; \frac{b}{2a})$ i maleje w przedziale $y = (\frac{b}{2a}; +\infty)$.

ZADANIA



4.2.1 Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x2 - 2x - 8$ (wykres funkcji powyżej).

a) Dziedzina: …

b) Zbiór wartości: ZW = …

c) Miejsca zerowe: …

d) Współrzędne wierzchołka: W = …

e) Oś symetrii to: …

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in$ …

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in$ …

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne: …

i) Monotoniczność: – funkcja jest rosnąca w przedziale … – funkcja jest malejąca w przedziale …

Odpowiedź:

a) Dziedzina: D = R.

b) Zbiór wartości: ZW = ⟨–9; +∞).

c) Miejsca zerowe: funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 4$.

d) W = (1,–9)

e) Oś symetrii: $x = 1$

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (4 +\infty)$.

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in (-2; 4)$.

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne: (0, –8).

i) Monotoniczność: funkcja jest niemonotoniczna (jest jedynie monotoniczna przedziałami) – funkcja jest rosnąca w przedziale $x \in (1, \infty)$, – funkcja jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty, 1\ \infty)$.

4.2.1 Naszkicuj wykres jednomianu funkcji $f(x)$, a następnie przesuwając równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile – jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a) $y = x^2$, $\vec{u} = [0,3]$

b) $y = -x^2$, $\vec{u} = [-1,0]$

c) $y = 2x^2$, $\vec{u} = [-3,2]$

Odpowiedź:

a) $y = x^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 3, \infty)$, brak miejsc zerowych; W = (0,3);

funkcja rośnie $(0, \infty)$; funkcja maleje $(-\infty, 0)$

b) $y = -(x+1)^2$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $(-\infty, 0 >$, jedno miejsce zerowe $x = -1$; W = (–1,0);

funkcja rośnie $(\infty, -1)$, funkcja maleje $(-1, \infty)$

c) $y = 2(x+3)^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 2, \infty)$, brak miejsc zerowych; W = (–3,2);

funkcja rośnie $(-3, \infty)$, funkcja maleje $(-\infty, -3)$

4.3 Postacie trójmianu kwadratowego

Teraz nauczę się:

- zapisać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej.

POSTAĆ ILOCZYNOWA TRÓJMIANU KWADRATOWEGO

TWIERDZENIE[38]

Dany jest trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie x_1 i $x2$ są rozwiązaniami trójmianu.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_0)^2$.

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania $(x - 3)(x + 2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod x liczbę 3, to pierwszy nawias się „wyzeruje". Iloczyn jakiejkolwiek liczby przez 0 daje nam 0. Jeśli podstawimy pod drugi x liczbę -2, to ten nawias także nam się „wyzeruje". Rozwiązaniami są więc wartości: $x = 3$ i $x = -2$.

Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Postępujemy analogicznie, jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

38 http://pl.wikibooks.org.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$
$$\sqrt{\Delta} = 6$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

$\Delta > 0$, więc korzystamy ze wzoru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Widzimy, że $a = 1$.

$(x + 5)(x - 1) = 0$

Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $2x^2 - 4x + 2 = 0$.

Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$, stąd $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$, stąd otrzymujemy rozwiązanie: $x = 1$, a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej, korzystając ze wzoru :
$y = a(x - x_0)^2$ Odpowiedź: $2(x-1)^2 = 0$

Sposób II

Policzymy deltę.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$x_0 = 1$

$\Delta = 0$ – korzystamy więc ze wzoru: $y = a(x - x_0)^2$. a jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy: $2(x - 1)^2 = 0$

Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7.

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy że podstawimy te wartości do wzoru.
$$(x-(-3))(x-7) = 0$$
$$(x+3)(x-7) = 0$$
Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:
$$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$$
$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7. Można to sprawdzić przez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

ZADANIA

4.3.1 Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a) $12x^2+11x+2=0$ b) $3x^2-7x+2=0$

c) $2x^2-3x+4=0$ d) $-7x^2+10x-4=0$

e) $5x^2-3x=0$ f) $9x^2-8=0$

g) $2x^2-3x-2=0$ h) $-x^2+x+6=0$

i) $3x^2-5x+4=0$ j) $-4x^2+2x-1=0$

k) $10-2x^2=0$ l) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x=0$

Odpowiedź:

a) $12\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$ b) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=0$

c) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

d) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

e) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)=0$

f) $9\left(x^2-\frac{8}{9}\right)=9\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

g) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$

h) $-(x-3)(x+2)=0$

i) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

j) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

k) $-2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$

l) $\frac{1}{3}x\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

4.3.2 Podaj pierwiastki trójmiany kwadratowego:

a) $(x-3)(x-30)=0$ b) $2(x-2)(x+5)=0$

c) $\frac{11}{3}(x+15)(x+27)=0$ d) $4x(x+6)=0$

e) $-2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=0$ f) $-2(x+1)\left(x+1-\sqrt{2}\right)=0$

g) $\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right)=0$ h) $(2x-3)(2x-3)=0$

Odpowiedź:

a) $x_1=3, x_2=30$ b) $x_1=2, x_2=-5$

c) $x_1 = -15, x_2 = -27$ d) $x_1 = 0, x_2 = -6$

e) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$ f) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$

g) $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$ h) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

4.3.3 Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, mając dane pierwiastki:

a) 3 i 5 b) 4 i –9 c) $\frac{1}{3}$ i 7

d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ e) $\sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{7}$ i $1-\sqrt{7}$

Odpowiedź:

a) $b = -8, c = 15$ b) $b = 5, c = -36$ c) $b = 7\frac{1}{3}, c = 2\frac{1}{3}$

d) $b = \frac{11}{35}, c = -\frac{6}{35}$ e) $b = -\left(1+2\sqrt{2}\right), c = 2+\sqrt{2}$ f) $b = -2, c = -6$

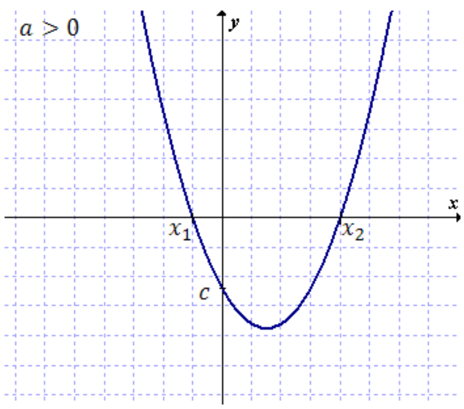
Postać ogólna funkcji kwadratowej

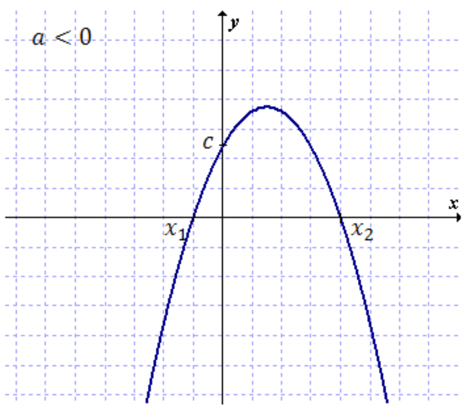
$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY (0, c).

Przykład:





Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami x_1 oraz x_2). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2. Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka W funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a, p, q są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczna funkcji kwadratowej**. Współczynniki p i q to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez $W = (p, q)$. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne p i q ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zaletą postaci kanonicznej jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli. Dodatkowo po współczynniku a możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (gdy $\Delta > 0$) i $f(x) = a(x-x_0)^2$ ($\Delta = 0$) nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym, takim że $a \neq 0$. Literki x_0, x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$.

Uwaga! Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ($\Delta > 0$), to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli $\Delta = 0$, to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Zaletą postaci iloczynowej jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Reasumując

Dla $a \neq 0$ trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

<table>
<tr><td>Postać ogólna</td><td colspan="3">$y = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Postać kanoniczna</td><td colspan="3">$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x-p)^2 + q$,
gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Postać iloczynowa</td><td>$\Delta \langle 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta \rangle 0$</td></tr>
<tr><td>Brak postaci iloczynowej</td><td>$y = a(x - x_0)^2$</td><td>$y = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
</table>

ZADANIA

4.3.4 Wyznacz te wartości parametrów a, b i c, dla których $f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = ax^2 - 7x + c$ i $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$ i $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

a) $a = -2$, $b = 7$, $c = -5$

b) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{7}{4}$, $c = -\frac{3}{8}$

4.3.5 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników a, b i c:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}$

c) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x-2)(x-3)$

e) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

f) $f(x) = (1-x)(3-x) + 6 - 2x$

g) $f(x) = -2(x-3)^2 + 18$

h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 6$

i) $f(x)=2(x-1)(x+10)$

j) $f(x)=2\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right)$

Odpowiedź:

a) $f(x)=x^2-x+16\frac{1}{4}$

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{7}{8}$

c) $f(x)=-3x^2-24x-49$

d) $f(x)=2x^2-10x+12$

e) $f(x)=-9x^2+6x+5$

f) $f(x)=x^2-6x+9$

g) $f(x)=-2x^2+12x$

h) $f(x)=3x^2+6x+6$

i) $f(x)=2x^2+18x-20$

j) $f(x)=2x^2+4\sqrt{2}-6$

4.3.6 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2+20x+50=2(x+p)^2$

b) $3x^2-18x+20=3(x+p)^2+q$

c) $3x^2-15x+25=a(x+p)^2+q$

d) $5x^2+12x-6=a(x+p)^2+q$

Odpowiedź:

a) $p=-5$

b) $p=3, q=-7$

c) $a=3, p=\frac{15}{6}, q=-\frac{75}{12}$

d) $a=5, p=-1{,}2, q=-13{,}2$

4.3.7 Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a) $f(x)=4x^2+6x+3$

b) $f(x)=-2x^2+4x+1$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$

d) $f(x)=-x^2-4x+3$

e) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

f) $f(x)=\frac{2}{3}x^2+4x-2$

g) $f(x)=-2x^2+16x-22$

h) $f(x)=2(x-1)(x+10)$

i) $f(x)=3x(2-3x)+5$

j) $f(x)=4(x+5)x$

Odpowiedź:

a) $p=-\frac{3}{4}, q=\frac{3}{2}, f(x)=4(x+\frac{3}{4})+\frac{3}{2}$

b) $p=1, q=3, f(x)=-2(x-1)+3$

c) $p=1, q=\frac{1}{2}, f(x)=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}$

d) $p=-2, q=7, f(x)=-(x+2)+7$

e) $p=\frac{1}{8}, q=\frac{47}{64}, f(x)=(x-\frac{1}{8})+\frac{47}{64}$

f) $p=-3, q=-8, f(x)=\frac{2}{3}(x+3)-8$

g) $p=4, q=10, f(x)=-2(x-4)+10$

h) $p=-4{,}5; q=-50{,}5; f(x)=2(x+4\frac{1}{2})-50\frac{1}{2}$

i) $p=\frac{1}{3}, q=6, f(x)=-9(x-\frac{1}{3})-6$

j) $p=-2{,}5; q=-25, f(x)=4(x+2\frac{1}{2})-25$

4.3.8 Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $f(x)=3x^2+x+5$ b) $f(x)=16x^2+8x+1$

c) $f(x)=-2x^2+3x+7$ d) $f(x)=-2x^2+6x+5$

Odpowiedź:

a) brak miejsc zerowych b) jedno miejsce zerowe

c) dwa miejsca zerowe d) dwa miejsca zerowe

4.3.9 Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a) $f(x)=2(x-1)(x+10)$ b) $f(x)=-3(x-2)(x+5)$

c) $f(x)=4(x+5)x$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-6)$

Odpowiedź:

a) $x_1=-10, x_2=1$ b) $x_1=-5, x_2=2$

c) $x_1=-5, x_2=0$ d) $x_1=-1, x_2=6$

4.3.10 Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a) $a=\sqrt{2}, x_1=-4, x_2=\frac{1}{2}$ b) $a=-3, x_1=-2, x_2=0$

c) $a=7, x_0=9$ d) $a=\frac{1}{2}, x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{5}$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\sqrt{2}(x+4)(x-\frac{1}{2})$ b) $f(x)=-3(x+2)x$

c) $f(x)=7(x-9)^2$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$

4.3.11 Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a) $f(x)=(x-1)(x+5)$ b) $f(x)=-(x-6)(x+4)$

c) $f(x)=2(x+1)(x+5)$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

Odpowiedź:

a) $f(x)=(x+2)^2-9$ b) $f(x)=-(x-1)^2+25$

c) $f(x)=2(x+3)^2-8$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+128$

4.3.12 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a) $f(x)=x^2-4x+3$ b) $f(x)=x^2+5x+6$

c) $f(x)=6x^2-5x+1$ d) $f(x)=9x^2+6x-1$

e) $f(x) = -3x^2 + 5$

f) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

g) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

h) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$

b) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$

c) $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$

d) $x1 = -\frac{1}{3}(1 + \sqrt{2}), x2 = -\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2})$

e) $f(x) = -3(x - \frac{1}{3}\sqrt{15})(x + \frac{1}{3}\sqrt{15})$

f) $f(x) = -2(x - 1)(x + \frac{1}{2})$

g) $f(x) = -2(x - 5)(x + \frac{1}{2})$

h) $x1 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}, x1 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$

4.4. Rysowanie wykresów funkcji[39]

Teraz nauczę się szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.
Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

Poniżej przedstawimy II sposoby rysowania wykresów.

Sposób I

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

1) wierzchołek paraboli,

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych),

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

39 http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html, 21.02.2013.

$$y = -x^2 - 2x + 8$$ a = -1, b = -2, c = 8

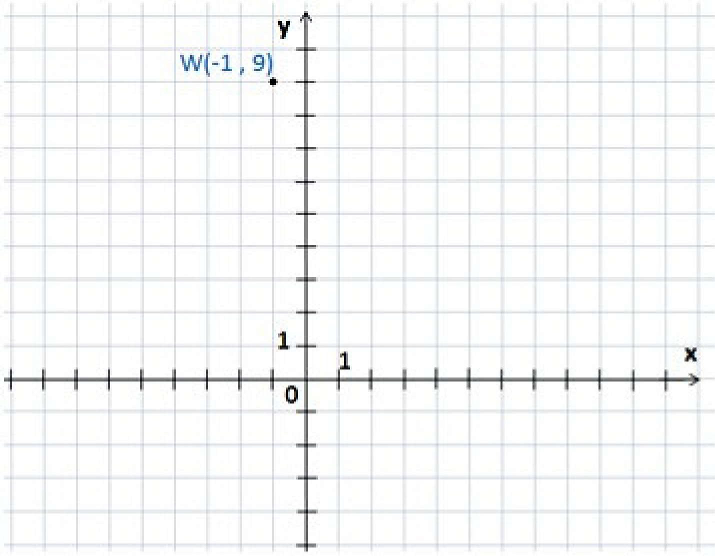
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8 = 4 + 32 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4\cdot(-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1,\ 9)$$



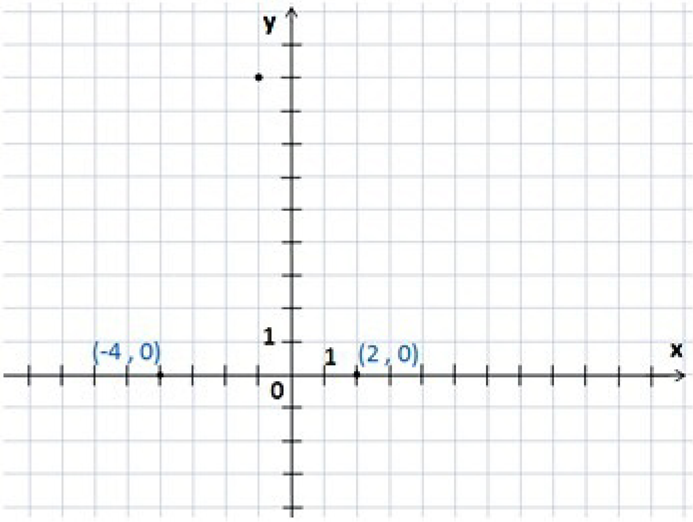
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

UWAGA: Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punktu, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\cdot(-1)} = \frac{2+6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\cdot(-1)} = \frac{2-6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

(-4, 0); (2, 0)



3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych: Wybraliśmy argument –5:

Podstawiamy argument -5 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(-5)^2 - 2 \cdot (-5) + 8 = -25 + 10 + 8 = -7$$

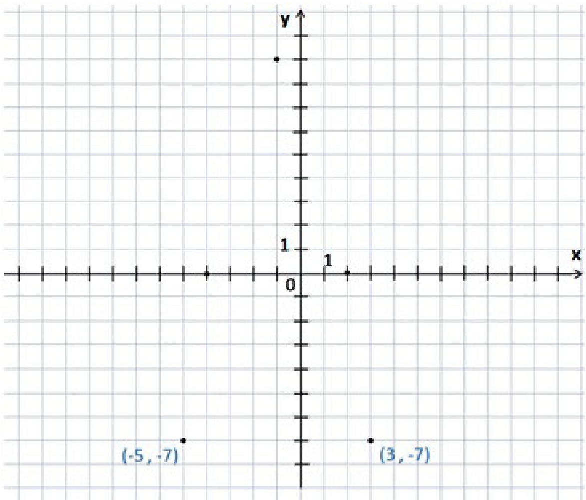
Współrzędne punktu: (–5, –7)

Punkt na prawo od miejsc zerowych: Wybraliśmy argument 3:

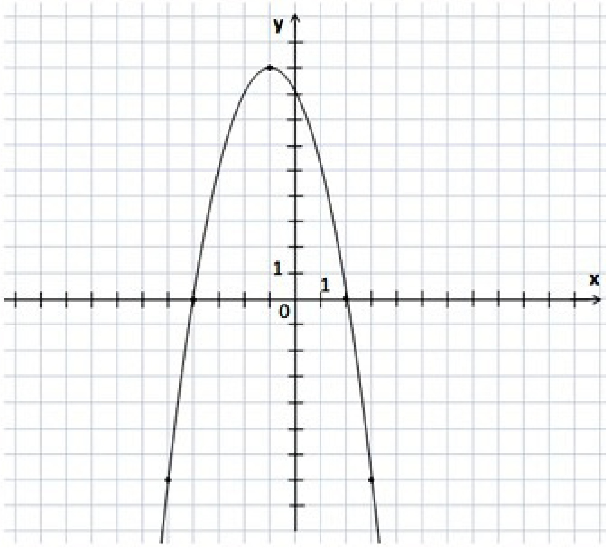
Podstawiamy argument 3 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = -9 - 6 + 8 = -7$$

Współrzędne punktu: (3, –7)



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.
Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze zmienionym znakiem!
$X_1 = 1$
$X_2 = -3$

$(1, 0); (-3, 0)$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo. Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru:

Przykład1

$$y = 2(x + 5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p" będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q" się nie zmienia:
X = -5
y = 2

$$W=(-5, 2)$$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych) Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo. Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Sposób II

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

Przykład 2

$y = -2(x + 1)^2 - 3$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków). W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x + 1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszy przypadek funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W=(0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty, znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych: Wybraliśmy:

x = -2

$$y=-2\cdot(-2)^2=-2\cdot 4=-8$$

(-2, -8)

x = -1

$$y=-2\cdot(-1)^2=-2\cdot 1=-2$$

(-1, -2)

x = 1

$$y=-2\cdot 1^2=-2\cdot 1=-2$$

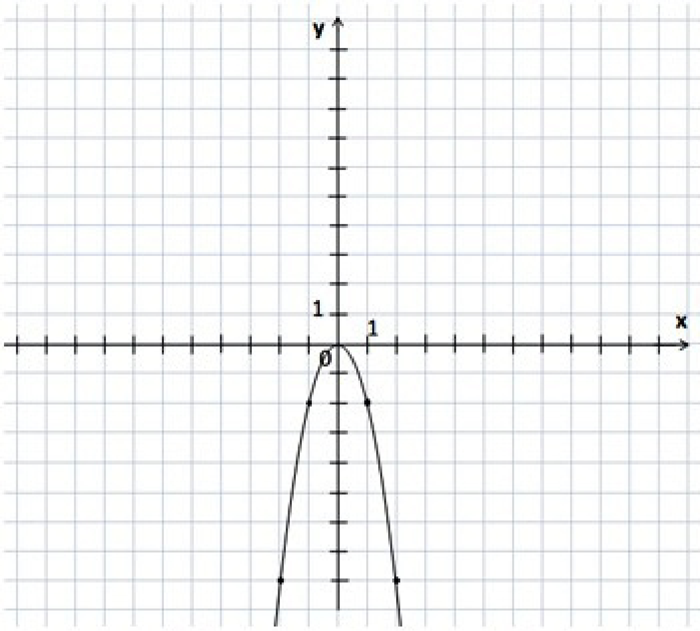
(1, -2)

x = 2

$$y=-2\cdot 2^2=-2\cdot 4=-8$$

(2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

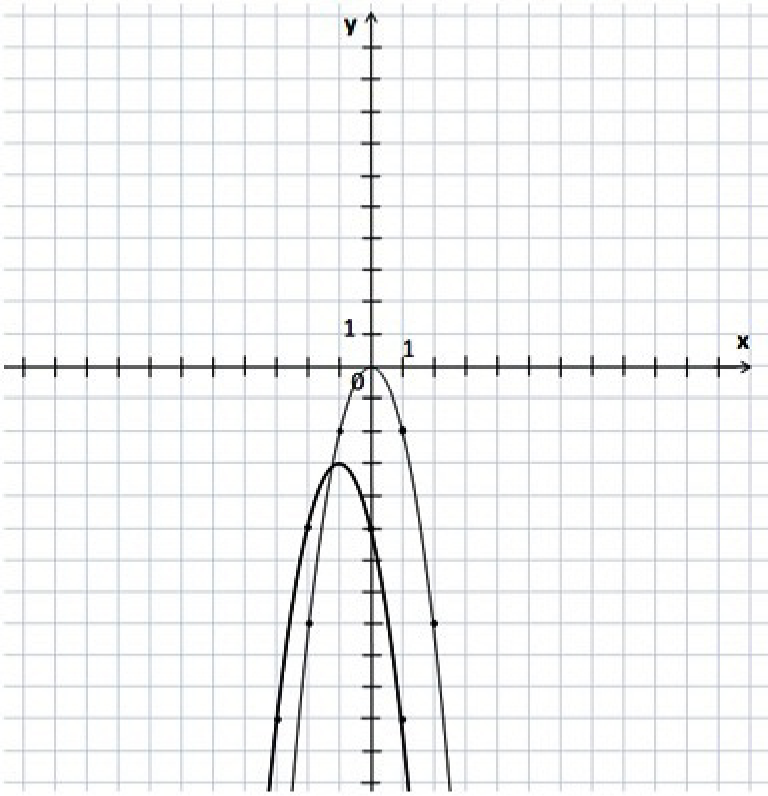


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y=-2(x+1)^2-3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.



ZADANIA

4.4.1 Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej f z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 - 3$

b) $f(x) = x^2 + 8$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

d) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Odpowiedź:

a) z osią OX: 1, –1; z osią OY: –3

b) z osią OX: nie istnieje; z osią OY: 8

c) z osią OX: 2; z osią OY: 4

d) z osią OX: 8, –2; z osią OY: –16

4.4.2 Oblicz:

- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych,
- współrzędne wierzchołka paraboli,
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = x^2 - 9$

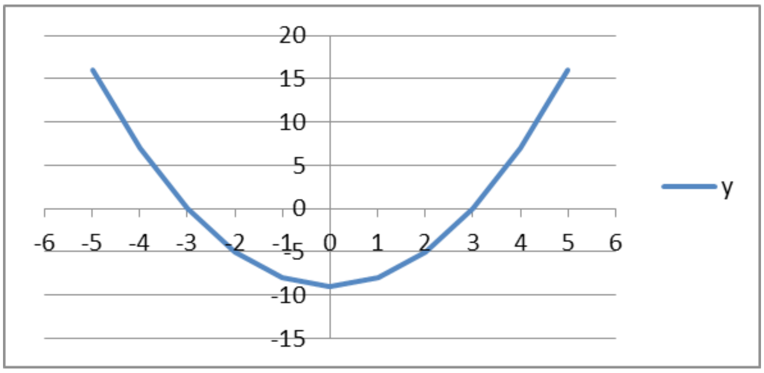
b) $f(x) = x^2 + 6x$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

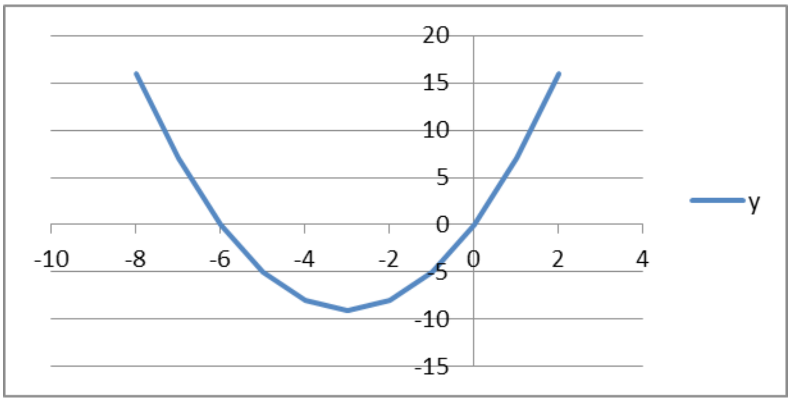
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Odpowiedź:

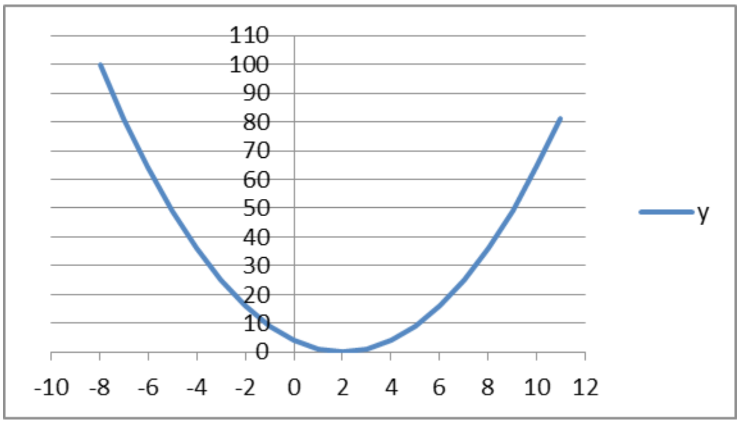
a) z osią OX: ,–3, 3; z osią OY: –9; $p = 0$; $q = -9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$



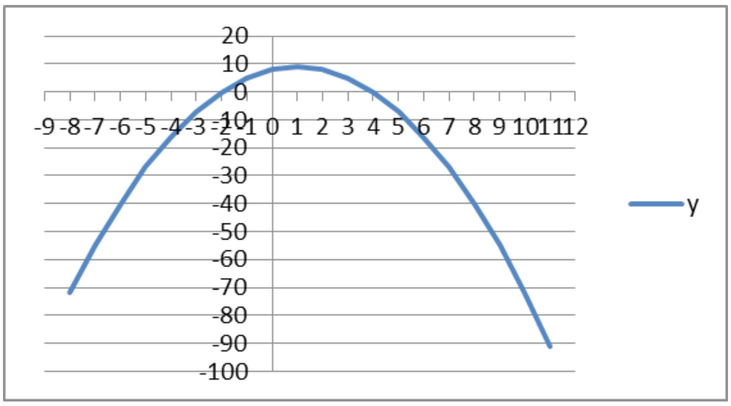
b) z osią OX: 0, –6; z osią OY: 0; $p = -3$; $q = -9$; $x_1 = 0$, $x_2 = -6$



c) z osią OX: 2; z osią OY: 4; $p = 2$; $q = 0$; $x_1 = x_2 = 2$



d) z osią OX: –2, 4; z osią OY: 8; $p = 1$; $q = 9$; $x_1 = -2$, $x_2 = 4$



4.5 Własności funkcji kwadratowej

Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

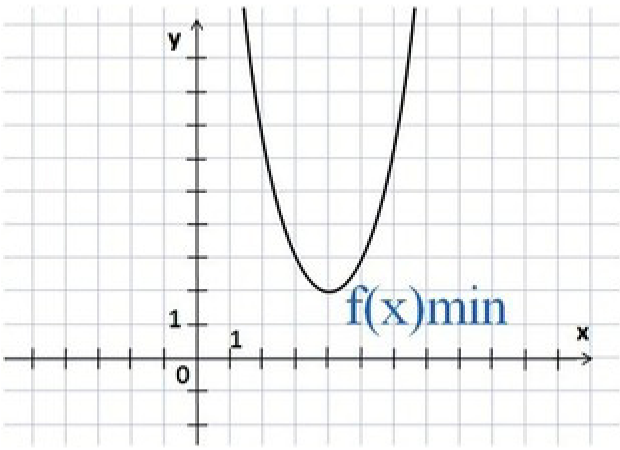
MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum. Przypominamy: Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{\min}$ lub $y_{\min}$. Maksymalną wartości oznaczamy:

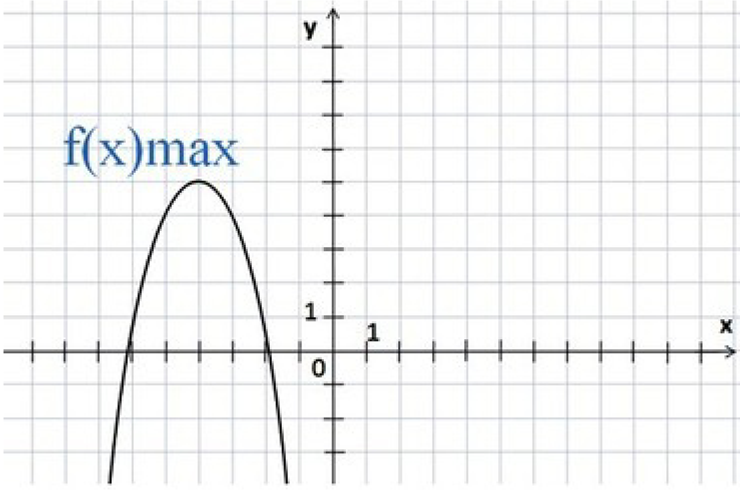
$f(x)_{\max}$ lub $y_{\max}$.

W celu wyznaczenia „– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum,” on page 121 funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum, czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum,



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum.



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „a" funkcji kwadratowej. Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy $a > 0$, w dół, gdy $a < 0$.

Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „a" funkcji ma wartość –3 ($a < 0$). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Dziedzina

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc: $D = R$

Zbiór wartości

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka (q) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka (q):

$$ZW = (-\infty, \ q\rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka (q) a nieskończonością:

$$ZW = \langle q, \ \infty)$$

Przykład 2

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

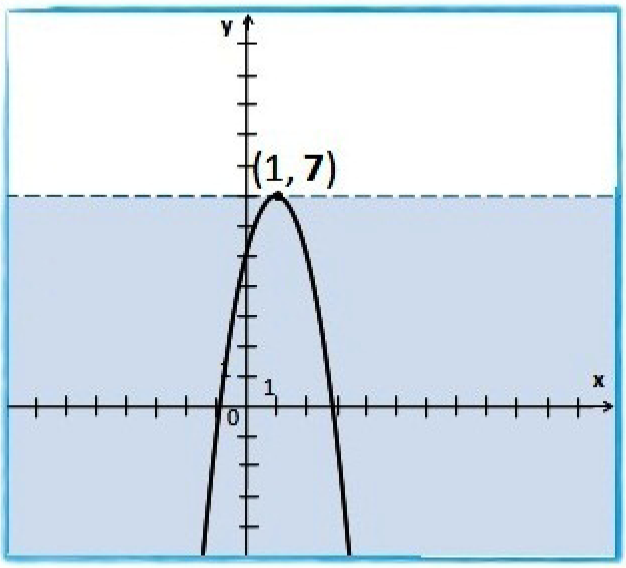
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-56}{4 \cdot (-2)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Ponieważ współczynnik „a" jest ujemny (-2), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością q.

$$ZW = (-\infty, 7\rangle$$



Przykład 3

$$y = 2x^2 + 4x - 2$$

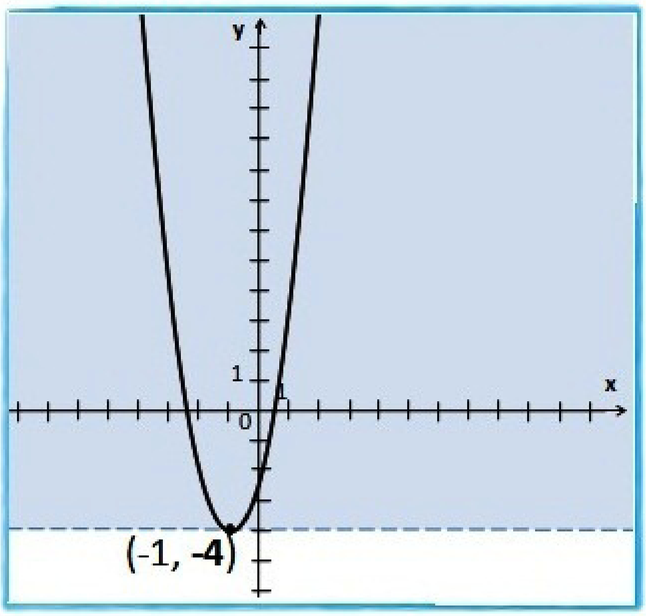
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 + 16 = 32$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-32}{4 \cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4$$

Ponieważ współczynnik „a" jest dodatni (2), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością q a nieskończonością.

$$ZW = \langle -4, \infty)$$



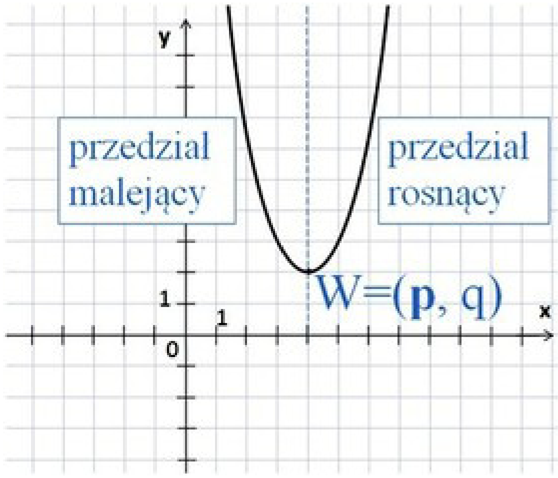
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie, jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś 0X), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka (*p*).

Drugą potrzebną informacją jest kierunek ramion paraboli:

Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.



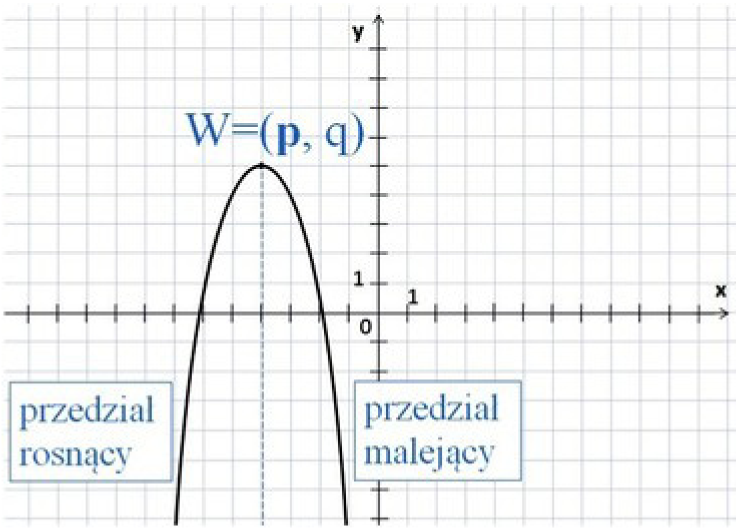
- Funkcja jest rosnąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle p, \infty)$

- Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\searrow$ w przedziale $(-\infty, p\rangle$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



- Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\left(-\infty, p\right\rangle$

- Funkcja jest malejąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\searrow$ w przedziale $\left\langle p, \infty\right)$

$$y = 3x^2 - 12x + 8$$

Obliczamy współrzędną „p" wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a" funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę.
W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\left\langle 2, \infty\right)$

$f(x)\searrow$ w przedziale $\left(-\infty, 2\right\rangle$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 4x + 10$.

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$f(x)\uparrow: (-\infty, 2\rangle$

$f(x)\downarrow: \langle 2, \infty)$

Reasumując

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y =< -\frac{\Delta}{4a},\infty)$	$Y =(-\infty,-\frac{\Delta}{4a} >$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x =-\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{min} -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x =-\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in (-\infty,-\frac{b}{2a})$, rosnąca dla $x \in (-\frac{b}{2a},+\infty)$	rosnąca dla $x \in (-\infty,-\frac{b}{2a})$, malejąca dla $x \in (-\frac{b}{2a},+\infty)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 =-\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 =\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 =\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowne do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x =-\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w =-\frac{b}{2a}$, $y_w =-\frac{\Delta}{4a}$	

ZADANIA

4.5.1 Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = x^2 - 6x$

c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 5$

e) $y = -2x^2 + 6x + 7$

4.5.2 Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

- zbiór wartości,

- miejsca zerowe,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca,
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

a) $f(x)=x^2-4$
b) $f(x)=-x^2+6x$
c) $f(x)=(x-3)^2-4$
d) $f(x)=-(x-1)(x+5)$
e) $f(x)=x^2-6x+9$
f) $f(x)=-2x^2-7x+4$

	Zbiór wartości	Miejsca zerowe	Wartości dodatnie	Wartości ujemne	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Wartość największa	Wartość najmniej-sza
a)	$\langle -4,\infty)$	–2,2	$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$	$(-2,2)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	–	Dla x=0 y= –4
b)	$(-\infty,9\rangle$	0,6	$(0,6)$	$(-\infty,0)\cup(6,\infty)$	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$	Dla x=3 y= 9	–
c)	$\langle -4,\infty)$	1,5	$(-\infty,1)\cup(5,\infty)$	$(1,5)$	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla x=3 y= –4
d)	$(-\infty,9\rangle$	5,1	$(-5,1)$	$(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$	Dla x=2 y= 9	–
e)	$\langle 0,\infty)$	3	$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$	ϕ	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla x=3 y= 0
f)	$\left(-\infty,10\frac{1}{8}\right\rangle$	–4, $\frac{1}{2}$	$\left(-5,\frac{1}{2}\right)$	$(-\infty,-4)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$	$\left(-\infty,-1\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1\frac{3}{4},\infty\right)$	Dla $x=-1\frac{1}{3}$ $y=10\frac{1}{8}$	–

4.5.3 Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

a) $y=x^2-4x+3$
b) $y=-2x^2-8x-5$
c) $y=x^2-6x+10$

Odpowiedź:

a) Dziedzina: $D=R$
Zbiór wartości: $ZW=\langle -1,\infty)$
Miejsce zerowe: $x_1=1$ lub $x_2=3$
Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna
malejąca w przedziale $(-\infty,2\rangle$
rosnąca w przedziale $\langle 2,\infty)$

Wierzchołek: $W = (2,-1)$

Najmniejsza wartość: $y_{min} = -1$ dla $x = 2$

Największa wartość: nie istnieje

b) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: ZW = $(-\infty,3>$

Miejsce zerowe: x0 ≈ −3, 2 lub x0 ≈ −0, 8

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca w przedziale $(-\infty,-2>$

malejąca w przedziale $<-2,\infty)$

Wierzchołek: W = (−2, 3)

Największa wartość: ymax = 3 dla x = −2

Najmniejsza wartość: nie istnieje

c) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: $ZW = <1,\infty)$

Miejsce zerowe: nie istnieją

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty,3>$

rosnąca w przedziale $<3,\infty)$

Wierzchołek: W = (3, 1)

Najmniejsza wartość: ymin = 1 dla x = 3

Największa wartość: nie istnieje

4.5.4 Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 4x - 1$ z prostymi:

a) $y = -5$ b) $y = -3$ c) $y = -1$ d) $y = 2$

Odpowiedź:

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 4x - 1$ ma:

– 0 punktów wspólnych z prostą $y = -5$

– 1 punkt wspólny z prostą $y = -3$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = -1$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = 2$

4.5.5 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 6x - 7$.

Odpowiedź: $x = 3$

4.5.6 Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

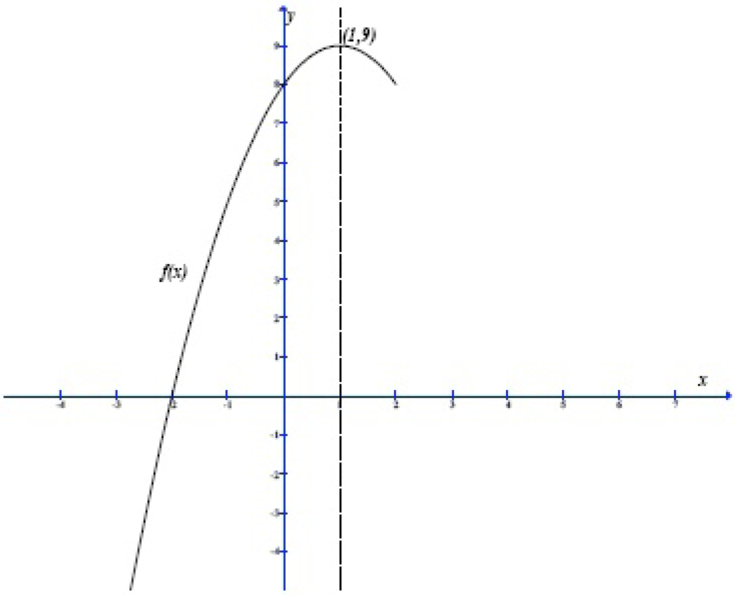
a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

Odpowiedź:

a) $(-\infty,4>$ b) $x \in \langle 1,5 \rangle$

4.5.7 Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe.



a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: -2 oraz 4.

b) Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-2, 4)$.

c) Funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$.

d) Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-1, 9)$.

Odpowiedź: a

4.5.8 Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ b) $f(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f(x) = -3x(x-2)$ d) $f(x) = 2(x-2)(x+4) - 5$

Odpowiedź:

a) $m = 0$ b) $m = -11\frac{5}{4}$

c) $m = 3$ d) $m = -23$

4.5.9 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$, $x \in \langle -1, 2\rangle$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $x \in \langle -2, 5\rangle$

c) $f(x) = -2x^2 + x - 1$, $x \in \langle 0, 2\rangle$

Odpowiedź:

a) $m = 12$, $m = 0$

b) $m = 46$, $m = 7/8$

c) $m = -7/8$, $m = -7$

4.5.10 Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^2 - 9,\ x \in \langle -2,2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 5x,\ x \in \langle 3,7 \rangle$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 6,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = -9$

b) $m = -14$

c) $m = -10$

d) $m = 1$

4.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

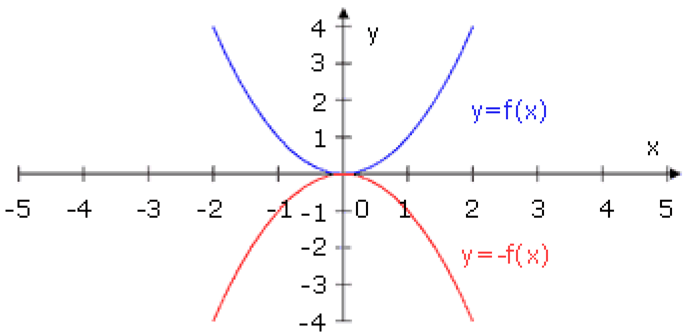
Teraz nauczę się:

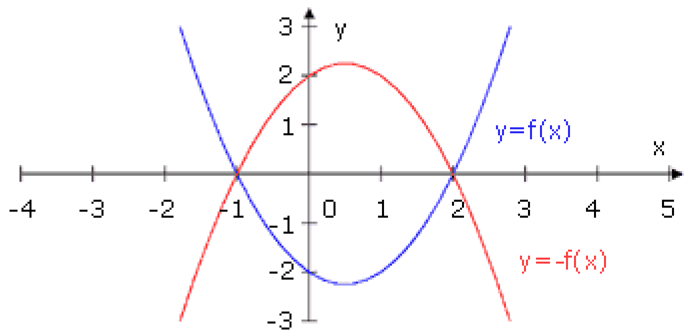
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

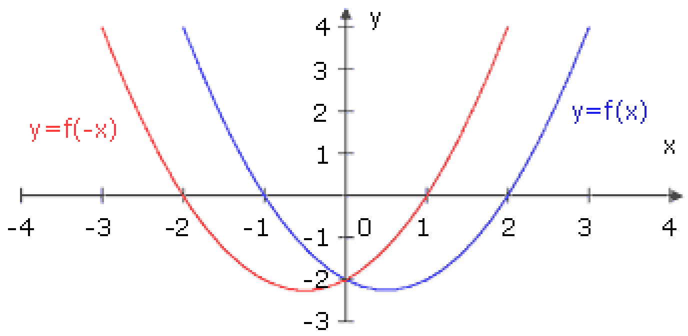
Przykłady:





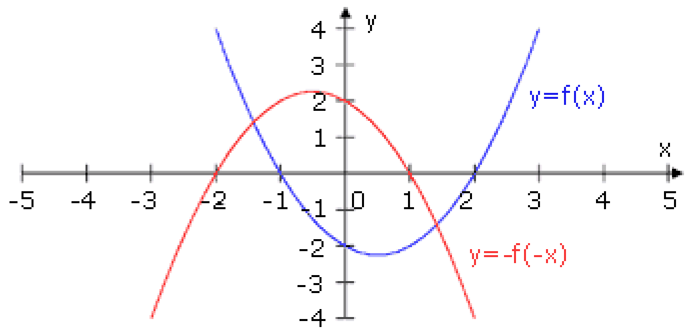
$x \rightarrow y = f(-x)$

Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.



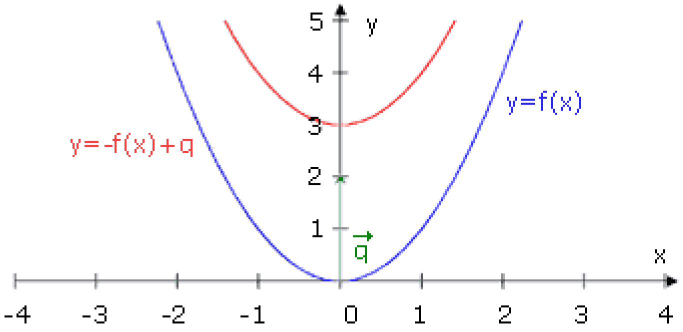
$x \rightarrow y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).



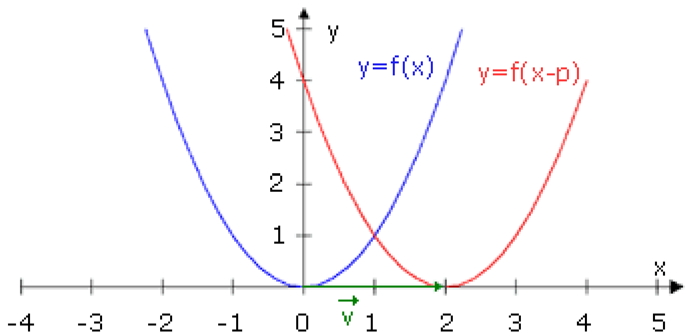
$x \rightarrow y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor [0,q]).



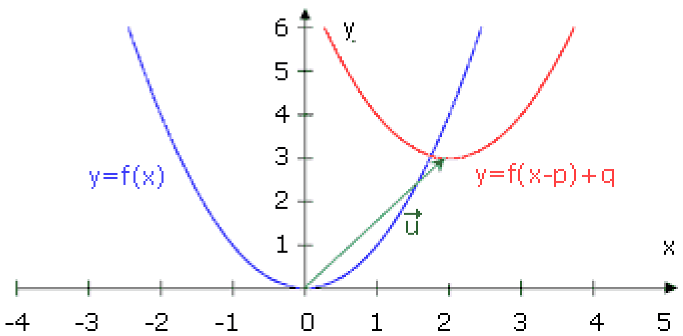
➡ ***x→y = f(x − p)***

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ **otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji** $y = f(x)$ **wzdłuż osi OX o wektor** $\vec{v} = [p,0]$.



➡ ***x→y = f(x − p) + q***

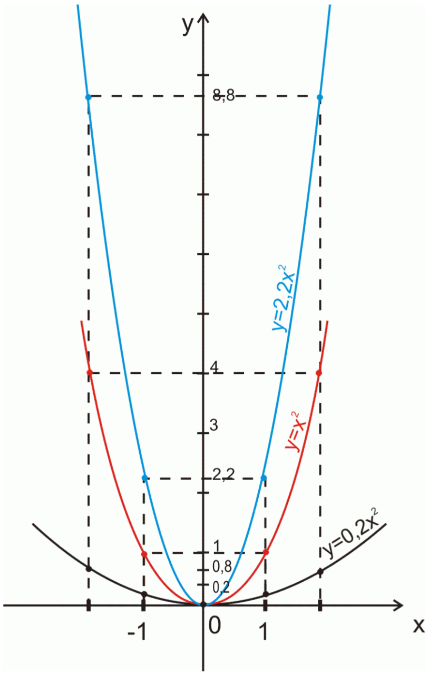
Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ **otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu** $y = f(x)$ **o wektor** $\vec{u} = [p,q]$**.**



➡ ***x→y = k · f(x)***

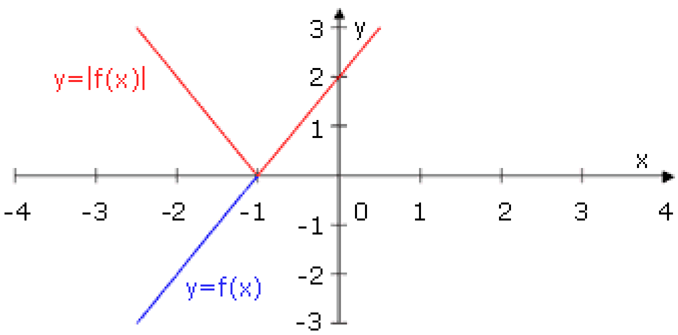
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ **powstaje z wykresu** $y = f(x)$ **w wyniku k- krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.**

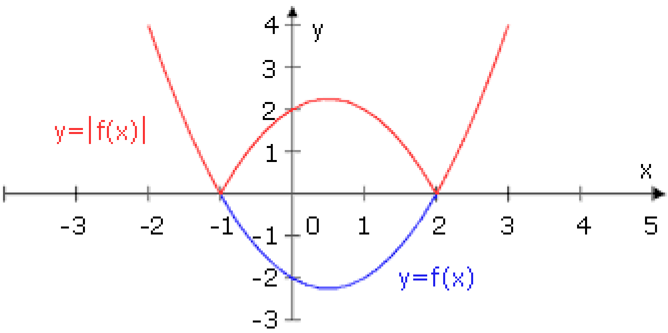
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się” wzdłuż osi OY). Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się” wzdłuż osi OY).



*** $x \to y = |f(x)|$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$, leżącą nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX.

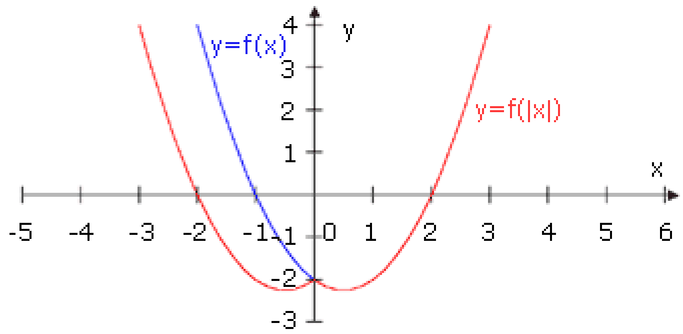




*** $x \to y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

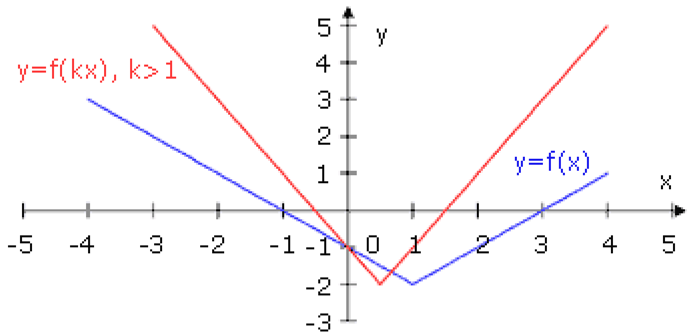
dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian, otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

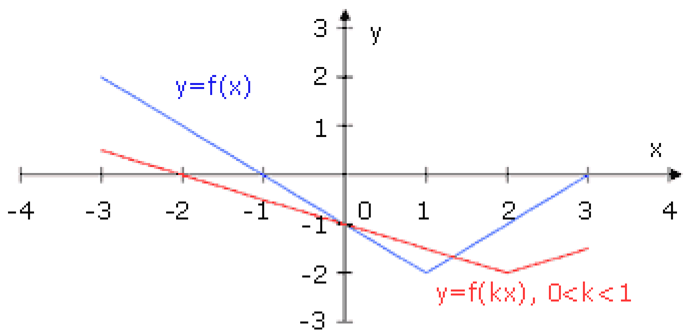


***$x \to y = f(k*x)$

Wykres funkcji $y = f(k*x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX. Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.





ZADANIA

4.6.1 Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$ o p jednostek wzdłuż osi OX i q jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji f. Uzupełnij według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji g	Przesunięcie wzdłuż osi OX p	Przesuniecie wzdłuż osi OY q	Postać kanoniczna wzoru funkcji f	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x + 4)^2 - 5$	W = (–4,–5)
			$f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				W = (3,0)
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x - 2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		W = (0,–1)

4.6.2 Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = (x - 3)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 3$ e) $y = (x + 1)^2 - 1{,}6$ f) $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) przesuwamy o 3 jednostki w prawo

b) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo

c) przesuwamy o 4 jednostki w górę

d) przesuwamy o 3 jednostki w dół

e) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 1,6 jednostki w dół

f) rysujemy $y = x^2$, odbijamy symetrycznie względem osi OX i przesuwamy w dół o $3\frac{1}{3}$ jednostki w dół

4.6.3 Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi OY o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Odpowiedź:

a) zbiór wartości $(-\infty, 8\rangle$

b) $b = 12$, $c = -10$

4.6.4 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -0{,}3x^2 + 12$ c) $y = 1{,}4(x - 48)^2$

d) $y = -35(x + 1{,}2)^2$ e) $y = 15(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) W = (0,–5); funkcja maleje $x \in (-\infty, 0)$, funkcja rośnie $x \in (0, \infty)$

b) W = (0,12); funkcja rośnie $x \in (-\infty, 0)$, funkcja maleje $x \in (0, \infty)$

c) W = (48,0); funkcja maleje $x \in (-\infty, 48)$, funkcja rośnie $x \in (48, \infty)$

d) W = (–1,2;0); funkcja rośnie $x \in (-\infty; -1{,}2)$, funkcja maleje $x \in (-1{,}2; \infty)$

e) W = $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; funkcja maleje $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, funkcja rośnie $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$

4.6.5 Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta:

a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$

b) $y = 0{,}6x^2 - 5$ i $y = 10$

c) $y = -0{,}1(x-3)^2$ i $y = -4$

d) $y = 15(x+2)^2 + 4$ i $y = -1$

e) $y = -3{,}2(x-5)^2 - 1$ i $y = -11$

f) $y = -3{,}2(x-5)^2 - 11$ i $y = 20$

Odpowiedź:

a) ma dwa punkty wspólne

b) nie ma punktów wspólnych

c) ma dwa punkty wspólne

d) nie ma punktów wspólnych

e) ma jeden punkt wspólny

f) nie ma punktów wspólnych

4.6.6 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W, przechodząca przez punkt P:

a) W = (–1,–1), P = (3,3)

b) W = (–8,7), P = (1,6)

c) W = (3,2), P = (–5,10)

Odpowiedź:

a) $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$

b) $y = -\frac{1}{81}(x+8)^2 + 7$

c) $y = \frac{1}{8}(x-3)^2 + 2$

4.6.7 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ względem:

a) osi OX

b) osi OY

c) punktu (0,0)

Odpowiedź:

a) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$

b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$

c) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$

4.6.8 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ względem:

a) osi OX

b) osi OY

c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ b) $f(x) = (x-1)(x+3)$ c) $f(x) = -(x-1)(x+3)$

4.6.9 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$ b) $f(x) = x^2 + x - 6$ c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

4.6.10 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3, \infty)$, wykres przechodzi przez punkt P = (–1,5) i ma oś symetrii o równaniu $x = 1$,

b) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4, \infty)$, jednym z miejsc zerowych jest $x = 1$ i wykres ma oś symetrii o równaniu $x = -1$,

c) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 4, \infty)$, wykres ma oś symetrii o równaniu $x = 2$ i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3\frac{1}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

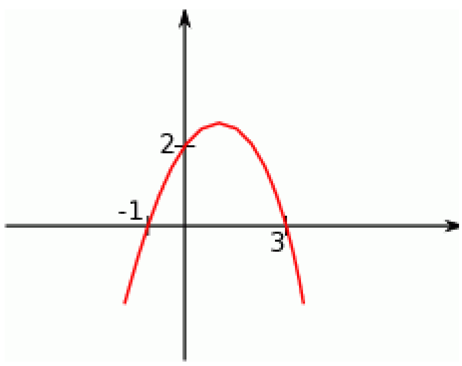
4.6.11 Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 6, 7, 8

4.6.12 Rozwiąż równanie $f(x-1) = 4$, jeżeli $f(x) = x^2 + x - 2$.

Odpowiedź: $x = -2$, $x = 3$

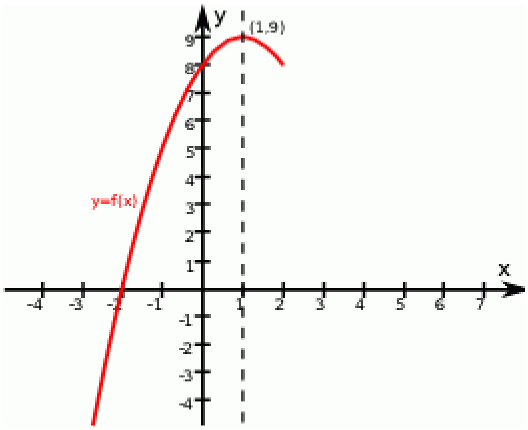
4.6.13 Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór:



Odpowiedź:

$$y = -\frac{2}{3}(x+1)(x-3) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$$

4.6.14 Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



Odpowiedź:

$$y = -(x-1)^2 + 9$$
$$y = -(x+2)(x-4)$$
$$y = -x^2 + 2x + 8$$

4.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

ZADANIA

4.7.1 Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Odpowiedź: Prędkość turysty z miasta A to 4 km/h, a turysty z miasta B 3 km/h**.**

4.7.2 Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większa niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Odpowiedź: Wymiary pierwszego boiska to 56 m × 33 m, a drugiego boiska 60 m × 25 m.

4.7.3 Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: Turysta dziennie przechodził 28 km.

4.7.4 Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Trójkąt ma boki 41cm, 40 cm, 9 cm.

4.7.5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej trójkąta to 17 cm.

4.7.6 Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

Odpowiedź: Czas napełniania zbiornika przez obie rury jednocześnie wynosi $23\frac{1}{3}$ godziny.

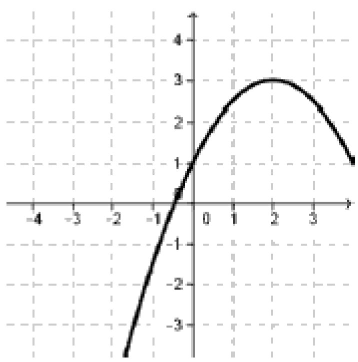
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[40] Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x-7)(x+2)$ są:

a) $x = 7, x = -2$ b) $x = -7, x = -2$ c) $x = 7, x = 2$ d) $x = -7, x = 2$

Odpowiedź: a

2.[41] Wzorem funkcji kwadratowej f, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku jest:



40 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 22.02.2013.
41 Zadania 2, 3: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 22.02.2013.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Odpowiedź: b

3. Największa wartość funkcji $y = -2x^2 + x + 1$ w przedziale $\langle -1; 0{,}5\rangle$ jest równa:

a) $1\frac{1}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) –4

4.[42] Gdy przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji opisanej wzorem:

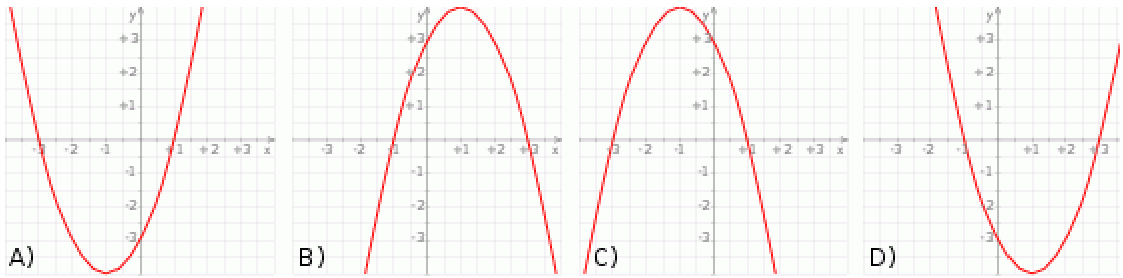
a) $y = 2(x - 2) + 4$ b) $y = 2(x - 2) - 4$ c) $y = 2(x - 2) + 1$ d) $y = 2(x + 2) + 4$

5. Funkcja kwadratowa $y = x^2 + bx + c$ jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2\rangle$, a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$. Postać kanoniczna tej funkcji opisana jest wzorem:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ b) $f(x) = (x + 2)^2 + 4$

c) $f(x) = (x + 4)^2 + 2$ d) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$

6. Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



Odpowiedź: a

7.[43] Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -4\rangle \\ 5x + 10 & \text{dla } x \in (-4, 2) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$$ jest

:

a) –4 b) –2 c) –1 d) 1

8. Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

a) $(-\infty, \frac{3}{2})$ b) $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ c) $(-1, 4)$ d) $(-4, 1)$

---

42 Zadania 4-6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 22.02.2013.
43 Zadanie 7: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 22.02.2013.

9. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:

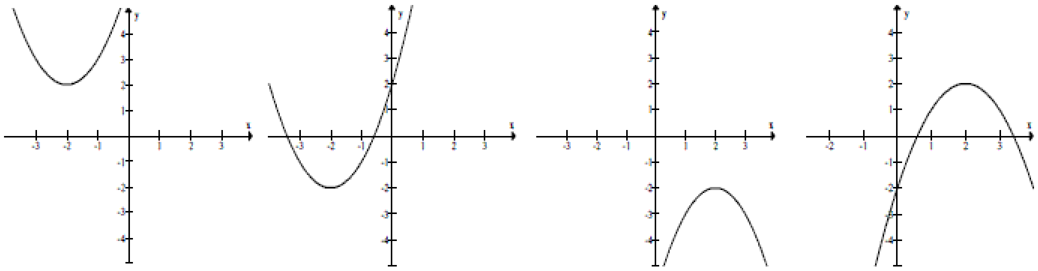
a) $(2,\infty)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(1,+\infty)$

10.[44] Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:

a) $x = -8$ b) $x = -4$ c) $x = 4$ d) $x = 8$

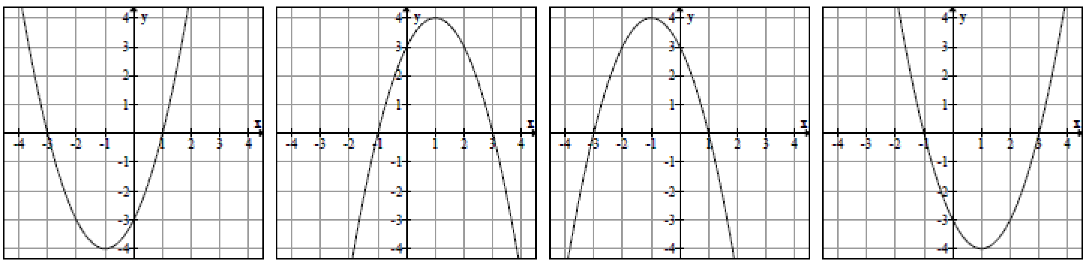
11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

A. B. C. D.



12. Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

13.[45] Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



A. B. C. D.

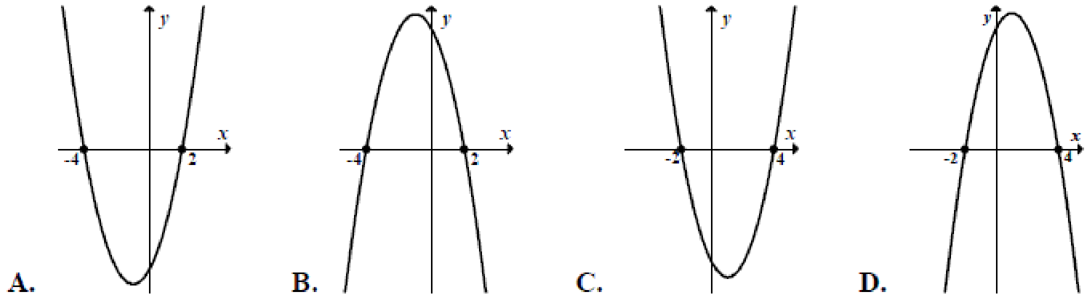
14. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$ jest punkt o współrzędnych:

a) (0,2) b) (0,–2) c) (–2,0) d) (2,0)

15.[46] Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale $<-2, 3>$.

