Materiały pomocnicze
dla nauczyciela z zakresu

Ekonomii w praktyce, matematyki i informatyki

ace

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

Uwaga:

Treści rozszerzone zostały oznaczone przez: *

Ekonomia w praktyce

Informatyka

Matematyka

Matematyka

Matematyka

Matematyka

Matematyka

Matematyka

Matematyka

Ekonomia w praktyce

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drodzy Nauczyciele,

Oddajemy w Państwa ręce podręcznik do Ekonomii w praktyce, będący wynikiem intensywnej pracy interdyscyplinarnego zespołu ekspertów. Proponowane opracowanie adresowane jest dla nauczycieli liceów ogólnokształcących i techników.

Niniejszy podręcznik napisany został w oparciu o nową podstawę programową kształcenia ogólnego, a także treści wykraczające poza nią. Założeniem autorów było stworzyć podręcznik, który w jak największym stopniu będzie w stanie zaspokoić potrzeby uczniów, umożliwiając im wszechstronny rozwój oraz indywidualizację kształcenia, a także przygotować do kolejnego etapu kształcenia. Dodatkowym elementem składającym się na innowacyjność prezentowanego opracowania jest opatrzenie każdego z rozdziałów przypisami, oswajającymi uczniów z konstrukcją podręczników akademickich, a także pozwalającymi na samodzielne dotarcie do prezentowanych treści w materiałach źródłowych i poszerzanie własnej wiedzy stosownie do indywidualnych potrzeb i zainteresowań. Każdy rozdział zakończony jest przykładowymi tematami do dyskusji, które są nie tylko konkretnym pomysłem ułatwiającym przygotowanie i realizację lekcji, ale również sprawdzonym sposobem na wyróżnienie i utrwalenie nowo poznanego materiału. Podręcznik stanowi jeden z elementów interdyscyplinarnego programu nauczania, przygotowanego w ramach projektu *„ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież – Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości"*, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Zalecane jest równoległe realizowanie treści z matematyki i informatyki, które niejednokrotnie korespondować będą z aktualnie realizowanym materiałem.

W sytuacji, gdy młodzi ludzie w każdej minucie poddawani są działaniom różnorodnych bodźców, a współczesny świat niesie ze sobą tyle ciekawych propozycji,jako nauczyciele nie możemy ignorować tych aspektów. Chcąc umożliwić uczniom,jak najpełniejszy rozwój na miarę ich możliwości i umiejętności, zgodny z ich uzdolnieniami i zainteresowaniami, jesteśmy zobligowani do stworzenia im możliwości do wszechstronnej, wieloaspektowej i krytycznej analizy prezentowanego materiału, aby umożliwić im stanie się w przyszłości jednostkami silnymi, samodzielnymi, samorealizującymi się i skłonnymido samoaktualizacji.

Istotnym elementem prowadzenia zajęć z wykorzystaniem podręcznika będzie zachęcanie uczniów do rozwijania kreatywności i przedsiębiorczości, do podejmowania różnych inicjatyw, bowiem:

> **Ekonomia to nauka, która omawia rzeczy doskonale nam znane językiem, którego nie jesteśmy w stanie zrozumieć.**

Dick Armey

Autorzy mają nadzieję, że oddane Państwu opracowanie spełni swoją rolę i będzie jednym z wielu elementów przybliżających i wspierających kształtowanie postawy przedsiębiorczej uczniów.

1. Masz pomysł – masz działalność

1.1. Pomysł na działalność

▶ **Wygrywa ten, kto ma jasno określony cel i nieodparte pragnienie, aby go osiągnąć.**

Napoleon Hill

Przyjemnie byłoby pracować „u siebie" dodatkowo na własny rachunek. Wiele osób myśli o założeniu własnej działalności.

Do głównych powodów założenia i prowadzenie własnej działalności gospodarczej należy zaliczyć:

1. brak pracy,
2. brak satysfakcji z pracy (wyzysk, zła atmosfera, nieznośny szef),
3. niskie wynagrodzenie,
4. dążenie do niezależności finansowej,
5. chęć sprawdzenia się,
6. fantastyczny pomysł na biznes.

Gdzie można znaleźć pomysł na biznes – odpowiedź brzmi WSZĘDZIE. Przede wszystkim:

1. W codziennych czynnościach, zainteresowaniach, pasjach, w posiadanych umiejętnościach.
2. Rozejrzyj się wokoło, w najbliższym otoczeniu, czy nie brakuje jakiegoś sklepu, punktu usługowego.
3. Ile i jakie firmy znajdują się w okolicy.
4. Wykorzystuj słabość konkurencji. Czerp korzyści z błędów innych przedsiębiorców.
5. Jakie znasz dobrze prosperujące działalności.
6. Korzystaj z Internetu, serwisów z ogłoszeniami, np. mam biznes, pomysł na biznes, szukam inwestora, sprzedam biznes.
7. Zainteresuj się e-biznesem.
8. Zainteresuj się franchisingiem. Franchising podaje gotowy i wypraktykowany sposób na biznes.
9. Ucz się na błędach innych (konkurencji, kolegów po fachu) wykorzystując doświadczenia innych.

Pieniądze to nie wszystko

Na sukces składa się wiele elementów. Pomysł na biznes to pierwszy krok do otwarcia własnej działalności gospodarczej. Koncepcja biznesowa, determinacja w realizacji, gotowość do poświęceń, uczenie na błędach są równie ważne w osiągnięciu sukcesu.

Powody, dla których warto założyć własną działalność:

1. **Stajesz się niezależny** – to Ty decydujesz jak poprowadzisz swoją działalność, jesteś sterem żeglarzem okrętem, tzn. nie masz szefa, nienormowany czas pracy.
2. **Pieniądze** – własna działalność to możliwość ponadprzeciętnych dochodów, pracując w korporacji Twoje pomysły idą na konto pracodawcy, do *„wspólnego worka"*.
3. **Satysfakcja** – tworzysz biznes, obserwujesz jak się rozwija, odnosisz satysfakcję, jak działalność osiąga sukcesy.
4. **Działasz z pasją** – w myśl powiedzenia; *„znajdź pracę, którą lubisz, a nie będziesz pracował do końca życia"*. Gdy prowadzisz biznes, który związany jest z Twoimi zainteresowaniami to w zasadzie nie pracujesz, bo robisz to, co lubisz i na czym się doskonale znasz, a co najważniejsze wykonywane zajęcie sprawia Ci frajdę i satysfakcję. Rozwijasz swoje pasje i zarabiasz pieniądze.
5. **Możesz zarabiać 24 godziny na dobę**- wykorzystując potęgę Internetu, dobierając odpowiednie systemy, strategię możemy być aktywni w sieci 24 godz. na dobę.
6. **Rozwijasz się** – pracując na „etacie" jesteś zorientowany na część działalności pracodawcy. Prowadząc własny biznes musisz się rozwijać we wszystkich kierunkach.
7. **Możesz zostać rentierem** – jeśli działalność będzie generowała zyski, można pomyśleć o budowie kapitału na przyszłość. Sam decydujesz, kiedy przechodzisz na emeryturę. Formę można przekazać komuś z rodziny, i dalej czerpać korzyści finansowe.
8. **Podatki działają na Twoją korzyść** – można wykorzystać przepisy podatkowe i skorzystać z różnych ulg niedostępnych dla pracowników etatowych.

1.2. Osoba przedsiębiorcza, czyli moje miejsce w biznesie

Przedsiębiorczość można odnieść do każdej ludzkiej działalności i wszystkich ludzi ją podejmujących. Przedsiębiorczość jest specyficzną postawą człowieka wobec otaczającego go świata i ludzi. Wyraża się twórczym i aktywnym dążeniu do ulepszania rzeczywistości i gotowości do podejmowania nowych działań lub rozszerzania dotychczasowych (A. Wiatrak, 2003). Niezależnie od warunków, jakie stwarza otoczenie, osoba przedsiębiorcza potrafi dostrzec i zaspokoić potrzeby swoje i swoich bliskich. To gotowość do podejmowania i rozwiązywania w sposób twórczy problemów, umiejętność wykorzystania pojawiających się szans oraz elastyczne przystosowywanie się do zmiennych warunków funkcjonowania.

Postawa przedsiębiorcza charakteryzuje się inicjatywnością, aktywnością, niezależnością i innowacyjnością jest napędem, motorem w osiąganiu wyznaczonych celów.

Poznając mocne i słabe strony w świadomy sposób kształtujemy własną osobowości, zyskujemy w kontaktach z nimi, gdy jesteśmy bardziej tolerancyjnymi dla otoczenia. Znając typy osobowości ludzi, z którymi żyjemy, rozmawiamy i tymi, którymi chcemy zaoferować biznes, możemy ich po prostu lepiej rozumieć. Każdy typ osobowości ma swoje mocne i słabe strony.

Osobowość społeczna jest to wypadkowa różnych czynników kulturowych. Niektóre z nich oddziaływają mocniej, inne słabiej, ale wszystkie wpływają w istotny sposób na kształt osobowości. Każdy z nas jest inny, niepowtarzalny pomimo tego, jako populacja ludzka wykazujemy wiele cech wspólnych, które możemy pogrupować (w oparciu o różne kryteria np. sposób reagowania, mówienia, odczuwania, radzenia sobie z porażką), na jednostki o podobnym typie osobowości, zbliżonym syndromie cech psychospołecznych.

Nie ma typów lepszych i gorszych ludzie są różni. Trzeba umieć wykorzystywać swoje mocne strony.

Zainteresowanie różnymi obliczami natury ludzkiej sięga starożytności. Hipokrates (ok. 460-377r. p.n.e.) sprowadził naturę człowieka do odpowiednich proporcji czterech płynów ustrojowych (krew, flegma, żółć żółta i czarna). Wyróżnił 4 typy temperamentu: typ flegmatyka, choleryka, melancholika i sangwinika. Dokonał również dokładnego opisu typologii, który jest obecnie również użyteczny.[1]

Flegmatyk (gr. φλεγμη – śluz) to człowiek odznaczający się mało dynamicznym usposobieniem, powolny, nieulegający gwałtownym emocjom, słabo reagujący na podniety, bodźce, niedążący do żadnych zmian

1. Strelau, J., 1998 , *Psychologia temperamentu*, Warszawa, ss. 26-32.

w życiu, zadowolony z tego, co osiągnął do tej pory. Wytrwały w działaniu i konsekwentny w uczuciach.

Choleryk (gr. chole – żółć, stąd «żółć go zalewa») człowiek pobudliwy, wybuchowy, o silnych i szybko powstających reakcjach uczuciowych, odznaczający się dużą energią życiową, brakiem opanowania. Reakcje choleryka są szybkie, często nieprzemyślane, niewspółmierne do bodźca. Często żałują wypowiedzianych słów. Charakteryzuje go silne przeżywanie emocji, duża energia życiowa i aktywność. Nastawieni są na działania i kierowanie. Wśród ludzi wzbudzają zaufanie i respekt, często pracują dla potrzeb grupy. W działaniu są szybcy, preferują pracę, którą mogą sami zorganizować. Lubią przewodzić i organizować pracę innym.

Melancholik (gr. mélanos – czarny + chole – żółć; prawdopodobnie stąd m.in. «czarne myśli») człowiek o usposobieniu łagodnym, biernym, którego cechuje brak impulsywności, powolnych, słabych, lecz długotrwałych reakcjach uczuciowych. Wykazuje pesymistyczne, lękowe, negatywne podejściu do przyszłości, życia, samego siebie, jak również do codziennych spraw. W działaniu melancholik jest niewytrwały, ma trudności z podejmowaniem decyzji, brakuje jej wiary w siebie. Cechuje się apatią, skłonnościami do depresji, przewlekłymi stanami przygnębienia i małą ruchliwością. Jest wrażliwy na krytykę, obraźliwy, nerwowy i skłonny do zadumy, spokojny, wyciszony, powściągliwy i mało elastyczny w zachowaniu. Lubi marzyć, oddawać się zadumie.

Sangwinik - (łac. sanguis – krew) to człowiek o żywym, pogodnym, optymistycznym, uczuciowym, aktywnym usposobieniu, wrażliwy. Jest to osoba otwarta na relacje interpersonalne, towarzyska, beztroska. Lubi być w centrum zainteresowania, władcza i dominująca, czasem dumna i spoglądająca na innych „z góry". Jest emocjonalna i spontaniczna, ma duże poczucie humoru, potrafi przyciągać do siebie ludzi. Tryska energią i entuzjazmem, jest twórcza, lubi komplementy, szybko przeprasza. Łatwo dostosowuje się do zmiennych warunków życia, jest odporny na trudności.

Znajomość typów osobowości decyduje o skuteczności naszej pracy. Niewątpliwie każdy z nas jest inny niepowtarzalny, ale mimo ludzie wykazują wiele cech wspólnych, które można pogrupować właśnie w następujące kategorie:

- sposób reagowania,
- sposób ubierania się
- sposób mówienia,
- analizowania sytuacji
- działania w sytuacji stresującej,
- formą spędzania wolnego czasu.

Ludzie są „mieszaniną" różnych typów osobowości, ale zawsze jeden typ jest dominujący. Każda osobowość ma swoje słabe i mocne strony. Możemy to dostrzec zarówno w życiu prywatnym i zawodowym. Znajomość typów osobowości, a dokładnie określenie, który typ dominuje może być przydatną umiejętnością w kontaktach z innymi ludźmi np. wspólnikami, kontrahentami, czy klientami.

W tabeli podano kilka przydatnych wskazówek jak zachowywać się w kontaktach zawodowych z ludźmi odznaczającymi się poszczególnymi typami osobowości

Tabela 1. Typy osobowości

TYP OSOBOWOŚCI	Jak NALEŻY postępować	Jak NIE NALEŻY postępować
Sangwinik Należy go obdarzyć uwagą i podziwem. Współpracując z nim można wykorzystać jego naturalne zdolności w łatwym nawiązywaniu kontaktu z innymi oraz wielką kreatywność. Słowa, które najłatwiej docierają do sangwinika to: kolorowo, wesoło, bezpłatnie, zabawnie.	• Zostaw trochę czasu na nawiązanie relacji towarzyskich; • Rozmawiaj o ludziach, którzy mogą wzbudzić ich zainteresowanie; • Pytaj o ich opinie oraz obserwacje dotyczące ludzi; • Przedstawiaj pomysły, które można przełożyć na konkretne działania • Nie spiesz się • Przedstaw się jako osoba wesoła, rezolutna, towarzyska • Przedstaw opinie ludzi wpływowych, uznawanych za autorytety • Zaoferuj pozytywne wzmocnienia dla ich chęci podjęcia ryzyka	• Nie formalizuj • Przedstawiaj sprawę w sposób efektowny, zajmujący • Nie bądź lakoniczny i małomówny • W celu uzasadnienia nie sięgaj do liczb i oderwanych pojęć • Nie pozostawiaj decyzji zawieszonych w powietrzu • Nie przedstawiaj się jako osoba nastawiona jedynie na ce • Nie daj się wciągnąć w jego wizje, ponieważ możesz stracić swój czas • Nie traktuj ich z góry • Nie bądź zasadniczy
Melancholik Ciągle dąży do doskonałości. Mocne strony to: dokładność, dbałość o szczegóły, sprawiedliwość, zorganizowanie, estetyka, działa według planu. Kluczowymi słowami dla melancholików są: "szczegółowe", "intelektualne", "wrażliwe", "systematyczne", "zorganizowane".	• Przygotuj się bardzo starannie • Przyjmij podejście bezpośrednie i prostolinijne, skup się na sprawie • Stosuj podejście intelektualne • Przedstaw konkrety i dotrzymuj słowa • Nie spiesz się Bądź wytrwały • Naszkicuj planowe podejście do wdrażania działań według rozpisanego terminarza; zapewnij, że nie będzie żadnych niespodzianek • Jeśli się nie zgadzasz – uzasadnij faktami i liczbami • Daj im czas, aby mogli wszystko przemyśleć i przeanalizować • Staraj się, aby dowody na poparcie twojego stanowiska były spójne i oparte na faktach	• Nie bądź niezorganizowany, ani bałaganiarski • Nie bądź zbyt swobodny w zachowaniu • Nie przyspieszaj procesu podejmowania decyzji • Nie bądź beztroski wobec wymagań • Rozpoczętą sprawę zawsze doprowadź do końca • Nie sprawiaj wrażenia osoby wahającej się • Nie pozostawiaj rzeczy własnemu biegowi • Nie próbuj się przypochlebiać • Nie używaj niesprawdzonych opinii i przypuszczeń jako dowodu • Nie stosuj manipulacji ani "sztuczek"- Nie naciskaj oraz nie dawaj niewykonalnych terminów
Choleryk Cechuje go działanie, osiąganie wyznaczonych celów. Doskonale sobie radzi w sytuacjach trudnych. Nie potrafi przyznać się do błędu. Ma skłonności do manipulowania ludźmi. Mocne strony to: zdecydowanie, aktywność, umiejętność szybkiego rozwiązywania problemów. Szybko podejmuje decyzje. Słabe strony to: arogancja, nerwowość, zbytnia pewność siebie, upór. Dla choleryka ważne są następujące słowa: praktyczne, porywające, odważne, śmiałe.	• Bądź konkretny i zwięzły. • Miej jasno wyznaczone cele oraz argumenty na ich poparcie. • Przedstawiaj fakty logicznie, sprawnie zaplanuj prezentację. • Zadawaj szczegółowe pytania. • Dostarcz alternatyw, aby mogli sami dokonać wyboru. • Przedstawiaj fakty świadczące o prawdopodobieństwie osiągnięcia sukcesu. • Jeśli nie zgadzasz się podkreślaj, że nie zgadzasz się z faktami, a nie z osobą. • Motywuj i perswaduj poprzez odwoływanie się do celów i wyników.	• Nie przeskakuj z tematu na temat, nie marnuj ich czasu. • Nie bądź niezorganizowany i bałaganiarski. • Nie pozostawiaj luk i niedopowiedzeń, jeśli nie chcesz zostać niemile zaskoczony ich reakcją. • Nie zadawaj pytań retorycznych lub nieużytecznych. • Nie przychodź z gotowymi decyzjami i nie decyduj za nich. • Nie staraj się kierować rozmową.
Flegmatyk Jest niezauważany i niedoceniany, potrzebuje szacunku. Mocne stron to: bezkonfliktowość, opanowanie, rozwaga, stabilność, uprzejmość. Doskonały słuchacz, sprawdza się w mediacjach. Słabymi stronami są: niezdecydowanie, odwlekanie decyzji, niezaangażowanie, niechęć do zmian. W rozmowie z flegmatykiem należy posługiwać się zwrotami: łatwe w użyciu, proste w obsłudze, nie wymagające wysiłku.	• Wspieraj ich wizje, marzenia i zamiary • Zostaw trochę czasu na nawiązanie relacji towarzyskich • Rozmawiaj o ludziach, którzy mogą wzbudzić ich zainteresowanie • Pytaj o ich opinie oraz obserwacje dotyczące ludzi • Przedstawiaj pomysły, które można przełożyć na konkretne działania • Nie spiesz się • Przedstaw się jako osoba wesoła, rezolutna, towarzyska • Przedstaw opinie ludzi wpływowych, uznawanych za autorytety • Zaoferuj pozytywne wzmocnienia dla ich chęci podjęcia ryzyka	• Nie formalizuj • Przedstawiaj sprawę w sposób efektowny, zajmujący • Nie bądź lakoniczny i małomówny • W celu uzasadnienia nie sięgaj do liczb i oderwanych pojęć • Nie pozostawiaj decyzji zawieszonych w powietrzu • Nie przedstawiaj się jako osoba nastawiona jedynie na cel • Nie daj się wciągnąć w jego wizje, ponieważ możesz stracić swój czas • Nie traktuj ich z góry • Nie bądź zasadniczy

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: www.biznes-rodzina.pl/index.php/artykuly/sprzedaz/272-typy-osobowoci,

Czy przedsiębiorcy lubią ryzyko?

Rozpoczęcie własnej działalności oznacza konieczność działania w warunkach niepewności. Przedsiębiorca musi sobie z ta niepewnością radzić. Aby utrzymać się na rynku i dokonywać trafnych wyborów musi właściwie ocenić ryzyko i unikać działań niosących ze sobą zbyt wysokie ryzyko. Aby dowiedzieć się, jaka jest skłonność do podejmowania ryzyka wśród przedsiębiorców przeprowadzono badanie. Porównano w nim dwie grupy – menedżerów pracujących w różnych organizacjach i przedsiębiorców. Badanie polegało na metaanalizie - zestawiono ze sobą wyniki wielu badań dotyczących tego samego problemu i oceniono w sposób ilościowy jego powtarzalność (Stewart, Roth, 2001). Zauważono, że skłonność do podejmowania ryzyka u osób prowadzących własną firmę jest delikatnie wyższa niż u menedżerów. Różnica, jaką ustalono, nie okazała się tak duża, jak można było przypuszczać na podstawie powszechnych opinii. Różnica pomiędzy tym jak większość spostrzega przedsiębiorców a wynikiem metaanalizy, może wynikać z tego, że w większości badań ocena ryzyka opiera się na ocenie hipotetycznych działań. Ponadto istotne znaczenie może mieć rodzaj ryzyka.

Można wyróżnić ryzyko losowe, kiedy rezultat ryzykownej sytuacji nie zależy od decydenta, a od czynników całkowicie losowych np. sytuacji makroekonomicznej w kraju; oraz ryzyko kontrolowane, w którym osoba podejmująca decyzję ma wpływ na rezultaty sytuacji, przykładem jest sytuacja ubiegania się o dofinansowanie działalności. Jeżeli bieg zdarzeń jest zależny od osoby, czyli kiedy sytuacja jest kontrolowalna to osoba powinna nie tylko dokonać właściwej oceny ryzyka, ale także określić co zrobić, jak wpłynąć na tę sytuację by osiągnąć pożądane rezultaty. Osoba starająca się o dofinansowanie, musi tak opracować swój biznes plan, by szanse na jego otrzymanie były możliwie jak największe.

Osoby prowadzące własną firmę oceniają ryzyko z tym związane, jako podlegające ich kontroli, w odróżnieniu od ryzyka występującego w hazardzie, które całkowicie pozostaje poza kontrolą (Z. Shapira, 1994, za: T. Zaleśkiewicz, 2004). W badaniu zaobserwowano, że sposobem uzyskania poczucia wpływu na sytuację wśród menedżerów jest przygotowanie się na ewentualne trudności i problemy, analizują oni informacje napływające z rynku oraz planują przyszłe działania. Przedsiębiorcy charakteryzują się wewnętrznym poczuciem kontroli. Można przewidywać, że będą więc bardziej skłonni zaryzykować, gdy ocenią iż mogą w dużym stopniu kontrolować działanie. Natomiast, gdy wpływ na sytuację będą miały przypadkowe czynniki, przedsiębiorca prawdopodobnie się w nią nie zaangażuje.

1.3. Od koncepcji do działania – planowanie biznesu

Cechy skutecznego menadżera

Zarządzanie zespołem ludzi wymaga umiejętności szybkiego podejmowania decyzji, prawidłowego zarządzania emocjami, stawiania celów, motywowania oraz asertywności.

Osoba zarządzająca (lider) powinien odznaczać się następującymi cechami:

1. wysokim poczuciem własnej wartości,
2. asertywnością,
3. empatią,
4. dyrektywnością,
5. samodyscypliną,
6. umiejętnością zarządzania emocjami,
7. umiejętnością rozładowywania konfliktów,
8. umiejętnością wyznaczanie celów,
9. umiejętnością motywowania,
10. odpornością na stres.

Menedżer musi być pewien swoich umiejętności, spójny wewnętrznie. Powinien w sposób jasny i klarowny wyrazić swoją opinię zarówno pozytywną jak i negatywną. Wyrażając opinie negatywną (krytykę) należy podkreślić, że uwagi ukierunkowane są na sposób działania a nie krytykę osoby. Umiejętność wczuwania się, zrozumienie problemów i zachowań pracowników, pozwala na korygowanie polityki kadrowej, odpowiedni dobór osób do zadań. Powinien odznaczać się zdolnością do zarządzania, podejmowania niestandardowych decyzji, stawiać wymagania i egzekwować je. Samodyscyplina to cecha, pozwalająca osiągać cele, zdobywać sukcesy i realizować plany. Dzięki umiejętności zarządzania emocjami dobry menedżer potrafi skutecznie negocjować, rozładowywać sytuacje konfliktowe, przewodzić grupie ludzi pod presją czasu, podejmować trudne i ryzykowne wyzwania i podołać im w zaplanowanym czasie. Skuteczne zarządzanie emocjami pozwala na zapanowanie nad kryzysem w firmie i panowanie nad nastrojami w grupie. Umiejętność rozładowywania konfliktów związana jest z budowaniem dobrej atmosfery w grupie, otwierającej przestrzeń do skutecznej współpracy nawet w sytuacji po powstaniu napięcia lub ostrego konfliktu. Umiejętność rozładowywania konfliktów związana jest z empatią i umiejętnościami negocjacyjnymi. Zadaniem menedżera jest wyznaczanie i realizacja celów. Dobry lider powinien także wiedzieć jak motywować pracowników, w jaki sposób wzbudzić entuzjazm i chęć do wykonywania zadań. W pracy menedżera stres jest codziennością, dlatego nie może on mieć wpływu na sposób działania i proces podejmowania decyzji. Menedżer, powinien być osoba odporną na stres.

Zarządzanie przedsiębiorstwem

Przedsiębiorcy by utrzymać się na rynku muszą nauczyć się zarządzać przedsiębiorstwem. Działania menedżerów powinny być przemyślane, oparte na faktach, na określonym planie działania. Prawidłowe zarządzanie to także jego rozwój. Nie wolno liczyć na „szczęśliwy przypadek". Wszelkie działania menedżerów powinny być przemyślane i zaplanowane. Planowanie to świadome ustalenie kierunków działania i podejmowanie decyzji opartych na celach, faktach i dobrze przemyślanych ocenach (C. Barrow i P. Barrow, 1992).

Zasady planowania są to normy i reguły postepowania w tworzeniu planów oraz ich realizacji. Zróżnicowanie zasad planowania zależy od wielkości zasięgu działania, charakteru, struktury organizacyjnej podmiotu. Zasady planowania są zróżnicowane i zależą od rodzaju prognozowanego planu. Wyróżniamy **planowanie:** strategiczne, taktyczne, operacyjne, długookresowe, krótkoterminowe. **Plan strategiczny** to zbiór decyzji określających cele i ich zmiany wynikające z konieczności przystosowania się do zmian w otoczeniu, zasoby niezbędne do osiągnięcia założonych celów oraz sposoby ich pozyskania, rozmieszczenia i użytkowania (J.A.F. Stoner i Ch. Wankel, 1996). **Plan taktyczny** to zbiór decyzji określających cele pośrednie względem celów sformułowanych przez plan strategiczny (A.K. Koźmiński i W. Piotrowski, 1996). **Plan operacyjny** to zbiór decyzji określających konkretne zadania i działania konieczne do poprawnego ich wykonywania w przewidzianym ściśle czasie oraz warunki, które muszą być dotrzymane przy realizacji zadań (A.M. Zawiślak, 1978). Ważna jest **strategia** przedsiębiorstwa. Strategia to koncepcja prowadzenia działań. To także długofalowy plan określający kierunek działań, metod i narzędzi ich wdrażania. Jest to wyznacznik podejmowanych decyzji merytorycznych, organizacyjnych i finansowych. Określa specyfikę działania.