16.[47] Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:

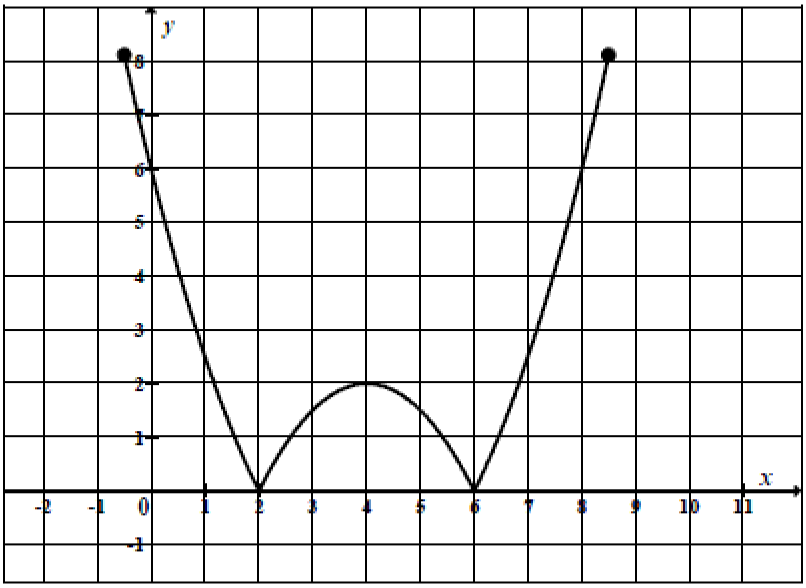
44 Zadania 10-12: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 22.02.2013.
45 http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 22.02.2013r
46 Zadanie 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf ,
47 Zadanie 16: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013r



17.[48] Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:

a) (3,0) b) (0,3) c) (–3,0) d) (0,–3)

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = 3$

19.[49] Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 10x + 9$ w przedziale $<3,7>$.

Odpowiedź: $y_{max} = -12$, $y_{min} = -16$

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ i $x + y = 10$

Odpowiedź: P = (3,7), R = (5,5)

21. Wyznacz wartość liczby m, tak aby funkcja $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$ miała dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -1$.

Odpowiedź: $m = 12$

22. Wzór w postaci kanonicznej funkcji $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ to:

48 Zadania 17, 18: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.
49 Zadania 19-35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

a) $y = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ b) $y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

c) $y = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ d) $y = (x + \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{8}$

Odpowiedź: a

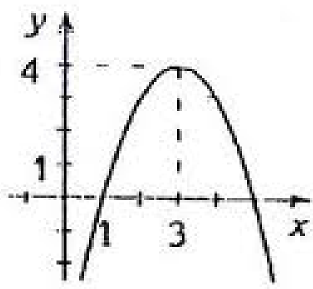
23. Funkcję kwadratową przedstawioną na rysunku opisuje wzór:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



Odpowiedź: a

24. Zbiorem wartości funkcji $y = x^2 - 6x + 11$ jest:

a) $(-\infty, 2\rangle$ b) $(-\infty, 3\rangle$ c) $\langle 3, \infty)$ d) $\langle 2, \infty)$

Odpowiedź: d

25. Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla $x = 2$, jeśli:

a) $b = -4, c = 8$ b) $b = 4, c = -8$ c) $b = -4, c = -8$ d) $b = 4, c = 8$

Odpowiedź: a

26. Wykresy funkcji $f(x) = 9 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 9$:

a) są symetryczne względem osi OX b) są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY d) nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja f ma wzór:

a) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ b) $f(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ d) $f(x) = -(x+2)^2$

Odpowiedź: a

29 Liczba punktów wspólnych prostej $y = -x$ z wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, wynosi:

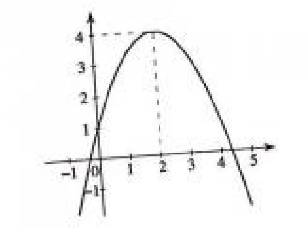
a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

Odpowiedź: c

30. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby –6 oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$.

Odpowiedź: 62

31. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określ jej wzór:



Odpowiedź: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

32. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem $y = x + 4$.

Odpowiedź: a) $y = -x^2 + 6x$, b) $x \in (1,4)$

33. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$, jeśli $x + y = 4$.

Odpowiedź: 8

34. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami: $y = x^2 + 2x - 8$ oraz $y = x^2 + 6x - 4$ mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

Odpowiedź: (–1,–9)

35. Wartością największą funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x - 3$, określonej w przedziale $\langle -3,2 \rangle$, jest liczba:

a) –4 b) 5 c) 0 d) 6

36. Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 9$ przyjmuje wartości nieujemne dla:

a) $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

b) $x \in (-3,3)$

c) $x \in \langle -3,3 \rangle$

d) $x \in (-\infty,-3 \rangle \cup \langle 3,\infty)$

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.
13. Fischer R. *„Liczby Fibonacciego na giełdzie”*, WIG - Press, Warszawa 1996.
14. Nowakowski J., Borowski K., *Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Difin.

Źródła internetowe

1. www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html
2. www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html
3. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
4. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
5. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
6. pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
11. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
12. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
15. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
16. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
21. www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
28. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

29. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
31. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
32. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
34. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
35. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
37. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
38. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
39. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
40. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
43. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
44. www.bossa.pl
45. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
46. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
47. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
48. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
49. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
50. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
51. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
52. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
53. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
54. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. II

Matematyka

klasa III
Podręcznik dla nauczyciela – technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drodzy Nauczyciele!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują się pod każdym z zadań. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1. Planimetria

To już potrafię:

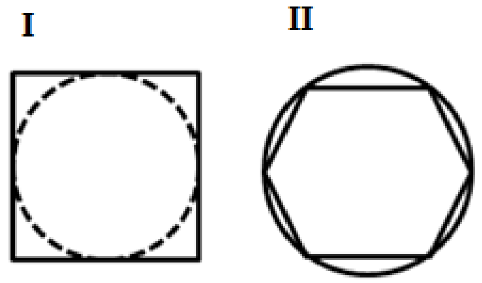
1. Korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe.
2. Rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznać styczną do okręgu.
3. Korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.
4. Rozpoznawać kąty środkowe.
5. Obliczać długość okręgu i łuku okręgu.
6. Obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego.
7. Stosować twierdzenie Pitagorasa.
8. Korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.
9. Obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów.
10. Zamieniać jednostki pola.
11. Obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.
12. Obliczać stosunek pól wielokątów podobnych.
13. Rozpoznawać wielokąty przystające i podobne.
14. Stosować cechy przystawania trójkątów.
15. Korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych.
16. Rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu.
17. Narysować pary figur symetrycznych.
18. Rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii.
19. Wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury.
20. Rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta.
21. Konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach 60°, 30°, 45°, okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt.
22. Rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności.

Sprawdź, czy potrafisz?

Zadania zamknięte

Informacja do zadań 1, 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.



Zad.1.

Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości $4\sqrt{2}$ m?

A. 4 m

B. 2 m

C. 5,6 m

D. 2,8

Zad.2.

Jaki jest obówd sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

A. 16 m

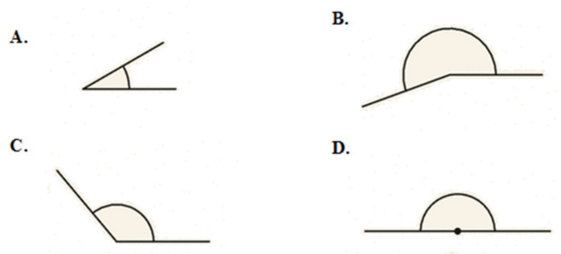
B. 24 m

C. $12\sqrt{3}$ m

D. $6\sqrt{3}$ m

Zad.3.

Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły.



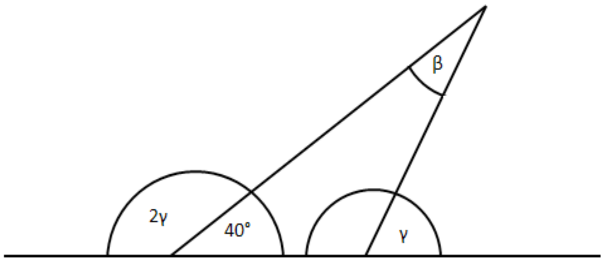
Zad.4.

Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

1. BARDZO ATRAKCYJNE CENY
2. OBNIŻKA CEN
3. CENY PROMOCYJNE
4. PRZECENA TOWARÓW

Zad.5.

Jaką miarę ma kąt β:



A. 50°

B. 35°

C. 30°

D. 40°

Zad.6.

Miara kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{3}$ okręgu wynosi:

A. 90°

B. 60°

C. 120°

D. 80°

Zad.7.

Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

A. 6π

B. 18π

C. 9π

D. 12π

Zad.8.

W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

A. przystające

B. równoboczne

C. podobne

D. rozwartokątne

Zad.9.

Pole kwadratu o przekątnej długości $5\sqrt{6}$ to:

A. 25

B. 50

C. 75

D. 15

Zad. 10.

Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm wynosi:

A. 24 cm^2

B. 24 cm

C. 10 cm

D. 12 cm^2

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	C	B	A	D	C	B

Zadania otwarte

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi …

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi …

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na …

Proste prostopadłe oznaczamy symbolem …

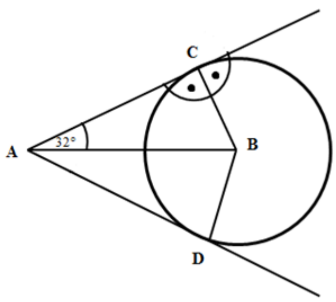
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: …

Przez jeden punkt można poprowadzić …………………… prostych.

Miejsce przecięcia się dwóch prostych to …

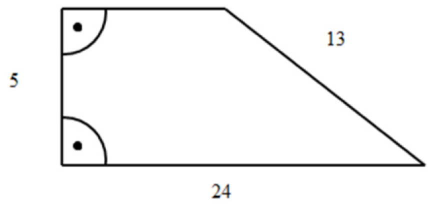
Kąt o mierze 180° nazywamy kątem …

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta ABCD.



3. Oblicz x i y wiedząc, że punkty $A = (3x - 1; 2y)$ i $B = (x + 2; 4y - 1)$ są symetryczne względem osi OX.

4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

Rozwiązania

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi 135° Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na równoramienne, równoboczne, różnoboczne. Proste prostopadłe oznaczamy symbolem $\perp$ Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: romb, deltoid Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych Miejsce przecięcia się dwóch prostych to punkt Kąt o mierze 180° nazywamy kątem półpełnym
2	$\sphericalangle A = 64°, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°, \sphericalangle B = 116°$
3	$3x - 1 = x + 2$ $-2y = 4y - 1$ $x = 1{,}5$ $y = \frac{1}{6}$
4	$b - b -$ górna podstawa $b = 12$ $P = \frac{(24 + 12) \cdot 5}{2} = 65$ $L = 54$
5	Konstrukcja

„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków”.

Planimetria[1] jest działem geometrii (słowo „geometria” pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

1. www.medianauka.pl/podstawowe_pojecia_planimetrii, 12.03.2013.

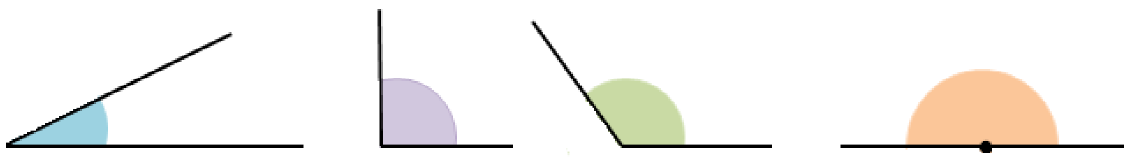
1.1. Kąt środkowy i wpisany

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

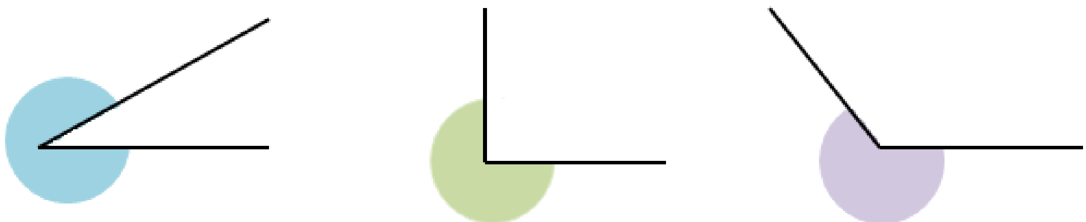
- **Stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym**

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe 180º) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od 180°, ale mniejsze od 360°).

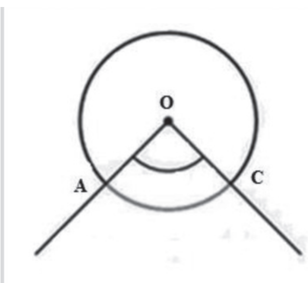
Kąty wypukłe:



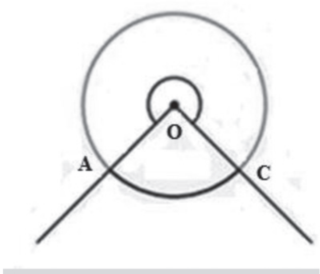
Kąty wklęsłe:



Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.



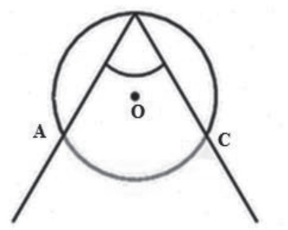
Kąt środkowy wypukły



Kąt środkowy wklęsły

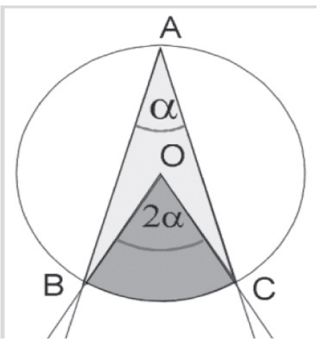
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.

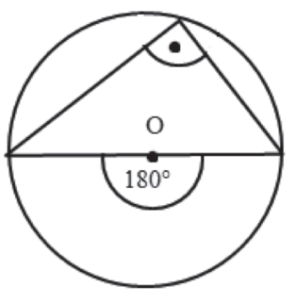
Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.



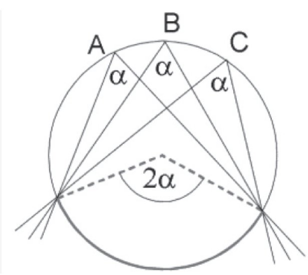
Własności kątów środkowych i wpisanych

- Jeżeli kąty wpisany i środkowy, oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.





- Kąt wpisany opary na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

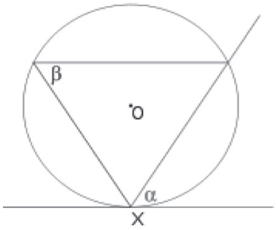


- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

Kąt dopisany do okręgu

Kąt dopisany do okręgu w punkcie X należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie X oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie X.

Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

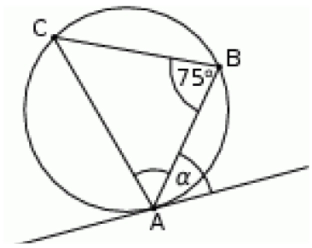


α – *kąt dopisany*

β – *kąt wpisany*

Przykład 1

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A, jak na rysunku obok. Kąt dopisany $\alpha = 50°$. Oblicz miarę kąta ACB.



Dorysujmy promienie OA i $OBOB$. Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$\sphericalangle OAB = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\sphericalangle OAB = 180° - 80° = 100°$

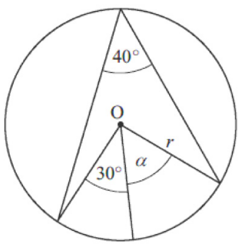
W takim razie z twierdzenia o kątach: wpisanym i środkowym, mamy

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180° - 50° - 75° = 55°$

Zadania

1.1.1 Oblicz miarę kąta **α**.



Odpowiedź: 50°

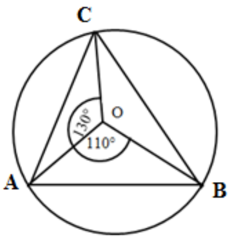
1.1.2 Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę

kąta środkowego $\boldsymbol{ABS}$.

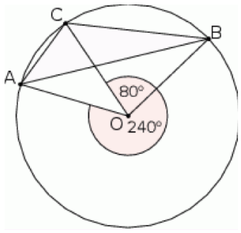
Odpowiedź: 120°

1.1.3 Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

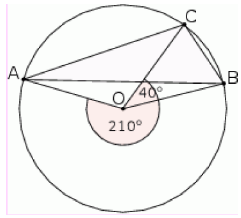
a)



b)



c)



Odpowiedź:

a) 60°, 65°, 55°

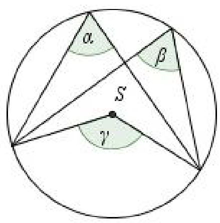
b) 40°, 20°, 120°

c) 20°, 55°, 105°

1.1.4 Okrąg podzielono na trzy części w stosunku $2 : 3 : 3$. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $45°, 45°, 90°$

1.1.5 Dany jest okrąg o środku w punkcie S. Miara kąta α jest równa $70°$. Ile wynosi suma miar kątów $\beta + \gamma$?



Odpowiedź: $210°$

1.1.6 Wierzchołki trójkąta ABC leżą na okręgu i środek O okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąt AOB ma miarę $20°$, to jaką miarę ma kąt ACB?

Odpowiedź: $70°$

1.1.7 Ostrokątny trójkąt równoramienny $\mathbf{ABC}$ o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S, przy czym kąt SAB ma miarę $40°$. Oblicz miarę kąta CAB.

Odpowiedź: $65°$

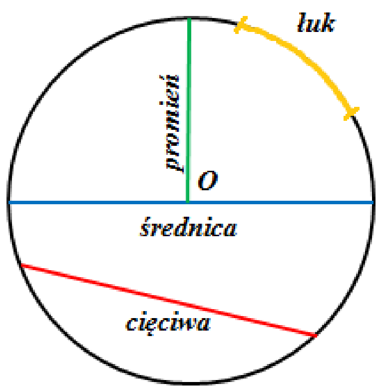
1.2. Wzajemne położenie prostej i okręgu

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)**

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od środka O. Okrąg oznaczamy $o(O, r)$.

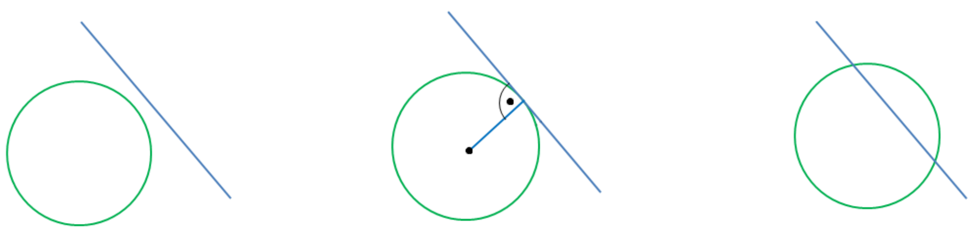
Promieniem okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą r. Okrąg o promieniu r ma długość $2\pi r$.



Cięciwą okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu. **Średnicą** okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i okręgu:

1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.



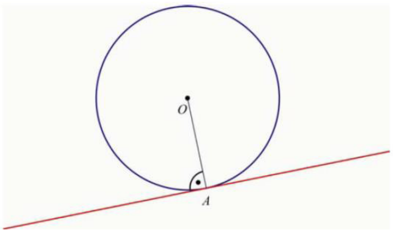
Okrąg i prosta są rozłączne   Okrąg i prosta są styczne   Prosta przecina okrąg

Definicja

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

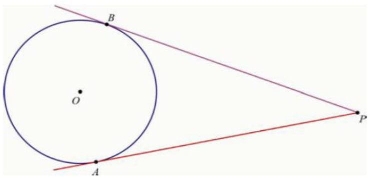
Twierdzenie 1

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.



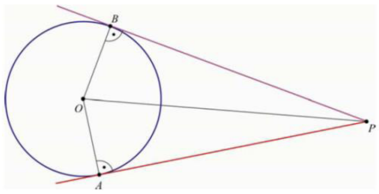
Twierdzenie 2

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.

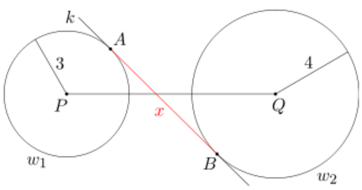


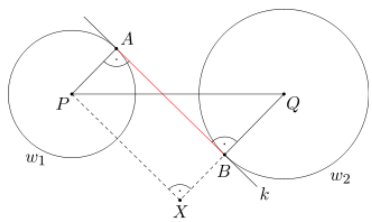
Dowód

Trójkąty POA i POB są prostokątne. Półprosta PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$ (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$. Oznacza to (suma kątów trójkącie), że również $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$.



Ponadto $AO = BO = r$. Z cechy kbk wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że $PA = PB$.





Przykład 1

Dany jest odcinek $|PQ| = 10$ oraz okręgi: jeden o środku P i promieniu 3, a drugi o środku Q i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej k, która jest do nich styczna odpowiednio w punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB.

Zaznaczamy na prostej BQ, lecz poza odcinkiem BQ, taki punkt X, aby długość odcinka BX była równa 33. Następnie uzasadnimy, że czworokąt $ABXP$ jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PQX.

Niech X będzie takim punktem leżącym na prostej BQ, poza odcinkiem BQ, że $|BX| = 3$. Proste $APAP$ i BX są prostopadłe do wspólnej prostej AB, więc $AP \parallel BX$ są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt $APXB$ jest równoległobokiem. A ponieważ w tym równoległoboku kąt $\sphericalangle PAB = 90^{\circ}$, więc równoległobok $ABXP$ jest prostokątem.

Zatem trójkąt PXQ jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |Ab|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4 + 3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

$$|AB| = \sqrt{51}$$

Zadania

1.2.1 Obwód okręgu jest równy $\mathbf{8\pi\ cm.8\pi\ cm}$. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

a) nie mniejsza niż $4\ cm4\ cm$

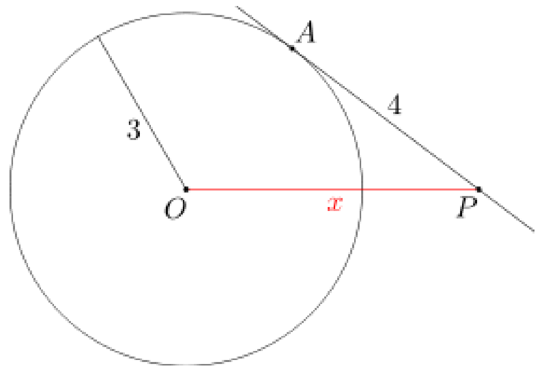
b) nie większa niż $3\ cm3\ cm$?

Odpowiedź:

a) jeden lub wcale

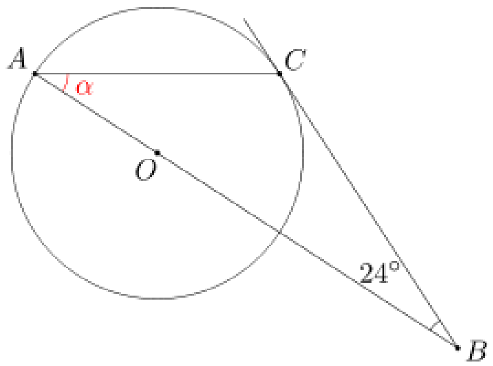
b) dwa punkty

1.2.2 Dany jest okrąg o środku O i promieniu 3. Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiedząc, że długość odcinka $\boldsymbol{AP}$ wynosi 4, oblicz długość odcinka OP.



Odpowiedź: $|OP| = 5|OP| = 5$

1.2.3 Dany jest okrąg o środku $\boldsymbol{O}$ oraz punkty $\boldsymbol{A, C}$ leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie $\boldsymbol{C}$ przecina prostą $\boldsymbol{AO}$ w punkcie $\boldsymbol{B}$. Wiedząc, że miara kąta $\boldsymbol{ABC}$ wynosi $\boldsymbol{24}°$, oblicz miarę kąta $\boldsymbol{CAB}$.



Odpowiedź: $33°$

1.3. Wzajemne położenie dwóch okręgów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

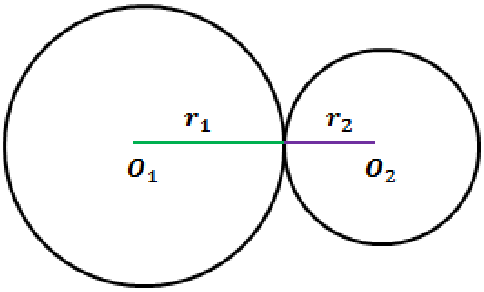
- **Sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt**
- **Sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny**
- **Obliczać miary kątów i długości boków trójkąta**

- **Obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona**
- **Korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi**

Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

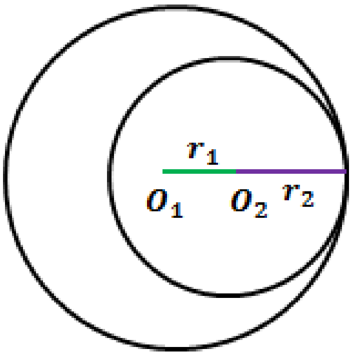
Okręgi styczne zewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.



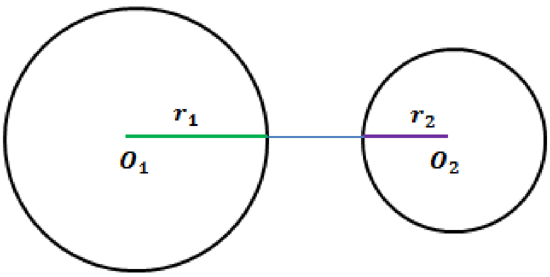
$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Okręgi rozłączne nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

- Większa od sumy ich promieni



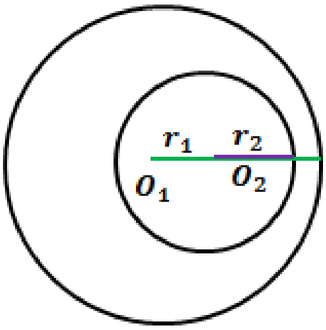
$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni

Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.

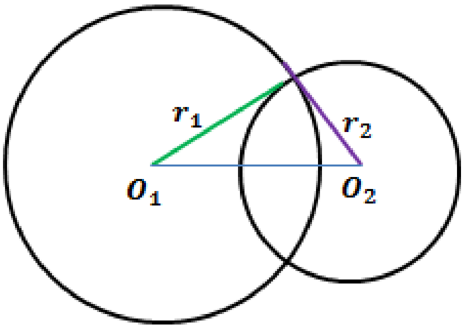
Przykład 1

Dane są dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio równych



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

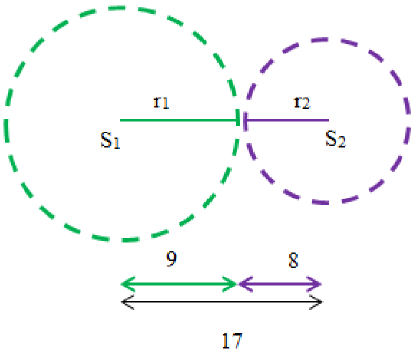
r_1 i r_2. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli



$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

$|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8.$

Robimy rysunek poglądowy, jeden okrąg ma promień $r_1 = 9$, a drugi $r_2 = 8$.



Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.

Zadania

1.3.1 Określ wzajemne położenie okręgów $\mathbf{o(O_1, r_1)}$ i $\mathbf{o(O_2, r_2)}$, jeśli $|\mathbf{O_1O_2}| = \mathbf{12\ cm}$ oraz:

a) $r_1 = 3\ cm,\ \ r_2 = 8\ cm$

b) $r_1 = 5\ cm,\ \ r_2 = 7\ cm$

c) $r_1 = 9\ cm,\ \ r_2 = 7\ cm$

d) $r_1 = 22\ cm,\ \ r_2 = 10\ cm$

Odpowiedź:

a) rozłączne zewnętrznie

b) styczne zewnętrznie

c) przecinające się

d) styczne wewnętrznie

1.3.2 Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach $\mathbf{10\ cm 10\ cm}$ i $\mathbf{6\ cm 6\ cm}$, gdy:

a) okręgi te są styczne zewnętrznie

b) okręgi są styczne wewnętrznie

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego

d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

Odpowiedź:

a) $|S_1S_2| = 16\ cm$

b) $|S_1S_2| = 4\ cm$

c) $|S_1S_2| = 6\ cm$

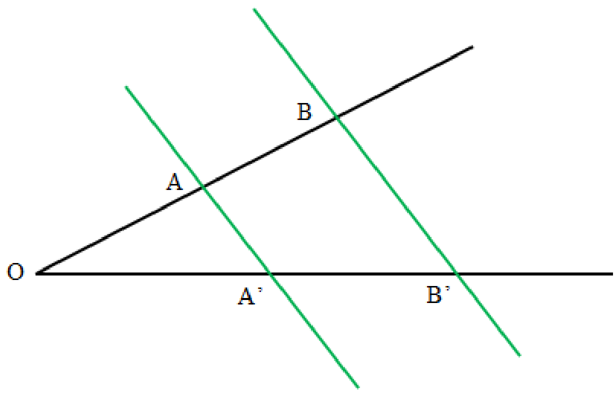
d) $|S_1S_2| = 10\ cm$

1.4. Twierdzenie Talesa

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

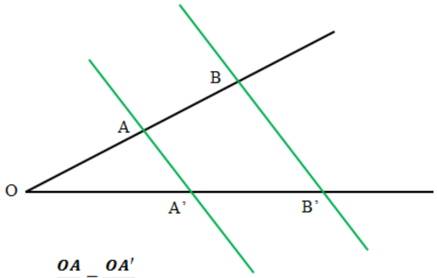
- **Stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych**

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.



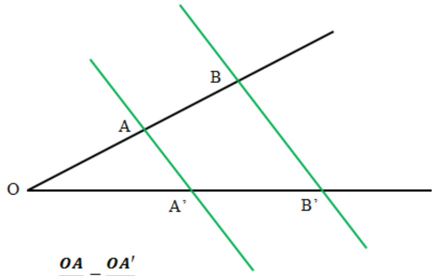
Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

Przypadek 1



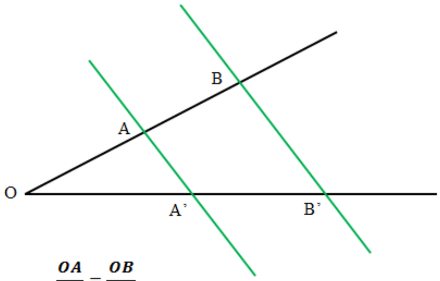
$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$

Przypadek 2

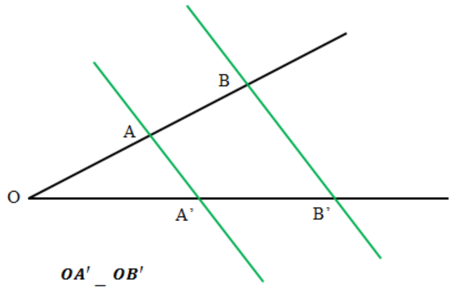


$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$

Przypadek 3



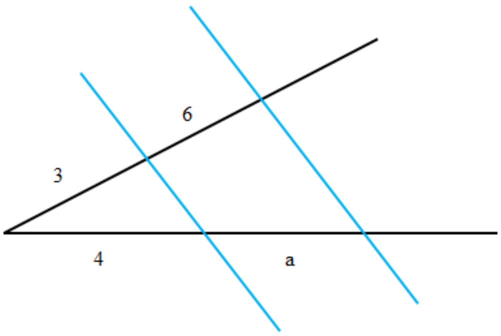
$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$



$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$

Przykład 1

Oblicz długość odcinka a.



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

Układamy proporcję: $\frac{3}{6} = \frac{4}{a}$

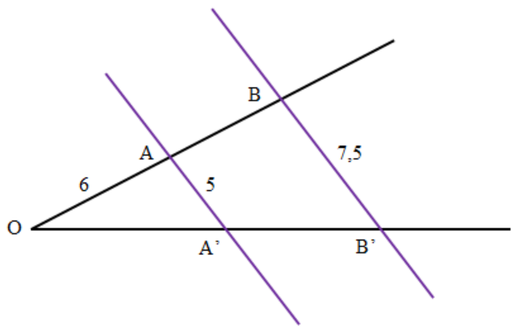
$3a = 6 \cdot 4$

$3a = 24 / : 3$

$a = 8$

Przykład 2

Oblicz długość odcinka AB.



Obliczając długość odcinka AB skorzystamy z przypadku 3.

Układamy proporcję: $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

$$\frac{6}{5} = \frac{6 + |AB|}{7{,}5}$$

$5(6 + |AB|) = 6 \cdot 7{,}5$

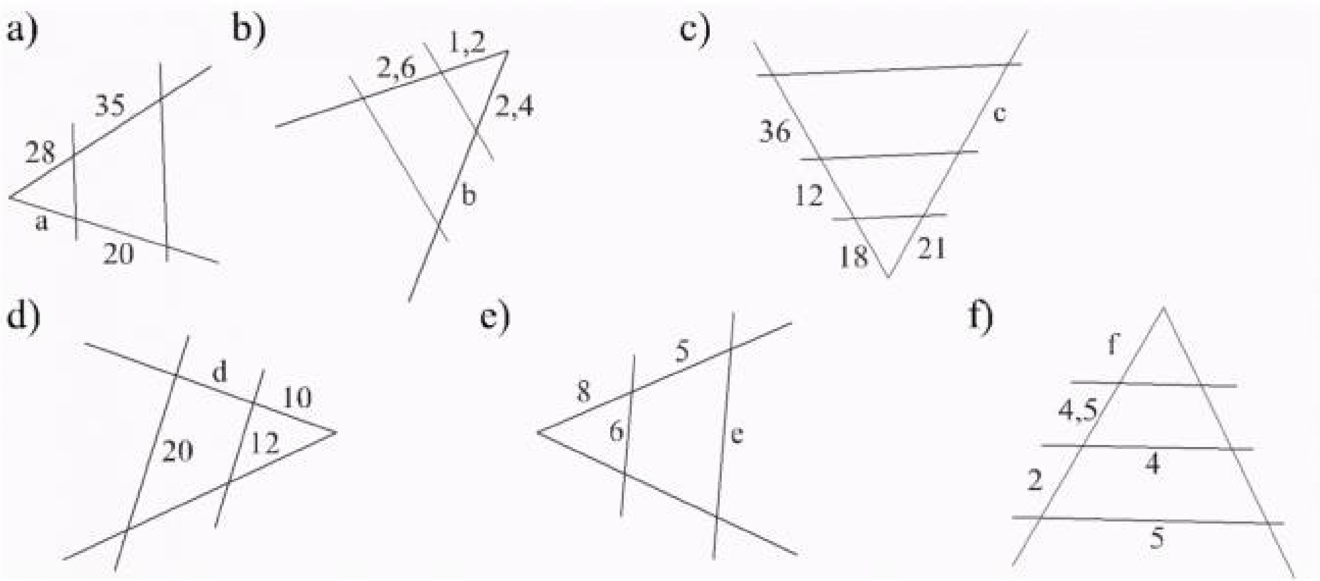
$30 + 5|AB| = 45 / -30$

$5|AB| = 15 / : 5$

$|AB| = 3$

Zadania

1.4.1 Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



Odpowiedź:

a) 16 b) 5,2 c) 42

d) $6\frac{2}{3}$ e) $9\frac{3}{4}$ f) 3,52

1.4.2 W trapezie $\mathbf{ABCD}$, gdzie $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{CD}$, przedłużono boki $\mathbf{AD}$ i $\mathbf{BC}$ do przecięcia w punkcie $\mathbf{S}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DS}$ wiedząc, że jest on krótszy od odcinka $\mathbf{CS}$ o $\mathbf{3\ cm}$ i $|\mathbf{AD}| = \mathbf{16\ cm}$, a $|\mathbf{BC}| = \mathbf{24\ cm}$.

Odpowiedź: $6\ cm$

1.4.3 W trapezie krótsza podstawa wynosi 6, zaś ramiona mają długość 4 i 5. Ramiona trapezu przedłużono tak, iż powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości 4 zostało przedłużone o odcinek długości 3.

Odpowiedź: 30

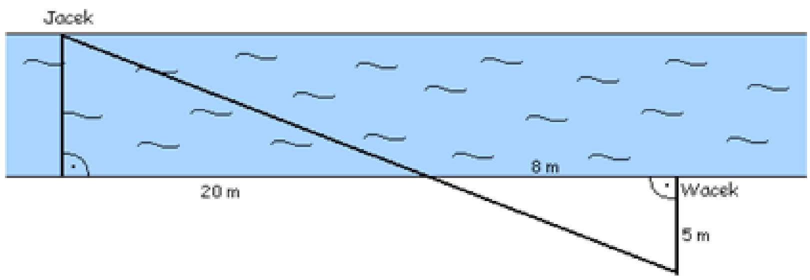
1.4.4. W trójkąt równoramienny o podstawie **8 cm** wpisano kwadrat o boku równym **6 cm**, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

Odpowiedź: 24 cm

1.4.5. Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

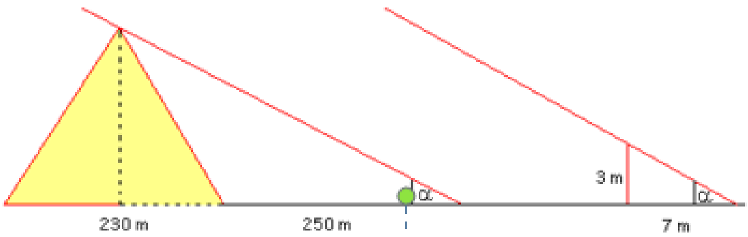
Odpowiedź: 3,4 cm

1.4.6 Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



Odpowiedź: 12,5 cm

1.4.7. Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



Odpowiedź: 156,43 m

1.4.8. Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

Odpowiedź: 12 m

1.4.9. W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: AC = 2,4 i CB = 7,2 m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec A podniesie się na wysokość 4 metrów.

Odpowiedź: O 12 m.

1.4.10. Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm, a średnicę 2 cm?

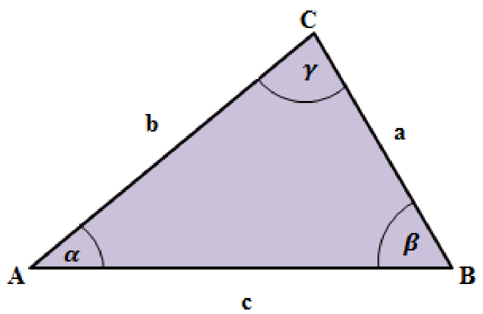
Odpowiedź: Wielkość przedmiotów z odległości 100 m wynosi 10 m.

1.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i odwrotne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt**
- **Sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny**
- **Obliczać miary kątów i długości boków trójkąta**
- **Obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona**
- **Korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi**

Trójkąt – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Podział trójkątów

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

Podział trójkątów ze względu na kąty:

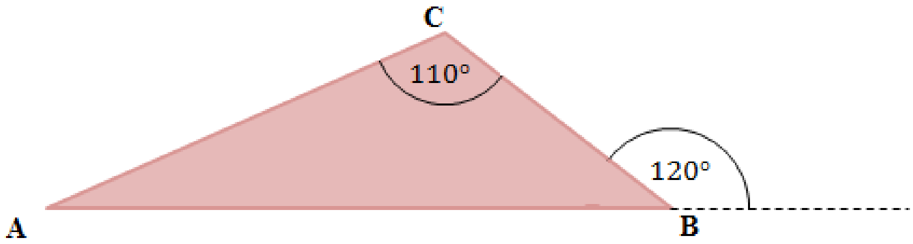
1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.
2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie, nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną.**
3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

Podział trójkątów ze względu na boki:

1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę 60°.
2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.
3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 110º, a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę 120º. Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



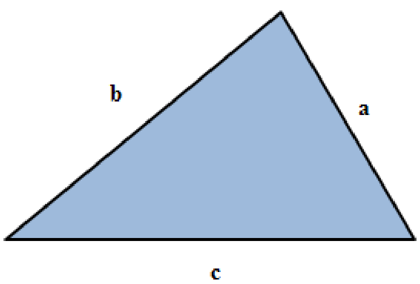
$\sphericalangle B = 180° - 120° = 60°$

$110° + 60° + \sphericalangle A = 180°$

$170° + \sphericalangle A = 180°$

$\sphericalangle A = 180° - 170° \sphericalangle A = 180° - 170° \Rightarrow\Rightarrow \sphericalangle A = 10° \sphericalangle A = 10°$

Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > c$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > b$

$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > a$

Przykład 2

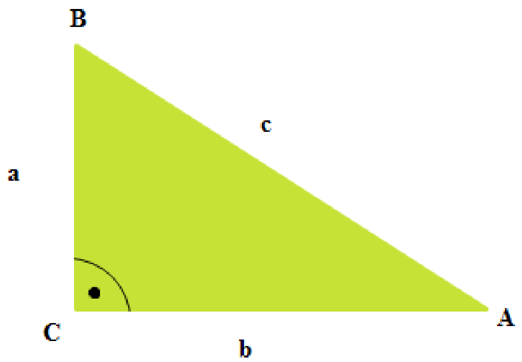
Sprawdź, czy odcinki o długościach $5, 6, 3\sqrt{2}$ mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości, należy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4{,}25 \approx 9{,}25 > 6$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

Twierdzenie Pitagorasa

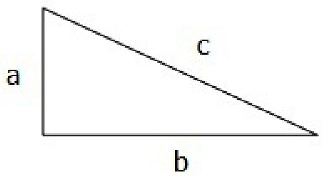


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Przykład 3

Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: $3{:}\,4$, a przeciwprostokątna ma długość $15\ \mathrm{cm}$.



$a = ?$

$b = ?$

$c = \ 10\ cm$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3\ :\ 4$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3b\ \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15\ cm\ ^2)$$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225\ cm^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225\ cm^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144\ cm^2$$

$$b = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \ \Rightarrow \ a = \frac{3}{4} \cdot 12\ cm = 9\ cm$$

Odpowiedź: Przyprostokątne mają długości $9\ cm$ i $12\ cm$.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a) $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$

b) $2, \sqrt{10}, 4$

a) $\left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$$24 = 3 + 21$$

$$24 = 24$$

$$L = P$$

Trójkąt jest prostokątny

c) $4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2$

$$16 = 10 + 4$$

$$16 \neq 14$$

$$L \neq P$$

Trójkąt nie jest prostokątny

Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską.**
Przykłady takich trójek:

3, 4, 5;

5, 12, 13;

40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q takie, że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$$a = p^2 - q^2,\ b = 2pq,\ c = p^2 + q^2.$$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

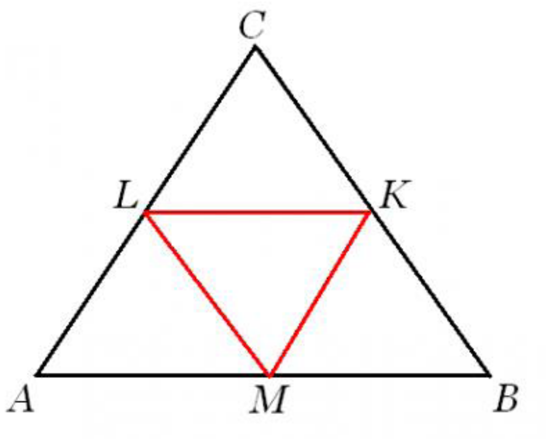
Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$AB \parallel LK \qquad |LK| = \frac{1}{2}|AB|$

$AC \parallel KM \qquad |KM| = \frac{1}{2}|AC|$

$BC \parallel LM \qquad |LM| = \frac{1}{2}|BC|$



Zadania

1.5.1 Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.

Odpowiedź: 30°, 40°, 110°

1.5.2 Jeden kąt trójkąta ma miarę 26°, a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi 12°. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Odpowiedź: 26°, 71°, 83°

1.5.3 Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3 : 5 : 4.

Odpowiedź: $a = 12\ cm, b = 20\ cm, c = 16\ cma = 12\ cm, b = 20\ cm, c = 16\ cm$

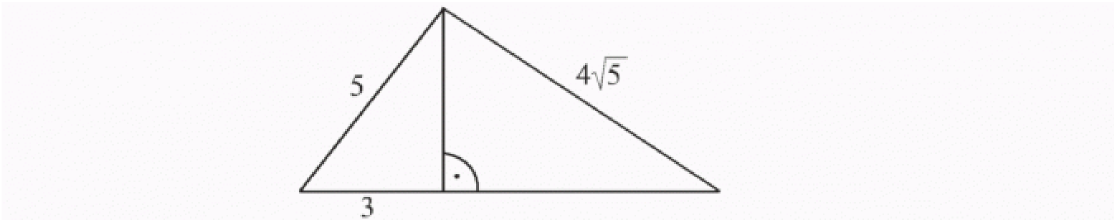
1.5.4 W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.

Odpowiedź: 8 cm

1.5.5 W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}\ cm$

1.5.6 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:



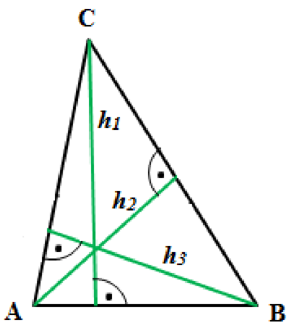
Odpowiedź: $P = 22$

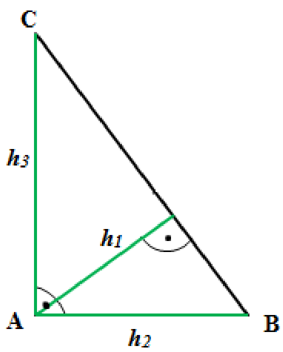
1.5.7 Dany jest trójkąt $\mathbf{ABC}$ o bokach długości: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{6}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AC}| = \mathbf{5}$. Punkt $\mathbf{M}$ jest środkiem boku $\mathbf{AC}$, punkt $\mathbf{N}$ – środkiem boku $\mathbf{BC}$. Obliczyć obwód trapezu $\mathbf{ABNM}$.

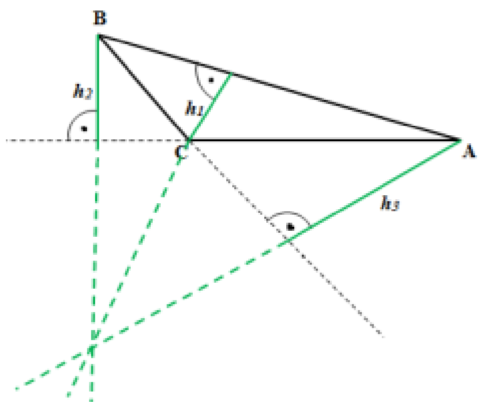
Odpowiedź: 13,5

Wysokości i środkowe w trójkącie

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

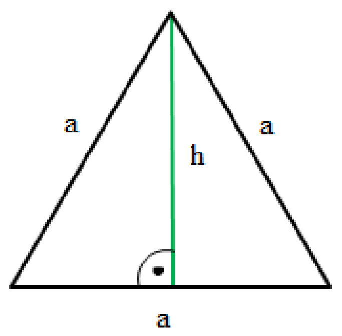






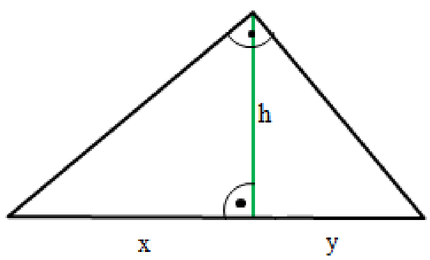
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



Wysokość trójkąta o boku jest równa

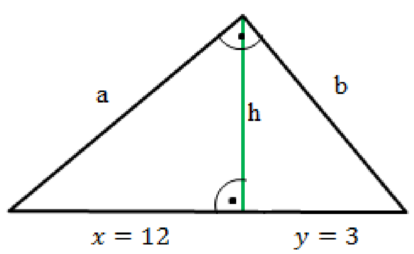
$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a}\sqrt{3}}{2}$$



W **trójkącie prostokątnym** wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki x, y, dla których $\boldsymbol{h} = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}$

Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości $3\ cm$ i $12\ cm$. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.



a, b – szukane długości przyprostokątnych
h – wysokość

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej a.

$a^2 = x^2 + h^2$

$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}\ cm$

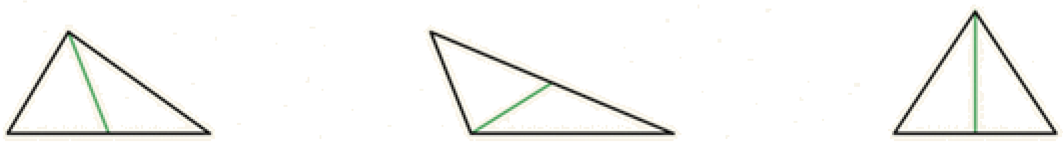
Podobnie liczmy długość przyprostokątnej b.

$b^2 = y^2 + h^2$

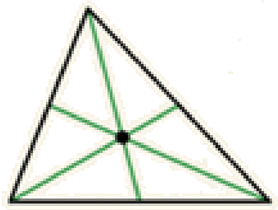
$b^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$

Wysokość trójkąta ma długość $6\ cm$, a przyprostokątne $6\sqrt{5}\ cm$ i $3\sqrt{5}\ cm$.

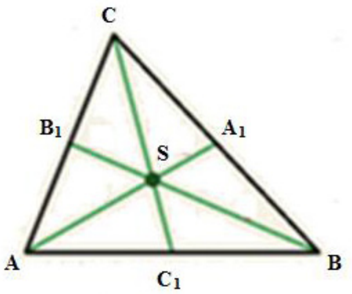
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

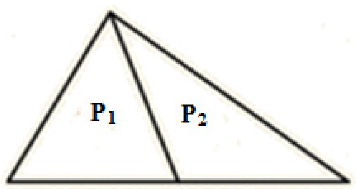


Środek ciężkości S dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|}=\frac{|CS|}{|SC_1|}=\frac{|BS|}{|SB_1|}=\frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości $3, 5, 6$.

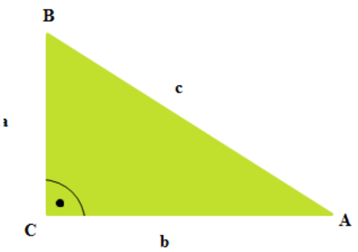
Najpierw liczymy, ile wynosi połowa obwodu trójkąta $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Odpowiedź: Pole trójkąta o bokach $3, \ 5, 6$ wynosi $2\sqrt{14}$.

Twierdzenie

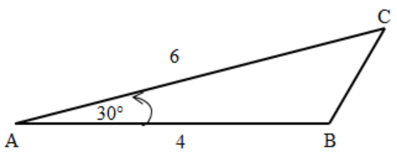
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BCA|}$$

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot sin30°$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6j^2$.

Zadania

1.5.8 W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: $16\ cm, 2\sqrt{97}\ cm, 2\sqrt{97}\ cm$

1.5.9 W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Odpowiedź: $64, 16 + 16\sqrt{2}$

1.5.10 Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|\mathbf{AB}| = \mathbf{4}$ i $|\mathbf{BC}| = \mathbf{2\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $\sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90° \sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90°$

1.5.11 Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli $|\mathbf{AC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AB}| = \mathbf{7}$, $\sphericalangle \mathbf{BAC} = \mathbf{60}°$.

Odpowiedź: $7\sqrt{3}$

1.5.12 Oblicz pole trójkąta o bokach $\mathbf{12}$ i $\mathbf{9\sqrt{2}}$ oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze 30°.

Odpowiedź: $27\sqrt{2}$

1.5.13 W trójkącie ostrokątnym $\mathbf{ABC}$ poprowadzono prostą prostopadłą do boku $\mathbf{AB}$, przecinającą bok $\mathbf{AC}$ w punkcie $\mathbf{E}$ i bok $\mathbf{AB}$ w punkcie $\mathbf{F}$. Punkt $\mathbf{D}$ jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu $\mathbf{C}$. Wiedząc, że $|\mathbf{EC}| = \mathbf{3} |\mathbf{FD}| = \mathbf{1}$, oblicz sinus kata $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

1.6. Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

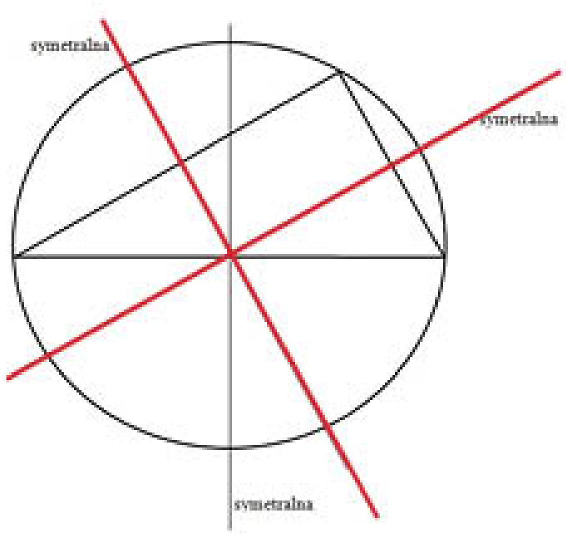
- **Stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu**

Okrąg opisany na trójkącie

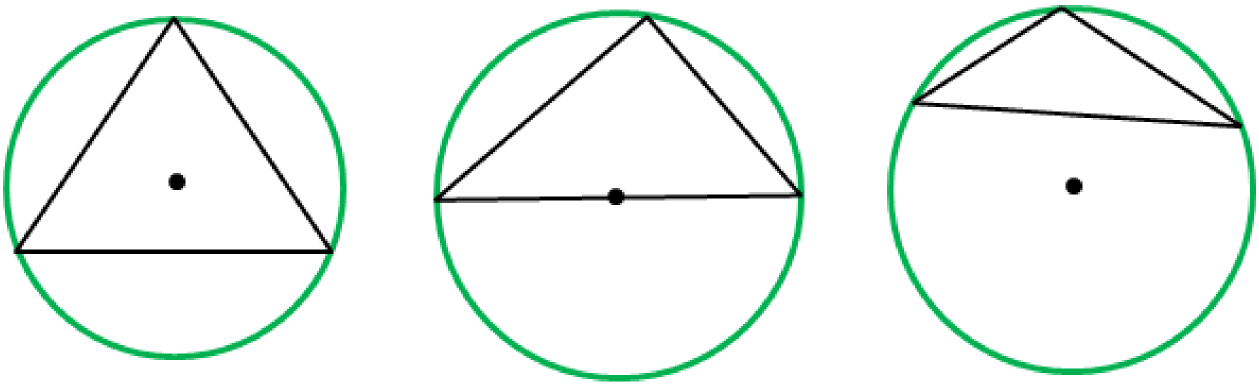
Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.



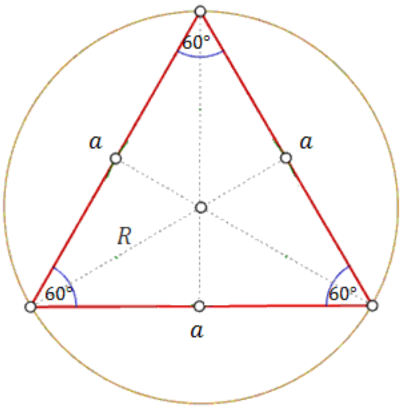
Na każdym trójkącie można opisać okrąg.



- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

Okręgi opisane na wybranych trójkątach

Trójkąt równoboczny



R – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

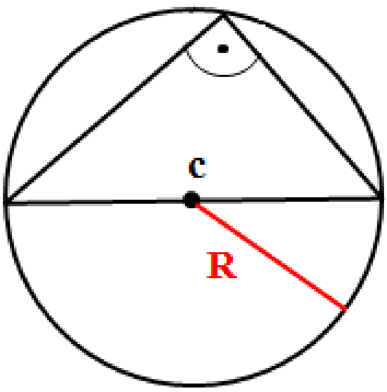
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$\boldsymbol{h=\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{R=\frac{2}{3}h}$$

Trójkąt prostokątny



c – przeciwprostokątna

h – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$\boldsymbol{R=\frac{1}{2}c}$$

Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku$a=12\ cm$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru $R=\frac{2}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a=12\ cm$, to:

$$h=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

więc $R=\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}R=\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R=4\sqrt{3}$.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $4\ cm$ i $10\ cm$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi $2R$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$

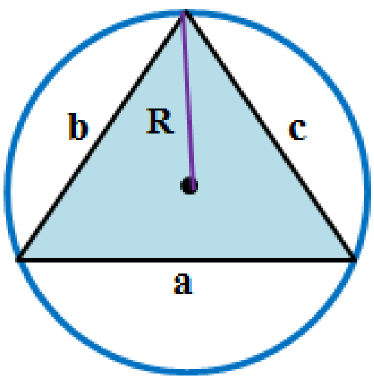
$(2R)^2 = 16 + 100$

$4R^2 = 116 /:4$

$R^2 = 29 \Rightarrow R = \sqrt{29}$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = \sqrt{29}$.

Pole trójkąta wpisanego w okrąg



Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wynosi $\boldsymbol{P = \frac{abc}{4R}}$

Zadania

1.6.1 Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: 8π

1.6.2 Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $25\pi\ cm^2$. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$

1.6.3 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

a) równobocznym, o boku długości $8\ cm$.

Odpowiedź: $R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

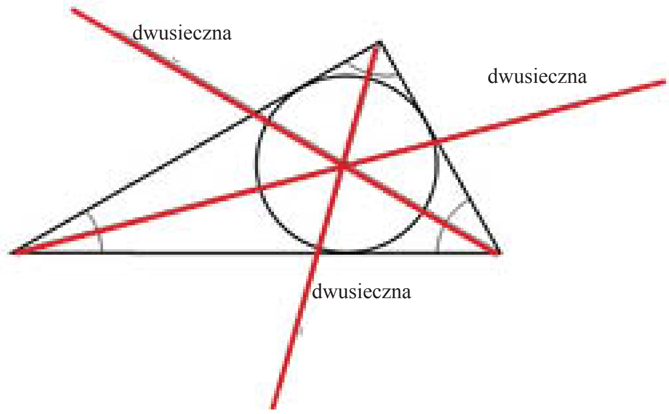
b) prostokątnym, o przyprostokątnych $12\ cm$ i $18\ cm$.

Odpowiedź: $R=3\sqrt{13}$

1.6.4 Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy $\mathbf{13\frac{13}{24}}$. Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

Odpowiedź: 17

Okrąg wpisany w trójkąt



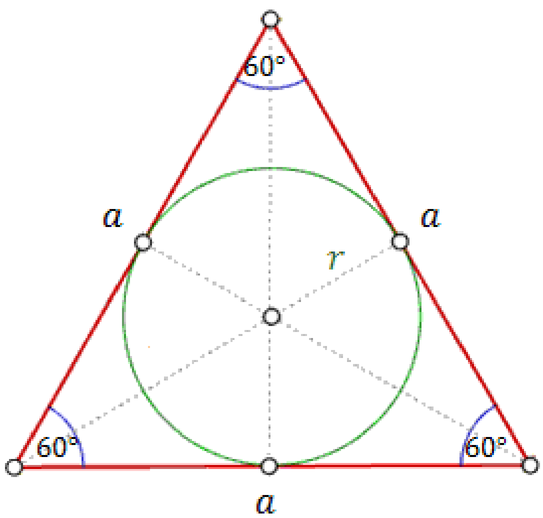
usieczna kąta to półprosta, która ma zątek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa y o równych miarach.

dy trójkąt ma trzy dwusieczne, które ecinają się w jednym punkcie. Punkt ten środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

Trójkąt równoboczny



r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

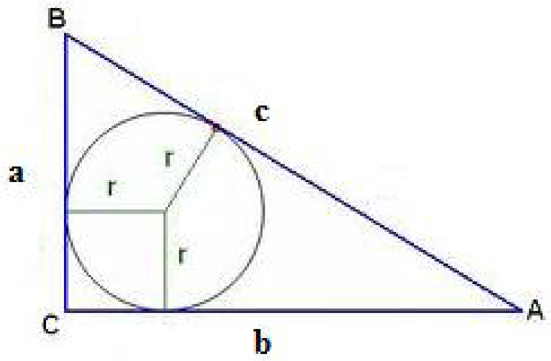
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\frac{1}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku$a = 8\ cm$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 8\ cm$, to:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

więc $r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$.

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ cm$ wynosi

$r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$.

Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3\ cm$

i przeciwprostokątnej $5\ cm$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$5^2 = 3^2 + a^2$

$25 = 9 + a^2$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\ cm$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru $r = \frac{a+b+c}{2}$, więc

$$r = \frac{4+3-5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość $1\ cm$.

Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c opisanego na okręgu o promieniu r jest równe

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Zadania

1.6.5 Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $12\sqrt{3}\ cm^2$

1.7.6 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:

a) Pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: $25\pi\ cm^2$

b) Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $4\pi\ cm^2$

c) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Odpowiedź: $h = \frac{24}{5}\ cm$

Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

1.6.7 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $\mathbf{12\ cm}$. Kąty przy tej podstawie mają po $\mathbf{30°}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $r = \left(12 - 6\sqrt{3}\right)$

1.6.8 Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $\mathbf{a}$ i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:

a) $a = 4$ b) $a = 3\sqrt{6}$

c) $a = 6\sqrt{2}$ d) $a = 12$

Odpowiedź:

a) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ b) $r = \sqrt{3}, R = 3\sqrt{2}$

c) $r = \sqrt{6}, R = 2\sqrt{6}$ d) $r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}$

1.6.9 W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{5}{12}, tg\beta = \frac{12}{5}$

1.7. Przystawanie i podobieństwo trójkątów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Rozpoznawać trójkąty przystające i podobne**
- **Wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów**

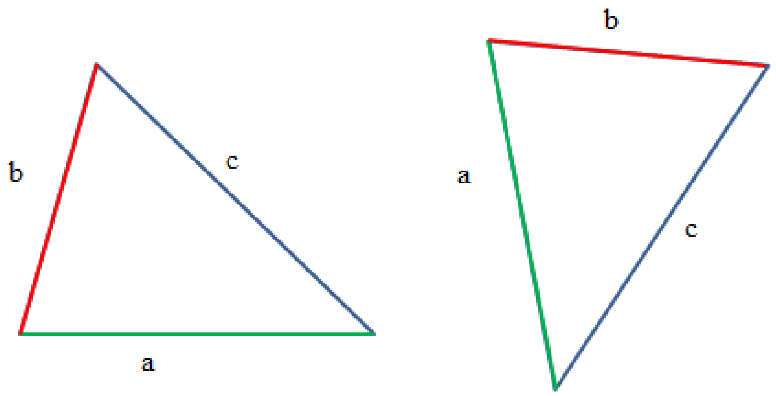
Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem .

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

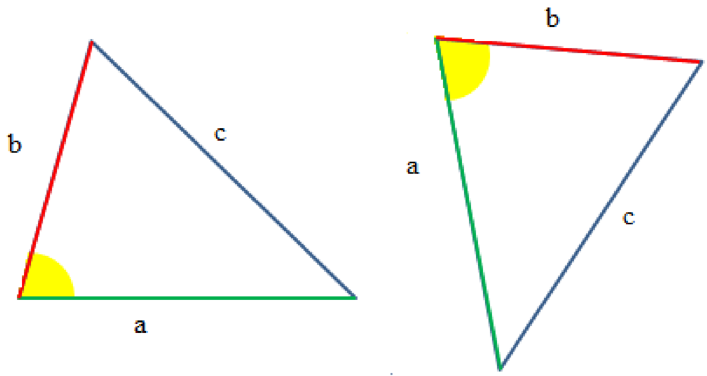
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



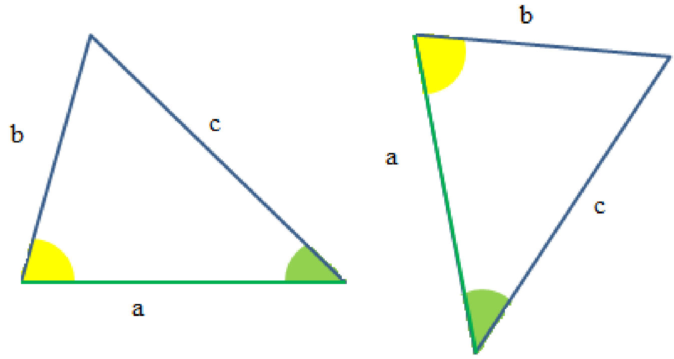
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



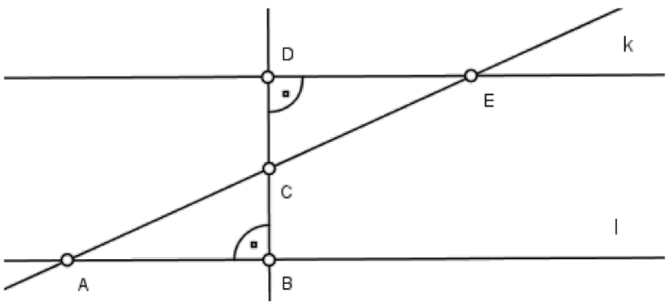
III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Przykład 1

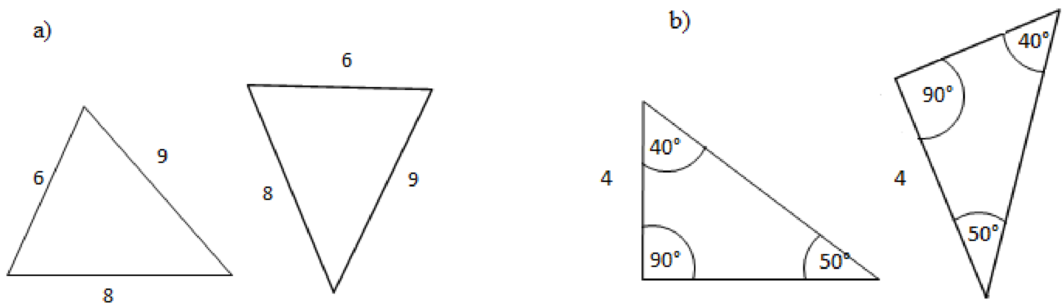
Proste k i l są równoległe. Punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.



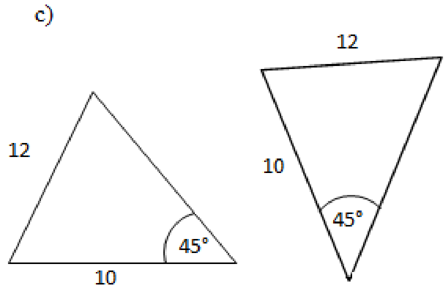
Kąty BCA oraz DCE jako kąty wierzchołkowe mają równe miary. $|DC| = |CB|$, ponieważ punkt C jest środkiem odcinka BD. Wobec powyższych faktów, trójkąty ABC oraz DCE na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

Zadanie

1.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.



c)



Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

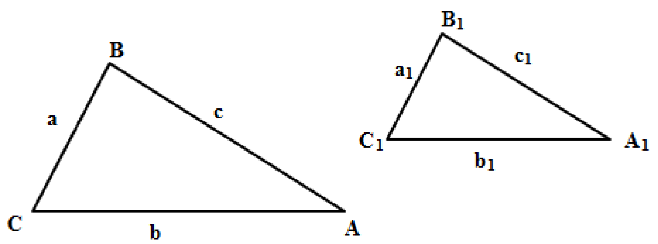
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem ~.

I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.

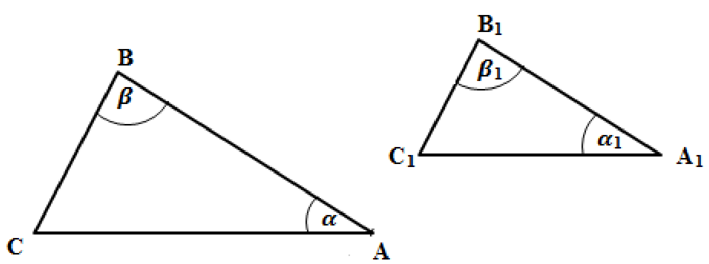


$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} = k$$

k – skala podobieństwa
$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



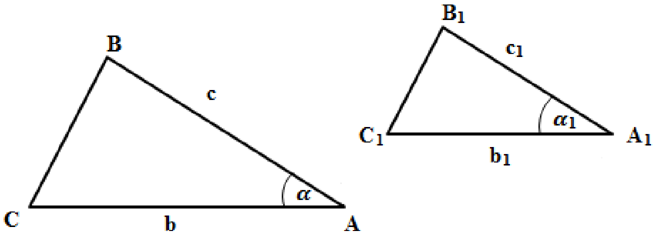
$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \beta_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



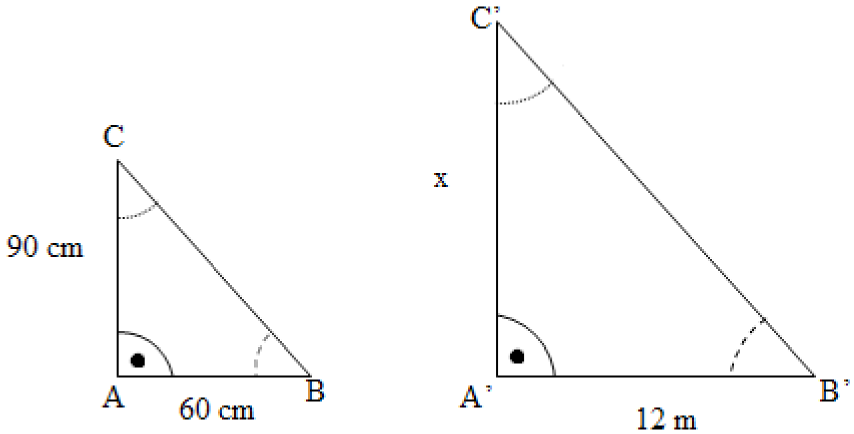
$\alpha = \alpha_1$

$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.
W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$\frac{0,9}{0,6} = \frac{x}{12}$

$6x = 9 \cdot 12$

$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$

Odpowiedź: Wieża ma wysokość 18 m.

Zadania

1.7.2 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ w skali $\mathbf{k = 2}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$,

jeśli: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{5}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{7}, |\mathbf{CA}| = \mathbf{4}$.

Odpowiedź: $|A'B'| = 10, |B'C'| = 14, |C'A'| = 8$.

1.7.3 Ramiona trapezu $\mathbf{ABCD}$ przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie $\mathbf{E}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DE}$.

Odpowiedź: 12

1.7.4 Punkty $\mathbf{A', B', C'}$ są środkami boków trójkąta $\mathbf{ABC}$. Pole trójkąta $\mathbf{A', B', C'}$ jest równe $\mathbf{4}$. Oblicz pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Odpowiedź: 16

17.5 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$. Oblicz długość boku $|\mathbf{A'C'}|$, jeżeli $|\boldsymbol{AB}| = \mathbf{8}\boldsymbol{cm}$, $|\boldsymbol{AC}| = \mathbf{5}\ \boldsymbol{cm}$, $|\boldsymbol{A'B'}| = \mathbf{12}\ \boldsymbol{cm}$.

Odpowiedź: $|A'C'| = 7{,}5\ cm$

1.7.6 Trójkąty $\boldsymbol{ABC}$ i $\boldsymbol{A'B'C'}$ są podobne. Trójkąt $\boldsymbol{ABC}$ ma boki o długości $\mathbf{4}\ \boldsymbol{cm}, \mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$ i $\mathbf{8}\ \boldsymbol{cm}$. Obwód trójkąta $\boldsymbol{A'B'C'}$ wynosi $\mathbf{135}\ \boldsymbol{cm}$. Oblicz długości boków trójkąta $\boldsymbol{A'B'C'}$.

Odpowiedź: $30\ cm, 45\ cm, 60\ cm$

1.7.7 Drzewo o wysokości $\mathbf{4}\ \boldsymbol{m}$ rzuca cień o długości $\mathbf{8}\ \boldsymbol{m}$. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości $\mathbf{3}\boldsymbol{m}$. Oblicz wysokość znaku drogowego.

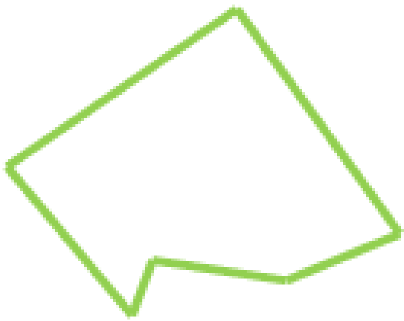
Odpowiedź: $1{,}5\ m$

1.8. Wielokąty

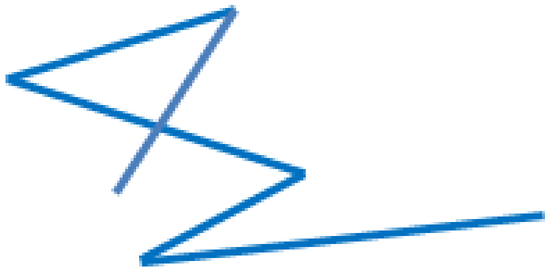
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać liczbę przekątnych wielokąta**
- **Obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta**

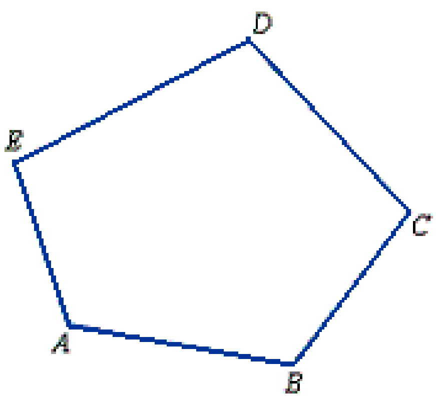
Łamaną nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.
Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej.**



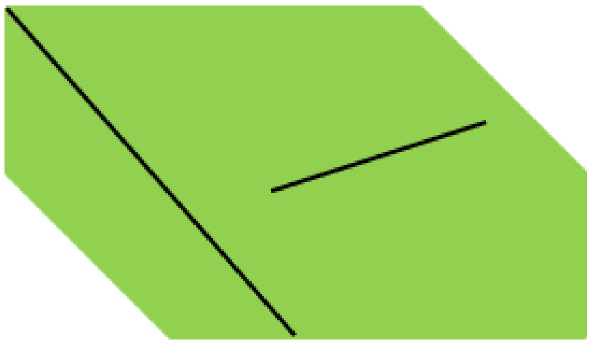
Łamana zwyczajna zamknięta

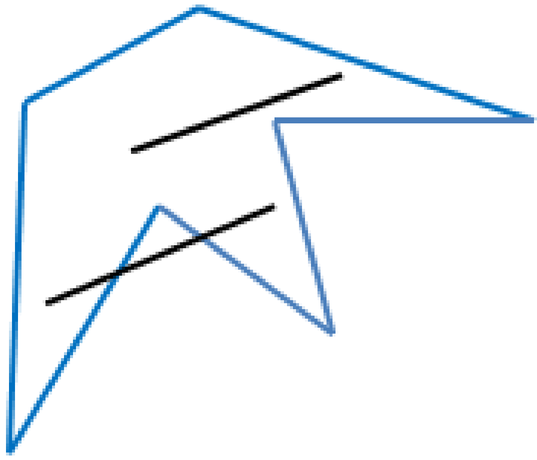


Łamana zwyczajna otwarta



Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.
Wielokąt o n bokach nazywamy również n-kątem.
Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.





Wielokąt wypukły
Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie

Wielokąt wklęsły
Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.

Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

Przykład 1

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:

$$(n-2)\cdot 180^\circ$$

Przykład 2

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

$$(n-2)\cdot 180^\circ = (17-2)\cdot 180^\circ = 15\cdot 180^\circ = 2700^\circ$$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę”. To znaczy, mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n". Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \; /\cdot 2$$

Obliczamy powstałe równanie:

$$(n-3)n = 108$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 441$$

$$\sqrt{\Delta} = 21$$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ – nie spełnia warunków zadania, ponieważ liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+21}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1080°$. Jaki to wielokąt? Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$(n-2) \cdot 180° = 1080° \; /:180°$$

$$n - 2 = 6$$

$$n = 8$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

Zadania

1.8.1 Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: Dziesięciokąt.

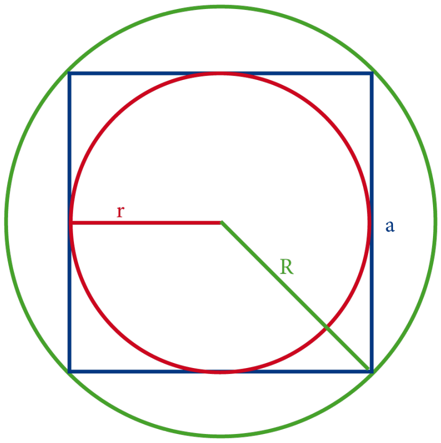
1.8.2 Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $\mathbf{1620°}$. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: Jedenastokąt.

Czworokąty

Na początek przypomnimy podstawowe wzory na pola czworokątów.

Kwadrat



$P = a^2$

$P = 2R^2$

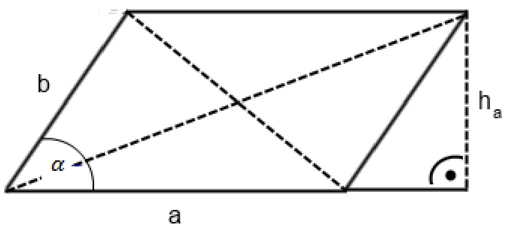
$P = 4r^2$

d – przekątna

$d = a\sqrt{2}$

$P = \frac{1}{2}d^2$

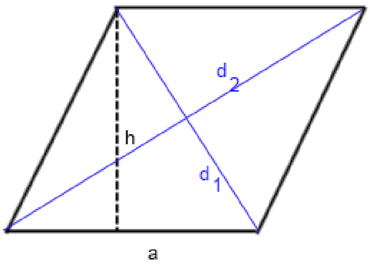
Równoległobok



$P = a \cdot h_a$

$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Romb

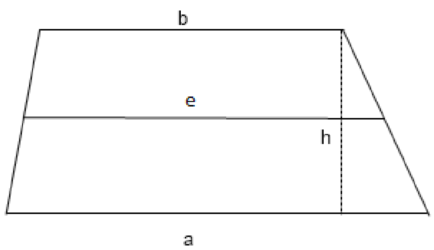


$P = a \cdot h_a$

$P = \frac{1}{2}d_1d_2$

$P = a^2 sin\alpha$

Trapez

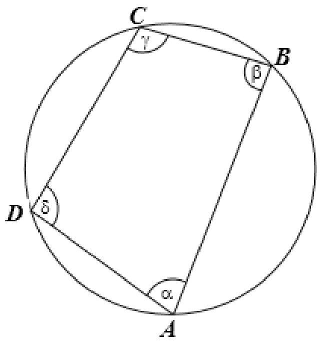


$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

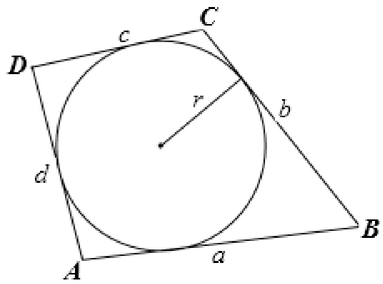
e – odcinek łączący środki ramion trapezu

$e = \frac{a+b}{2}$

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:
$a + c = b + d$



Zadania

1.8.3 Oblicz pole równoległoboku o bokach $\mathbf{7\ cm}$ i $\mathbf{12\ cm}$, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o 60°.

Odpowiedź: $42\sqrt{3}\ cm^2$

1.8.4 W rombie $\mathbf{ABCD}$ bok AB ma długość $\mathbf{20\ cm}$, a przekątna $\mathbf{BD}$ ma długość $\mathbf{24\ cm}$. Punkty $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ są kolejno środkami boków rombu.

a) wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest prostokątem,

b) oblicz pole tego prostokąta.

Odpowiedź: b) $P = 192\ cm^2$

1.8.5 W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą $\mathbf{45°}$ i $\mathbf{30°}$. Oblicz pole trapezu.

Odpowiedź: $P = 21\left(\sqrt{3} - 1\right)\ cm^2$

1.8.6 Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3cm. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedź: $P = 45\ cm^2$

1.8.7 W trójkącie prostokątnym ABC dane są $|\mathbf{AC}| = \mathbf{12}$, $\sphericalangle\mathbf{CAB} = \mathbf{60^\circ}$. Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1 : 5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.

Odpowiedź: $P = 70\sqrt{3}$

1.88 W czworokącie $\mathbf{ABCD}$ przekątne $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BD}$ przecinają się w punkcie $\mathbf{E}$. Dane są pola trzech trójkątów

: $\mathbf{P_{BCE} = 15, P_{ECD} = 5, P_{AED} = 10}$. Oblicz pole czworokąta $\mathbf{ABCD}$.

Odpowiedź: 60.

1.9. Wielokąty foremne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego**
- **Obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego**
- **Obliczać pola wielokątów foremnych**

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.
Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.
Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o *n* bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

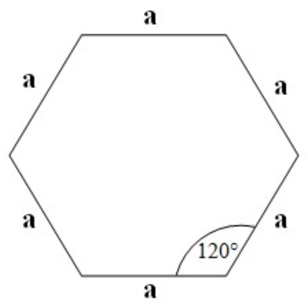
Suma miar kątów wewnętrznych *n*-kąta jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

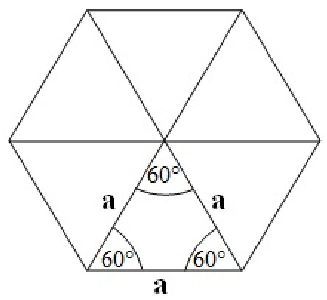
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny.**



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi $720°$.

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę $120°$.



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	**Pole**	**Promień okręgu opisanego na wielokącie**	**Promień okręgu wpisanego w wielokąt**
Trójkąt równoboczny	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zadania

1.9.1 Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $4,5\ \mathrm{cm}$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $R = 3\ cm,\ r = 1{,}5\ cm$

1.9.2 W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

1.9.3 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód o długości $\mathbf{10\ cm}$. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

Odpowiedź: Pole trójkąta $P=\frac{25\sqrt{3}}{9}$, pole kwadratu $P=6\frac{1}{4}$, pole sześciokąta $P=\frac{25\sqrt{3}}{6}$

1.9.4 Pole kwadratu jest równe $\mathbf{8\ cm^2}$. Oblicz promień koła:

a) opisanego na kwadracie,
b) wpisanego w kwadrat.

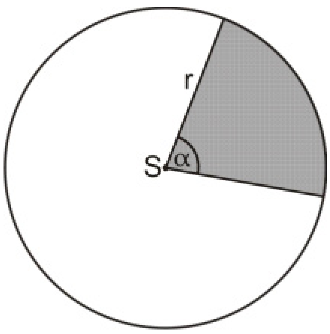
Odpowiedź: $R=2\ cm,\ \ r=\sqrt{2}\ cm$

1.9.5 W koło o polu $\mathbf{6,25\pi\ cm^2}$ wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

Odpowiedź: $P=12{,}5\ cm$

1.10. Pole koła i długość okręgu

Dla danego koła o promieniu r możemy policzyć:



pole: $\boldsymbol{P=\pi r^2}$

oraz obwód: $\boldsymbol{L=2\pi r}$

Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu r. Kąt pełny ma 360°. Podzielmy całe koło na wycinki o kącie 1°. Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$$P=\frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie α będzie miał postać:

$$\boldsymbol{P_w=\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi r^2}$$

Przykład 1

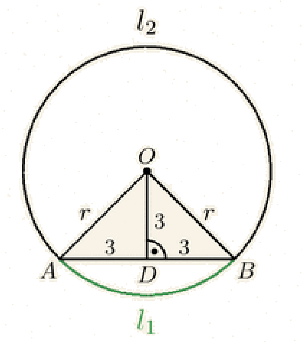
Oblicz pole wycinka koła o promieniu $r = 10$ i kącie równym $60°$.
Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:
$P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$

Długość l łuku okręgu o promieniu r, odpowiadającego katowi środkowemu o mierze α, wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r}$$

Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości $6\ cm$, odległą o $3\ cm$ od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt AOB jest równoramienny. Odcinek OD jest jego wysokością i dzieli cięciwę AB o długości $6\ cm$ na dwie równe części po $3\ cm$. Promień r liczymy z twierdzenia Pitagorasa.
$3^2 + 3^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 18 = r^2 \quad \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\ cm$

Suma kątów w trójkącie wynosi $180°$. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych ADO i DBO są równe $90°, 45°, 45°$.
$\sphericalangle AOB = 45° + 45° = 90°$

Długość łuku l_1 wynosi:
$l_1 = \frac{90°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ cm$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku l_1.

$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\ cm.$

Odpowiedź: Okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ cm$ i $4\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\ cm$.

Zadania

1.10.1 Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $\mathbf{60°}$ ma długość $\mathbf{2}$. Oblicz pole tego wycinka.

Odpowiedź: 6π

1.10.2 Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\pi$ odpowiada kąt $135°$.

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

1.10.3 Promień koła jest równy $2\ cm$. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze $30°$?

Odpowiedź: $\frac{1}{3}\pi$

1.10.4 Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie $60°$, jeżeli promień koła ma długość $6\ cm$.

Odpowiedź: $P = 6\pi\ cm^2, l = 2\pi\ cm$

1.10.5 Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu $9\ cm$ i kącie $60°$.

Odpowiedź: $l = 3\pi\ cm, P = 13{,}5\pi\ cm^2$

1.10.6 Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie $120°$, wynosi $l = 8\pi\ cm$.

Odpowiedź: $r = 12\ cm$

Czy zdam maturę z matematyki?

1. [2]W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa *AB* tego trójkąta ma długość:

A. 6

B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{29}$

D. 14

2. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $16\sqrt{6}$

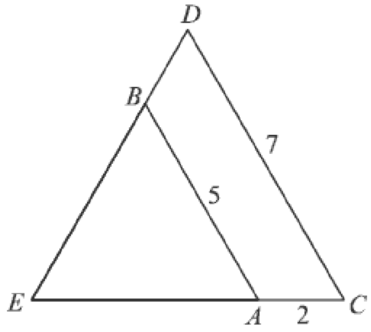
B. $14\sqrt{6}$

C. $12 + 4\sqrt{6}$

D. $12 + 2\sqrt{6}$

2. Zadania 1-6: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 01.03.2013

3. Odcinki *AB* i *CD* są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka *AE* jest równa:



A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5

4. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

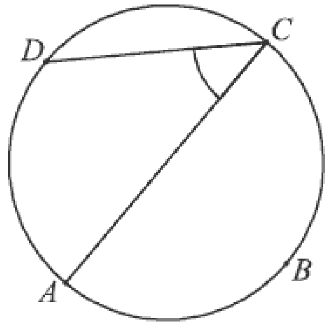
A. 25

B. 50

C. 75

D. 100

5. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego *ACD* jest równa:



A. 90°

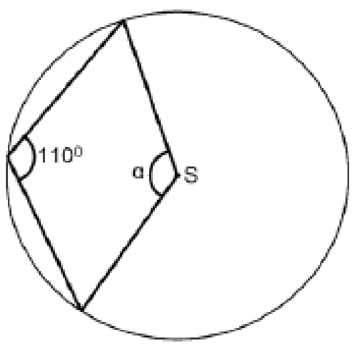
B. 60°

C. 45°

D. 30°

6. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwusieczne kątów *A* i *B*. Dwusieczne te przecinają się w punkcie *P*. Uzasadnij, że kąt *APB* jest rozwarty.

7. [3]Punkt *S* jest środkiem koła. Zatem miara kąta α jest równa (patrz na rysunek):



A. 70°

B. 220°

C. 140°

D. 250°

3. Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze, 01.03.2013.

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe 30° i 60°. Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

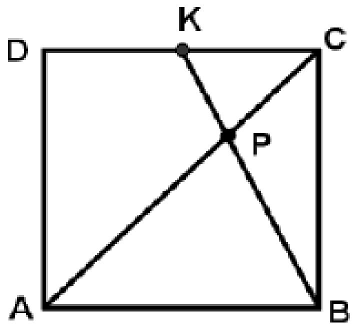
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

9. Na boku *DC* kwadratu *ABCD* obrano punkt *K* tak, że $|DK| = |KC|$ (zobacz rysunek). Przekątna *AC* kwadratu przecina odcinek *BK* w punkcie *P*. Uzasadnij, że pole trójkąta *ABP* jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta *KCP*.



10.[4]Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

A. 36π

B. 9π

C. $18\sqrt{3}\pi$

D. 12π

11. Odcinek o długości 2,4 *m* podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

A. 120 cm

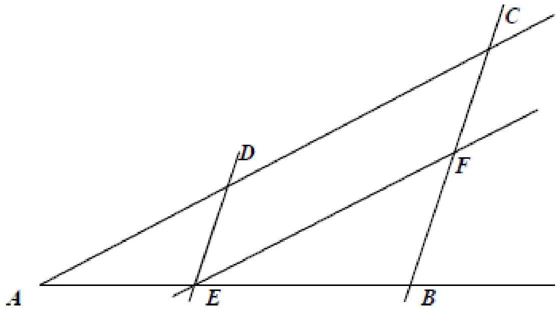
B. 0,72 m

C. 480 mm

D. 14 dm

4. Zadania 10-13: www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 01.03.2013

12. * Proste DE i CB oraz EF i AC są równoległe. Oblicz długość odcinka EB, jeżeli $AE = 2{,}5$, $DE = 3$ oraz $FB = 4$.



13. Wykaż, że wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki AD i DB, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio AC i BC tego trójkąta.

14. [5]W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

A. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

D. $\frac{1}{17}$

15. Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

A. $4\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{5}$

16. [6]Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1:

A. o 10%

B. o 110%

C. o 21%

D. o 121%

5. Zadania 14-15: www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 01.03.2013.
6. Zadania 16-21: www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 01.03.2013

17. Przekątna *AC* prostokąta *ABCD* ma długość 14. Bok *AB* tego prostokąta ma długość 6. Długość boku *BC* jest równa:

A. 8

B. $4\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{58}$

D. 10

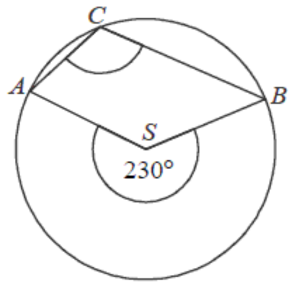
18. Punkty *A*, *B* i *C* leżą na okręgu o środku *S* (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego *ACB* jest równa:

A. 65°

B. 100°

C. 115°

D. 130°



19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

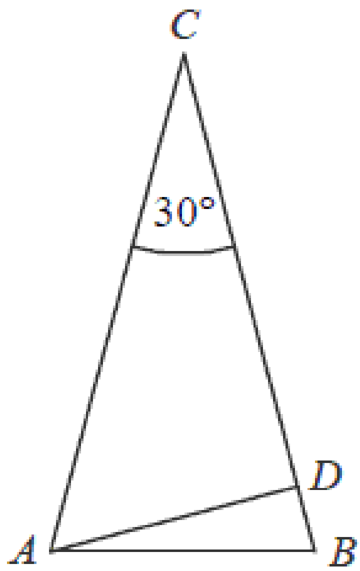
A. 36

B. 18

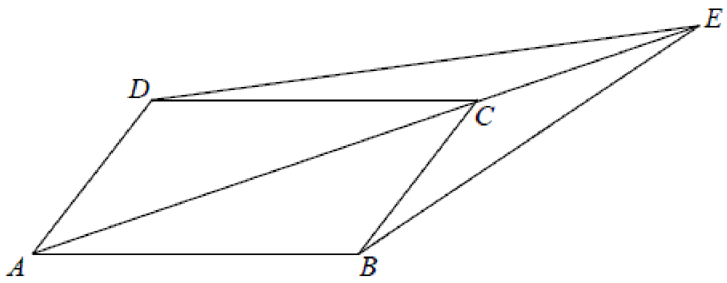
C. 12

D. 6

20. W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość *AD* trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok *BC*.



21. Dany jest równoległobok *ABCD*. Na przedłużeniu przekątnej *AC* wybrano punkt *E* tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku *ABCD* jest cztery razy większe od pola trójkąta *DCE*.



22. [7]Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

A. 21° i 105°

B. 11° i 66°

C. 18° i 108°

D. 16° i 96°

23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta i dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{3}$

D. 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

A. 3 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 8 cm

7. Zadania 22-26: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 02.03.2013.

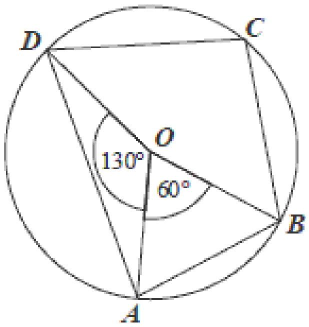
25. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany *BAD* ma miarę:

A. 150°

B. 120°

C. 115°

D. 85°



26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

27. [8]W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa *AB* tego trójkąta ma długość.

A. 6

B. $2\sqrt{21}$

C. $2\sqrt{29}$

D. 14

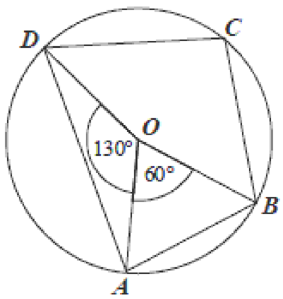
28. Pięciokąt *ABCDE* jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta *ECD*:

A. ΔABF

B. ΔCAB

C. ΔIHD

D. ΔABD



29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $16\sqrt{6}$

B. $14\sqrt{6}$

C. $12 + 4\sqrt{6}$

D. $12 + 2\sqrt{6}$

8. Zadania 27-31: www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf, 02.03.2013

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

A. 25

B. 50

C. 75

D. 100

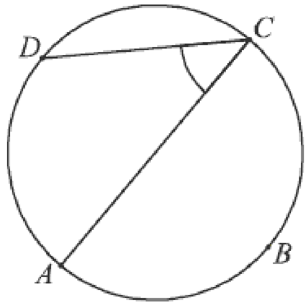
31. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego *ACD* jest równa:

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°



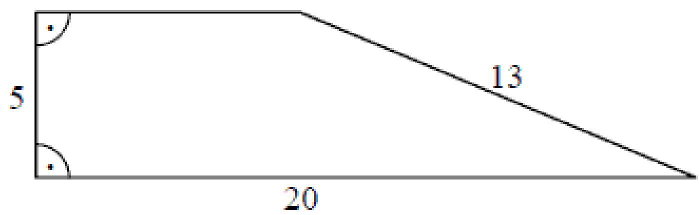
32. [9]Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.
Obwód tego trapezu jest równy:

A. 43

B. 46

C. 48

D. 50



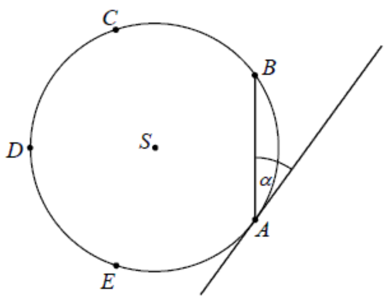
33. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* i *E* leżą na okręgu o środku *S* i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek). Wówczas miara kąta ostrego α między cięciwą *AB* i styczną do tego okręgu w punkcie *A* jest równa:

A. 18°

B. 30°

C. 36°

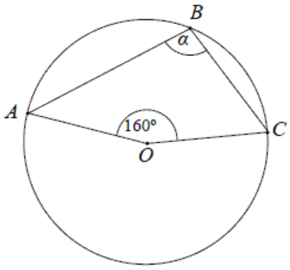
D. 54°



34. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

9. Zadania 32-36: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 03.03.2013.

35. [10] Punkt *O* jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę:



A. 80°

B. 100°

C. 110°

D. 120°

36. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa:

A. $3\sqrt{3}$

B. 3

C. $6\sqrt{3}$

D. 6

37. Dany jest czworokąt *ABCD*, w którym $AB \parallel CD$. Na boku *BC* wybrano taki punkt *E*, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt *AED* jest prosty.

38. [11]Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:

A. 7

B. 14

C. 21

D. 28

39. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:

A. $4\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 8

D. 4

40. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

A. 3

B. 4

C. $\sqrt{34}$

D. $\sqrt{61}$

10. Zadania 37-39: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 04.03.2013.
11. Zadania 40-46: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

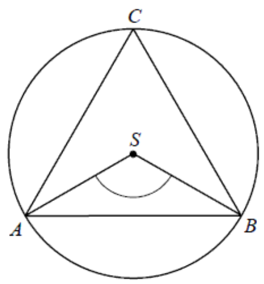
41. Punkty A, B, C, leżące na okręgu o środku S, są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa:

A. 120°

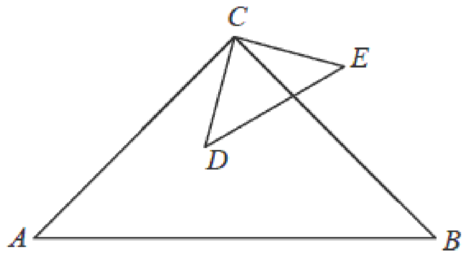
B. 90°

C. 60°

D. 30°



42. Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $AD = BE$.



43. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

44. [12]Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E takie, że IADI=IACI oraz IBEI=IBCI. Wykaż, że kąt I ∢ DCE I=45°.

45. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.

46. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

A. 120°

B. 135°

C. 144°

D. 150°

50. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:

A. $6\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{5}$

D. $5\sqrt{3}$

12. Zadania 47-55: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

51. Długościami boków trójkąta mogą być:

A. $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$

B. 6 mm; 0,1 dm; 12cm

C. $4, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

D. 2 dm; 4 cm; 0,07m

52. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:

A. 50°

B. 80°

C. 40°

D. 70°

53. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o 38° większy od drugiego. Kąty te mają miary:

A. 71° i 109°

B. 38° i 142°

C. 26° i 64°

D. 38° i 76°

54. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:

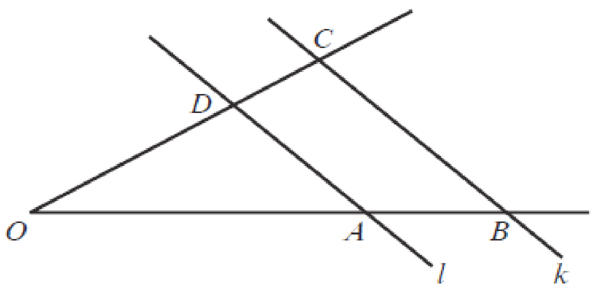
A. 360°

B. 540°

C. 720°

D. 1080°

55. *Proste l i k są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek OD ma długość:



A. 12

B. 18

C. $\frac{18}{5}$

D. $\frac{144}{5}$

56. [13]*Odcinki *AB* i *CD* są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka *AE* jest równa:

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5

57. [14]*Proste *AD* i *BC* są równoległe. Długości odcinków *ED*, *DC* oraz *AB* podane są na rysunku. Długość odcinka *EA* jest równa:

A. 4

B. 8

C. 9

D. 10

13 Zadanie 56: www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf, 04.03.2013
14 Zadanie 57: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

2. Ciągi

W TECHNIKUM NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;**
- **Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;**
- **Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.**

2.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym**

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby **naturalne.**

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ...)$.

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, ..., n\}$ i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.

a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a liczby $(1, 2, 3, ..., n)$ nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności.

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, to ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Przykład 1

$a_n = n + 3$: $2, 5, 8, 11, 14, ...$ – ciąg rosnący

$a_n = n^2$: $1, 4, 9, 16, 25, ...$ – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n$: $3, 2, 1, 0, -1, ...$ – ciąg malejący

$a_n = -5n$: $-5, -10, -15, -20, -25, ...$ – ciąg malejący

2.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$r = a_{n+1} - a_n$ nazywamy różnicą ciągu

$a_{n+1} = a_n + r$

Przykłady ciągów arytmetycznych:

$a_1 = 5, r = 3$; 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...
$a_1 = 6, r = -2$; 6, 4, 2, 0, -2, -4, ...

Zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg arytmetyczny jest:

– **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia: $a_{n+1} - a_n > 0$,

– **malejący**, gdy różnica jest ujemna: $a_{n+1} - a_n < 0$,

– **stały**, gdy różnica jest równa 0: $a_{n+1} - a_n = 0$.

CIEKAWOSTKA

[15]W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 - 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych, nazwany następnie jego imieniem: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie n – należy do liczb naturalnych oraz $k_0 = 1$ i $k_1 = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1{,}618033998875 \ldots = \Phi$$

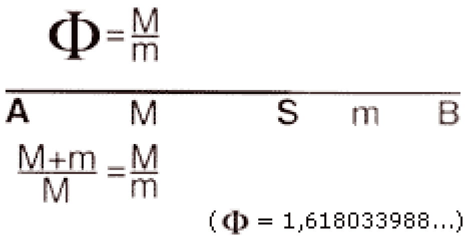
Można pokazać, że Φ jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym.

Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba Φ, jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd też w opracowaniach często podaje się, że $\Phi = 1{,}618$.

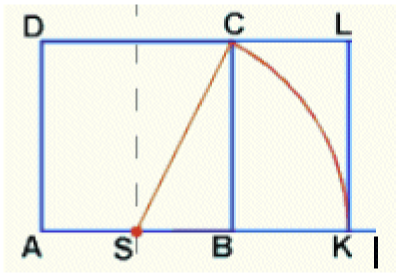
15. „Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym" autor J. Nowakowski i K. Borowski Wydawnictwo Difin., www.bossa.pl, 06.03.2013.

Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:

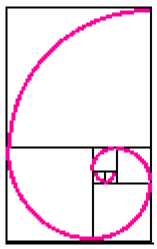
1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.



2. Złoty podział prostokąta .



3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

Praca dla chętnych

Poszukaj więcej informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

Zadania

2.2.1 Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

b) 2, 4, 8, 16, 32, ...

c) -2, -4, -6, -8, ...

d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

Odpowiedź: Ciągi arytmetyczne: a, c, d.

2.2.2 Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n):

a) $a_n = 2n$

b) $a_n = 3n-1$

c) $a_n = 2n+1$

d) $a_n = 1-n$

e) $a_n = n^n$

f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Odpowiedź::
a) 2, 4, 6, 8, 10, 12
b) 2, 5, 8, 11, 14, 17
c) 3, 5, 7, 9, 11, 13
d) 0, -1, -2, -3, -4, -5
e) 1,4, 27, 256, 3125, 46656

f) -1, $\frac{1}{2}$,- $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, -$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$

2.2.3 Dany jest ciąg (a_n) o podanym wzorze: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_3 i a_4.

Odpowiedź: $a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = -\frac{1}{8}$

2.2.4 Sprawdź, czy dany ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 3+n$

b) $a_n = 2n-1$

c) $a_n = n^2+1$

d) $a_n = \frac{2}{3}n+2$

e) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Odpowiedź: Tak: a, b, c.

2.2.5 Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_2 = 5$, $a_6 = 15$

b) $a_3 = 6$, $a_{11} = 21$

c) $a_7 = 4$, $a_9 = 18$

d) $a_1 = 3$, $a_4 = 9$

e) $a_2 = 1$, $a_4 = 3\text{-}2\sqrt{3}$

Odpowiedź::

a) $a_n = -35+ (n-1)\cdot 10 = -45+10n$

b) $a_n = 2+ (n-1)\cdot 2 = 2n$

c) $a_n =-38+(n-1)\cdot 7 = -45+7n$

d) $a_n = 3+ (n-1)\cdot 2 = 2n + 1$

e) $a_n = 5+2\sqrt{3}\text{ -}n(2+\sqrt{3}$

2.2.6 Znając trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, wyznacz 60 wyraz tego ciągu:

$\boldsymbol{a_1 = 12, a_2 = 24, a_3 = 36}$

Odpowiedź: 720

2.2.7 Mając dany ciąg arytmetyczny (a_n), w którym: $\boldsymbol{a_1 = 2,\ r = 4,\ a_n = 122}$, oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg i ile wynosi suma jego wyrazów.

Odpowiedź: n = 31, $S_n = 1922$

2.2.8 Wyznacz a_3, a_7, a_{12} w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 8$, r = 11.

Odpowiedź: $a_3 = 30$, $a_7 = 74$, $a_{12} = 129$

2.2.9 Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów ciągu: 1, 4, 7, 10, 13, ….

Odpowiedź: $S_{20} = 590$

2.2.10 Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym $a_n = 2n - 5$.

Odpowiedź: $S_{15} = 165$

2.2.11 Oblicz *x*, wiedząc, że liczby w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Podaj różnicę ciągu.

a) $8,\ x, 22$ b) $x - 4, 5, x + 12$

Odpowiedź: a) $x = 15, r = 7$ b) $x = 1, r = 8$

2.2.12 Oblicz x, wiedząc, że: $\mathbf{2 + 6 + 10 + \cdots + x = 648}$

Odpowiedź: 70

2.2.13 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n):

a) a_n= 3n

b) a_n= 2n-4

c) a_n= n^2- 1

d) a_n= -n+2

e) $a_n = \frac{-2n}{n+3}$

Odpowiedź::

a) r = 3 ciąg rosnący b) r = 2 ciąg rosnący,

c) r = 2n+1 dla n ≥ 1 r > 0 ciąg rosnący,

d) r = -1 ciąg malejący, e) r = $\frac{-6}{n^2+7n+12}$ < 0 ciąg malejący

CIEKAWOSTKA

Ciąg liczb Fibonacciego na giełdzie

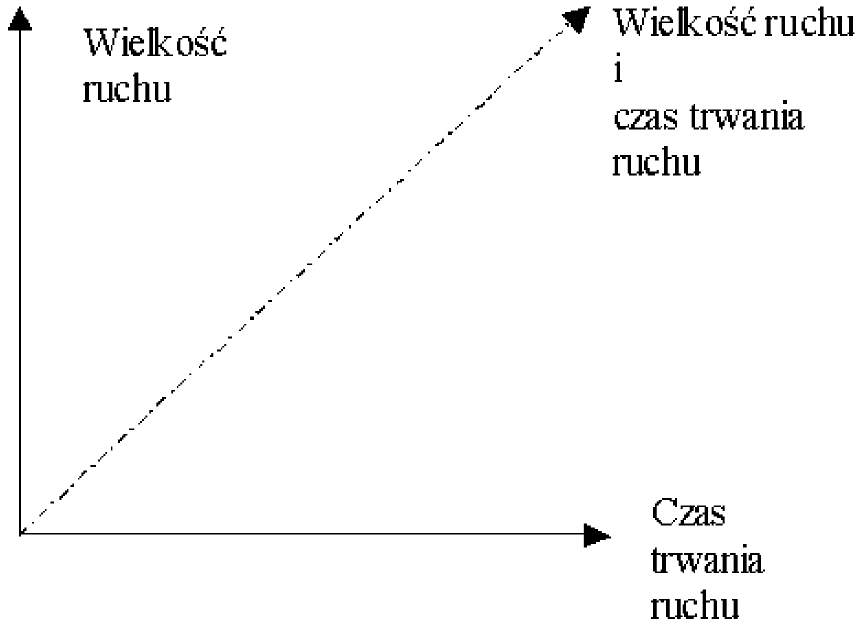
Istnieją trzy sposoby wykorzystania ciągu liczb Fibonacciego do analizy papierów wartościowych:

1. metody czasowe – w odniesieniu do upływu czasu – rozdział 3.2.1.
2. metody cenowe – w odniesieniu do zmiany ceny – rozdział 3.2.2
3. metody cenowo-czasowe – w odniesieniu do upływu czasu i zmiany ceny – rozdział 3.2.3

Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz, przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.

Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.



Rysunek 27. Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.

2.3. Ciąg geometryczny i jego własności

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Badać, czy dany ciąg jest geometryczny**
- **Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego**

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą q, zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą q, a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q_n - 1 \; dla \; n \geq 2$$

Suma *n*-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \; dla \; q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad dla \; q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, an, a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 > 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 < 0$$

Ciąg jest malejący wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 < 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 > 0$$

Ciąg jest stały wtedy, gdy:

$$q = 1 \text{ lub } a_1 = 0$$

Jeśli iloraz q jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny. Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału (-1, 1).

CIEKAWOSTKA

Metody cenowe

Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotnym jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi Φ i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby Φ z przedziału <-3, 3>.

Tabela 3. Współczynniki złotego podziału[16]

Potęga n	F^n – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	Ciąg zewnętrzny
2	2,618	
3	4,236	
-1	0,618	Ciąg wewnętrzny
-2	0,382	
-3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrotu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego ,wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół), ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomu poziomów odwrotu Fibonacciego.

Rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).

Zadania

2.3.1 Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a) 3, 6, 12, …

b) 2, -6, 18, …

c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$

16. Źródło: Fischer R., Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.

d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

Odpowiedź: a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, b) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$, c) $a_n = \frac{2}{5} \cdot (5)^{n-1}$, d) $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

2.3.2 Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $q = -2$, $a_3 = 0{,}5$

b) $q = -\frac{1}{3}$, $a_4 = -27$

c) $q = -0{,}2$, $a_5 = -151{,}2$

d) $q = -6$, $a_4 = 0{,}5$

Odpowiedź: a) $a_1 = \frac{1}{8}$, b) $a_1 = 729$, c) $a_1 = -94500$, d) $a_1 = -\frac{1}{432}$

2.3.3 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na n-ty wyraz wiedząc, że:

a) $a_1 = 1$, $a_5 = 12{,}5$

b) $a_1 = 16$, $a_7 = 256$

c) $a_1 = -3$, $a_{10} = -81$

d) $a_1 = 5$, $a_3 = 2{,}5$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt[4]{\frac{25}{2}}$, $a_n = (\sqrt[4]{\frac{25}{2}})^{n-1}$

b) $q = \sqrt[6]{16}$, $a_n = 16^{\frac{n+4}{5}}$

c) $q = 3$, $a_n = -3^n$

d) $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_n = 5 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^{n-1}$

2.3.4 Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a) $a_1 = 3$, $q = -2$, $a_n = 1536$

b) $a_1 = -1$, $q = -20$, $a_n = -64000000$

c) $a_1 = 7$, $q = 0{,}5$, $a_n = \frac{7}{128}$

d) $a_1 = 0{,}5$, $q = -4$, $a_n = 128$

Odpowiedź: a) 10, b) 7, c) 8, d) 5

2.3.5 Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = 96$, $a_5 = 48$

b) $a_3 = 12$, $a_6 = 24$

c) $a_2 = 6$, $a_5 = -3$

Odpowiedź: a) $q = \sqrt{2}$, $a_1 = 7{,}5$, b) $q = \sqrt[3]{2}$, $a_1 = 6\sqrt[3]{4}$, c) $q = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $a_1 = 6\sqrt[3]{-2}$

2.3.6 W ciągu geometrycznym (a_n) mamy dane $a_2 = -1$, $q = -2$. Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: $S_n = \frac{3}{16}$

2.3.7 Wyznacz x wiedząc, że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$a_1 = 9$, $a_2 = x$, $a_3 = 1$

Odpowiedź: $x = 3$

2.3.8 Sprawdź, czy ciąg (an) jest geometryczny? Wyznacz q.

a) $a_n = 2^{n+1}$

b) $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$

c) $a_n = 2n^2$

Odpowiedź: a) $q = 2$, b) $q = 9$, c) nie

2.3.9 Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (an), jeśli:

a) $a_1 = 8$, $2a_5 = 3a_4$, $n = 6$

b) $a_1 = 2$, $a_7 = 128$, $n = 8$

Odpowiedź: a) 166,25, b) -510

2.3.10 Zbadaj monotoniczność ciągu (an), określonego wzorem:

a) $a_n = \frac{3-2n}{4n-50}$

b) $a_n = \frac{5n}{n+1}$

c) $a_n = \frac{1}{3n^2-12n-3}$

d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+7}$

Odpowiedź: a, b, d – rosnące, c – nie jest monotoniczny

2.3.11 Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 10^{n+2} - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $b_n = 10^{n+1}$, $q = 10$

2.3.12 Znajdź sumę:

a) $1 + 6 + 21 + \ldots + n(2^n - 1)$

b) $3 + 27 + 135 + \ldots + (2n-1) \cdot 3^n$

Odpowiedź: a) $(n-1) \cdot 2^{n+1} - 0{,}5 \cdot (n^2 + n - 4)$, b) $(n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$

2.3.13 Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

2.4. Praktyczne zastosowanie ciągów (procent prosty, procent składany)

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać podatki i zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)**

Kapitalizacja odsetek [17]

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk. W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej, na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia podatku od zysków kapitałowych (w wysokości 19%), zwanego potocznie podatkiem Belki.

Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota. Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

17. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc, 06.03.2013

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001-31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004-1.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 – brak wzoru na procent składany.

CIEKAWOSTKA

Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

Zadania

2.4.1 Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

2.4.2 Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym, z kapitalizacją odsetek:

a) co miesiąc

b) co kwartał

c) co pół roku

d) co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.
Odpowiedź: a) 2253,65 zł, b) 2251,02 zł, c) 2247,20 zł, d) 2240 zł

2.4.3 Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

Odpowiedź: 10982,29 zł

2.4.4 Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000zł.

a) bank I oferuje 14% w stosunku rocznym, z roczną kapitalizacją odsetek,

b) bank II oferuje 10% w stosunku rocznym, z kwartalną kapitalizacją odsetek,

c) bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji. Zdecydujesz się na rok czy na 2 lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

Odpowiedź: a) po roku 68400 zł, po dwóch latach 77976 zł

b) po roku 66228,77 zł, po dwóch latach 73104,17 zł

c) po roku 60906,21 zł, po 2 latach 61826,11 zł

2.4.5 Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

a) Oblicz, jaką kwotą (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.

b) O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Odpowiedź: a) 33043,06 zł, b) o 713,80 zł

2.4.6 Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).

2.4.7 Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

2.4.8 W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?

2.4.9 [18]Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku . Bank zaproponował mu następujące oferty:

a) oprocentowanie 6% w sali rocznej, z odsetkami doliczanymi po roku,

b) oprocentowanie 3,8% w skali rocznej, z odsetkami doliczanymi co kwartał,

18. http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/.

c) dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?

Odpowiedź: a) 1049 zł, b) 1031 zł, c) Pierwsza – o 18 zł

2.4.10 Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować na 20 lat, przy rocznej stopie procentowej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400$.

Odpowiedź: Skorzystaj z funkcji finansowej PV

= PV(6%; 20; 0; 400)
w wyniku otrzymujemy: 125$

Z matematycznego punktu widzenia obliczyliśmy sumę ciągu geometrycznego.
Ten sam wynik uzyskamy, wprowadzając własną formułę: = 400/(1+6%)^20 = 125.

2.4.11 Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyłeś w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5 % w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.

Odpowiedź:

Możesz skorzystać z kalkulatora kredytowego p..:
www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/kredytowy.html
prowizja: 450 zł, kwota kredytowana: 15450 zł, kwota do wypłaty: 15000 zł, suma spłat: 22007,32 zł, rata: 183,39 zł.

2.4.12 Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:

a) na koniec okresu rozliczeniowego,

b) na początek okresu rozliczeniowego,

c) jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

Odpowiedź:

a) 169,35 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0))

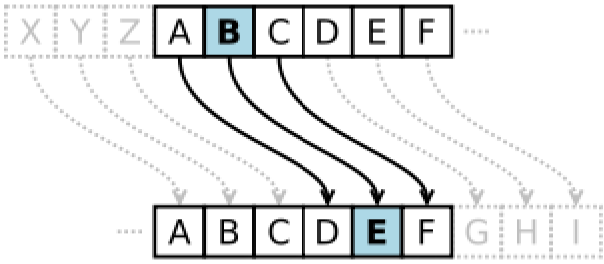
b) 168,58 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0;0;1))

c) 252,87 zł

Możesz skorzystać z funkcji finansowej PMT.

CIEKAWOSTKA

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, i pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻ

Szyfr: CĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻAĄB

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŻ DĆFĄ, EKTRP ŚZŃM YŹŚŁ L UAGWĘ INCJ

Praca dla chętnych

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza). Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

Czy zdam maturę z matematyki?

1. [19]Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

2. Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy:

A. $-\frac{3}{25}$

19. Zadania 1-3: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

B. $\frac{3}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$

D. $\frac{7}{25}$

3. Ciąg (9, *x*, 19) jest arytmetyczny, a ciąg (*x*, 42, *y*, *z*) jest geometryczny. Oblicz *x*, *y*, *z*.

4. [20]Który wyraz ciągu $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$ jest równy zero?

A. a_9

B. a_{18}

C. a_{21}

D. a_{49}

5. Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n równym:

A. $a_n = 3 \cdot 2^n$

B. $a_n = \frac{4n^2-9}{3+2n}$

C. $a_n = \frac{2n+3}{n+2}$

D. $a_n = \frac{n^2+1}{3}$

6. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

7. [21]Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_2 = 64$

B. $a_2 = 0$

C. $a_2 = -64$

D. $a_2 = 128$

20. Zadania 4-6: www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 08.03.2013.
21. Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 08.03.2013.

8. Liczby 2; $2x$-1; 0,5 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:

A. $x = 0$

B. $x = 0$ lub $x = 1$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

9. O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

10. [22]Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 7

11. Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

A. $10000 \cdot (1{,}0075)^4$

B. $10000 \cdot (1{,}03)^4$

C. $10000 \cdot (1{,}0)^{16}$

D. $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

12. Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}, y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1, z = 3\sqrt{5} + 2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

A. z, y, x

B. y, x, z

C. x, y, z

D. z, x, y

22. Zadania 10-15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.

13. Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

A. $S_{2n} = 8n^2 + 4n$

B. $S_{2n} = 4n^2 + 2n$

C. $S_{2n} = 4n^2 + n$

D. $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

14. Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

A. $q = 2$

B. $q = 7$

C. $q = 9$

D. $q = 28$

15. W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16. [23]Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_3 = \frac{1}{2}$

B. $a_3 = -\frac{1}{2}$

C. $a_3 = \frac{3}{8}$

D. $a_3 = -\frac{3}{8}$

17. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy:

A. $a_4 = -18$

B. $a_4 = 0$

C. $a_4 = 4{,}5$

D. $a_4 = 144$

18. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

23. Zadania 16-18: www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 09.03.2013.

19. [24]Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n + 4}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_8 = 2\sqrt{5}$

B. $a_8 = 8$

C. $a_8 = 5\sqrt{2}$

D. $a_8 = \sqrt{12}$

20. Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas:

A. $a = 8\sqrt{2}$

B. $a = 4\sqrt{2}$

C. $a = 8 - 2\sqrt{2}$

D. $a = 8 + 2\sqrt{2}$

21. Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

22. [25]Liczby 12, 18, $2x + 1$ są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

A. $x = 11\frac{1}{2}$

B. $x = 12$

C. $x = 12\frac{1}{2}$

D. $x = 13$

23. W ciągu arytmetycznym a_n dane są $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 30

B. 110

C. 220

D. 2046

24. Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$.

24. Zadania 19-21: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.
25. Zadania 22-24: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.

25. [26]Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy:

A. $a_1 = \frac{2}{3}$

B. $a_1 = \frac{4}{9}$

C. $a_1 = \frac{3}{2}$

D. $a_1 = \frac{9}{4}$

26. Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy:

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$

B. $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$

C. $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$

D. $a_5 + a_7 = 2a_8$

27. Liczby x, y, 19, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

28. [27]W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

A. 13

B. 0

C. -13

D. -26

29. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. 8

B. 2

C. $\frac{1}{8}$

D. $-\frac{1}{2}$

30. [28]Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności 102 dm^3 wypływa w pierwszej minucie 5 dm^3 cieczy, a w każdej następnej o 0,25 dm^3 mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?

26. Zadania 25-27: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
27. Zadania 28-29: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 10.03.2013.
28. Zadania 30-37: Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

31. Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:

a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w miesiącu poprzednim,

b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.

32. Wyznacz liczbę składników w sumie $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 151$ i wyznacz tę sumę.

33. Oblicz, dla jakiej wartości k liczby $5, (k + 1)^2, 2k + 9$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?

34. Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.

a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?

b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?

35. Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby x, y, z, t, tak aby liczby 4, x, y, z, t, 8 tworzyły ciąg geometryczny.

36. Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnice utworzona w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

37. Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

3. Wielomiany*

3.1. Pojęcie wielomianu

Wielomian – w matematyce wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i podnoszenia do potęgi o stałym wykładniku naturalnym[29].

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Stopień wielomianu – jest to najwyższy ze stopni jego składników (jednomianów) o niezerowych współczynnikach. Dla wielomianu jednej zmiennej jest to największa potęga zmiennej, która występuje w wielomianie[30].

Przykład 1

Przykłady wielomianów oraz ich stopień:

$W(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7$ – wielomian stopnia 4

$G(x) = 5x^6 + 9x^3 - 7$ – wielomian stopnia 6

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ – wielomian stopnia 2

$Q(x) = 8$ – wielomian stopnia 0

Wielomiany zapisujemy zazwyczaj w postaci uporządkowanej.

29. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian, 27.02.2013.
30. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x.

Przykład 2

Wyznacz wartości parametrów a i b, tak aby wielomiany $P(x) = x^3 + x^2 + 12x - 8$ oraz $W(x) = x^3 + (2a - b)x^2 + (3b - 2a)x - 8$ były równe.

Wielomiany $P(x)$ i $W(x)$ są tego samego stopnia. Musimy sprawdzić, dla jakich wartości a i b współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3b - 2a = 12 \end{cases}$$

$$2b = 13 \quad \Rightarrow b = 6{,}5$$

$$2a = 1 + 6{,}5 \quad \Rightarrow a = 3{,}75$$

$$W(x) = P(x) \quad \Leftrightarrow a = 3{,}75 \ \wedge b = 6{,}5$$

Zadania

3.1.1. Dany jest wielomian $\boldsymbol{W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 7}$. Oblicz:

a) $W(2)$

b) $W(-1)$

c) $W(\sqrt{3})$

d) $W\left(-\frac{1}{2}\right)$

Odpowiedź: a) 33, b) -6, c) $11\sqrt{3} - 1$, d) $-5\frac{1}{8}$

3.1.2. Podane wielomiany uporządkuj malejąco i podaj ich stopień.

a) $P(x) = 6x^5 - 2 + 4x^2 + 9x$

b) $P(x) = 7x^3 + 12 - 9x^6 + 14x + 3x^2$

c) $P(x) = -8x^{19} + 3x^9 - 7x^{15} + 6x$

d) $P(x) = -2 + x^6 + x^{11} - 6x^3$

Odpowiedź:

a) $P(x) = 6x^5 + 4x^2 + 9x - 2P(x) = 6x^5 + 4x^2 + 9x - 2,$

b) $P(x) = -9x^6 + 7x^3 + 3x^2 + 14x + 12,$

c) $P(x) = -8x^{19} - 7x^{15} + 3x^9 + 6x,$

d) $P(x) = x^{11} + x^6 - 6x^3 - 2$

3.1.3. a) Dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax - b$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 4.$

b) Dany jest wielomian $W(x) = 3x^4 + ax^3 - bx^2 + 5x - 3$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 5.$

c) Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 3ax^3 - 2bx^2 + 6$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 5, W(2) = 8$

d) Dany jest wielomian $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$. Oblicz a, b i c wiedząc, że $W(-1) = 3, W(1) = 5, W(2) = 9.$

e) Dany jest wielomian

$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$. Oblicz a, b, c wiedząc, że: $W(-1) = 1,\ W(0) = 1,$ $W(1) = -1$

Odpowiedź:

a) $a = 2, b = 1,$

b) $a = -6\frac{1}{2}, b = -3\frac{1}{2},$

c) $a = -\frac{1}{3};\ b = \frac{1}{2},$

d) $a = 3, b = 2, c = 1,$

e) $a = -1, b = -2, c = 1$

3.1.4. Wyznacz wartości parametrów a i b (lub a, b i c), tak aby wielomiany $W(x)$ i $P(X)$ były równe.

a) $W(x) = (3a-1)x^3 + (2b-a)x^2 + (a+b)x - 4,\ P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 4$

b) $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4,\quad P(x) = cx^3 + 2ax^2 + ax + b$

c) $W(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + c,\quad P(x) = (b-1)x^3 + (a+1)x^2 + 3bx - 2a$

d) $W(x) = ax^3 + 7x^2 - bx - 3c,\quad P(x) = (4b+c)x^2 + (c+2)x + 15 - a$

e) $W(x)=(a+1)x^3+3x^2-5cx-2,\ \ P(x)=2x^3+bx^2-12x-2$

Odpowiedź:

a) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=-1 \wedge b=-2$

b) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=2 \wedge b=4 \wedge c=2$

c) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=-4 \wedge b=-3 \wedge c=-8$

d) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=0 \wedge b=-2 \wedge c=15$

e) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=1 \wedge b=3 \wedge c=2\frac{2}{5}$

3.2. Działania na wielomianach

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne**
- **Rozszerzać i skracać wyrażenia wymierne**
- **Dzielić wielomiany przez dwumian**

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dodawanie i mnożenie wielomianów jest łączne i przemienne, zachodzi również rozdzielność mnożenia wielomianów względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na redukcji wyrazów podobnych.

Dodawanie wielomianów

Aby dodać dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, dodajemy do siebie wszystkie wyrazy podobne tych wielomianów i porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 1

Dodaj wielomiany:

a) $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3$ oraz $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4 \\ &= (-3x^4 + 3x^4) + (4x^3 + 5x^3) + (7x^2 + 4x^2) + (-9x + 6x) + (3 - 4) \\ &= 9x^3 + 11x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

b) $W(x) = 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3$ oraz $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3 + 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2 \\ &= 6x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

c $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ oraz $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

$W(x) + P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 + (-3x^3 + 5x^2 - 7x + 3) = (3x^3 - 3x^3) +$
$(-5x^2 + 5x^2) + (7x - 7x) + (-3 + 3) = 0$

Wniosek

Suma dwóch wielomianów może mieć stopień mniejszy lub równy większemu stopniowi wielomianów, może także być wielomianem zerowym.

Odejmowanie wielomianów

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, należy do wielomianu $W(x)$ dodać wielomian $-P(x)$. Następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie wielomianów:

a) $W(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ oraz $P(x) = -8x^2 + 5x^2 + 6x - 8$

$$\begin{aligned} W(x) - P(x) &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 - (-8x^3 + 5x^2 + 6x - 8) \\ &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 + 8x^3 - 5x^2 - 6x + 8 = \end{aligned}$$

$$= (4x^3 + 8x^3) + (-7x^2 - 5x^2) + (5x - 6x) + (-3 + 8) = 12x^3 - 12x^2 - x + 5$$

b) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ oraz $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$$W(x) - P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - (6x^3 + 4x^2 - 3x + 2)$$
$$= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 =$$
$$= (6x^3 - 6x^3) + (-7x^2 - 4x^2) + (5x + 3x) + (-2 - 2) = -11x^2 + 8x - 4$$

Stopień otrzymanego wielomianu zależy od wielomianów składowych, analogicznie jak w przypadku dodawania.

Mnożenie wielomianów

Aby pomnożyć dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, trzeba pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Następnie zredukować wszystkie wyrazy podobne i uporządkować otrzymany wielomian.

Przykład 3

Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $W(x) = 3x^2 - 4x + 1W(x) = 3x^2 - 4x + 1$ oraz $P(x) = x + 3P(x) = x + 3$

$$W(x) \cdot P(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3x + 3$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 9x + 3$$

b) $W(x) = 4x^3 + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - 3x$

$$W(x) \cdot P(x) = (4x^3 + 1) \cdot (4x^2 - 3x) = 16x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 3x$$

Wniosek

Stopień iloczynu niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Dzielenie wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielnym przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia sposobem pisemnym liczb rzeczywistych.

Wykonaj dzielenie wielomianów:

$W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3)$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dzielimy $2x^3$ przez x i otrzymujemy $2x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ mnożymy $2x^2$ przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy

$-2x^3 - 6x^2$ z przeciwnymi znakami

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dodajemy stronami i przepisujemy $4x + 7$

$\underline{-2x^3 - 6x^2\quad}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dzielimy $-9x^2$ przez x

$\underline{-2x^3 - 6x^2\quad}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ mnożymy $-9x$ przez $(x + 3)$ i wynik

$-2x^3 - 6x^2$ zapisujemy z przeciwnymi znakami

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\quad 9x^2 + 27x$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dodajemy stronami i przepisujemy -7

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dzielimy $31x$ przez x

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ mnożymy 31 przez $(x + 3)$

$-2x^3 - 6x^2$ i wynik zapisujemy z przeciwnym

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$ znakiem

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$-31x - 93$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dodajemy stronami

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$\underline{\qquad -31x - 93}$

$= \quad -100$

W dzieleniu wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 - 9x + 31$ i resztę $R(x) = -100$

Przykład 5

Wielomiany można dzielić przez dwumian, stosując **schemat Hornera**.

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 2)$

$r = 2$

Wielomian jest stopnia trzeciego, więc tabelka wygląda następująco:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1			

W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy wszystkie stopnie wielomianu, w drugim wierszu natomiast wszystkie współczynniki tego wielomianu. Pierwszy współczynnik zawsze przepisujemy na dole.

Przystępujemy do obliczeń.

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2		

$r = 2$

$1 \cdot 2 - 4 = -2$ (-2 wpisujemy do dolnego wiersza)

Dalej analogicznie:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	

$r = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ (-1 wpisujemy do dolnego wiersza)

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	-7

$r = 2$

$-1 \cdot 2 - 5 = -7$ (-7 wpisujemy do dolnego wiersza)

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia drugiego.

W dolnym wierszu tabelki otrzymaliśmy współczynniki tego wielomianu.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian

$(x - 2)$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = x^2 - x - 1$ i resztę (-7).

Więc wielomian $W(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2) - 7$.

Zadania

3.2.1. Dane są wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ i $F(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

Oblicz: $P(0), P(-2), P(\sqrt{2}), F(\sqrt{3}), F(\sqrt{2})$

Odpowiedź:

$P(0) = -3, P(-2) = -1, P(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 7,\ F(\sqrt{3}) = -5, F(\sqrt{2}) = \ -1$

3.2.2. Oblicz sumę i różnice wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 4,\ P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 7x + 10$

b) $W(x) = -7x^4 - 6x^2 - 5x + 8,\ P(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 8$

c) $W(x) = -10x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,\ P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 3x^4$

d) $W(x) = -3x^9 + 6x^7 - 5,\ P(x) = 8x^4 - 6x$

Odpowiedź:

a) $W(x) + P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x + 6,\ W(x) - P(x) = 10x^3 - 12x^2 - 2x - 14$

b) $W(x) + P(x) = -4x^3 - 11x,\ W(x) - P(x) = -14x^4 + 4x^3 - 12x^2 + x + 16$

c) $W(x) + P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 13x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,$
$W(x) - P(x) = -2x^8 - 4x^6 - 7x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5$

d) $W(x) + P(x) = -3x^9 6x^7 + 8x^4 - 6x - 5,$
$W(x) - P(x) = -3x^9 + 6x^7 - 8x^4 + 6x - 5$

3.2.3. Oblicz iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = -3x^2 + 6,\ P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

b) $W(x) = 2x^7 + 6x^3,\ P(x) = -4x + 2$

c) $W(x) = -3x^6 + 4x^2 + 2,\ P(x) = 2x + 1$

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 6x,\ P(x) = x^2 - 3$

Odpowiedź:

a) $-6x^5 + 18x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 24$

b) $-14x^8 + 4x^7 - 24x^4 + 12x^3$

c) $-6x^7 - 3x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

d) $2x^7 - 6x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 18x$

3.2.4. Wykonaj dzielenie wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$, gdy:

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40,\ P(x) = x - 5$

b) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,\ P(x) = 2x - 1$

c) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 13x - 2,\ P(x) = 3x - 2$

d) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9,\ P(x) = x - 3$

e) $W(x) = 2x^3 - 19x^2 + 13x - 2, P(x) = 3x - 2$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 6x + 8$ b) $x^2 - 2x + 3$ c) $2x^2 - 5x + 1$

d) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ e) $2x - 10$

3.2.5. Dane są wielomiany $A(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $B(x) = x^3 - 8$, $C(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

a) $A(x) + B(x)$ b) $A(x) + 2B(x)$ c) $2A(x) - 4B(x)$

d) $5B(x) - 10C(x)$ e) $A(x) \cdot C(x)$ f) $(x - 2) \cdot C(x) - B(x)$

g) $A(x) - (3x + 5) \cdot B(x)$ h) $(C(x))^2$ i) $(A(x))^2 - (P(x))^2$

Odpowiedź

a) $3x^3 - 7x - 4$, b) $4x^3 - 7x - 12$ c) $-14x + 40$

d) $5x^3 - 10x^2 - 20x - 80$ e) $2x^6 - 7x^4 - 12x^3x + 56x - 32$

f) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$

g) $-3x^4 - 3x^3 + 17x + 44$ h) $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$

i) $3x^6 - 28x^4 + 32x^3 + 49x^2 - 56x - 48$

3.3. Rozkład wielomianu na czynniki

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Stosować wzory skróconego mnożenia na (a±b)3 oraz a3±b3**
- **Rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłą-**

czając wspólny czynnik przed nawias

Warto na początku przypomnieć sobie wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.

Kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory stopnia trzeciego:

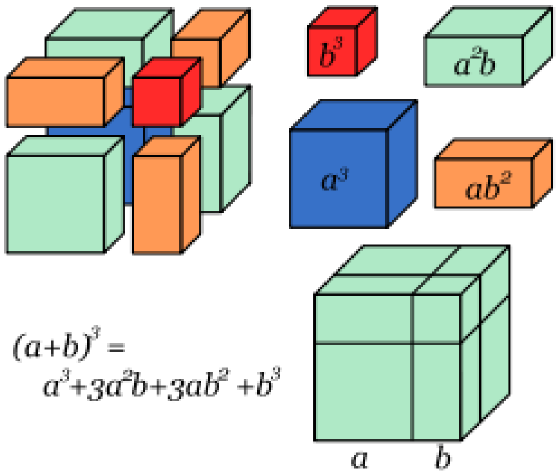
Sześcian sumy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma sześcianów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Różnica sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Każdy z tych wzorów możemy udowodnić w sposób algebraiczny lub, podobnie jak w przypadku wzorów stopnia drugiego, poprzez interpretację geometryczną. Trzeba jednak przejść do przestrzeni



trójwymiarowej.

Rysunek 3-1. Graficzne uzasadnienie wzoru na sześcian sumy[31]

Przykład 1

$(x+5)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

$(3x-4)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 3x \cdot 4^2 - 4^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

31. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia, 07.03.2013.

$$\sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{7}+21+7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{7}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^3}$$
$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{7}\right)^3} = 1+\sqrt{7}$$

Zadanie

3.3.1. Uprość:

a) $(x+5)^3$ b) $(2x+1)^3$

c) $(x+3y5)^3$ d) $(x-2)^3$

e) $(3x-4)^3$ f) $(2x-y)^3$

Odpowiedź:

a) $x^3+15x^2+75x+125$ b) $8x^3+12x^2+6x+1$
c) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ d) $x^3-6x^2+12x-8$
e) $27x^3-108x^2+144x-64$ f) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

3.3.2. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, uprość wyrażenia:

a) x^3-8 b) x^3-125

c) $64x^3+27$ d) $8x^3+216$

e) $(x+2)^3$ f) $(x-5)^3$

Odpowiedź:

a) $(x-2)(x^2+2x+4)$ b) $(x-5)(x^2+5x+25)$
c) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$ d) $(2x+6)(4x^2-12x+36)$
e) $x^3+6x^2+12x+8$ f) $x^3-15x^2+75x-125$

Rozłożyć wielomian na czynniki, to znaczy zapisać go w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeśli taki rozkład nie istnieje, to mówimy, że wielomian jest **nierozkładalny.**

➡ **Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod:**

1) wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
2) wzory skróconego mnożenia,
3) zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej,
4) grupowanie wyrazów.

Przykład 2

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z wspólnego dzielnika współczynników liczbowych oraz najniżej potęgi x.

a) $W(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

b) $W(x) = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2 + 2x - 3)$

Przykład 3

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $W(x) = x^4 - 64 = (x^2 - 8)(x^2 + 8) = \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right)(x^2 + 8)$

W poniższym przykładzie liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania wzoru na różnicę sześcianów.

b) $W(x) = 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9)$

c) $W(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 4

Rozłóż wielomian na czynniki, zamieniając na postać iloczynową funkcji kwadratowej.

W tym przypadku wielomian musi mieć postać funkcji kwadratowej.

$W(x) = 4x^2 - 8x - 12$

Obliczamy deltę i pierwiastki tej funkcji.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$\Delta > 0$, więc są dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 16}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 16}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

Zapisujemy postać iloczynową:

$W(x) = 4(x + 1)(x - 3)$

Przykład 5

Rozłóż wielomian na czynniki metodą przez grupowanie wyrazów.

Z tej metody można skorzystać, gdy mamy parzystą ilość czynników w wielomianie.

Łączymy wyrażenia w pary, każdą parę traktujemy jako osobne wyrażenie i każde z nich przekształcamy, wyłączając czynnik przed nawias. Ostatecznie zapisujemy iloczyn, wyłączając wspólny nawias przed nawias.

a) $W(x)=x^3+2x^2+3x+6=(x^3+2x^2)+(3x+6)=x^2(x+2)+3(x+2)=$
$(x+2)(x^2+3)$

b) $W(x)=4x^3-8x^2-3x+6=(4x^3-8x^2)-(3x-6)=4x^2(x-2)-$
$3(x-2)=(x-2)(4x^2-3)$

c) $W(x)=x^5-4x^3+x^2-4=x^3(x^2-4)+(x^2-4)=(x^2-4)(x^3+1)=$
$(x-2)(x+2)(x+1)(x^2-x+1)$

Zadania

3.3.3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x)=3x^4-5x^3$

b) $W(x)=4x^3-6x^2+12x$

c) $W(x)=x^5-4x^4-4x^3+16x^2$

d) $W(x)=4x^6+8x^5+4x^4$

e) $W(x)=4x^2(x^2-2)+2(x^2-2)$

Odpowiedź:

a) $W(x)=x^3(3x-5)$,

b) $W(x)=2x(2x^2-3x+6)$,

c) $W(x)=x^2(x+2)(x-2)(x-4)$

d) $W(x)=4x^4(x^6+2x+1)$

e) $W(x)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(2x^2+1)$

3.3.4. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x)=(x^2-4)(x^3-1)$ b) $W(x)=(9x^2-6x+1)(9x^2-1)$

c) $W(x)=(x^3-27)(x^2-9)$ d) $W(x)=(x^4-25)(x^3+8)$

Odpowiedź:

a) $W(x)=(x-2)(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$

b) $W(x)=(3x-1)^3(3x+1)$

c) $W(x) = (x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

d) $W(x) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x+2)(x^2-2x+4)$

3.3.5. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$ b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

c) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x - 14$ d) $W(x) = x^4 + x^3 + 27x + 27$

e) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$ f) $W(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

g) $W(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

h) $W(x) = 15x^6 - 10x^5 + 45x^4 - 30x^3$

i) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ j) $W(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$

k) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$ l) $W(x) = x^4 + 5x^2 - x^3 - 5x$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

b) $W(x) = (x+2)(x^2+9)$ c) $W(x) = (x+2)(x\sqrt{3}-\sqrt{7})(x\sqrt{3}+\sqrt{7})$

d) $W(x) = (x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$

e) $W(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(3x-1)$

f) $W(x) = (x+2)^3$

g) $W(x) = (x-1)^3(x+1)^2$

h) $W(x) = 5x^3(x^2+3)(3x-2)$

i) $W(x) = (x-2)(x-3)(x+3)$

j) $W(x) = (x+7)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

k) $W(x) = (x-4)(x+4)(x-2)$

l) $W(x) = x(x-1)(x^2+5)$

3.3.6. Rozłóż wielomiany na czynniki poznanymi metodami.

a) $5x^6 + 10x^5 - 15x^2$ b) $8x^3 - 27$

c) $2x^2 - 6x - 8$ d) $4x^3 -$

e) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$ f) $2x^3 +$

g) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3$ h) $(x^4 - 1$

i) $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2$ j) $x^3 + 3x$

k) $x^4 + x^3 - 8x - 8$ l) $x^5 + 10x^4 + 25x^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Odpowiedź:

a) $5x^4(x^2+2x-3)$

b) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$

c) $2(x-4)(x+1)$

d) $4x(x+5)(-3x-2)^2(5x-1)$

e) $x^2(2x-3)^2$

f) $(x+2)(x-2)(2x+3)$

g) $2x^3(x-3)(x-1)$

h) $x^5(x+4)(x-4)(x+2)(x+3)$

i) $-2x^2(x-2)(x+5)$

j) $(x-2)(x+2)(x+3)$

k) $(x^3-8)(x+1)$

l) $x^3(x+5)^2$

3.3.7. Wykorzystując poznane metody, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej.

a) $8x^3-12x^2+6x-1$

b) $3x^4-5x^3+5x^2-5x+2$

c) $x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x$

d) $x^4+2x^3-4x^2-8x$

e) x^3+3x^2-2x

Odpowiedź:

a) $(2x-1)^3$

b) $(x-1)(3x-2)(x^2+1)$

c) $(x^2+3x+1)x(x^2+1)$

d) $x(x-2)(x+2)^2$

e) $x\left(x-1+\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$

Ciekawostka

Wzory skróconego mnożenia można szybko wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala.**
Blaise Pascal (1623-166) – francuski filozof, matematyk i fizyk. Badał prawdopodobieństwo, próżnię i ciśnienie atmosferyczne. Wynalazł m.in. pierwszą maszynę liczącą „Pascalinę" oraz TRÓJKĄT PASCALA. Od jego nazwiska wywodzi się nazwa jednostki ciśnienia (Pa) i język programowania Pascal[32].

Trójkąt Pascala pozwala wyprowadzić wzory skróconego mnożenia.

Przyjrzyjmy się postaci wzorów:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

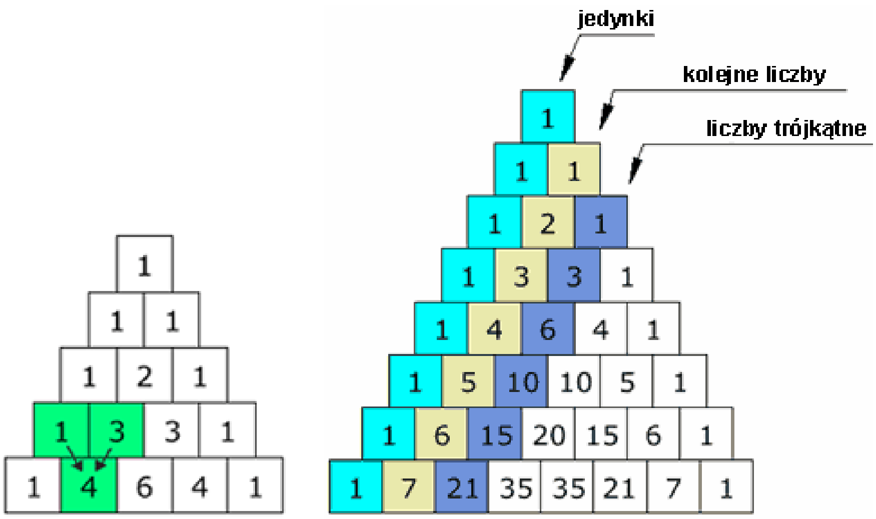
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

32. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal, 19.02.2013.

Zapiszmy same współczynniki liczbowe składników. Postać kolejnych czynników liczbowych jest widoczna. Współczynniki liczbowe utworzyły trójkąt, który nazywa się trójkątem Pascala.

Zasady budowy trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to tablica liczb, w której każdy element powstaje przez sumowanie elementów stojących nad nim. Elementy skrajne to jedynki.



Rysunek 3-2. Zasada tworzenie trójkąta Pascala

Wyznaczymy teraz współczynniki piątej potęgi dwumianu.

$(a+b)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Dwumian Newtona, czyli wzór na $(a+b)^n(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 6

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)!\cdot 0!} = \frac{7!}{7!\cdot 1!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!} = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)!\cdot 7!} = \frac{7!}{0!\cdot 7!} = 1$$

Więc: $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Zadanie

3.3.8. Wyznacz, korzystając z trójkąta Pascala:

a) $(a-b)^4$ b) $(a-b)^5$ c) $(a+b)^6$

Odpowiedź:

a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

c) $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

3.4. Równania wielomianowe

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych**
- **Rozwiązywać równania wielomianowe**

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań wielomianowych, przybliżymy pojęcie pierwiastka wielomianu.

Pierwiastek wielomianu lub równania wielomianowego – to rozwiązanie tego równania. W przypadku wielomianów mamy zazwyczaj do czynienia z kilkoma pierwiastkami.

Pierwiastkiem wielomianu $\boldsymbol{W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$ nazywamy jego miejsce zerowe. Powiemy zatem, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy W(a) = 0, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_+$

Przykład 1

Sprawdź, czy liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 - 19x - 20$.

$W(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 19(-2) - 20 = -8 - 8 + 38 - 20 = 2$

Otrzymany wynik jest różny od 0, więc liczba (-2) nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 2

Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu.

$W(x) = 2x^5 - 4x^2 - 24x$

Więc: $W(2) = 2 \cdot (2)^5 - 4 \cdot (2)^2 - 24 \cdot 2 = 64 - 16 - 48 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Równanie $\boldsymbol{W(x) = 0}$, gdzie $\boldsymbol{W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a \quad x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0}$, nazywamy równaniem wielomianowym stopnia $\boldsymbol{n}$.

Rozwiązywanie równań wielomianowych sprowadza się do znalezienia pierwiastków danych wielomianów.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania rozłożyć na czynniki.

Przykład 3

Rozwiąż równanie: $x^4 - 9 = 0$.

$$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3) = 0$$

Wyrażenie będzie równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$(x - \sqrt{3}) = 0 \vee (x + \sqrt{3}) = 0 \vee (x^2 + 3) = 0$

$x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2+3>0$, więc $x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie: $x^4+x^3-8x-8=0x^4+x^3-8x-8=0$.

Skorzystamy z metody grupowania wyrazów.

$x^3(x+1)-8(x+1)$

$(x+1)(x^3-8)=0$

$(x+1)=0 \ \vee \ (x^3-8)=0$

$x=-1 \ \vee \ x^3=8 \ \Rightarrow x=2$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby:$x=-1 \vee \ x=2$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie: $x^5-2x^4+5x^3=0$.

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias: $x^3(x^2-2x+5)=0$, to wyrażenie jest równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy:

$x^3=0 \ \vee \ x^2-2x+5=0$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2-2x+5=0$

$\Delta=4-4\cdot 1\cdot 5=-16<0$, skoro $\Delta<0$, to trójmian nie ma pierwiastków.

Więc rozwiązaniem jest $x=0$.

Przykład 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt[4]{2-4x^2-3x}$.

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, więc:

$2-4x^2-3x\geq 0 \ /\cdot(-1)$

$4x^2+3x-2\leq 0$

$\Delta= 9+32=41$

$x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \ \ x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Odpowiedź: $x\in\langle\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \ \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\rangle$

Zadania

3.4.1. Zapisz podane wyrażenia w prostszej postaci. Przyjmij, że każdy mianownik w podanych ułamkach jest różny od zera.

a) $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$ b) $\frac{30x^4-6x^3+45x^2-9x}{8x^3+12x}$ c) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^3-2x^2-12x+8}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

Odpowiedź:

a) x^2+1 b) $\frac{3(5x-1)}{4}$ c) $\frac{x-1}{x^2-4}$

d) $\frac{x+3}{x-3}$, e) $\frac{x-2}{x+1}$

3.4.2. Rozwiąż równania:

a) $3x^4-12=0$ b) $x^3+4x=0$

c) $x^3+x^2-x-1=0$ d) $x^3-5x^2-x+5=0$

e) $x^5-x^4-5x^3+5x^2+6x-6=0$

f) $x^3+8x^2-2x-16=0$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$ b) $x=0$

c) $x=1 \vee x=-1$, d) $x=5 \vee x=1 \vee x=-1$

e) $x=1 \vee x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}\ x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

f) $x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \vee x=-8$

3.4.3. Rozwiąż, rozkładając na czynniki:

a) $3x^3+6x^2+4x+8=0$ b) $x^6+2x^5+x^4+x^2+2x+1=0$

c) $1+x^2=x^3+x$ d) $3x^2-4x=-x^3+12$

e) $-9x-5x^2=-x^3-45$ f) $x^4+3x^3-6x-4=0$

g) $x^3-7x^2+6=0$ h) $5x^3+9x^2-26x-24=0$

i) $x^3-7x^2+2x-14=0$ j) $x^3+2x^2-5x-10=0$

k) $x^3-7x^2-4x+28=0$ l) $x^3-3x^2-4x+12=0$

m) $6x^3+6x^2-3x-3=0$ n) $x^3+x^2-5x-5=0$

o) $2x^3-4x^2-6x+12=0$ p) $x^3+x^2-5x-5=0$

q) $x^5-2x^4-9x^3+18x^2=0$ r) $-2x^4-\sqrt{3}x^3+2x+\sqrt{3}=0$

s) $2x^3-3x^2-8x+12=0$ t) $2x^5-18x^3+2x^2-18=0$

u) $x^3+3x^2-5x-15=0$ v) $x^3+x^2-9x-9=0$

w) $x^8+x^6-x^4-x^2=0$ x) $20x^4-20x^3+5x^2=0$

Odpowiedź:

a) $x=-2$ b) $x=-1$

c) $x=1$ d) $x=2 \vee x=-2 \vee x=-3$

e) $x=5 \vee x=3 \vee x=-3$ f) $x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \vee x=-2 \vee x=-1$

g) $x=3-\sqrt{15} \vee x=3+\sqrt{15} \vee x=1$ h) $x=-3 \vee x=-\frac{4}{5} \vee x=2$

i) $x=7$ j) $x=-2 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

k) $x=2 \vee x=-2 \vee x=7$ l) $x=3 \vee x=\sqrt[3]{4}$

m) $x=-1 \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

o) $x=2 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$ p) $x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

q) $x=2 \vee x=0 \vee x=3 \vee x=-3$ r) $x=1 \vee x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

s) $x=-2 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$ t) $x=3 \vee x=-3 \vee x=-1$

u) $x=-3 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$ v) $x=-1 \vee x=3 \vee x=-3$

w) $x=0 \vee x=1 \vee x=-1$, x) $x=0 \vee x=\frac{1}{2}$

3.4.4. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^3+5x^2+6x}$

b) $f(x)=\sqrt{(x-3)(4-x^2)}$

c) $f(x)=\sqrt{x(2+x)(x-3)^2}-\sqrt{(x+2)^2(4-x)}$

d) $f(x)=\frac{8x^3-125}{4x^3-4x^2-25x+25}$

e) $f(x)=\frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3-16x}$

f) $f(x)=\frac{6x-2}{x^2-x-2}$

g) $f(x)=-3x^2+7x-8$

h) $f(x)=x+\frac{1-\sqrt{x+1}}{3\sqrt{1-2x}}$

i) $f(x)=\frac{\sqrt{3-|x+2|}}{x(x+3)}$

j) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x+6}}$

l) $f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

Odpowiedź:

a) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,-2,0\}$

b) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle -2,3\rangle$

c) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 0,4\rangle$

d) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

e) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-4,0,4\}$

f) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x \epsilon \left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right)$

i) $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-3\}$

j) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

k) $x \epsilon (-\infty, 6)$

l) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy[33]:

A. $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$

B. $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$

C. $2x^5 + 3x + 1$

D. $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

2. Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (x-2)^{53} + 53x + 2^{53}$ jest równy:

A. 2^{54}

B. 0

C. 2^{53}

D. 53

3. Wielomian $W(x) = x^2(x-2) - (x-2)$ można zapisać w postaci:

A. $x^2(x+2)$

B. $(x^2+1)(x-2)$

33. Zadania 1-22: zaczerpnięte z www.zadania.info, 21.03.2013.

C. $x(x-2)^2$

D. $(x-1)(x+1)(x-2)$

4. Wielomiany $W(x)=(x-2)(x+1)(x+2)$ i $P(x)=(a-b)x^3+x^2+(a+b)x-4$ są równe. Z tego wynika, że:

A. $a=1, b=2$

B. $a=-1, b=-2$

C. $a=-1, b=2$

D. $a=2, b=-1$

5. Stopień wielomianu $W(x)=(x-1)(3x+5)^2(2x+1)^3$ jest równy:

A. 4

B. 5

C. 6

D. 8

6. Wielomian W określony jest wzorem $W(x)=-x^9+x^8-6$. Zatem $W(-5)$ jest liczbą:

A. ujemną

B. dodatnią

C. niewymierną

D. pierwszą

7. Po rozłożeniu wielomianu $W(x)=x^3+5x^2-3x-15$, otrzymujemy:

A. $W(x)=(x+5)(x-3)(x+3)$

B. $W(x)=(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

C. $W(x)=(x-5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

D. $W(x)=(x+5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

8. Dane są wielomiany $W(x)=3x^2-2x, V(x)=2x^2+3x$. Stopień wielomianu $W(x)\cdot V(x)$ jest równy:

A. 6

C. 5

D. 4

E. 3

9. Wartość wielomianu $W(x) = 3x - x^2 - x^3$, dla $x = -3$, jest równa:

A. 12

B. -9

C. 9

D. -24

10. Wielomian $P(x) = W(x) - K(x)$ jest siódmego stopnia oraz $W(x) = mx^7 + 8x^5 + 5, K(x) = 3x^3 + 8x^5 + (3m + 2)x^7$. Wynika stąd, że liczba m jest różna od:

A. 3

B. -1

C. 1

D. 0

11. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$:

A. jest iloczynem wielomianów $(x - 2)$ i $(x^4 + 1)$

B. ma trzy miejsca zerowe

C. ma dwa miejsca zerowe

D. jest różnicą wielomianów $(x^5 - 2)$ i $x + 2$

12. Funkcja $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$ ma:

A. 1 miejsce zerowe

B. 2 miejsca zerowe

C. 3 miejsca zerowe

D. nie ma miejsc zerowych

13. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ w punkcie m jest równa 15, dla:

A. $m = 3$

B. $m = 3 \vee m = -3$

C. $m = 2 \vee m = -2 \vee m = 3$

D. $m = 2$

14. Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $W(x) = 5x^2 - 2x^3 + 3$, aby otrzymać wielomian $P(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$?

A. $6 - 7x^2 - 6x^3$

B. $2x^3 + 17x^2$

C. $6x^3 + 7x^2$

D. $6x^3 + 7x^2 - 6$

15. Wiadomo, że $W(-1) = -1$, gdy $W(x) = 2x^3 + px - 3$. Zatem wartość współczynnika p wynosi:

A. $\frac{1}{4}$

B. -4

C. 4

D. -1

16. Wielomiany P i Q określone są wzorami $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = -x^5 + 1$.

Wielomian $R(x) = 2P(x) + Q(x)$ jest stopnia:

A. 0

B. 10

C. 1

D. 5

17. Wielomiany $P(x) = (a+1)x^3 + x^2 - b$ i $P(x) = (b-1)x^3 + x^2 + 2a + 1$ są równe. Zatem liczba $a + b$:

A. należy do zbioru $\langle 2,\ 3\rangle$

B. jest większa od 3

C. należy do zbioru $(-2,0\rangle$

D. jest mniejsza od -2

18. Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi:

A. $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$

B. $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$

C. $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$

D. $(x^4 - 2)(x + 1)$

19. Wielomian $x^3 - 3x^2 - 3$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

A. $(x - 3)(x - 1)(x + 1)$

B. $(x - 3)x^2$

C. $(x - 3)(x^2 + 1)$

D. $(x - 3)^2(x^2 + 1)$

20. Dane są wielomiany $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + 2$ oraz $P(x) = 2x^4 + 5X^3 + 3x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

A. $5x^4 + 3x + 2$

B. $3x + 2$

C. $-x^4 + 3x + 2$

D. $-x^4 + 3x - 2$

21. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

22. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

A. $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$

B. $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$

C. $2x^5 + 3x + 1$

D. $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

23. Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy[34]:

A. $5x^2 + 12x - 3$

B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$

C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$

D. $4x^3 + 12x^2 - 3$

24. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Współczynnik a jest równy[35]:

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4

25. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^2 - 5x$ i $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. Wielomian $G(x) = 2W(x) - P(x)$ jest równy[36]:

A. $x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

B. $-x^3 + 7x^2 - 7x + 4$

C. $-x^3 + 9x^2 - 12x + 7$

D. $x^3 - x^2 - 8x + 5$

34. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.
35. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 05.03.2013.
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 05.03.2013.

26. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$ oraz $M(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Wielomian $W(x) - M(x)$ jest równy[37]:

A. $4x^3 + 9$

B. $3x^3 + 1$

C. $2x^3 - 1$

D. $4x^3 - 4x^2 + 9$

27. Dane są wielomiany $W(x) = x - 4$ i $M(x) = x^2 - 2x$. Wielomian $W(x) \cdot P(x)$ jest równy[38]:

A. $x^3 - 2x^2 - 8x$

B. $x^3 - 6x^2 + 8x$

C. $x^3 - 4x^2 - 0\ x$

D. $x^3 - 4x^2 + 6x$

28. Suma odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1$ jest równa[39]:

A. 4

B. $-0{,}25$

C. 6

D. -4

29. Liczba $x = 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^2 - 2a$, gdy a jest równe:

A. 18

B. -18

C. 9

D. $18\sqrt{2}$

30. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy[40]:

A. 0

B. 1

37. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_351687432168743168741687651646 87/mat_ark_pdst.pdf, 05.03.2013.
38. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 05.03.2013.
39. Zadania 28, 29: zaczerpnięte ze strony www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 05.03.2013.
40. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 05.03.2013.

C. 2

D. 3

31. Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-4)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = 0$ są liczby[41]:

A. $-3, -2, 2, 3$

B. $2, 3$

C. $-3, 2$

D. $-2, 3$

32. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{36-x^2}{(6-x)(x^3-1)}$ jest zbiór:

A. $R\setminus\{1,6\}$

B. $R\setminus\{-6,-1,6\}$

C. $R\setminus\{-6,6\}$

D. $R\setminus\{-6,1,6\}$

33. Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0$ ma[42]:

A. gokładnie jedno rozwiązanie

B. dokładnie dwa rozwiązania

C. dokładnie trzy rozwiązania

D. dokładnie cztery rozwiązania

34. Liczba 5 nie należy do dziedziny wyrażenia[43]:

A. $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

B. $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$

C. $\frac{x^2-25}{x^2+25}$

D. $\frac{x^2-25}{x+5}$

41. Zadania 31, 32: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 06.03.2013.
42. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.03.2013.
43. Zadania 34–47: zaczerpnięte z www.zadania.info, 20.03.2012.

35. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{2}{x} : \frac{x^2-16}{x+1}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{-1,0\}$

B. $R\backslash\{-4,-1,0,4\}$

C. $R\backslash\{-4,4\}$

D. R

36. Do dziedziny funkcji f, określonej wzorem $f(x) = \frac{5x}{x(x+1)(x-\sqrt{7})(x^2+7)}$:

A. nie należą 2 liczby

B. nie należą 3 liczby

C. nie należą 4 liczby

D. nie należy 5 liczb

37. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{x^2-2x+3}$ jest największa, gdy liczba x jest równa:

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{4}$

D. 2

38. Dla której z liczb wyrażenie $\frac{2+x}{x-5}$ nie ma sensu liczbowego?

A. -2

B. -5

C. 0

D. 5

39. Dziedziną wyrażenia $W = \frac{x^2-36}{(x+4)(x^2+4x+4)}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{-6,-4,-2,6\}$

B. $R\backslash\{-6,-4,2,6\}$

C. $R\setminus\{-4,2\}$

D. $R\setminus\{-4,-2\}$

40. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{3x}{x^2-5x+6}$ jest zbiór:

A. $R\setminus\{2\}$

B. R

C. $R\setminus\{2,3\}$

D. $R\setminus\{3\}$

41. Zbiór $R\setminus\{-3,0,2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

A. $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

B. $\frac{x^2-x-2}{x^3+5x^2+6x}$

C. $\frac{3x+2}{x(x-2)(x-3)}$

D. $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$

42. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-4x}$ jest zbiór:

A. $R\setminus\{-5,5\}$

B. $R\setminus\{0,4\}$

C. $R\setminus\{-2,2\}$

D. $R\setminus\{-5,0,4,5\}$

43. Dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{-x-3}$ jest zbiór:

A. $\langle -3,+\infty)$

B. $(-3,\ +\infty)$

C. $(-\infty,-3\rangle$

D. $(-\infty,-3)$

44. Najmniejszą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 - 8x - \frac{59}{4}}$, jest:

A. -2

B. -3

C. -4

D. -5

45. Największą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{30 - 6x}$, jest:

A. -5

B. -4

C. 5

D. 6

46. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}$ jest:

A. $(-\infty, 1\rangle$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-1, +\infty)$

47. Wyrażenie $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+3}$ jest równe:

A. $\frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$

B. $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$

C. $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$

D. $\frac{x+2}{-5}$

48. Wyrażenie $\frac{x-1}{3x-6} - \frac{2}{x-2}$ jest równe[44]:

A. $\frac{x+1}{3x-6}$

B. $\frac{x+5}{3x-6}$

C. $\frac{x-7}{3x-6}$

D. $\frac{x-3}{3x-6}$

49. (**6 pkt**) Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - mx^3 + nx^2 - 8$. Wartość tego wielomianu dla $x = 2$ jest taka sama, jak dla $x = -2$, a wartość wielomianu dla $x = 3$ wynosi 82. Wyznacz wartości liczb m i n oraz rozwiąż nierówność: $W(x) > x^4 + 2$.[45]

50. (**2 pkt**) Sprawdź, czy wielomiany $W(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ i $H(x) = (x^2-3x+2)(x^2+3x+2)$ są równe.

51. **(2 pkt)** Określ dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+3}{x^2-4} + \frac{4}{x-2}$ i wykonaj działania.

52. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

53. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$[46].

54. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$[47].

55. Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

56. (**2 pkt**) Rozwiąż równanie $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 6x - 12}$.

57. (**2 pkt**) Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$[48].

58. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie: $\frac{x-2}{3x-1} = \frac{x+5}{3x+2}$[49].

44. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 21.03.2013.
45 Zadania 49, 50, 51, 52: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.
46 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 17.03.2013
47. Zadania 54, 55, 56: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 17.03.2013.
48. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 17.03.2013.
49. Zadania 58, 59, 60: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 17.03.2013.

59. (2 pkt) Wykonaj działania: $\frac{x-5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-10x+25}$.

60. (3 pkt) Pewną liczbę wymierną można przedstawić w postaci $\frac{n}{3-n}$, gdzie $n \in \{1,2,3,....,32\}$. Gdy powiększymy licznik tego ułamka o 39, a mianownik o 20, to podwoimy wartość tego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

4.1. Równanie prostej na płaszczyźnie

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać równanie prostej w postaci kierunkowej przechodzącej przez dany punkt**

Linia prosta lub prosta – to jedno z podstawowych pojęć geometrii[50].

Równaniem prostej k nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu, który do tej prostej należy, ale nie jest spełnione przez współrzędne punktów leżących poza prostą k.

Możemy wyznaczać równanie prostej:

- przechodzącej przez dany punkt,
- przechodzącej przez dany punkt i nachylonej do osi OX pod danym kątem,
- przechodzącej przez dwa dane różne punkty.

Równanie prostej można zapisać w postaci:

Postać ogólna: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$**,**

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$

A, B, CA, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej.

Np. $3x - 5y + 7 = 0$, $-\frac{1}{2}x + 12y + 2 = 0$, $0{,}25x - \frac{1}{3}y - 4 = 0$

50. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta#Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29, 15.03.2013.

Postać kierunkowa: $\boldsymbol{y = ax + b}$

a – współczynnik kierunkowy (kątowy) prostej, b – wyraz wolny.

Współczynnik a można obliczyć jako tangens kąta zawartego pomiędzy wykresem prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych a osią OX: $\boldsymbol{a = tg\alpha}$**.**

W równaniu prostej x i y oznaczają współrzędne dowolnego punktu P należącego do płaszczyzny. Od ich wartości zależy położenie prostej w układzie współrzędnych.

Punkt P należy do prostej tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Przykład 1

Przekształć równanie zapisane:

a) z postaci kierunkowej na postać ogólną,

b) z postaci ogólnej na postać kierunkową.

a) Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = 3x - 5$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę: $y - 3x + 5 = 0$

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną: $-3x + y + 5 = 0$

b) Aby przekształcić równanie z postaci ogólnej na kierunkową, wystarczy z zapisu ogólnego wyznaczyć y.

Dane mamy równanie w postaci ogólnej: $2x - 3y + 6 = 0$

Wyznaczamy y: $-3y = -2x - 6 \ /:(-3)$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Jeżeli w równaniu ogólnym nie występuje zmienna y, to wyznaczamy x i otrzymujemy równanie prostej prostopadłej do osi OX.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt $\boldsymbol{A = (x_1, y_1)}$ **można zapisać w postaci** $\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

Przykład 2

Wiedząc, że współczynnik kierunkowy prostej wynosi 5, napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-2,6)$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

$y = 5(x - (-2)) + 6$

$y = 5(x + 2) + 6$

$y = 5x + 10 + 6$

$y = 5x + 11$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (-1,4)$ i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Ponieważ $\alpha = 60°$, to $tg60° = \sqrt{3}$.

Równanie prostej ma więc postać: $y = \sqrt{3}x + b$.

Wiemy, że do prostej należy punkt B, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$4 = \sqrt{3} \cdot (-1) + b$

$b = 4 - \sqrt{3}$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$.

Zadania

4.1.1. Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym i przechodzącej przez punkt C. Otrzymane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej.

a) $C = (-3,-2), a = -\frac{1}{3}$

b) $C = (0,3), a = -1$

c) $C = (2,5), a = 3$

d) $C = (-2,-2), a = -4$

Odpowiedź:

a) $\frac{1}{3}x + y + 1 = 0$

b) $x + y - 3 = 0$

c) $-3x + y + 1 = 0$

d) $4x + y + 6 = 0$

4.1.2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:

a) $P=(-3{,}4), \alpha=45°$ b) $P=(6{,}15), \alpha=120°$

c) $P=(-1{,}5), \alpha=135°$ d) $P=(2,-3), \alpha=60°$

Odpowiedź:

a) $y=x+7$ b) $y=-\sqrt{3}x+15+6\sqrt{3}$

c) $y=-x+4$ d) $y=\sqrt{3}x-3-2\sqrt{3}$

4.1.3. Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x)=-2x+3$. Wyznacz liczbę a, jeśli:

a) $f(2a-4)=3a+8$ b) $f(4a+1)=f(5a-3)$ c) $f(8-4a)=\frac{22a-23}{3}$

Odpowiedź:

a) $a=\frac{3}{7}$, b) $a=4$, c) $a=8$

4.2. Równoległość i prostopadłość prostych, a ich współczynnik kierunkowy

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych**
- **Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt**
- *** Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych**
- *** Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt**

Dwie proste są równoległe, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste *k* i *l*, dane wzorami

$$(k) \quad y=a_1x+b_1$$

$$(l) \quad y=a_2x+b_2$$

są **równoległe,** jeżeli:

$$a_1 = a_2$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Przykład 1

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2,4)$ i równoległej do prostej o równaniu $3x - 2y + 4 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x - 2y + 4 = 0.$

$-2y = -3x - 4 \ /:(-2)$

$y = \frac{3}{2}x + 2$

$a_1 = \frac{3}{2}$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$y = a(x - x_1) + y_1$

Z warunku równoległości wiadomo, że $a = a_1 = \frac{3}{2}$.

Punkt P leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4$, więc

$y = \frac{3}{2}(x + 2) + 4 = \frac{3}{2}x + 3 + 4 = \frac{3}{2}x + 7$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{3}{2}x + 7$.

Przykład 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (3,-2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $3x + 4y - 7 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x + 4y - 7 = 0$

$4y = -3x + 7 \ /:4$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

$$a_1 = -\frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Z warunku prostopadłości wiadomo, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, stąd:

$$-\frac{3}{4} \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \; a_2 = \frac{4}{3}$$

Punkt B leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{4}{3}(x - 3) + (-2)$, więc
$y = \frac{4}{3}x - 4 - 2 = \frac{4}{3}x - 6$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{4}{3}x - 6$.

Zadania

4.2.1. Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej:

a) $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$

b) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (2,2)$

e) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

f) $y = -3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (3,3)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $x + y - 6 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (1, -2)$

i) $2x + 2y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-4, -3)$

j) $x - y + 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-2, -5)$

k) $x + y - 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-6,8)$

Odpowiedź:

a) $y = -\frac{1}{3}x + 5$

b) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

c) $y = \frac{3}{2}x - 4$

d) $y = -3x + 8$

e) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

f) $y = \frac{1}{3}x + 2$

g) $x + 2y + 2 = 0$

h) $x - y - 3 = 0$

i) $x - y - 3 = 0$

j) $x + y + 7 = 0$

4.2.2. Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej:

a) $y = 2x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (2, 3)$

b) $y = -5x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (2,1)$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{2}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6,1)$

e) $y = 4x + 6$ i przechodzi przez punkt $A = \left(\frac{1}{4}, 5\right)$

f) $y = -x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (-5,2)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$ i przechodzi przez punkt $A = \left(10, -\frac{1}{2}\right)$

i) $x + y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (6,1)$

j) $3x - y = -9$ i przechodzi przez punkt $A = (-2,6)$

Odpowiedź:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -5x + 11$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

d) $y = \frac{2}{3}x - 3$

e) $y = 4x + 4$

f) $y = -x - 3$

g) $y = 2x - 11$

h) $y = 0{,}3x - 3{,}5$

i) $x + y + 7 = 0$

j) $3x - y + 12 = 0$

4.2.3. Dana jest prosta *l* o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \sqrt{2}$ oraz punkt $A = (-3,-2)$. Wyznacz wzór funkcji liniowej *f* wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do prostej *l*, a punkt *A* należy do wykresu funkcji *f*.

Odpowiedź: $y = -\frac{2}{3}x - 4$

4.2.4. Określ wzajemne położenie prostych:

a) $18x + 3y - 1 = 0$ $y = \frac{1}{3} - 6x$

b) $y = \frac{7}{8}x + 2$ i $7x - 8y + 24 = 0$

c) $6x + 2y = 4$ i $y = \frac{1}{3}x + 2$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ i $y = 3x + 4$

e) $x - 2y + 3 = 0$ i $2x + y - 5 = 0$

f) $3x - 6y + 7 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x$

g) $3x - 6y + 7 = 0$ i $y = -2x + 4$

Odpowiedź:

a) proste równoległe, b) proste równoległe, c) proste prostopadłe, d) proste przecinające się, e) proste prostopadłe, f) proste równoległe, g) proste prostopadłe

4.2.5. Proste k i l są prostopadłe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: 2x - 9y + 6 = 0, k: y = ax + 6$

b) $l: y = -\frac{1}{3}x + 2$, $k: y - ax = 4$

c) $l: 2ax - y + 1 = 0$, $k: x + 2y - 6 = 0$

Odpowiedź:

a) $a = -\frac{9}{2}$ b) $a = 3$ c) $a = -1$

4.2.6. Proste l i m są równoległe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: y = 2x - 5 = 0, m: y = (3 - a)x + 4$

b) $l: y = 3x + 6$, $m: y = 12 + ax$

c) $l: y = (a + 4)x + 5$, $m: y = 4 + 10x$

d) $l: y = ax + 6$, $m: y = 6 + 19x$

Odpowiedź:

a) $a = 1$ b) $a = 3$

c) $a = 6$ d) $a = 19$

4.3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych**
- **Wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)**
- **Sprawdzić, czy punkty są współliniowe**

Punkt przecięcia dwóch prostych

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P. Punkt przecięcia P leży na prostej k i na prostej l, zatem jego współrzędne muszą spełniać jednocześnie równania obu prostych. Współrzędne punktu P otrzymujemy, rozwiązując układ równań.

Przykład 1

Wyznacz punkt przecięcia się prostych danych równaniami: $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$.

Z podanych wzorów funkcji tworzymy układ dwóch równań:

$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -5x + 9 \end{cases}$ wyznaczamy z niego x oraz y.

$3x - 7 = -5x + 9$

$3x + 5x = 9 + 7$

$8x = 16 \ /:8$

$x = 2$

Więc: $y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Odpowiedź: Proste określone równaniami $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$, przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Jeśli mamy dane dwa różne punkty na płaszczyźnie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, możemy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Możemy napisać równanie takiej prostej, rozwiązując układ równań lub skorzystać z gotowego wzoru.

Poniższe przykłady przedstawiają obie metody.

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}6)$.

Szukamy równania prostej $y = ax + b$.

Prosta przechodzi przez punkty $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}9)$, a to oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają równanie prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = -3a + b \\ 9 = a + b \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania, i otrzymujemy:

$6 - 9 = -3a - a + b - b$

$-3 = -4a \; /:(-3)$

$a = \frac{4}{3}$

Skoro $9 = a + b,$ to $b = 9 - \frac{4}{3} = 7\frac{2}{3}$

Szukane równanie prostej, to $y = \frac{4}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

Określenie wzoru funkcji przechodzącej przez dwa dane punkty za pomocą wzorów

Mając dane dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, możemy obliczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Gdy mamy współczynnik kierunkowy prostej i punkt, który do tej prostej należy, to możemy już napisać jej wzór, korzystając z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$.

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, opisuje wzór:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-2,3)$ i $B = (4,2)$.

Rozwiązanie:

I sposób :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$(y-3)(4-(-2)) - (2-3)(x-(-2)) = 0$$
$$(y-3)(4+2) - (-1)(x+2) = 0$$
$$(y-3) \cdot (6) + 1 \cdot (x+2) = 0$$
$$6y - 18 + x + 2 = 0$$
$$6y = -x + 16$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{16}{6}$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$$

II sposób:

1. Zapisujemy równanie szukanej prostej w postaci kierunkowej, czyli: $y = a\,x + b$.
2. W kolejnych krokach będziemy wyznaczać współczynniki *a* i *b*.
3. Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do równania prostej:

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

4. Podstawiamy współrzędne drugiego punktu do równania prostej:

$$y_B = a \cdot x_B + b$$

5. Rozwiązujemy układ równań

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

$$y_B = a \cdot x_B + b$$

otrzymując szukane parametry *a* i *b*.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \ /\cdot(-1) \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = 2a - b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$-1 = 6a \ /:6$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

Podstawiamy do pierwszego równania z układu równań za $a = -\frac{1}{6}$, dzięki temu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b, którą obliczamy:

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + b$$

$$3 = \frac{1}{3} + b$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Otrzymane równanie ma postać: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2,4)$ i $B = (-3,5)$. Znajdź prostą, przechodzącą przez te punkty.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-4}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Korzystamy z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$ i piszemy równanie prostej.

$$y = -\frac{1}{5}(x - (-3)) + (-3) = -\frac{1}{5}(x+3) - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3$$

Ostatecznie prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{3}{5}$.

Zadania

4.3.1. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty:

a) A = (-2,-10), B = (1,-1)   b) A = (-3,9), B = (2,-1)   c) A = (0,6), B = (6,0)

d) A = (-2,-1), B = (3,0)   e) A = (-12,4), B = (3,1)   f) A = (8,4), B = (1,-1)

Odpowiedź:

a) $a=3$ b) $a=-\frac{8}{5}$ c) $a=-1$

d) $a=\frac{1}{5}$ e) $a=-\frac{1}{5}$ f) $a=\frac{5}{7}$

4.3.2. Oblicz brakujące współrzędne punktów, jeśli wiadomo, że należą do danej prostej:

a) $y=\frac{3}{2}x+2$, $P=(-2,y)$ b) $2x-3y=2$, $P=(\frac{1}{2},y)$

c) $y=9x-3$, $P=(x,-6)$ d) $\frac{x}{-7}+\frac{2y}{7}=1$, $P=(x,-\frac{2}{3})$

Odpowiedź:

a) $y=-1$ b) $y=-\frac{1}{3}$

c) $x=-1$ d) $x=-8\frac{1}{3}$

4.3.3. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a, wiedząc, że do tej prostej należy punkt M:

a) $a=0,\ M=(-2,-3)$ b) $a=3,\ M=(6,-2)$

c) $a=-\frac{3}{4},\ M=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ d) $a=-5,\ M=(2,3)$

Odpowiedź:

a) $y=-3$ b) $y=3x-20$

c) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ d) $y=-3x+13$

4.3.4. Napisz równanie prostej, do której należą punkty:

a) $A=(-1,7),\ B=(3,-5)$

b) $A=(-4,4),\ B=(2,7)$

c) $A=(-5,0),\ B=(5,-6)$

d) $A=\left(1,\frac{1}{12}\right),\ B=\left(3,-\frac{17}{12}\right)$

e) $A=(-2,6), B=\left(\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$

f) $A=(2,1),\ B=(-4,2)$

g) $A=(2,6),\ B=(-1,-7)$

h) $A=(2,4),\ B=(5,-5)$

Odpowiedź:

a) $y=-3x+4$ b) $y=\frac{1}{2}x+6$ c) $y=-\frac{3}{5}x-3$

d) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}$ e) $y=-3x$ f) $y=-\frac{1}{6}x+1\frac{1}{3}$

g) $y = 4\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$

h) $y = -3x + 10$

4.3.5. Sprawdź, czy punkty są współliniowe:

a) $A = (2,1), B = (4,5), C = (-3,-9)$

b) $A = (-1,-6), B = (0,-6), C = (12,0)$

c) $A = (-5,3), B = (2,3), C = (4,3)$

d) $A = (2,0), B = (2,-4), C = (2,8)$

Odpowiedź:

a) tak

b) nie

c) tak

d) tak

4.4. Odległość punktów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać odległość dwóch punktów**
- **Obliczać odległość punktu od prostej**

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Odległość punktu A od punktu B liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Przykład 1

Oblicz odległość punktów A i B od siebie, gdy $A = (7,\ 6), B = (-5,4)$.
Podstawiamy do wzoru:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5-7)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{144+4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

Odpowiedź:
Odległość punktu A od punktu B wynosi $2\sqrt{37}$.

Odległość punktu od prostej to w istocie długość odcinka, którego początkiem jest dany punkt i opuszczonego na prostą pod kątem prostym.

Dana jest prosta k o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ i punkt $P = (x_1, x_2)$, który leży poza prostą k.

Odległość punktu P od prostej k wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Obliczając odległość punktu od prostej, możemy korzystać z powyższego wzoru lub wykonać następujące kroki:

1. Napisać wzór prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.
2. Obliczyć punkt przecięcia danej prostej i prostej do niej prostopadłej.
3. Obliczyć długość odcinka, którego końce to dany w zadaniu punkt i punkt obliczony w punkcie drugim. Długość tego odcinka jest szukaną przez nas odległością punktu A od prostej k.

Przykład 2

Dane są: prosta $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$. Obliczmy odległość punktu A od prostej k.
Rozwiązanie:

1. Napiszemy wzór prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

Jeśli prosta l jest prostopadła do prostej k, to współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $-\frac{1}{2}$.

Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (1,3)$, więc:

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Równanie prostej $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Obliczamy punkt przecięcia prostej k i prostej do niej prostopadłej.

Rozwiązujemy układ równań złożony ze wzorów obu funkcji:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x = 0{,}4$$

$$y = 2 \cdot 0{,}4 + 3 = 3{,}8$$

Punkt przecięcia prostych k i l ma współrzędne $B = (0{,}4; 3{,}8)$

3. Obliczamy długość odcinka AB, czyli odległość punktu A od prostej k.

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}4 - 2)^2 + (3{,}8 - 3)^2} = \sqrt{2{,}56 + 9}$$
$$= \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$$

Odpowiedź:

Odległość puntu A od prostej k wynosi 3,4.

Przykład 3

Korzystając z danych z przykładu 2, obliczymy odległość puntu A od prostej k, korzystając ze wzoru

$d(P, k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

A, B i C to współczynniki prostej z jej postaci ogólnej, natomiast x_1, y_1 to współrzędne danego punktu.

Mamy dane: prostą k: $y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$.

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$$y = 2x + 3$$

$$2x - y + 3 = 0$$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Zadania

4.4.1. Oblicz długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców:

a) $A = (1,1), B = (4,7)$ b) $A = (-5,2), B = (3,2)$

c) $A = (2,-5), B = (-3,4)$ d) $A = (-1,-4), B = (8,4)$

e) $A = (2,-2), B = (4,5)$ e) $A = (3,-5), B = (4,4)$

f) $A = (6,8), B = (10,0)$ g) $A = (8,0), B = (-2,5)$

Odpowiedź:

a) $3\sqrt{5}$ b) 8

c) $\sqrt{117}$ d) $\sqrt{165}$

e) $\sqrt{53}$ f) $5\sqrt{2}$

g) $4\sqrt{5}$ h) $5\sqrt{5}$

4.4.2. Oblicz odległość punktu A od prostej k:

a) $A = (1,4)$, k: $4x - 2y - 16 = 0$

b) $A = (-5, 4)$, k: $y = -2x + 1$

c) $(-2{,}3)$, $k\colon 3x - 4y + 2 = 0$

Odpowiedź:

a) $2\sqrt{5}$ b) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{16}{5}$

4.4.3. W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-4{,}2)$, $B = (5{,}4)$.

a) Oblicz odległość punktu $C = (-1{,}4)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B.

b) Uzasadnij, że jeśli $m \neq 0$, to punkty A, B oraz punkt $D = (-1, m)$ są wierzchołkami trójkąta.

Odpowiedź:

a) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

b) 3 punkty są wierzchołkami trójkąta, jeżeli nie leżą na jednej prostej.

Musimy zatem sprawdzić, że punkt $D = (-1, m)$ nie leży na prostej AB. Ponieważ wyliczyliśmy już równanie tej prostej, nie ma z tym problemu (wstawiamy współrzędne tego punktu do równania prostej i patrzymy, że nie wyjdzie 0): $2 \cdot (-1) - 3m + 2 = 3m \neq 0$.

4.5. Współrzędne środka odcinka

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać współrzędne środka odcinka**

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Środek odcinka, mając dane współrzędne jego końców A i B, liczymy ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Przykład 1

Podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach: A = (3, -5), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru:

$$S=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+6}{2},\frac{-5+3}{2}\right)=(4{,}5;\ -1)$$

Przykład 2

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S=(-3,6)$. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B=(4,-2)$.

Zajmijmy się osobno współrzędną x i osobno współrzędną y.

$\frac{x_1+x_2}{2}=-3$

$\frac{x_1+4}{2}=-3$

$x_1+4=-6$

$x_1=10$

$\frac{y_1+y_2}{2}=6$

$\frac{y_1+(-2)}{2}=6$

$y_1-2=12$

$y_1=14$

Odpowiedź:

Współrzędne punktu A wynoszą $(10{,}14)$.

Zadania

4.5.1. Podaj środki odcinków, których końce mają współrzędne:

a) $A=(-8,5), B=(0,11)$

b) $A=(3,-5), B=(-13,7)$

c) $A=(-2,3), B=(4,-9)$

d) $A=(1,7), B=(-5,-2)$

e) $A=(5,3), B=(1,3)$

f) $A=(-6,1), B=(4,3)$

g) $A=(-4,-8), B=(2,1)$

h) $A=(-4,5), B=(8,7)$

i) $A=(-4,-7), B=(10,-3)$

j) $A=(0,6), B=(-12,16)$

Odpowiedź:

a) $S=(-4{,}8)$

b) $S=(-5{,}1)$

c) $S=(1,-3)$

d) $S=\left(-2,\frac{5}{2}\right)$

e) $S=(3{,}3)$

f) $S=(-1{,}2)$

g) $S=\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$

h) $S=(2{,}6)$

i) $S=(3,-5)$

j) $S=(-6{,}11)$

4.5.2. Dany jest odcinek o końcach w punktach $A=(-2{,}4)$ i $B=(6,-2)$.

a) Wyznacz współrzędne środka odcinka.

b) Oblicz długość tego odcinka.

c) Wyznacz równanie prostej równoległej do odcinka przechodzącej przez punkt $C=(0,3)$.

Odpowiedź:

a) $S=(2,1)$ b) $|AB|=10$ c) $y=\frac{4}{3}x+3$

4.5.3. Dany jest odcinek $|AB|$, w którym dany jest środek S i koniec B. Wyznacz współrzędne punktu A.

a) $S=(2,-5),\ B=(9,-3)$ b) $S=(-3,6),\ B=(2,5)$ c) $S=(2,4),\ B=(5,8)$
d) $S=(2,7),\ B=(-3,5)$ e) $S=(2,1),\ B=(-5,6)$

Odpowiedź:

a) $A=(-5,-7)$ b) $A=(-8,7)$ c) $A=(-1,0)$

d) $A=(7,9)$ e) $A=(9,-4)$

4.5.4. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, jeżeli środki jego boków mają współrzędne: $P=(1,3), Q=(-5,4), R=(-6,7)$.

Odpowiedź:

$A=(0,6), B=(2,0), C=(-12,8)$

4.5.5. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek o końcach $A=(29,-15)$ i $B=(45,13)$ w stosunku $|AP|:|PB|=1:3$.

Odpowiedź:

$P=(33,-8)$

4.5.6. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A=(2,5)$ i $C=(6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

Odpowiedź:

$y=-2x+14$

4.5.7. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A=(4,6), B=(3,5)$ b) $A=(3,1), B=(-4,-8)$

c) $A=(3,1), B=(-1,7)$ d) $A=(-1,3), B=(1,1)$

e) $A=(1,1), B=(5,5)$ f) $A=(-2,4), B=(6,8)$

Odpowiedź:

a) $y=-x+9$ b) $y=-\frac{7}{9}x-5\frac{2}{9}$

c) $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$

d) $y = x + 2$

e) $y = -x + 6$

f) $y = -2x + 10$

4.6. Równanie okręgu*

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Posługiwać równaniem okręgu (x – a)2 + (y – b)2 = r2 oraz opisywać koła za pomocą nierówności**
- **Wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu**

Równanie okręgu

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r.

Niech punkt $P = (a, b)$ leży w dowolnym miejscu na okręgu. Zapiszmy teraz zależność dowolnego punktu P leżącego na okręgu i jego odległość od środka okręgu.

$|OP| = r$, i na mocy definicji odległości dwóch punktów otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} \;/\cdot^2$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2$$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$, ma postać:

$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ **(postać kanoniczna)**

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \; x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ **(postać ogólna), gdzie** $r^2 = a^2 + b^2 - c$

Przykład 1

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S = (-2, 6) i promieniu = 4.

$$\left(x - (-2)\right) + (y - 6) = 4^2$$

$$(x+2)+(y-6)=16$$

Przykład 2

Podaj wzór okręgu o środku w punkcie $S=(-2,-7)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A=(-6,-4)$.
Mamy dane współrzędne środka okręgu, które możemy podstawić do wzoru:

$$(x+2)^2+(x+7)^2=r^2$$

Musimy obliczyć promień okręgu. Możemy to zrobić, podstawiając współrzędne punktu $A=(-6,-4)$ do wzoru:

$$(-6+2)^2+(-4+7)^2=r^2$$

$$(-4)^2+3^2=r^2$$

$$16+9=r^2$$

$$25=r^2$$

$$r=5$$

Równanie okręgu jest postaci: $(x+2)^2+(x+7)^2=25$.

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli a, b oraz r.

Przykład 3

Przekształć równanie okręgu dane w postaci ogólnej na postać kanoniczną.

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0$$

Szukamy najpierw współrzędnych środka okręgu.

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0$$

$$-2a=4 \qquad\qquad -2b=-6$$

$$a=-2 \qquad\qquad b=3$$

Obliczamy długość promienia wiedząc, że: $r^2=a^2+b^2-c$

$$r^2=(-2)^2+(3)^2-4=4+9-4=9$$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=9$$

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ w punkcie $P=(-2,3)$.

$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ – okrąg o środku w punkcie $S=(3,4)$ i promieniu $r=1$.
Prosta styczna do okręgu w punkcie P jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty: $S=(3,4)$ i $P=(-2,3)$.

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

$$(y-(-2))(-2-3)-(3-4)(x-3)=0$$

$$(y+2)\cdot(-5)-(-1)(x-3)=0$$

$$-5y-10+x-3=0$$

$$x-5y-13=0$$

$$y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$$

Prosta styczna do okręgu w punkcie A jest prostopadła do prostej $y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$, więc jej równanie to: $y=-5x+b$.

Skoro punkt P należy do prostej $y=-5x+b$, to:

$3=-5\cdot(-2)+b \Rightarrow b=-7$

Odpowiedź:

Równanie stycznej do okręgu ma postać $y=-6x-7$.

Koło – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu na tej płaszczyźnie (środka koła) nie przekracza pewnej wartości (promienia koła).

Koło w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisane wzorem:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2\le \boldsymbol{r}^2$$

gdzie: $r>0$ – promień koła, (x_0,y_0) – współrzędne środka koła[51].

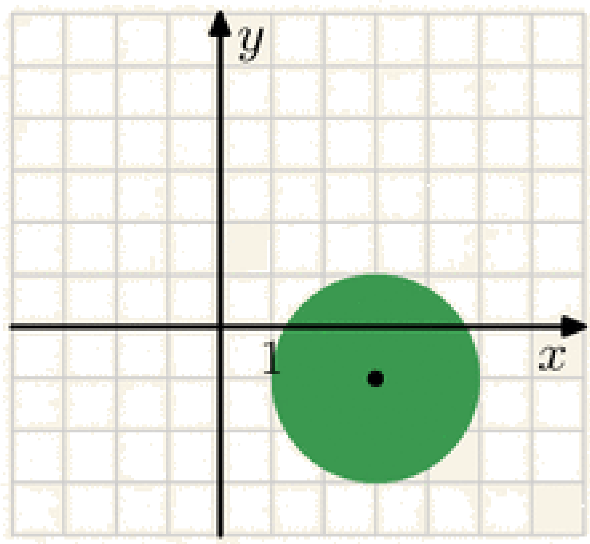
51. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o, 19.02.2013.

Przykład 5

Narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$$(x-3)^2+(y+1)^2 \le 4$$

Nierówność opisuje koło o środku w punkcie $S=(3,-1)$ i promieniu $r=2$.



Zadania

4.6.1. Wyznacz środek i długość promienia okręgu:

a) $(x-4)^2+y^2=4$

b) $x^2+(y+3)^2=9$

c) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

d) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

e) $(x+6)^2+(y+10)^2=64$

f) $(x-3)^2+(y+5)^2=8$

Odpowiedź:

a) $S=(4,0)$, r = 2

b) $S=(0,-3)$, r = 3

c) $S=(2,-4)$, r = 5

d) $S=(2,0-1)$, r = 2

e) $S=(-6,-10)$, r = 8

f) $S=(3,-5)$, r = $2\sqrt{2}$

4.6.2. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

a) $S=(-4,6), r=5$

b) $S=(1,2), r=3$

c) $S = (0,0), r = \sqrt{2}$ d) $S = (-4,1), r = \sqrt{7}$

e) $S = (6,-2), r = 1$ f) $S = (0,1), r = 2$

Odpowiedź:

a) $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 25$ b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ c) $x^2 + y^{2^2} = 2,$

d) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 7$ e) $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 1$ f) $x^2 + (y-1)^2 = 4$

4.6.3. Podaj równanie okręgu o ośrodku w punkcie $S = (6,-11)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A = (6,-1)$.

Odpowiedź:

$(x-6)^2 + (y+11)^2 = 100$

4.6.4. Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt przecięcia prostych $7x - y - 3 = 0$ i $4y - 3x - 13 = 0$ i do którego należy punkt $P = (5,6)$.

Odpowiedź:

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 20$

4.6.5. Zapisz wzór okręgu za pomocą postaci kanonicznej:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 27 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Odpowiedź:

a) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 7$ b) $x^2 + y^2 = 3$

c) $x^2 + (y-3)^2 = 5$ d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

4.6.6. Punkt $K = (-1,9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $L = (2,0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Odpowiedź:

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$

4.6.7. Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $S = (0,3)$ i promieniu $r = \sqrt{6}$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$.

Odpowiedź:

Okrąg z prostą nie ma punktów wspólnych.

4.6.8. Napisz nierówność opisującą koło o promieniu r i środku w punkcie S.

a) $S=(-1{,}5), r=4$ b) $S=(-3{,}0), r=\sqrt{3}$

c) $S=(-1,-2), r=\sqrt{2}$ d) $S=\left(4,\frac{1}{2}\right), r=3$

Odpowiedź:

a) $(x+1)^2+(y-5)^2\le 16$ b) $(x+3)^2+y^2\le 3$

c) $(x+1)^2+(y+2)^2\le 2$ d) $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le 9$

4.6.9. Określ położenie punktów $A=(1{,}0), B=(3{,}3), C=(4,-1)$ względem koła o środku w punkcie $S=(-1{,}3)$ i promieniu $r=4$.

Odpowiedź:

Punkty A i B należą do koła, punkt C leży poza kołem.

4.6.10. Oblicz odległość punktu A od środka koła $(x-3)^2+y^2\le 9$ oraz określ położenie punktu A względem tego koła, jeżeli:

a) $A=(3,-3)$ b) $A=(4{,}2)$ c) $A=(-2,-3)$

Odpowiedź:

a) $d=3$, punkt należy do koła

b) $d=\sqrt{5}$, punkt należy do koła

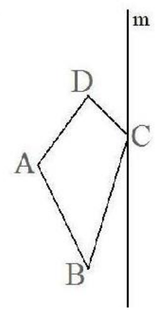
c) $d=6$, punkt nie należy do koła

4.6.11. Przedstaw w prostokątnym układzie współrzędnych figurę:

a) $F=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\wedge x^2+y^2\le 9\wedge x-2y+2<0\}$

b) $F=\left\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\wedge (x-7)^2+(y+2)^2\le 36\wedge (x-5)^2+y^2\ge 4\right\}$

c) $F=\left\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\wedge (x-2)^2+y^2>16\wedge (x-6)^2+y^2<4\right\}$



4.7. Symetria osiowa i środkowa

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu**

Symetria – słowo greckie, oznaczające regularny układ, harmonię między częściami całości.

Świat jest pełen symetrii, obcujemy z nią na co dzień: w świecie roślinnym, w budowie organizmów żywych, w sztuce, w budownictwie, w technice i w geometrii.

Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A', leżący:

- na prostej prostopadłej do tej prostej k i przechodzącej przez punkt A,
- w tej samej odległości od prostej k co punkt A,
- po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A[52].

Symetrię osiową względem prostej k oznaczamy jako S_k.

Twierdzenie

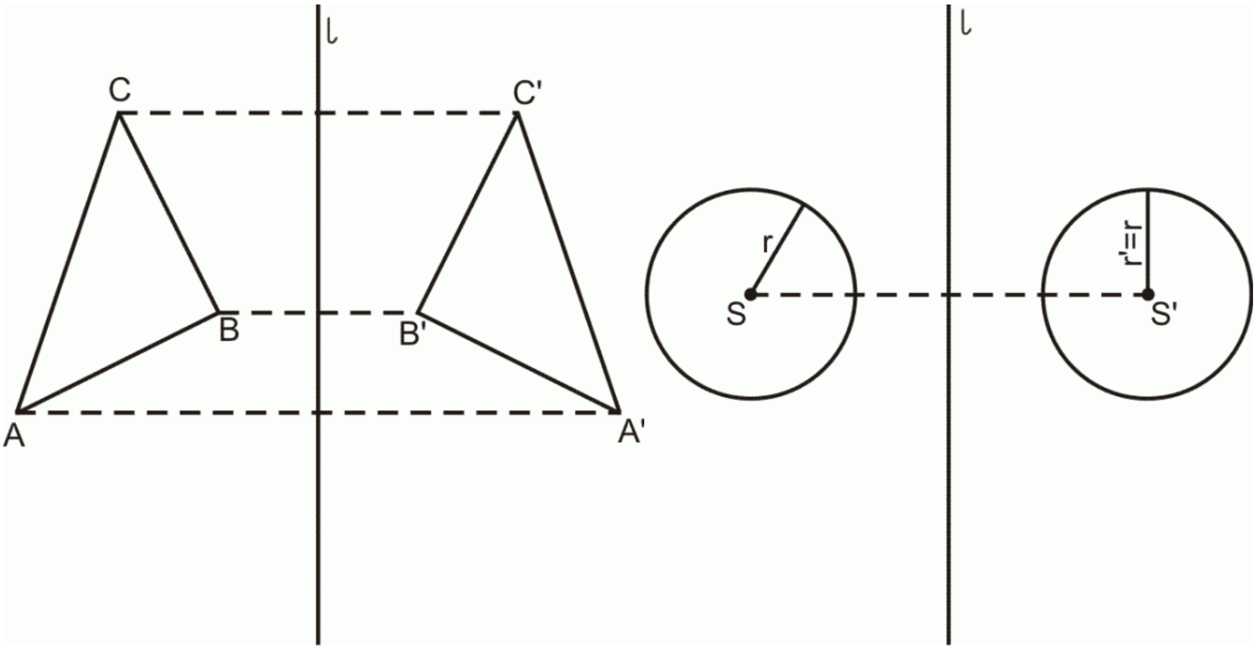
Symetria osiowa jest izometrią.
Symetria osiowa, jak każda izometria, zachowuje kształt figury i jej wymiary.

Izometria – przekształcenie geometryczne (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje odległość punktów, czyli odległość między dwoma dowolnymi punktami A i B jest równa odległości między ich obrazami A' i B'.

W symetrii osiowej:

- obrazem trójkąta względem dowolnej prostej jest trójkąt do niego przystający,
- obrazem okręgu względem dowolnej prostej jest okrąg o tym samym promieniu,
- obrazem odcinka jest odcinek o takiej samej długości,
- obrazem prostej jest prosta.

52. www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.



Rysunek 4-1. Przykłady figur symetrycznych

Prostą, względem której figura jest sama do siebie symetryczna, nazywamy **osią symetrii** tej figury. Natomiast figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną.**

Przykład 1

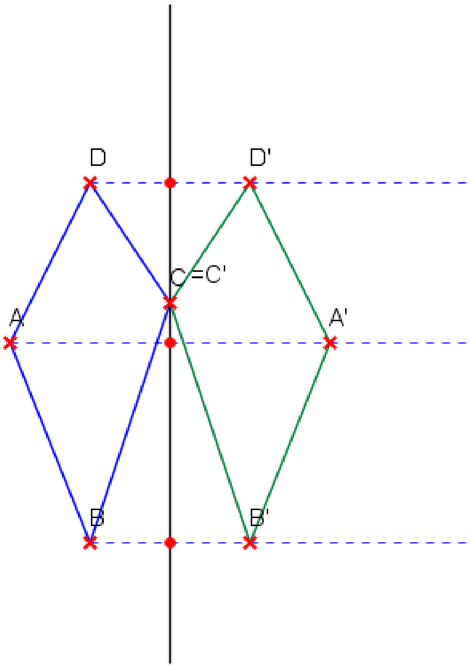
Figury osiowosymetryczne, to np.:

- odcinek – 2 osie symetrii,
- kwadrat – 4 osie symetrii,
- okrąg (koło) – nieskończenie wiele osi symetrii,
- kąt – 1 oś symetrii (prosta zawierająca dwusieczną kąta),
- trójkąt równoboczny – 3 osie symetrii.