Zarządzanie strategiczne to kierowanie rozwojem organizacji w długim czasie, nastawione na wykorzystanie szans i unikanie zagrożeń pojawiających się w otoczeniu. Jest to ciągły proces osiągania zamierzonych celów, polegający na użyciu właściwych środków w konkretnym czasie i miejscu przy uwzględnieniu istniejących ograniczeń.

Tabela 2. Cechy planów strategicznych, operacyjnych i taktycznych

CECHY	PLAN		
	STRATEGICZNY	TAKTYCZNY	OPERACYJNY
Zakres	jeden główny aspekt	duża liczba pól	pojedyncze działanie lub zadania
Złożoność	bardzo dużo zmiennych	wiele zmiennych	mała liczba zamiennych
Cel planowania	misja organizacji	doprowadzenie do pożądanych rezultatów w krótkim czasie	wykonanie zadania
Charakter czynności planistycznych	twórczy	bilansujący i alokacyjny	odtwórczy postepowanie według wytycznych
Agregacja informacji	wysoka	niska	niska

Źródło: www.wse.waw.pl/aa%20materialy%20dydaktyczne/E_Ekonomika%20i%20organizacja%20przedsiebiorstw_Ryzlak.pdf

Planowanie strategiczne jest integralną częścią zarządzania, musi uwzględniać ograniczenia takie jak: bariery finansowe, ograniczenia zasobowe, niedostateczna ilość informacji, sprzeczne interesy grup, brak kompetencji, czy działania konkurencji. Planowanie strategiczne to proces, w którym przedsiębiorstwo określa miejsce, jakie chce zajmować w przyszłości oraz sposoby, jakie wykorzysta by wyznaczony cel osiągnąć. Źródło całościowego obrazu i analizy organizacji oraz związanego z nią otoczenia.

Planowanie taktyczne określa zadania ogólne dla całej organizacji. Konkretyzuje cele i kierunki działania ustalone w planie strategicznym. W razie potrzeby aktualizuje je, modeluje i dostosowuje do warunków panujących w otoczeniu. Formułowany jest najczęściej na okres jednego roku. Wskazane jest by zawierał część techniczna i finansową.

Planowanie operacyjne. Podstawowym elementem właściwej organizacji pracy i zapewnienie prawidłowego funkcjonowania jest planowanie operacyjne. Wynika ono z planu taktycznego i obejmuje krótkie odcinki czasowe np. kwartał, miesiąc. Planowanie operacyjne posługuje się konkretnymi zadaniami, które są przeznaczone do realizacji. Zadanie te powierzone konkretnym osobom, wykonawcom. Planowanie operacyjne nazywa się także planowaniem bieżącym lub wykonawczym.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Zastanów się, jaki rodzaj działalności chciałbyś prowadzić- określ ideę własnej działalności i uzasadnij, dlaczego chciałbyś się nią zająć.
2. Czy wolontariat może stanowić źródło inspiracji i doświadczenia dla przyszłej działalności?- odpowiedź uzasadnij.
3. Wymień i scharakteryzuj cechy osoby przedsiębiorczej.
4. Jakie zasoby mogą być/ są przydatne w prowadzeniu działalności gospodarczej?
5. Czym są i jakie znasz umiejętności obywatelskie? Czy mogą być one przydatne w prowadzeniu własnej działalności?
6. Wiedząc, na czym polega proces planowania, w grupach 2-4 osobowych, spróbujcie sformułować zasady planowania.
7. Wyjaśnij korzyści wynikające z planowania działań.

1.4. Wybór formy działalności

Decydując się na prowadzenie własnej działalności gospodarczej należy zastanowić się na odpowiednią do potrzeb formą prawną naszego przedsięwzięcia.

Przedsiębiorstwa, funkcjonujące na rynku można podzielić na następujące kategorie:

- Przedsiębiorstwa państwowe;
- Spółdzielnie;
- Spółki;
- Jednoosobowa działalność gospodarcza.

Schemat 1. Rodzaje przedsiębiorstw

Przedsiębiorstwa					
Spółki			Przedsiębiorstwa państwowe	Spółdzielnie	Jednoosobowa działalność gospodarcza
Osobowe	Kapitałowe	Cywilna			
Jawna	z ograniczoną odpowiedzialnością				
Partnerska	Akcyjna				
Komandytowa					
Komandytowo - akcyjna					

Źródło: Opracowanie własne, za: Kodeks cywilny, Kodeks spółek handlowych, Ustawa o przedsiębiorstwach państwowych, Prawo spółdzielcze.

Przedsiębiorstwa państwowe

Przedsiębiorstwo państwowe jest samodzielnym, samorządnym i samofinansującym się przedsiębiorcą posiadającym osobowość prawną. Działa ono zawsze w pewnym, z góry określonym celu. Najbardziej znanym przykładem takiego właśnie przedsiębiorstwa państwowego jest Poczta Polska[2].

Przedsiębiorstwa państwowe tworzą: naczelne oraz centralne organy administracji państwowej oraz Narodowy Bank Polski i banki państwowe. Organami przedsiębiorstwa państwowego są: ogólne zebranie pracowników (delegatów), rada pracownicza i dyrektor przedsiębiorstwa[3].

Spółdzielnie

Spółdzielnia jest dobrowolnym zrzeszeniem nieograniczonej liczby osób, o zmiennym składzie osobowym i zmiennym funduszu udziałowym, które w interesie swoich członków prowadzi wspólną działalność gospodarczą. Spółdzielnia może prowadzić działalność społeczną i oświatowo-kulturalną na rzecz swoich członków i ich środowiska[4] ().

Osoby zamierzające założyć spółdzielnię (założyciele) uchwalają statut spółdzielni, potwierdzając jego przyjęcie przez złożenie pod nim swoich podpisów, oraz dokonują wyboru organów spółdzielni, których wybór należy w myśl statutu do kompetencji walnego zgromadzenia, lub komisji organizacyjnej w składzie, co najmniej trzech osób. Spółdzielnia podlega obowiązkowi wpisu do Krajowego Rejestru Sądowego.

Członkiem spółdzielni może być każda osoba fizyczna o pełnej zdolności do czynności prawnych, która odpowiada wymaganiom określonym w statucie. Warunkiem przyjęcia na członka jest złożenie deklaracji.

2. Wykaz przedsiębiorstw państwowych według stanu na dzień 31.12.2012 r., http://nadzor.msp.gov.pl/portal/nad/import/11/, 10.03.2013.
3. Ustawa z dnia 25 września 1981 r. o przedsiębiorstwach państwowych, (t.j. Dz. U. 2002 nr 112 poz. 981)
4. Ustawa z dnia 16 września 1982 r. Prawo spółdzielcze, (t.j. Dz. U. 2003 nr 188 poz. 1848)

Deklaracja powinna być złożona pod nieważnością w formie pisemnej. Podpisana przez przystępującego do spółdzielni deklaracja powinna zawierać jego imię i nazwisko oraz miejsce zamieszkania, a jeżeli przystępujący jest osobą prawną - jej na-zwę i siedzibę, ilość zadeklarowanych udziałów, dane dotyczące wkładów, jeżeli statut ich wnoszenie przewiduje, a także inne dane przewidziane w statucie.

Organami spółdzielni są:

- walne zgromadzenie lub zebrania grup członkowskich - najwyższym organem spółdzielni.
- rada nadzorcza - sprawuje kontrolę i nadzór nad działalnością spółdzielni.
- zarząd - kieruje działalnością spółdzielni oraz reprezentuje ją na zewnątrz.

Jednoosobowa działalność gospodarcza

Jedną z form prowadzenia aktywności gospodarczej jest jednoosobowa działalność gospodarcza, prowadzona przez osobę fizyczną, która w największym stopniu umożliwia samodzielne działanie i daje możliwość zarządzania przedsiębiorstwem.

Osoba fizyczna, prowadząc działalność w tej formie indywidualni zaciąga zobowiązania w swoim imieniu a także na swoją rzecz. Jednocześnie działalność gospodarcza jest prowadzona i reprezentowana przez właściciela. Za wszelkie zobowiązania przedsiębiorca odpowiada w sposób wyłączny i bez żadnych ograniczeń zarówno majątkiem przedsiębiorstwa, jak majątkiem osobistym (W. Nowakowski, 2011).

Tabela 3. Zalety i wady prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej

Zalety prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej	Wady prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej
1. zadowolenie z tworzenia nowych rzeczy i poczucie realizacji podjętego celu, 2. gwarancja zatrudnienia - dopóki firma będzie istniała, to nikt nas z niej nie wyrzuci, 3. autonomia i elastyczność w wyborze sposobu wykonywania określonych i wymaganych przez charakter pracy działań, 4. większa satysfakcja niż wówczas, gdy pracuje się dla kogoś niż dla siebie.	1. ryzyko niepowodzenia przedsięwzięcia i konieczność nieustannego zabiegania o utrzymanie odpowiedniego poziomu sprzedaży usług/produktów, 2. konieczność pracy w wymiarze wyższym niż etat czyli 8 godzin dziennie, 3. konieczność prowadzenia dodatkowej dokumentacji podatkowej, ZUS 4. konieczność stałego monitorowania zmian przepisów kodeksu pracy, zasad higieny pracy i bezpieczeństwa, 5. podjęcie odpowiedzialności finansowej i prawnej, zarówno za siebie, jak i za pracowników.

Źródło: www.twoja-firma.pl/artykuly/2,zalety-i-wady-prowadzenia-wlasnej-firmy.html, 7.03.2013.

Spółka cywilna

Spółka cywilna stanowi najpopularniejszą formę prowadzenia działalności gospodarczej, której wykonywanie reguluje Kodeks Cywilny[5].

Zgodnie z ustawową definicją, umowa spółki cywilnej może łączyć wyłącznie przedsiębiorców i musi mieć na celu osiągnięcie określonego celu gospodarczego. Umowa spółki cywilnej może być zawarta w celu prowadzenia każdej dopuszczalnej prawem działalności gospodarczej. Umowa spółki powinna być stwierdzona pismem. Niezachowanie takiej formy nie pociąga za sobą żadnych ujemnych skutków w zakresie powstania spółki, skutkuje jedynie ograniczeniami w zakresie dowodzenia faktu zawarcia umowy czy też jej treści. Umowa spółki powinna szczegółowo wskazywać wspólny cel gospodarczy, a także zawierać określenie sposobu działania każdego ze wspólników dla osiągnięcia zamierzonego celu (W. Nowakowski, 2011).

Umowa spółki cywilnej w szczególności powinna określać:

- imiona i nazwiska wspólników,
- miejsce i zakres działalności,
- obszar działania,
- wysokość wnoszonych kapitałów,
- zakres odpowiedzialności wspólników,

5. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. - Kodeks cywilny (Dz. U. nr 16 poz. 93 ze zm.) - dalej cytowana jako: KC

- uczestnictwo w zyskach i stratach spółki,
- czas trwania spółki,
- sposób rozwiązania spółki,
- spółka cywilna nie posiada osobowości prawnej.

Wkład wspólnika może polegać na wniesieniu do spółki własności lub innych praw albo na świadczeniu usług. Domniemywa się, że wkłady wspólników mają jednakową wartość. Wspólnik nie może rozporządzać udziałem we wspólnym majątku wspólników ani udziałem w poszczególnych składnikach tego majątku.

W czasie trwania spółki :

- wspólnik nie może domagać się podziału wspólnego majątku wspólników,
- wierzyciel wspólnika nie może żądać zaspokojenia z jego udziału we wspólnym majątku wspólników ani z udziału w poszczególnych składnikach tego majątku.

Za zobowiązania spółki wspólnicy odpowiedzialni są solidarnie.

Każdy wspólnik jest uprawniony i zobowiązany do prowadzenia spraw spółki i może bez uprzedniej uchwały wspólników:

- prowadzić sprawy, które nie przekraczają zakresu zwykłych czynności spółki - jeżeli jednak przed zakończeniem takiej sprawy chociażby jeden z pozostałych wspólników sprzeciwi się jej prowadzeniu, potrzebna jest uchwała wspólników,
- wykonać czynność nagłą, której zaniechanie mogłoby narazić spółkę na niepowetowane straty.

W braku odmiennej umowy lub uchwały wspólników każdy wspólnik jest umocowany do reprezentowania spółki w takich granicach, w jakich jest uprawniony do prowadzenia jej spraw.

Każdy wspólnik jest uprawniony do równego udziału w zyskach i w tym samym stosunku uczestniczy w stratach, bez względu na rodzaj i wartość wkładu. W umowie spółki można inaczej ustalić stosunek udziału w zyskach i stratach, można nawet zwolnić niektórych wspólników od udziału w stratach. Natomiast nie można wyłączyć wspólnika od udziału w zyskach.

Ustalony w umowie stosunek udziału wspólnika w zyskach odnosi się w razie wątpliwości także do udziału w stratach.

Spółki osobowe i kapitałowe

Tworzenie, organizację, funkcjonowanie, rozwiązywanie, łączenie, podział i przekształcanie spółek osobowych i kapitałowych reguluje Kodeks spółek handlowych[6].

Podstawowe kryterium odróżniające spółki osobowe od kapitałowych to fakt, że w spółkach osobowych wspólnicy angażują zarówno swój majątek jak i osobistą pracę, a w spółce kapitałowej wspólnicy są wyłączenia z osobistej odpowiedzialności za zobowiązania spółki.

Spółki osobowe to:	Spółki kapitałowe to :
• spółka jawna, • spółka partnerska, • spółka komandytowa, • spółka komandytowo- akcyjna.	• spółka z ograniczoną odpowiedzialnością, • spółka akcyjna.

Spółki osobowe

Spółką jawną[7] jest spółka osobowa, która prowadzi przedsiębiorstwo pod własną firmą. Firma spółki jawnej powinna zawierać nazwiska lub firmy (nazwy) wszystkich wspólników albo nazwisko albo firmę (nazwę) jednego albo kilku wspólników oraz dodatkowe oznaczenie „spółka jawna". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp. j."

6. Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych (Dz. U. nr 94 poz. 1037 ze zm.) - dalej cytowana jako: KSH.
7. art. 22-85 KSH

Spółką partnerską[8] jest spółka osobowa, utworzona przez wspólników (partnerów) w celu wykonywania wolnego zawodu w spółce prowadzącej przedsiębiorstwo pod własną firmą. Spółka może być zawiązana w celu wykonywania więcej niż jednego wolnego zawodu. Partnerami w spółce mogą być wyłącznie osoby fizyczne, uprawnione do wykonywania następujących zawodów: adwokata, aptekarza, architekta, inżyniera budownictwa, biegłego rewidenta, brokera ubezpieczeniowego, doradcy podatkowego, maklera papierów wartościowych, doradcy inwestycyjnego, księgowego, lekarza, lekarza dentysty, lekarza weterynarii, notariusza, pielęgniarki, położnej, radcy prawnego, rzecznika patentowego, rzeczoznawcy majątkowego i tłumacza przysięgłego.

Firma spółki partnerskiej powinna zawierać nazwisko- co najmniej jednego partnera, dodatkowe oznaczenie „i partner" bądź „i partnerzy" albo „spółka partnerska" oraz określenie wolnego zawodu wykonywanego w spółce. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp.p."

Spółką komandytową[9] jest spółka osobowa, mająca na celu prowadzenie przedsiębiorstwa pod własną firmą, w której wobec wierzycieli za zobowiązania spółki, co najmniej jeden wspólnik odpowiada bez ograniczenia (komplementariusz), a odpowiedzialność co najmniej jednego wspólnika (komandytariusza) jest ograniczona.

Firma spółki komandytowej powinna zawierać nazwisko jednego lub kilku komplementariuszy oraz dodatkowe oznaczenie „spółka komandytowa". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp.k.". Jeżeli komplementariuszem jest osoba prawna, firma spółki komandytowej powinna zawierać pełne brzmienie firmy (nazwy) tej osoby prawnej z dodatkowym oznaczeniem „spółka komandytowa". Nie wyklucza to zamieszczenia nazwiska komplementariusza, który jest osobą fizyczną. Nazwisko komandytariusza nie może być zamieszczane w firmie spółki.

Spółką komandytowo-akcyjną[10] jest spółka osobowa mająca na celu prowadzenie przedsiębiorstwa pod własną firmą, w której wobec wierzycieli za zobowiązania spółki, co najmniej jeden wspólnik odpowiada bez ograniczenia (komplementariusz), a co najmniej jeden wspólnik jest akcjonariuszem. Firma spółki komandytowo-akcyjnej powinna zawierać nazwiska jednego lub kilku komplementariuszy oraz dodatkowe oznaczenie „spółka komandytowo-akcyjna". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „S.K.A." Jeżeli komplementariuszem jest osoba prawna, firma spółki komandytowo-akcyjnej powinna zawierać pełne brzmienie firmy (nazwy) tej osoby prawnej z dodatkowym oznaczeniem „spółka komandytowo-akcyjna". Nie wyklucza to zamieszczenia nazwiska komplementariusza, który jest osobą fizyczną. Nazwisko albo firma (nazwa) akcjonariusza nie może być zamieszczane w firmie spółki.

8. art. 86-101 KSH
9. art. 102-124 KSH
10. art. 125 - 150 KSH

Tabela 4. Charakterystyka porównawcza spółek osobowych

Kryterium	spółka jawna	spółka partnerska	spółka komandytowa	spółka komandytowo- akcyjna
Dokument założycielski	Umowa spółki powinna być zawarta na piśmie pod rygorem nieważności	Umowa spółki powinna być zawarta na piśmie pod rygorem nieważności	Umowa spółki powinna być zawarta w formie aktu notarialnego	Statut spółki powinien być sporządzony w formie aktu notarialnego
Min. wysokość kapitału zakładowego	Nieokreślona	Nieokreślona	Nieokreślona	50 000 zł
Odpowiedzialność za zobowiązania	Każdy wspólnik odpowiada za zobowiązania spółki bez ograniczenia całym swoim majątkiem solidarnie z pozostałymi wspólnikami oraz ze spółką.	Partner nie ponosi odpowiedzialności za zobowiązania spółki : powstałe w związku z wykonywaniem przez pozostałych partnerów wolnego zawodu w spółce, będące następstwem działań lub zaniechań osób zatrudnionych przez spółkę na podstawie umowy o pracę lub innego stosunku prawnego, które podlegały kierownictwu innego partnera przy świadczeniu usług związanych z przedmiotem działalności spółki.	Komandytariusz odpowiada za zobowiązania spółki wobec jej wierzycieli tylko do wysokości sumy komandytowej.	Co najmniej jeden wspólnik –komplementariusz – za zobowiązania spółki co odpowiada bez ograniczenia Akcjonariusz nie odpowiada za zobowiązania spółki.
Prowadzenie spraw i reprezentacja	Każdy wspólnik ma prawo reprezentować spółkę. Każdy wspólnik ma prawo i obowiązek prowadzenia spraw spółki.	Każdy partner ma prawo reprezentować spółkę samodzielnie, chyba że umowa spółki stanowi inaczej. Umowa spółki partnerskiej może przewidywać, że prowadzenie spraw i reprezentowanie spółki powierza się zarządowi	Spółkę reprezentują komplementariusze, których z mocy umowy spółki albo prawo-mocnego orzeczenia sądu nie pozbawiono prawa reprezentowania spółki. Komandytariusz może reprezentować spółkę jedynie jako pełnomocnik. Komandytariusz nie ma prawa ani obowiązku prowadzenia spraw spółki, chyba że umowa spółki stanowi inaczej.	Spółkę reprezentują komplementariusze, których z mocy statutu lub prawomocnego orzeczenia sądu nie pozbawiono prawa reprezentowania spółki. W spółce można ustanowić radę nadzorczą - jeżeli liczba akcjonariuszy przekracza dwadzieścia pięć osób, ustanowienie rady nadzorczej jest obowiązkowe. Rada nadzorcza sprawuje stały nadzór nad działalnością spółki we wszystkich dziedzinach jej działalności. Akcjonariusz może reprezentować spółkę jedynie jako pełnomocnik. Każdy komplementariusz ma prawo i obowiązek prowadzenia spraw spółki.
Podział zysku i strat	Każdy wspólnik ma prawo do równego udziału w zyskach i uczestniczy w stratach w tym samym stosunku bez względu na rodzaj i wartość wkładu. Określony w umowie spółki udział wspólnika w zysku odnosi się, w razie wątpliwości, także do jego udziału w stratach. Umowa spółki może zwolnić wspólnika od udziału w stratach.	Każdy wspólnik ma prawo do równego udziału w zyskach i uczestniczy w stratach w tym samym stosunku bez względu na rodzaj i wartość wkładu. Określony w umowie spółki udział wspólnika w zysku odnosi się, w razie wątpliwości, także do jego udziału w stratach. Umowa spółki może zwolnić wspólnika od udziału w stratach.	Komandytariusz uczestniczy w zysku spółki proporcjonalnie do jego wkładu rzeczywiście wniesionego do spółki, chyba że umowa spółki stanowi inaczej. Zysk przypadający komandytariuszowi za dany rok obrotowy jest przeznaczany w pierwszej kolejności na uzupełnienie jego wkładu rzeczywiście wniesionego do wartości umówionego wkładu. W razie wątpliwości komandytariusz uczestniczy w stracie jedynie do wartości umówionego wkładu.	Komplementariusz oraz akcjonariusz uczestniczą w zysku spółki proporcjonalnie do ich wkładów wniesionych do spółki, chyba że statut stanowi inaczej.

Źródło: Kodeks spółek handlowych

Spółki kapitałowe

Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością[11] może być utworzona przez jedną albo więcej osób w każdym celu prawnie dopuszczalnym. Firma spółki może być obrana dowolnie; powinna jednak zawierać dodatkowe oznaczenie „spółka z ograniczoną odpowiedzialnością". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „spółka z o.o." lub„sp. z o.o.".

Zawiązać **spółkę akcyjną**[12] może jedna albo więcej osób. Spółka akcyjna nie może być zawiązana wyłącznie przez jednoosobową spółkę z ograniczoną odpowiedzialnością. Firma spółki może być obrana dowolnie, powinna zawierać dodatkowe oznaczenie „spółka akcyjna". Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „S.A."

Tabela 5. Charakterystyka porównawcza spółek kapitałowych

Kryterium	Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością	Spółka akcyjna
Dokument założycielski	Umowa spółki powinna być zawarta w formie aktu notarialnego	Statut spółki powinien być sporządzony w formie aktu notarialnego
Minimalna wysokość kapitału zakładowego	Kapitał zakładowy spółki powinien wynosić co najmniej 5 000 złotych. Wartość nominalna udziału nie może być niższa niż 50 złotych .Kapitał zakładowy spółki dzieli się na udziały o równej albo nierównej wartości nominalnej.	Kapitał zakładowy spółki powinien wynosić co najmniej 100 000 złotych. Wartość nominalna akcji nie może być niższa niż 1 grosz Statut spółki może określać minimalną lub maksymalną wysokość kapitału zakładowego. Kapitał zakładowy spółki dzieli się na akcje o równej wartości nominalnej.
Odpowiedzialność za zobowiązania	Za zobowiązania spółki odpowiada spółka całym swoim majątkiem Jeżeli egzekucja przeciwko spółce okazała się bezskuteczna, członkowie zarządu odpowiadają solidarnie za jej zobowiązania.	Za zobowiązania spółki odpowiada spółka całym swoim majątkiem Akcjonariusze nie odpowiadają za zobowiązania spółki.
Prowadzenie spraw i reprezentacja	Walne zgromadzenie akcjonariuszy – organ uchwałodawczy Zarząd – organ zarządzający Umowa spółki może ustanowić radę nadzorczą lub komisję rewizyjną albo oba te organy. W spółkach, w których kapitał zakładowy przewyższa kwotę 500 000 złotych, a wspólników jest więcej niż dwudziestu pięciu, powinna być ustanowiona rada nadzorcza lub komisja rewizyjna.	Walne zgromadzenie akcjonariuszy – organ uchwałodawczy Rada nadzorcza – organ nadzorujący Zarząd – organ zarządzający
Podział zysku i strat	Wspólnik ma prawo do udziału w zysku wynikającym z rocznego sprawozdania finansowego i przeznaczonym do podziału uchwałą zgromadzenia wspólników. Jeżeli umowa spółki nie stanowi inaczej, zysk przypadający wspólnikom dzieli się w stosunku do udziałów.	Akcjonariusze mają prawo do udziału w zysku wykazanym w sprawozdaniu finansowym, zbadanym przez biegłego rewidenta, który został przeznaczony przez walne zgromadzenie do wypłaty akcjonariuszom.

Źródło: Kodeks spółek handlowych

Podmioty ekonomii społecznej

W ramach ekonomii społecznej wyodrębnić można zbiór instytucji nazywany przedsiębiorstwami ekonomii społecznej (PES) lub po prostu przedsiębiorstwami społecznymi. Przedsiębiorstwo społeczne może być zdefiniowane, jako prywatna, autonomiczna organizacja dostarczająca produktów lub usług na rzecz szerszej społeczności (*community*), której założycielem albo zarządzającym jest grupa obywateli i w której zakres korzyści materialnych podlega ograniczeniom. Przedsiębiorstwo społeczne przywiązuje dużą wagę do swej autonomii i gotowość do przyjmowania ekonomicznego ryzyka związanegoz prowadzoną w sposób ciągły działalnością społeczno – ekonomiczną (J. Wygnański, 2009).

11. Art. 151-300 KSH.
12. Art. 301-490 KSH.

Stowarzyszenie

Stowarzyszenie jest dobrowolnym, samorządnym, trwałym zrzeszeniem o celach niezarobkowych[13].
Stowarzyszenie:

- samodzielnie określa swoje cele, programy działania i struktury organizacyjne,
- uchwala akty wewnętrzne dotyczące jego działalności,
- opiera swoją działalność na pracy społecznej członków.

Stowarzyszenie mogą założyć osoby pełnoletnie, które posiadają pełną zdolność do czynności prawnych. Osoby małoletnie (czyli od 16 do 18 lat), chociaż nie mogą samodzielnie zakładać stowarzyszenia, mogą do nich należeć. Mogą samodzielnie wybierać władze stowarzyszenia uczestnicząc w walnym zgromadzeniu członków stowarzyszenia.