Przykład 2

Wyznacz konstrukcyjnie obraz figury w symetrii względem danej prostej.

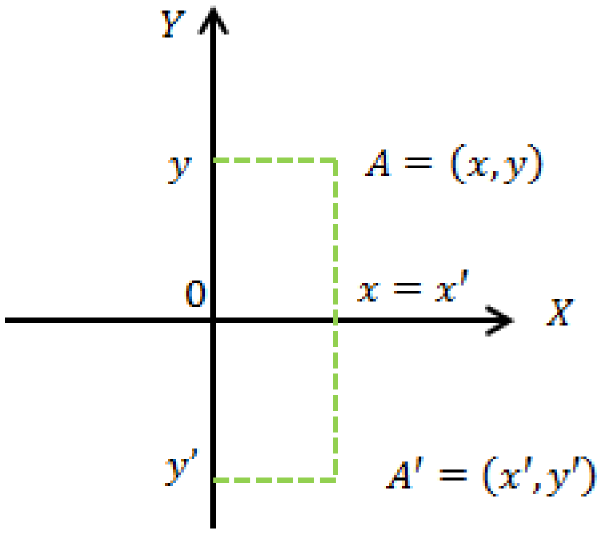
1. Prowadzimy proste prostopadłe do prostej m, przechodzące przez punkty A, B, C, D.
2. Za pomocą cyrkla mierzymy odległość punktu A od prostej m, i odkładamy taki sam odcinek po przeciwnej stronie prostej. Otrzymujemy punkt A' symetryczny do punktu A.
3. Analogicznie postępujemy z pozostałymi punktami.
4. Łączymy punkty $A', B', C' D'$ i otrzymujemy figurę symetryczną do danej względem prostej m.



Rysunek 4-2. Figury symetryczne

Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi OX.

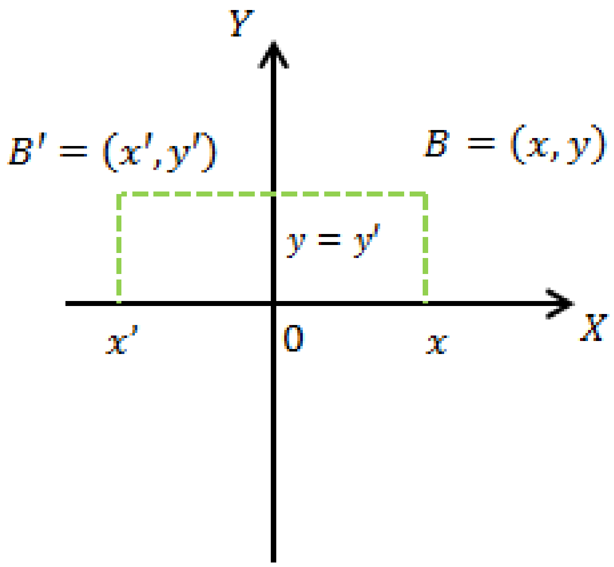


Rysunek 4-3. Symetria względem osi OX

Jak widać na rysunku 3, pierwsze współrzędne obydwu punktów są takie same, natomiast drugie są liczbami przeciwnymi:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Symetria względem osi OY.



Rysunek 4-4. Symetria względem osi OY

Jak widać na rysunku 4, pierwsze współrzędne punktów B i B' są liczbami przeciwnymi, natomiast drugie są równe:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A' = (x, -y)$.

Obrazem punktu $B = (x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $B' = (-x, y)$.

Symetria środkowa

Symetrię względem punktu O będziemy oznaczać symbolem S_o.

Symetrią środkową względem punktu O, zwanego środkiem symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O jest stały, a każdemu innemu punktowi A przyporządkowuje się punkt A', taki że punkt O jest środkiem odcinka AA'[53].

Twierdzenie

Symetria środkowa względem punktu O jest izometrią.

Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest punkt O.

Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej S_o jest ta sama figura. Figurę F nazywamy środkowosymetryczną.

53 www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.

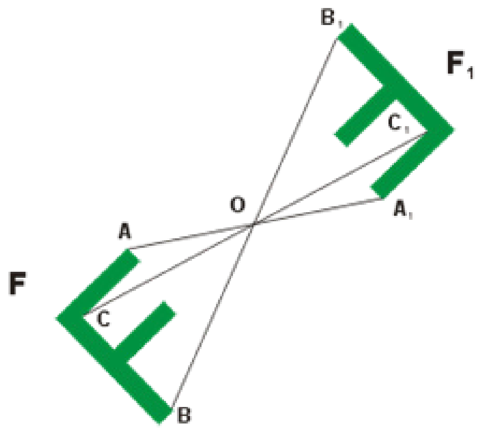
Przykład 3

Figury środkowosymetryczne, to np.:

- § koło (okrąg) – środek koła,
- § odcinek – środek odcinka,
- § prostokąt – punkt przecięcia jego przekątnych.

Przykład 4

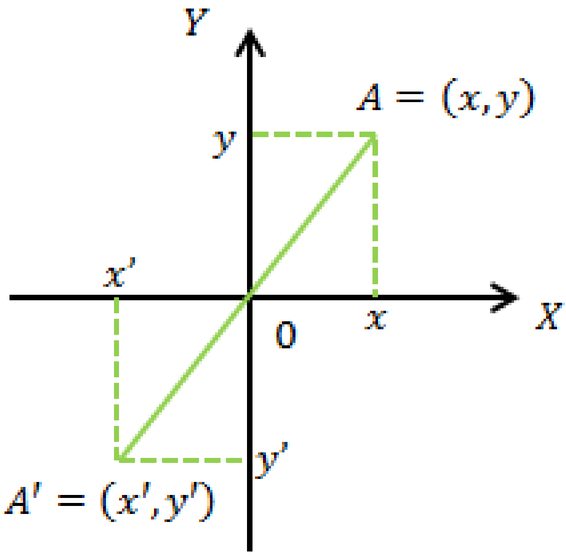
Przykład figury środkowosymetrycznej



Rysunek 4-5. Przykład figury środkowosymetrycznej[54]

Trójkąt to figura, która **nie ma** środka symetrii.

Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych



Rysunek 4-6. Symetria względem punktu (0,0)

Jak widać na rysunku 5, pierwsze współrzędne punktów A i A', jak i drugie są liczbami przeciwnymi.

54. www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa, 06.03.2013.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.

Zadania

4.7.1. Podaj współrzędne obrazu punktu M w symetrii względem osi OX, OY, początku układu współrzędnych:

a) $M = (5, -9)$

b) $M = \left(3, -2 + \sqrt{3}\right)$

c) $M = \left(\frac{4}{7}, -2\frac{3}{4}\right)$

d) $M = (2,3)$

e) $M = (-5, -7)$

Odpowiedź:

a) $OX: M' = (5,9)$, $OY: M' = (-5,9)$, względem początku układu współrzędnych: $M' = (-5, -9)$

b) $OX: M' = \left(3, 2 - \sqrt{3}\right)$, $OY: M' = \left(-3, -2 + \sqrt{3}\right)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (-3, 2 - \sqrt{3})$

c) $OX: M' = \left(\frac{4}{7}, 2\frac{2}{3}\right)$, $OY: M' = \left(-\frac{4}{7}, -2\frac{2}{3}\right)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (-\frac{4}{7}, 2\frac{2}{3})$

d) $OX: M' = (2, -3)$, $OY: M' = (-2,3)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (-2, -3)$

e) $OX: M' = (-5,7)$, $OY: M' = (-5, -7)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (5,7)$

4.7.2. Trójkąt ABC, w którym A = (-5,2), B = (6,-3), C = (1,4), przekształcono symetrycznie względem:

a) osi x,

b) osi y,

c) początku układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkątów otrzymanych po przekształceniu.

Odpowiedź:

a) A' = (-5,-2), B' = (6,3), C' = (1,-4)

b) A' = (5,2), B' = (-6,-3), C' = (-1,4)

c) A' = (5,-2), B' = (-6,3), C' = (-1,-4)

4.7.3. Podaj przykłady liter, liczb lub wyrazów, które są figurami osiowosymetrycznymi.

4.7.4. Oblicz, dla jakich wartości parametru m i n punkty A i B są symetryczne względem osi, gdy: $A = (3, -n)\ i\ B\ =\ (m + 2,1)$.

Odpowiedź:

$m = 1, n = -1$

4.7.5. Jakim zbiorem: pustym, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór osi symetrii kwadratu?

Odpowiedź:

Zbiór skończony.

4.7.6. Wyznacz równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu

$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 19 = 0$ **względem prostej** $y = 2x + 1$.

Odpowiedź:

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 7$

4.7.7. Znajdź obraz okręgu $x^2 + y^2 = 4$ w symetrii względem prostej $y = 2x + 4$.

Odpowiedź:

$(x + 3{,}2)^2 + (y - 1{,}6)^2 = 4$

4.7.8. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktów będących obrazami wierzchołków trójkąta ABC w tym przekształceniu.

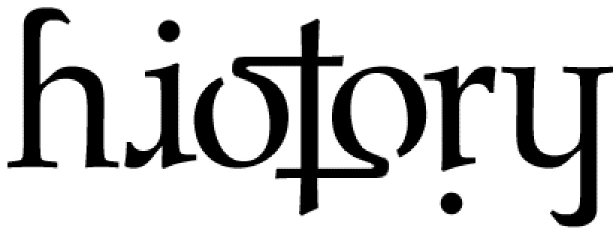
Odpowiedź:

$A' = (2, -3), B' = (4, -1), C' = (-2, -6)$

CiEKAWOSTKA

Ambigram – grafika utworzona kaligraficznie lub obrazowo w taki sposób, że po obróceniu całości można odczytać ten sam tekst[55]. Inaczej mówiąc, ambigramy to grafiki środkowosymetryczne.

Przykłady ambigramów:



Rysunek 4-7. Przykłady ambigramów[56]

Palindrom (gr. *palindromeo* – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej. Przykładem palindromu jest: *Kobyła ma mały bok*. Współcześnie palindromy pełnią funkcję gry słownej[57].

Najdłuższy polski palindrom, autorstwa Tadeusza Morawskiego, ma ponad 33 tysiące liter.

Przykłady palindromów:

- *Gór ech chce róg*
- *Żartem dano nadmetraż*
- *Może jeż łże jeżom*
- *Zagwiżdż i w gaz*[58]

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu[59]:

A. $y = -\frac{1}{3}x - 1$

B. $y = \frac{1}{3}x + 1$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = 3x - 1$

55. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram, 09.03.2013.
56. www.violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd, 07.03.2013.
57. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom, 09.03.2013.
58. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski, 21.02.2013.
59. Zadania 1, 2: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Próbna matura z matematyki, listopad, 2009, 05.03.2013.

2. Prosta o równaniu $y = -4x + (2m - 7)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Wtedy:

A. $m = 7$

B. $m = 2\frac{1}{2}$

C. $m = -\frac{1}{2}$

D. $m = -17$

3. Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy[60]:

A. $m = -\frac{2}{3}$

B. $m = -\frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = \frac{5}{3}$

4. Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$[61]:

A. $y = -2x + 1$

B. $y = 0{,}5x - 1$

C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

D. $y = 2x - 1$

5. Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(2, 1)$[62].

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = -x + 1$

60. Zadanie zaczerpnięte z Arkusza maturalny CKE, maj, 2010, 05.03.2013.
61. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011, 05.03.2013.
62. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011, 05.03.2013.

6. Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$ [63]:

A. są równoległe i różne

B. są prostopadłe

C. przecinają się pod kątem innym niż prosty

D. pokrywają się

7. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$ [64]:

A. $y = \frac{1}{2}x$

B. $y = -\frac{1}{2}x$

C. $y = 2x$

D. $y = -2$

8. Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

A. $(-5, -2012)$

B. $(-2012, -5)$

C. $(2, -7)$

D. $(-2012, 5)$

9. Na okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$ leży punkt:

A. $A = (-2, 5)$

B. $B = (2, -5)$

C. $C = (2, -7)$

D. $D = (7, -2)$

10. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (4, -3)$ i $B = (-1, -13)$. Funkcja f opisana jest wzorem[65]:

A. $f(x) = 2x - 11$

B. $f(x) = 2x + 11$

63. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Matura próbna, listopad, 2010, 05.03.2013.
64. Zadania 7, 8, 9: zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 05.03.2013.
65. Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte z CKE (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze), 05.03.2013.

C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

D. $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Środkiem S tego okręgu jest punkt:

A. $S = (-3, -4)$

B. $S = (3{,}4)$

C. $S = (3, -4)$

D. $S = (-3{,}4)$

12. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$:

A. $y = \frac{1}{2}x$

B. $y = -\frac{1}{2}x$

C. $y = 2x$

D. $y = -2x$

13. Prostą przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ i równoległą do prostej $\boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}5}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ opisuje równanie[66]:

A. $y = -2x - 1$

B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

D. $y = 2x - 1$

14. Proste: $y = -3x + 4$ i $y = \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{4}{3}\right)x$ są prostopadłe, jeżeli:

A. $a = -2$

B. $a = 2$

66. Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, styczeń, 2013, (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 05.03.2013.

C. $a = \sqrt{5}a = \sqrt{5}$

D. $a = -\sqrt{5}$ lub $a = \sqrt{5}$

15. Proste l i k są prostopadłe i $l: 2x - 9y + 6 = 0, k: y = ax + b$. Wówczas[67]:

A. $a = -\frac{2}{9}$

B. $a = \frac{2}{9}$

C. $a = -\frac{9}{2}$

D. $a = \frac{9}{2}$

16. Równanie $(x + 6)^2 + y^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

A. $S = (-6,4), r = 4$

B. $S = (6,0), r = 4$

C. $S = (6,0), r = 2$

D. $S = (-6,0), r = 2$

17. (**5 pkt**) Prosta $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

18. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$:[68]

A. $y = 3x$

B. $y = -3x$

C. $y = 3x + 2$

D. $y = \frac{1}{3}x + 2$

19. Punkty $B = (-2,4)$ i $C = (5,1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 74

67. Zadania 15, 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2012 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012--listopad.pdf), 05.03.2013.
68. Zadania18, 19, 20: zaczerpnięte z CKE (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 05.03.2013.

B. 58

C. 40

D. 29

20. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y-6)^2=100$. Środek tego okręgu ma współrzędne:

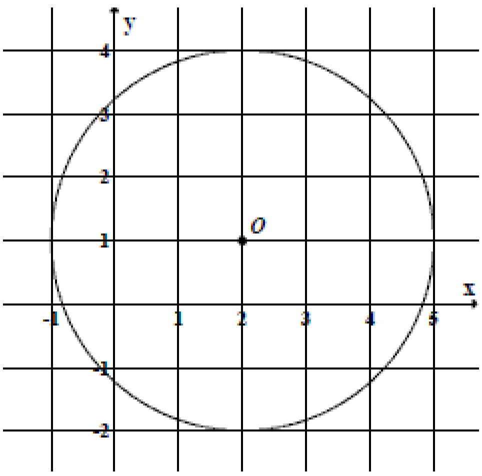
A. $(-4,-6)$

B. $(4,6)$

C. $(4,-6)$

D. $(-4,6)$

21. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Równanie tego okręgu ma postać[69]:



A. $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=3$

C. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

D. $(x+2)^2+(y+1)^2=3$

22. Punkt $S=(2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A=(-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

A. $B=(5,11)$

B. $B=\left(\frac{1}{2},2\right)$

C. $B=\left(-\frac{3}{2},-5\right)$

D. $B=(3,11)$

69. Zadania 21, 22: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, czerwiec, 2012, www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 05.03.2013.

23. Proste o równaniach $y = 2x - 5$ i $y = (3 - m)x + 4$ są równoległe. Wynika stąd, że[70]:

A. $m = 1$

B. $m = \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{7}{2}$

D. $m = 5$

24. Prosta *k* ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$[71]:

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x + 5$

D. $y = -x + 1$

25. Styczną do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu:

A. $x = 1$

B. $x = 3$

C. $y = 0$

D. $y = 4$

26. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$, jest równy:

A. $-\frac{1}{3}$

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

70. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 05.03.2013
71. Zadania 24, 25, 26, 27, 28: zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, maj, 2011 (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf), 05.03.2013.

27. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6:

A. $x^2 + y^2 = 3$

B. $x^2 + y^2 = 6$

C. $x^2 + y^2 = 12$

D. $x^2 + y^2 = 36$

28. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 30

B. $4\sqrt{5}$

C. $12\sqrt{5}$

D. 36

Miarą kąta skierowanego jest stopień.

$$1° = \frac{1}{360}\text{kąta pełnego}$$

29. (5 pkt) Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2,-1), B = (4,2), C = (5,1)$. Wyznacz:

a) pole trójkąta ABC[72],

b) równanie zawierające wysokość trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka A.

30. (4 pkt) W rombie $ABCD$ dane są $A = (-3,-1)$ i punkt przecięcia przekątnych $M = (9,3)$. Wiadomo, że punt B leży na prostej $2x - y - 25 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

31. (2 pkt) Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-1,-1), B = (5,2)$, $C = (3,3), D = (1,2)$ jest trapezem?

72. Zadania 29-32: zaczerpnięte z testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Jednostka miary łukowej jest radian.

$$1\,radian = \frac{180°}{\pi} \sim 57°17'44''$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

32. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0,-3)$ i jest prostopadły do prostej $y = 2x - 4$.

33. (2 pkt) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$[73].

34. (2 pkt) W trójkącie równoramiennym $\boldsymbol{ABC}$ o podstawie $\boldsymbol{AB}$ poprowadzono wysokość z wierzchołka $\boldsymbol{C}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli

$\boldsymbol{A = (2,8)}$, $\boldsymbol{B = (-2,4)}$ [74].

35. (4 pkt) Oblicz pole i obwód rombu $\boldsymbol{ABCD}$ wiedząc, że przekątna $\boldsymbol{AC}$ jest zawarta w prostej o równaniu

$\boldsymbol{y = 2x - 2}$ oraz $\boldsymbol{A = (-1,-4)}$ i $\boldsymbol{D = (-6,6)}$.

36. (6 pkt) Wyznacz współrzędne punktu $\boldsymbol{B}$, który jest symetryczny do punktu

$\boldsymbol{A = (3,2)}$ względem prostej $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x - 6}$ [75].

37. (4 pkt) Dany jest trójkąt równoramienny $\boldsymbol{ABC}$, w którym $|\boldsymbol{AC}| = |\boldsymbol{BC}|$ oraz $\boldsymbol{A = (2,1)}$ i $\boldsymbol{C = (1,9)}$.

Podstawa $\boldsymbol{AB}$ tego trójkąta jest zawarta w prostej $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$. Oblicz współrzędne wierzchołka $\boldsymbol{B}$.[76]

38. (4 pkt) Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu przechodzącej przez jeden z tych punktów[77].

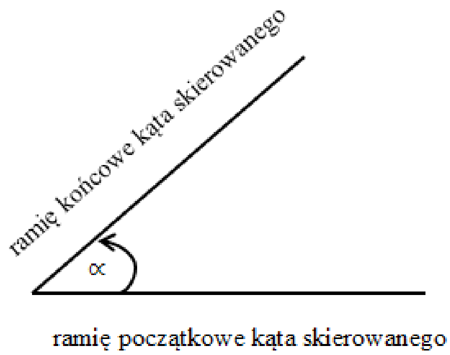
39. (4 pkt) Okrąg o środku w punkcie $\boldsymbol{S = (3,\ 7)}$ jest styczny do prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 3}$. Oblicz współrzędne punktu styczności[78].

73. (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 06.03.2013.
74. Zadania 34, 35: zaczerpnięte z arkusza maturalnego (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze), 06/03.2013
75. (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 06.03.2013.
76. (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 06.03.2013.
77. (www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf), 06.03.2013.
78. (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013), 06.03.2013.

5. Trygonometria

5.1. *Miara łukowa i stopniowa kąta

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy parę prostych o wspólnym początku (wierzchołek kąta).



Rysunek 5-1. Kąt skierowany

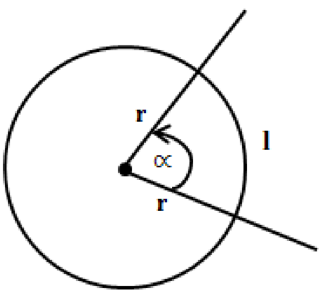
Jednostki mniejsze niż stopień to **minuta kątowa 1′** (uwaga: to nie jest jednostka czasu)

$1^{\circ} = 60'$ $\quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} 1'$

oraz **sekunda kątowa (1″)**

$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$.

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu.



Rysunek 5-2. Radian

Zamiana miary stopniowej (α°) na miarę łukową (α):

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}\ radiana$$

Przykład 1

$180^\circ = \pi\ rad.$

$90^\circ = \frac{\pi}{2}\ rad.$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}\ rad.$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową (α°):

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Przykład 2

$\frac{3}{2}\pi\ rad = 270^\circ$

$\frac{\pi}{3}\ rad = 60^\circ$

$\frac{\pi}{2}\ rad = 90^\circ$

CIEKAWOSTKA

W niektórych krajach obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. Gradusy. **Gradus** – jest to jedna setna część kąta prostego.

Zadania

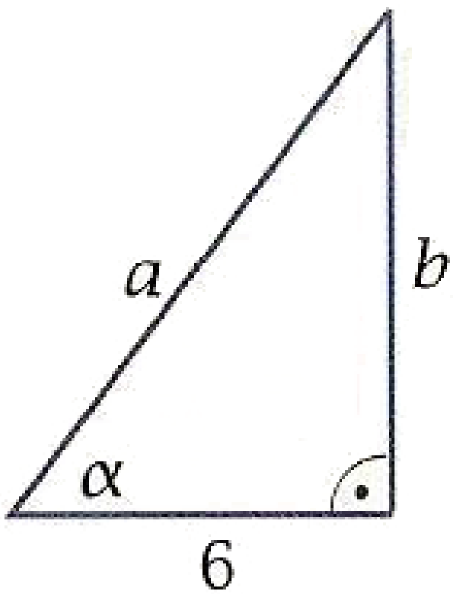
5.1.1. Znajdź:

a) miarę łukową kątów: $90^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

b) miarę stopniową kątów: $3\pi\ rad;\ \ 6{,}5\pi$

Odpowiedź:

a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ b) 540°, 117°, 216°, 300°



5.1.2. Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta. Wynik podaj w stopniach.

Odpowiedź:

114°

5.1.3. Pole wycinka koła o promieniu $r = 3\ cm$, jest równe $2\ cm^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

Odpowiedź:

$\alpha = \frac{4}{9}$

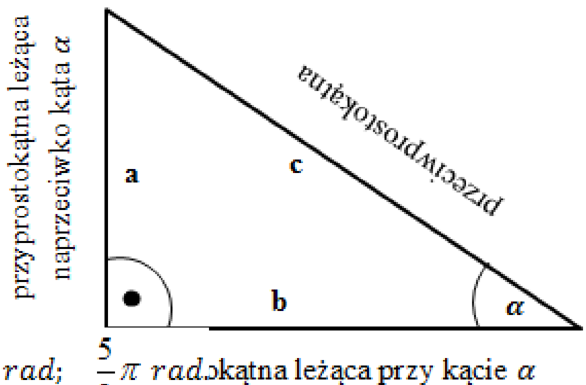
5.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wykorzystywać definicję i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens kątów o miarach od 0° do 180°**
- **Obliczać miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną)**

Termin trygonometria pochodzi od dwóch greckich słów: trigonom (trójkąt) i metron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

Rozważmy trójkąt prostokątny o kącie ostrym α.



$rad;\ \frac{6}{5}\pi\ rad;\ \frac{5}{3}\pi\ rad.$

Rysunek 5-3. Trójkąt prostokątny

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, leżącej naprzeciwko kąta α, do długości przyprostokątnej (leżącej przy tym kącie) i oznaczamy $tg\ \alpha$.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, leżącej naprzeciwko kąta α, do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $sin\ \alpha$.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta α (czytaj: kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, przylegającej do kąta α, do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangensem kąta α **(czytaj: kotangensem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, przylegającej do kąta** α**, do długości drugiej przyprostokątnej i oznaczamy** $ctg\ \alpha$.

$$ctg\alpha = \frac{a}{b}$$

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, zatem ilorazy określające sinus i cosinus są liczbami mniejszymi od 1.

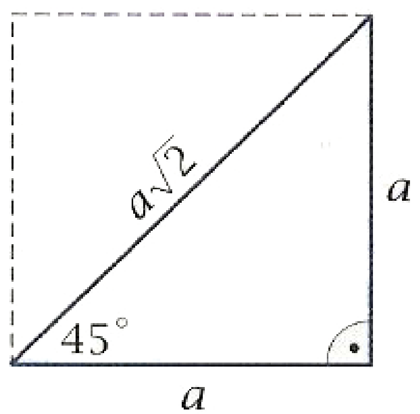
Przykład 1

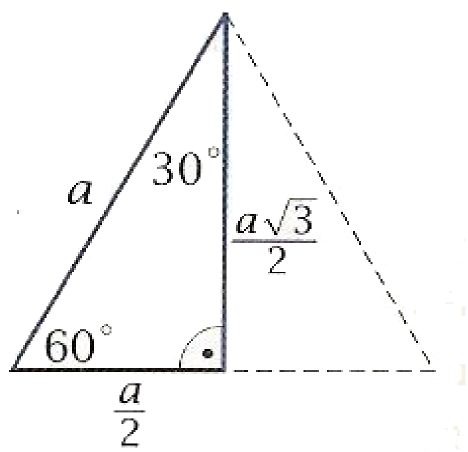
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi 3/4. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{a}$$

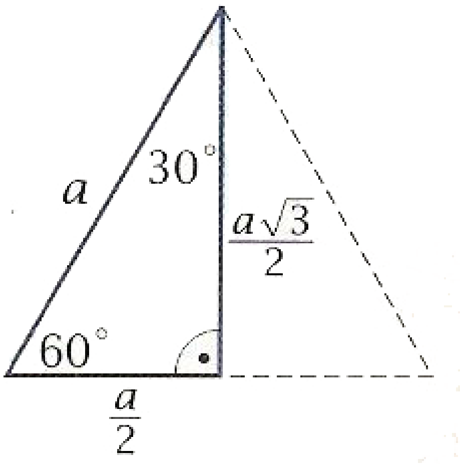
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{a}$$





CIEKAWOSTKA

Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Sta arabskich. Zwyczajem arabskim, zapisywali oni hinduską nazwę sinusa bez samo ıa łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego , że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie za *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa sinus znalazła się w matematyce przez pomyłkę



Wartości funkcji trygonometrycznych, dla róż tablic.

Z tablic możemy korzystać w dwóch celach:

1. Możemy odczytać wartość danej funkcji, dl

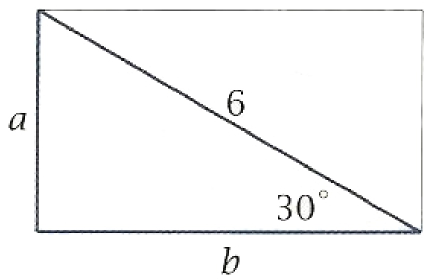
2. Możemy odczytać, z jakim kątem mamy do anej funkcji.

Funkcje trygonometryczne i ich wartości odczytywane z tabeli wykorzystujemy do obliczania długości poszczególnych boków lub miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2

Podaj wartość tangensa kąta o mierze 15°.
Dla podanego kąta i funkcji, odczytujemy wartość:

	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	-
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046
13°	0.225	0.9744	0.2309	4.3315
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874

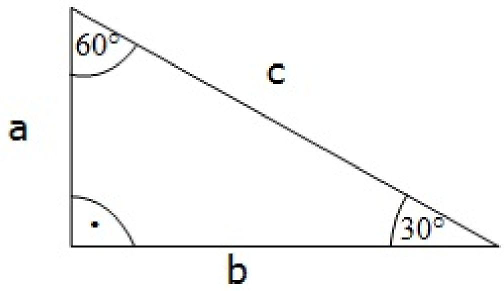


Możemy więc zapisać, że tangens 15° wynosi 0,2679:

tg 15° = 0,2679

Przykład 3

Podaj miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,6023. Dla podanego kąta i funkcji, odczytujemy wartość. Szukamy w kolumnie funkcji cosinus podanej wartości (0,6023), a jeżeli jej nie ma w tabeli, szukamy wartości najbliższej do danej (dla naszego przykładu będzie to wartość 0,6018):



	sin	cos	tg	ctg
46°	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
47°	0.7314	0.682	1.0724	0.9325
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
49°	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
50°	0.766	0.6428	1.1918	0.8391
51°	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
52°	0.788	0.6157	1.2799	0.7813
53°	0.7986	0.6018	1.327	0.7536
54°	0.809	0.5878	1.3764	0.7265
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
56°	0.829	0.5592	1.4826	0.6745
57°	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494

Kąt ma więc w przybliżeniu miarę 53°.

5.3. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°, korzystamy z tego, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° jest połową kwadratu.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°.

$$sin45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{a}{a} = 1$$

Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60°, korzystamy z tego, że trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° to połowa trójkąta równobocznego.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°.

$$sin30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dane

a = 6 cm

b = 14 cm

$$ctg30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°.

$$sin60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych

α	$30°$	$45°$	$60°$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 5-1. Wartości funkcji trygonometrycznych

Przykład 1

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.

$$\frac{a}{6} = sin30°$$

$$\frac{b}{6} = cos30°$$

Korzystamy z wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{b}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

Przykład 2

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.

$$cos30^\circ = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{c}$$

$$\sqrt{3}c = 2 \cdot 6$$

$$\sqrt{3}c = 12/:\sqrt{3}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

Zadania

5.3.1. Oblicz:

a) $sin30^\circ \cdot cos60^\circ + 2sin45^\circ$

b) $tg45^\circ + sin60^\circ + 2cos30^\circ$

c) $tg30^\circ \cdot ctg60^\circ - sin30^\circ \cdot cos30^\circ$

d) $(tg30^\circ - ctg30^\circ): cos30^\circ$

e) $\sqrt{2tg^2 60^\circ - 4cos^2 45^\circ} - ctg45^\circ$

Odpowiedź:

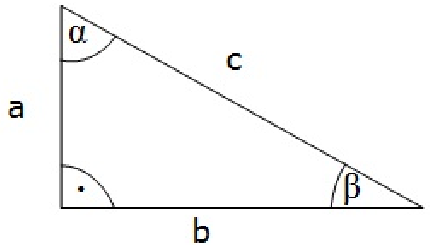
a) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$ b) $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{12-9\sqrt{3}}{36}$ d) $-1\frac{1}{3}$ e) 6

5.3.2. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.

Odpowiedź:
$P = 9\sqrt{3}\ cm^2$

5.3.3. Oblicz miary kątów trójkąta.

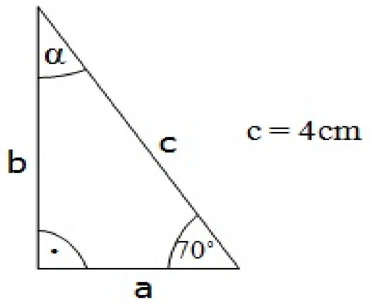


dane:
a = 6cm
c= 14cm

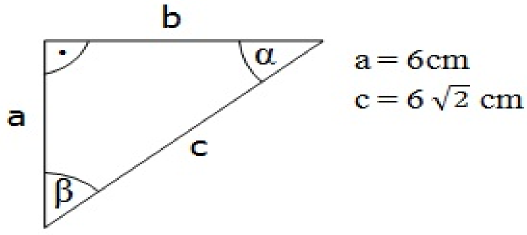
Odpowiedź: $\alpha = 65°, \beta = 25°$

5.3.4. Rozwiąż podane trójkąty prostokątne:

a)



b)



Odpowiedź:

a) $\alpha = 20°, a = 1{,}368\ cm, b = 3{,}7588\ cm$

b) $\alpha = 45°, \beta = 45°, b = 6\ cm$

5.3.5. Linę podtrzymującą maszt przymocowano na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy naprężona linia z poziomem?

Odpowiedź:

Linia nachylona jest do poziomu pod kątem około 64°.

5.3.6. Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 45°. Oblicz jego pole, jeżeli jego podstawy mają długość 12 cm i 6 cm.

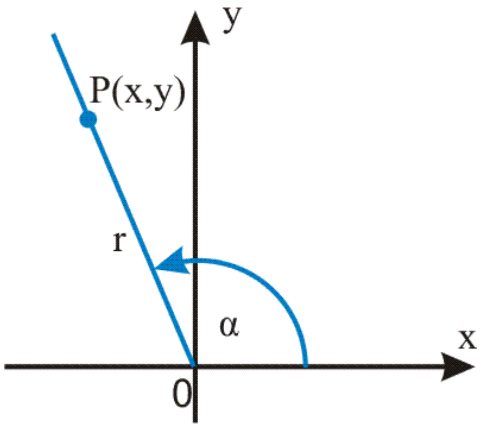
Odpowiedź:

$P = 27\sqrt{3}\ cm^2$

5.4. *Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych kątów, umieszczamy te kąty w układzie współrzędnych.

Dowolny kąt w układzie współrzędnych, to kąt skierowany, którego ramieniem początkowym jest dodatnia półoś x.



α – kąt skierowany

dodatnia półoś x – ramię początkowe kąta α

półprosta $OP^{\rightarrow}$ – ramię końcowe kąta α

$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – promień wodzący punktu $P \neq 0$, gdzie $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym

Rysunek 5 4. Promień wodzący

Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Sinusem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem dowolnego kąta C w układzie współrzędnych nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do odciętej tego punktu.

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Cotangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do rzędnej tego punktu.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych katów o mierze $0°$, $90°$ i $180°$.

Dla ułatwienia obliczeń, na końcowym ramieniu każdego kąta obieramy punkt, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1.

Dla kąta $0°$, $P = (1,0)$

$x = 1, y = 0, r = 1$

$sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$tg0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

Dla kąta $90°$, $P = (0,1)$

$x = 0, y = 1, r = 1$

$sin90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$cos90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$tg90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

$ctg90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

Dla kąta $180°$, $P = (-1,0)$
$x = -1, y = 0, r = 1$

$sin180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$

$tg180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} - nie\ istnieje$

Wyniki umieścimy w tabeli

α	$0°$	$90°$	$180°$
$sin\alpha$	0	1	0
$cos\alpha$	1	0	-1
$tg\alpha$	0	$-$	0
$ctg\alpha$	$-$	0	$-$

Tabela 5-2. Wartości funkcji trygonometrycznych

Zadania

5.4.1. Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany α, w którym punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta, a następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P = (1{,}7)$

b) $P = (-2{,}5)$

c) $P = (-\sqrt{3}, -4)$

d) $P = (6, -3)$

Odpowiedź:

a) $r = 5\sqrt{2}, sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}, cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, tg\alpha = 7, ctg\alpha = \frac{1}{7}$

b) $r = 29, sin\alpha = \frac{5}{29}, cos\alpha = \frac{-2}{29}, tg\alpha = -\frac{5}{2}, ctg\alpha = -\frac{2}{5}$

c) $r = 19, sin\alpha = -\frac{4}{19}, cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{19}, tg\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{2}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $r = 3\sqrt{5}, sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}, cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, tg\alpha = -\frac{1}{2}, ctg\alpha = -2$

5.5. Wzory redukcyjne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Korzystać ze worów typu:** *sin (90º - α) = cos α*

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

Jeśli argument zmienia się w nieparzystą wielokrotność kąta $\frac{\pi}{2}$, to funkcja przechodzi w kofunkcję (sinus w cosinus, cosinus w sinus, tangens w cotangens, cotangens w tangens). Ponieważ wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, więc należy je … akiem, pisząc prawą stronę wzoru. Znak piszemy taki, jaki odpowiada funk… występującej z lewej strony wzoru.

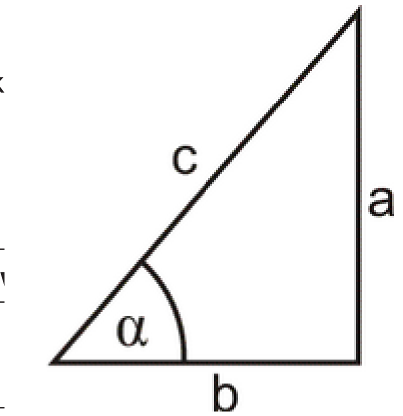


Tabela wzorów redukcyjnych

$\varphi =$	I ćwiartka	II ćwiartka		III ć…		…rtka	
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$			$2\pi - \alpha$
$sin\varphi$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\varphi$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
$tg\varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tabela 5-3. Wzory redukcyjne

Przykład 1

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos\alpha$$

Funkcja przeszła w kofunkcję, bo kąt zmienił się o $\frac{\pi}{2}$. Znak z prawej strony jest dodatni (+), bo kąt $\frac{\pi}{2} + \alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam sinus jest dodatni.

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

Funkcja nie zmieniła się, bo kąt zmienił się o π. Znak z prawej strony jest ujemny (-), bo kąt π - α jest kątem drugiej ćwiartki, a tam cosinus jest ujemny.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
$sin\alpha$	+	+	-	-
$cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

Tabela 5-4. Znaki funkcji trygonometrycznych

Przykład 2

$$sin150° = sin(180° - 30°) = sin30° = \frac{1}{2}$$

$$cos420° = cos(4 \cdot 90° + 60°) = cos60° = \frac{1}{2}$$

$$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$$

$$cos\frac{3}{4}\pi = cos135° = cos(180° - 45°) = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadania

5.5.1. Oblicz:

a) $sin120°$ b) $cos315°$

c) $tg(-840°)$ d) $sin\,\frac{\pi}{3}$

e) $ctg\,(-2\pi)$ f) $2sin^2 225° - ctg330° \cdot tg450°$

Odpowiedź:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) nie ma rozwiązania f) $1 + \sqrt{3}$

5.5.2. Korzystając z wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $\frac{cos135° + tg330°}{ctg225° \cdot sin840°}$

b) $sin\,\frac{5\pi}{4} \cdot tg\,\frac{4\pi}{3} + cos2\frac{1}{2}\pi$

Odpowiedź:

a) $\frac{-\sqrt{6}-2}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

5.5.3. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

5.6. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

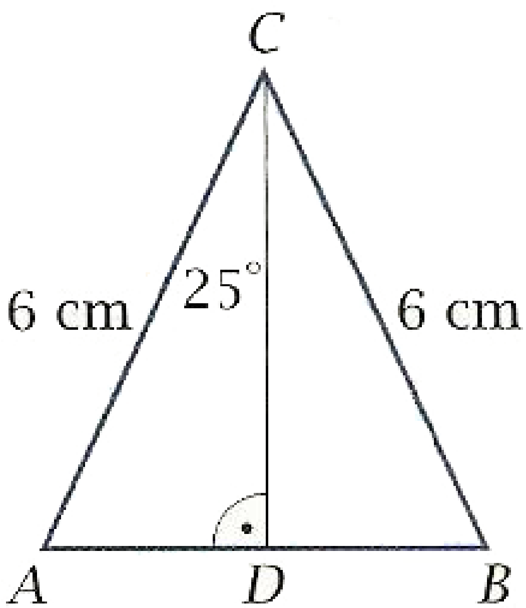
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Stosować proste zależności między funkc**

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

- **Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub co ... ych funkcji tego samego kąta ostrego**

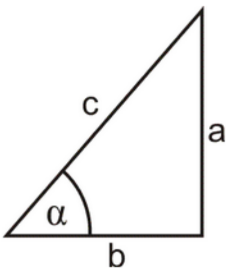


Jedynka trygonometryczna

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Uzasadnimy wzór dla sinusa i cosinusa kąta ostrego.

$sin\alpha = \frac{a}{c}$, $cos\alpha = \frac{b}{c}$



$a^2 + b^2 = c^2$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2 /:c^2$

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

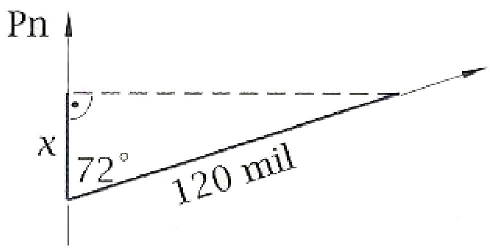
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

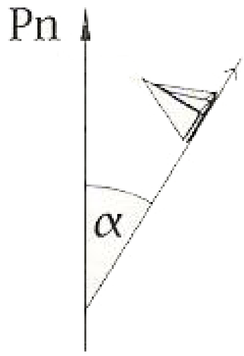
Wniosek:

Jeżeli $\alpha\epsilon(0°;90°)\alpha\epsilon(0°;90°)$, to:

$$\boldsymbol{sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}}$$





Przykład 1

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$

b) $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$

Niech będzie dany trójkąt prostokątny.

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha : cos\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha$

b) $\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha : sin\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = ctg\alpha$

Ponieważ wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta ostrego są liczbami odwrotnymi, to:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

Z tego wynika, że $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$.

Przykład 2

Wiedząc, że $cos\alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2}$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

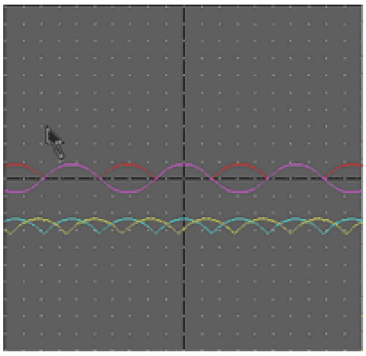
$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

Przykład 3

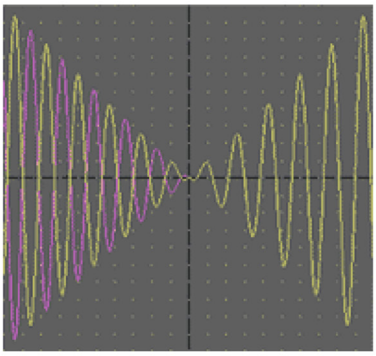
Udowodnij tożsamość trygonometryczną: $sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - \left(\frac{sinx}{tgx}\right)^2$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie:

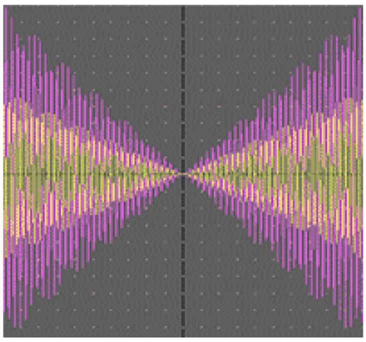
- $\boldsymbol{y = sin(cos(x))}$



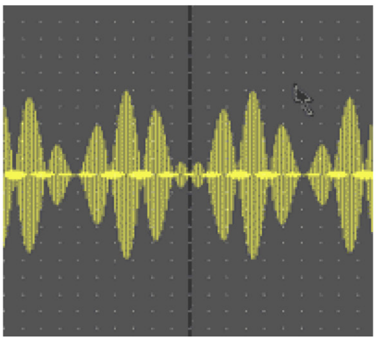
- $\boldsymbol{y = -x \cdot cos(100x)}$



- $\boldsymbol{y = x \cdot sin(20x)}$



- $\boldsymbol{y = 5sin(0,5x) \cdot cos(50x)}$



$$\frac{sinx}{tgx} = sinx : tgx = sinx : \frac{sinx}{cosx} = sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} = cosx$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - (cosx)^2$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx(1 - cos^2x) - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx \cdot sin^2x - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sin^3x - cos^2x$$

$$L = P$$

Zadania

5.6.1. Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych:

a) $cos\alpha = \frac{1}{4}$ b) $tg\alpha = 2\sqrt{2}$

Odpowiedź:

a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, tg\alpha = \sqrt{15}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ b) $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, cos\alpha = \frac{1}{3}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5.6.2. Oblicz $a + b$, gdy $a = 1 - cos^2\alpha$, $b = tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha$, dla $\alpha = 45°$.

Odpowiedź: 1

5.6.3. Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Odpowiedź:

$sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{1}{2}$

5.7. Zastosowanie trygonometrii

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wykorzystywać wiadomości i umiejętności w zadaniach i problemach życia codziennego**

Przykład 1

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta? Jaką długość ma wysokość opuszczona na tę podstawę?
Wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli kąt między ramionami trójkąta na dwa równe kąty

$$\sin 25° = \frac{|AD|}{6}$$

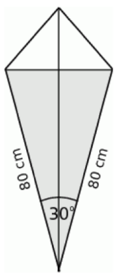
$$|AD| = 6\sin 25°$$

$$|AB| = 2|AD| = 12sin25°$$

Wartość $\sin 25°$ odczytujemy z tablic.

$$\sin 25° \approx 0{,}4226$$

$$|AB| = 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5{,}1$$



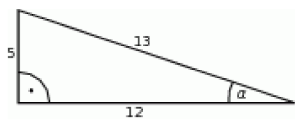
$$cos25° = \frac{|CD|}{6}$$

$$|CD| = 6 \cdot cos25°$$

Wartość $\cos 25°$ odczytujemy z tablic.

$$cos25° \approx 0{,}906$$

$$|CD| = 6 \cdot 0{,}906 \approx 5{,}4$$



Odpowiedź:

Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości, a wysokość około 5,4 cm.

Przykład 2

Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°. O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).

Rysunek pomocniczy do zadania:

$$\frac{x}{120} = cos72°$$

$$x = 120 \cdot cos72°$$

Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tablic.

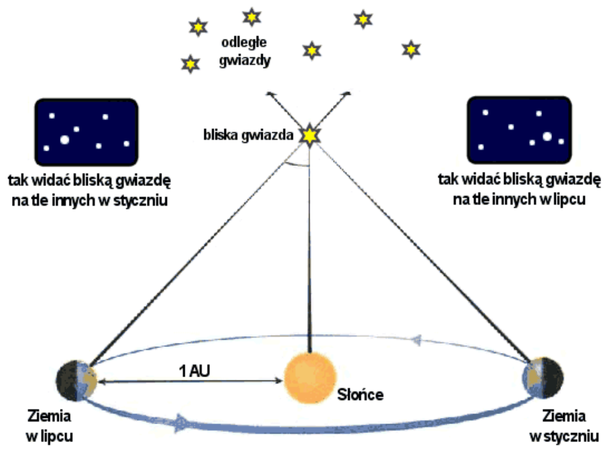
$$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$$

Odpowiedź:

Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

CIEKAWOSTKA

[79]Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się przy pomiarze odległości do trudno dostępnych obiektów, np. do wyznaczania odległości obiektów astronomicznych przy pomocy zjawiska paralaksy. Paralaksa to zjawisko pozornej zmiany położenia obiektu oglądanego z dwóch kierunków. W praktyce najłatwiej zobaczyć zmianę położenia na tle innych, odległych obiektów. Paralaksę geocentryczną stosuje się do pomiarów odległości w Układzie Słonecznym, wówczas za bazę przyjmuje się promień Ziemi. Do wyznaczenia odległości do innych gwiazd, za bazę obiera się jedną jednostkę astronomiczną, czyli średnią odległość Ziemia – Słońce (149,6 mln km). Można zmierzyć położenie danej gwiazdy na tle odległych gwiazd w dwóch momentach czasu, gdy Ziemia jest na przeciwnych miejscach na swojej orbicie. Otrzymujemy wtedy podwojony kąt paralaksy ($2\pi\pi$).



Rysunek 5-5 Kąt paralaksy

Kąt ten jest na tyle mały, że wyrażamy go w sekundach łuku i oznaczamy symbolem π. **Jedna sekunda łuku,** czyli odległość, z jakiej obiekt o średnicy równej średniej odległości Ziemi od Słońca, miałby rozmiary jednej sekundy łuku na niebie.

CIEKAWOSTKA

79. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk, 19.04.2013.

[80]**Parse**k – jednostka odległości używana w astronomii. Jest to odległość, dla której paralaksa roczna położenia Ziemi widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity wynosi 1 sekundę łuku. Parsek można równoważnie opisać jako odległość, z jakiej połowa wielkiej osi orbity ziemskiej (czyli 1 j.a.) jest widoczna jako łuk o długości 1 sekundy kątowej.
Słowo parsek zostało wprowadzone przez Herberta Turnera w XIX wieku. Utworzył on je jako zbitkę pierwszych sylab słów paralaksa i sekunda. Parsek oznaczany jest skrótem pc lub ps. Używanie drugiego ze skrótów nie jest wskazane, gdyż jest on identyczny ze skrótem dla pikosekundy (1 ps = 10^{-12} s).
1 pc ≈ 3,2616 roku świetlnego **≈ 206265 jednostek astronomicznych ≈ 3,086·10^16^** m

CIEKAWOSTKA

Zadania

5.7.1. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Ramię tego trapezu ma długość $10\ cm$, a obwód wynosi $40\ cm$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

Odpowiedź: $2\ cm$, $18\ cm$

5.7.2. Oblicz wysokość drzewa, które daje cień o długości 17 m przy wysokości słońca 54º. *Wysokość słońca – kąt między kierunkiem promieni słonecznych a płaszczyzną horyzontu.*

Odpowiedź: $23{,}4\ m$

80. www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek, 20.04.2013.

5.7.3. Najbardziej „stroma" kolej na świecie znajduje się w Gwatemali. Tory biegną pod kątem 52°. Na jaką wysokość wjedziesz po przejechaniu 1000 m?

5.7.4. Pod jakim kątem nachylona jest do podłoża drabina o długości 10 m, jeżeli sięga ona na wysokość 8 m? Jak wysoko sięgnie ta drabina, jeżeli kąt między nią a ziemią będzie wynosił 60°?

5.7.5. Obserwator stoi na stromym brzegu na wysokości 35 m nad wodą. Widzi żaglówkę pod kątem 12° do poziomu wody. Jak daleko jest ta żaglówka od brzegu?

5.7.6. Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi znajduje się Księżyc, jeżeli kąt paralaksy wynosi $\pi = 57'$. Przyjmij promień Ziemi R = 6378 km.

Odpowiedź: d = $\frac{R}{tg\pi}$ = 384000 km

5.7.7. Oblicz kąt paralaksy najbliższej nam gwiazdy Proxima Centauri, znajdującej się w odległości 4,3 lat świetlnych od Ziemi. P**Odpowiedź:** Rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu jednego roku. (Jaką drogę pokona światło? c $\approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$).

Odpowiedź: d = 4,3 lat świetlnych = $4{,}3 \cdot 365{,}35 \cdot 24 \cdot 3600s \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 4{,}1 \cdot 10^{16}$ m

R = 149 600 000 km = $1{,}496 \cdot 10^{11}$m

tg$\alpha = \frac{r}{d} \approx 6{,}36 \cdot 10^8$

$\alpha = (3{,}6 \cdot 10^{-6})°$

5.7.8. Po upływie 6 miesięcy pozycja obserwowanej gwiazdy zmieniła się, tak że jej kąt paralaksy wyniósł 0,00013°. Oblicz odległość gwiazdy od Ziemi wiedząc, że promień orbity Ziemi wynosi $1{,}496 \cdot 10^8$ km. Odległość wyraź w kilometrach i parsekach.

Odpowiedź: tg$\alpha = \frac{r}{l}$, l = $\frac{r}{tg\alpha} = 6{,}6 \cdot 10^{13}$ km = 2,14 pc

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Kąt α jest ostry i sin $\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy cos α jest równy[81]:

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

81. Zadania 1, 2, 3: zaczerpnięto z próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

C. $\frac{\sqrt{17}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{65}}{9}$

2. Dany trójkąt jest prostokątny (patrz rysunek). Wtedy tgα jest równy:

A. $\sqrt{2}$,

B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Kąt α jest ostry i tgα = 4/3. Oblicz sinα + cosα.

4. Kąt α jest ostry i sin α = 3/4. Wartość wyrażenia 2 – cos $^2\alpha$ równa się[82]:

A. $\frac{25}{16}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{17}{16}$

D. $\frac{31}{16}$

5. Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa:

A. 3200 cm^2

B. 6400 cm^2

C. 1600 cm^2

D. 800 cm^2

6. Kąt α jest ostry i tg$\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz cos α.

7. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy[83]:

A. cos$\alpha = \frac{5}{13}$

B. tg$\alpha = \frac{13}{12}$

82. Zadania 4, 5, 6: zaczerpnięto z matury z matematyki, CKE, maj, 2010.
83. Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.

C. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

8. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, wtedy[84]:

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

9. Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. 1

10. (2 pkt) Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

11. Liczba $\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa[85]:

A. $\sqrt{3}-1$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i |AB| = 13 oraz |BC| = 13. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

84. Zadania 8, 9, 10: zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2011.
85. Zadania 11, 12: zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.

A. $\frac{12}{13}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{13}{12}$

13. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ jest[86]:

A. mniejsza od -1

B. równa 1

C. większa od 1

D. równa 0

14. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy cosα jest równy[87]:

A. $\frac{45}{49}$

B. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

15. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas[88]:

A. $\cos\alpha = \sin\alpha$

B. $\cos\alpha > \sin\alpha$

C. $\cos\alpha < \sin\alpha$

D. $\cos\alpha = 1 - \sin\alpha$

16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy[89]:

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

86. Zadania 13, 14: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2010.
87. Próbna matura z operonem, listopad, 2009.
88. Zadania 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2011.
89. Zadania 18, 19, 20: zaczerpnięto z arkusza maturalnego, OKE, Poznań, styczeń, 2013.

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

17. Wyrażenie $\frac{1-sin^2\alpha}{\frac{1}{tg^2\alpha}}$, gdzie α jest kątem ostrym, można zapisać w postaci:

A. $\sin^2\alpha$

B. $\frac{cos^4\alpha}{sin\,\alpha}$

C. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

D. $\frac{1}{sin\,\alpha}$

18. (2 pkt) Wykaż, że jeżeli kąt α jest kątem ostrym i tgα = 2, to $\cos\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. (2 pkt) W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

20. Oblicz wartość wyrażenia $tg^2\alpha - 3\cos^2\alpha$, jeżeli $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem ostrym.

21. (4 pkt) Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $tg\,\alpha + \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$. Oblicz wartość $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i tgα [90].

22. (2 pkt) Drabina o długości 2,5 m oparta o mur styka się z nim na wysokości 2 m. Na jakiej wysokości zetknie się z murem drabina o długości 3,5 m, jeśli obie drabiny nachylone są pod takim samym kątem do podłoża?

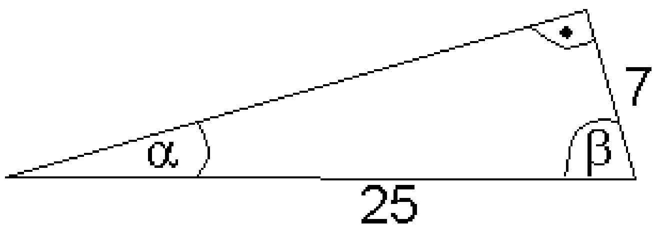
23. (2 pkt) Posługując się wzorem: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, oblicz $\sin 75°$.

24. (2 pkt) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ [91].

25. (2 pkt) Oblicz a-b, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

26. (4 pkt) Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia

$(tg\beta - \frac{1}{sin\beta})^2 \cdot \cos\alpha$.



90. Zadania 21,22, 23: zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
91. Zadania 24, 25, 26, 27: zaczerpnięte z informatora maturalnego, CKE, 2007.

27. (**4 pkt**) Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{ctg\,\alpha - tg\,\alpha}{ctg\,\alpha + tg\,\alpha}$.

28. **(5 pkt)** Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α[92].

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $\sin\alpha$ -tg$\alpha < 0$.

b) Dla $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.medianauka.pl/podstawowe_pojecia_planimetrii
2. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
3. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
4. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
5. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf

92. Arkusz maturalny, CKE, maj, 2009.

6. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
8. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
9. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
10. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
11. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
12. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.bossa.pl
15. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
16. www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
20. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
21. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
23. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
24. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
26. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian
27. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.
28. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia
29. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascalwww.zadania.info
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
31. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf
32. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf,
33. www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
34. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
35. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php
36. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
37. www.zadania.info
38. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
39. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
40. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf
41. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf

42. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
43. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta#Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29
44. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o
45. www.math.edu.pl/symetria
46. www.math.edu.pl/symetria
47. www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa
48. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram
49. www. violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd
50. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom.
51. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski
52. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
53. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
54. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
55. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
56. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
57. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
58. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
59. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
60. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
61. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
62. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
63. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
64. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
65. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013)
66. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk
67. www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek

Interdyscyplinarny podręcznik
cz. II

Matematyka

KLASA IV

Podręcznik dla nauczycieli – Technikum

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

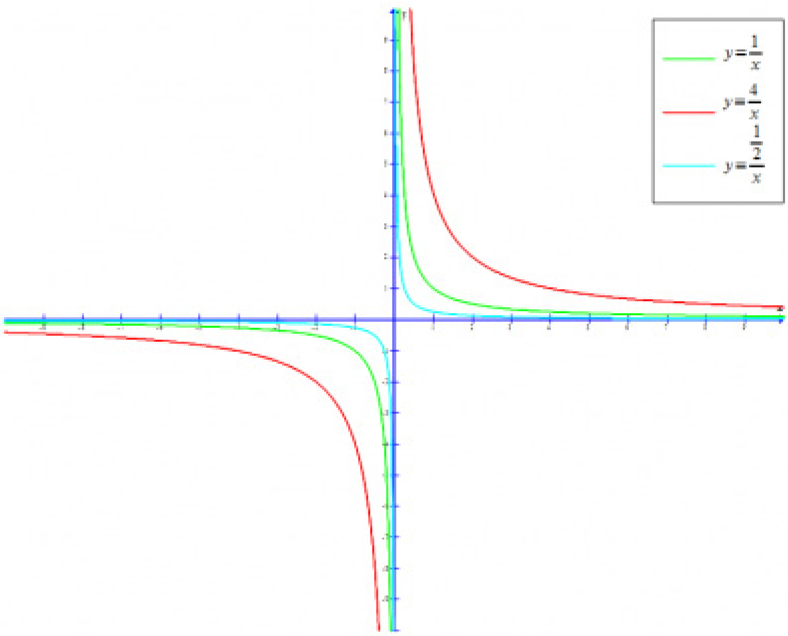
1.1 Funkcja wykładnicza i jej własności

Teraz nauczę się:

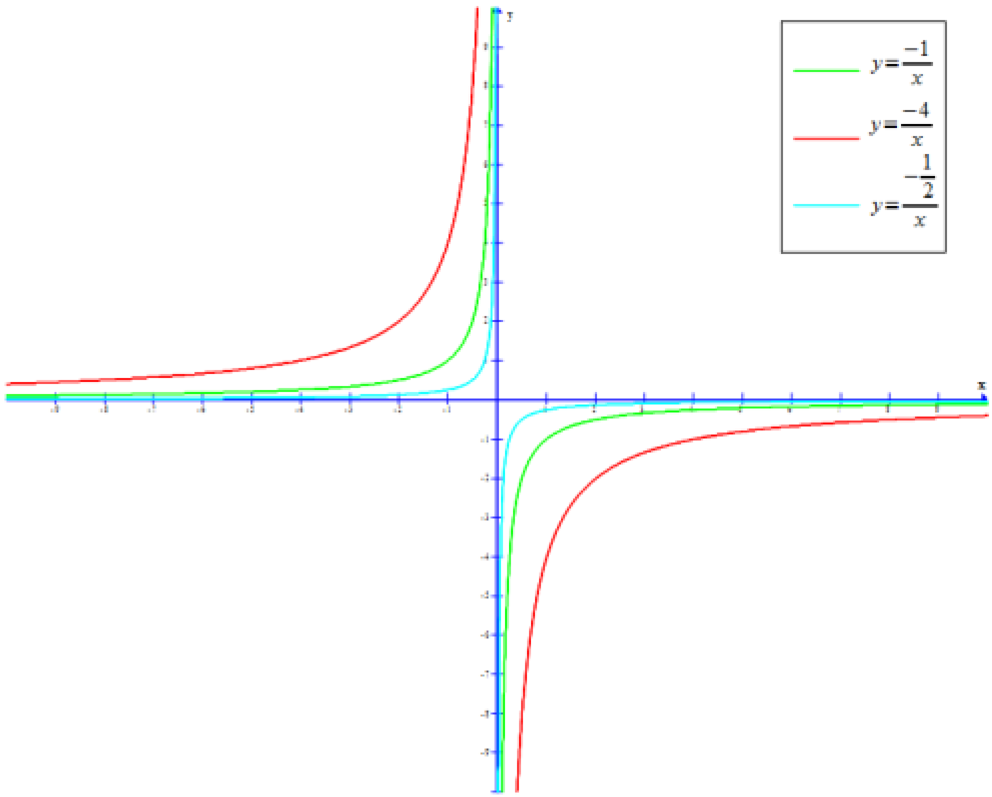
- Korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.
- Rozwiązywać równania wielomianowe.

Pojęcie hiperboli

Poniżej narysowano kilka różnych funkcji typu $f(x)=\frac{a}{x}$**.**



Rysunek 1-1. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a>0$



Rysunek 1-2. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a < 0$

Krzywą, która jest wykresem funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy hiperbolą. Wykres składa się z dwóch rozłącznych części, zwanych gałęziami hiperboli.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Gdy $a > 0$, gałęzie hiperboli $y=\frac{a}{x}$ leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych. Gdy $a < 0$, gałęzie hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Zatem, aby narysować wykres funkcji, wystarczy znać wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x > 0$, a następnie odbić go symetrycznie względem punktu $(0,0)$, czyli początku układu współrzędnych.

Wykres funkcji typu $y=\frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) zbliża się do obu osi układu współrzędnych (punkty tego wykresu mogą leżeć dowolnie blisko tych osi). Prostą $x = 0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, a prostą $y = 0$ nazywamy asymptotą poziomą tego wykresu.

Zmniejszanie wartości „a" powoduje zbliżanie się hiperboli do osi układu.

Zwiększanie wartości „a" powoduje oddalanie się hiperboli od osi układu.

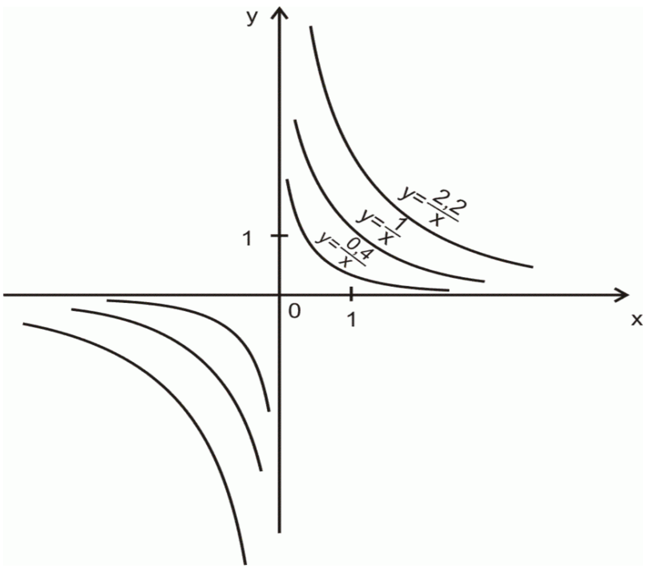
Przykład 1

W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji:

$f(x)=\frac{0{,}4}{x}, f(x)=\frac{1}{x}, f(x)=\frac{2{,}2}{x}$

Budujemy częściową tabelę zmienności funkcji:

x	0,25	0,5	1	2
$f(x)=\frac{0{,}4}{x}$	1,6	0,8	0,4	0,2
$f(x)=\frac{1}{x}$	4	2	1	0,5
$f(x)=\frac{2{,}2}{x}$	8,8	4,4	2,2	1,1



Rysunek 1-3. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, $a>0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a>0$, to gałęzie hiperboli są położone w I i w III ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś $OX\ OX$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś $OYOY$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ ($a\neq 0$) jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli $R/\{0\}$.
- Widzimy, że funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

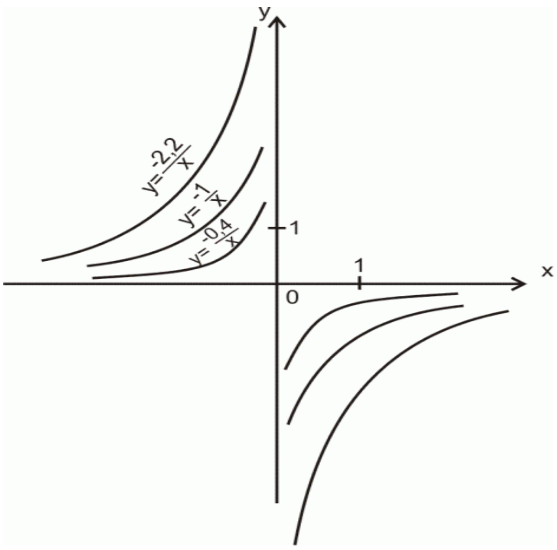
Przykład 2

W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji:

$f(x) = -\frac{0,4}{x}, f(x) = -\frac{1}{x}, f(x) = -\frac{2,2}{x}$.

Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez odbicie symetryczne względem osi OX.

Wykorzystując tę własność oraz wykresy funkcji z przykładu 1, widzimy, że wykresy podanych funkcji są następujące:



Rysunek 1-4. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a < 0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a < 0$, to ramiona hiperboli są położone w II i w IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli $R/\{0\}$.
- Widzimy, że funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

Poniżej przypominamy reguły dotyczące przesuwania wykresów funkcji.

Niech: $a > 0$ i $b > 0$.

- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) + b$.
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) - b$.

- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x + a) + b$.

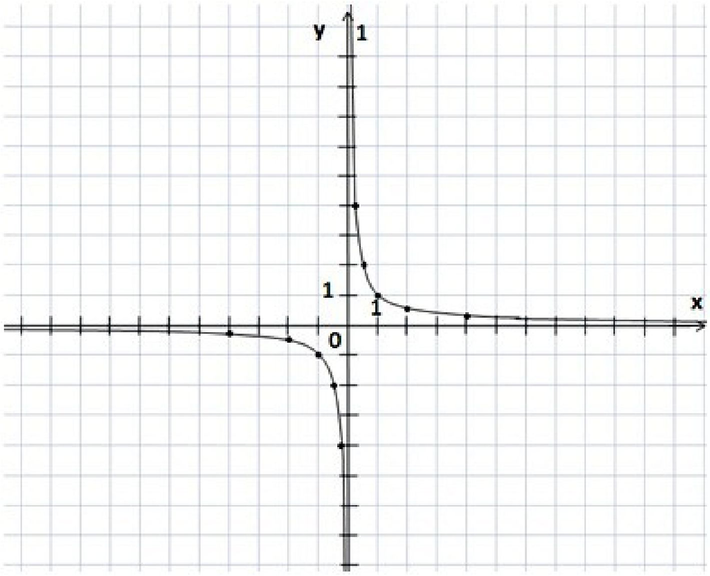
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x + a) - b$.