Tworzenie stowarzyszeń przyjmujących zasadę bezwzględnego posłuszeństwa ich członków wobec władz stowarzyszenia jest zakazane.

Stowarzyszenie zwykłe może utworzyć, co najmniej trzech obywateli, którzy wspólnie chcą prowadzić działalność. Stowarzyszenie takie nie ma możliwości tworzenia oddziałów, zrzeszania osób prawnych, łączenia się w związki stowarzyszeń, prowadzenia działalności gospodarczej, korzystania z ofiarności publicznej, przyjmowania darowizn, dotacji, spadków i zapisów.

Środki na działalność mogą pochodzić wyłącznie ze składek członkowskich.Aby utworzyć stowarzyszenie zwykłe, założyciele muszą uzgodnić regulamin działalności, wskazać siedzibę oraz osobę do reprezentacji. Komplet dokumentów należy złożyćdo starosty powiatu właściwego ze względu na siedzibę organizacji. W ciągu 30 dni od daty złożenia wniosku stowarzyszenie zwykłe może rozpocząć działalność, o ile starosta powiatu nie zakaże jego działalności (P. Szczyrski, 2009), natomiast nie może:

- powoływać terenowych jednostek organizacyjnych,
- łączyć się w związki stowarzyszeń,
- zrzeszać osób prawnych,
- prowadzić działalności gospodarczej,
- przyjmować darowizn, spadków i zapisów oraz otrzymywać dotacji, a także
- korzystać z ofiarności publicznej.

Stowarzyszenie rejestrowe może utworzyć co najmniej piętnaście osób posiadających pełną zdolność do czynności prawnych i nie pozbawionych praw publicznych. Osoby te uchwalają statut stowarzyszenia i wybierają komitet założycielski. Statut stowarzyszenia określa w szczególności:

- nazwę stowarzyszenia, odróżniającą je od innych stowarzyszeń, organizacji i instytucji,
- teren działania i siedzibę stowarzyszenia,
- cele i sposoby ich realizacji,
- sposób nabywania i utraty członkostwa, przyczyny utraty członkostwa oraz prawa i obowiązki członków,
- władze stowarzyszenia, tryb dokonywania ich wyboru, uzupełniania składu oraz ich kompetencje,
- sposób reprezentowania stowarzyszenia oraz zaciągania zobowiązań majątkowych, a także warunki ważności jego uchwał,
- sposób uzyskiwania środków finansowych oraz ustanawiania składek członkowskich,
- zasady dokonywania zmian statutu,
- sposób rozwiązania się stowarzyszenia.

Stowarzyszenie podlega wpisowi do KRS i z chwilą wpisu uzyskują osobowość prawną. Komitet założycielski składa do sądu rejestrowego wniosek o rejestrację wraz ze statutem, listą założycieli, zawierającą imiona i nazwiska, datę i miejsce urodzenia, miejsce zamieszkania oraz własnoręczne podpisy założycieli, protokół z wyboru komitetu założycielskiego, a także informację o adresie tymczasowej siedziby stowarzyszenia.

Najwyższą władzą stowarzyszenia jest walne zebranie członków. W sprawach,w których statut nie określa

13. Ustawa z dnia 7 kwietnia 1989 r. Prawo o stowarzyszeniach (t.j. Dz. U. 2001 nr 79 , poz. 855)

właściwości władz stowarzyszenia, podejmowanie uchwał należy do walnego zebrania członków. Stowarzyszenie jest obowiązane posiadać zarząd i organ kontroli wewnętrznej.

Nadzór nad działalnością stowarzyszeń należy do:

- wojewody właściwego ze względu na siedzibę stowarzyszenia w zakresie nadzoru nad działalnością stowarzyszeń jednostek samorządu terytorialnego,
- starosty właściwego ze względu na siedzibę stowarzyszenia w zakresie nadzoru nad innymi niż wymienionymi wyżej stowarzyszeniami.

<u>Organ nadzorujący ma prawo:</u>

- żądać dostarczenia przez zarząd stowarzyszenia, w wyznaczonym terminie, odpisów uchwał walnego zebrania członków (zebrania delegatów),
- żądać od władz stowarzyszenia niezbędnych wyjaśnień.

Majątek stowarzyszenia powstaje ze składek członkowskich, darowizn, spadków, zapisów, dochodów z własnej działalności, dochodów z majątku stowarzyszenia orazz ofiarności publicznej. Stowarzyszenie może prowadzić działalność gospodarczą. Dochód z działalności gospodarczej stowarzyszenia służy realizacji celów statutowych i nie może być przeznaczony do podziału między jego członków.

Fundacja

Podstawą prawną działania fundacji jest ustawa o fundacjach[14]). Fundacja może być ustanowiona dla realizacji zgodnych z podstawowymi interesami Rzeczypospolitej Polskiej celów społecznie lub gospodarczo użytecznych, w szczególności, takich jak: ochrona zdrowia, rozwój gospodarki i nauki, oświata i wychowanie, kultura i sztuka, opieka i pomoc społeczna, ochrona środowiska oraz opieka nad zabytkami.

Fundację mogą ustanowić osoby fizyczne niezależnie od ich obywatelstwa i miejsca zamieszkania, bądź osoby prawne mające siedzibę w Polsce lub za granicą. Oświadczenie woli o ustanowieniu fundacji powinno być złożone w formie aktu notarialnego.

Fundator ustala statut fundacji, określający jej nazwę, siedzibę i majątek, cele zasady, formy i zakres działalności fundacji, skład i organizację zarządu, sposób powoływania oraz obowiązki i uprawnienia tego organu i jego członków. Statut może zawierać również inne postanowienia, w szczególności dotyczące prowadzenia przez fundację działalności gospodarczej, dopuszczalności i warunków jej połączenia z inną fundacją, zmiany celu lub statutu, a także przewidywać tworzenie obok zarządu innych organów fundacji.

Fundacja uzyskuje osobowość prawną z chwilą wpisania do Krajowego Rejestru Sądowego.

Działalnością fundacji kieruje jej zarząd, który również reprezentuje fundację na zewnątrz. Fundacja może prowadzić działalność gospodarczą w rozmiarach służących realizacji celów, przy czym postanowienie o prowadzeniu działalności gospodarczej musi być zawarte w statucie i uwidocznione w rejestrze.

Spółdzielnie socjalne

Przedmiotem działalności spółdzielni socjalnej jest prowadzenie wspólnego przedsiębiorstwa w oparciu o osobistą pracę członków. Spółdzielnia socjalna działa na rzecz:

- społecznej reintegracji jej członków przez co należy rozumieć działania mające na celu odbudowanie i podtrzymanie umiejętności uczestniczenia w życiu społeczności lokalnej i pełnienia ról społecznych w miejscu pracy, zamieszkania lub pobytu,
- zawodowej reintegracji jej członków przez co należy rozumieć działania mające na celu odbudowanie i podtrzymanie zdolności do samodzielnego świadczenia pracy na rynku pracy

Spółdzielnia socjalna może prowadzić działalność społeczną i oświatowo kulturalną na rzecz swoich członków oraz ich środowiska lokalnego, a także działalność społecznie użyteczną w sferze zadań publicznych określonych w ustawie o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie[15].

14. Ustawa z dnia 6 kwietnia 1984 r. o fundacjach (t.j. Dz. U. 1991 nr 46 poz. 203)
15. Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie (t.j. Dz. U. 2010 r. Nr 234 poz. 1536 ze zm.)

Spółdzielnię socjalną mogą założyć m.in.:

- osoby bezrobotne
- osoby niepełnosprawne

Ponadto członkami spółdzielni socjalnej mogą zostać również inne osoby, nie należące do grup zagrożonych wykluczeniem, o ile liczba tych osób nie stanowi więcej niż 50% ogólnej liczby założycieli. Liczba założycieli spółdzielni socjalnej nie może być mniejsza niż pięć, jeżeli założycielami są osoby fizyczne, i dwa, jeżeli założycielami są osoby prawne. Spółdzielnia socjalna liczy nie mniej niż pięciu i nie więcej niż pięćdziesięciu członków.

1.5. Źródła finansowania

Praktyka gospodarcza przewiduje wiele możliwości finansowania działalności firmy, które różnią się przed wszystkim źródłem pochodzenia funduszy, kosztem pozyskania kapitału oraz pozycją prawną kapitałodawcy (M. Ciechan-Kujawa, 2007).

Schemat 2. Wybrane wewnętrzne i zewnętrze formy finasowanie przedsiębiorstwa

	Kapitał	
Wewnętrzny	**Zewnętrzny własny**	**Zewnętrzny obcy**
Kapitał pochodzący z wypracowanych zysków	Kapitał pozyskiwany w różny sposób w zależności od formy prawnej przedsiębiorstwa	Kapitał pozyskany na rynku finansowym
Akumulowany zysk	Emisja akcji	Kredyty i pożyczki
Odpisy amortyzacyjne	Subwencje i dotację	Faktoring
Rezerwy	Venture capital	Leasing

Źródło: Ciechan-Kujawa M., Biznes plan, Toruń 2007.

Kredyt

Ustawa prawo bankowe[16] definiuje umowę kredytową, jako zobowiązanie się banku do oddania w dyspozycję kredytobiorcy, na czas oznaczony w umowie, określonej kwoty środków pieniężnych, z przeznaczeniem na ustalony cel, a kredytobiorca zobowiązuje sięddo korzystania z niej na warunkach określonych w umowie, do zwrotu kwoty wykorzystanego kredytu wraz z odsetkami w umownym terminie spłaty oraz do wpłaty prowizjiod udzielonego kredytu.

Bank uzależnia przyznanie kredytu od zdolności kredytowej kredytobiorcy. Przez zdolność kredytową rozumie się zdolność do spłaty zaciągniętego kredytu wraz z odsetkami w terminach określonych w umowie. Kredytobiorca jest obowiązany przedłożyć na żądanie banku dokumenty i informacje niezbędne do dokonania oceny tej zdolności.

Umowa kredytu powinna być zawarta na piśmie i określać w szczególności:

- strony umowy,
- kwotę i walutę kredytu,
- cel, na który kredyt został udzielony,
- zasady i termin spłaty kredytu,
- wysokość oprocentowania kredytu i warunki jego zmiany,
- sposób zabezpieczenia spłaty kredytu,
- zakres uprawnień banku związanych z kontrolą wykorzystania i spłaty kredytu,
- terminy i sposób postawienia do dyspozycji kredytobiorcy środków pieniężnych,
- wysokość prowizji, jeżeli umowa ją przewiduje,

16. Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. - Prawo bankowe (t. j. Dz. U. 2012 nr 0 poz. 1376)

- warunki dokonywania zmian i rozwiązania umowy.

W czasie obowiązywania umowy kredytu kredytobiorca jest obowiązany przedstawić – na żądanie banku – informacje i dokumenty niezbędne do oceny jego sytuacji finansoweji gospodarczej oraz umożliwiające kontrolę wykorzystania i spłaty kredytu.

W przypadku niedotrzymania przez kredytobiorcę warunków udzielenia kredytu albow razie utraty przez kredytobiorcę zdolności kredytowej bank może obniżyć kwotę przyznanego kredytu albo wypowiedzieć umowę kredytu.

Rodzaje kredytów bankowych

Podział ze względu na przedmiot kredytu:

kredyt dla osób indywidualnych - przeznaczony na zakup dóbr i usług konsumpcyjnych. Najczęściej jest to kredyt gotówkowy, ratalny i w formie salda debetowego na rachunku oszczędnościowo-rozliczeniowym, np. kredyty mieszkaniowe, samochodowe, na zakup papierów wartościowych, studenckie,

- kredyt dla przedsiębiorstw**-** finansujący działalność gospodarczą.
- Podział ze względu na okres kredytowania:
- kredyt krótkoterminowy- okres kredytowania nie przekracza najczęściej jednego roku,
- kredyt średnioterminowy- w tym przypadku termin kredytowania wynosi od jednego do trzech (lub pięciu) lat,
- kredyt długoterminowy- jest udzielany na okres przekraczający trzy (pięć) lat.

Podział w oparciu o walutę, w której udzielany jest kredyt:

- kredyt w walucie krajowej- udzielany w złotych polskich,
- kredyt dewizowy- realizowany jest w walutach obcych,
- kredyt denominowany- udzielany jest w walucie zagranicznej, natomiast wypłata następuje w walucie krajowej, jako równowartość kredytu według kursu obowiązującego w dniu wypłaty.

Podział ze względu na sposób przekazywania środków pieniężnych:

- kredyt gotówkowy, zapewniający kredytobiorcy otrzymanie kwoty kredytu bezpośrednio z kasy banku lub przelanie jej na jego rachunek,
- kredyt bezgotówkowy, w którym to kwota kredytu zostaje przelana przez bank na rachunek kontrahenta kredytobiorcy lub dostawcy dóbr i usług, których to zakup został sfinansowany.

Podział ze względu na przeznaczenie kredytu:

- kredyt w rachunku bieżącym nierozerwalnie wiąże się z koniecznością prowadzenia przez bank kredytujący rachunku bieżącego kredytobiorcy. Podstawowym celem kredytu w rachunku bieżącym jest utrzymanie bieżącej płynności przedsiębiorstwa,
- kredyt w rachunku kredytowym zostaje uruchamiany przez założenie kredytobiorcy wyodrębnionego rachunku bankowego, który służy do ewidencjonowania przebiegu wykorzystania i spłaty tego zaciągniętego zobowiązania,
- kredyt inwestycyjny jest to usługa, która daje możliwość finansowania nakładów gospodarczych mających na celu stworzenie bądź to nowego przedsiębiorstwa, bądź powiększenie już istniejącego majątku trwałego. Generalizując, w ofercie bankowej ten kredyt dostępny jest pod trzema postaciami:
- kredytu na wyposażenie, przeznaczonego na modernizację, czy też zakup sprzętu, nabycie lub budowę majątku trwałego,
- kredytu na restrukturyzacje, wykorzystywanego na przebudowę struktury gospodarczej przedsiębiorstwa celem odzyskania równowagi finansowej,
- kredytu przeznaczonego na zakup czy budowę obiektów przemysłowych i rolnych.

Podział ze względu na sposób spłaty kredytu:

- kredyt o stałych bądź zmiennych ratach kapitałowych,
- kredyt o stałej lub zmiennej stopie procentowej,
- kredyt, w którym odsetki płacone są „z góry" (tzw. odsetki dyskontowe) bądźz „dołu", o ustalonych ratach w trakcie trwania umowy kredytowej,
- kredyt annuitetowe, w którym łączne spłaty kapitału i odsetek są jednakowe.

Podział z uwzględnieniem sposobu wykorzystania kredytu:

kredyt jednorazowy w całości wykorzystywany w jednym, określonym w umowie terminie,

kredyt wykorzystywany w transzach, czyli częściach, w których środki finansowe stawiane są do dyspozycji.

Podział w oparciu o sposób zabezpieczenia spłaty kredytu:

- Kredyt lombardowy występuję wtedy, gdy umowa kredytowa została zabezpieczony zastawem. Cechą charakterystyczną tego kredytu jest fakt, iż przedmiot zastawu powinien znajdować się w posiadaniu banku.
- Kredyt hipoteczny ma charakter inwestycyjny i udzielany jest pod zabezpieczenie hipoteczne, gwarantując bankowi zwrot należności nawet wtedy,gdy nieruchomość zmieni właściciela. (J. Grzywacz, Warszawa 2003)

Pożyczka

Przez umowę **pożyczki** dający pożyczkę zobowiązuje się przenieść na własność biorącego, określoną ilość pieniędzy albo rzeczy oznaczonych tylko co do gatunku, a biorący zobowiązuje się zwrócić tę samą ilość pieniędzy albo tę samą ilość rzeczy tego samego gatunkui tej samej jakości (art. 720 KC).

Tabela 6. Porównanie kredytu bankowego i pożyczki bankowej

Kryterium	Kredyt	Pożyczka
Prawo do środków pieniężnych	do dyspozycji kredytobiorcy stawiana jest określona kwota środków pieniężnych w postaci bezgotówkowego pieniądza bankowego	Na pożyczkobiorcę przenoszona jest własność określonej ilości pieniędzy
Cel i przeznaczenie	Dokładnie sprecyzowany we wniosku kredytowym i umowie	Brak wymogu sprecyzowania celu
Zdolność kredytowa	Wymóg posiadania zdolności kredytowej	Brak wymogu posiadania zdolności kredytowej
Wykorzystanie środków	Na zasadach i warunkach wynikających z umowy	Brak wymogu odkreślenia sposobu wykorzystania środków
Odpłatność	Odpłatny	Może być nieodpłatny
Spłata kapitału	W ratach kapitałowych	Zazwyczaj jednorazowo

Źródło: L. Pawłowicz(red.), Ekonomika przedsiębiorstw. Zagadnienia wybrane, Gdańska 2001.

Venture capital

Venture capital jest jednym z nowoczesnych źródeł finansowania działalności przedsiębiorstw. Można go zdefiniować jak kapitał własny, wnoszony na ograniczony okres przez inwestorów zewnętrznych do przedsiębiorstw dysponujących innowacyjnym produktem, metoda produkcji bądź usługą, które nie zostały zweryfikowane jeszcze przez rynek, a więc stwarzają wysokie ryzyko niepowodzenia inwestycji, ale jednocześniew przypadku sukcesu przedsięwzięcia, wspomaganego w zarządzaniu przez inwestorów, zapewniają znaczny przyrost wartości zainwestowanego kapitału, który jest realizowany poprzez sprzedaż udziałów (J. Węcławski, 1997).

Leasing

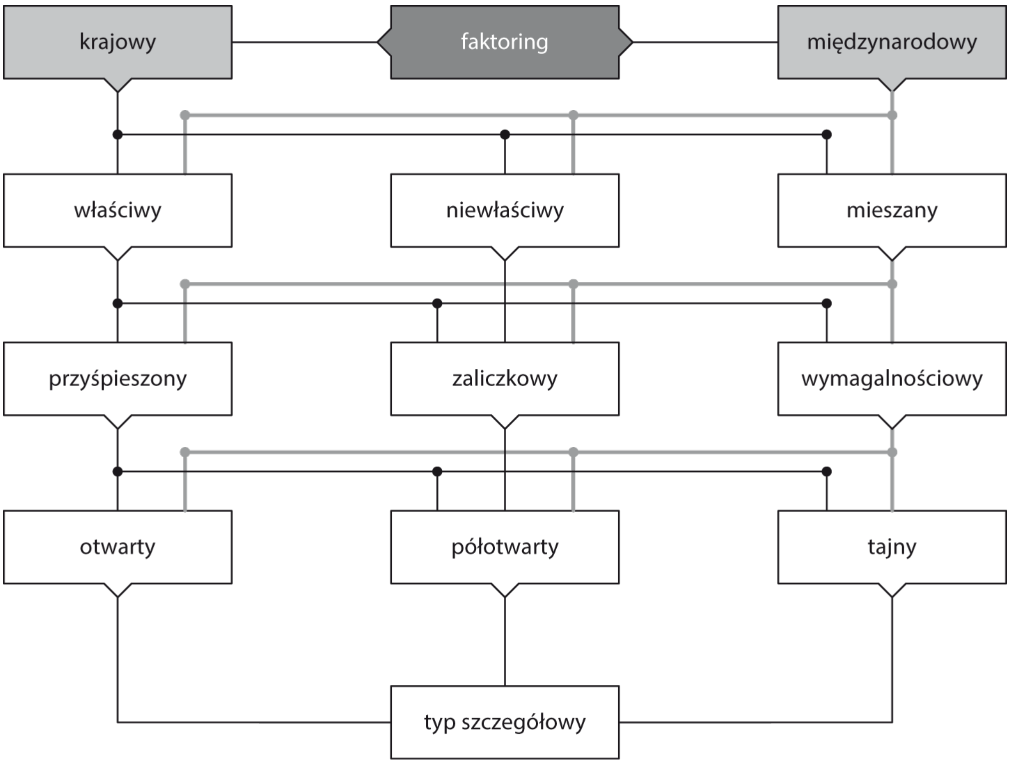
Przez umowę leasingu finansujący zobowiązuje się, w zakresie działalności swego przedsiębiorstwa, nabyć rzecz od oznaczonego zbywcy na warunkach określonych w tej umowie i oddać tę rzecz korzystającemu do używania albo używania i pobierania pożytków przez czas oznaczony, a korzystający zobowiązuje się zapłacić finansującemuw uzgodnionych ratach wynagrodzenie pieniężne, równe co najmniej cenie lub wynagrodzeniu z tytułu nabycia rzeczy przez finansującego (art. 709 KC).

Faktoring

Faktoring określany jest, jako rodzaj działalności polegającej na bezpośrednim zakupie przez banki lub instytucje finansowe wierzytelności klientów, przypadającychim z tytułu dostawa towarów czy usług dla odbiorców, z jednoczesnym świadczeniem na rzecz klientów co najmniej dwóch usług spośród wymienionych: inkasowych, księgowych, doradczych, marketingowych. Istotą faktoringu jest zatem krótkoterminowe finansowanie dostaw towarów przez podmiot, który pośredniczy w procesie rozliczeń finansowych pomiędzy dostawcą a odbiorcą(M. Tokarski, 2005).

Faktoring jest to transakcja, w której przedsiębiorca przenosi, bądź może przenieść wierzytelności na instytucję finansową, albo pożycza pieniądze pod zastaw wierzytelności jako zabezpieczanie dla tej pożyczki. W obu tych przypadkach firma zyskuje gotówkę, nie czekając aż należności zostaną ściągnięte od dłużnika (B. Kłosowska, 1996).

Schemat 3. Rodzaje faktoringu



Źródło: Tokarski M., Faktoring w małych i średnich przedsiębiorstwach, Kraków 2005.

Fundusze europejskie

Środki finansowe Unii Europejskiej gromadzone są przez państwa członkowskie i przekazywane do unijnego budżetu. Według prawa środki te stanowią zasoby własne Unii Europejskiej. Na co Unia Europejska przeznacza zebrane środki? W głównej mierzę na realizację wspólnej polityki rolnej (w tym rybactwa i rybołówstwa), a także polityki spójności[17], które mają pomóc w podniesieniu konkurencyjności Unii Europejskiej oraz wpłynąć pozytywnie na rozwój m.in. rolnictwa, kultury, infrastruktury, szkolnictwa, wymiaru bezpieczeństwa[18].

17. Polityka spójności ma na celu wspieranie działań prowadzących do wyrównania warunków ekonomicznych i społecznych we wszystkich regionach Unii Europejskiej. W szczególności Unia Europejska zmierza do zmniejszenia różnic w poziomie rozwoju regionów oraz likwidacji zacofania najmniej uprzywilejowanych regionów i wysp, w tym obszarów wiejskich.
18. http://www.funduszeeuropejskie.gov.pl/OrganizacjaFunduszyEuropejskich/Strony/czymsafundusze.aspx, 20.03.2013.

Szerzej o Funduszach europejskich zobacz na stronie: www.funduszeeuropejskie.gov.pl

Dotacja z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Osoby zamierzające założyć działalność gospodarczą, mogą starać sięo jej dofinansowanie korzystając z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, któregoto elementem jest Działanie 6.2 – „Wsparcie oraz promocja przedsiębiorczości i samozatrudnienia". Priorytetowym celem tego programu jest promocja, a także wsparcie inicjatyw i działań dążących do tworzenia miejsc pracy oraz budowania postaw kreatywnych, służących nie tylko rozwojowi przedsiębiorczości, ale i samozatrudnienia. Wsparcie z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki obejmuję szereg działań i instrumentów dających możliwość skorzystania z :

- doradztwa i szkoleń umożliwiających zdobycie wiedzy i umiejętności potrzebnych do założenia i prowadzenia działalności gospodarczej,
- przyznania środków finansowych na rozwój przedsiębiorczości do wys. do 40 tys. zł.
- wsparcia pomostowego w okresie pierwszych 6 do 12 miesięcy od rozpoczęcia działalności gospodarczej, obejmującego finansowe wsparcie pomostowe wypłacane miesięcznie w kwocie nie większej niż równowartość minimalnego wynagrodzenia obowiązującego na dzień wypłacenia dotacji, połączone z doradztwem oraz pomocą w efektywnym wykorzystaniu dotacji

Szerzej o Programie Operacyjnym Kapitał Ludzki zobacz na stronie: www.efs.gov.pl

Dotacja z Programu Innowacyjna Gospodarka

Głównym celem Programu Innowacyjna Gospodarka jest stymulowanie rozwoju polskiej gospodarki w oparciu o innowacyjne przedsięwzięcia. Cele szczegółowe tego programu to :

- zwiększenie innowacyjności przedsiębiorstw,
- wzrost konkurencyjności polskiej nauki,
- zwiększenie roli nauki w rozwoju gospodarczym,
- zwiększenie udziału innowacyjnych produktów polskiej gospodarki w rynku międzynarodowym
- tworzenie trwałych i lepszych miejsc pracy
- wzrost wykorzystania technologii informacyjnych i komunikacyjnych w gospodarce.

Program Innowacyjna Gospodarka to dziewięć osi priorytetowych, z których każda koncentruje się na dofinansowaniu pewnych typów projektów realizując tym samym wyznaczone cele szczegółowe Programu[19].

Jednym z celów ósmej osi priorytetowej Program Innowacyjna Gospodarka jest stymulowanie rozwoju gospodarki elektronicznej poprzez wspieranie tworzenia nowych, innowacyjnych e-usług, innowacyjnych rozwiązań elektronicznego biznesu oraz zmniejszanie technologicznych, ekonomicznych i mentalnych barier wykorzystywania e-usług w społeczeństwie, czyli tego co popularnie nazywamy e-biznesem.

E-biznes to nic innego jak prowadzenie biznesu opierającego się na rozwiązaniach teleinformatycznych, w szczególności aplikacjach internetowych.

Najczęściej spotykanymi i najbardziej popularnymi e-usługami są[20]:

- tworzenie witryn internetowych,
  - np. www.html.pl,

19. Szerzej zobacz: www.poig.gov.pl.
20. R. Flis, J. Szut, B. Mazurek-Kucharska, J. Kuciński,E-usługi – definicja i przykłady, http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/e128419bc4aca1881822862d-9da143f5.pdf, 20.03.2013.

- zdalne dostarczanie oraz aktualizacja oprogramowania,
  - np. www.dobreprogramy.pl, www.programosy.pl, www.eprogramy.org, www.pobieralnia.pl;
- zdalne zarządzanie systemami,
  - np. www.calltech.com.pl, www.elzab.com.pl,
- hurtownie danych on-line, umożliwiające elektroniczne przechowywanie i wyszukiwanie konkretnych danych
  - np. www.chomik.pl,
- dostarczanie on-line przestrzeni na dysku na żądanie,
  - np. www.msejf.pl, www.bekaper.pl,
- zdalne testowanie i konserwacja hardware i oprogramowania,
  - np. www.hddlife.com, www.memtest86.com, www.crystalmark.info, www.zurawek.com, www.ccleaner.com,
- uzyskiwanie dostępu i pobieranie muzyki na komputery i telefony komórkowe,
  - np. www.emusic.com, www.mp3.pl, www.soho.pl, www.lastfm.com,
- uzyskiwanie dostępu i pobieranie sygnałów dźwiękowych, urywków nagrań, dzwonków i innych dźwięków,
  - np. www.papla.pl, www.dzwonki-na-telefon.pl, www.dzwonki.pl, www.wapster.pl,
- uzyskiwanie dostępu i pobieranie filmów,
  - np. www.kinomaniak.info, www.youtube.pl
- pobieranie gier na komputery i telefony komórkowe,
  - np. www.komorki.aeri.pl, www.gryzonie.pl, www.gryjava.e-gry.ne, www.mobilnehity.pl, www.pobieralnia.pl,
- uzyskiwanie dostępu do automatycznych gier on-line, które wymagają użycia Internetu lub innych podobnych sieci elektronicznych, gdy gracze są od siebie oddaleni,
  - np. www.gry-online.pl, www.gryonline.wp.pl, www.gryonline.boja.pl,
- uzyskiwanie dostępu i pobieranie motywów pulpitów,
  - np. www.eprogramy.org, www.bitfone.dmkhosting.com, www.tapety4U.webpark.pl,
- dostarczanie książek w formie cyfrowej i innych publikacji elektronicznych,
  - np. www.ebook.pl, www.bookini.pl, www.iik.pl, www.ebook.kuponline.pl, www.audioteka.pl, www.ibuk.pl,
- prenumerata gazet i czasopism on-line,
  - np. www.witryna.czasopism.pl, www.top-kiosk.pl, www.prasa.partnerzy.netpress.pl,
- zdalne dzienniki logowania i statystyki odwiedzania stron internetowych,
  - np. www.home.pl,www.stat24.com, www.7point.pl, www.stat.4u.pl, www.linker.pl, www.freestat.pl, www.trafiq.pl;
- wiadomości, informacje o sytuacji na drogach oraz prognozy pogody on-line (także web-serwisy),
  - np. www.nadrogach.pap.pl, www.motofirma.pl, www.gddkia.gov.pl, www.pogoda.onet.pl, www.twojapogoda.pl, www.new.meteo.pl, www.pogodynka.pl, www.imgw.pl;
- informacje generowane automatycznie on-line przez oprogramowanie po wprowadzeniu przez klienta określonych danych, takich jak dane prawne lub finansowe (w szczególności stale uaktualniane kursy giełdowe)
  - np. www.inwestycje.pl, www.gpw.pl, www.pl.saxobank.com,
- dostarczanie przestrzeni reklamowej, szczególnie banerów reklamowych na stronach lub witrynach internetowych,
  - np. www.reklamania.pl, www.adwords.google.com, www.blogvertising.pl,
- wyszukiwarki i katalogi internetowe,
  - np. www.google.pl, www.ask.pl, www.netsprint.pl, www.szukacz.pl,
- automatyczna instalacja on-line zabezpieczeń typu firewall,
  - np. www.pctools.com, www.zonealarm.com, www.ashampoo.com;
- dostarczanie informacji politycznych, kulturalnych, artystycznych, sportowych, naukowych, rozrywkowych itp.,
  - np. www.se.pl, www.fakty.interia.pl, www.gazeta.pl, www.news.portalisko.pl, www.polityka.pl, www.lubin.on-line.pl, www.mmWarszawa.pl, www.cojestgrane.pl, www.labforculture.org, www.filmweb.pl, www.machina.pl, www.bulgaricus.com, www.sport.pl, www.sport.onet.pl, www.sports.pl,m www.dzienniksport.com, www.nauka.hotnews.pl, www.nauka.gildia.pl, www.nauka.pl;

- systemy on-line ocen: polityków, nauczycieli, lekarzy, filmów, książek,
  - np. www.dobrzypolitycy.pl, www.sondawyborcza.pl, www.ocen.pl, www.obelfrach.pl, www.konsylium24.pl, www.rankinglekarzy.pl, www.filmweb.pl, www.filmus.pl, www.wik.com.pl,
- fora dyskusyjne,
  - np. www.forum.gazeta.pl, www.forumowisko.pl, www.tygodnikforum.pl,
- systemy generujące fora i sondy na stronie klienta,
  - np. www.fora.pl, www.pun.pl, www.iq24.pl, www.sonda.pl, www.99polls.com, www.polldaddy.com,
- automatyczne biura przyjmowania zamówień taksówek,
  - np. www.wawataxi.pl, www.onlinetaxi.eu,
- usługi dla nowożeńców,
  - np. www.netwesele.pl, www.slub.biznesport.pl,
- dostarczanie przepisów kulinarnych,
  - np. www.KochaniePrzezGotowanie.pl, www.unclebens.pl, www.smaczny.pl, www.dobrakuchnia.com, www.przepisy.org, www.cprzepis1.pl,
- porównywarki cenowe wraz z opiniami klientów,
  - np. www.skapiec.pl, www.nokaut.pl, www.cokupic.pl, www.poile.pl, www.cenohit.pl, www.ceneo.pl, www.oferciak.pl,
- porady w doborze ubezpieczenia (kalkulatory, porównywarki)
  - np. www.cuk.com.pl, www.ipolisa.pl, www.wygodnie.pl, www.auto-motor-i-sport.pl, www.ikonto.com.pl,
- sprzedaż ubezpieczeń,
  - np. www.allianzdirect.pl, www.ubezpieczeniaonline.pl, www.wygodnie.pl,
- branżowe e-oferty pracy,
  - np. www.pracuj.pl, www.Praca.Allegro.pl, www.infopraca.pl, www.praca.monsterpolska.pl, www.jobs4it.pl, www.job.org.pl, www.job.com, www.jobpilot.pl,
- e-zdrowie, w tym e-konsultacje medyczne, e-opieka medyczna, elektroniczne recepty, informacje medyczne dla lekarzy i pacjentów, informatory o jednostkach medycznych, kontrola stanu zdrowia pacjenta, usługi skierowane bezpośrednio do pacjentów (elektroniczne konta zdrowotne, medyczne portale informacyjne i edukacyjne, apteki internetowe, BMI (Body Mass Index), rejestracja online:
  - np. www.imed24.pl, www.emanus.pl, www.doz.pl,www.fabrykadiet.pl, www.pulsmed.com.pl, www.bmi.pasiasty.pl, www.synaptis.eu, www.medicalonline.pl, www.pfm.pl, www.telemedycyna.krakow.pl, www.telemedycyna.wlkp.pl,
- e-usługi związane z bankowością, inwestowaniem elektronicznym (w tym papiery wartościowe, fundusze inwestycyjne), doradztwem finansowym (w tym oferty dotyczące kredytów, lokat, ubezpieczeń, inwestycji), aukcjami kredytowymi (kredytobiorca jest inicjatorem, a banki przedstawiają oferty), zarządzaniem własnymi finansami, dokonywaniem płatności elektronicznych,
  - np. www.mBank.pl, www.Inteligo.pl, www.toyotabank.pl, www.kokos.pl, www.xelion.pl, www.opiekuninwestora.pl, www.inwestycje.pl, www.Investors.pl, www.przelewy24.pl, www.paypal.pl, www.openfinance.pl, www.invigo.pl,
- e-learning , czyli automatyczne nauczanie na odległość,
  - np. www.prestin.pl, www.edulandia.pl, www.supermemo.net.pl, www.kursy-online.pl, www.kursy-online.4system.com, www.eskk.pl, www.Profeo.pl, www.menedzer.pl, www.szkola-online.pl, www.pou.pl, www.studiaonline.info,
- e-usługi związane z przemysłem turystycznym,
  - np. www.eturystyka.org, www.done.pl, www.Cosinus.pl/Turystyka, www.e-turystyka.net, www.bilety.eturystyka.org, www.cyberpodroze.pl, www.booking.com/Hotele, www.Hotels.com/PL, www.hotel.pl,
- e-handel, w tym aukcje i sklepy,
  - np. www.fruli.pl, www.allegro.pl, www.swistak.pl, www.ebay.pl, www.aukcje.org, www.podbij.pl, www.sprzedam.pl, www.zakupy.pl, www.pinia.pl, www.zakupyprzezinternet.info,
- e-logistyka,
  - np. www.e-logistyka.pl, www.lcs.pl, www.2msystem.pl, www.dcl.pl, www.exepol.eu,
- e-radio,
  - np. www.tuba.fm, www.nadaje.com, www.dbbroadcast.com, www.live365.com, www.polskastacja.pl,

- e-telewizja,
  - np. www.totaltv.biz, www.megawypas.pl, www.telewizja-przez-internet.pl,
- Serwisy społecznościowe inaczej web. 2.0, w tym tematyczne i hobbystyczne,
  - np. www.nasza-klasa.pl, www.tripy.pl, www.profeo.pl, www.szafa.pl, www.grono.net, www.wawka.pl, www.epuls.pl, www.wikipedia.pl, www.youtube.pl, www.facebook.pl,
- Serwisy randkowe,
  - np. www.sympatia.pl, www.fotoflirt.pl, www.moje-randki.pl;
- ogłoszenia w Internecie,
  - np. www.olx.pl, www.Favore.pl, www.ojej.pl, www.i-Bazar.pl.

Zanim zapadnie decyzja o założeniu e-biznesu , potrzebne są przemyślane odpowiedzi na kilka podstawowych pytań:

- Jaki mam pomysł na swój e-biznes?
- Jakie produkty będę oferował?
- Czy istnieją już e-biznes podobny do tego, który pragnę otworzyć, a jeśli tak, to w czym mój będzie się od nich odróżniał?
- Kim będą odbiorcy moich towarów i w jaki sposób przekonam ich do realizacji zakupów?
- W jaki sposób pozyskam dostawców oferowanych przez mnie towarów?
- Jeśli przyszły e-przedsiębiorca uzyskał odpowiedzi na powyższe pytania, które pokrótce

określają zakres i strategię biznesową, konieczne jest nie tylko zapoznanie się przepisami prawnymi, które będę regulować funkcjonowanie e-biznes, ale przede wszystkim założenie działalności gospodarczej[21].

Szerzej o Programie Innowacyjna Gospodarka zobacz na stronie: www.poig.gov.pl

Dotacja z Funduszu Pracy

Osobom bezrobotnym mogą być przyznane jednorazowo środki z Funduszu Pracy na podjęcie działalności gospodarczej, w tym na pokrycie kosztów pomocy prawnej, konsultacji oraz doradztwa, związanych z podjęciem przez niego planowanej działalności[22].

Bezrobotny zamierzający podjąć działalność gospodarczą, może złożyć do starosty właściwego ze względu na miejsce zamieszkania lub pobytu, albo ze względu na miejsce prowadzenia działalności, wniosek o dofinansowanie.

<u>We wniosku należy określić:</u>

- kwotę wnioskowanej pomocy,
- rodzaj działalności gospodarczej, którą wnioskodawca zamierza podjąć,
- ponadto dokonać kalkulacja kosztów związanych z rozpoczęciem działalności,
- wskazać źródła ich finansowania,
- działania podjęte w związku z podjęciem działalności.

Dodatkowo we wniosku należy :

- przedstawić specyfikację i harmonogram zakupów w ramach wnioskowanej dotacji
- wskazać formę zabezpieczenia zwrotu refundacji (weksel z poręczeniem wekslowym, gwarancję bankową, zastaw na prawach lub rzeczach, blokadę rachunku bankowego, akt notarialny o poddaniu się egzekucji przez dłużnika)

Przyznanie dofinansowania jest dokonywane na podstawie umowy zawartej przez Urząd Pracy z bezrobotnym.

21. K. Trzeciak, Rozpoczęcie sprzedaży w Internecie, http://www.web.gov.pl/g2/big/2012_12/a595cf7ca3ff930ea4ae9b23bd92bd8b.pdf, 20.03.2013; P.Waglowski

Prawne aspekty prowadzenia e-biznesu, http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/cf917750d5daa7ec3cf21f4ac404efff.pdf, 20.03.2013.

22. Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy(t.j. Dz. U. 2008 nr 69 poz. 415)

Wysokość przyznanej dotacji określona w umowie nie może być wyższaniż 6-krotność wysokości przeciętnego wynagrodzenia w poprzednim kwartale, które obowiązuje od pierwszego dnia następnego miesiąca po ogłoszeniu przez Prezesa GUSw Monitorze Polskim. Aktualna wysokość dotacji z Powiatowego Urzędu Pracy to 21.061 zł.

Osoba zainteresowana dotacją **dodatkowo składa oświadczenie**, że nie podejmie zatrudnienia w okresie 12 miesięcy po dniu rozpoczęcia prowadzenia działalności.

Starosta w trakcie trwania umowy o dofinansowanie dokonuje oceny prawidłowości wykonania umowy[23].

Biznes plan, czyli jak zaplanować efekty finansowe przedsięwzięcia

Istotą biznes planu jest sformułowanie zamierzeń na bliższą lub dalszą przyszłość,z ustaleniem zadania podstawowego (konkretnego przedsięwzięcia, interesu) lub zestawu zadań do wykonania, celów, środków i sposobów (metod) działania (A. Korczyn, 2009).

Biznesplan jest to element planowania strategicznego. Jest to podstawowe narzędzie planistyczne w organizacji, wykorzystywane m. in. przy ocenie opłacalności przedsięwzięć gospodarczych.

Biznesplan ma odpowiadać na podstawowe pytania
KTO? CO? J AK? ZA ILE?

Najogólniej rzecz ujmując, można stwierdzić, iż jest to średnioterminowyi kompleksowy spis celów oraz zadań, jakie stawia przed sobą przedsiębiorstwo, ujętyw formie pisemnej. Fundamentem budowy biznes planu jest określenie jego celów, które jednocześnie stają się zasadami sporządzania biznes planu.

Tabela 7. Cele sporządzania biznesplanu

Wewnętrzne	Zewnętrzne
przewodnik dla działań strategicznych i operacyjnych firmy zdefiniowanie słabych i silnych strony działalności gospodarczej wytycza cele, metody działań przedstawia analizę stanu obecnego firmy	element komunikacji przedsiębiorstwa z otoczeniem m. in. z bankami, inwestorami, instytucjami państwowymi w celu pozyskania źródeł finansowania inwestycji

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Ciechan-Kujawa M., Biznes plan, Toruń 2007 i Korczyn A., Jak opracować biznes plan?, Skierniewice 2009.

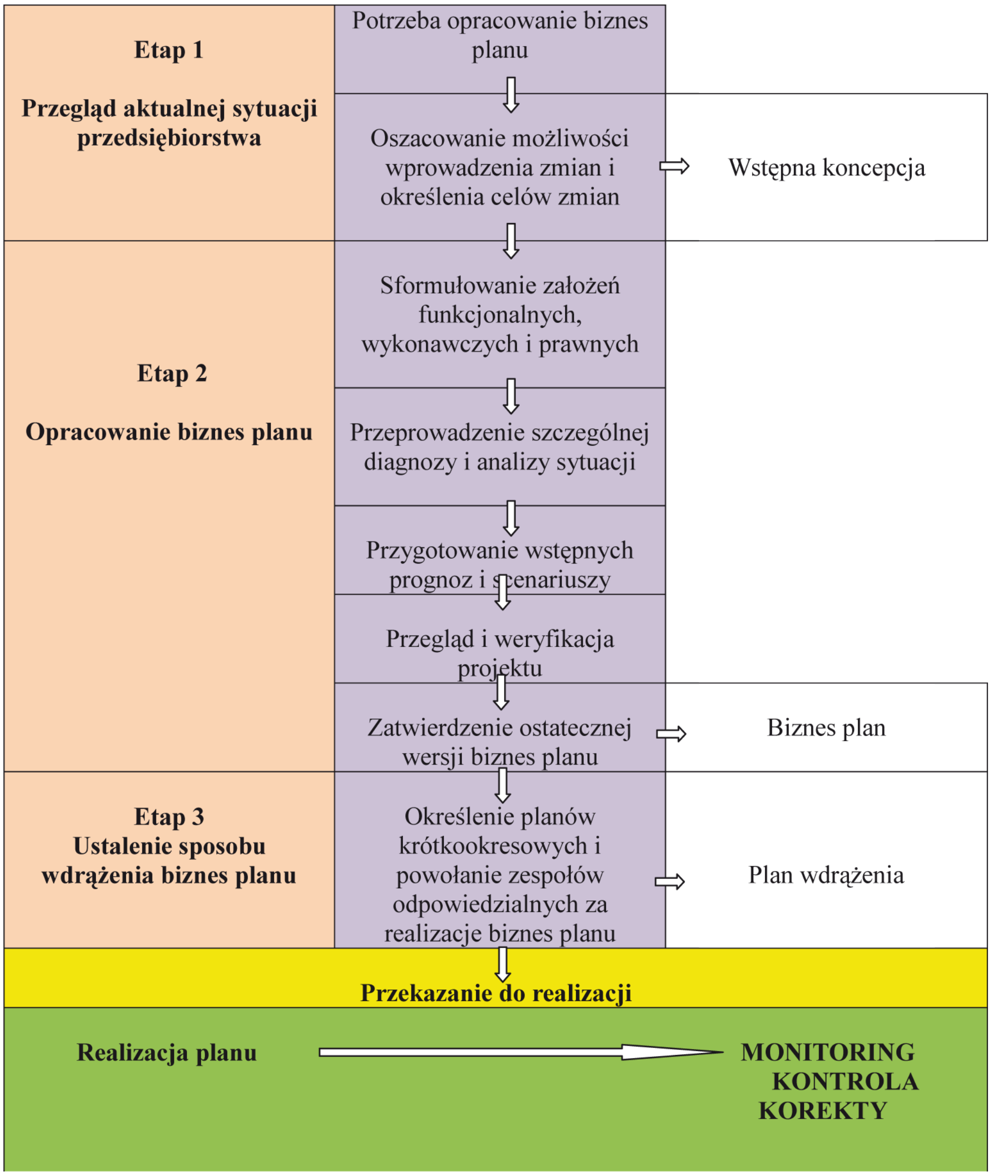
Zasady konstrukcji biznesplanu

Konieczność opracowania biznes planu w przedsiębiorstwie może wynikać z różnych czynników, które prowadzą do uruchomienia procesu planowania biznesowego, składającego się z trzech kluczowych elementów:

- Przeglądu aktualnej sytuacji przedsiębiorstwa,
- Opracowania biznes planu,
- Ustalenia sposobu wdrążenia biznes planu.

23. Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 23 kwietnia 2012 r. w sprawie dokonywania z Funduszu Pracy refundacji kosztów wyposażenia lub doposażenia stanowiska pracy dla skierowanego bezrobotnego oraz przyznawania środków na podjęcie działalności gospodarczej (Dz.U. 2012 nr 0 poz. 457)

Schemat 4. Procedura i etapy opracowania biznes planu



Źródło: Ciechan-Kujawa M., *Bizne*s *plan*, **Toruń 2007.**

Cechą charakterystyczną biznes planu jest jego konstrukcja, składająca się z czterech podstawowych części (E. Filar, J. Skrzypek, 2002):

Wprowadzenia– na które składa się:

- streszczenie – krótko informuje o treści biznes planu;
- ogólna charakterystyka przedsięwzięcia/przedsiębiorstwa – przedstawia przedsiębiorstwo i cele, jakie przedsiębiorca chce osiągnąć.

Planu strategicznego – składającego się z:

- analizy strategicznej – obejmującej analizę mikrootoczenia i otoczenia konkurencyjnego, analizę przedsiębiorstwa, analizę przewidywanych zmian elementów otoczenia i zasobów organizacji oraz analizę celów i oczekiwań stron zainteresowanych;
- określenia misji i wizji przedsiębiorstwa– czyli wskazanie klientów, produktów i usług, pola działania, techniki, pomysł na przetrwanie, publicznego wizerunku.

Planów szczegółowych, obejmujących:

- plan marketingowy- wskazanie kluczowych kryteriów strategii marketingowej, polityki cenowej, działań w zakresie dystrybucji, reklamyi promocji a także prognozy sprzedaży,
- plan działalności operacyjnej- opisuje proces i technologię wytworzenie wyrobu/usługi, infrastruk-

turę techniczną, konieczne inwestycje, zakupy materiałów i usług, zdolności wytwórcze, kosztorys produkcji i us**ług,** odziaływanie na środowisko,

- plan organizacji i zarządzania – obejmuje swoim zakresem wskazanie posiadanych zasobów ludzkich i kosztów zatrudnienia, zasad, metod zarządzania w przedsiębiorstwie, harmonogramu głównych zamierzeń,
- plan finansowy- informuje o bieżącej kondycji finansowej przedsiębiorstwa, ustala szansę osiągnięcia zamierzonego wyniku finansowego, wyjaśnia zależności pomiędzy kosztami, określa rentowność zamierzonej działalności oraz wskazuje źródła pozyskania kapitału (M., Ciechan-Kujawa, 2007).

Załączników – które stanowią element szerszego przedstawienia kluczowych treści istotnych z punktu widzenia osoby piszącej biznes plan, będą to w szczególności: schematy organizacyjne, ekspertyzy, pozwolenia, koncesję, fotografie, rysunki,CV kadry kierowniczej i pracowników, itp.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Określ etapy realizacji zaplanowanego przedsięwzięcia, rozbijając je na etapy, ze wskazaniem zadań cząstkowych.
2. Określić i uzasadnić formę działalności przedsięwzięcia.
3. Wskaż zasady prowadzenia e-biznesu
4. Wymień źródła finansowania z UE
5. Przygotuj curriculum vitae i list motywacyjny – z jakich elementów składają się te dokumenty?.
6. Opisz przygotowania pracownika do rozmowy kwalifikacyjnej.
7. Opisz cechy dobrego pracownika.
8. Wyjaśnij, co powinien zrobić pracodawca, aby zatrudnić pracownika.

Bibliografia:

Barowicz M., *Jak prowadzić działalność gospodarczą?,* Warszawa 2008.

Barrow C., Barrow P., *Business plan*, Warszawa 1992

Ciechan-Kujawa M., *Biznes plan*, Toruń 2007.

Filar E., Skrzypek J., *Biznes plan* , Warszawa 2002.

Grzywacz J., *Podstawy bankowości*, Warszawa 2003.

Grzywacz J., *Współpraca przedsiębiorstwa z bankiem*, Warszawa 2003.

Heropolitańska I., Jagodzińska-Serafin E., Kruglak., J., Ryżewska S., *Kredyty, pożyczki i gwarancje bankowe*, Warszawa 1999.

Juraszek-Kopacz B., Piekut D. (red.), *Ekonomia społeczna i biznes – partnerstwo sukcesu*, Warszawa 2008.

Kłosowska B., *Obsługa bankowa przedsiębiorstw*, Toruń 1996.

Korczyn A., *Jak opracować biznes plan?,* Skierniewice 2009.

Koźmiński A.K., Piotrowski W., *Zarządzanie. Teoria i praktyka*, Warszawa 1996.

Nowakowski W., *Prawne aspekty działalności gospodarczej*, Szczecin 2011.

Pawłowicz L. (red.), *Ekonomika przedsiębiorstw. Zagadnienia wybrane*, Gdańsk 2001.

Powałowski A. (red.) *Prawo gospodarcze publiczne*, Warszawa 2012.

Sieradzka M., *Swoboda działalności gospodarczej*. Komentarz, publ. elektroniczna, System Informacji Prawnej LEX, 2010

Snażyk Z.., Szafrański A. , *Publiczne prawo gospodarcze*, Warszawa2012,

Stoner J.A.F., Wankel Ch., *Kierowanie,* Warszawa 1996

Strzyczkowski K., *Prawo gospodarcze publiczne*, Warszawa 2010.

Szczyrski P., *Jak założyć stowarzyszenie? Jak założyć fundację? Jak zostać z OPP?*, Szczecin 2009.

Tokarski M., *Faktoring* w małych i średnich przedsiębiorstwach, Kraków 2005.

Węcławski J., *Venture capital, Nowy instrument finansowanie przedsiębiorstw*, Warszawa 1997.

Wiatrak A., *Pojęcie przedsiębiorczości jej cele i rodzaje* [w:] *Uwarunkowania rozwoju przedsiębiorczości – szanse i bariery*, Tarnobrzeg 2003.

Wygnański J.,*O ekonomii - podstawowe pojęcia, instytucje i kompetencje*, Szczecin 2009.

Zaleśkiewicz, T., *Przedsiębiorczość i podejmowanie ryzyka*, [w:] T. Tyszka (red.), *Psychologia ekonomiczna*, Gdańsk 2004.

Zawiślak A.M. *Organizacja i planowanie*. *Ujęcie systemowe*, Warszawa 1978.

Akty prawne

Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 23 kwietnia 2012 r. w sprawie dokonywania z Funduszu Pracy refundacji kosztów wyposażenia lub doposażenia stanowiska pracy dla skierowanego bezrobotnego oraz przyznawania środków na podjęcie działalności gospodarczej (Dz. U. 2012 nr 0 poz. 457 ze zm.)

Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych (Dz. U. z 2000 r. Nr 94, poz. 1037 ze zm.)

Ustawa z dnia 16 września 1982 r., Prawo spółdzielcze (t.j. Dz. U. 2003 Nr 188 poz. 1848)

Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy (t.j. Dz.U. 2008 Nr 69 poz. 415)

Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny (Dz. U. Nr 16, poz. 93 ze zm.)

Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie (t.j. Dz. U. z 2010 r. Nr 234, poz. 1536 ze zm.)

Ustawa z dnia 25 września 1981 r. o przedsiębiorstwach państwowych (t.j. Dz. U. 2002 Nr 112 poz. 98)

Ustawa z dnia 27 kwietnia 2006 r. o spółdzielniach socjalnych (Dz. U. z 2006 r. Nr 94, poz. 651 ze zm.)

Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. - Prawo bankowe (t.j. Dz. U. 2012 Nr 0, poz. 1376)

Ustawa z dnia 6 kwietnia 1984 r. o fundacjach (t.j. Dz. U. 1991 Nr 46 poz. 203)

Ustawa z dnia 7 kwietnia 1989 r. Prawo o stowarzyszeniach (t.j. Dz. U. 2001 Nr 79, poz. 855)

Netografia:

Waglowski P., *Prawne aspekty prowadzenia e-biznesu,* http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/cf917750d5daa7ec3cf21f4ac404efff.pdf, 20.03.2013.

Centrum Innowacji i Transferu Technologii, *Przewodnik krok po kroku do własnej firmy,* http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki_do_pobrania/publikacje/layout_zmiana_wysylka.pdf, 8.03.2013.