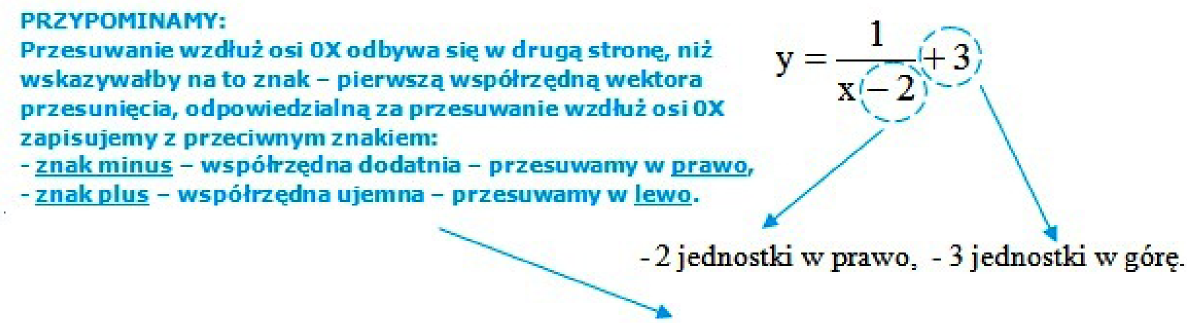
Powyższą regułę wykorzystajmy w przykładzie.

Przykład 3[1]

Narysuj wykres funkcji: $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

W pierwszej kolejności rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{1}{x}$





ASYMPTOTY, pionową i poziomą, przesuwamy wraz z wykresem funkcji.

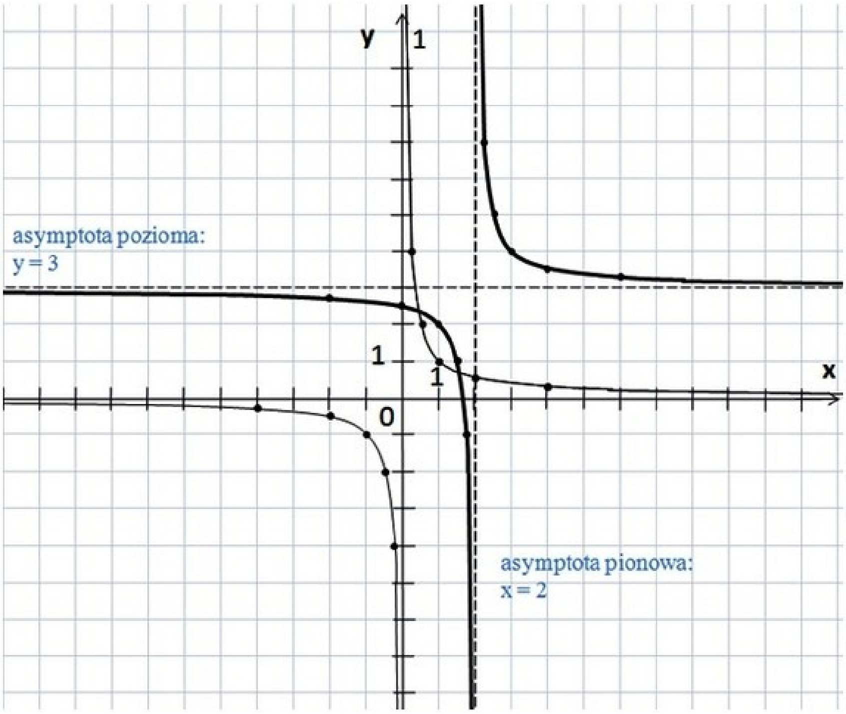
Dla rozpatrywanego przykładu:

- asymptota pozioma będzie znajdowała się na wysokości 3: $y = 3$,

- asymptota pionowa będzie znajdować się w miejscu argumentu 2: $x = 2$.

-

1 www.matematykam.pl, 03.03.2013.



ZADANIA

3.1.1 Sporządź wykresy funkcji:

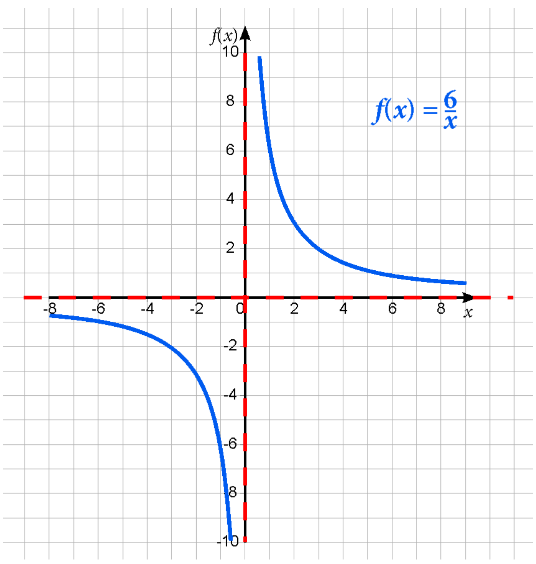
a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = -\frac{8}{x}$ c) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ d) $f(x) = -\frac{4}{x} + 2$

e) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ f) $f(x) = \frac{-2}{x+1}$ g) $f(x) = \frac{5}{x+3}$ h) $f(x) = \frac{-3}{x-1}$

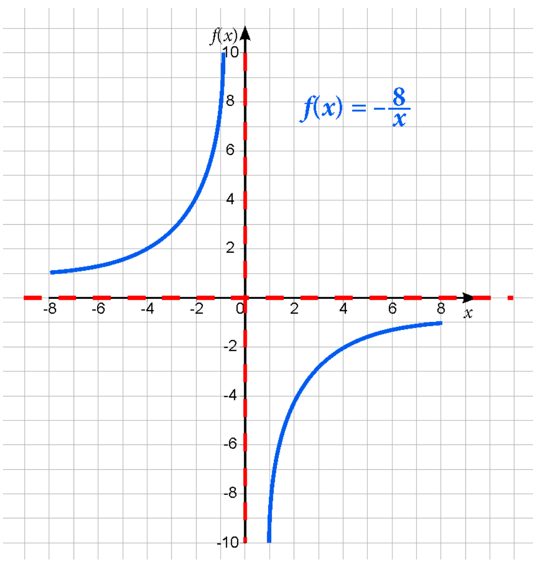
i) $f(x) = \frac{4}{x-3} - 2$ j) $f(x) = \frac{-4}{x-4} + 1$

Odpowiedzi:

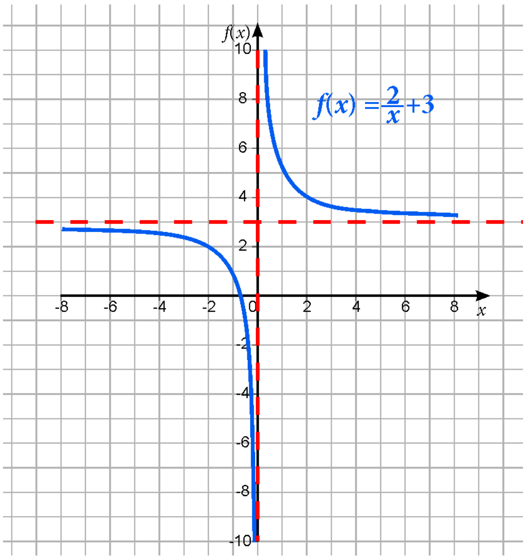
a)



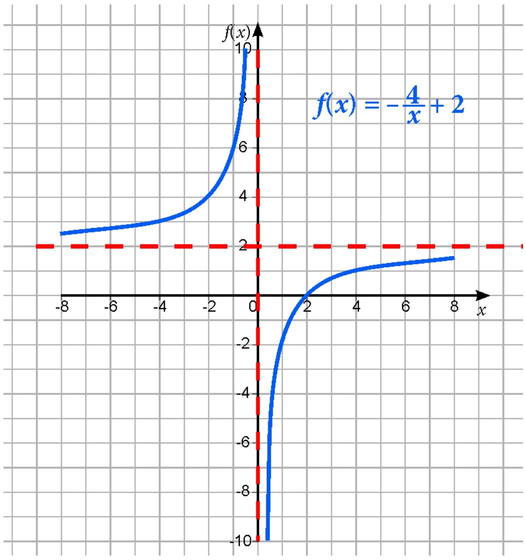
b)



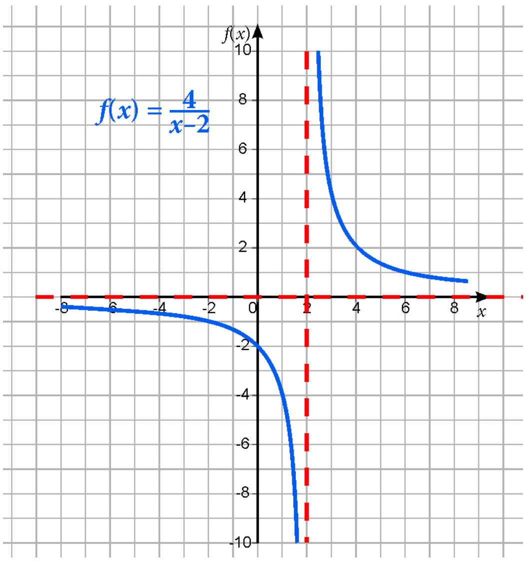
c)


$f(x) = \frac{2}{x} + 3$
$f(x)$
x

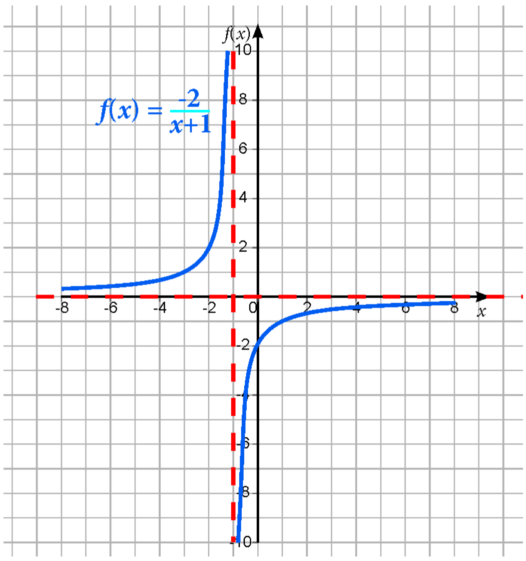
d)


$f(x) = -\frac{4}{x} + 2$
$f(x)$
x

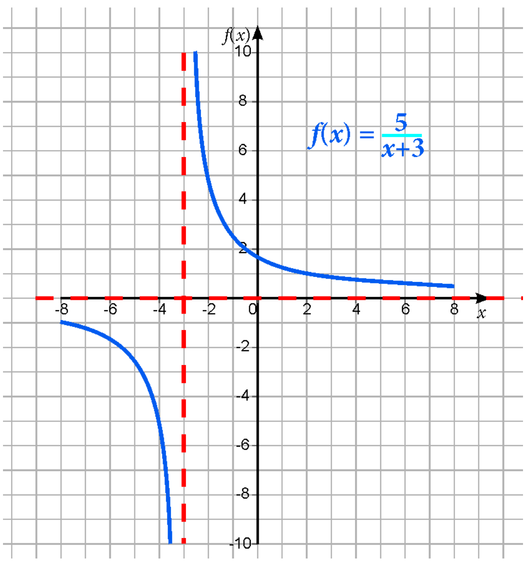
e)


$f(x) = \frac{4}{x-2}$
$f(x)$
x

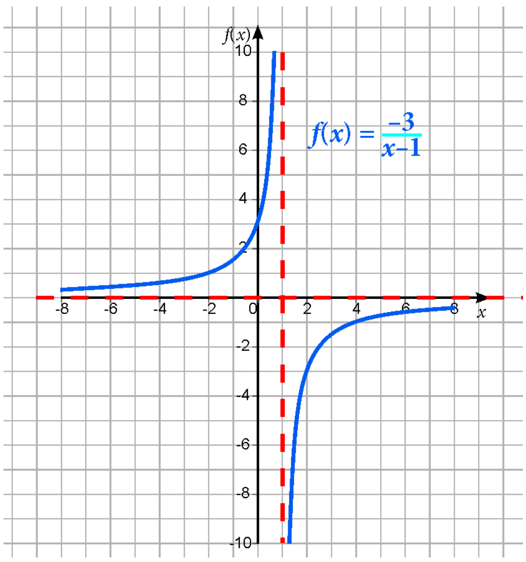
f)


$f(x) = \frac{-2}{x+1}$
$f(x)$
x

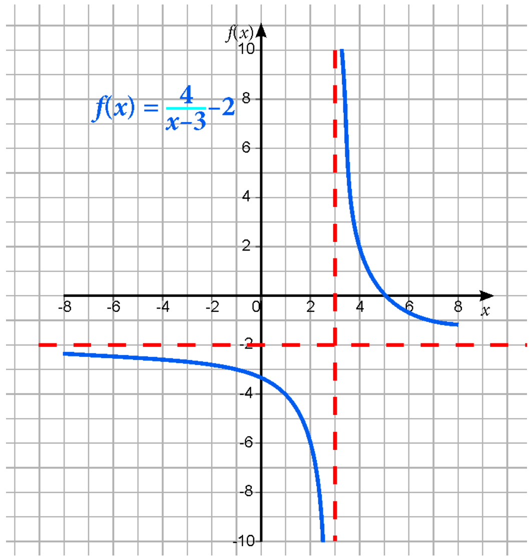
g)


$f(x) = \frac{5}{x+3}$
$f(x)$
x

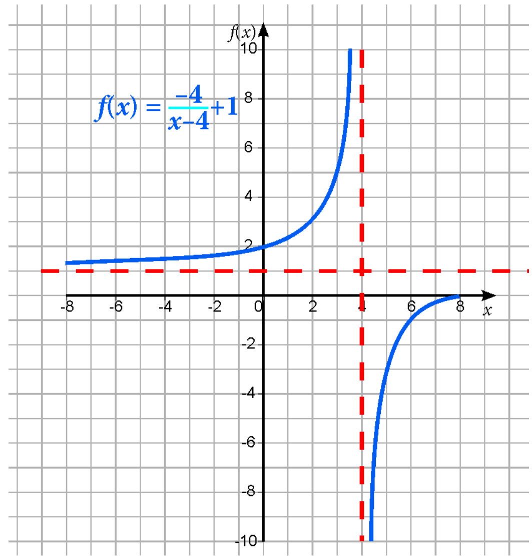
h)


$f(x) = \frac{-3}{x-1}$
$f(x)$
x

i)



j)



1.1.2. Wykres funkcji $f(x)=\frac{4}{x}$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g, jeżeli wykres funkcji f przesunięto:

a) o 5 jednostek do dołu

b) o 3 jednostki w prawo

c) o 2 jednostki do góry i 4 jednostki w lewo

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{4}{x}-5$ b) $f(x)=\frac{4}{x-3}$ c) $f(x)=\frac{4}{x+4}+2$

1.1.3. Zapisz równania asymptot wykresu funkcji:

a) $y=\frac{3}{x-1}+2$ b) $y=\frac{-0{,}7}{x+12}-\frac{1}{3}$ c) $y=\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}}-\sqrt{5}$ d) $y=\frac{7}{3(x-\frac{1}{2})}+\frac{4}{5}$

Odpowiedź:

a) $\boldsymbol{x=1;\ y=2}$ b) $\boldsymbol{x=-12;\ y=-\frac{1}{3}}$ c) $\boldsymbol{x=-\sqrt{3};\ y=-\sqrt{5}}$ d) $x=\frac{1}{2};\ y=\frac{4}{5}$

1.1.4. Punkt $\boldsymbol{P}=\left(3\frac{1}{2}\sqrt{3},2\sqrt{6}\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $f(x)=\frac{a}{x}$ b) $f(x)=\frac{a}{x+4}$ c) $f(x)=\frac{a}{x}-2$ **d)** $f(x)=\frac{a}{x-2}+2$

Dla każdej z tych funkcji wyznacz wartość współczynnika $\boldsymbol{a}$.

Odpowiedź:

a) $21\sqrt{2}$ b) $21\sqrt{2}+7\sqrt{3}$ c) $21\sqrt{2}+8\sqrt{6}$ d)

$21\sqrt{2}-4\sqrt{6}-7\sqrt{3}+4$

1.1.5. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x-5}+3$ b) $f(x)=\frac{3}{x+2}-3$ c) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x+6}$ d) $f(x)=\frac{-3}{x}+1$

Odpowiedź:

a) zbiór wartości: $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$

b) zbiór wartości: $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$

c) zbiór wartości: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-6)\cup(-6,\infty)$

d) zbiór wartości: $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$; funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

1.1.6. Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x=-5, y=3$ b) $x=0{,}6, y=0$ c) $x=-15, y=-6$

d) $x=0, y=-2$ e) $x=0, y=0$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{3}{x+5}+3$, $f(x)=\frac{-9}{x-5}+3$

b) $f(x)=\frac{1}{x-0{,}6}$, $f(x)=\frac{5}{x-0{,}6}$

c) $f(x)=\frac{1}{x+15}-6$, $f(x)=\frac{20}{x+15}-6$

d) $f(x)=\frac{1}{x}-2$, $f(x)=\frac{-17}{x}+3$

e) $f(x)=\frac{16}{x}$, $f(x)=\frac{-0{,}1}{x}$

1.1.7. a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y=-\frac{10}{x+7}-9$.

b) Podaj współrzędne wszystkich punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y=\frac{-6}{x-12}+8$ oraz $y=\frac{6}{x+7}-15$.

Odpowiedź:

a) $(-7,-9)$

b) $(12,8), (-7,8), (-7,-15), (12,-15)$

Proporcjonalność odwrotna

Definicja: Proporcjonalność odwrotna[2]

Proporcjonalność odwrotna to taka zależność między dwiema zmiennymi wielkościami x i y, w której iloczyn tych wielkości jest stały. Czyli:

$x\cdot y=a$, gdzie $a,x,y\in R\,/\{0\}$.

2 www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homograficzna, 15.03.2013.

Wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**.

Z powyższego wzoru możemy obliczyć x w zależności od y, wtedy: $x = \frac{a}{y}$
oraz y w zależności od x, wtedy: $y = \frac{a}{x}$

Zauważ, że ostatni wzór to wzór funkcji omawianej w poprzednim podrozdziale tego tematu.

Przykład 4

Pan Nowak ma przeczytać książkę, która liczy 520 stron. Postanowił, że codziennie będzie czytał taką samą liczbę stron. Liczba x przeczytanych dziennie stron oraz liczba y dni, w czasie których pan Nowak przeczytał książkę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, ponieważ:

$x \cdot y = 520$

Jeśli pan Nowak czyta więcej stron dziennie, to czas czytania książki jest krótszy. Czytając 20 stron dziennie, pan Nowak przeczyta książkę w ciągu 26 dni, zaś przy czytaniu 65 stron dziennie, przeczyta ją w ciągu 8 dni.

Mamy stałą wartość iloczynu $20 \cdot 26 = 65 \cdot 8 = 520$.

Liczba dni czytania y zależy od liczby przeczytanych stron x w sposób $y = \frac{520}{x}$.

Przykład 5

Weźmy dla przykładu podstawowy wzór fizyczny:

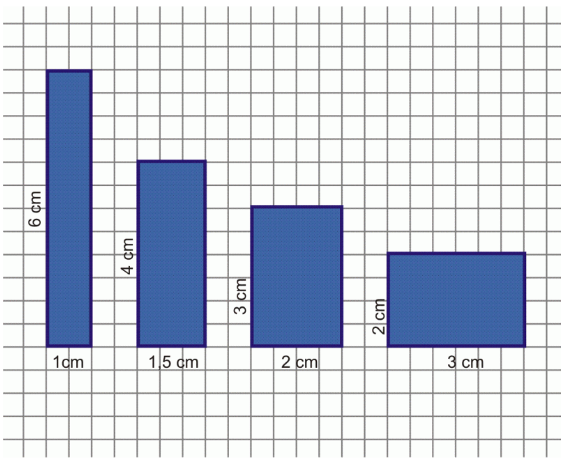
$v = \frac{s}{t}$

Zakładając, że droga (s) jest stała, prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do czasu.

Np. samochód jedzie z miasta A do miasta B. Im szybciej jedzie, tym mniej czasu mu to zajmie. Odległość między tymi miastami się nie zmienia, czyli droga (s) jest wielkością stałą.

Przykład 6

Na rysunku poniżej przedstawiono prostokąty o polu $6\ cm^2$.



Rysunek 1-5. Prostokąty o równym polu

Przy stałym polu prostokąta im większa jest długość jednego jego boku, tym mniejsza jest długość drugiego.

Jeśli długość jednego boku prostokąta **zwiększymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 2,5 razy,
- 5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 5 razy,
- 6 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 6 razy.

I odwrotnie, jeśli długość jednego boku prostokąta **zmniejszymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 2,5 razy,
- 5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 5 razy,
- 6 razy, to jego drugi bok zwiększy się 6 razy.

Zauważ, że pole prostokąta jest stałe i równe iloczynowi długości jego boków.

Przykład 7[3]

Samochód, jadąc ze stałą prędkością, pokonuje pewną drogę w ciągu 6 godzin. Z jaką prędkością powinien jechać motocyklista, aby tę samą trasę przejechać w ciągu 3 godzin?

Zauważ, że stała jest długość trasy, czyli droga, jaką pokonują samochód i motocyklista. Droga jest równa iloczynowi prędkości przez czas jazdy.

Odpowiedź: Motocyklista ma pokonać tę samą trasę w ciągu 3 godzin, czyli w czasie 2 razy krótszym niż samochód. Zatem jego prędkość powinna być 2 razy większa niż prędkość samochodu.

Wniosek:

- Jeśli jedna z wielkości rośnie (maleje), a równocześnie druga wielkość maleje (rośnie) tyle samo razy, to te wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi.**
- **Iloczyn** wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

3 www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne, 15.03.2103.

ZADANIA

1.1.8. Sprawdź, czy wielkości podane w tabelce są odwrotnie proporcjonalne? Jeżeli tak, to podaj wartość współczynnika proporcjonalności.

x	0,3	1	3	2	0,2
y	4	1,2	0,4	0,6	6

Odpowiedź:

Aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne, ich iloczyn musi być stały, liczymy więc $x \cdot y$.

$0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$

$1 \cdot 1{,}2 = 1{,}2$

$3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$

$2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2$

Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości to $a = 1{,}2$.

1.1.9. Uzupełnij tabelkę tak, aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne.

x	3,6		0,1	144
y		0,6	36	

Odpowiedź:

x	3,6	6	0,1	144
y	1	0,6	36	0,025

1.1.10 Koło zębate o 120 zębach napędza koło zębate o 48 zębach. Ile razy obróciło się małe koło, gdy duże w tym czasie obróciło się 40 razy?

Odpowiedź:

Małe koło obróciło się 100 razy.

1.1.11 Kierowca pokonał pewną trasę, jadąc ze średnią szybkością 90 km/h. O ile kilometrów na godzinę powinien zwiększyć szybkość, aby pokonać tę samą trasę w czasie o 25% krótszym?

Odpowiedź:

Kierowca powinien zwiększyć szybkość o 30 km/h.

1.2 Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczej

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = a^x$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$.

Jej nazwa pochodzi od tego, że x znajduje się w wykładniku.

Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza,** która przecina oś OY w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Kształt wykresu zależy od podstawy a.

Przypadek I[4]

Funkcja rosnąca, mająca w podstawie liczbę większą od 1.

Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = 2^x$

Aby narysować wykres funkcji, w pierwszej kolejności tworzymy tabelę, zawierającą punkt (0, 1) oraz parę punktów położonych na lewo od tego punktu i parę położonych na prawo.

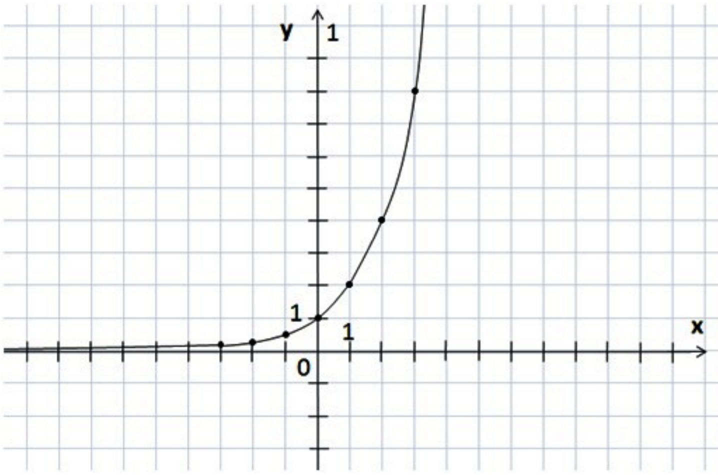
Trzy liczby na lewo od 0. Trzy liczby na prawo od 0.

x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**	2	4	8

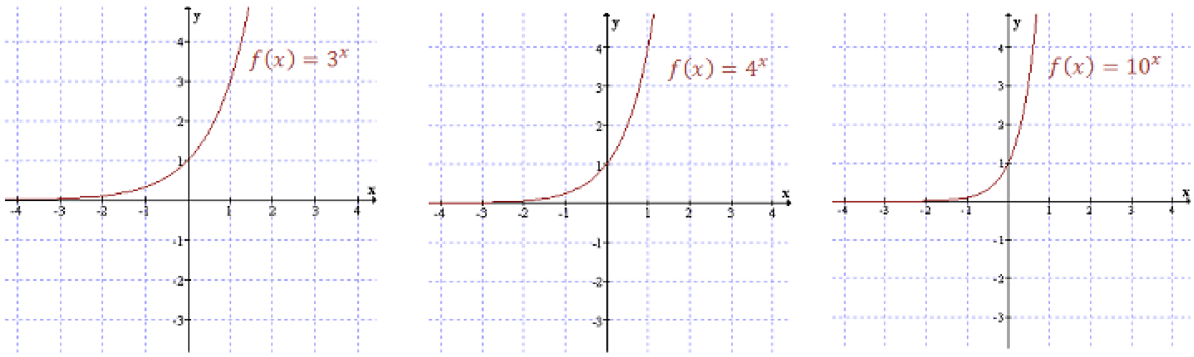
Następnie zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią.

4 www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html, 12.03.2013.

UWAGA!!!! Linia wykresu nie może przeciąć osi OX.



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $a > 1$. Przykładowo:



Rysunek 1-6. Wykresy funkcji wykładniczych, $a > 0$

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a > 1:}$

1. Dziedzina: $D = R$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R_+$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $rosnąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty;\ +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $y = 0$.

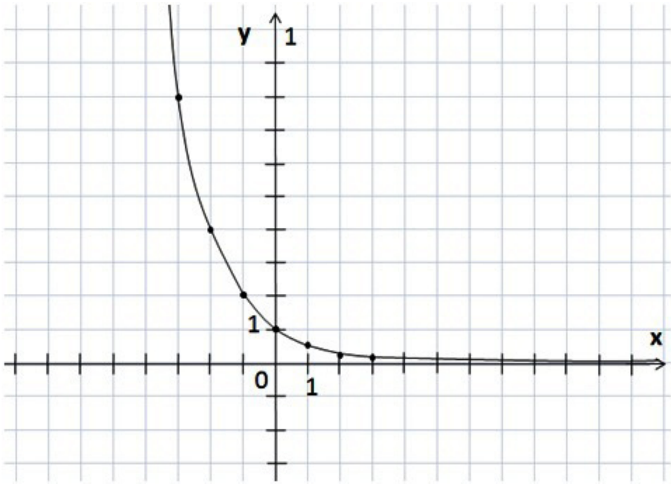
Przypadek II

Funkcje mające w podstawie ułamek.

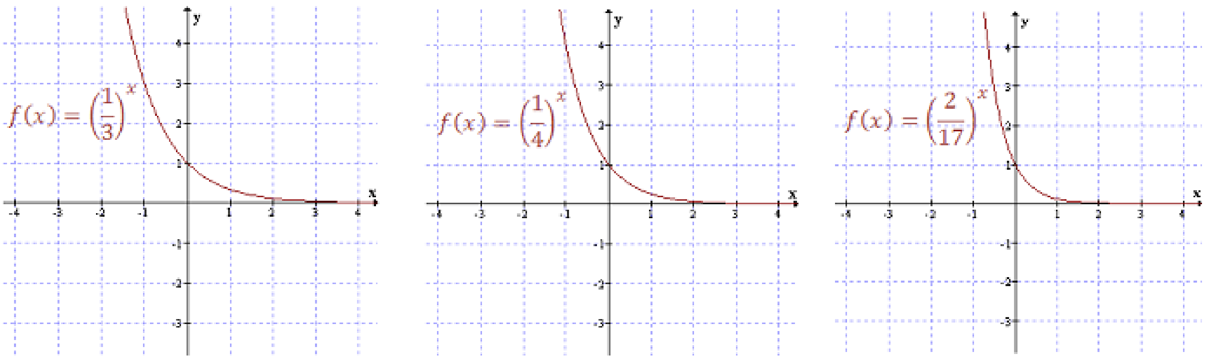
Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Postępujemy dokładnie w ten sam sposób, jak dla funkcji mającej w podstawie liczbę większą od 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $a < 1$. Przykładowo:



Rysunek 1-7. Wykresy funkcji wykładniczych, $a < 0$

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a < 1}$:

1. Dziedzina: $D = R$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R_+$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $malejąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $y = 0$.

Funkcje wykładnicze – przesunięcie

Funkcje wymagające przesuwania prostszych przypadków wzdłuż osi układu.

Przykład:

$f(x) = 2^{x-1} - 4$

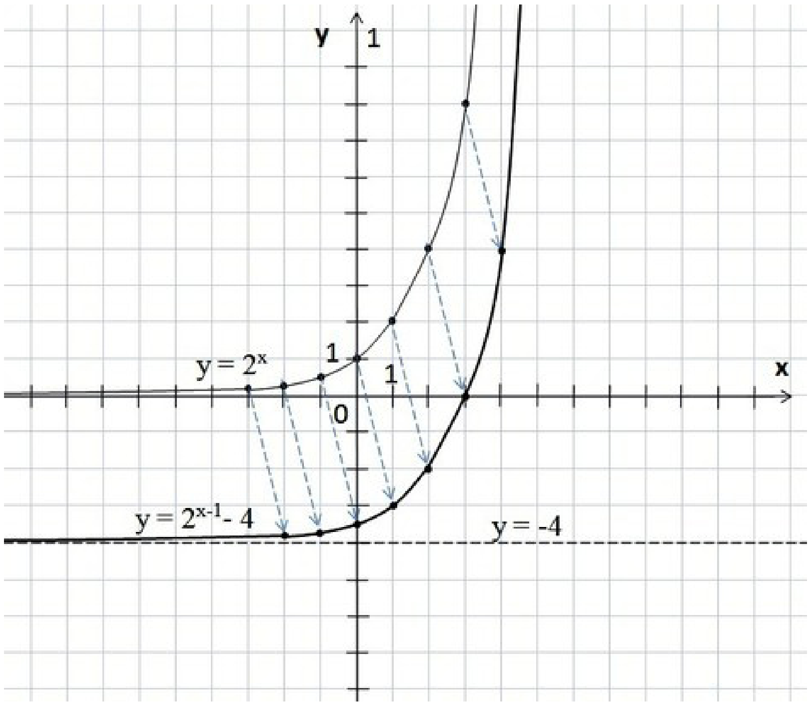
W celu narysowania powyższej funkcji, w pierwszej kolejności rysujemy prostszą funkcję:

$f(x) = 2^x$

W tym przypadku będziemy wykres funkcji $y = 2^x$ przesuwać o wektor $[1, -4]$ (przesuwamy wykres o 1 jednostkę w prawo i 4 jednostki w dół).

UWAGA:

W przypadku tej funkcji asymptota pozioma również przesunie się o 4 jednostki w dół, czyli będzie miała wzór $y = -4$.



Dla przypadków, gdy wykres otrzymujemy poprzez przesunięcie o wektor, asymptota znajduje się na wysokości, która wynika z przesunięci wykresu funkcji o określoną liczbę jednostek w górę lub w dół.

UWAGA!!!!

Gdy funkcja ma miejsce zerowe, należy je obliczyć, przyrównując wzór funkcji do zera. Otrzymujemy wówczas równanie wykładnicze.

Określenie, czy funkcja ma miejsce zerowe, nie wymaga rysowania wykresu. Wystarczy stwierdzić, czy podczas rysowania będziemy przesuwać wzór funkcji w dół, czy nie. Tylko funkcje wymagające przesuwania w dół podczas rysowania, mają miejsce zerowe.

Przykład:

Obliczymy miejsce zerowe funkcji:

$f(x) = 2^{x+7} - 16$

Rysując tę funkcję, wykres funkcji $f(x) = 2^x$ musielibyśmy przesunąć o 7 jednostek w lewo i 16 do dołu. Wynika stąd, że ta funkcja ma miejsca zerowe.

Aby je obliczyć, wystarczy wzór funkcji przyrównać do zera.

$2^{x+7} - 16 = 0$

$2^{x+7} = 16$

$2^{x+7} = 2^4$ teraz możemy pominąć podstawy i przyrównać wykładniki.

$x + 7 = 4 \Rightarrow x = -3$

Odpowiedź: Funkcja ma miejsce zerowe dla $x = -3$.

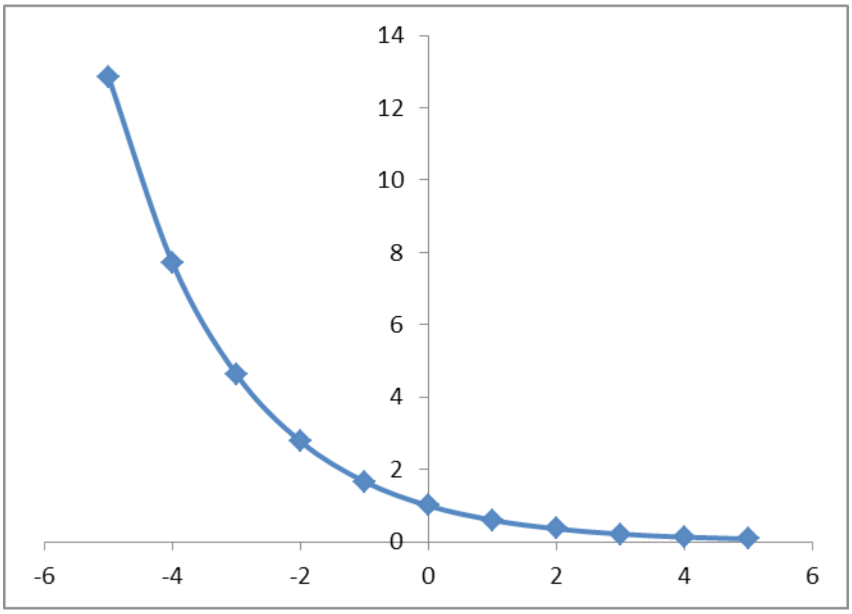
ZADANIA

1.2.1. Narysuj wykresy następujących funkcji:

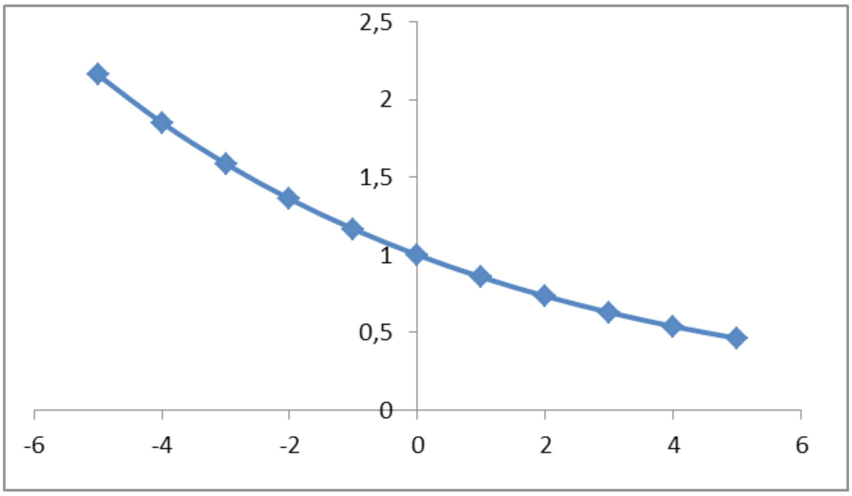
a) $f(x) = (0{,}6)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$ c) $f(x) = 10^x$

Odpowiedzi:

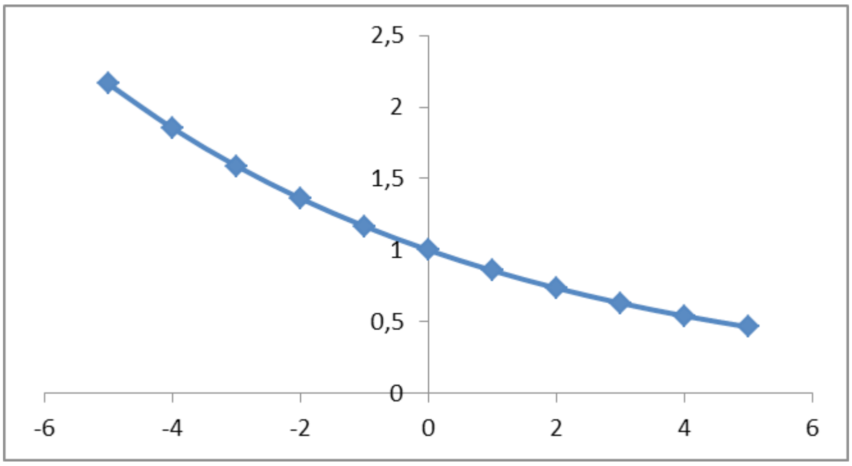
a)



b)



c)

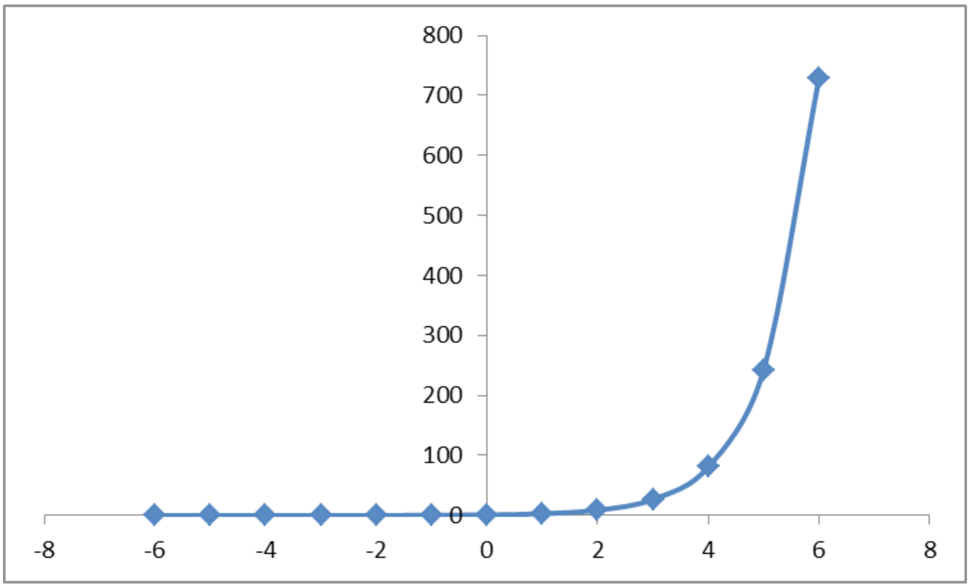


1.2.2. Narysuj wykres funkcji $f(x)=3^x$, a następnie wykresy funkcji:

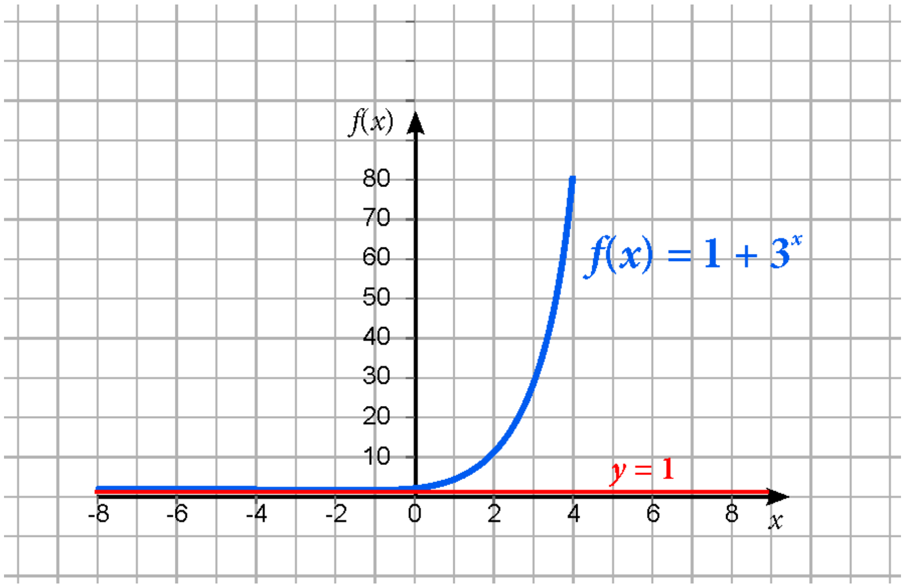
a) $f(x)=1+3^x$ b) $f(x)=-4+3^x$ c) $f(x)=3^{x+2}$ d) $f(x)=3^{x-3}$

e) $f(x)=-3^x$ f) $f(x)=4-3^x$ g) $f(x)=9\cdot 3^x$

Odpowiedzi: wykres $y=3^x$

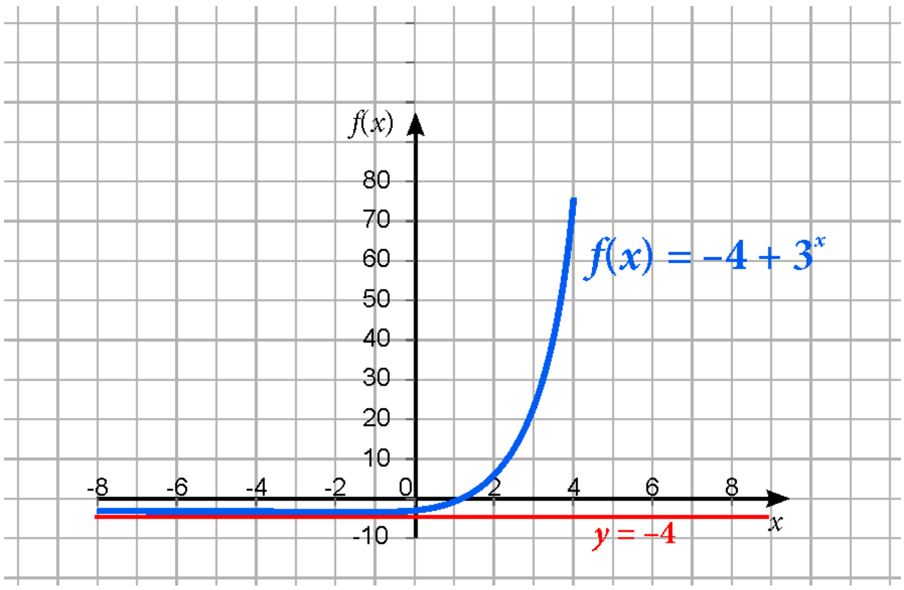


a)



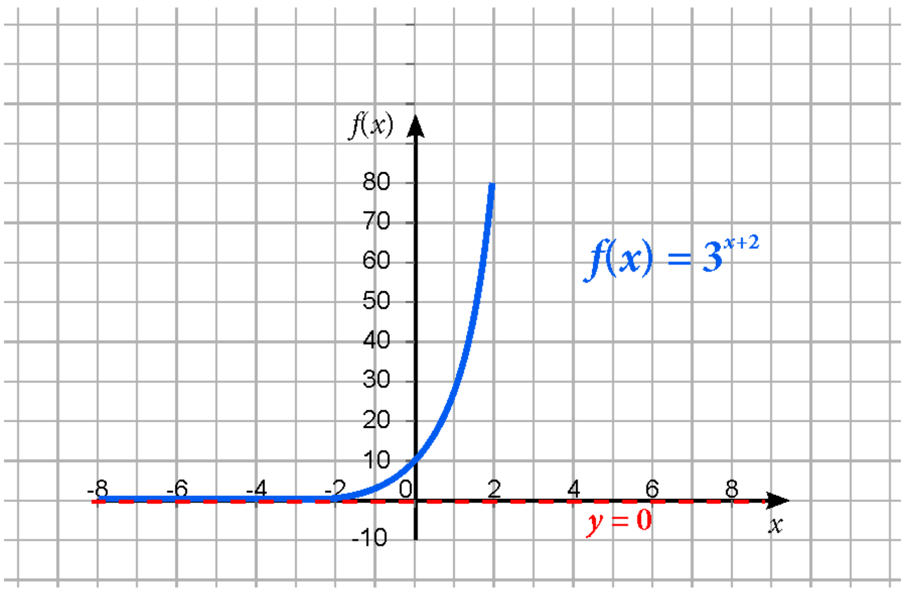
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = 1 + 3^x$
$y = 1$

b)



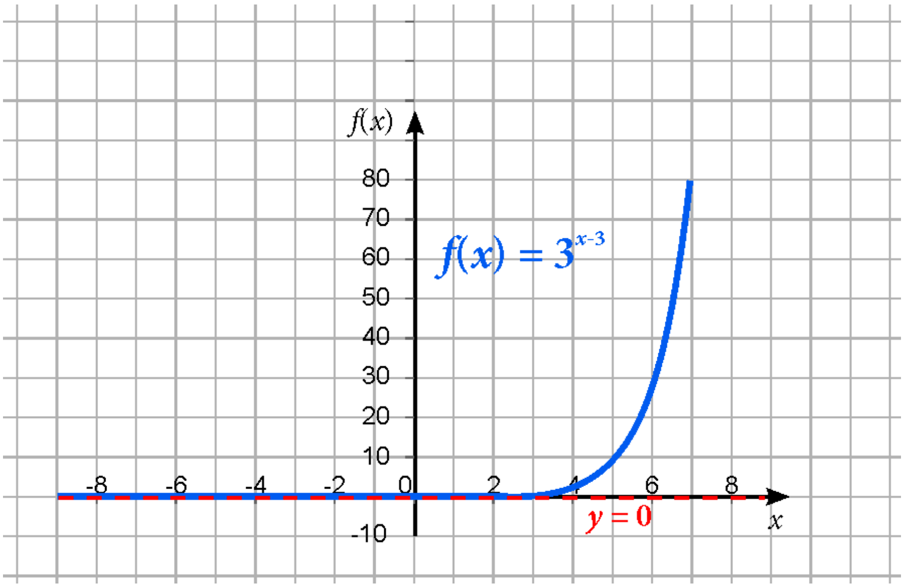
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = -4 + 3^x$
$y = -4$

c)



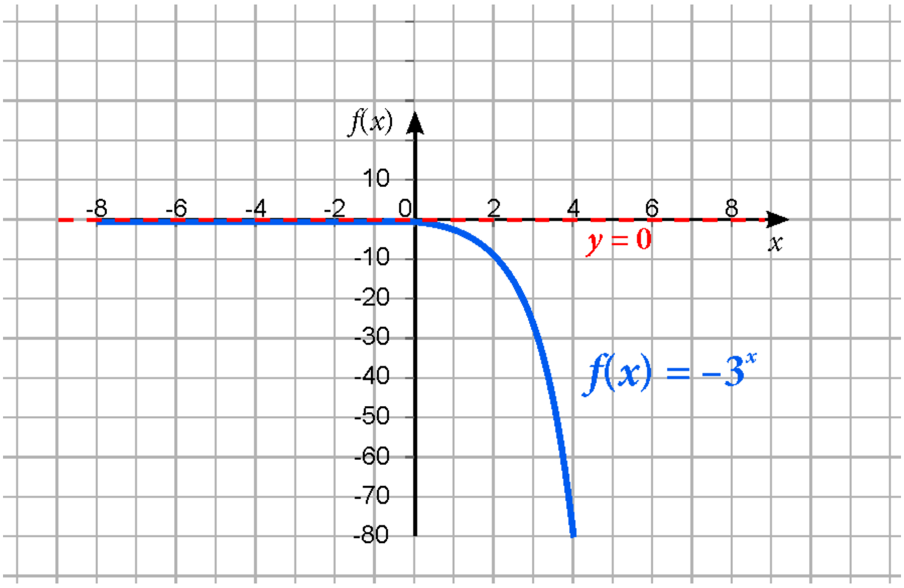
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = 3^{x+2}$
$y = 0$

d)



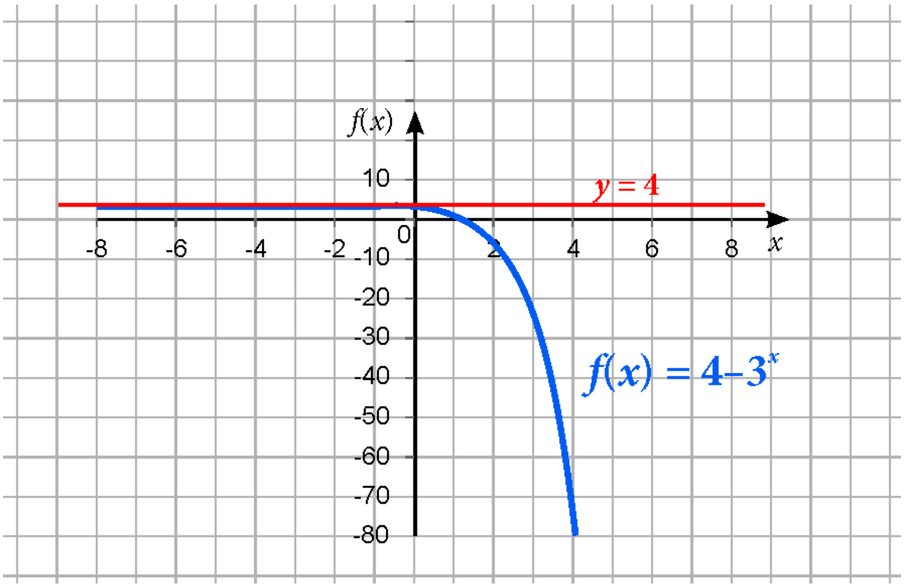
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$f(x) = 3^{x-3}$
$y = 0$

e)



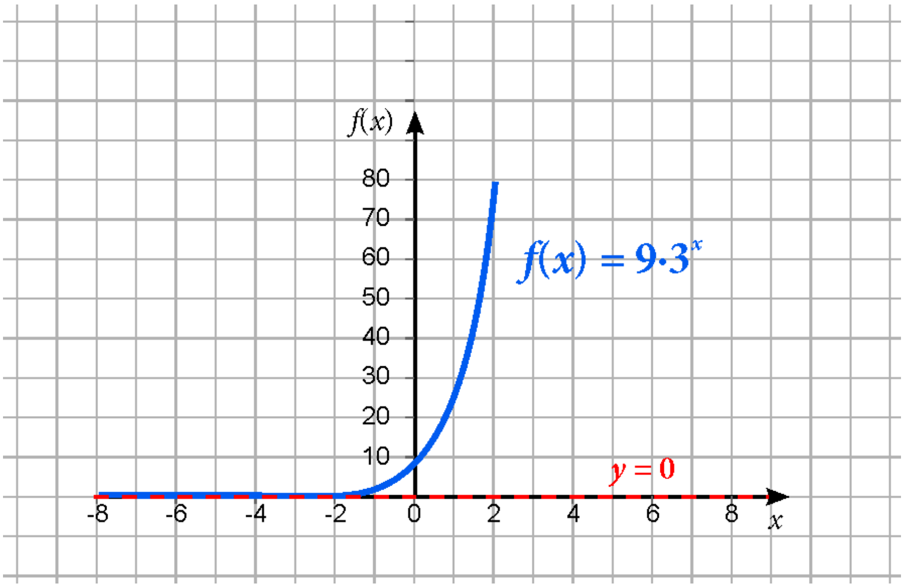
f(x)
10
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$y = 0$
$f(x) = -3^x$

f)



f(x)
10
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$y = 4$
$f(x) = 4-3^x$

g)



1.2.3. Dane są funkcje:

$$j:(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x-5 \quad k:(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \quad l:(x)=6^{x+4}$$

Które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) przyjmują tylko wartości dodatnie,

c) mają asymptotę $y=0$,

d) mają miejsca zerowe,

e) przecinają oś y.

Odpowiedź:

a) l b) k, l c) k, l

d) j e) j, k, l

1.2.4. Podaj równanie asymptoty funkcji $f(x)$, określonej wzorem:

a) $f(x)=5^{x-2}$ b) $f(x)=0{,}3^{x+3}-4$ c) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x-1$

d) $f(x)=5^x+5$ e) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}-4$

Odpowiedź:

a) $y=0$ b) $y=-4$ c) $y=-1$ d) $y=5$ e) $y=-4$

1.2.5. Napisz wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A = (3, \frac{1}{8})$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 2) - 1$.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x)$.

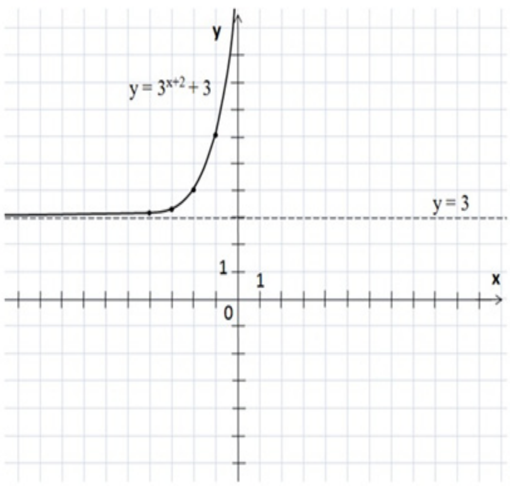
c) Dla jakich argumentów funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

Odpowiedź:

a) $a = \frac{1}{2}$, b) $x = -2$, c) $x > -2$

1.2.6. Narysuj wykres funkcji i określ jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność, miejsce zerowe oraz asymptotę).

$f(x) = 3^{x+2} + 3$



Dziedzina: $D = R$.

Zbiór wartości: $ZW = (3, +\infty)$.

Funkcja rosnąca.

Miejsce zerowe: brak.

Asymptota: $y = 3$.

1.3 Funkcja logarytmiczna i jej własności*

W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje postaci $y = \log_a x$. Takie funkcje nazywamy **funkcjami logarytmicznymi**.

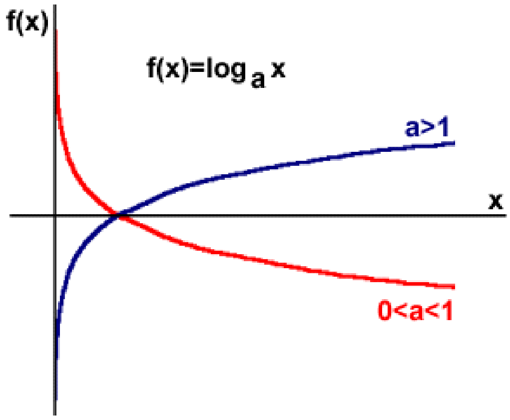
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję o postaci:

$f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

Dziedziną każdej funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

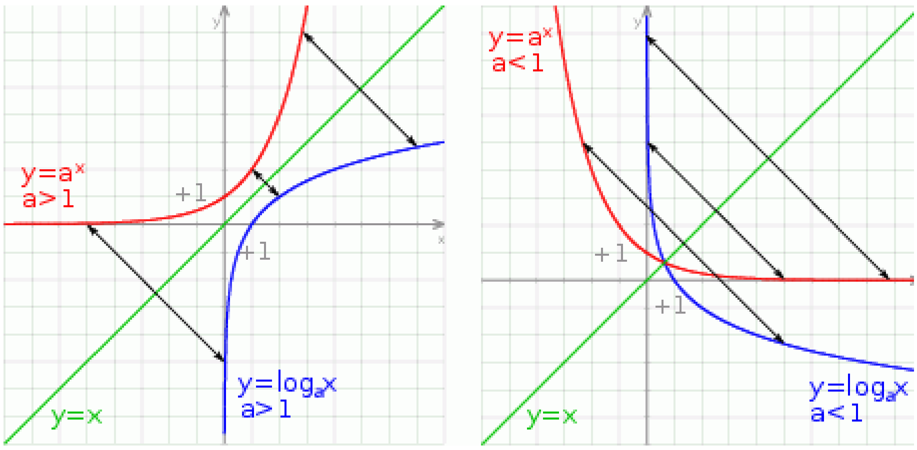
Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się **krzywą logarytmiczną**.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją malejącą dla $a \in (0,1)$, natomiast dla $a \in (1,+\infty)$ jest funkcją rosnącą.



Rysunek 1-8. Wykresy funkcji logarytmicznych

Funkcja logarytmiczna $\boldsymbol{f(x) = log_a\, x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = ax$. Wykresy tych funkcji są symetryczne względem prostej $\boldsymbol{f}(x) = x$.

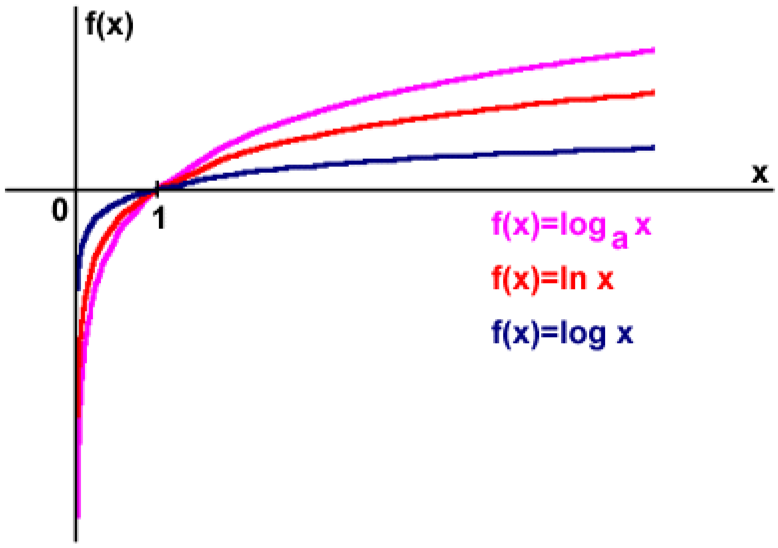


Rysunek 1-9. Funkcja wykładnicza a logarytmiczna

Ciekawostka

Wiadomo, że w zależności od podstawy, istnieją trzy grupy logarytmów:

- logarytm przy dowolnej podstawie – $\mathbf{log}_a\, x$
- logarytm przy podstawie dziesiętnej (***dziesiętne***) – $\mathbf{log}_{10}\, x = log\ x = lg\ x$
- logarytm przy podstawie z ***e (liczby Nepera e = 2,718281828...)*** – $\mathbf{log}_e\, x = ln\ x$



Rysunek 1-10. Wykres funkcji logarytmicznej przy podstawie z e

Symbol lnx jest symbolem logarytmu naturalnego i oznacza logarytm o podstawie

$a = e(e \approx 2{,}7)$.

$lnx = \log_e x$

$ln1 = 0$, bo $e^0 = 1$

$lne = 1$, bo $e^1 = e$

$ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$, bo $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

[redacted]

Funkcja logarytmiczna i jej własności*

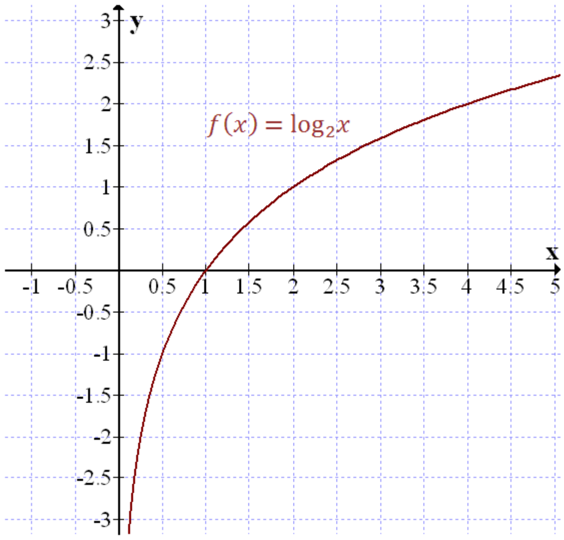
Przypadek I[5] – dla $a > 1$

Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_2 x$. Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x. Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

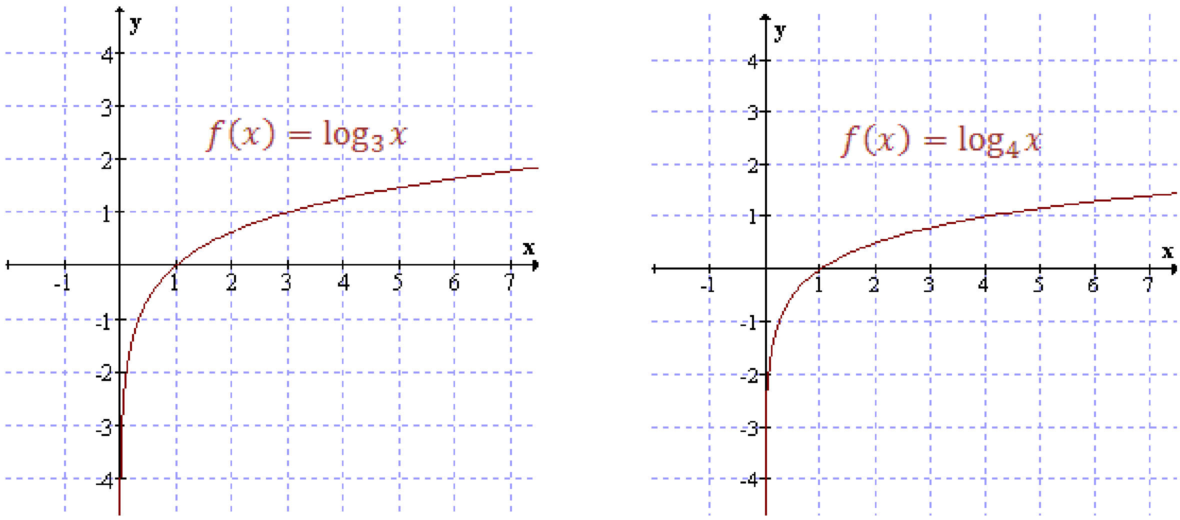
Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:

5 Przypadek I i II, www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php, 17.03.2013.



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a > 1$.

Przykłady:



Rysunek 1-11. Wykres funkcji logarytmicznych, $a > 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a > 1$:

1. Dziedzina: $D = R_+$
2. Zbiór wartości: $ZW = R$
3. Monotoniczność: funkcja jest $rosnąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (1; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: $x = 1$.
6. Oś OY jest asymptota pionowa, czyli prosta $y = 0$.

Przypadek II – dla $a < 1$:

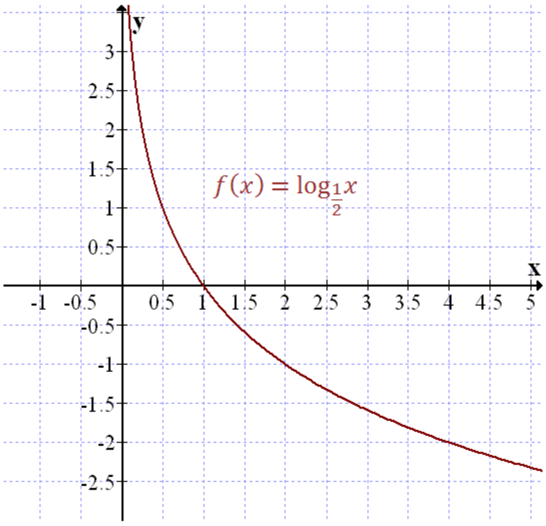
Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x.

Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

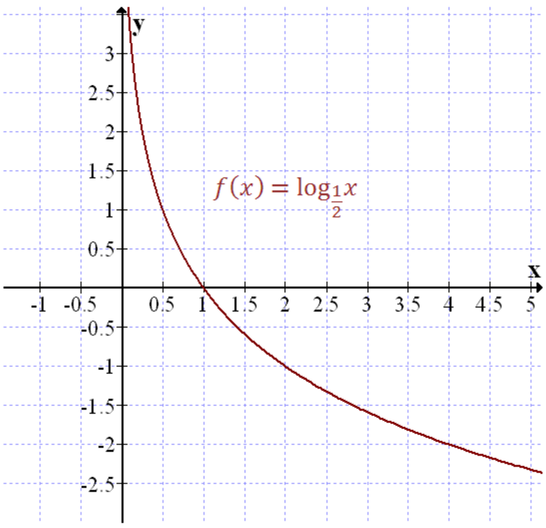
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	2	1	0	-1	-2

Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a < 1$.

Przykłady:



Rysunek 1-12. Wykresy funkcji logarytmicznych, $0 < a < 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a < 1$:

1. Dziedzina: $D = R_+$
2. Zbiór wartości: $ZW = R$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $malejąca$.

4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (0;\ 1)$

5. Miejsca zerowe: $x = 1$.

6. Oś OY jest asymptota pionowa, czyli prosta $y = 0$.

ZADANIE

1.3.1. Podaj współrzędne punktów symetrycznych względem prostej $y = x$ do punktów:

a) $A = (1{,}5), B = (4, -2), C = (-5, -1), D = (0, -3), E = (10{,}0)$

1.4 Szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznej*

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw.