Flis R., Szut J., Mazurek-Kucharska B., Kuciński J.,*E-usługi – definicja i przykłady*, http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/e128419bc4aca1881822862d9da143f5.pdf, 20.03.2013.

Huczko P., *Jak założyć własną firmę?* www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna-firme.html, 7.03.2013.

Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości , *Jak zostać i pozostać przedsiębiorcą?* www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/, 7.03.2013.

Trzeciak K., *Rozpoczęcie sprzedaży w Internecie*, http://www.web.gov.pl/g2/big/2012_12/a595cf7ca3ff930ea4ae9b23bd92bd8b.pdf, 20.03.2013.

Noworudzki G., Jak znaleźć pomysł na biznes, http://4business4you.com/biznes/wlasna-firma/jak-znalezc-pomysl-na-biznes/ , 17.03.2013.

Noworudzki G. 8 powodów dla których warto założyć własna firmę:http://4business4you.com/biznes/wlasna-firma/8-powodow-dla-ktorych-warto-zalozyc-wlasna-firme/ 17.03.2013

http://urzad.nf.pl/Artykul/11539/11-cech-dobrego-i-skutecznego-menedzera/personel-w-urzedzie-zarzadzanie-pracownikami-menedzer-urzad/#artTresc 17.03.2013

http://www.wse.waw.pl/aa%20materialy%20dydaktyczne/E_Ekonomika%20i%20organizacja%20przedsiebiorstw_Ryzlak.pdf 18.03.2013

www.biznes-rodzina.pl/index.php/artykuly/sprzedaz/272-typy-osobowoci 01.03.2013

2. Analiza rynku

2.1. Lokalizacja i obszar działania

Przedsiębiorstwo działa na rynku. Z kolei **rynek** jest to ogół stosunków wymiennych między sprzedającymi, reprezentującymi podaż produktów, a kupującymi zgłaszającymi zapotrzebowanie, czyli reprezentującymi popyt na produkty (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004). Rynek jest grupowaniem uczestników (sprzedających i kupujących), miejscem komunikowania się i zawierania transakcji kupna-sprzedaży. Nie oznacza to, że musi dojść do bezpośredniego spotkania sprzedawcy i kupującego w określonym miejscui czasie (np. sklepie). Obecnie partnerzy zawierający transakcję mogą nie znać się osobiście i nigdy nie spotkać, a jednak dokonać wymiany. Znaczna część transakcji jest bowiem zawierana za pośrednictwem sprzedaży wysyłkowej, telefonicznej, internetowej.

Podstawowymi elementami rynku są popyt, podaż, cena.

Popyt jest to zapotrzebowanie na dobra i usługi poparte posiadanymi środkami finansowymi. Stronę popytu tworzą kupujący, Źródłem popytu są potrzeby, ale to, że człowiek odczuwa jakąś potrzebę nie oznacza, że zgłasza on popyt na potrzeby ją zaspokajające. Taka potrzeba może być zaspokojona np. we własnym zakresie (uprawa warzyw na działce). W większości wypadków jednak potrzeby są zaspokajane w wyniku nabywania dóbr i usług wytwarzanych przez innych i kupowanych na rynku.

Ilość dóbr i usług zaoferowanych na dany rynku do sprzedaży określona jest jako **podaż**. Stronę podaży tworzą producenci i sprzedawcy.

Relacje między popytem a podażą reguluje cena. **Cena** jest to wartość towaru wyrażona w jednostkach pieniężnych. Zgodnie z **prawem popytu** im wyższa jest cena danego produktu, tym mniejsze są ilości dokonywanych zakupów, natomiast niższym cenom towarzyszy wzrost wielkości popytu. **Prawo podaży** mówi o tym, że im wyższa jest cena rynkowa produktu, tym większe jego ilości są oferowane do sprzedaży. Sprzedawcy są bowiem zainteresowani sprzedażą jak największej ilości produktów, gdyż przynosi to im większy zysk (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Istotnym problemem do rozwiązania jest wybór lokalizacji i obszaru działania przedsiębiorstwa. Po przeprowadzeniu badań rynkowych, które są niezbędne przy podjęciu takiej decyzji, należy ustalić najważniejsze kryteria wpływające na wybór lokalizacji.

Czynniki, które należałoby wziąć pod uwagę przy podejmowaniu decyzji, gdzie prowadzić działalność (C. Barrow, P. Barrow, R. Brown, 2001):

1. Czy udało Ci się ustalić konkretny rynek zbytu na wybrany przez Ciebie rodzaj działalności? Jeśli sprzedajesz produkt lub usługę skierowaną do określonej grupy społeczno-ekonomicznej, przeanalizuj cech demograficzne wybranego rejonu. Czy znajduje się tam wystarczająca liczba klientów z odpowiednich grup wiekowych lubo określonych dochodach. Czy liczba takich osób rośnie czy raczej spada?

2. Jeśli potrzebujesz wykwalifikowanych pracowników, to czy zdołasz ich znaleźć bez większych trudności?
3. Czy wybrana lokalizacja zapewni Ci dostęp do dodatkowych usług, które będą konieczne do sprawnego funkcjonowania biznesu?
4. Na ile dostępne są nieprzetworzone materiały, składniki i inne zapasy?
5. Jaki jest koszt wynajmu i usług komunalnych w porównaniu z innymi rejonami?
6. Czy wybrane miejsce ma dogodne warunki komunikacyjne? Jak daleko znajdują się najbliższa linia kolejowa i lotnisko?
7. Czy wiesz coś na temat ewentualnych zmian, które mogłyby wpłynąć na kondycję Twojego biznesu, np. nowa droga szybkiego ruchu przechodząca przez centrum miasta, zmiany w usługach transportowych, likwidacja dużego zakładu pracy?
8. Czy w najbliższym sąsiedztwie działa jakiś przedsiębiorca, który może stanowić dla Ciebie konkurencję? Czy będzie miało to korzystny czy raczej negatywny wpływ na Twoją działalność?
9. Czy wybrana przez Ciebie lokalizacja będzie sprzyjała wykreowaniu korzystnego wizerunku na rynku? Na przykład projektant luksusowej odzieży może być mało wiarygodny prowadząc działalność w rejonie słynącym przede wszystkim z przemysłu ciężkiego i wyjątkowego zanieczyszczenia środowiska.
10. Czy określony rejon jest ogólnie traktowany jako rozwojowy, czy wprost przeciwnie? Czy sprzyja inicjatywom gospodarczym?
11. Czy będziesz w stanie bez problem docierać do wybranego miejsca: Czy możesz powiedzieć to samo o swoich najważniejszych pracownikach?

Wykorzystując powyższe kryteria, można szybko wykluczyć większość nieodpowiednich miejsc. Inne jednak będą wymagały kilkakrotnych odwiedzin o różnych porach dnia i tygodnia, zanim podejmie się decyzję, że nie są to miejsca, których szukamy!

Należy pamiętać o kilku istotnych problemach:

1. Niemal każda korzyść wiąże się z określonymi kosztami i stwierdzenie to jest szczególnie aktualne w odniesieniu do lokalizacji. Należy pamiętać o tym, aby skrupulatnie ocenić koszty związane z każdą rozważną lokalizacją w stosunku do potencjalnych korzyści. Oszczędność wynikająca z niższych kosztów najmu może okazać się pozorna, jeśli wybierając gorszą lokalizację straci się na wynikach sprzedaży. Z drugiej jednak strony nie należy wybierać kosztownego lokalu, dopóki nie ma się pewności, że przyniesie on wysokie zyski. Wyższe koszty niekoniecznie muszą oznaczać większe korzyści.
2. Przy wyborze lokalizacji należy kierować się typem wybranej przez siebie działalności. Nie przyjmuje się żadnej lokalizacji jako „pewnik". Na przykład zaadoptowanie na księgarnię nieużywanej części sklepu muzycznego prowadzonego przez przyjaciela może wydać się niezłym pomysłem ze względu na zerowe koszty najmu, ale błąd takiego typu rozumowania polega na tym, że można otworzyć firmęw miejscu, które zupełnie się do tego nie nadaje. Fakt, że od początku ktoś wie, jaki rodzaj działalności chce prowadzić wcale nie oznacza, że powinno się podchodzić w ten sam sposób do kwestii wyboru lokalizacji. Należy wybrać możliwie najlepsze miejsce – czyli takie, które przyniesie największy zysk C. Barrow, P. Barrow, R. Brown, 2001).

„Darmowe" lokale w praktyce mogą okazać się niezwykle kosztowne, jeśli nie są dostosowane do określonego typu działalności. Z drugiej strony – jeśli mamy już z góry upatrzoną lokalizację, być może należy przemyśleć rodzaj działalności najbardziej odpowiedni dla tego miejsca. Takiej decyzji również nie powinno się podejmować bez dokładnego przemyślenia wszystkich „za" i „przeciw". Jaki typ działalności zapewnia najbardziej optymalne i dochodowe wykorzystanie danej powierzchni?

Jeśli chodzi o **wybór lokalu** na działalność gospodaczą należy wziąć pod uwagę następujące kwestie: (C. Barrow, P. Barrow, R. Brown, 2001).

1. **Wybrany lokal może być wykorzystywany na wybrany rodzaj działalności?** Niektóre z nich kategorii użytkowania lokali to: handel, działalność biurowa, przemysł lekki, przemysł ogólny, ponadto można wyróżnić wiele innych kategorii. Jeśli wybrana działalność różni się od tej, którą prowadził poprzedni najemca, niewykluczone, że należy zwrócić się do władz lokalnych o zmianę sposobu użytkowania pomieszczenia. Istnieje mnóstwo przepisów regulujących użytkowanie lokali przeznaczonych na działalność gospodarczą. W tej kwestii należy skontaktować się z odpowiednim wydziałem urzędu miasta, aby upewnić się, że planowane działania nie naruszają którejś z aktualnie obowiązujących norm.
2. **Czy planowanie będą jakieś zmiany strukturalne w obrębie wykorzystywania lokalu?** Jeśli tak, jakie będą potrzebne w tym celu odpowiednie pozwolenia budowlane i upewnić się, że plany są zgodne z prze-

pisami budowlanymi. W obu przypadkach należy uzbroić się w cierpliwość i pamiętać o uwzględnieniu kosztów tych przedsięwzięć w prognozach przepływu gotówki. Na przykład przy otwieraniu restauracji pełny projekt lokalu trzeba złożyć do wydziału architektury w urzędzie miasta lub gminy. Musi tam się znaleźć wszystko: wentylacja, klimatyzacja, burzenie ścian, stawianie ścian, projekt kuchni, drogi ewakuacyjne, toalety itp. (bez systemu wentylacji straż pożarna nie zgodzi się na uruchomienie lokalu).

3. **Czy wybrany lokal ma odpowiednią powierzchnię.** Warto pomyśleć o tym, aby nie wydawać zbędnych środków na wynajem lub kupno lokalu, którego metraż będzie przekraczał rzeczywiste potrzeby firmy. Jeśli lokal okaże się zbyt mały, trzeba będzie ponownie rozpoznać czasochłonny proces poszukiwania nowej lokalizacji, a to może wiązać się ze sporymi kosztami lub może okazać się zgubne dla firmy. Na przykład otwarcie przedszkola musi spełniać określone wymogi:
    - przedszkole nie może mieć szamba, musi mieć kanalizację miejską;
    - musi być miejsce na parking;
    - schody – szerokość minimum 1,20 m;
    - pomieszczenia dla dzieci – minimum 3 m wysokości;
    - trzeba mieć miejsce na wentylację mechaniczną;
    - gdy w kranach miejskich wodociągów woda nie spełnia norm dla przedszkola, trzeba zamówić stację oczyszczania i ozonowania wody;
    - inne to: przeróbki łazienek, bo muszą być kabiny, wszystkie meble atestowane, drzwi przeciwpożarowe, żeby dojazd był z innej strony;
    - uzgodnienia ze strażą pożarną, z sanepidem, z udziałem energetycznym o większy przydział prądu i inne.

Metodą prób i błędów należy ustalić idealną powierzchnię lokalu, która będzie łatwa do zaaranżowania, ekonomiczna pod względem wykonywanej pracy, estetyczna oraz wygodna dla personelu, jak i klientów.

4. **Czy wybrany lokal spełnia wszystkie normy bezpieczeństwa i higieny pracy i jest zgodny z przepisami dotyczącymi ochrony przeciwpożarowej?** W tej sprawie warto skontaktować się z odpowiednimi instytucjami, w których można uzyskać informacje na temat aktualnie obowiązujących przepisów. To np. Główny Inspektorat Pracy, Główny Inspektorat Sanitarny, Główny Urząd Nadzoru Budowlanego, Komenda Główna Państwowej Straży Pożarnej.
5. **Jeśli planuje się prowadzić firmę w domu, również należy upewnić się czy działalność jest zgodna i obowiązującymi przepisami i czy nie będzie uciążliwa dla sąsiadów.** Prowadzenie działalności w miejscu zamieszkani może być przychylnie traktowane przez przedstawicieli banków finansujących przedsięwzięcie, ponieważ znacznie ogranicza ryzyko związane z najtrudniejszym, początkowym okresem działalności. Natomiast w oczach przedstawicieli funduszy **venture capital** takie rozwiązanie świadczyłoby o tym, że przedsięwzięcie nie jest warte zachodu.
6. **Istotne jest czy lokal kupić, czy raczej dogodniej byłby najem.** Natychmiastowy zakup pomieszczeń na działalność gospodarczą ma sens wówczas, gdy firma zdobyła już pewną pozycję na rynku, ma określone perspektywy i może traktować tę inwestycję w kategoriach majątkowych. Natomiast w przypadku firmy, która dopiero wchodzi na rynek, spłata kredytu wraz z odsetkami może wynosić więcej. W wyborze i określeniu lokalizacji pomocnym może być Internet.

Jednym z najważniejszych elementów, jaki należy wziąć pod uwagę jest **konkurencja**. Powstaje ona wtedy, gdy wielu producentów jednocześnie wprowadza na rynek i oferuje na nim produkty zaspokajające te same potrzeby.[1]

Konkurencja – to rywalizacja o fundusze nabywcze kupujących poprzez przedstawienie oferty w sposób bardziej atrakcyjny od innych (np. z punktu widzenia ceny lub jakości) (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Konkurenci bezpośredni obsługują tę samą grupę nabywców oferując produkty zaspokajające te same potrzeby w podobny sposób (np. Mc Donalds i Burger King).

Sprzedawcy substytutów zaspokajającą tę samą potrzebę, co firma, choć za pomocą innych produktów, (np. konkurentem dla producenta tapet ściennych jest producent farb, dla producenta masła – producent margaryny).

Konkurenci potencjalni – to podmioty, które aktualnie, nie są konkurentami przedsiębiorstwa, ale mogą się nimi stać w określonych okolicznościach, np. kiedy rozszerzą swoją ofertę (np. dla producenta mebli

1. http://www.przepisnabiznes.pl/dzialalnosc-gospodarcza/wybor-lokalu.html (15.03.2013)

kuchennych firma produkująca meble pokojowe w danej chwili jest potencjalnym konkurentem, ale stanie się bezpośrednim konkurentem wtedy, gdy zacznie produkować meble kuchenne).

Każdy z trzech rodzajów konkurentów może rywalizować o klienta za pomocą dwóch sposobów:

- ceny,
- działań pozacenowych.

Konkurencja cenowa – przybiera z reguły formę oferowania produktów po cenie niższej niż konkurenci. To najłatwiejszy sposób konkurowania, ale też niosący ze sobą bardzo duże ryzyko. W przypadku, kiedy konkurenci zaczną stosować podobną formę konkurencji, może to doprowadzić do wojny cenowej. W konsekwencji obniżają się ceny na całym rynku, co powoduje zmniejszenie zysku przedsiębiorstw, a nawet straty.

Konkurencja pozacenowa – jest odmienną formą konkurowania (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004). Polega na wykorzystywaniu, jako źródła przewagi nad konkurentami instrumentów związanych z:

- produktem – jego cechy użytkowe, jakość, marka, opakowanie, serwis gwarancji;
- dystrybucją – miejsce i sposoby sprzedaży, dostępność produktu;
- promocją – większa częstotliwość stosowania, różnorodność stosowanych form.

Czasami na rynku pojawia się **konkurencja nieuczciwa**, związana z nieuczciwymi metodami postępowania, np. podrabianie oryginalnych produktów, marek, opakowań, stosowanej nieuczciwej reklamy upowszechnianie negatywnych opinii o konkurentach i ich produktach. Nieuczciwa konkurencja narusza normy etyczne i podlega karom przewidzianym w obowiązującym ustawodawstwie, np. ustawie o zwalczaniu nieuczciwej konkurencji.

CIEKAWOSTKA!

Czy przedsiębiorcy myślą, „co by było gdyby"?

Wyobraźmy sobie przedsiębiorcę, który stoi przed wyborem, z którym dostawcą podjąć współpracę. Gdy już podjął decyzję i nawiązał współpracę z jednym z nich, to czy zastanawia się potem, „co by było gdybym wybrał kogoś innego? Czy produkcja przebiegałaby sprawniej? Czy dzięki temu firma szybciej by się rozwijała?".

Dokonywanie wyboru zawsze wiąże się z przyjęciem jednej propozycji, a odrzuceniem pozostałych. Wyobrażanie sobie, że jednak dokonujemy innego wyboru powoduje, że w umyśle powstaje zazwyczaj cały scenariusz, w którym wszystko toczy się dla nas korzystniej. Prowadzi to do zmian w nastroju i w sposobie myślenia (zob. Roese, 1997, za: T. Zaleśkiewicz, 2004). Nastrój się obniża i wzrasta żal, a to z kolei powoduje, że osoba zaczyna źle oceniać własne możliwości i umiejętności. Pojawiają się w niej wątpliwości. Negatywne emocje powodują także, że dane przedsięwzięcie może się wydawać bardziej ryzykowane. Jednak są i dobre strony myślenia „co by było gdyby".

Rozpatrywanie własnej decyzji z różnych stron pozwala uzyskać szerszy ogląd i często prowadzi do wyłapania błędów w podejmowaniu decyzji. Wyobraźmy sobie osobę, która chciała zainwestować swoje pieniądze w akcje, ale ostatecznie zrezygnowała z tego. Po jakimś czasie dowiaduje się, że kursy cen idą w górę. Osoba ta, na pewno doszła do wniosku, że przegapiła dobrą okazję. Jej nastrój pewnie też będzie gorszy, lecz w przyszłości może zachowa się już inaczej i potraktuje inwestowanie w akcje, jako dobry sposób na osiągnięcie zysków.

Dla przedsiębiorców kluczowe jest utrzymanie wysokiej samooceny oraz pozostanie bardzo aktywnym i optymistycznym, co do przyszłości. Dlatego też nie skupiają się oni na tym, „co by było gdyby". Oczywiście nie znaczy to, że unikają refleksji na temat własnych porażek. Osoby prowadzące własną firmę są nawet bardziej niż inni skłonne do tego by siędo niej przyznać i analizować przyczyny, poszukując ich w sobie. Umiejętność radzenia sobie z porażkami jest bardzo ważna, szczególnie w biznesie, w którym zdarzają się one dosyć często.

Aby dowiedzieć się jak osoby prowadzące własną firmę interpretują przyczyny swoich porażek i jak na nie reagują, grupie przedsiębiorców zadano serię pytań (Cardon, McGrath, 1999, za: T. Zaleśkiewicz, 2004). Analiza uzyskanych informacji pozwoliła stwierdzić, że przedsiębiorcy uznają, iż przyczyną ich niepowodzeń jest niedostateczny wysiłek, Porażka według nich nie wynika z braku zdolności. Starają się oni wyciągnąć z niej wartościową naukę, tak by nie popełnić tego samego błędu w przyszłości. Co więcej porażka staje się dla niech bodźcem motywującym do efektywniejszego działania. Można więc powiedzieć, że przedsiębiorcy traktują porażkę jako naturalny element związany z zawodową aktywnością, a kiedy już zdarzy im się jej doświadczyć to konstruktywnie ją wykorzystują

Analiza rynku i branży

Analiza rynku obejmuje czynności związane z badaniem rynku i opracowaniem zebranych informacji, dlatego powinna być wykonana na samym początku. Na tym etapie weryfikowane są bowiem wstępne założenia dotyczące celowości całego przedsięwzięcia.

Analiza rynku powinna dać odpowiedź na pytanie, czy oferowany przez firmę produkt usługa znajdą nabywców na rynku, a precyzyjniej – czy – biorąc pod uwagę istnienie konkurencji – na rynku istnieją potencjalni nabywcy danego produktu/usługi, ilu ich jest i na ilu z nich można liczyć.

Jeżeli badania wykażą, że popyt na dany produkt lub usługę jest zbyt mały lub konkurenci dysponują poważną przewagą, wówczas należy gruntownie zmodyfikować wstępne założenia dotyczące projektowania przedsięwzięcia (produktu, usługi, rynku, ceny lub zaniechać dalszych prac.

Jeśli zaś okaże się, że istnieje miejsce na rynku, należy przystąpić do dalszych czynności planistycznych i weryfikacyjnych.

W przypadku analizy rynku chodzi o upewnienie się, czy na rynku są nabywcy, czy potrzebują danych produktów lub usług oraz z jaką konkurencją należy się liczyć. Oszacowanie popytu na dany produkt lub usługę oraz analiza konkurencji pozwolą dokonać prognozy sprzedaży.

Analiza rynku powinna więc zawierać takie elementy, jak (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010):

1. Identyfikacja rynku do celowego.
2. Cechy standardowego odbiorcy – lub w przypadku firm już istniejących, działających poza masowym rynkiem konsumpcyjnym – charakterystyka odbiorców.
3. Analiza potencjalnego popytu.
4. Analiza konkurencji.
5. Szacunek sprzedaży.

1. Identyfikacja rynku docelowego powinna obejmować:
    - charakterystykę rynku;
    - segmentację rynku;
    - charakterystykę wybranych segmentów.
2. Cechy standardowego odbiorcy – lub w przypadku firm już istniejących, działających poza masowym rynkiem konsumpcyjnym – charakterystyka odbiorców.
3. Analiza potencjalnego popytu powinna określać:
    - szacunki popytu;
    - czynniki wpływające na popyt.
4. Analiza konkurencji z uwzględnieniem:
    - najważniejszych konkurentów – analiza silnych i słabych stron;
    - możliwości pojawienia się nowych konkurentów;
    - oraz możliwości pojawienia się substytutów.
5. Szacunek sprzedaży.

Tabela 8 zawiera wszystkie niezbędne informacje dotyczące analizy rynku.

Ważnym zagadnieniem jest **ukazanie rynku docelowego**. W tym celu niezbędne jest udzielenie odpowiedzi na następujące pytanie:

- Kim są potencjalni klienci?
- Jakie są ich potrzeby?
- Czy istnieje na danym rynku konkurencja?
- Jakimi motywami kierują się konsumenci dążąc do zaspokojenia potrzeb?
- Jaki jest wpływ czynników: ekonomicznych, socjologicznych i kulturowych na decyzję zakupu?
- Jaka jest reakcja nabywców na bodźce zewnętrzne (np. na reklamę)?
- Jak przebiega proces dokonywania zakupów i jakie funkcje pełnią w nich członkowie rodziny (kto jest inicjatorem, kto doradcą, kto ostatecznym decydentem, a kto zaopatrzeniowcem?)

Tabela 8. Informacje dotyczące analizy rynku

Problemy i pytania, na które powinny odpowiadać informacje dotyczące analizy rynku	Techniki i narzędzia do wykorzystania: istotne czynności do wykonania
Jakimi najważniejszymi cechami charakteryzuje się rynek pro-duktów/usług istotnych z punktu widzenia przedsiębiorstwa?	Samodzielne przeprowadzenie badań (ankiet, wywiadów, obserwacji itp.) konsumentów.
Jakie są najważniejsze kryteria segmentacji tego rynku?	Wywiady ze specjalistami z danej dziedziny (sprzedawcami w sklepach, przedstawicielami handlu hurtowego, przedstawicielami konkurentów).
Dlaczego te a nie inne kryteria odgrywają najważniejszą rolę?	Analiza danych statystycznych.
Które z segmentów są interesującez punktu widzenia przedsięwzięciai dlaczego?	Konfrontowanie danych statystycznych z wynikami badań preferencji nabywców.
Jakie są cechy charakterystyczne dla tych segmentów? Które z tych cech są szczególnie istotne z punktu widzenia realizacji przedsięwzięcia? Jakie są perspektywy dla tych segmentów?	Analiza prasowych źródeł wtórnych.
Kim jest standardowy odbiorca pro-duktów/usług w tym egmencie, jakie są jego najważniejsze cechy?	Analiza informacji będących w po-siadaniu instytucji branżowych oraz w – określonych przypadkach – danych z instytucji naukowo-badawczych.
Ilu takich odbiorców znajduje sięw zasięgu działania przedsięwzięcia?	Analiza danych publikowanych przez konkurentów.
Czy istnieją duzi odbiorcy, którzy już dziś deklarują zakup produktów/usług powstającej firmy, ilu ich jest, jakie są ich cechy i na jakie za-mówienie można liczyć?	Badania własne (wywiady, obserwacja) konkurentów.
Jakie jest nasilenie konkurencjiw omawianym segmencie, ilu jest konkurentów i jakie są ich cechy?	W określonych przypadkach – zakup informacji o strukturze rynku i konkurentach u podmiotów trzecich (zlecenie badań lub wykorzystanie istniejącej bazy danych).
Kto będzie bezpośrednim konkurentem dla przedsięwzięcia; jakie są cechy charakterystyczne najważniej-szych konkurentów? Jakie są możliwości konkurowania z tymi firmami? Jakie mogą być pojawienia się na rynku nowego konkurenta?	Literatura z zakresu planowaniai tworzenia biznesplanów, a także prowadzenia badań marketingowych.
Czy istnieje groźba pojawienia się nowych konkurentów? (jak silne są bariery wejścia do sektora)? Czy rysuje się groźba ze strony substytutów?	
Jakie czynniki niezależne od firmy mogą mieć wpływ na wielkość sprzedaży (np. sezonowość popytu)i jak mogą być wykorzysty-wane/neutralizowane? Jaka jest planowana sprzedaż w pierw-szym roku działalności?	

Źródło: J. Piaseczny, Problemy i metody, Warszawa 2002, s. 110-111.

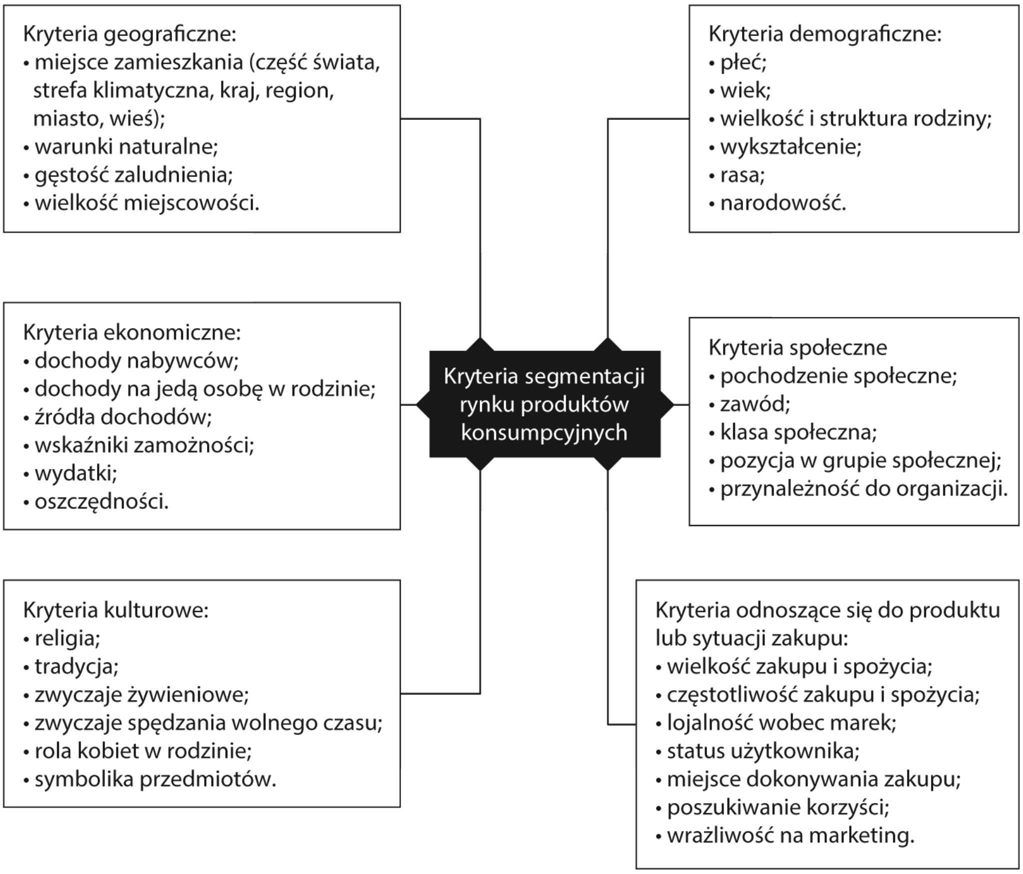
Segmentacja rynku jest podstawą podjęcia decyzji o wyborze docelowego rynku działań przez przedsiębiorstwo.

Proces segmentacji rynku polega na podziale zróżnicowanej masy klientów na jednorodne (homogeniczne) grupy o podobnych potrzebach i oczekiwaniach. Grupy te określa się mianem segmentów. Dla przedsiębiorstwa ważne jest określenie grupy konsumentów, do których kieruje swoje produkty. Segmentacja rynku jest ważnym i istotnym elementemw walce o pozyskanie nowych klientów na konkurencyjnym rynku.

Poszczególne segmenty rynku skupiają odbiorców o podobnych cechach. Konsumenci należący do jednego segmentu są do siebie podobni, natomiast należący do różnych segmentów różnią się od siebie.

Cechy, na podstawie których wyodrębnia się segmenty rynku nazywamy kryteriami segmentacji. Można je podzielić na dwie grupy (Rysunek 1):

- kryteria odnoszące się do konsumenta (geograficzne, demograficzne, ekonomiczne, społeczne, kulturowe);
- kryteria odnoszące się do produktu lub sytuacji zakupu.



Rysunek 1. Kryteria segmentacji rynku produktów konsumpcyjnych

Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Difin, Warszawa 2004, s.46.

W przypadku nabywców instytucjonalnych kryteriami segmentacji mogą być:

- liczba zatrudnionych;
- wielkość obrotów;
- powierzchnia punktów sprzedaży;
- branża;
- lokalizacja;
- obszar prowadzonej działalności.

Segmentacja rynku nie jest pojedynczą czynnością. Jest procesem złożonym z kilku działań, a jego realizacja wymaga określonego czasu. Można wyodrębnić następujące etapy segmentacji:

- wybór kryteriów segmentacji polegający na podjęciu decyzji, które kryteria będą brane pod uwagę, np. wiek, lojalność wobec marki;
- określenie wariantów wybranych kryteriów, np. dla wieku określenie przedziałów wiekowych (do 20 lat, 21–30 lat itp.), a dla lojalności – wyróżnienie nabywców lojalnych i nielojalnych;
- grupowanie konsumentów ze względu na podobieństwo ich cech;
- charakterystyka wyodrębnionych segmentów z punktu widzenia innych cech (analiza, jakimi cechami i zachowaniami charakteryzuje się segment osób w wieku do 20 lat);
- określenie wielkości wyodrębnionych segmentów na podstawie danych statystycznych.

Jeżeli wiadomo, jakie segmenty istnieją na rynku i jak są obsługiwane przez konkurencję, należy zdecydować się, który (lub które) z nich chcemy obsługiwać. To najważniejsza decyzja, gdyż złe określenie segmentu to ryzyko, że produkt nie znajdzie nabywców. Segmentacja powinna chronić firmę przed stosowaniem środków oddziaływania wobec osób, których nie interesuje produkt (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Najlepszy segment to taki, który spełnia następujące warunki: (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010)

- jest **pojemny**, czyli odpowiednio duży, co oznacza, że umożliwia osiągnięcie zakładanych celów sprzedażowych;
- jest **dostępny**, czyli firma musi mieć możliwość wejścia do niego i działania na nim;
- jest **przyszłościowy**, czyli przewiduje się jego rozwój;
- jest **mało atrakcyjny dla konkurentów**, czyli nie zachęca ich do działania;
- jest **opłacalny**, czyli umożliwia realizację celów firmy.

Często okazuje się, że wielkość (liczba nabywców) nie gwarantuje opłacalności, bo choć jest ich wielu, to kupują tak małe ilości produktów i tak rzadko, że jest to niezyskowne dla przedsiębiorstwa.

Najbardziej opłacalni są nabywcy kupujący często i dużo produktu. To oni są dla przedsiębiorstw najważniejsi. W marketingu znana jest **reguła „80/20”**, według której 20% nabywców regularnie i często dokonując zakupów decyduje o 80% obrotów. Prawidłowość ta występuje w pewnych przybliżonych granicach (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Na podstawie oceny **atrakcyjności** segmentów rynku wybierany jest **rynek docelowy**, czyli taki, na którym firma będzie prowadzić działalność.

Rynek docelowy – to grupa lub grupy konsumentów, do których firma adresuje swoją ofertę. Rynku docelowego nie można utożsamiać z rynkiem geograficznym, gdzie zazwyczaj podobni z punktu widzenia potrzeb i preferencji konsumenci zamieszkują różne regiony.

Atrakcyjność rynku zależy w dużym stopniu od możliwości osiągnięcia przewagi konkurencyjnej. Często związane jest to z poszukiwaniem **nisz rynkowych**.

Nisza rynkowa – wąska grupa nabywców, szukających ściśle określonych korzyści.

Nisza rynkowa powstaje wówczas, gdy na jakimś obszarze segmentu rynku nie ma ani jednej firmy oferującej pożądany produkt, albo konkurenci oferują produkty o niskiej i niezadowalającej jakości. Z reguły nabywcy są skłonni zapłacić wyższą cenę za specyficzny produkt zaspokajający ich potrzeby. Dla przedsiębiorstwa nisza oznacza znalezienie takiego miejsca na rynku, które zapewnia osiąganie zysku, a przy tym jest pomijane przez konkurentów (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Przedsiębiorstwo wybierając rynek docelowy musi ocenić jego wielkość w przyszłości, perspektywy rozwoju oraz jego atrakcyjność dla przedsiębiorstwa.

Działania przedsiębiorcy muszą być skierowane na rynek. Należy sprzedawać te towary i usługi, na które jest największy popyt, poznać wielkość luki rynkowej, czyli niezajętej części rynku.

Analizę rynku można przeprowadzić metodami: (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010).

- bezpośredniego sondażu rynku (ankieta, wywiad, eksperyment rynkowy, badania panelowe, badania motywacyjne) lub
- statystycznymi – opierając się na danych z ubiegłych okresów.

Metody bezpośredniego badania rynku są bardzo pracochłonne, a zatem kosztowne. Proste i tańsze są metody statystyczne, jednak dostarczają tylko danych szacunkowych.

W analizie rynku trzeba uwzględnić wiele czynników, do których należy:

- określenie wielkości sprzedaży konkurentów;
- średnie wydatki klientów na zakup danego produktu;
- ceny rynkowe;
- częstotliwość zakupu;
- jak kształtują się te wielkości w czasie.

Te dane można znaleźć w roczniku statystycznym lub w Internecie. Wszystko, co można kupić i sprzedać jest produktem.

Wśród bezpośrednich metod analizy rynku najbardziej popularne są **badania ankietowe**. Dzięki nim można sporządzić „portret typowego nabywcy” produktu. Porównując „portret typowego nabywcy” z rynkiem geograficznym można ustalić „rynek nabywczy”, czyli liczbę osób, która skłonna jest kupić produkt. Dane te można przeliczyć na koszty, jakie można uzyskać ze sprzedaży produktu.

Pomnóż liczbę potencjalnych nabywców przez ich miesięczne wydatki na zakup danego produktu, a otrzymasz „rynek produktu". Nie zapomnij jednak, że na rynku mogą już działać inne firmy, które stanowią dla Ciebie konkurencję. Jej znajomość jest konieczna do określenia opłacalności przedsięwzięcia. Jeśli ustalisz w przybliżeniu obroty Twoich konkurentów możesz poprzez porównanie ich z rynkiem produktu określić „lukę rynkową".

W ocenie segmentu firma powinna starannie ocenić bariery wejścia na rynek, unikać segmentów, na których trwa walka konkurencyjna. Firmy nie powinny starać się pozyskiwać tych segmentów, którym nie są w stanie zaoferować niczego szczególnie wyróżniającego się na tle konkurentów.

Bardzo ważnym zagadnieniem jest określenie rozmiarów branży w kontekście wytwarzania przez nią wyrobów i usług. Oszacowania jej rozmiaru dokonuje się na podstawie wielkości sprzedaży produkcji, wyrażonej wartościowo lub w jednostkach naturalnych. Niezbędne są też dane publikowane w statystyce i dokumentach oficjalnych oraz wyniki rozmów przeprowadzony z ekspertami. Na podstawie tych informacji wyznacza się roczne wskaźniki wzrostu branży, które można porównać z projektowanymi wskaźnikami wzrostu przedsiębiorstwa w ujęciu rocznym. Powyższe informacje pozwalają na oszacowanie perspektyw rozwojowych i prawdopodobnej ewolucji branży, w której działa przedsiębiorstwo.:(A. Tokarski, M. Tokarski,J. Wójcik, 2010).

Charakterystyka branży powinna także uwzględnić:

- listę wiodących firm w branży z uzasadnieniem ich pozycji;
- miejsce firmy w branży, mierzone, między innymi, udziałem wielkości sprzedaży produkcji firmy w sprzedaży całej branży, udziałem wielkości zatrudnienia przedsiębiorstwa w zatrudnieniu całej branży, przy czym oceny miejsca firmyw branży należy też dokonać z punktu widzenia klientów firmy i konkurencji;
- cechy konkurencyjności firmy, które charakteryzują słabe i mocne strony przedsiębiorstwa w stosunku do innych firm w branży.

Przedsiębiorstwa konkurujące na rynku rywalizują między sobą o fundusze nabywcze. Należy zatem sprecyzować, czyje są to fundusze i kto jest zaangażowany w decyzję zakupu. Może to być nabywcza (klient) albo konsument.

Nabywca (klient) to osoba dokonująca zakupu produktu w celu zaspokojenia potrzeb własnych i/lub innych członków swojego gospodarstwa domowego.

Konsument to osoba wykorzystująca (konsumująca) produkt.

Możliwe są przy tym trzy sytuacje: (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

- w przypadku części produktów nabywca jest jednocześnie konsumentem kupowanego produktu – kupuje wyłącznie dla siebie;
- niekiedy grono konsumentów obejmuje nabywcę oraz dodatkowe osoby – klient kupuje dla siebie i swojej rodziny;
- czasami nabywca nie jest w ogóle konsumentem – klient dokonuje zakupu produktu wyłącznie dla innych.

Dodatkowo można wyróżnić dwie grupy nabywców:

- **indywidualnych** – czyli osoby nabywające dobra materialne i usługi w celu zaspokojenia własnych potrzeb osobistych, wspólnych potrzeb gospodarstwa domowego lub osobistych potrzeb innych członków rodziny;
- **instytucjonalnych** – czyli organizuje nabywające dobra materialne i usługiw celu zaspokojenia potrzeb wynikających z przedmiotu ich działalności, np. przedsiębiorstwa produkcyjne, przedsiębiorstwa handlu hurtowego i detalicznego, jednostki budżetowe oraz organizacje instytucje niedochodowe.

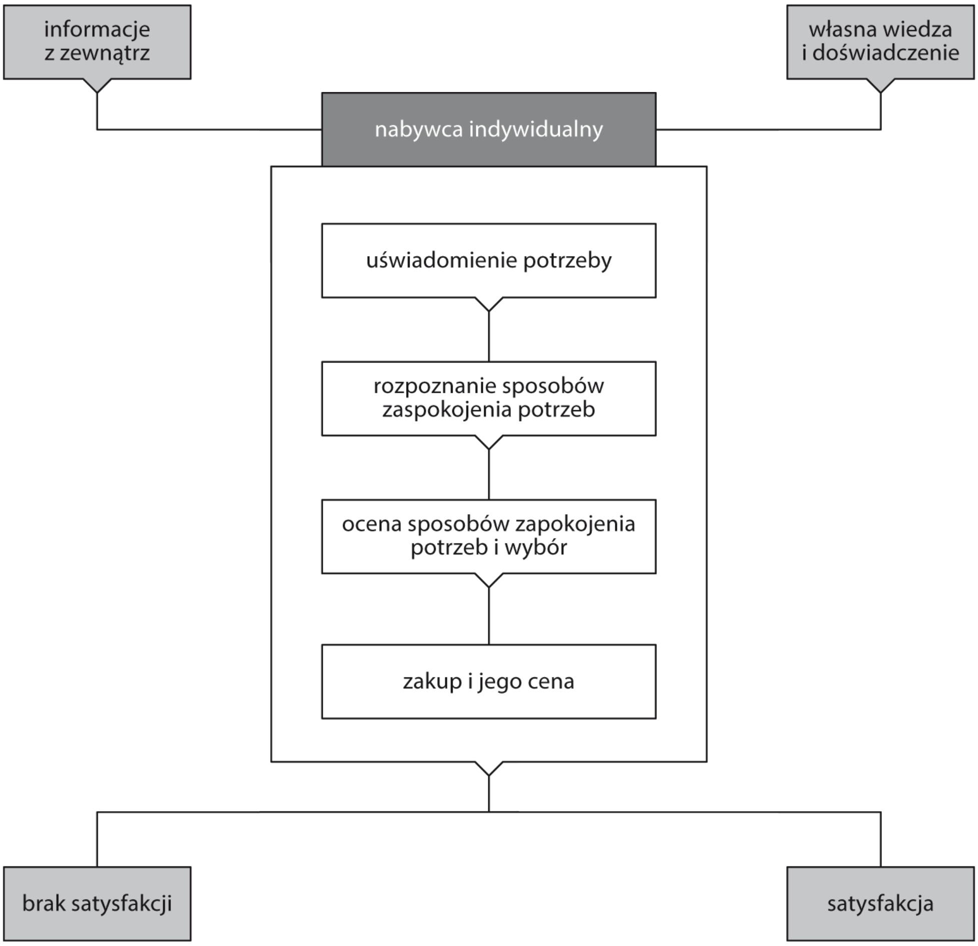
Proces postępowania nabywców na rynku związany jest z dokonywaniem przez niego zakupów. Przebiega on różnie, w zależności od tego, czy są to nabywcy indywidualni czy instytucjonalni.

Decyzje nabywcy indywidualnego mogą przybierać formę:

- **decyzji nawykowych** – związanych z częstym powtarzaniem decyzji wielokrotnie już podejmowanych, np. zakup codziennej gazety, czyli produkty często kupowane o niewielkiej wartości;
- **decyzji nierutynowych** – dotyczących produktów znanych i już wcześniej kupowanych, nie systematycznie, o nieco wyższych cenach, np. zakup spodni jeansowych;

- **decyzji rozważnych** – dotyczących produktów kupowanych bardzo rzadko, o wysokiej cenie i dużym znaczeniu, np. zakup samochodu;
- **decyzji impulsywnych** – związanych z produktem, których zakup nie jest wcześniej planowany przez konsumenta, ale jest wywołany oddziaływaniem jakiegoś bodźca np. zapachu czy promocji.

Proces podejmowania decyzji o zakupie składa się z kilku etapów (Rysunek 2).



Rysunek 2. Proces postępowania nabywców indywidualnych na rynku

Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Difin, Warszawa 2004, s. 37.

W wyniku tego procesu nabywca zaspokaja lub nieistniejącą potrzebę. Jeżeli zostanie ona zaspokojona w sposób zgodny z oczekiwaniem pojawi się odczucie satysfakcji. Jeżeli zaś oczekiwania będą wyższe niż rezultaty działania, to wynikiem procesu będzie brak satysfakcji określony, jako dysonans pozakupowy (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Na proces postępowania konsumentów na rynku wpływa wiele czynności (Rysunek 3)

Rysunek 3. Czynniki kształtujące postępowanie konsumentów na rynku

Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Difin, Warszawa 2004, s. 40.

Czynniki wewnętrzne, tzw. profil psychologiczny konsumenta, które związane sąz oddziaływaniem elementów o charakterze psychologicznym, wypływających z wnętrza człowieka.

Czynniki zewnętrzne, dotyczące oddziaływania elementów, które mają swoje źródła poza organizmem człowieka i obejmują:

- czynniki o charakterze socjologicznymi kulturowym, wynikające z życia w określonym społeczeństwie, tworzące tzw. profil socjologiczno-kulturowy konsumenta;
- czynniki charakteryzujące konsumenta pod względem cech demograficznychi ekonomicznych, tworzące tzw. profil demograficzno-ekonomiczny konsumenta, np. płeć, wiek, wykształcenie, miejsce zamieszkania, dochody, wydatki;
- czynniki związane z marketingiem – mix stosowanym na rynku przez różne firmy;
  – produkt, który pasuje nabywcy lub nie;
  – cena, która jest akceptowana lub nie;
  – dystrybucja, która umożliwia zakup lub nie;
  – promocja, która pobudza do zakupu lub nie;–
- czynniki związane z otoczeniem, w którym funkcjonuje konsument.

Na sposób postępowania konsumenta na rynku mają wpływ czynniki składające się na profil psychologiczny konsumenta:

- **Potrzeby** – to odczucia braku czegoś wynikające z dostrzegania różnicy między istniejącym stanem rzeczy a stanem pożądanym (oczekiwanym) (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004). Największe znaczenie ma podział na:
  – **potrzeby podstawowe**, które wynikają z biologicznego istnienia człowieka, np. zaspokajanie głodu, pragnienia, ubrania, mieszkania;
  – **potrzeby wyższego rzędu**, które są efektem rozwoju cywilizacyjnego i mają dla życia człowieka znaczenie uzupełniające, np. potrzeby związane z oświatą, kulturą, rozrywką.

Źródła ich powstawania są różne: fizyczny brak produktu, uzyskanie informacjio nowym produkcie, ujawnienie się nowych potrzeb, zmiana sytuacji materialnej czy zmiana oczekiwań w stosunku do produktu.

- **Motywy**, czyli dążenia do zaspokojenia potrzeb. Motywy mogą mieć różnorodny charakter:
  – racjonalny wtedy, gdy dążąc do zaspokojenia potrzeby człowiek kieruje się ceną produktu, jego trwałością, wydajnością, przydatnością, wygodą użytkownika czy dokonywania zakupu;

– emocjonalny wtedy, gdy zaspokajając potrzeby zwraca się uwagę na estetykę produktów, np. forma, kolor, kształt, materiał lub ich znaczenie symboliczne, np. chęć wyróżnienia się wśród innych;
– moralny wtedy, gdy dążąc do zaspokojenia potrzeby uwzględnia się zgodnośćz normami etycznymi i prawnymi, pochodzenie produktu, ekologię, wartości humanitarne.

- **Postawy i preferencje** – przychylne, neutralne lub niechętne nastawienia do osób, przedmiotów lub działań;
- **Osobowość** – **zbiór** cech psychicznych i mechanizmów wewnętrznych, które odróżniają ludzi. Za pomocą cech osobowości można opisać zachowanie człowieka. Osobowość człowieka tworzą: cechy dziedziczne, temperament, stopień inteligencji, poziom pewności siebie.
- **Doświadczenie** – związane z procesem uczenia się i zmieniające się wraz z wiekiem;
- **Skłonność do ryzyka**, które jest rodzajem niepewności, z którą konsument ma do czynienia, gdy nie może przewidzieć konsekwencji swoich działań. Minimalizowanie ryzyka lub jego likwidacja może przebiega za pomocą różnych środkówi działań: kupowanie produktów dobrze znanych markowych, z gwarancją, zbieranie informacji o przedmiocie zakupu. Są też jednak skłonni do kupowania innowacyjnych, nowatorskich produktów.

2.2. Analiza otoczenia przedsiębiorstwa

Żadne przedsiębiorstwo nie działa w poróżni, ale w określonym otoczeniu rynkowym. Analiza otoczenia umożliwia podejmowania właściwych decyzji, które przyczyniają się do osiągania sukcesu rynkowego.

„Aby zilustrować znaczenie otoczenia dla organizacji, rozważmy analogię z pływakiem przepływającym przez rzekę. Przed wypłynięciem musi on ocenić szybkość prądu, przeszkody, a także odległość. Jeśli oceni te elementy właściwie, dotrze do wybranego miejsca na drugim brzegu rzeki. Jeśli jednak zrozumie je niewłaściwie, może dotrzeć zbyt daleko, w dół lub w górę od wybranego miejsca na brzegu. Organizacja przypomina pływaka, otoczenie zaś rzekę. Tak więc jak pływak musi zrozumieć warunki panujące w wodzie, tak organizacja musi rozumieć podstawowe elementy swego otoczenia, aby mogła wśród nich prawidłowo manewrować” (Rocky W. Griffin, 2007).

Otoczenie rynkowe przedsiębiorstwa jest to ogół czynników wpływających na zdolność przedsiębiorstwa do zaspokajania potrzeb nabywców w sposób umożliwiający mu osiąganie zysku.

Otoczenie przedsiębiorstwa można podzielić na dwie części:

- otoczenie bliższe, które tworzą formalnie równorzędne podmioty rynkowe,z którymi przedsiębiorstwo wchodzi na rynku w różnorodne relacje;
- otoczenie dalsze tworzą niezależne od przedsiębiorstwa czynniki wpływające na działania wszystkich podmiotów funkcjonujących w otoczeniu bliższym.

Rysunek 4. Schemat otoczenia rynkowego przedsiębiorstwa

Źródło: Opracowanie własne na podstawie A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Warszawa 2004, s. 19.

Charakterystyka otoczenia bliższego przedsiębiorstwa obejmuje także podmioty jak: (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

- Dostawcy – zaopatrują przedsiębiorstwo w dobra związane z podstawowym obszarem działalności np. maszyny, urządzenia, surowiec, materiały, produkty do dalszej odsprzedaży;
- Pośrednicy – wspierają przedsiębiorstwo w procesie dystrybucji orz świadczą na jego rzecz usługi, np. hurtownicy, detaliści, przedsiębiorstwa transportowe, agencje badawcze, reklamowe, banki, instytucje ubezpieczeniowe;
- Konkurenci – rywalizują z przedsiębiorstwem na rynku i decydują o jego pozycji; są głównym źródłem zagrożenia na rynku, a swoimi działaniami mobilizują firmę do efektywnego działania;
- Nabywcy – są końcowymi odbiorcami oferty przedsiębiorstwa.

Otoczenie dalsze przedsiębiorstwa obejmuje czynniki takie jak ujęto w Tabeli 9.

Tabela 9. Charakterystyka otoczenia dalszego przedsiębiorstwa

Rodzaj czynników	Charakterystyka
Demograficzne	• wielkość i struktura ludności według wieku i płci; • struktura wykształcenia (podstawowe, zawodowe, średnie, wyższe); • struktura gospodarstw domowych (ich wielkość, rodzaj); • okresowe wyże lub niże demograficzne; • migracja ludności w skali krajowej i międzynarodowej; • gęstość zaludnienia (rozkład aglomeracji miejskich).
Ekonomiczne	• poziom i dynamika PKB ogółem i na 1 mieszkańca; • ogólny poziom i struktura zamożności społeczeństwa (bieżące dochody, oszczędności, zadłużenia); • polityka pieniężna państwa i system podatkowy; • poziom cen; • koniunktura gospodarcza (stopa wzrostu, stopa inflacji, rozmiar bezrobocia).
Polityczne	• stabilność systemu politycznego w danym społeczeństwie; • układ partii politycznych; • wojny i ruchy narodowowyzwoleńcze; • zagrożenia terroryzmem.
Prawne	• Regulacje prawne wpływające na ograniczenie swobody działalności przedsiębiorstw dotyczące: • ochrony przed nieuczciwą konkurencją (np. ustawa o zwalczaniu nieuczciwej konkurencji); • sposobów reklamowania się (np. ustawa o radiofonii i telewizji); • koncesjonowania i otrzymywania zezwoleń (np. sprzedaż materiałów pirotechnicznych, lekarstw, alkoholu, wyrobów tytoniowych); • zapewnienie bezpieczeństwa sprzedawanych produktów (np. atesty, zgodność z obowiązującymi normami); • ochrony interesów konsumentów; • ochrony środowiska naturalnego.
Społeczno-kulturowe	• religia, kultura i tradycja (np. obdarowywanie się prezentami z okazji świąt; • wartości i normy społeczne (np. stosunek do własnego zdrowia i wolnego czasu); • odchodzenie od tradycyjnego modelu rodziny (np. zmiana modelu 2 + 2 na 2 + 1); • ewolucja roli kobiet (np. rosnąca aktywność zawodowa kobiet); • wzory zachowań (np. wzory dokonywania zakupów); • działania subkultur młodzieżowych (np. skini, szalikowcy).
Technologiczne	• poziom rozwoju naukowego (np. wiedza o technologiach produkcji – know – how); • poziom rozwoju technicznego danego kraju (np. zaawansowanie techniczne maszyn i urządzeń); • rozwój infrastruktury telekomunikacyjnej (np. telefonizacja, Internet).
Naturalne (przyrodnicze)	• klimat; • charakter, jakość i dostępność zasobów naturalnych; • położenie geograficzne; • klęski żywiołowe.
Edukacyjne	• ogólny poziom wykształcenia w społeczeństwie; • system edukacyjny (np. sieć i struktura szkół).
Socjologiczne	• struktura klasowa społeczeństwa (np. wyodrębnienie klasy średniej, biznesmenów); • charakter i rozwój organizacji społecznych (np. istnienie organizacji charytatywnych, konsumenckich, ekologicznych).