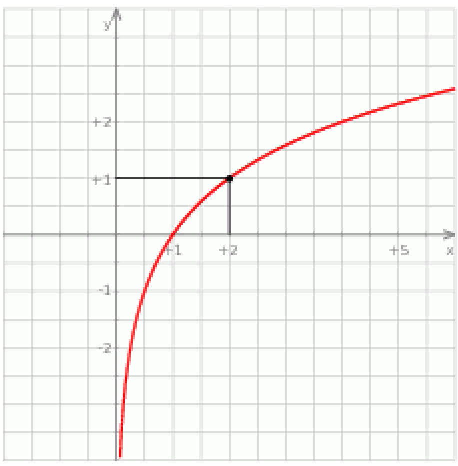
ZADANIA

1.4.1. Narysuj wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \log_2(x - 3)$ b) $y = \log_2(5 + x)$ c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = -4 + \log_2 x$ e) $y = \log_2(x + 1)$

1.4.2. Dany jest wykres funkcji logarytmicznej f.



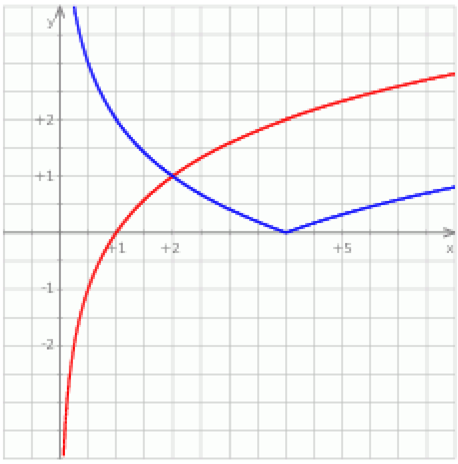
a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.

c) Odczytaj z rysunku zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są nie mniejsze od wartości funkcji f.

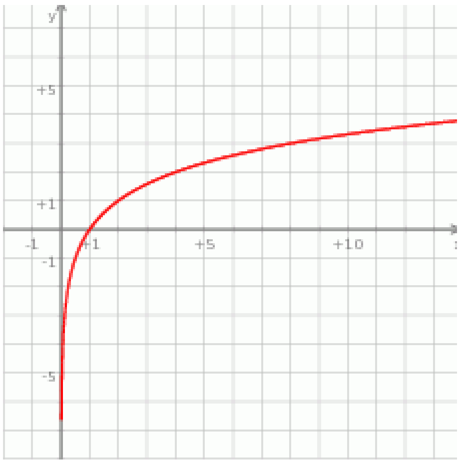
Odpowiedź:

a) $f(x) = \log_2 x$



b) $g(x) \geq f(x)$ dla $x \in (0, 2\rangle$.

1.4.3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.



a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p.

b) Oblicz $f(0{,}125)$.

c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x - 4)|$.

d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.

Odpowiedź:

a) $p = 2$ b) $\log_2(0{,}125) = -3$ c) Wykres rys. d) $x = 5$

1.5 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne w zjawiskach fizycznych i chemicznych

Teraz nauczę się:

- Posługiwać funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- Posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Zastosowanie funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym[6]

Przykład 1

Model wykładniczy

Niech funkcja $f(t), t \geq 0$, opisuje pewną wielkość zmieniającą się w czasie. Wielkość ta zmienia się zgodnie z **modelem wykładniczym**, jeśli:

$f(t) = b \cdot a^t$, gdzie $a > 0, a \neq 1$ i $t \geq 0$.

UWAGA!!!

Liczby a i b są na ogół wyznaczane doświadczalnie.

Jeśli $a > 0$, to mamy do czynienia ze wzrostem wykładniczym.

Wzrost wykładniczy jest wzrostem bardzo szybkim. Często nazywa się go wzrostem gwałtownym. Jest on znacznie szybszy nie tylko od wzrostu liniowego, opisanego przez funkcję $g(t) = at, a > 0$, ale także od wzrostów opisanych przez funkcje potęgowe

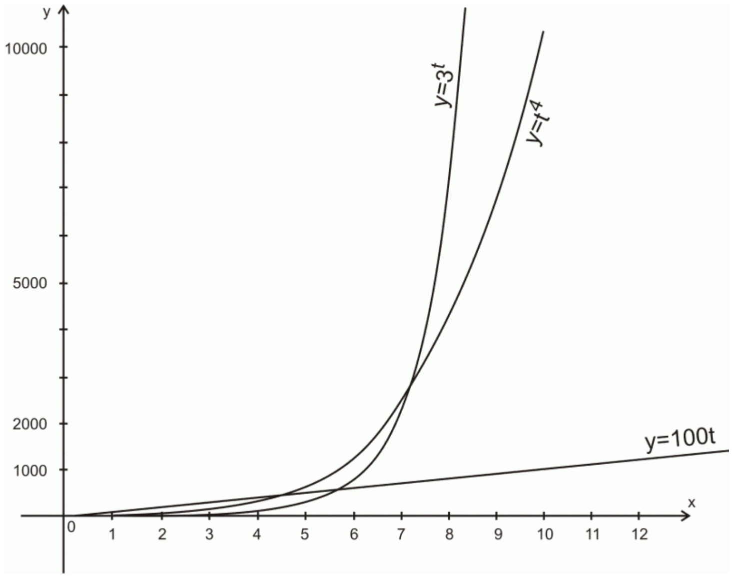
$h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

Dla małych wartości czasu wzrost wykładniczy może być nawet wolniejszy niż wzrost liniowy, ale począwszy od pewnego momentu (różnego dla różnych zjawisk), tempo wzrostu krzywej z modelu wykładniczego jest już znacznie większe niż w przypadku modeli opisywanych przez funkcje $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

UWAGA!!!

Funkcja rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, której wykres jest w tym przedziale „podobny" do wykresu funkcji wykładniczej, jest funkcją **rosnącą coraz szybciej** czyli tempo wzrostu funkcji jest szybkie.

6 www.megamatma.pl, 17.03.2013.



Rysunek 1-13. Wzrost wykładniczy

Z przedstawionego wykresu odczytujemy, że dla $t>8$ wartości funkcji $f(t)=3^t$ zaczynają przewyższać wartości funkcji $g(t)=100t$ i $h(t)=t^4$, i im większy jest czas, tym różnice pomiędzy wartościami tych funkcji są większe.

Dla $a \in (0;\ 1)$ mamy do czynienia ze spadkiem wykładniczym, czyli funkcja $f(t)=b \cdot a^t$, maleje coraz wolniej.

Dokonując pomiaru wartości wielkości opisanej ustalonym modelem wykładniczym, stwierdza się, że w stałych odstępach czasu zwiększają się one lub zmniejszają o ten sam procent.

Wiele zjawisk w przyrodzie odbywa się (przynajmniej w pewnej fazie ich trwania) według modelu wykładniczego. Są to między innymi: promieniotwórczość naturalna, wzrost lub spadek liczby populacji, stygnięcie ciał itd. Omówimy je w kolejnych przykładach i zadaniach.

Funkcję $f(t) = ba^t$ można przedstawić na wiele sposobów, tzn. można stosować do jej opisu różne podstawy a funkcji wykładniczej.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich i różnych od jedynki liczb a i c istnieje taka liczba $k \neq 0$, że funkcje $f(t) = ba^t$ i $g(t) = bc^{kt}$ są równe, tzn. $ba^t = bc^{kt}$, dla dowolnego $t > 0$.

Uzasadnienie tego twierdzenia jest bardzo proste.

Należy znaleźć liczbę k, która dla każdej wartości $t \geq 0$, spełnia warunek $a^t = c^{kt}$.

Korzystając z własności potęg, otrzymujemy:

$a^t = (c^k)^t$ dla każdego $t \geq 0$.

Stąd $a = c^k$.

Korzystając z określenia logarytmu, obliczamy: $k = \log_c a$.

$k = log_c a.$

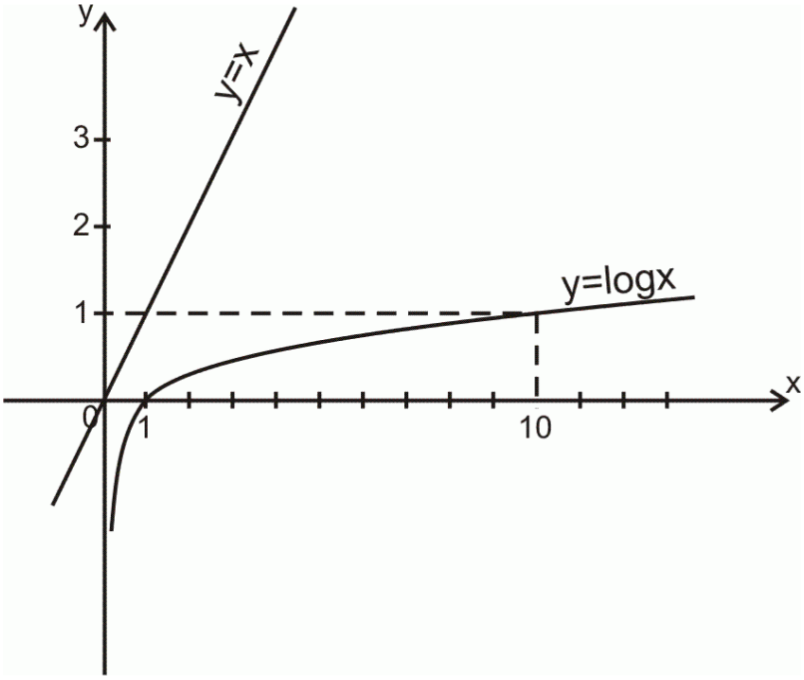
A więc istnieje liczba $k = \log_c a$, taka że funkcję $f(t)$ można zastąpić funkcją $g(t)$.

Zastosowanie funkcji logarytmicznych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w **kontekście praktycznym**[7]

Przykład 2

Skala logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x, a > 1, x > 0$, jest funkcją rosnącą. Jej wzrost jest jednak bardzo powolny, wolniejszy nawet od wzrostu liniowego.



Rysunek 1-14. Wykres funkcji $log x < x$ dla $x > 0$

Jeśli zakres wartości pewnej wielkości jest dodatni i bardzo szeroki, to wygodniej jest go podawać w skali.

Podanie konkretnej wartości w pewnej wielkości oddaje jej obraz tylko wtedy, gdy możemy ją porównać z innymi wartościami, a szczególnie z najmniejszą wartością ω_0.

Iloraz $\frac{\omega}{\omega_0}$ mówi nam, ile razy wartość ω jest większa od najmniejszej wartości ω_0 przyjmowanej przez daną wielkość. Iloraz ten jest liczbą bezwymiarową i dużą przy szerokim zakresie wartości.

Zlogarytmowanie ilorazu $\frac{\omega}{\omega_0}$ prowadzi do tzw. **skali logarytmicznej** danej wielkości. Do logarytmowania używa się na ogół logarytmu dziesiętnego lub naturalnego.

Skala logarytmiczna jest więc przedstawieniem wartości w pewnej wielkości, np. natężenia, w następującej postaci podanej z użyciem logarytmu: $klog \frac{\omega}{\omega_0}$ lub $k\ ln \frac{\omega}{\omega_0}$, gdzie: k – stała charakterystyczna dla zjawiska mierzonego przez wartości ω, ω_0– najmniejsza z wartości przyjmowanych przez ω.

7 www.megamatma.pl, 17.03.2013.

Mimo że $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ i $k\ ln\frac{\omega}{\omega_0}$ są liczbami bezwymiarowymi, to często wprowadza się dla nich specjalne jednostki, właściwe dla danej dziedziny.

Przykładami skal logarytmicznych są: **skala decybelowa w akustyce, skala Richtera określająca wielkości wstrząsów sejsmicznych, skala pH czy skala wielkości gwiazdowych.**

Wprowadzenie skali logarytmicznej jest nie tylko pomysłem matematycznym na to, aby bardziej przejrzyście przedstawić pewne dane.

Stwierdzono doświadczalnie, że nasze zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

Prawo Webera-Frechnera mówi, że wartość reakcji na bodźce takich zmysłów, jak wzrok, słuch czy poczucie temperatury jest proporcjonalna do logarytmu tego bodźca.

Przykład 3

Poziom głośności dźwięku

Źródła dźwięku wysyłają dźwięki o różnym natężeniu. Dźwięki rozchodzą się w postaci fal dźwiękowych. Jeśli kilka źródeł dźwięku wysyła jednocześnie dźwięki, to ich natężenia sumują się.

Natężenie dźwięku I jest ilością energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu i przechodzącej przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej. Jednostką natężenia dźwięku jest $\frac{W}{m^2}$ (wat na metr kwadratowy). Natężenie dźwięku odpowiadające tzw. progowi słyszalności, jest równe $I_0 = 10 - 12\frac{W}{m^2}$. Natężenia innych słyszalnych dźwięków są większe od I_0. Natężenie **szeptu** jest około 100 razy większe niż I_0, zaś natężenie dźwięku towarzyszące **wybuchowi petardy** to już wielkość rzędu $10^4\frac{W}{m^2}$, czyli jest ono 10^{16} razy większe niż I_0.

Przy tak szerokim zakresie wartości natężenia dźwięku wprowadzenie skali logarytmicznej jest bardzo uzasadnione. W skali tej logarytmujemy iloraz $\frac{I}{I_0}$. Wielkość obliczoną za pomocą logarytmu dziesiętnego z ilorazu $\frac{I}{I_0}$ nazywa się **poziomem natężenia dźwięku** lub **poziomem głośności dźwięku.** Oznacza się ją literą L.

I tak przyjęto:

Wzór

Poziom głośności dźwięku:

$L = 10log\frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ – poziom słyszalności, I – natężenie dźwięku.

Jednostkami poziomu głośności są **bel i decybel**, oznaczane symbolami **B** i **dB.**

Dźwięk ma poziom głośności równy 1B, jeśli jego natężenie jest równe $10I_0$.

Natomiast $1\ dB = 0{,}1\ B$.

Decybele są powszechniej używanymi jednostkami poziomu natężenia dźwięku.

ZADANIA

1.5.1. Aktywność źródła promieniotwórczego określa liczbę atomów, która uległa rozpadowi w jednostce czasu **A** $= \frac{\Delta N}{\Delta t}$. Jednostką aktywności jest bekerel **(1 Bq** $= \frac{1}{s}$). W zamieszczonej poniżej tabeli zamieszczono wyniki pomiarów aktywności próbki pewnego pierwiastka promieniotwórczego.

t (h)	0	480	960	1200	1950
A (10^3Bq)	5	1,5	0,5	0,25	0,05

Przedstaw na wykresie zależność aktywności próbki tego pierwiastka od czasu.

1.5.1. Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu wapnia wynosi 6 miesięcy. W chwili początkowej próbka zawierała 40 mg wapnia. Oblicz, ile wapnia próbka zawierała:

a) dwa lata wcześniej,

b) po trzech latach.

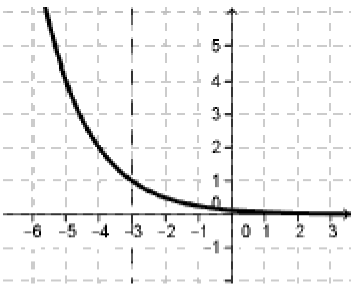
Odpowiedź:

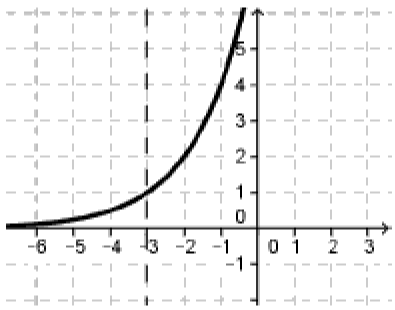
a) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{2}{0,5}} = 40$ mg $\cdot\, 2^4 = 640$ mg

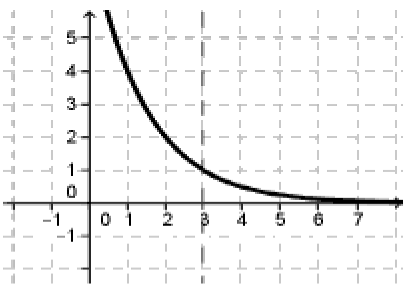
b) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{-3}{0,5}} = 40$ mg $\cdot\, 2^{-6} = 0,625$ mg

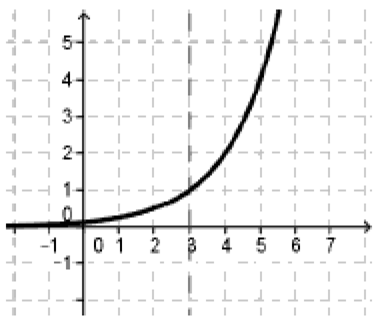
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[8] Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-3}$ przedstawiony jest na rysunku:


A.


C.


B.


D.

2.[9] Zbiorem wartości funkcji f, określonej wzorem $f(x) = 3^{x+2} - 3$, jest zbiór:

a) $(-2, \infty)$ b) $(-3, -2)$ c) $(3, \infty)$ d) $(-3, \infty)$

3. Wartością funkcji $f(x) = 2^x$ jest liczba:

a) -8 b) -4 c) 0 d) 3

8 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 11.03.2013.
9 Zadania 2-9: zaczerpnięte http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze

4. Zbiorem wartości funkcji $(x) = 2^x + 3$ jest przedział:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $\langle 0, +\infty)$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-3, +\infty)$

5. Funkcją malejącą jest funkcja:

a) $f(x) = (0{,}5)^{x-1}$ b) $f(x) = (0{,}5)^{-x}$ c) $f(x) = -(0{,}5)^x$ d) $f(x) = (0{,}5)^{2-x}$

6. Funkcja $f(x) = 9^x$ dla argumentu $x = -\frac{3}{2}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{3^3}$ b) 27 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$ d) $\frac{1}{81}$

7. Funkcja $(x) = 8^x$ dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $0{,}25$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ d) 4

8. Dla jakiego argumentu $y = 2^x$ przyjmuje wartość 64?

a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 4$

Zadania zamknięte, wydawnictwo Nowa Era[10]

9. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = x$ przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, wynosi:

a) $2\sqrt{2}a$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{8a}$ d) $a\sqrt{2}$

10. Punkt $P =$ (-3, 1/8) należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{-x}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

11. Wskaż funkcję rosnącą:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

12. Punkt $P = \left(\log_2 \frac{1}{4};\ \log_{\frac{1}{3}} 81\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 2x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = -2x$

ZADANIA OTWARTE

1. (**5 pkt**) Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - a) + b$. Wyznacz wartości parametrów a i b, jeśli wiesz, że dziedziną funkcji jest przedział $(5, +\infty)$ i do wykresu należy punkt $A = \left(5\frac{1}{8}, 9\right)$. Podaj wzór tej funkcji.

---

10 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf, 11.03.2013.

2 Stereometria

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- Obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- Zamieniać jednostki objętości.

Zamiana jednostek objętości:

$1cm^3 \rightarrow 1\,000\,mm^3$

$1dm^3 (1\ litr) \rightarrow 1000\ cm^3$

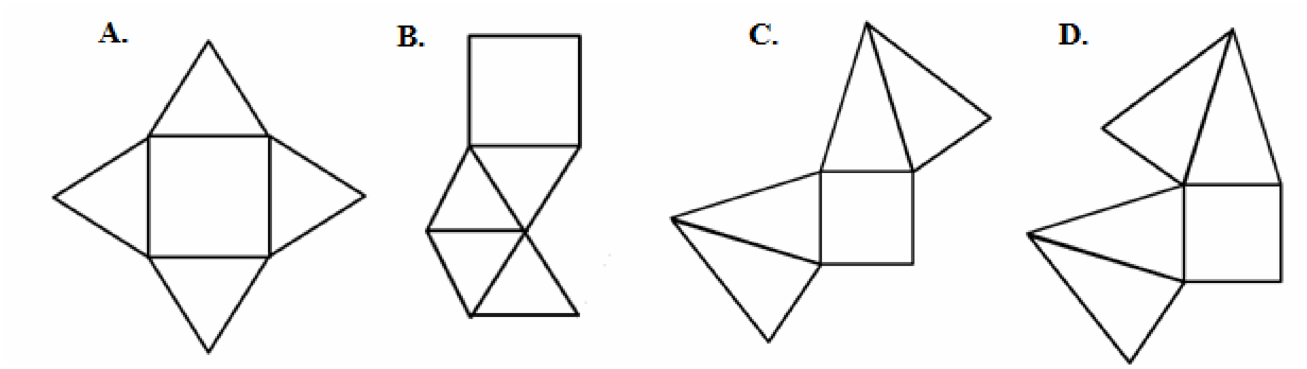
$1cm^3 \rightarrow 1000\,mm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,mm^3$

$1m^3 \rightarrow 1\,000\,dm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,cm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,000\,mm^3$

$1\ hektolitr \rightarrow 100\ litrów \rightarrow 100dm^3$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Który rysunek nie przedstawia siatki ostrosłupa czworokątnego?



Zad.2. Podstawą graniastosłupa prawidłowego nie może być:

a) kwadrat
b) sześciokąt foremny
c) prostokąt
d) trójkąt równoboczny

Zad.3. Bok sześcianu ma długość 6 cm, więc długość jego przekątnej wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

Zad.4. Tworząca stożka ma długość 13 cm, a jego wysokość 5 cm. Z tego wynika, że promień podstawy ma długość:

a) $12\ cm$ b) $10\ cm$ c) $6\ cm$ d) $13\ cm$

Zad.5. Jeśli średnica kuli ma 8 cm, to pole powierzchni całkowitej tej kuli wynosi:

a) $16\ \pi$ b) $64\ \pi$ c) 32π d) $256\ \pi$

Zad.6. Przekrojem poprzecznym walca jest:

a) prostokąt b) kwadrat c) kula d) koło

Zad.7. Objętość kuli wynosi $36\pi\ cm^3$, jej promień ma długość:

a) $9\ cm$ b) $3\ cm$ c) $6\ cm$ d) $27\ cm$

Zad.8. Wiedząc, że wysokość walca wynosi $10\ cm$, a promień jego podstawy $0{,}4\ dm$, to pole jego podstawy jest równe:

a) $16\pi\ cm^2$ b) $1{,}6\pi\ dm^2$ c) $16\pi\ dm^2$ d) $0{,}16\pi\ cm^2$

Zad.9. Pole powierzchni sześcianu jest równe $294\ cm^2$. Krawędź tego sześcianu wynosi:

a) 7 b) 4 c) 8 d) 6

Zad.10. Które zdanie jest fałszywe:

a) $5\ cm^2 = 500\ mm^2$ b) $1\ ha = 10000\ m^3$

c) $3000\ mm^2 = 30\ cm^2$ d) $1\ a = 100\ m^2$

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	C	A	B	D	B	D	A	B

ZADANIA OTWARTE

1. Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 108 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli krawędź boczna ma długość 16 cm.

2. Ile litrów wody zmieści się w akwarium o wymiarach $3{,}5\ dm\ \times 0{,}6\ m\ \times 55\ cm$? Odpowiedź wyraź w postaci liczby naturalnej.

3. Oblicz wysokość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach 4 i 5, a pole powierzchni całkowitej wynosi 166.

4. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}\ cm$.

5. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jej pole powierzchni jest równe$1440\pi\ cm^2$.

Odpowiedź:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	a – krawędź podstawy b – krawędź boczna $3a + 3b = 108$ $3a + 3 \cdot 16 = 108$ $3a = 60$ $a = 20$ **Odpowiedź:** Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 20.
2	$a = 3{,}5\ dm$ $b = 0{,}6\ m = 6\ dm$ $c = 55\ cm = 5{,}5\ dm$ $V = a \cdot b \cdot c = 3{,}5\ dm \cdot 6\ dm \cdot 5{,}5\ dm = 115{,}5\ dm^3 = 115{,}5\ l$ **Odpowiedź:** W akwarium zmieści się $115\ l$ wody.
3	a, b – krawędzie podstawy prostopadłościanu x – wysokość prostopadłościanu $a = 4, b = 5\ , P_c = 166$ $2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x = 166$ $18x = 126 \quad \Rightarrow x = 7$ **Odpowiedź:** Wysokość prostopadłościanu wynosi 7.
4	$d = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow a = 5$ $V = a^3 = 5^3 = 125$ $P_c = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ **Odpowiedź:** Objętość sześcianu wynosi $125\ cm^3$, a jego pole powierzchni całkowitej $150\ cm^2$.
5	R – promień kuli $P_c = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1440\pi\ /: 4\pi$ $r^2 = 360$ $r = 6\sqrt{10}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(6\sqrt{10}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 10\sqrt{10} = 2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$ **Odpowiedź:** Objętość kuli wynosi $2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$.

2.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni

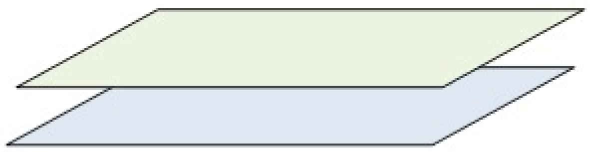
Teraz nauczę się:

- Określać wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni;
- Określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

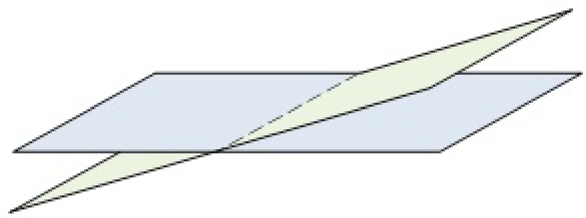
Możliwe są następujące przypadki wzajemnego położenia dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeniach.

Płaszczyzny równoległe



Rysunek 2-1. Płaszczyzny równoległe

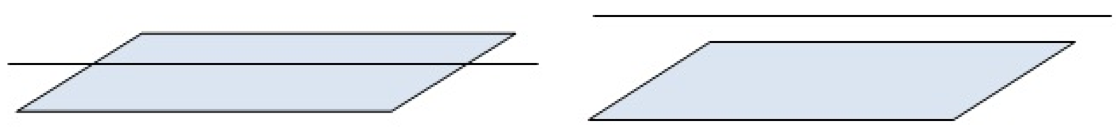
Płaszczyzny przecinające się



Rysunek 2-2. Płaszczyzny przecinające się

Prosta i płaszczyzna mogą znajdować się względem siebie w następującym położeniu:

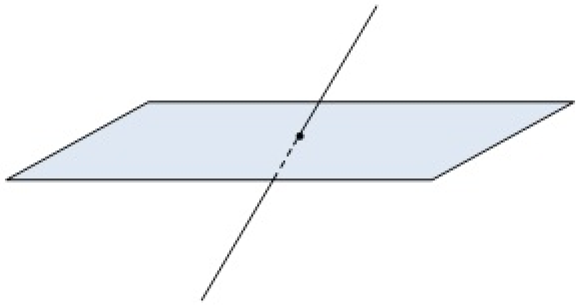
Prosta równoległa do płaszczyzny



Prosta zawiera się w płaszczyźnie *Prosta nie zawiera się w płaszczyźnie*

Rysunek 2-3. Prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta przecina płaszczyznę

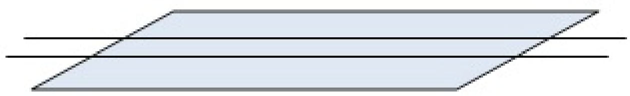


Rysunek 2-4. Prosta przecinająca płaszczyznę

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

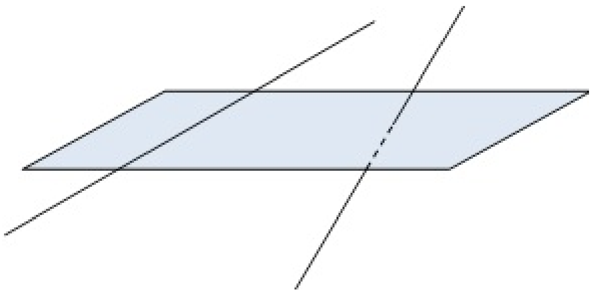
Dwie proste w przestrzeni mogą być:

- Równoległe



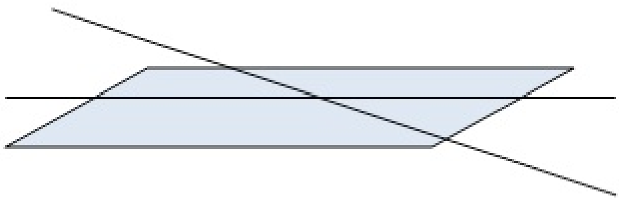
Leżą na płaszczyźnie
i nie mają punktów wspólnych

- Skośne



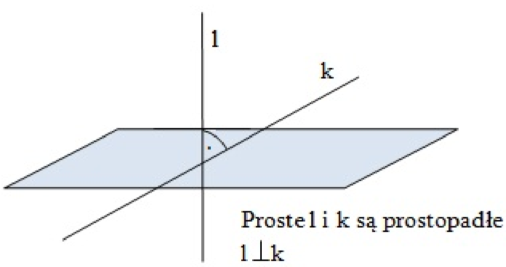
Leżą na różnych płaszczyznach i nie mają punktów wspólnych

- Przecinające się

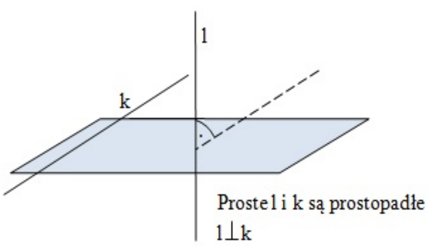


Leżą na jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny

- Prostopadłe



Proste prostopadłe przecinające się

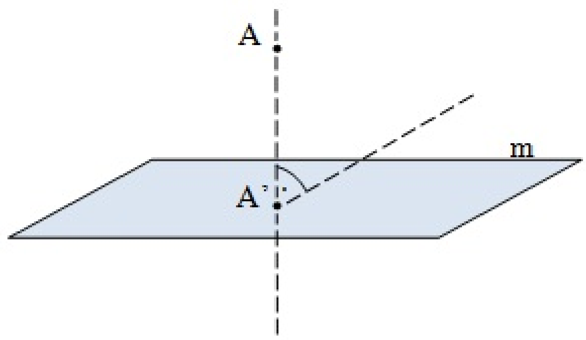


Proste prostopadłe skośne

Rysunek 2-5. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Rzut prostokątny na płaszczyznę

Rzut prostokątny danego punktu na płaszczyznę jest punktem, jaki powstanie, gdy przez dany punkt i płaszczyznę poprowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny.



Punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę m.

Rysunek 2-6. Rzut prostokątny na płaszczyznę

ZADANIA

2.1.1 Wskaż w swoim otoczeniu:

a) proste przecinające się

b) proste równoległe

c) proste skośne

2.1.2 Wskaż w klasie:

a) płaszczyznę i prostą przecinającą tę płaszczyznę

b) płaszczyzny równoległe

c) płaszczyzny przecinające się

d) płaszczyznę i prostą do niej równoległą

2.1.3 Przez dany punkt poprowadź płaszczyznę prostopadłą do danej prostej. Rozpatrz dwa przypadki.

Odpowiedź:

1. Dany punkt C leży na prostej AB. Przez daną prostą przesuńmy dwie dowolne płaszczyzny i z punktu C wystawmy dwie prostopadłe do AB: CD i CE położone na tych płaszczyznach. Wtedy płaszczyzna, wyznaczona przed CD i CE, będzie płaszczyzną szukaną.
2. Dany punkt D leży poza prostą AB. Prosta AB i punkt D, poza nią położony, wyznaczają płaszczyznę P. Poprowadźmy na niej $DC \perp AB$. Następnie przez prostą AB przesuńmy

dowolną płaszczyznę Q i poprowadźmy na niej $CE \perp AB$, wtedy szukaną płaszczyzną jest płaszczyzna R wyznaczona przez CD i CE.

2.1.4 Wykreślić odcinek prostopadły do dwóch prostych skośnych.

Odpowiedź:

Dane są dwie proste skośne AB i CD. Przez dowolny punkt K prostej CD poprowadźmy $A'B' \parallel AB$ i przez dwie przecinające się proste CD i $A'B'$ przesuńmy płaszczyznę P.

Jeżeli teraz z dowolnego punktu E prostej AB poprowadzimy $EF \perp P$, a przez punkt F na tej płaszczyźnie równoległą do $A'B'$, która przetnie CD w punkcie G, to odcinek GH równoległy do EF będzie żądanym odcinkiem.

Istotnie, odcinek HG, jako prostopadły do płaszczyzny P, jest prostopadły do prostej CD położonej na tej płaszczyźnie. Z drugiej strony odcinek $GH = FE$ jest prostopadły również do AB, a więc jest prostopadły do obu danych prostych.

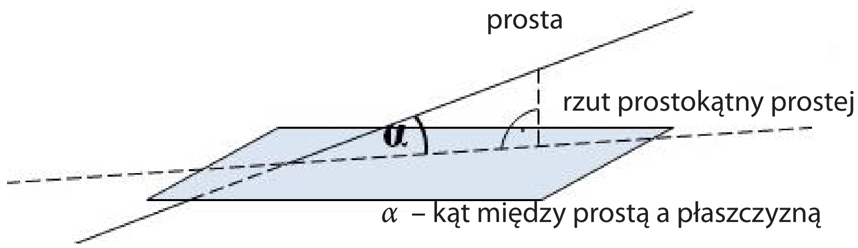
2.2 Kąty między płaszczyznami i w figurach przestrzennych

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać kąty między płaszczyznami;
- Rozpoznawać kąty między ścianami i krawędziami w graniastosłupach i ostrosłupach.

Kąt między prostą a płaszczyzną

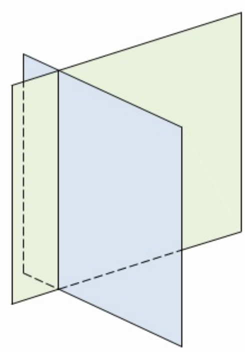
Kąt między prostą a płaszczyzną znajduje się między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



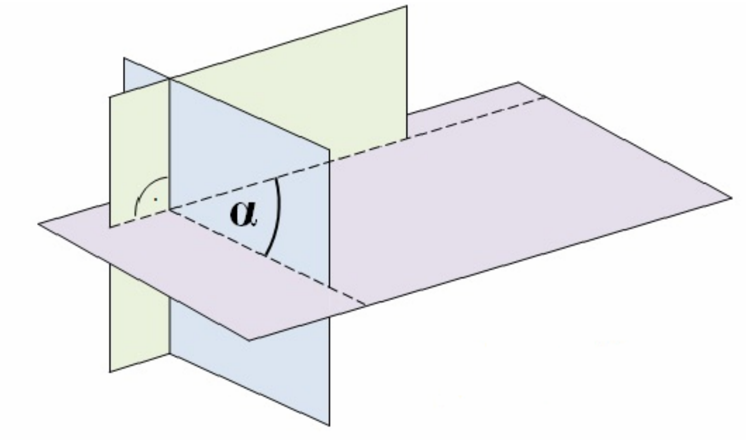
Rysunek 2-7 Kąt między płaszczyzną a prostą

Kąt dwuścienny

To kąt zawierający się pomiędzy dwoma przecinającymi się płaszczyznami:



Kąt dwuścienny wyznaczamy, przecinając obie płaszczyzny trzecią, która jest do nich prostopadła.



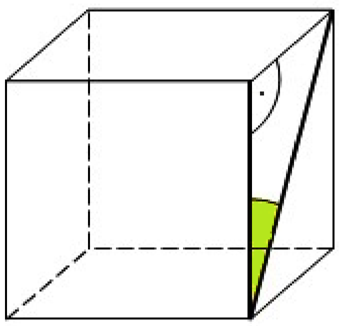
Rysunek 2-8. Kąt dwuścienny

Kąty w bryłach

Często w zadaniach związanych z bryłami pojawiają się wartości kątów między określonymi odcinkami lub ścianami. O prawidłowym rozwiązaniu decyduje wtedy, czy dobrze umiejscowiliśmy dany kąt, a niestety w tym miejscu często pojawiają się błędy. Warto więc wiedzieć, gdzie znajdują się dane kąty.

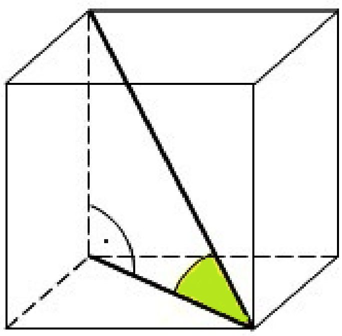
Graniastosłupy

- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną (wysokością)



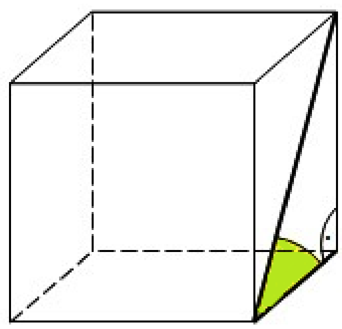
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy czworokąt)



Wysokość graniastosłupa wraz z przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa tworzą trójkąt prostokątny.

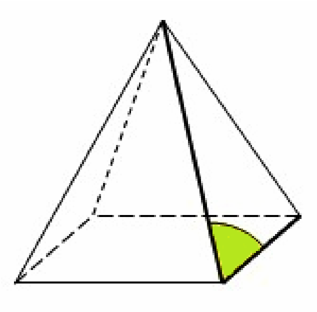
- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy



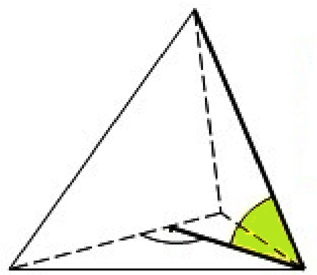
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

Ostrosłupy

- kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

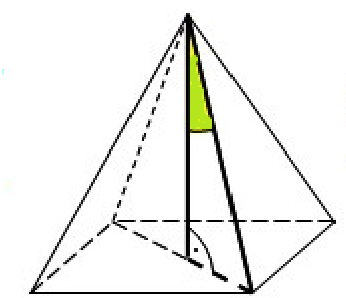


- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie mamy trójkąt równoboczny)



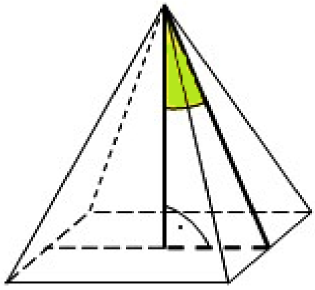
Kąt znajduje się między krawędzią boczną ostrosłupa a wysokością podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



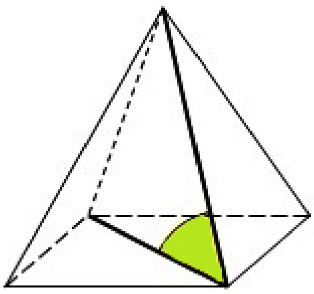
Krawędź boczna i wysokość ostrosłupa wraz z połową przekątnej podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



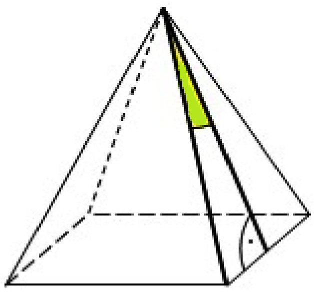
Wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej wraz z połową odcinka, którego długość stanowi połowę długości podstawy, tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



Kąt znajduje się między krawędzią boczną a przekątną podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością ściany bocznej



Krawędź boczna i wysokość ściany bocznej wraz z połową krawędzi podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

ZADANIA

2.2.1 Narysuj sześcian i zaznacz w nim kąt nachylenia:

a) przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

2.2.2 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{3}\ cm$, a wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{3}\ cm$. Oblicz miarę kąta nachylenieaściany bocznej do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

2.2.3 Wskaż w klasie kąty dwuścienne. Podaj miary tych katów.

2.2.4 Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2.5 Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 6, a długość krawędzi bocznej jest równa $2\sqrt{15}$15. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej piramidy do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

2.2.6 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

2.2.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym zaznacz kąt liniowy kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi.

Odpowiedź: Ostrosłup oznacz literami $ABCS$. Z wierzchołka A i B zaznacz proste prostopadłe do krawędzi bocznej CS przecinające się w punkcie D. Kąt ADB jest kątem liniowym kąta dwuściennego.

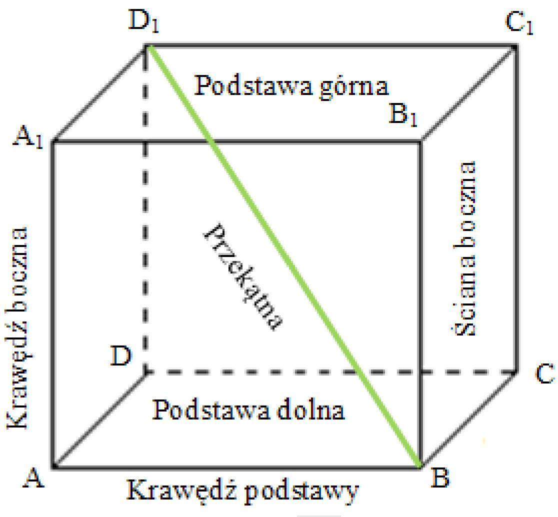
2.3 Graniastosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów;
- Rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Przypomnijmy najpierw najważniejsze pojęcia dotyczące graniastosłupów.

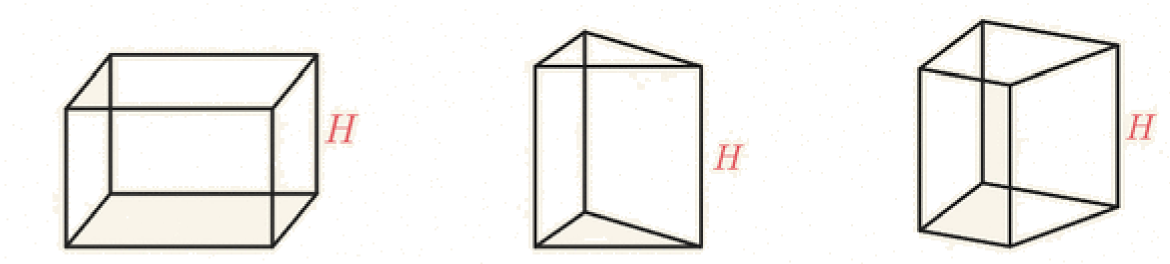
Graniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach, zwanych podstawami graniastosłupa, i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi podstawami są do siebie równoległe.



Rysunek 2-9. Graniastosłup prawidłowy

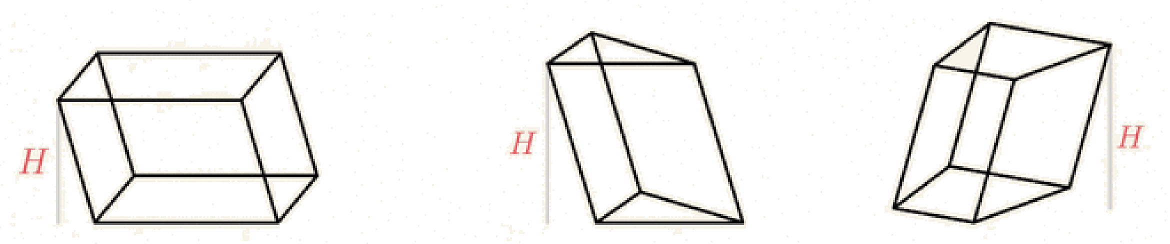
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Przykłady graniastosłupów prostych



Rysunek 2-10. Graniastosłupy proste

Przykłady graniastosłupów pochyłych



Rysunek 2-11. Graniastosłupy pochyłe

Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego dwóch podstaw i polu powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

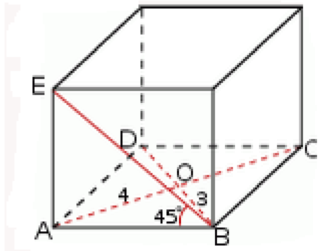
Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości.

$$V = P_p \cdot H$$

Przykład 1

Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych długości $6\ cm$ i $8\ cm$, którego przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze $45°$.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:



Z tego wynika, że $|AE| = |AB| = 5cm$.

Możemy już obliczyć objętość graniastosłupa.

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ cm^2$

$V = P_p \cdot H = 24\ cm^2 \cdot 5\ cm = 120\ cm^3$

Policzymy jeszcze pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

$P_b = 4 \cdot |AB| \cdot |AE| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100\ cm^2$

$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 24\ cm^2 + 100\ cm^2 = 148\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $120\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $148\ cm^2$.

ZADANIA

2.3.1 W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem o polu $P = 400\ cm^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Odpowiedź: $V = 500\ cm^3$, $P_c = 450\ cm^2$.

2.3.2 Oblicz objętość prostopadłościanu, jeżeli kąt między jego przekątną o długość $10\ cm$ a podstawą ma miarę $60°$, a jedna z krawędzi podstawy ma długość $4\ cm$.

Odpowiedź: $V = 60\sqrt{3}\ cm^3$.

2.3.3 Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $a = 4\ cm$. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Odpowiedź: $16\sqrt{3}\ cm^2$.

2.3.4 Kąt zawarty między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą ma miarę $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli jej wysokość ma długość $10\ cm$, a szerokość podstawy wynosi $6\ cm$.

Odpowiedź: $P_c = 376\ cm^2$.

2.3.5 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$.

2.3.6 Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Wyznacz sinus kąta nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.3.7 Oblicz skalę podobieństwa dwóch graniastosłupów prawidłowych czworokątnych. Pierwszy z nich ma wysokość $2\ cm$ i objętość $18\ cm^3$ oraz jest podobny do graniastosłupa, którego krawędź podstawy ma długość $1\ cm$.

Odpowiedź: $k = 3$.

2.3.8 Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $8\ cm$ i kącie między ramionami miary $120°$. Przekątna mniejszej ściany bocznej graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Wyznacz objętość graniastosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{128\sqrt{3}}{9}$.

2.3.9 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego $ABCA_1B_1C_1$, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $|AC| = 6\ cm, |BC| = 8\ cm$, a przekątna AB_1 ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α o mierze $60°$.

Odpowiedź: $P_c = 48(5\sqrt{3}+1)\ cm^2, V = 240\sqrt{3}\ cm^3$.

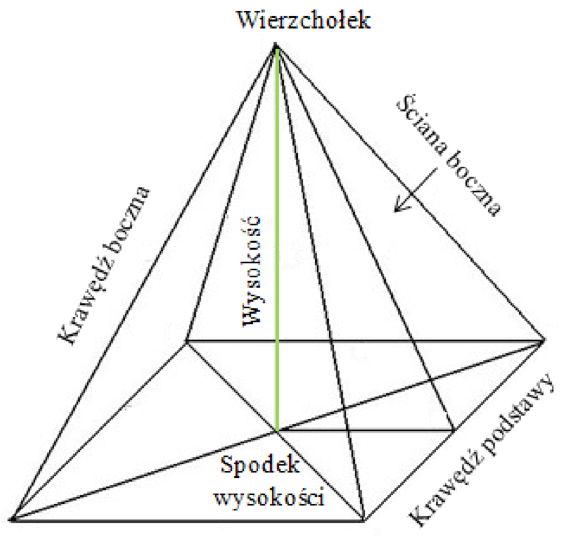
2.4 Ostrosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości ostrosłupów;
- Rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami a płaszczyznami (między krawędziamiai ścianami, przekątnymi a ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Ostrosłup – wielościan, którego wszystkie ściany prócz podstawy są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

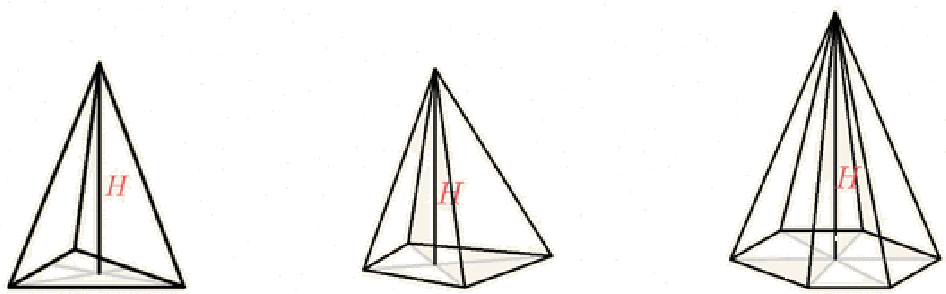
Wysokość ostrosłupa jest to odległość od wierzchołka do płaszczyzny podstawy. Punkt będący rzutem wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywa się spodkiem wysokości.



Rysunek 2-12. Ostrosłup

Ostrosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a jego wysokość pada na środek podstawy. Ściany ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi.

Przykłady ostrosłupów



Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

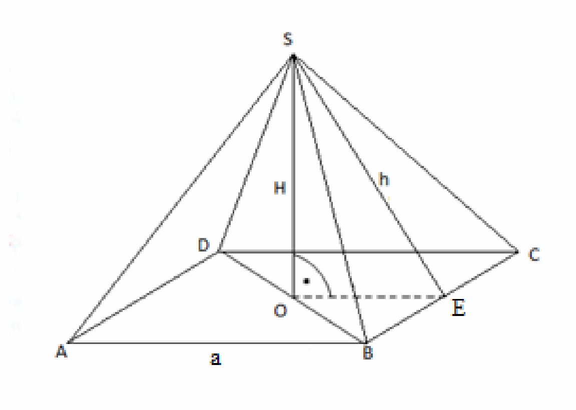
Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynowi pola podstawy i wysokości.

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Przykład 1

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy $a = 6\ cm$, a wysokość ściany bocznej $h = 5\ cm$. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:



Obliczamy wysokość H ostrosłupa, korzystając z trójkąta prostokątnego OES.

$|OE| = \frac{1}{2}a = 3\ cm$

$H^2 = h^2 - |OE|^2$

$H^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow H = 4\ cm$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}6^2 \cdot 4 = 48\ cm^3$

$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 96\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa wynosi $48\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $96\ cm^2$.

ZADANIA

2.4.1 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli jego wysokość ma długość $6\ cm$, a kąt między wysokością a krawędzią boczną ma miarę $30°$.

Odpowiedź: $V = 48\ cm^3$**.**

2.4.2 Kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę $60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość $12\ cm$.

Odpowiedź: $P_b = 96\sqrt{3}\ cm^2$.

2.4.3 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS_o$ o podstawie $ABCD$. Pole trójkąta ASC jest równe 120, a cosinus kąta ASB jest równy $\frac{144}{169}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 20\sqrt{313}\ cm^2$**.**

2.4.4 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$**.**

2.4.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy $18\ cm$, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α.

Odpowiedź: $P_b = 648\ cm^2$.

2.4.6 Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = 3$. Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $6\sqrt{3}$. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = 729$.

2.4.7 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi bocznej dwa razy dłuższej od krawędzi podstawy.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

b) Wyznacz długość krawędzi ostrosłupa tak, aby pole jego powierzchni bocznej wynosiło $36\sqrt{15}$.

Odpowiedź: a) $cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) Krawędzie muszą mieć długość 6 i 12 jednostek.

2.4.8 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości $48\ cm^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = \frac{4}{3}$. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 60\ cm^2$.

2.5 Wielościany foremne

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów foremnych.

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez ściany są równe.

Przykład 1

Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi a.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej czworościanu:

$$P_c = 4 \cdot P_{\Delta\, równobocznego}$$

$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Więc $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Obliczamy objętość czworościanu:

ΔOSD jest trójkątem prostokątnym, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = h^2 - r^2$$

ale $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

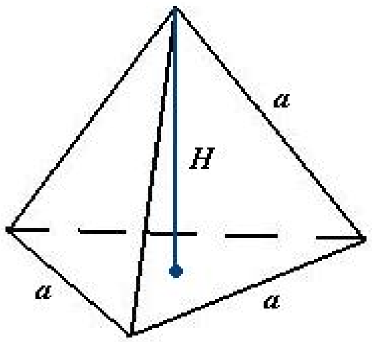
$$H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36} \Rightarrow H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36}$$

Więc $\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

Istnieją następujące wielościany foremne:

Czworościan (tetraedr)



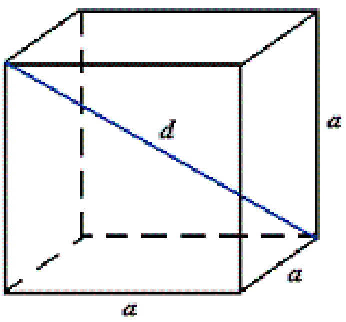
Rysunek 2-13. Czworościan

4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy czworościanem foremnym.

$\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Sześcian (heksaedr)

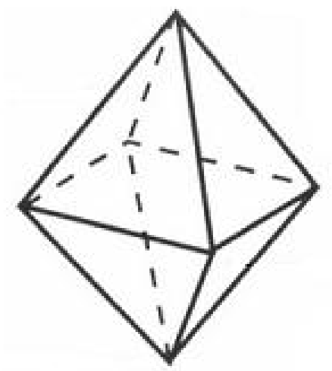


Rysunek 2-14. Sześcian

6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = a^3}$ $\boldsymbol{P_c = 6a^2}$

Ośmiościan (oktaedr)

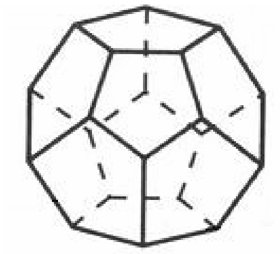


Rysunek 2-15. Ośmiościan

8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2}$ $\boldsymbol{P_c = 2\sqrt{3}a^2}$

Dwunastościan (dodekaedr)

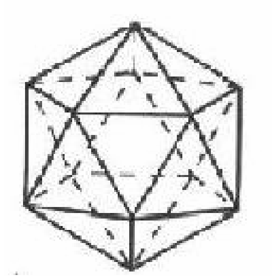


12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków, 30 krawędzi

$$V = \frac{(15+7\sqrt{5})}{4}a^3 \qquad P_c = 15(\sqrt{5}+2)a^2$$

Rysunek 2-16. Dwunastościan

Dwudziestościan (ikosaedr)



20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków, 30 krawędzi

$$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3 \qquad P_c = 5\sqrt{3}a^2$$

Rysunek 2-17. Dwudziestościan

Ciekawostka

Wielościany foremne znali już Pitagorejczycy w VI w. p.n.e. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę, a od czasów Platona uważano piąty wielościan foremny, dwunastościan, za postać wszechświata. Wielościany te noszą nazwę **brył platońskich.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Dlaczego wielościanów foremnych nie może być więcej niż pięć?

ZADANIA

2.5.1 Mając daną długość krawędzi a, wyprowadź wzór na:

a) przekątną sześcianu,

b) wysokość czworościanu foremnego.

Odpowiedź: a) $D = a\sqrt{3}$, b) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

2.5.2 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$

2.5.3 Pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni całkowitej czworościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych brył.

Odpowiedź: $2\sqrt{6}$.

2.5.4 Pole powierzchni dwudziestościanu foremnego jest równe $245\sqrt{3}\ cm^2$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego wielościanu.

Odpowiedź: $210\ cm$.

2.5.5 Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano bryłę o sześciu ścianach. Naszkicuj otrzymaną bryłę. Czy jest to wielościan foremny?

Odpowiedź: Nie.

2.5.6 Ściany wielościanu malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:

a) czworościanu foremnego,

b) sześcianu,

c) ośmiościanu foremnego?

Odpowiedź: a) 4, b) 3, c) 2.

2.6 Walec – jego pole powierzchni i objętość

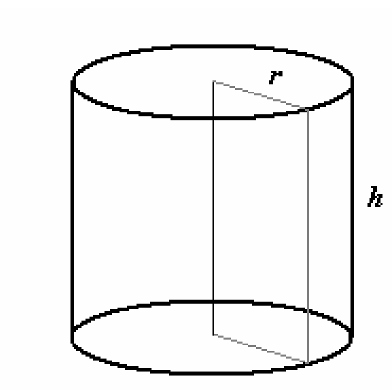
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości walców;
- Rozpoznawać w walcach kąty między przekątną przekroju osiowego a płaszczyzną podstawy;

- Obliczać miary kątów.

Walec– to bryła otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.

Prostą tę nazywamy **osią walca**. Podstawami walca są koła o takim samym promieniu.



Rysunek 2-18. Walec

Powierzchnią boczną walca nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu.

Tworzącą walca nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.

Przekrojem osiowym walca nazywamy część wspólną walca i płaszczyzny zawierającej oś walca.

Objętość walca wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej walca:

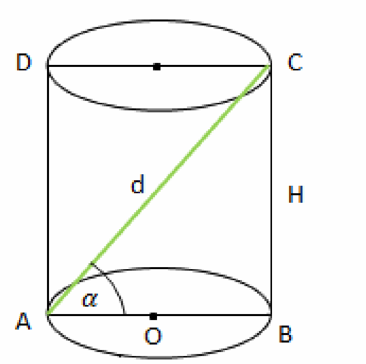
$$\boldsymbol{P_b = 2\pi r H}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 2\pi r(r + H)}$$

Przykład 1

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



ΔABC jest prostokątny, więc $sin\alpha = \frac{H}{d}$

$$H = d \cdot sin\alpha = 10 \cdot sin60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{2r}{d}$$

$$2r = d \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ cm$$

$$r = 2{,}5\ cm$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 5\sqrt{3} = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$V = 31{,}25\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 2{,}5\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 5\pi\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 12{,}5\pi + 25\sqrt{3}\pi$$

$P_c = 12{,}5\pi(1 + 2\sqrt{3})\ cm^2$

ZADANIA

2.6.1 Oblicz objętość walca, jeśli jego przekrój osiowy jest kwadratem o obwodzie równym 24 cm.

Odpowiedź: $V = 54\pi$.

2.6.2 Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% większy od promienia podstawy drugiego walca. Oblicz stosunek objętości tych walców.

Odpowiedź: $9:4$.

2.6.3 Długość promienia walca zmniejszono dziesięciokrotnie. Ile razy trzeba zwiększyć wysokość tego walca, aby objętość się nie zmieniła?

Odpowiedź: 100–krotnie.

2.6.4 Ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości $1\ km$ i średnicy wewnętrznej równej $50\ cm$?

Odpowiedź: $62{,}5\pi\ m^3$.

2.6.5 Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy $8\ cm$ i wysokości $10\ cm$ jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki, każda o krawędzi $2\ cm$. Czy woda z kubka się wyleje?

Odpowiedź: Nie.

2.6.6 Objętość walca jest równa $108\pi\ cm^3$, a jego wysokość to $12\ cm$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Odpowiedź: $P_c = 90\pi\ cm^2$.

2.6.7 Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego jeden bok ma długość 8 cm, a przekątna jest o 2 cm dłuższa od drugiego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca wiedząc, że dłuższy bok prostokąta jest wysokością walca.

Odpowiedź: $V = 240\pi\ cm^3$, $P_c = 152\pi\ cm^2$.

2.6.8 Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{3}{5}$. Pole przekroju osiowego jest równe 27. Oblicz objętość tego walca.

Odpowiedź: $V = 40{,}5\pi$.

2.6.9 Do naczynia w kształcie walca wypełnionego wodą do wysokości 7 cm włożono metalową kulkę o promieniu 3 cm. Poziom wody podniósł się o 1 cm i zrównał się z górną podstawą walca. Oblicz objętość naczynia. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, wynik podaj z dokładnością do $1 cm^3$.

Odpowiedź: $V = 904\ cm^3$.

2.6.10 Puszka na cukier ma kształt walca.

a) Ile kilogramów cukru zmieści się w puszce, której wymiary wynoszą $d = 14\ cm$ a $h = 20\ cm$? Gęstość cukru wynosi 1,6 kg/litrów. Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

b) Jakiej wysokości musiałaby być ta puszka, by mieścił się do niej dokładnie 1 kg cukru? Wynik zaokrąglij z nadmiarem do 1 cm.

Odpowiedź: a) $1{,}89\ kg$, b) $h = 11\ cm$.

2.7 Stożek – jego pole powierzchni i objętość

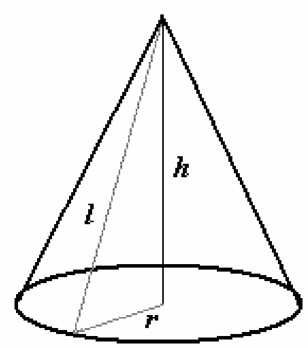
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości stożków;
- Rozpoznawać w stożkach kąty między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą);
- Obliczać miary kątów.

Stożek – to bryła otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta. Prostą tę nazywamy osią stożka.

Podstawą stożka nazywamy koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka.

Wysokością stożka (h) nazywamy przyprostokątną trójkąta zawartą w osi obrotu.



Rysunek 2-19. Stożek

Powierzchnią boczną stożka nazywamy powierzchnię wyznaczoną przez obrót przeciwprostokątnej trójkąta.

Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywam**y wierzchołkiem stożka.**

Tworzącą stożka (l) nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugi należy do podstawy stożka.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy część wspólną stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka.

Objętość stożka wyraża się wzorem:

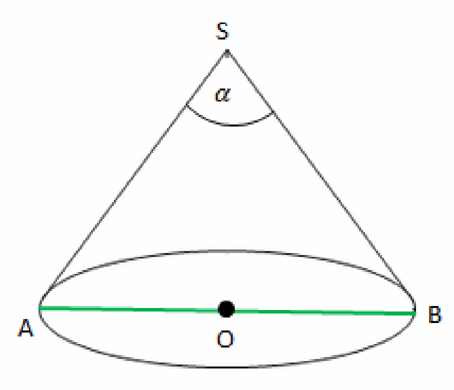
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej stożka:

$$\boldsymbol{P_b = \pi r l}$$

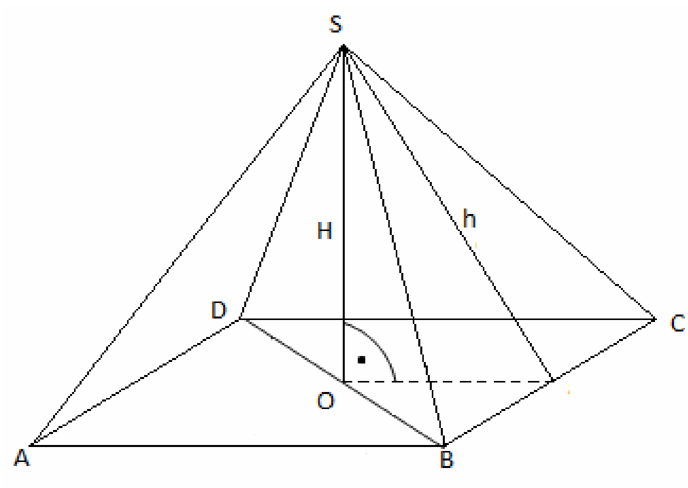
Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = \pi r(r + l)}$$



Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka** (kąt α na rysunku).

Przykład 1



Tworząca stożka ma długość $8\,cm$ i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ΔAOS jest prostokątny i $sin\alpha = \frac{H}{l}$

$$H = 8 \cdot sin60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{r}{l}$$

$$r = l \cdot cos\alpha = l \cdot cos60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ cm$$

Podstawiamy do wzoru i obliczamy objętość oraz pole powierzchni całkowitej:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\ cm^3$$

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 8) = 48\pi\ cm^2$$

ZADANIA

2.7.1 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka, jeśli:

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 180°$ c) $\alpha = 240°$ d) $\alpha = 270°$

Odpowiedź:

a) $4\pi\ cm^2$ b) $36\pi\ cm^2$ c) $64\pi\ cm^2$ d) $81\pi\ cm^2$

2.7.2 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu $15\ cm$. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku $6\ cm$. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α.

Odpowiedź: $\alpha = 72°$.

2.7.3 Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu $49\ cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $49\pi(1 + \sqrt{2})\ cm^2$.

2.7.4 Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π cm^2, a średnica jego podstawy ma długość $12\ cm$. Oblicz objętość tego stożka.

Odpowiedź: $96\pi\ cm^3$.

2.7.5 Pole powierzchni bocznej stożka jest cztery razy większe od pola podstawy. Obwód przekroju osiowego stożka jest równy 30. Oblicz objętość tego stożka

Odpowiedź: $V = 9\pi\sqrt{15}$.

2.7.6 Stożek ma wysokość $10\ cm$. Pole przekroju osiowego tego stożka jest równe $30\ cm^2$. Jaką długość ma tworząca tego stożka?

Odpowiedź: $\sqrt{190}\ cm$.

2.7.7 Kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$. Promień podstawy stożka ma długość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Odpowiedź: 32π.

2.7.8 Objętość stożka jest równa 4π, a pole jego podstawy jest równe 4π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $2\pi\left(2 + \sqrt{13}\right)$.

2.7.9 Do naczynia w kształcie odwróconego stożka wrzucono kulkę o promieniu $r = 3\ cm$. Oceń, czy kulka będzie wystawać nad brzeg naczynia. Uzasadnij odpowiedź, wykonując odpowiednie obliczenia, jeżeli wiadomo, że wysokość stożka wynosi $12\ cm$, a promień podstawy to $4\ cm$.

Odpowiedź: Kulka będzie wystawać ponad brzeg naczynia.

2.7.10 Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $V = 9\sqrt{3}\ cm^3$, $P_c = 27\pi\ cm^2$.

2.8 Kula – jej pole powierzchni i objętość

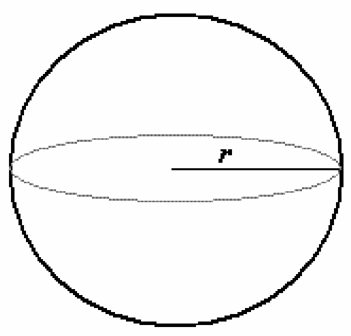
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości kuli.

Kula o środku w punkcie O i promieniu r to bryła będąca zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego – **promieniem kuli.**

Obrót okręgu ograniczonego koło tworzy powierzchnię obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli.** Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.



Rysunek 2-20. Kula

Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Objętość kuli wyraża się wzorem:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 4\pi r^2$$

Przykład 1

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu $r = 4\ cm$.

Podstawiamy do wzoru $r = 4\ cm$ i obliczamy:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi\ cm^2$$

Przykład 2

Oblicz stosunek objętości kuli o promieniu $r_1 = 8\ cm$ do objętości kuli o promieniu $r_2 = 2\ cm$.

Ponieważ każde dwie kule są bryłami podobnymi, to $\frac{r_1}{r_2} = k$.

$$\frac{8}{2} = k \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_2}^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 4^3 = 64$$

Odpowiedź: Stosunek objętości tych kul jest równy 64.

ZADANIA

2.8.1 Oblicz objętość kuli o promieniu $r = 5\ cm$.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi cm^3$.

2.8.2 Pole powierzchni kuli jest równe $100\pi\ cm^2$. Oblicz objętość tej kuli.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$.

2.8.3 Oblicz pole powierzchni:

a) piłki do koszykówki o średnicy równej $24\ cm$,

b) piłki nożnej o średnicy równej $21{,}8\ cm$.