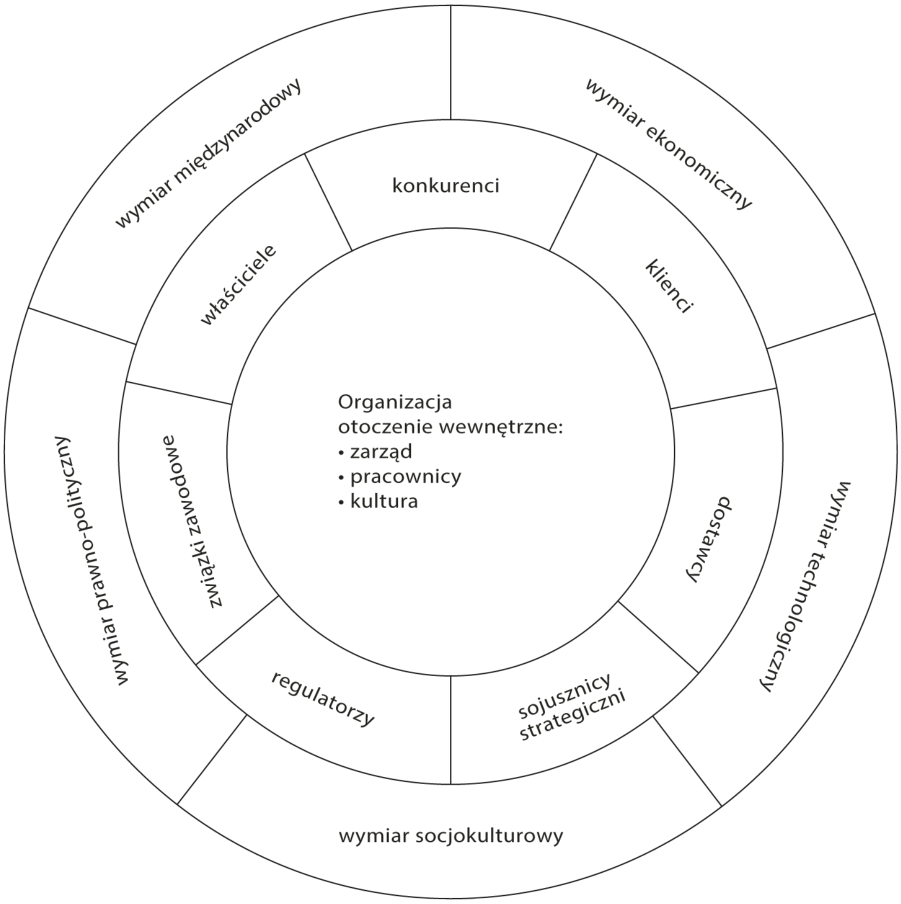
Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Difin, Warszawa 2004, s. 20–21.

Każde przedsiębiorstwo podejmując decyzje rynkowe musi analizować wszystkie elementy swojego otoczenia w sposób ciągły i kompleksowy oraz uwzględniać istniejące pomiędzy nimi zależności.

Analiza otoczenia powinna być przeprowadzona z dwóch punktów widzenia:

- szans (sprzyjających warunków działania dla przedsiębiorstwa);
- zagrożeń.

Otoczenie podmiotu gospodarczego przedstawia rysunek 5.



Rysunek 5. Organizacja i jej otoczenie

Źródło: A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, Biznesplan po polsku, CeDeWu.pl, Warszawa 2010, s. 89.

Otoczenie zewnętrzne to wszystko to, co z zewnątrz organizacji może na nią wpływać. Otoczenie zewnętrzne składa się z dwóch warstw: otoczenia ogólnego i otoczenia celowego.

Otoczenie wewnętrzne organizacji składa się z warunków i sił wewnątrz organizacji. Jego główne składowe obejmują zarząd, pracowników i kulturę organizacji.

Misja przedsiębiorstwa

To określenie istoty działalności przedsiębiorstwa ze względu na jego rolę i zasadnicze funkcje spełniane na rzecz otocznie. Określenie misji może dotyczyć stanu istniejącego (czym jest dane przedsiębiorstwo?) lub wyrażać dążenia przedsiębiorstwa (czym powinno być?). W drugim ujęciu poprawnie zdefiniowana misja stanowi najważniejszy, kierunkowy cel działalności, stanowiący punkt odniesienia dla wyznaczania celów niższego rzędu oraz kształtowania strategii przedsiębiorstwa. Podstawę definiowania misji tworzą takie elementy, jak: historia firmy i jej dotychczasowe osiągnięcia, podstawowe wartości uznawane przez jej właścicieli i zarząd, możliwości i zagrożenia wynikające z analizy zmian zachodzących w otoczeniu gospodarczym, kompetencje firmy wynikające z jej wielkości, struktury zgromadzonych zasobów oraz nabytego doświadczenia, a także oczekiwania społeczne, których spełnianie wpływa na ukształtowanie się korzystnego image przedsiębiorstwa (za: J. Altkorn, T. Kramera, 1998, s. 159).

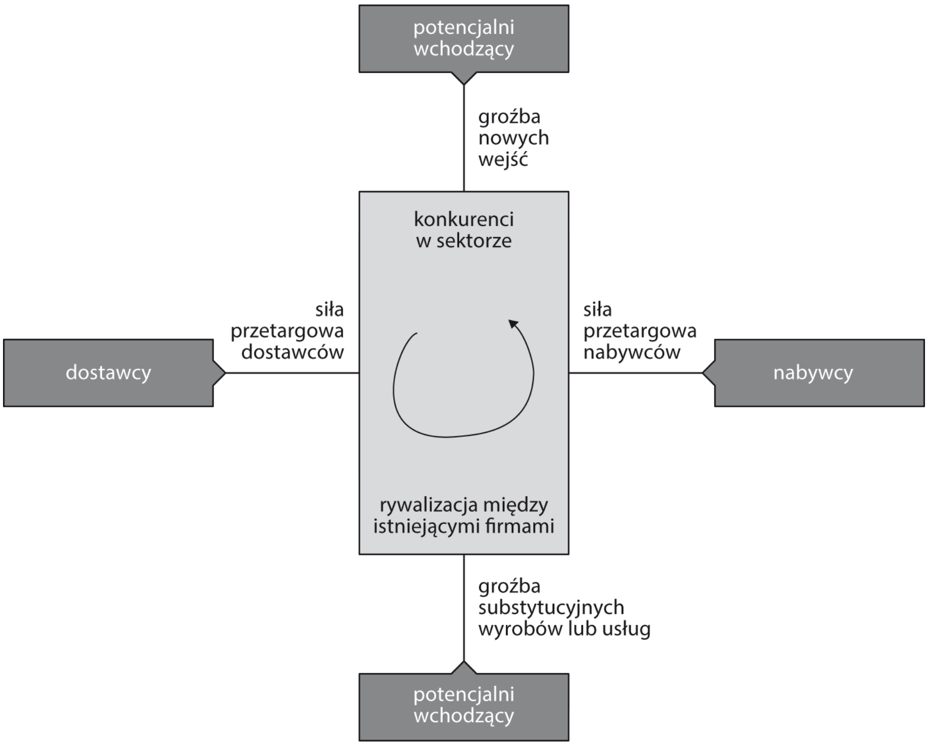
Analiza 5 sił Portera

M. E. Porter, jako jeden z najwybitniejszych specjalistów od strategii konkurencji, zaproponował logiczną i prostą analizę sektora działalności na podstawie pięciu czynników tj. sił, które wyznaczają natężenie konkurenci w danym sektorze oraz jego rentowność, jak również finansową atrakcyjność dla inwestorów. Do czynników tych należą (M. Porter, 1999):

- siła przetargowa dostawców;
- siła przetargowa nabywców;
- natężenie konkurencji między przedsiębiorstwami w sektorze,;
- groźba nowych wejść;
- groźba pojawienia się substytutów.

Możliwości rozwojowe i atrakcyjność sektora są tym mniejsze, im silniejsza jest presja na sektor ze strony dostawców i odbiorców, im większe są możliwości pojawienia się na rynku substytutów lub wejścia do sektora nowych producentów, a także im ostrzejsza jest walka między konkurentami wewnątrz sektora.

Zależności zachodzące pomiędzy wymienionymi czynnikami tj. siłami konkurencyjnymi przedstawia Rysunek 6.



Rysunek 6. Model „pięciu sił" M. E. Portera

Źródło: M. Porter, Strategia konkurencji. Metody analizy sektorów i konkurentów, PWE, Warszawa 1999, s. 22.

Przed przystąpieniem do analizy każdej z pięciu sił konkurencji należy określić najważniejsze parametry atrakcyjności ekonomicznej sektora. Atrakcyjność ekonomiczną sektora określają przede wszystkim trzy parametry (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010):

- obecna wielkość sektora;
- przyszła wielkość sektora i spodziewana dynamika sprzedaży w poszczególnych latach;
- obecna i przewidywana rentowność sektora.

Uproszczona metoda oparta na modelu „pięciu sił", polega na udzieleniu odpowiedzi na następujące pytania (G. Gierszewska, M. Romanowska, 2001):

- Ilu konkurentów jest wewnątrz sektora i jakie są ich udziały w rynku?
- Jakie grupy strategiczne są w sektorze i jakie skupiają przedsiębiorstwa?
- Jakie kategorie dostawców są w sektorze i jak ą mają siłę oddziaływania na badany sektor? Gdzie znajduje się strategiczny dostawca?

- Jakie są segmenty odbiorców i jaki mają udział w powstawaniu zysku? Którzy odbiorcy mają podstawowe znaczenie dla przedsiębiorstwa? Jakie należy przewidywać szanse i zagrożenia związane z popytową stroną sektora?
- Jak duża jest groźba pojawienia się nowych producentów w sektorze?
- Jak duża jest groźba pojawienia się substytutów w sektorze i jakie to będą substytuty?

Na podstawie analiz wykonanej prezentowaną metodą można sformułować ogólną ocenę atrakcyjności danego sektora. Wyniki tej analizy mogą być także bardzo pomocne przy przeprowadzaniu analizy szans i zagrożeń oraz mocnych i słabych stron firmy metodą SWOT.

2.3. Możliwości i zagrożenia

Szanse i zagrożenia są niezależne od firmy. Te czynniki wynikają z otoczenia,w którym firma zamierza działać. Żadna firma nie jest w stanie przewidzieć dokładnie wszystkich możliwości i zagrożeń, które pochodzą z rynku, jednakże przedsiębiorstwo powinno umieć reagować na zmianę tego otoczenia. Przykładowe możliwości i zagrożenia przedstawia tabela 10.

Tabela 10. Potencjalne możliwości i zagrożenia

Możliwości	Zagrożenia
1. Rosnący popyt na produkty.	1. Malejący popyt na produkty.
2. Ograniczona liczba firm konkurencyjnych.	2. Duża liczba firm konkurencyjnych.
3. Bariery wejścia na rynek dla konkurencji.	3. Brak barier wejścia na rynek dla konkurentów.
4. Pojawienie się nowych grup klientów.	4. Rosnące koszty surowców.
5. Wejście na nowe rynki.	5. Brak ulg inwestycyjnych.
6. Dostępność tanich surowców.	6. Segment rynku bardzo atrakcyjny dla konkurentów.
7. Atrakcyjny system ulg inwestycyjnych.	7. Wąski rynek działania.
8. Niskie wynagrodzenia pracowników.	8. Rosnące koszty wynagrodzeń.
9. Wąski segment rynku, nieatrakcyjny dla konkurentów.	9. Mało lojalności nabywczej.
10. Możliwość poszerzenia asortymentu.	10. Kryzys gospodarczy w kraju.
11. Możliwość podjęcia produkcji wyrobów komplementarnych.	11. Wzrost sprzedaży substytutów.
12. Wysoki poziom lojalności nabywców.	12. Niekorzystne rozwiązania systemowe.
13. Ożywienie gospodarcze w kraju.	13. Podatność firmy na recesję i wahania koniunktury.
14. Szybki wzrost rynku.	14. Zmiana potrzeb i gustów nabywców.
15. Ograniczona rywalizacja w sektorze.	15. Niekorzystne zmiany demograficzne.

Źródło: Opracowanie własne.

W rzeczywistości otoczenie tworzy przedsiębiorstwom niejednakowe warunki, zależnie od regionu, branży, sektora, wielkości tych przedsiębiorstw, ich formy własnościi wielu innych czynników.

Przykład 1. (G. Gierszewska, M. Romanowska, 2000)

Dwa zakłady mleczarskie – w Suwałkach i Radomiu, o podobnej wielkości i zbliżonym profilu produkcji, inaczej będą odczytywały makrootoczenie. Bliskość granicy państwa daje zakładom mleczarskim w Suwałkach możliwości eksportu wyrobów na rynek litewski i białoruski, dlatego też polityka zagraniczna rządu w stosunku do krajów wschodnich może stanowić dla nich istotną szansę lub zagrożenie. Wysokie bezrobocie i niskie zarobki w województwie suwalskim powodują zaś niższe koszty robocizny i dają możliwość selekcji pracowników. Sytuację tych dwóch zakładów różnicuje również stan środowiska przyrodniczego i związana z tym jakość podstawowego surowca – mleka, a także stosunek władz lokalnych do przedsiębiorców, istnienie lokalnych funduszy, działalność organizacji regionalnych itp.

Szczególnie duży wpływ na tworzenie szans i zagrożeń w makroskali ma przynależność do branży. Polityka rządu, może różnicować warunki działalności przedsiębiorstw. Branże priorytetowe dla gospodarki mogą liczyć na preferencyjne kredyty, zamówienia rządowe, cła ochronne i inne udogodnienia systemowe oraz finansowe.

Otoczenie ekonomiczne przedsiębiorstwa jest wyznaczone przez kondycję gospodarki. Najważniejsze jej wskaźniki to:

- Stopa wzrostu ekonomicznego, która ma bezpośredni wpływ na wielkość oraz charakter szans i zagrożeń dla przedsiębiorstwa. Wzrost ekonomiczny w całe gospodarce niesie ze sobą wzrost wydatków konsumentów, co stwarza szanse rozwoju przedsiębiorstwa, oraz osłabia walkę konkurencyjną w obrębie poszczególnych branż. Recesja w gospodarce przynosi skutki przeciwne: spadek popytu, wzrost wali konkurencyjnej, często bankructwa najsłabszych firm. Recesja prowadzi również do wojen cenowych w gałęziach przemysłu znajdujących się w fazie działalności.
- Wysokość wskaźnika stopy procentowej w gospodarce determinuje poziom popytu na produkty przedsiębiorstwa. W gospodarce rynkowej typowym zachowaniem konsumenta jest pożyczanie pieniędzy na zakup towarów. Przykładem może być rynek handlu nieruchomościami, gdzie wysokość zastawu hipotecznego wprost oddziaływują na popyt. Podobnie jest to widoczne na rynku samochodowym czy wyposażenia inwestycyjnego. Stopa procentowa determinuje poziom inwestycji w przedsiębiorstwie. Zagrożeniem dla rozwojowych, ekspansywnych strategii organizacyjnych jest wzrost stopy procentowej, szansą natomiast – jej obniżenie.
- Wahania kursów walut w stosunku do dolara czy euro kształtują konkurencyjność na rynkach światowych. Jeśli wartość dolara jest porównywalnie niska w stosunku do innych walut światowych, to produkt wytworzony w Stanach Zjednoczonych jest relatywnie tani, w stosunku do wyprodukowanych w innych krajach i konkurencyjny na rynka światowych, nawet jeśli został wyprodukowany po relatywnie wyższych kosztach.
- Stopa inflacji. Inflacja może destabilizować gospodarkę, ograniczać tempo wzrostu ekonomicznego, powodując wzrost stopy procentowej i wahania kursów wymiany walut. Jeśli inflacja jest wysoka to inwestowanie staje się ryzykowne.

Analiza konkurencji pozwala ocenić sytuację przedsiębiorstwa, warunki jego funkcjonowania i rozwoju w określonym otoczeniu konkurencyjnym, ograniczonym jednak przez M. Portera do pojedynczego sektora, czyli węziej rozumianego rynku, na którym działa grupa przedsiębiorstw oferujących wyroby lub usługi o podobnym przeznaczeniu (substytuty). Atrakcyjność sektora dla przedsiębiorstw, które w nim działają lub zamierzają działać, jest zależna od natężenia pięciu sił napędowych konkurencji wewnątrz sektora. Są to(J. Targalski, A. Francik 2009):

- **Groźba wejścia do sektora nowych konkurentów**. Atrakcyjność sektora dostrzegana jest nie tylko przez przedsiębiorców, którzy już w nim działają, ale także przez innych, potencjalnych przedsiębiorców. Dla tych wewnątrz sektora stanowią oni zagrożenie, bo mogą zdecydować się na wejście, wnosząc nieszablonowe pomysły i nowe zasoby, na tyle znaczące, że będą wystarczające do przełamania istniejących barier wejścia i uzyskania korzystnej pozycji konkurencyjnej.
  Aby chronić się przed zagrożeniem, przedsiębiorcy zajmujący już pewną pozycję w sektorze tworzą lub powiększają bariery wejścia dla potencjalnych przedsiębiorców, Powiększają rozmiary działalności, aby wykorzystać ekonomię skali. Różnicują produkty, chcąc podnieść wymagania kapitałowe, koszty startu i rozruchu oraz wymogi czasowe dla nowo wchodzących. Uzależniają od siebie nabywców przez szkolenia, dodatkowe wyposażenie, pomoc techniczną itp. Starają się wzmocnić bariery od nich niezależne, do których należy np. polityka państwa (wymóg posiadania licencji, spełnienia norm bezpieczeństwa czy wymogów ochrony środowiska). Konkurenci w sektorze starają się „wyprzedzać” innych, podejmując różnorodne działania w zakresie oferowanych produktów, np. nowe wzory, oferowanych cen, kampanii reklamowych lub promocyjnych.
- Kluczowe znaczenie dla przedsiębiorcy ma **zagrożenie wejściem do sektora nowych firm**, zachęconych jego atrakcyjnością. Nowo wchodzące firmy wnoszą do sektora nowy potencjał, nowe pomysły biznesowe i nowe strategie konkurowania, potrzebne do uzyskania udziału w rynku. Stanowią tym samym zagrożenie dla firm już obecnych sektorze, zmuszają je do reakcji obronnej i kreowania nowych strategii konkurencji.
- **Groźba pojawienia się wyrobów lub usług substytucyjnych**, tzn. spełniających takie same funkcje, jak wyroby danego sektora (np. okna drewniane, plastikowe, aluminiowe). Występowanie tej groźby oznacza, że firmy w sektorze musza konkurować nie tylko ze sobą, ale też z firmami konkurencyjnych sektorów. Wprowadzane substytuty do danego sektora powodują spadek cen, a w konsekwencji i zysków, co czyni sektor mniej atrakcyjnym.

- Kolejny czynnik to **siła przetargowa nabywców**, która może zmuszać przedsiębiorców w sektorze do obniżek cen, zwiększenia zakresu usług czy podniesienia jakości wyrobów. Szczególnie nabywcy, którzy zakupują duże ilości produktów są w stanie wywierać skuteczny nacisk na sprzedawców. Także ci, którzy bardziej selektywnie lokują swoje zamówienia – ze względu na ich wysokie koszty – są obiektem szczególnych zabiegów ze strony sprzedawców. Siła nabywców wzrasta też, gdy wyroby sektora są znormalizowane lub mało zróżnicowane, co ułatwia im zakup u dowolnego sprzedawcy. Podobnie nabywcy dysponującym pełną informacją o popycie, występujących na rynku cenach czy ponoszonych przez dostawców **kosztach** zyskują większą siłę przetargową. Dla firm działających w sektorze, gdzie występują takie zjawiska, bardzo ważnym problemem jest więc ostrożny dobór nabywców, tak aby w miarę możliwości zniwelować ich siłę przetargową.
- **Siła przetargowa dostawców**. Stwarza ona dla sektora zagrożenia przeciwne do tych, jakie wywołuje siła przetargowa nabywców, a więc możliwość podwyżek cen ograniczenia zakresu usług lub obniżenia jakości wyrobów. Dostawcy wykorzystują swą siłę przetargową szczególnie wtedy, gdy są bardziej są skoncentrowani niż nabywcy, a łącząc się w grupy, są nawet w stanie zagrozić niektórym nabywcom przejęciem prowadzonej przez nich działalności. Siła przetargowa dostawców występuje wyraźnie w sektorach, w których nie muszą oni konkurować z wyrobami substytucyjnymi oraz wtedy, gdy ewentualna zmiana dostawcy może się okazać zbyt kosztowna dla nabywcy (J. Targalski, A. Francik, 2009).

Pozycję konkurencyjną przedsiębiorstwo może sobie zapewnić tylko w procesie ciągłej budowy przewagi konkurencyjnej, która polega na zdolności do nieustannego dodawania przez przedsiębiorstwo wartości, uznawanych zarówno przez klientów, jak i przez właścicieli przedsiębiorstwa.

Przewaga rynkowa ma różne źródła, wpływają na nią też różne czynniki. Znawcy small businessu uważają, że w takich firmach można budować przewagę konkurencyjną, zwracając uwagę na cztery główne źródła. Należą do nich:

- skupienie na kliencie;
- dbałość o jakość;
- koncentracja na innowacjach;
- staranna obsługa.

Służy temu zarządzanie relacjami z klientami.

Zarządzanie relacjami z klientami

Zarządzanie relacjami z klientami CRM (ang. *CustomerRelationship Management*) – to zestaw procedur i narzędzi istotnych w zarządzaniu kontaktami z klientami.

CRM, jako przyjęta strategia działania koncentruje się na wspieraniu czynności marketingowych, procesu sprzedaży oraz wszelkich działań związanych z obsługą klienta poprzez skierowanie uwagi wyłącznie na potrzeby konsumenta, ze szczególnym uwzględnieniem wykształconych kulturowo wzorców. Dotyczy wszystkich tych aspektów zarządzania, które mają na celu zaspokojenie potrzeb klientów. W tym wypadku największy nacisk położony jest na wykorzystanie i udoskonalenie cyklu życia konsumenta. Głównym zadaniem CRM jest więc bezpośrednio bieżące kreowanie lojalności klientów poprzez efektywne zaspokajanie ich indywidualnych potrzeb, zaś pośrednio pozyskiwanie coraz to nowych konsumentów

Zalety

Koncepcja CRM istniej w świecie biznesu przez długi czas, ale w ostatnich latach wykorzystanie CRM wzrosło ze względu na lepszy dostęp do technologii i integracji danych. Firmy powinny przeanalizować rozwiązania CRM w celu utrzymania istniejących klientówi służyć ich unikalnym potrzebom. Jeśli firmy koncentrują się na dostarczaniu wysokiej, jakości usług, które są dostosowane do tych klientów, a następnie, będą budować lojalność, co z kolei będzie skutkować zwiększeniem przychodów firm.

W rezultacie, rozwiązania CRM pozwalają firmom na zwiększenie przychodów poprzez przechwytywanie nowych klientów, utrzymanie istniejących, a to wszystko dzięki lepszemu zarządzaniu ich działalnością.

Zastosowanie

- W systemie informatycznym odnotowano kupno usługi lub towaru;
- Niezapłacenie rachunku w odpowiednim terminie powoduje podjęcie akcji wysłania ponaglenia;
- Jeśli system nie odnotuje wpływu pieniędzy w odpowiednim czasie spróbuje podjąć próbę przypomnienia klientowi o tym fakcie np. automatycznie drukując korespondencję do wysyłki, wysyłając SMS itp.;
- Jeśli okaże się, że np. ponaglenie nie przyniosło skutku, system „klasy CRM" może dodać takiego klienta do kolejki rozmów telefonicznych pracownika firmy lub powiadomić prawnika firmy z prośbą wszczęcia postępowania sądowego;
- Automatyzacja wysyłania kartek urodzinowych dla klientów firmy, ofert handlowych (często sprofilowanych dzięki danym wcześniej zebranych w CRM).

Po dokonaniu klasyfikacji klientów i produktów na odpowiednie grupy, przedsiębiorstwo w stosunku do nich podejmuje odpowiednią decyzje. I tak, wskazuje się na następujące, możliwe do realizacji (najkorzystniejsze), alternatywne rozstrzygnięcia:

- Przekonanie nieopłacalnych klientów do rezygnacji z dalszej współpracy lub prze-konanie ich do zakupu produktów wysoko opłacalnych dla przedsiębiorstwa.

Związek z klientem

Wszystkie relacje związane z danym klientem określamy mianem **związku**. Składa się z **epizodów**, które dzieli się na:

- Transakcje finansowo-usługowe;
- Kontakty, rozmowy.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Wyjaśnij mechanizmy rządzące rynkiem, w kontekście wyboru przedsięwzięcia czy znalezienia dla niego odpowiedniej lokalizacji.
2. Zbierz informacje o rynku w kontekście wybranego przedsięwzięcia i zaprezentuj je w kontekście możliwości i zagrożeń.
3. Omów i uzasadnij rolę Internetu w określaniu lokalizacji przedsiębiorstwa.
4. Jakie czynniki należałoby wziąć pod uwagę przy podejmowaniu decyzji , gdzie prowadzić działalność?
5. Jakimi kryteriami należy się kierować przy wyborze rynku docelowego?
6. Jakie czynniki kształtują postępowanie konsumenta na rynku?
7. Jakie czynniki należy wziąć pod uwagę przy określaniu otoczenia dalszego przedsiębiorstwa i jakie podmioty przy określaniu otoczenia bliższego ?
8. Od czego zależy atrakcyjność ekonomiczna sektora, w którym chciałbyś prowadzić działalność?
9. Jakie znaczenie dla przedsiębiorcy ma CRM?

Bibliografia:

Altkorn, J., Kramera, T., *Leksykon marketingu*. Warszawa 1998.

Barrow C., Barrow P., Brown R., *Biznes plan w małej firmie*, Gliwice 2001.

Gierszewska G., Romanowska M., *Analiza strategiczna przedsiębiorstwa*, Warszawa 2001.

Nowacka A., Nowacki R., *Podstawy marketingu*, Warszawa 2004.

Porter M. *Strategia konkurencji. Metody analizy sektorów i konkurentów*, Warszawa 1999.