Odpowiedź: a) $56\pi\ cm^2$, b) $475{,}25\pi\ cm^2$.

2.8.4 Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o $20\ cm$, ich promienie są równe odpowiednio: $r_1 = 16\ cm$ i $r_2 = 12\ cm$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

Odpowiedź: Około $60{,}3\ cm$.

2.8.5 Objętość półkuli jest równa $486\pi\ cm^3$. Oblicz odległość między dwoma najbardziej oddalonymi od siebie punktami tej półkuli.

Odpowiedź: $18\ cm$.

2.8.6 Kopuła olsztyńskiego planetarium jest półkulą o promieniu $8\ m$. Ile [m^2] blachy należy zakupić, aby wymienić pokrycie tej kopuły, dodając 10 % materiału na zakłady i odpady? Wynik podaj w przybliżeniu do części setnych.

Odpowiedź: $442{,}1$ m^2.

2.8.7 Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w czworościan foremny do objętości kuli opisanej na tym czworościanie.

Odpowiedź: $\frac{1}{27}$.

2.8.8 Po zjedzeniu miąższu arbuza, pozostała skórka z niejadalną częścią o grubości 3 cm. Arbuz miał średnicę 30 cm. Jaką jego część stanowił miąższ?

Odpowiedź: $51{,}2\%$.

2.8.9 Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $8\ dm$ od środka kuli. Otrzymany przekrój ma pole $36\ \pi\ dm^2$. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli.

Odpowiedź: $P = 100\pi\ dm^2, V = \frac{1000\pi}{3}\ dm^3$.

2.8.10 W kulę wpisano walec w ten sposób, że objętość walca stanowi $\frac{9}{16}$ objętości kuli. Oblicz stosunek promienia kuli do wysokości walca.

Odpowiedź: 1 lub $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

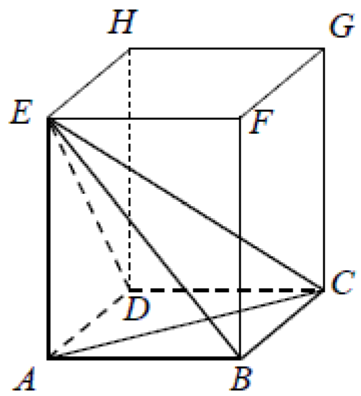
1.[11] Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa:

a) 6 b) 8 c) 24 d) 64

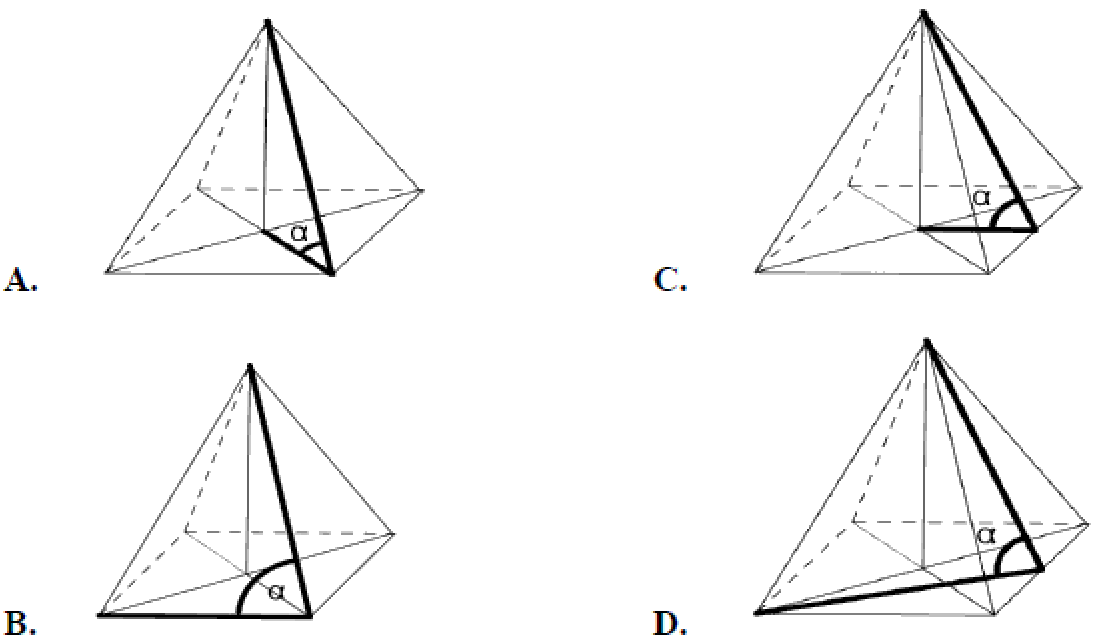
11 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 04.03.2013.

2. Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) 16π c) $4\sqrt{2}$ d) 8π



3.[12] Kąt α nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy zaznaczony jest na rysunku:



4.[13] Objętość sześcianu, w którym przekątna ściany bocznej ma długość $\frac{\sqrt{2}}{4}$, jest równa

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 16 d) 64

5.[14] Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

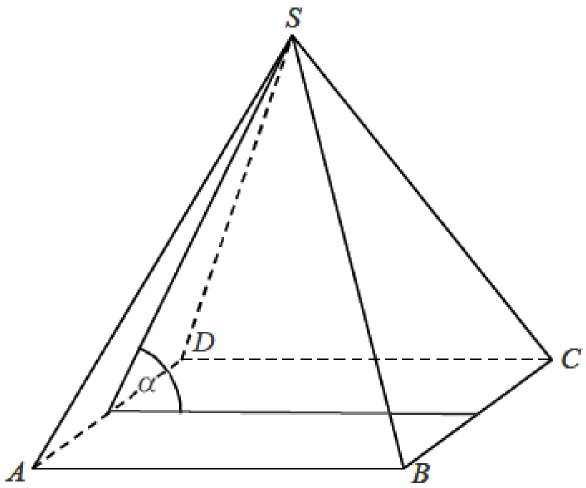
a) 512 b) 384 c) 96 d) 16

12 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

13 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

14 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 04.03.2013.

6. **(4 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



7.[15] Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

a) 96π b) 48π c) 32π d) 8π

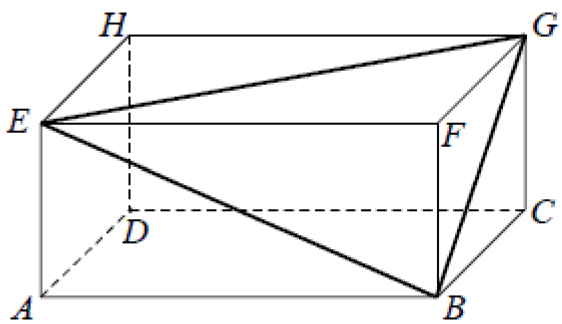
8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to:

a) $r + h = a$ b) $h - r = \frac{a}{2}$ c) $r - h = \frac{a}{2}$ d) $r^2 + h^2 = a^2$

9.[16] Objętość sześcianu jest równa 27. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

10.[17] W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



a) AB b) BG c) GE d) EB

15 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 04.03.2013.

16 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

17 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 04.03.2013.

11. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) 9 d) $3\sqrt{3}$

12. Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa:

a) 124π b) 96π c) 64π d) 32π

13.[18] Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe:

a) 94 b) 60 c) 47 d) 20

14. Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

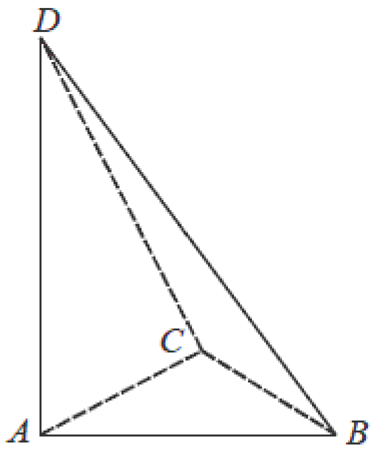
a) 11

b) 18

c) 27

d) 34

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $AD = 12$, $BC = 6$, $BD = CD = 13$.



15.[19] Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są równe 2. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

a) $\sqrt{3}+12$ b) $2\left(\sqrt{3}+6\right)$ c) $2\sqrt{3}+4$ d) $\sqrt{6}+12$

16. Przekątna prostopadłościanu o długości 6 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przekątna podstawy ma długość 3. Jaka jest miara kąta α?

a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$ d) $90°$

17. Producent chce wyprodukować puszkę w kształcie walca o pojemności 3000 m^3 i wysokości 2 dm. Promień podstawy puszki w zaokrągleniu do części dziesiątych wynosi:

a) 6,8 cm b) 6,9 cm c) 7,0 cm d) 7,1 cm

18. Pewien ostrosłup ma 70 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 138 b) 140 c) 69 d) 70

18 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.
19 Zadania 15-23: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.

19. Pole powierzchni kuli o objętości 288π wynosi:

a) 144π b) 36π c) 576π d) 452,16

20. Krople deszczu mają zwykle kształt kuli o średnicy 2 mm. Wskaz, ile kropel deszczu napełni szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 8 cm:

a) 108000 b) 432000 c) 54000 d) 162000

21. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest półkolem o promieniu $r = 10$ cm. Pole podstawy stożka wynosi:

a) $100\pi\ \text{cm}^2$ b) $100\ \text{cm}^2$ c) $25\pi\ \text{cm}^2$ d) $25\ \text{cm}^2$

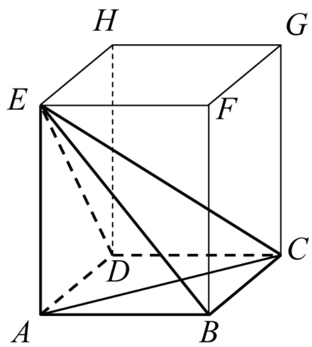
22. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 4 cm i 5 cm. Objętość walca jest równa:

a) $15\pi\ \text{cm}^3$ b) $20\pi\ \text{cm}^3$ c) $25\pi\ \text{cm}^3$ d) $30\pi\ \text{cm}^3$

23. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Objętość stożka jest równa 9π. Tworząca l stożka ma długość:

a) $l = 3\sqrt{2}$ b) $l = 6$ c) $l = 3\sqrt{3}$ d) $l = 7$

24.[20] **(4 pkt)** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



25.[21] **(5 pkt)** Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

26.[22] **(5 pkt)** Krawędź sześcianu jest o 4 krótsza od jego przekątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

27.[23] **(2 pkt)** Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

20 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 09.03.2013.

21 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

22 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

23 Zadania 27, 28: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 09.03.2013.

28. **(5 pkt)** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $tg\alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

29.[24] **(2 pkt)** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

30.[25] ***(4 pkt)*** Zbiornik ma kształt walca z obu stron zakończonego półkulami. Oblicz ile litrów płynu wypełni ten zbiornik, jeśli pole powierzchni całkowitej zbiornika jest równe 3π m^2, a wysokość walca jest równa 2 metry.

31. **(5 pkt)** Pomarańcza ma 5 cm średnicy, a jej skórka ma 5 mm grubości. Wyciśnięty sok stanowi 75% objętości obranej pomarańczy. Ile pomarańczy należy wycisnąć, aby napełnić półlitrowe naczynie? W tym zadaniu przyjmij $\pi = 3$.

32. **(5 pkt)** Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 3 dm $\times$ 0,5 m i wysokości 40 cm, wypełnionego wodą o $^3/_4$ wysokości, wrzucono dwie sześcienne kostki o krawędzi 10 cm. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

33. **(2 pkt.)** Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 360 cm^2, a pole powierzchni bocznej wynosi 240 cm^2, wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy. Odpowiedź: $tg\alpha = \sqrt{3}$.

24 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
25 Zadania 30–33: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

3.1 Średnia arytmetyczna, średnia ważona

Teraz nauczę się:

- Obliczać średnią arytmetyczną i ważoną zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Jeśli przeprowadzasz ankietę, zbierasz dane, dotyczące np. natężenia ruchu w naszym mieście, lub nauczyciele robią zestawienia z testów badających wiedzę swoich uczniów, to po zdobyciu tych informacji potrzebujesz wyciągnąć wnioski, na podstawie których można będzie odpowiedzieć sobie na pewne pytania.

Grupa badanych pewnej populacji nazywa się próbą statystyczną, którą bada się pod kątem pewnej cechy.

Statystyka opisowa – nauka zajmująca się gromadzeniem danych, porządkowaniem ich, analizą i wyciąganiem wniosków.

Dane statystyczne możemy mieć przedstawione w postaci tabel, diagramów, wykresów, ale wcześniej są przedstawiane w postaci skończonego zbioru liczb.

Ze średnią arytmetyczną najczęściej spotykamy się w szkole, kiedy liczymy sobie średnią ocen z danego przedmiotu czy średnią ocen na świadectwie.

Średnią arytmetyczną danego zbioru liczb liczymy dodając do siebie wszystkie liczby należące do zbioru, a następnie dzielimy otrzymaną sumę przez ilość liczb w zbiorze.

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Przykład 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $1, 8, 12, 6, -4, 2, 5, 5, 11, 9$.

$$\bar{x} = \frac{1+8+12+6-4+2+5+5+11+9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna dla tego zestawu liczb wynosi $5{,}5$.

Przykład 2

Średnia arytmetyczna liczb: 4, 2, 2, 6, x, 8 jest równa 5. Oblicz x.

$$\bar{x} = \frac{4+2+2+6+x+8}{6} = 5$$

$$\frac{22+x}{6} = 5$$

$$22 + x = 30 \ \Rightarrow x = 8$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 8.

Przykład 3[26]

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Jaka jest cena szóstej akcji?

Obliczamy najpierw łączny koszt wszystkich akcji:

$$6 \cdot 500 = 3000$$

Za 5 akcji zapłacono 2300 zł, więc jeśli od ceny wszystkich akcji odejmiemy cenę 5 akcji, to otrzymamy cenę szóstej akcji.

$$3000 - 2300 = 700 \ zł$$

Odpowiedź: Cena szóstej akcji wynosi 700 zł.

Przykład 4

Tabelka przedstawia stan wypożyczania książek przez uczniów klasy I C z biblioteki szkolnej.

Liczba uczniów	10	8	5	4	3
Liczba przeczytanych książek	9	33	6	12	0

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 9 + 8 \cdot 33 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 0}{30} = \frac{90 + 264 + 30 + 48}{30} = \frac{432}{30} = 14{,}4$$

Odpowiedź: W klasie I C średnio na jednego ucznia przypada 14,4 książki.

26 Arkusz maturalny CKE, Matura z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, 26.03.2013.

Średnia ważona

Średnią ważoną stosujemy, gdy poszczególne wartości mają przyporządkowane wagi.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie), to liczba

Przykład 5

Oblicz średnią ważoną liczb $1, 2, 3, 4{,}5, 6, 7, 8, 9, 10$, jeśli liczby parzyste mają wagę 4 a nieparzyste 6.

$$\overline{x_w} = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 6 + 6\cdot 4 + 7\cdot 6 + 8\cdot 4 + 9\cdot 6 + 10\cdot 4}{6+4+6+4+6+4+6+4+6+4}$$

$$\overline{x_w} = \frac{6+8+18+16+30+24+42+32+54+40}{50} = \frac{270}{50} = 5{,}4$$

Odpowiedź: Średnia ważona jest równa 5,4.

Przykład 6

Oceny uzyskane w semestrze przez pewnego ucznia z matematyki wraz z ich wagami zostały zestawione w tabeli.Obliczmy średnią tego ucznia.

Ocena	3	1	2	5	4	6	3	4	4
Waga	1	1	1	4	3	5	1	3	3

$$.\overline{x_w} = \frac{3\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+5\cdot4+4\cdot3+6\cdot5+3\cdot1+4\cdot3+4\cdot3}{1+1+1+4+3+5+1+3+3} = \frac{3+1+2+20+12+30+3+12+12}{22} = \frac{95}{22} = 4{,}31$$

Odpowiedź: Średnia ocen wynosi 3,41.

ZADANIA

3.1.1 Oblicz średnią ważoną danych z tabeli:

Wartość	3	4	5	7
Waga	2	1	4	3

Odpowiedź: 5,1.

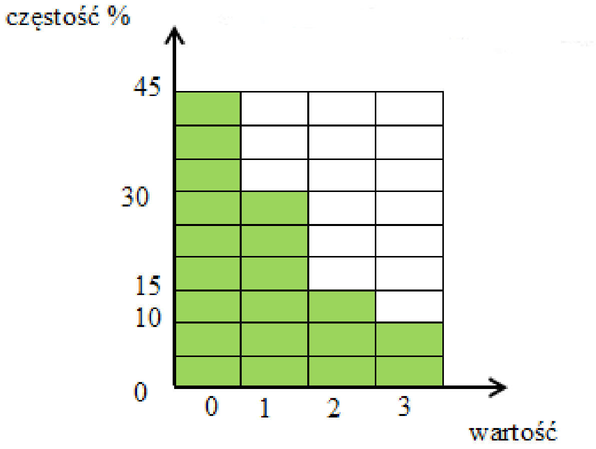
3.1.2 Dla jakiej wartości x średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3?

Odpowiedź: $x = 5$.

3.1.3 Średnia wzrostu 9 osób wynosi $170\ cm$. Jaka będzie średnia wzrostu tej grupy, jeśli dołączy do nich osoba o wzroście $190\ cm$?

Odpowiedź: $172\ cm$.

3.1.4 Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na poniższym diagramie:



Odpowiedź: $0{,}9$.

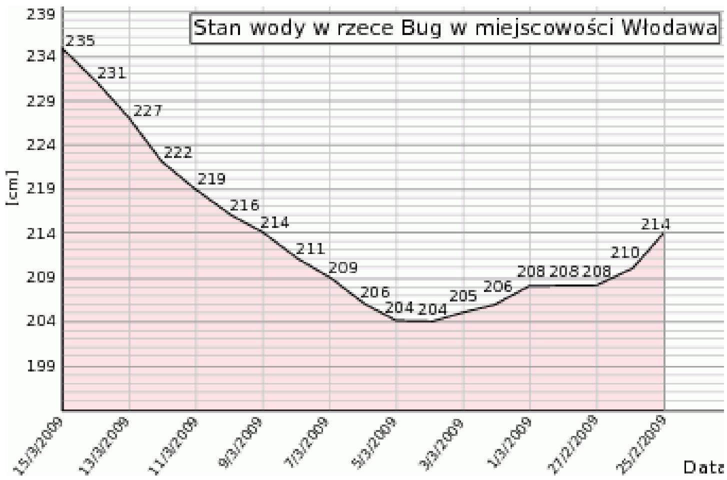
3.1.5 Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 $zł$. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie wynagrodzenie w firmie jest o 2% wyższe niż poprzednio?

Odpowiedź: 2528 $zł$.

3.1.6 Średnia arytmetyczna liczb $a, b, c, d, 22$ jest równa 14. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d?

Odpowiedź: 12.

3.1.7 Na podanym wykresie przedstawiono stan wody w rzece Bug od 25 lutego do 15 marca 2009 roku.



Rysunek 3-1. Stan wody w rzece Bug w miejscowości Włodawa

a) W których dniach stan wody w rzece nie przekraczał 207 cm?

b) Jaki był średni stan wody w rzece w dniach 1-10 marca 2009?

c) O ile procent podniósł się stan wody w rzece między 6 a 12 marca? Wynik podaj z dokładnością do jednego punktu procentowego.

Odpowiedź:

a) Między 2 a 6 marca.   b) 208,3 cm.   c) O 8%.

3.1.8 Na koniec semestru otrzymasz piątkę, jeśli zdobędziesz średnio co najmniej 70 punktów z pięciu sprawdzianów. Ania otrzymała średnio 68 pkt. z czterech sprawdzianów. Jaką minimalną ilość punktów musi dostać z piątego sprawdzianu, aby na semestr otrzymać piątkę?

Odpowiedź: 78 pkt.

3.1.9 Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci wynosi 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek babci, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 31 lat. Ile lat ma babcia?

Odpowiedź: 63 lata**.**

3.2 Mediana, dominanta

Teraz nauczę się:

- Obliczać medianę i dominantę zestawu danych.

Mediana zestawu liczb

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza uporządkowany rosnąco (lub malejąco) ciąg liczb.

- Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.
- Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Mediana jest to wartość środkowa występująca w uporządkowanym zestawie danych.

Przykład 1

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13.

W tym przykładzie grupa danych jest liczbą parzystą, więc nie istnieje jedna wielkość środkowa. Mamy dwie takie wartości.

$$\underbrace{2,\ \ 3,\ \ 4,}_{\text{3 wartości}}\ \ 6,\ \ 8,\ \ \underbrace{9,\ \ 11,\ \ 13.}_{\text{3 wartości}}$$

To, że mamy dwie wielkości środkowe, nie oznacza jednak, że mamy dwie mediany. W takim wypadku medianę otrzymujemy, obliczając średnią arytmetyczną dwóch wyznaczonych liczb.

$$M = \frac{6+8}{2} = 7$$

Odpowiedź: Mediana zestawu liczb wynosi 7.

Przykład 2

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Mamy podany uszeregowany ciąg danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Składa się z 9 wartości. Dokładnie pośrodku znajduje się wartość piąta (ponieważ mamy cztery wartości na lewo od niej i cztery na prawo):

$$\underbrace{2,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 8,}_{4\text{ wartości}}\ \ 10,\ \ \underbrace{12,\ \ 14,\ \ 16,\ \ 18}_{4\text{ wartości}}$$

Odpowiedź: Mediana wynosi 10.

Przykład 3

Poniżej przedstawiona jest liczba 100 ankietowanych dzieci.

Liczba osób	0	1	2	3	4	5
Liczba ankietowanych	15	34	27	15	7	2

Mamy do czynienia z parzystą liczbą wartości (100).

W szeregu 100 liczb liczbami środkowymi będą 50 i 51. Należy ustalić, jaką wartość mają te dwie liczby.

Z tabeli wynika:

- liczby od 1 do 15 mają wartość 0
- liczby od 16 do 49 $(15 + 34 = 49)$ mają wartość 1
- liczby od 50 do 76 $(49 + 27 = 76)$ mają wartość 2

Dalej nie musimy sprawdzać, bo ustaliliśmy wartość obu liczb:

- wartość liczby 50 wynosi 2
- wartość liczby 51 wynosi 2

Stąd mediana jest równa 2.

Dominanta

Dominanta (moda) jest to wartość, która w zebranych danych statystycznych pojawia się najczęściej. Oznaczamy ją symbolem D.

Gdy mamy kilka wielkości, które pojawiają się z tą samą największą liczbą razy, mamy do czynienia z kilkoma dominantami.

Przykład 4

Podaj dominantę z następujących liczb: $1, 3, 5, 0, 2, 5, 6, 1, 0, 4, 5, 4, 0, 0, 0, 7, 0$.

Liczba	0	1	2	3	4	5	6	7
Częstość	6	2	1	1	2	3	1	1

Najczęściej występuje liczba 0.

ZADANIA

3.2.1 Korzystając z danych: $3, 4, 1, 8,15, 6, 4, 3, 12, 7, 22, 4, 1, 0, 6, 5, 9,$ określ medianę.

Odpowiedź: 5,5.

3.2.2 Podaj dominantę z następujących liczb:

a) $7, -2, 4, 7, 0, 7, 4,$

b) $1, 5, 6, 1, 6, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 5, 2, 2, 1$.

Odpowiedź: a) 7, b) 1, 5 i 6.

3.2.3 W tabeli przedstawiono wyniki egzaminu dla 100 studentów. Podaj dominantę.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Liczba studentów	22	25	12	25	10	6

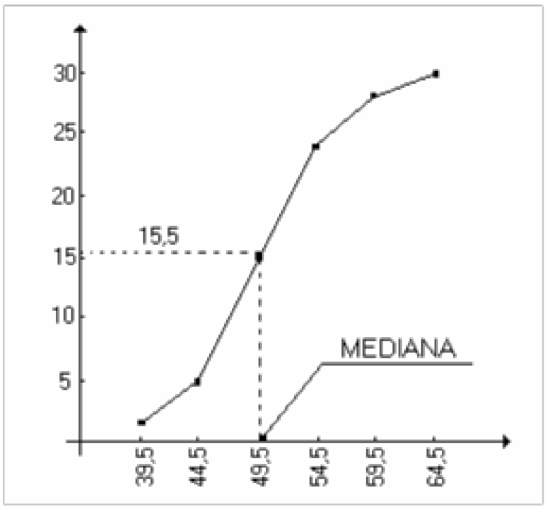
Odpowiedź: $D_1 = 3, D_2 = 4$.

3.2.4 Wyniki konkursu z matematyki podano w punktach: 94, 92, 90, 90, 86, 86, 86, 72. Oblicz medianę tego zestawu danych.

Odpowiedź: 88.

3.2.5 W tabeli przedstawiono wagi uczniów pewnej klasy. Podaj medianę dla tej klasy. Narysuj wykres ilustrujący dane zawarte w tabeli.

Odpowiedź: $M = 49{,}5$.



5.3 Wariancja, odchylenie standardowe

Teraz nauczę się:

- Obliczać wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadkach danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Odchylenie standardowe zestawu liczb $\boldsymbol{\sigma}$ (*sigma*)

Wartość odchylenia standardowego mówi nam, jak bardzo zróżnicowane są dane statystyczne. Im większa jest wartość odchylenie, tym dane są bardziej rozproszone wokół średniej.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ, którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Wariancja to kwadrat odchylenia standardowego.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Rozstęp (R) jest to różnica między największą a najmniejszą z liczb.

Przykład 1

Każdy z 6 zawodników podczas treningu oddał z pistoletu po 10 strzałów do tarczy. Po zsumowaniu punktów każdego zawodnika otrzymano następujące wyniki: 99, 96, 92, 98, 94, 97. Oblicz rozstęp wyników, średni wynik oraz odchylenie standardowe i wariancję.

Obliczmy najpierw rozstęp danych:

Wartość max – 99

Wartość min – 32

$R = 99 - 92 = 7$

Obliczmy teraz średnią wyników

$$\bar{x} = \frac{99 + 96 + 92 + 98 + 94 + 97}{6} = \frac{576}{6} = 96$$

Odchylenie standardowe liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(99-96)^2 + (96-96)^2 + (92-96)^2 + (98-96)^2 + (94-96)^2 + (97-96)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 16 + 4 + 4 + 1}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}38$$

Wariancja wynosi $\sigma^2 = 2{,}37^2 = 5{,}67$

ZADANIA

3.3.1 Oblicz wariancję danych ze zbioru $A = \{4, 5, 8, 9,\ 14\}$.

Odpowiedź: 12,4.

3.3.2 Średnia arytmetyczna trzech liczb a, b, c jest równa 2. Wariancja tych liczb wynosi 3. Oblicz sumę kwadratów liczb a, b i c.

Odpowiedź: 21.

3.3.3 Oblicz z dokładnością do 0,1 odchylenie standardowe następujących danych:

a) $-2;\ 0;\ 1;\ 4;\ 7;\ 14.$

b)

Wartość	-3	-1	0	4	6
Liczebność	10	6	4	2	4

Odpowiedź:

a) $\sigma = 5{,}3.$

b) $\sigma = 3.$

3.3.4 Trzech sędziów oceniło zawodnika, przyznając punkty: 2, 3, 7. Ile wynosi odchylenie standardowe od średniej arytmetycznej zestawu tych punktów?

Odpowiedź: $\sigma = 2{,}16$.

3.3.5 Troje przyjaciół ma wzrost równy odpowiednio 140 cm, 150 cm i 160 cm. Oblicz odchylenie standardowe od średniej wzrostu z dokładnością do części tysięcznych.

Odpowiedź: $\sigma = 8{,}165$.

3.4 Zastosowanie statystyki w praktyce

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wiedzę z zakresu statystyki w sytuacjach praktycznych.

ZADANIA

3.4.1 Czterech pracowników brygady zarobiło w lutym po 1300 zł, a ich szef 2000 zł. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$ płac i odchylenie standardowe σ od niej. Wyniki zaokrąglij do 1 grosza.

Odpowiedź: Średnia płac tych pięciu osób w lutym wynosi 1440 zł z odchyleniem standardowym 280 zł.

3.4.2 Obliczymy odchylenie standardowe i wariancję dla zestawu danych: $1, 3, 5, 5, 11$.

Odpowiedź: $\sigma^2 = 11{,}2$.

3.4.3 Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba osób	11	14
Średnia ocen	4,0	3,8
Odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe dla całej klasy. Wyniki podaj z zaokrągleniem do jednego miejsca po przecinku.

Odpowiedź: Średnia: 3,9; odchylenie standardowe: 1,5.

3.4.4 Wagi ośmiu klaczy urodzonych w pewnym gospodarstwie wynoszą: 38 kg, 40 kg, 42 kg, 42 kg, 45 kg, 48 kg, 50 kg, 51 kg. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

Odpowiedź: 4,47 kg.

3.4.5 Właściciel sklepu może zamówić puszki z ananasami u dwóch różnych dostawców A i B. Poniższe tabelki przedstawiają wyniki badania masy produktu bez zalewy w 10 losowo wybranych puszkach od obydwu dostawców:

	DOSTAWCA A				DOSTAWCA B			
Masa produktu bez zalewy (g)	120	130	135	140	125	135	140	145
Liczba puszek	1	4	2	3	3	2	4	1

Oblicz rozstęp i wariancję mas produktu bez zalewy od dostawcy A i B. Oceń, u którego z dostawców powinien zamawiać towar właściciel sklepu.

Odpowiedź:

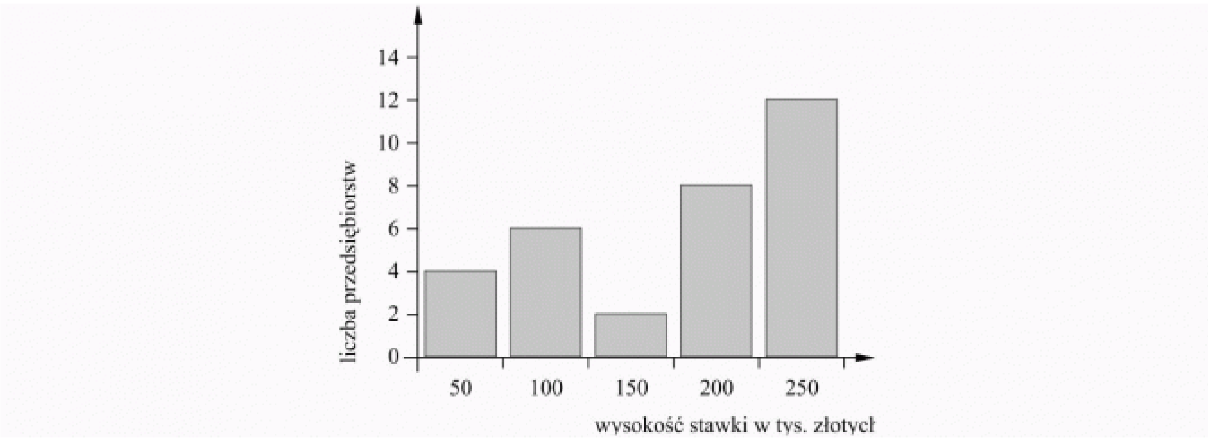
Rozstęp mas produktu bez zalewy od obu dostawców jest taki sam i wynosi 20. Wariancja mas produktu bez zalewy od dostawcy A wynosi 36, a od dostawcy B równa jest 50. Wynika z tego, że właściciel sklepu powinien wybrać dostawcę A.

3.4.6 Diagram przedstawia liczbę przedsiębiorstw w pewnej gminie, płacących podatek roczny w określonej wysokości. Oblicz:

a) średnią stawkę podatku rocznego przypadającego na przedsiębiorstwa z tego zestawienia,

b) podatek dominujący,

c) wysokość podatku, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw,



Rysunek 3-2. Liczba przedsiębiorstw w gminie płacących podatek roczny w określonej wysokości

Odpowiedź:

a) Średnia stawka podatkowa wynosiła $178\ 125\ zł$.

b) Podatek dominujący wynosi $250\ tys.\ zł$.

c) Podatek, którego nie przekroczyła połowa firmy wynosi $200\ 000\ zł$.

d) Rozstęp stawki podatkowej wynosi $200\ 000\ zł$.

3.4.7 W pewnej firmie średnia płaca pracowników produkujących wynosi 2819 zł, zaś średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 2483 zł. Średnia płaca wszystkich pracowników firmy jest równa 2723 zł. Oblicz, jaki procent pracowników produkcyjnych stanowią pozostali pracownicy tej firmy.

Odpowiedź: 40%.

3.5 Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych.

Naukę elementów rachunku prawdopodobieństwa należy rozpocząć od wprowadzenia podstawowych pojęć.

Doświadczenie losowe – w praktyce każde doświadczenie, które może być wielokrotnie powtarzane i którego wyniku nie możemy przewidzieć (np. rzut monetą).

Zdarzenie elementarne – jest to każdy wynik doświadczenia losowego (np. przy rzucie symetryczną kostką do gry może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6).

Zbiór zdarzeń elementarnych – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia (np. przy jednokrotnym rzucie kostką do gry $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać literką Ω (czyt. *Omega*).

Zdarzenie losowe – dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek $\{2, 4, 6\}$).

Zdarzenie losowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \ldots$

Zdarzenia losowe dzielimy na:

- Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – zdarzenie elementarne, które spełnia warunki zdarzenia losowego (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek).
- Zdarzenia pewne – zdarzenie elementarne, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką do gry wypadła liczba oczek większa od 0, ale mniejsza lub równa 6).
- Zdarzenia niemożliwe – zdarzenie elementarne, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne (np. w rzucie sześcienną kostka do gry wypadła siódemka).

Bardzo istotne jest, ile elementów zawiera zbiór. Wartość ta jest nazywana mocą zbioru.

Np. moc zbioru A – $\bar{\bar{A}}$

Przykład 1

Rzucamy trzy razy monetą.

a) Wypisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.

b) Wypisz zbiór sprzyjający zdarzeniu – wypadł co najwyżej jeden orzeł.

a)

R – wypadła reszka

O – wypadł orzeł

W tym doświadczeniu losowym można otrzymać następujące wyniki:

$A=\{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ (O,O,R)\ (O,R,O)\ (R,O,O)\ (O,O,O)\}$

Wszystkich możliwych wyników jest 8, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 8$.

b)

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najwyżej jeden orzeł.

$B = \{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ \}$

Wszystkich możliwych wyników jest 4, więc $\overline{\overline{\mathrm{B}}} = 4$.

ZADANIA

3.5.1 Losujesz dwie niepowtarzające się cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i tworzysz z nich liczbę.

a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia. Ile ich jest?

b) Wylosowałeś cyfry, które dały liczbę parzystą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?

Odpowiedź:

a) $A = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4),\ (2\ 1), (2\ 3), (2, 4), (3\ 1), (3\ 2), (3\ 4),\ (4\ 1), (4\ 2), (4\ 3)\}, \overline{\overline{A}} = 12.$

b) $B = \{(1\ 2), (1\ 4), (2, 4), (3\ 2), (3\ 4), (4\ 2)\ \}, \overline{\overline{B}} = 6.$

3.5.2 Rzucamy monetą, a następnie sześcienną kostką do gry (o ściankach z numerami: 2, 4, 6, 8, 10, 12).

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

b) Podaj przykład zdarzenia pewnego A i zdarzenia niemożliwego B.

Odpowiedź: a) zbiór zdarzeń elementarnych składa się z 12 elementów.

b) A – wypadnie orzeł lub reszka i parzysta liczba oczek, B – wypadną dwa orły.

3.5.3 Rzucono dwiema zwykłymi sześciennymi kostkami do gry. Zdarzenie A – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest mniejsza od 2, zdarzenie B – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest większa lub równa 2. Jakimi zdarzeniami są zdarzenia A i B.

Odpowiedź: A – niemożliwe, B – pewne.

3.5.4 W urnie są trzy kule: biała, zielona i niebieska. Losujemu kolejno dwie kule bez zwracania. Wybisz zbiór zdarzeń elemnetarnych tego doświadczenia losowego.

Odpowiedź: $\{(b,z),(b,n),(z,b),(z,n),(n,b),(n,z)\}$.

3.6 Własności prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Korzystać z własności prawdopodobieństwa.

Zdarzenia losowe opisywaliśmy jako pewne podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Omówimy teraz niektóre pojęcia, które związane są z własnościami tych zbiorów.

Zdarzenia przeciwne

Zdarzenie przeciwne jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych przestrzeni, które nie sprzyjają danemu zdarzeniu. Zdarzenie przeciwne oznaczamy tą samą literą, co dane zdarzenie, ale ze znakiem prim.

$\boldsymbol{A}$ – dane zdarzenie

$\boldsymbol{A'}$ – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

Przykład 1

Rzucamy jeden raz kostką do gry. Doświadczenie A – polega na wyrzuceniu 1, 3 lub 4.

$A = \{1,3,4\}$

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A będzie zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu jednej z liczb: $2,5,6$.

$A' = \{2,5,6\}$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

Twierdzenie

Jeżeli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to zachodzą równości:

$\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

$\boldsymbol{A \cup A' = 1}$

$\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$

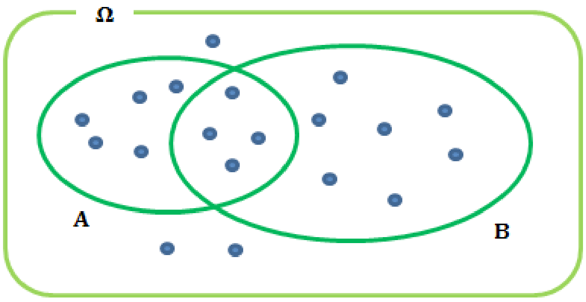
Przykład 2

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają te zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B. Aby obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$, należy ten zbiór wyznaczyć.



Rysunek 5-3. Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

$$P(A \cap B) = \frac{4}{19}$$

Przykład 3

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wypadły co najwyżej cztery oczka.

b) B – wypadła parzysta liczba oczek.

c) $P(A \cap B)$.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 6$

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{\overline{A}} = 4$

Zatem $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $B = \{2, 4, 6\}$

$\overline{\overline{B}} = 3$

Zatem $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

$\overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Zdarzenia wykluczające się

Zdarzenia wykluczające się to zdarzenia, które nie mają części wspólnej.

Przykład 4

Wybieramy losowo literę alfabetu spośród liter: a, b, c, d, e, f, g, h. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu samogłoski, a zdarzenie losowe B na wylosowaniu litery g lub h.

$A = \{a, e\}$

$B = \{g, h\}$

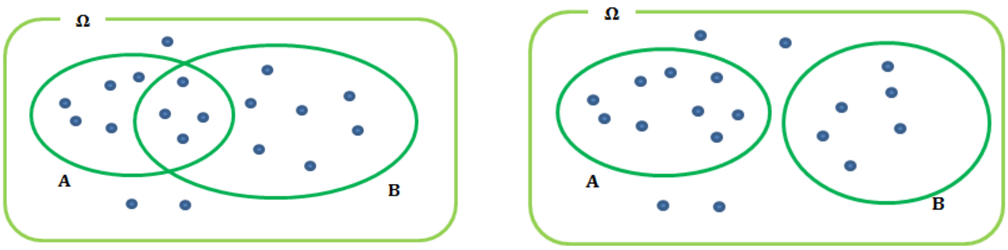
Zdarzenia nie mają żadnego wspólnego zdarzenia elementarnego, a więc wykluczają się. Prawdopodobieństwo części wspólnej dwóch wykluczających się zdarzeń wynosi 0.

$P(A \cap B) = 0$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Przykład 5

a) b)



Rysunek 5-4. Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Na rysunkach powyżej przedstawiona została przestrzeń zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego.

Obliczymy teraz $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, a następnie sprawdzimy, czy $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

a) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{11}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{16}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{11}{19} = \frac{20}{19}$

Więc $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B) P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$

b) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{6}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{15}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{6}{19} = \frac{15}{19}$

Więc: $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

Łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Zależy to od tego, czy zdarzenia te się wykluczają, czy nie.

Twierdzenie

W doświadczeniu losowym dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

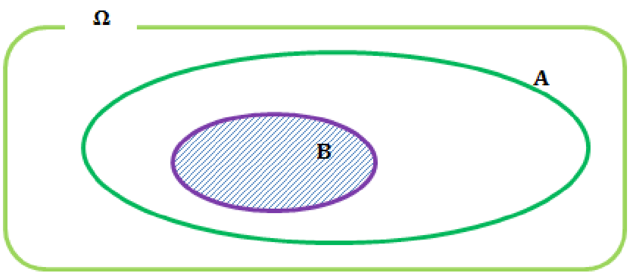
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Przykład 6

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $B \subset A$ oraz $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}3$. Oblicz $P(A \cup B)$.



Skoro $B \subset A$, to: $A \cup B = A$ i $A \cap B = B$

Z twierdzenia: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Skoro $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}3$ i $P(A \cap B) = 0{,}3$, to:

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(A \cup B) = 0{,}7$

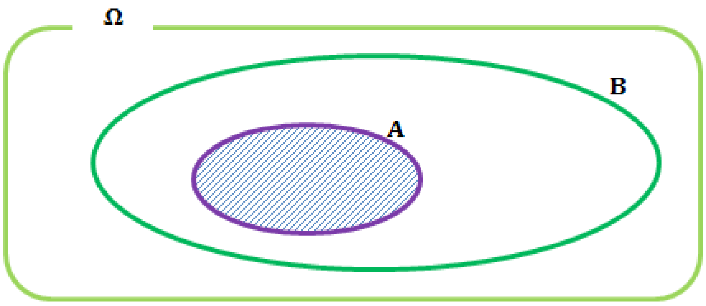
Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń

Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Przykład 7

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy $B \backslash A$.



$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$

Korzystając z twierdzenia:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$

oraz $(B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset (B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$$P(B) = P(B \backslash A) \cup (B \cap A) = P(B \backslash A) + P(B \cap A) - P((B \backslash A) \cap (B \cap A))$$
$$= P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$

$0{,}7 = P(B \backslash A) + 0{,}3$

$P(B \backslash A) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$

Twierdzenie

Dla dowolnych zdarzeń $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{\Omega}$ zachodzą następujące własności:

$\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$

$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$

$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$

$\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$**, gdy** $\boldsymbol{A \subset B \subset \Omega}$

$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

ZADANIA

3.6.1 Losujemy kulę ze zbioru 14 ponumerowanych kul. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu kuli o numerze parzystym. Zdarzenie losowe B polega na wylosowaniu kuli o numerze większym lub równym 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego część wspólną zdarzeń A i B.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$.

3.6.2 Oblicz prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych A i B oraz prawdopodobieństwo różnicy $B \setminus A$, jeżeli: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{1}{12}, P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$.

3.6.3 Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B, wiedząc, że zdarzenia A i B się wykluczają oraz: $P(A) = \frac{1}{10}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź: $P(B) = \frac{1}{2}$.

3.6.4 Jeżeli A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i $P(A) = 5 \cdot P(A')$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{6}$.

3.6.5 A i B są takimi zdarzeniami losowanymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Odpowiedź: $P(A \cup B) = 0{,}4$.

3.6.6 O zdarzeniach losowych A i B wiemy, że: $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \setminus B)$

Odpowiedź:

a) $P(A \cap B) = \frac{11}{30}$.

b) $P(A \setminus B) = \frac{2}{15}$.

3.7 Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia oznaczamy $P(A)$. W nawiasie zapisujemy symbol zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy.

Prawdopodobieństwem zdarzenia $\boldsymbol{A}$ nazywamy iloraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A spełnia warunek: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1.}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego 0.

Przykład 1

Rzucamy dwoma identycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

Wyznaczmy najpierw zbiór Ω, czyli przestrzeń, która zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$$

Wypiszmy teraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

$$A = \{ (4,6)\ (5,5)\ (5,6)\ \ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 6$$

Więc prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

3.7.1 Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu w pierwszym i trzecim rzucie reszki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}$.

3.7.2 W grze losowej losowane są kulki z trzech pojemników. W pierwszym znajdują się kulki ponumerowane od 1 do 7. W drugim znajdują się dwie kulki: biała i niebieska, a w ostatnim pojemniku znajduje się sześć kulek oznaczonych literami alfabetu: A, B, C, D, E, F. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania ciągu, w którym liczba jest parzysta, a litera alfabetu jest samogłoską.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{7}$.

3.7.3 Z tali 52 kart losujemy 3 karty. Ile możliwych ciągów kart możemy uzyskać? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy w tym samym rozdaniu jako pierwszą kartę damę pik, a jako drugą jakiegokolwiek króla?

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{663}$.

3.7.4 Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 8 \leq 0$:

a) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma wynosi 8,

b) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych.

Odpowiedź: a) $P(A) = \frac{1}{9}$, b) $P(A) = \frac{1}{6}$.

3.8 Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń za pomocą drzewek

Jeżeli doświadczenie losowe składa się z więcej niż jednego etapu, takich jak serie rzutów kostką lub monetą, zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa bywa skomplikowane. Przydatną wówczas jest tak zwana metoda drzew.

Drzewem nazywamy graf ilustrujący przebieg doświadczenia losowego, na którym każdej krawędzi przyporządkowuje się prawdopodobieństwo.

Przykład 1

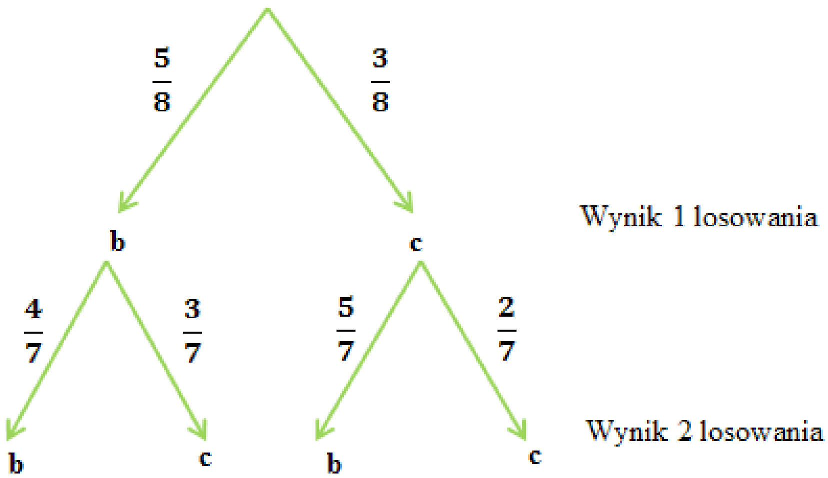
W urnie jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jedną kulę i, bez zwracania, losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wylosowano dwie kule białe.

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów.

Niech b – oznacza kulę białą, a c – kulę czarną.

Budujemy drzewo dla naszego doświadczenia losowego.



Pierwsze losowanie daje nam dwie możliwości, wypadnie kula biała lub kula czarna.

W drugim losowaniu mamy te same możliwości. Osobno rysujemy je dla obu wyników, wynikających z losowania pierwszego.

Reguła iloczynów

Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź.

Reguła sum

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych według reguły iloczynów dla tych gałęzi.

Więc:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych wynosi:

$P(\{(b,b)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej i czarnej wynosi:

$P(\{(b,c)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej i białej wynosi:

$P(\{(c,b)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosi:

$P(\{(c,c)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

a) A – wylosowano dwie kule białe

$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów

$B = \{(b,c),(c,b)\}$

Obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystamy z reguły dodawania. Jeżeli zdarzeniu sprzyjają co najmniej dwa wyniki na drzewie, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest sumą prawdopodobieństw tych wyników.

$$P(B)=\frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

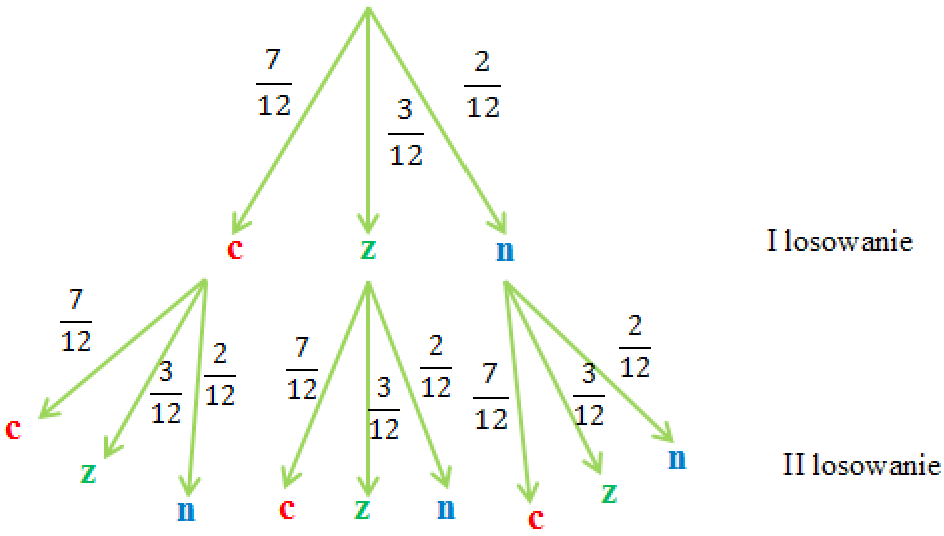
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $P(A)=\frac{5}{14}$, a prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w różnych kolorach wynosi $P(B)=\frac{15}{28}$.

Przykład 2

Mamy 12 kul: 2 niebieskie, 3 zielone, 7 czerwonych. Losujemy kolejno trzy kule (ze zwracaniem). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

A – wylosowanie za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

Budujemy drzewo naszego doświadczenia:



$$P(A)=\frac{7}{12}\cdot\frac{2}{12}+\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{12}+\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{14}{144}+\frac{6}{144}+\frac{4}{144}=\frac{24}{144}=\frac{1}{6}$$

ZADANIA

3.8.1 W urnie są 3 kule zielone i 1 czerwona. Losujemy kolejno trzy kule (bez zwracania). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowania wszystkich kul zielonych.

b) wylosowania za trzecim razem kuli zielonej.

Odpowiedź: $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{3}{4}$.

3.8.2 Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie dwóch czwórek.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{64}$.

3.8.3 Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na:

Zdarzenie A – polegające na tym, że co najmniej raz wypadł orzeł.

Zdarzenie B – polegające na tym, że tylko raz wypadł orzeł.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$.

3.8.4 Gra polega na rzucaniu sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 oczek, to wygrywamy 10 złotych i możemy grać dalej, a jeśli wypadnie inna liczba oczek niż 6, to odpadamy z gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że jeżeli zagramy, wygramy 30 złotych.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{1296}$.

3.8.5 Z zestawu tematów egzaminacyjnych, składającego się z 25 pytań z matematyki (10 dotyczy działań na liczbach, 9 geometrii, 6 rachunku prawdopodobieństwa), wyjęto losowo 1 zagadnienie i, nie oglądając go, odłożono na bok. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano temat z działań na liczbach.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{2}{5}$.

3.8.6 W konkursie omnibus ustalono następujące reguły: dla 1. tury rozgrywek uczestnik losuje jedną z liter wyrazu omnibus i jeśli jest to spółgłoska, to losuje pytanie z urny, w której są 3 pytania z matematyki, 2 z literatury i 3 z muzyki. W przypadku wylosowania samogłoski, uczestnik losuje pytanie z urny, w której są 2 pytania z matematyki, 3 z historii i 3 z geografii. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane pytanie dotyczy matematyki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{28}$.

3.9 Reguła mnożenia i dodawania

Teraz nauczę się:

- Stosować regułę mnożenia i dodawania.

Często mamy do czynienia ze zbiorami, dla których chcielibyśmy znać liczbę elementów. Wygodnie jest, gdy wszystkie elementy są wypisane i można je policzyć. Niekiedy jednak, mając pewien zbiór, budujemy z jego elementów nowe zbiory i chcemy poznać liczbę elementów w tych nowych zbiorach.

Zasada mnożenia

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ sposobów.

Zasada dodawania

Jeżeli wybór polega na jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ sposobów.

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób?

Jest 5 osób i pięć miejsc w kolejce. Pierwszą osobę można ustawić na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3 sposoby, czwartą na 2 sposoby, a piątą tylko na 1 sposób.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Odpowiedź: Pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

Przykład 2

Podczas egzaminu student wybiera 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?

Student pierwsze pytanie losuje spośród 6, drugie spośród 5, trzecie spośród 4 i czwarte pytanie spośród 3.

Zatem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Kolejność losowania poszczególnych pytań nie jest istotna, dlatego otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień czterech pytań: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360}{24} = 15$$

Odpowiedź: Student może wybrać pytania na 15 sposobów.

Przykład 3

Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ tak, aby cyfry w nich się nie powtarzały?

W tym przypadku nie wykorzystujemy wszystkich cyfr jednocześnie. Tworzymy liczby trzycyfrowe, mając do dyspozycji pięć cyfr. Kolejność wybieranych cyfr jest ważna.

Wśród tych cyfr nie ma zera, zatem każda z nich może być pierwszą cyfrą tworzonej liczby. Mamy 5 możliwych cyfr na pierwsze miejsce, 4 możliwe cyfry na drugim miejscu i 3 na trzecim miejscu.

Zatem liczba wszystkich możliwych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z podanych cyfr jest równa:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Odpowiedź: Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

ZADANIA

3.9.1 Pewna pani dekoruje stół na przyjęcie gości. Ma do wyboru 6 obrusów, 3 wazony i 2 świeczniki. Ile różnych dekoracji może uzyskać?

Odpowiedź: 36 dekoracji.

3.9.2 Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych?

Odpowiedź: 90.

3.9.3 Z urny zwierającej 4 kule (biała, czarna, niebieska, zielona) losujemy trzy kule. Ile jest możliwych losowań, w których cyfry się nie powtarzają.

Odpowiedź: 4 możliwe losowania.

3.9.4 Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4.

Odpowiedź: Liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 jest 18.

3.9.5 Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy trzy cyfry. Ile liczb trzycyfrowych można w ten sposób utworzyć, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać,

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

Odpowiedź: a) 343 liczby, b) 210 liczb.

3.9.6 Na ile sposobów można ustawić w szeregu 3 chłopców i 2 dziewczynki, tak aby:

a) najpierw stały dziewczyny, a następnie chłopcy,

b) pierwsza stała dziewczyna,

c) pierwszy i drugi stał chłopiec,

d) żaden z dwóch chłopców nie stał obok siebie.

Odpowiedź: a) 12, b) 48, c) 36, d) 12.

3.10 *Pojęcie silni

Teraz nauczę się:

- Stosować pojęcie silni do rozwiązywania problemów.

Definicja

Silnią liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$ nazywamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż $\boldsymbol{n}$. W notacji matematycznej $\boldsymbol{n}!$ czytamy, jako „*n silnia*„.

Oznaczenie symboliczne $n!$ wprowadził w 1808 roku francuski matematyk Christian Kramp.

Symbolicznie można zapisać:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$

Definicja

$$\boldsymbol{n}! = \begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{dla\ n = 0} \\ \boldsymbol{n(n-1)!} & \boldsymbol{dla\ n \geq 1} \end{cases}$$

Przykład 1

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Przykład 2

Oblicz $5! - 2! \cdot 3!$

$5! - 2! \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 120 - 12 = 108$

Przykład 3

Oblicz $\frac{12!}{10! \cdot 5!}$

$12!$ możemy zapisać jako $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 10! \cdot 11 \cdot 12$

Przykład 4

Doprowadź wyrażenie $\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!}$ do najprostszej postaci.

Rozpiszmy najpierw $(2n+2)!$

$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$

oraz $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

Wracamy do przykładu, i otrzymujemy:

$$\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$$
$$= \frac{(2n+1) \cdot 2(n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}$$

Zadania

3.10.1 Oblicz:

a) $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ b) $\frac{12!}{11!\cdot 4!}$ c) $\frac{9!\cdot 7!}{(6!)^3}$

Odpowiedź:

a) 45. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{49}{10}$.

35.10.2 Uprość:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} =$ b) $\frac{(n+2)!}{n!} =$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} =$

d) $\frac{n!}{(n-3)!} =$ e) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!} =$ f) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!} =$

Odpowiedź:

a) $n+1$. b) $(n+1)(n+2)$. c) $(n+3)$.

d) $(n-2)(n-1)n$. e) $\frac{1}{(n-2)(n-1)}$. f) $\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n}$.

3.11 *Kombinatoryka

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: „ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",„Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 24 osobowej?" itp.

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.

Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy $k-$ elementowy podzbiór tego zbioru.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Przykład 1

Oblicz:

a) $C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$

b) $C_7^3 \cdot C_4^2 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2} 35 \cdot 6 = 210$

Przykład 2

Na ile sposobów z grupy 12 osób można wybrać trzech przedstawicieli?

Wybierając przedstawicieli tej grupy tworzymy 3-osobowy podzbiór.

Jest to 3-elementowa kombinacja ze zbioru 12-elementowego.

Więc:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{9!\cdot 2\cdot 3\cdot} = 220$$

Odpowiedź: z grupy 12 osób, trzech przedstawicieli można wybrać na 220 sposobów.

Przykład 3

Obliczmy teraz trzy przykłady:

a) C_n^0

b) C_n^n

c) C_n^1

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!} = n$$

Wniosek

Jeżeli $n \in N$, to:

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1, \qquad C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = n}$$

ZADANIA

3.11.1 Oblicz:

a) C_8^2 b) $C_{10}^3 \cdot C_6^1$ c) $\frac{C_{12}^3}{C_{14}^5}$ d) $C_{25}^{23} + C_{25}^{24}$

Odpowiedź:

a) 28 b) 720 c) $\frac{10}{91}$ d) 325

3.11.2 W klasie jest 10 dziewcząt i 14 chłopców. Na ile sposobów możesz wybrać grupę, w której są dwie dziewczyny i 4 chłopców?

Odpowiedź: na 45045 sposobów.

3.11.3 Spośród 50 losów na loterii tylko 10 jest wygrywających. Na ile sposobów można wybrać 4 losy tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający.

Odpowiedź: Wszystkich sposobów wylosowania 4 losów w tej loterii tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający, jest 138 910.

3.11.4 Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i trzy trójki.

Odpowiedź: Szukanych liczb ośmiocyfrowych jest 192080.

Wariacje

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład 4

W finale konkursu matematycznego bierze udział 10 uczestników. Ile jest możliwości zajęcia przez nich trzech pierwszych miejsc, jeżeli uwzględniamy kolejność (I, II i III miejsce)?

$$V_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 720.

Przykład 5

Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:

$$V_{10}^{4}=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=5040$$

Odpowiedź: Istnieje 5040 czterocyfrowych kodów o różnych cyfrach.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k −wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Liczba k −wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k=n^k}$$

Przykład 6

Ile słów sześcioliterowych (z sensem lub bez) można utworzyć z liter $\{A,\ B,\ C\}$? Na każde z 6 miejsc możemy wybrać jedną z 3 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$V_3^6=3^6=729$$

Odpowiedź: Można utworzyć 729 wyrazów.

Przykład 7

Wypełniając test składający się z 10 pytań, można zakreślić tylko jedną z trzech odpowiedzi. Na ile sposobów można rozwiązać ten test?

Przyjmijmy, że pierwsza odpowiedź to „A”, druga „B”, a trzecia „C”.

Będą to 10-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru 3-elementowego $\{A,B,C\}$.

$$V_3^{10}=3^{10}=59049$$

Odpowiedź: Test można rozwiązać na 59049 sposoby.

ZADANIA

5.11.5 Na ile sposobów można ustawić pięcioosobową kolejkę, wybierając ludzi spośród 10 osób?

Odpowiedź: Na 30240 sposobów.

5.11.6 Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5?

Odpowiedź: Wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5 jest 5712.

3.11.7 Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A, B, C, D\}$?

Odpowiedź: 16 wyrazów.

3.11.8 Budynek składa się z 4 pięter. Do windy wchodzi na parterze 6 osób. Na ile sposobów mogą oni opuścić windę na kolejnych piętrach?

Odpowiedź: Na 4096 sposobów.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

1.[27] Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa:

a) 100

b) 99

c) 90

d) 19

2. Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa:

a) 400 zł b) 500 zł c) 600 zł d) 700 zł

3.[28] W loterii liczbowej wylosowano dziesięć liczb: 4, 3, 3, 3, 4, 6, 1, 5, 1, 6. Mediana tych danych jest równa:

a) 5 b) 3,6 c) 3,5 d) 3

4. **(1 pkt)** Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfra jedności należy do zbioru A {2, 4, 5, 7}, cyfra dziesiątek do zbioru $B = \{6, 7, 8\}$, a cyfra setek do zbioru C = {2, 4, 5, 6}, jest:

a) 48 b) 36 c) 24 d) 12

27 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

28 Zadania 3, 4: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.

5.[29] Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawione są w tabeli:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	7	6	4	2

Mediana ocen ze sprawdzianu jest równa:

a) 3,5 b) 3, c) 4 d) 4,5

6. W pudełku są 4 kule białe i x kul czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{5}$, gdy:

a) $x = 6$ b) $x = 8$ c) $x = 10$ d) $x = 12$

7.[30] Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

a) $\frac{4}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

8. W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

a) 1 b) 14 c) 7 d) 8

9.[31] Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Mediana zarobków tych 6 osób jest równa:

a) 3400 zł b) 3500 zł c) 6000 zł d) 7000 zł

10. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4. Wówczas:

a) $p < \frac{1}{5}$ b) $p = \frac{1}{5}$ c) $p = \frac{1}{4}$ d) $p > \frac{1}{4}$

11.[32] W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa:

a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 5

12. Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi, B' jest zdarzeniem przeciwnym do B, $P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,12 b) 0,18 c) 0,6 d) 0,9

29 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.
30 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
31 Zadania 9, 10: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 08.03.2013.
32 Zadania 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.

13.[33] Tabela przedstawia zestawienie liczby błędów popełnionych przez zdających część teoretyczną egzaminu na prawo jazdy.

Liczba błędów	0	1	2	x
Liczba zdających	8	4	10	8

Średnia arytmetyczna liczby tych błędów popełnionych przez jednego zdającego jest równa 1,6. Wynika stąd, że:

a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ d) $x = 6$

14. O zdarzeniach A oraz B zawartych w Ω wiadomo, że $P(A) = \frac{5}{6}, P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Wtedy:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ b) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ c) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ d) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

15.[34] Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{18}$

16. Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?”. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

17.[35] Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy:

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

18.[36] Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy?

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

33 Zadania 13, 14: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
34 Zadania 15, 16: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
35 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 09.03.2013.
36 Zadanie 18: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

19.

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	15	17	19	15	19	15

Podaj medianę i dominantę rzutu kostką.

Odpowiedź: $M = 3$, $D = 3$ lub $D = 5$.

ZADANIA OTWARTE

1.[37] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

2.[38] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5} losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania, tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba jest mniejsza od 432.

3.[39] **(4 pkt)** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednej reszki czy wyrzucenie orła w co drugim rzucie?

4.[40] **(2 pkt)** Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości, średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

5.[41] **(2 pkt)** Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

6.[42] **(4pkt)** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki: (1) liczba jest podzielna przez 25, (2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste, (3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

7.[43] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1 ,2, 3,..., 7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

---

37 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 10.03.2013.

38 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

39 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

40 www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 10.03.2013.

41 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 10.03.2013

42 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 10.03.2013.

43 www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 10.03.2013.

8.[44] **(4 pkt)** Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

9.[45] **(4 pkt)** W grupie 200 osób 65% uczy się języka angielskiego, 47% uczy się języka rosyjskiego, a 30% uczy się obu tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z tej grupy osoba nie uczy się żadnego z wymienionych języków.

10. **(2 pkt)** Doświadczenie polega na rzucie dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek będzie większa od 7, ale nie przekroczy 11.

11. **(2 pkt)** Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 6.

12. **(2 pkt)** Z liczb dwucyfrowych wybrano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 5?

13. **(4 pkt)** W urnie A jest 5 kul białych i 3 czarne, w urnie B są 4 kule białe i 6 czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej z urn. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyjmiemy kule w jednym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

14. **(4 pkt)** W urnie jest 7 kul białych i 3 czarne. Losujemy z tej urny jedną kulę, a następnie z pozostałych znowu jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ten sposób wyjmiemy kule w różnych kolorach. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

15. **(5 pkt)** W urnie jest 5 kul białych, 8 zielonych i n niebieskich. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej lub niebieskiej jest równe $\frac{3}{4}$. Wyznacz liczbę n. Odpowiedź: $n = 7$.

16. **(2 pkt)** W urnie jest 16 kul białych, 14 kul zielonych, 6 niebieskich i 4 żółte. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, ęe będzie to kula zielona lub żółta.

17. **(6 pkt)** W urnie znajdują się kule białe, czerwone i zielone. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej jest trzykrotnie większe od prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej lub zielonej. Wiedząc, że co czwarta kula jest biała, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej.

44 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 10.03.2013.
45 Zadania 9–17: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.matematykam.pl
2. www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homograficzna
3. www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne
4. www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html
5. www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php
6. www.megamatma.pl
7. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
9. www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf
10. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf,
11. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
12. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
13. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf,
14. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf,
15. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf,
16. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
20. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
21. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
22. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf

Stowarzyszenie POSTIS
20-091 Lublin, ul. Fieldorfa 7/4
tel.: (081) 524 39 66; fax: (081) 524 39 66
www.postis.pl e-mail: biuro@postis.pl

Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o.o.
20-086 Lublin, ul. Szewska 4 lok. 7
tel. +48 81/532-84-14; tel./fax. +48 81/534-35-50; mobile +48 668-445-503
www.pte.lublin.pl e-mail: biuro@pte.lublin.pl

Lista autorów:
Kinga Sarad-Deć, pedagog
Joanna Rusinkiewicz, pedagog
Milena Potręć, nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna, nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak, specjalista ds. Mediów
Grzegorz Kozak, specjalista ds. Mediów
Agnieszka Wróblewska, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Zbigniew Biały, specjalista ds. Ekonomii
Ewa Oleksiejczuk, specjalista ds. Ekonomii
Agata Linkiewicz, specjalista ds. Matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch, specjalista ds. Matematyki
Katarzyna Korona, doradca metodyczny
Dorota Ulikowska, doradca metodyczny

Skład i opracowanie typograficzne
Ewa Kutkowska
Andrzej Sokulski

Przygotowanie publikacji w wersji elektronicznej
Agencja ORPHA
WWW.orpha.pl
Systemy wspomagania nauczania Sp. z o.o.
WWW.swn.edu.pl