Rocky W. Griffin, *Podstawy zarządzania organizacjami*, Warszawa 2007.

Targalski J., Francik A. (red. nauk.), *Przedsiębiorczość i zarządzanie firmą. Teoria i praktyka*, Warszawa 2009.

Tokarski A., Tokarski M., Wójcik J., *Biznesplan po polsku*, Warszawa 2010.

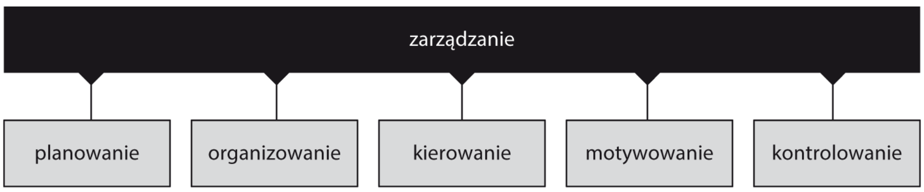
Zaleśkiewicz, T., *Przedsiębiorczość i podejmowanie ryzyka,* [w:] T. Tyszka (red.), *Psychologia ekonomiczna*. Gdańsk 2004.

3. Planowanie działalności

3.1. Istota planowania

> **Za każdym razem, kiedy widzisz biznes, który odnosi sukces, oznacza to, że ktoś kiedyś podjął odważną decyzję”**
>
> ***Peter Drucker***

Planowanie to wybór celów, określenie sposobów ich osiągania, precyzowanie stosownych zadań i terminów ich wykonania oraz uruchomienie niezbędnych do tego zasobów – ludzkich, rzeczowych i finansowych. W efekcie powstaje plan działalności przedsiębiorstwa. Plan powinien mieć formę pisemną, gdyż wtedy możemy dokonać porównania przyjętych założeń z faktycznymi osiągami oraz mamy możliwość wprowadzenia korekt i poprawek.



Schemat 5. Funkcje zarządzania

Źródło: Opracowanie własne.

Poprzez planowanie przedsiębiorstwo zmniejsza ryzyko związane z prowadzoną działalnością. Jasno określone zadania i cele ułatwiają realizację tych zadań oraz pomagają w podejmowaniu decyzji.

Według kryterium charakteru możemy wyróżnić: planowanie strategiczne, taktyczne oraz operatywne (P. Banaszyk, R. Fimińska-Banaszyk, A. Stańda, 1997) .

Planowanie strategiczne – obejmuje okres, co najmniej kilkuletni. Jest planem przyszłości, dzięki któremu o wiele łatwiej wytyczyć ścieżki postępowania i realizacji celu. Określa priorytety działania firmy i jest planem kompleksowym. Planowanie strategiczne:

1. udziela odpowiedzi na takie pytania, jak: „czym się zajmujemy i czym się powinniśmy zajmować”, „kim są, a kim powinni być nasi klienci?”.

2. tworzy ramy dla planowania taktycznego i operacyjnego oraz podstawy codziennych decyzji. Wobec konieczności podjęcia takiej decyzji, kierownik może zapytać: „który z możliwych kierunków działania będzie najlepiej odpowiadać naszej strategii?”.
3. wiąże się z dłuższym okresem niż inne rodzaje planowania.
4. ułatwia koncentrację energii i zasobów organizacji na najważniejszych działaniach.
5. jest działalnością najwyższego szczebla w tym znaczeniu, że musi w nim czynnie uczestniczyć kierownictwo naczelne, gdyż tylko ono ma dostateczne zasoby wiedzy i doświadczenia, aby uwzględnić wszystkie aspekty funkcjonowania danej organizacji. Jego zaangażowanie jest ponadto konieczne dla wywołania i podtrzymania zaangażowania na niższych szczeblach.

Planowanie taktyczne - obejmuje szeroki zakres działań podmiotu gospodarczego i z reguły nie jest adresowane do szczegółowego wykonawcy, gdyż określa zadanie w formie ogólnej dla całej jednostki gospodarczej. Planowanie to dotyczy zwykle okresu około jednego roku. W planie taktycznym można wyodrębnić część techniczną, która określa czynniki rzeczowe biorące udział w działalności gospodarczej jednostki organizacyjnej oraz część finansową, określającą nakłady pieniężne i wynik finansowy działalności. Planowanie taktyczne, mające charakter problemowy, może częściowo wchodzić do planu funkcjonalnego jednostki prowadzącej działalność gospodarczą (np. w skład biznesplanu) lub może stanowić podstawę jego sporządzenia lub uzasadnienia merytorycznego.

Planowanie operacyjne - ma charakter planowania wykonawczego w porównaniu z planowaniem strategicznym. Polega na określeniu celów pośrednich w stosunku do celów określonych w planowaniu strategicznym. Planowanie operacyjne uwzględnia:

1. pojedyncze zdarzenia lub działania,
2. małą liczbę zmiennych,
3. osiągnięcie założonych celów i wykonania zadań,
4. bilansujący i odtwórczy charakter czynności planistycznych ,
5. małą agregację informacji,
6. krótki horyzont planowania.

Plan operacyjny jest zbiorem decyzji określających konkretne zadania i działania konieczne do poprawnego ich wykonania w przewidzianym ściśle czasie oraz warunki, które muszą być dotrzymane przez realizację poszczególnych zadań i czynności (technologiczne, ekonomiczne, organizacyjne), a także warunki zewnętrzne (np. ochrony środowiska).

Przedmiotem planowania operacyjnego są wszystkie decyzje, które w różnych obszarach działania przedsiębiorstwa muszą być podejmowane na bieżąco, aby terminowo i skutecznie realizować strategię oraz zapewnić przetrwanie i rozwój firmy. W planowaniu operacyjnym wyróżniamy; planowanie marketingowe, planowanie sprzedaży, planowanie działalności podstawowej, planowanie zaopatrzenia, planowanie zatrudnienia, planowanie kosztów, planowanie finansowe itp. Planowanie strategiczne szkicuje perspektywy rozwoju, a planowanie operacyjne określa konkretne sposoby realizacji tych zamierzeń.

Opracowanie dobrego planu wymaga znajomości i stosowania następujących zasad planowania:

1. **zasady realności planu,** czyli określenie realnych możliwości wykonywania zadań. Nie należy tworzyć planu opartego na marzeniach, wykraczającego poza możliwości wykonawcze przedsiębiorstwa.
2. **zasady wariantowych rozwiązań,** polega na dochodzeniu do celów za pomocą różnych, wariantowych rozwiązań. Musimy mieć nie tylko plan A, ale również alternatywę czyli plan B lub nawet C.
3. **zasada koncentracji,** to umiejętne połączenie celów i środków.
4. **zasada gospodarności** oznacza uzyskiwanie najlepszych efektów przy jak najmniejszych kosztach i środkach,
5. **zasada elastyczności planowania** to przewidywanie zmiany warunków rynku i dostosowywanie się do tych zmian,
6. **zasada podstawowego ogniwa** polega na określeniu najważniejszych zadań decydujących o wynikach.

Plan opracowany zgodnie z zasadami planowania uwzględnia możliwości potencjalnego przedsiębiorcy, czas na rozwój firmy, spodziewane, zyski, straty, inwestycje. W małej firmie osoba sporządzającą plan jest właściciel lub menedżer, niejednokrotnie to ta sama osoba. Błędem jest, jeśli mała firma lub osoba, która zamierzają założyć firmę, wyznaczając datę rozpoczęcia działalności nie ma wyraźnie wytyczonych etapów postępowania. Decydując się na założenie firmy najpierw należy zaplanować działania najlepiej na parę lat do przodu.

3.2. Biznesplan

Podstawą każdego działania jest idea- pomysł, który powinien być dobrze przemyślany i skrupulatnie zaplanowany. Podstawą odniesienia sukcesu jest dokładne przeanalizowanie produktu lub usługi, którą chcemy wprowadzić na rynek oraz ocena naszych możliwości. Plan przedsięwzięcia gospodarczego nazywany jest biznesplanem.

Biznesplan[1]- narzędzie planistyczne wykorzystywane przy ocenie opłacalności przedsięwzięć gospodarczych. Sporządzany na potrzeby wewnętrzne firmy, jest także narzędziem komunikacji zewnętrznej – m.in. w celu pozyskania źródeł finansowania inwestycji. Kompleksowy spis celów oraz zadań, jakie stawia się przed przedsiębiorstwem. Jego elementami są m.in. analiza finansowa, analiza rynku, analiza SWOT.
Biznesplan ustalany jest indywidualnie dla każdej działalności, jego zawartość jest elastyczna. Znaczenie przy pisaniu biznesplanu ma również adresat, czyli instytucja dla której go przygotowujemy. Biznesplan powinien być napisany w sposób czytelny, prosty i przemyślany. Informacje zawarte w nim powinny być rzetelne i obiektywne. Istotą biznesplanu jest określenie celów oraz ustalenie sposobów, metod i środków ich osiągnięcia (Z. Pawlak, 2002). W firmie pełni on trzy podstawowe **funkcje**:

- służy do rozwijania pomysłów związanych z prowadzeniem przedsiębiorstwa; dzięki temu popełnia się błędy na papierze, a nie w praktyce,
- służy do oceny działalności przedsiębiorstwa po okresie, na jaki był stworzony; uważna obserwacja i analiza wskażą, na ile założenia biznes planu były realne, jakie są osiągnięcia i w których punktach firma odeszła od jego założeń,
- służy, jako podstawa wniosku kredytowego oraz ważny dokument przy rozmowach biznesowych (np. przy poszukiwaniu inwestora).

Tabela 11. Struktura biznesplanu

Elementy biznesplanu	Charakterystyka
Strona tytułowa	Adresat (np. bank), określenie przedsięwzięcia, lokalizacja przedsięwzięcia, koszt przedsięwzięcia, planowana wysokość kredytu, inne źródła finansowania, wnioskodawca, adres wnioskodawcy, imię i nazwisko szefa, odpowiedzialna osoba za przedsięwzięcie i jej adres, autor biznesplanu, pieczęcie i podpisy.
Streszczenie, czyli krótki opis przedsięwzięcia	Nazywane podsumowaniem menedżerskim i ma za zadanie wzbudzić zainteresowanie osób podejmujących decyzje oraz zachęcać do dalszej lektury. Powinno zawierać krótki przegląd najważniejszych elementów biznesplanu.
Charakterystyka przedsiębiorstwa	Obejmuje krótką historię biznesu lub przedsięwzięcia, jej cele, misję, status prawny, wielkość, sytuację na rynku, konkurencyjność ofert, wartość majątku, źródła jego pochodzenia, kondycję finansową i inne istotne informacje, np. dotyczące jakości produktu oraz działań chroniących środowisko.
Charakterystyka produktu lub usługi	Opis produktu pokazujący techniczne cechy produktu wytwarzanego przez naszą firmę, jego unikalność oraz potrzebę wprowadzenia.
Zasoby ludzkie/Personel	Opisuje umiejętności pracowników, wykształcenie, obowiązki osób zarządzających działalnością, stosunki własnościowe oraz sposób podziału własności, role osób w zespole, opis systemu motywacji itp. Może również zawierać wykaz i charakterystykę doradców biznesu.
Plan marketingowy	Obejmuje analizę rynku, identyfikację klientów, lokalizację, dystrybucję, promocję oraz politykę cenową.
Plan organizacyjny	Pracownicy – opis planowego zatrudnienia, zasady wynagradzania pracowników, tryb i koszty szkolenia. Dostawcy – wytypowanie firm współpracujących i określenie sposobów nawiązania z nimi współpracy. Księgowość – określenie decyzji o rodzaju prowadzonej księgowości.
Harmonogram realizacji	Obejmuje opis czynności niezbędnych do realizacji przedsięwzięcia, kolejność i czas trwania poszczególnych czynności, osoby odpowiedzialne za wdrożenie i sfinalizowanie poszczególnych działań.
Analiza ryzyka	Szanse i zagrożenia, działania podejmowane w celu eliminacji zagrożeń oraz wykorzystania szans.
Analiza ekonomiczno-finansowa	To fundament biznesplanu i punkt jego wyjścia, obejmuje analizę finansową przedsięwzięcia tj. kapitał własny i obcy, przychody, koszty, zysk, bilans, rachunek zysków i strat, analizę wskaźnikową, rachunek przepływów środków pieniężnych (cashflow).

Załączniki: Szczegółowe tabelaryczne zestawienia i wyliczenia, schematy, wykresy.
Źródło: Opracowanie na podstawie A. Rozłucka, Mam biznes, www:mambiznes.pl/artykuly/czytaj/id/50.

1. www:pl.wikipedia.org/wiki/Biznesplan, 06.02.2013.

Mimo, że opracowanie biznesplanu jest czasochłonne i pracochłonne nie ma wątpliwości, że warto go opracować rozpoczynając przygodę z biznesem. Piszą biznesplan zwiększamy możliwość osiągnięcia sukcesu, a nasze pomysły nabierają realnego kształtu. Błędy popełnione w biznesplanie na papierze możemy zawsze skorygować, natomiast nie zawsze da się naprawić błędy popełnione w rzeczywistości.

3.3. Analiza finansowa

Celem przedsiębiorstwa jest osiąganie przez niego zysków poprzez efektywne zarządzanie. Aby realizować ten cel, niezbędne są informacje pozyskiwane z działu księgowości. Firmy sporządzają dokumentację, w której przedstawiona jest ich sytuacja majątkowa i finansowa. Do najważniejszych dokumentów firmy należą bilans oraz rachunek zysków i strat (W. Gos, 2011).

Bilans

Bilans to dwustronne zestawienie wartości środków gospodarczych, czyli aktywów oraz źródeł ich pochodzenia, czyli pasywów sporządzony w określonej formie i na określony dzień (B. Gierusz, 2011).

<u>Prawidłowo sporządzony bilans zawiera:</u>

- Słowo bilans.
- Oznaczenie momentu bilansowego, czyli daty, na którą bilans jest sporządzony.
- Dokładne oznaczenie podmiotu, dla którego jest sporządzany.
- Wyszczególnienie nazw i wartości poszczególnych grup aktywów i pasywów.
- Podpis osoby odpowiedzialnej za prowadzenie dokumentacji finansowej przedsiębiorstwa oraz podpis kierownika jednostki.
- Datę sporządzania bilansu.

Tabela 12. Podstawowe składniki bilansu

AKTYWA	PASYWA
Aktywa trwałe	**Kapitał własny**
I. Rzeczowe aktywa trwałe Środki trwałe- maszyny, urządzenia, grunty, środki transportu.	Kapitał podstawowy Równowartość środków wniesionych bezterminowo do jednostki przez jej właścicieli, pochodzących ze źródeł zewnętrznych. Wniesienie wkładów kapitałowych przez właścicieli jest warunkiem powstania jednostki i uruchomienia przez nią działalności.
II. Wartości niematerialne prawne Niematerialne składniki majątku np. licencje, znaki towarowe, prawa autorskie.	Kapitał zapasowy Jeden z kapitałów własnych jednostki, przeznaczony przede wszystkim na pokrycie strat. Zasady jego tworzenia określone są, w zależności od formy prawnej jednostki, w ustawie, umowie spółki lub jej statucie. Głównym jego źródłem są odpisy z wygospodarowanego zysku.
III. Należności długoterminowe Środki pieniężne, różnego rodzaju pożyczki i kredyty o terminie spłaty przekraczającym rok.	Zysk/strata z lat ubiegłych Wynik finansowy, czyli wyrażony w pieniądzach rezultat działalności gospodarczej, który nie został rozliczony w poprzednich latach.
IV. Inwestycje długoterminowe Różnego rodzaju aktywa finansowe, nieruchomości i wartości niematerialne i prawne, które nie są użytkowane przez jednostkę, lecz zostały nabyte w celu osiągnięcia korzyści ekonomicznych wynikających ze wzrostu ich wartości np. akcje, obligacje, nieruchomości.	Zysk/strata netto Wynik finansowy z danego roku obrotowego.
Aktywa obrotowe	**Kapitał obcy**
Zapasy Zapasy obejmują materiały, surowce, produkcję w toku, produkty gotowe, towary oraz zaliczki na poczet przyszłych dostaw, wszystkich wymienionych rodzajów zapasów.	Rezerwy na zobowiązania tworzy się, aby uwzględnić w sprawozdaniu finansowym koszty, które dotyczą danego roku obrachunkowego, ale jeszcze nie powstały, można je jednak przewidzieć z dużym prawdopodobieństwem oraz oszacować ich wielkość. Rezerwy tworzy się np. z tytułu oczekiwanych strat wynikających ze zwrotów gwarancyjnych towarów i produktów, strat wynikających z udzielonych poręczeń i operacji kredytowych lub skutków toczącego się postępowania sądowego.
Należności krótkoterminowe Do należności krótkoterminowych zalicza się wszystkie należności z tytułu dostaw i usług oraz inne należności wymagalne w okresie krótszym niż 12 miesięcy od dnia bilansowego.	Zobowiązania długoterminowe Zobowiązania długoterminowe obejmują zobowiązania o terminie zapadalności powyżej 12 miesięcy. Zalicza się tu przede wszystkim długoterminowe kredyty i pożyczki, obligacje i inne zobowiązania z tytułu emisji długoterminowych dłużnych papierów wartościowych.
Inwestycje krótkoterminowe W bilansie wykazuje się tu między innymi środki pieniężne w kasie oraz na rachunkach bankowych jak również inne odpowiedniki pieniężne takie jak weksle i czeki. W pozycji tej ujęte są również inwestycje firmy w krótkoterminowe papiery wartościowe jak również akcje i papiery dłużne o okresie zapadalności powyżej roku, jeśli firma zakupiła je z zamiarem dalszej odsprzedaży w krótkim czasie (poniżej 12 miesięcy).	Zobowiązania krótkoterminowe Zobowiązania o terminie spłaty poniżej jednego roku zaliczane są do zobowiązań krótkoterminowych. Jest to obszerna grupa obejmująca zobowiązania z tytułu dostaw i usług, z tytułu wynagrodzeń, podatków, ceł, ubezpieczeń, kredytów i pożyczek, z tytułu emisji krótkoterminowych papierów wartościowych, zobowiązań wekslowych, otrzymanych zaliczek na dostawy oraz innych zobowiązań

Źródło: Opracowanie własne.

Aktywa w bilansie

Aktywa to zasoby majątkowe o wiarygodnie określonej wartości, powstałe w wyniku przeszłych zdarzeń i mające spowodować w przyszłości wpływ do jednostki korzyści ekonomicznych. Ich podstawowy podział to podział na **aktywa trwałe** i **aktywa obrotowe**. Głównym kryterium tego jest czas, przez jaki firma planuje wykorzystywać dane składniki. Ogólnie przyjętą graniczną długością okresu, od którego zależy klasyfikacja aktywów do jednej z grup jest 12 miesięcy (A. Rutkowski, 2003).

Pasywa w bilansie

Pasywa to inaczej źródła finansowania majątku. Ich podstawowy podział to podział na własne źródła finansowania - kapitał własny oraz obce źródła finansowania - zobowiązania (kapitał obcy). Zobowiązania dzielą się tak jak aktywa na długo i krótkoterminowe zależnie od tego, czy zostaną spłacone w ciągu 12 miesięcy czy później[2].

Rachunek zysków i strat

Rachunek zysków i strat to część sprawozdania finansowego, w której znajduje się zestawienie wszystkich przychodów oraz kosztów danej spółki wynikających z jej działalności.

Przychody

Przychody to uzyskany lub należny wpływ wartości, korzyści materialnych w ramach prowadzonej działalności gospodarczej[3]. W rachunkowości przychody to przypływy aktywów albo inne zwiększenie aktywów danego podmiotu lub zmniejszenie jego zobowiązań (lub kombinacja powyższych) wynikające z dostarczenia lub produkcji dóbr, świadczenia usług lub innych czynności będących podstawową działalnością danego podmiotu. (B. Gierusz, 2011).

W rachunku zysków i strat końcowy wynik finansowy oblicza się globalnie, a procedura jego ustalania jest następująca:

Ustalanie wyniku finansowego

(+) Przychody z działalności podstawowej (statutowej) *(–) Koszty działalności podstawowej*
= Wynik operacji sprzedaży (zysk lub strata)
(+) Przychody z pozostałej działalności operacyjnej *(–) Koszty pozostałej działalności operacyjnej*
= Wynik operacyjny (zysk lub strata)
(+) Przychody działalności finansowej *(–) Koszty działalności finansowej*
= Wynik działalności gospodarczej (zysk lub strata)
(+) Zyski nadzwyczajne *(–) Straty nadzwyczajne*
= Wynik brutto (zysk lub strata)
(–) Obowiązkowe obciążenia wyniku finansowego
= Wynik netto (zysk lub strata)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie ustawy o rachunkowości

Koszty

W związku z prowadzoną działalnością gospodarczą przedsiębiorstwo ponosi koszty. Koszty dzielimy na[4]:

- **koszty stałe** –koszty przedsiębiorstwa, których nie da się zmienić w krótkim okresie bez wprowadzenia radykalnych zmian w firmie, a ich wysokość nie zależy od wielkości produkcji. Przykładem kosztów stałych jest amortyzacja budynków fabrycznych lub koszt ich dzierżawy.
- **koszty zmienne** –koszty, jakie przedsiębiorca ponosi na działania związane bezpośrednio z produkcją. Poziom tych nakładów zależny jest wprost od wielkości produkcji, czyli, że w przypadku

2. www.druki.gofin.pl/wzor,788,556,bilans-uproszczony.html, 02.02.2013.
3. Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych (t.j. Dz. U. 2012 nr 0 poz. 361) – dalej cytowana jako: PDOFU
4. www:pl.wikipedia.org/wiki/Koszty_rachunkowe, 26-03-2013

zwiększenia produkcji koszty zmienne rosną, zmniejszają się natomiast wraz ze spadkiem produkcji. Koszty zmienne wynoszą zero, gdy przedsiębiorca nic nie produkuje. Do kosztów zmiennych związanych z produkcją zaliczamy nakłady na surowce, towar, roboczogodziny itp. oraz energia lub paliwo.

Koszty całkowite = koszty stałe + koszty zmienne

Koszty jednostkowe = koszty całkowite/ ilość wyprodukowanych sztuk

W rachunkowości przedsiębiorstwa przychody i koszty pokazane są w rachunku zysków i strat. Dzięki niemu można obliczyć zysk netto, który jest różnica pomiędzy przychodami a kosztami.

Wskaźniki analizy finansowej

Oceny działalności przedsiębiorstwa możemy dokonać stosując różnego rodzaju wskaźniki. Do oceny efektów finansowych działalności przedsiębiorstwa stosuje się wskaźniki rentowności inaczej zyskowności.

1. Wskaźnik rentowności sprzedaży – określa ile zysku generuje firma z 1 zł przychodu netto.

ROS = zysk netto/sprzedaż netto*100 %

Im jest on wyższy, tym wyższa jest efektywność dochodów, co oznacza, że dla osiągnięcia określonej kwoty zysku przedsiębiorstwo musi zrealizować niższą sprzedaż niż wówczas, gdy rentowność sprzedaży byłaby niższa.

2. Wskaźnik rentowności aktywów – określa ile zysku netto przyniosły aktywa o wartości 1 zł

ROA= zysk netto/ aktywa * 100 %

Im wyższy poziom rentowności aktywów, tym lepsza sytuacja finansowa przedsiębiorstwa. Wielkością ROA zainteresowani są szczególnie kredytodawcy firmy, gdyż stanowi on cenne źródło informacji o zdolności majątku do przynoszenia dochodów, będących źródłem rat i odsetek od zaciągniętych kredytów. Banki oczekują, aby wskaźnik ten osiągał poziom 2-6 proc., przy czym w małych firmach powinien on być wyższy niż w dużych. Niski poziom wskaźnika na tle przedsiębiorstw z tej samej branży oznacza zazwyczaj niewykorzystanie pełnych mocy wytwórczych firmy.

3. Wskaźnik rentowności kapitałów własnych –pokazuje, jaki zysk generuje zaangażowany kapitał własny.

ROE = zysk netto / kapitał własny * 100%

Wzrastający poziom tego wskaźnika świadczy o wyższej efektywności zaangażowanego kapitału. Jest to sygnał dla udziałowców, że przedsiębiorstwo właściwie wykorzystuje posiadane zasoby. Dlatego właśnie w przypadku nowej emisji udziałów (akcji) należy zwrócić szczególną uwagę na poziom tego wskaźnika oraz jego zmiany w czasie. Trzeba jednak pamiętać, że wielkość tego wskaźnika będzie podlegała znacznym zaburzeniom, szczególnie tuż po przeprowadzeniu nowej emisji akcji (wówczas w mianowniku będzie już zawarta wielkość „świeżego" kapitału, który nie został jeszcze wykorzystany w działalności przedsiębiorstwa).

Rentowność inaczej dochodowość, opłacalność, zyskowność - to zdolność kapitału do wytworzenia dochodu i jest mierzona różnymi wskaźnikami. Liczy się ją, jako stosunek wyniku finansowego przedsiębiorstwa do ogółu kosztów uzyskania przychodu.

Próg rentowności (BEP -ang. breakeven point) jest odzwierciedleniem sytuacji, w której przychody ze sprzedaży pokrywają koszty stałe i zmienne przedsiębiorstwa[5], informuje nas, kiedy sprzedaż zacznie przynosić zyski. Nazywany też **punktem krytycznym** ze względu na jego wagę dla rachunku ekonomicznego przedsiębiorstwa**.** Wskaźnik BEP możemy wyliczyć stosując metodę ilościową i wartościową.

BEP ilościowy – pokazuje, przy jakiej ilości wyprodukowanych towarów przychody zrównoważą się z kosztami.

BEP ilościowy = koszty stałe /cena – koszty jednostkowe zmienne

BEP wartościowy – informuje, przy jakiej cenie sprzedaży przedsiębiorstwo zacznie przynosić zyski.

BEP wartościowy = koszty stałe/ cena – koszty jednostkowe zmienne.

5. www:slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html, 26.03.2013.

3.4. Marketing

W zarządzaniu własną firmą bardzo ważna jest wiedza o tym, co robić i jak to robić by osiągnąć zysk, czyli wiedza z zakresu podstawowych zasad marketingu. Znajomość marketingu we współczesnym świecie stała się kluczem do sukcesu. Sukces działalności gospodarczej opartej na marketingowym sposobie myślenia, to dostarczenie klientowi tego, czego pragnie w odpowiedniej cenie, ilości i jakości. Dla wszelkich działań marketingowych punktem wyjścia jest zawsze człowiek-konsument. Człowiek odczuwając potrzeby dąży do ich zaspokojenia w drodze zakupu produktów czy usług. Ważne znaczenie mają także osiągane dochody oraz ceny produktów. Nie mniejszy wpływ na decyzje zakupów ma najbliższe otoczenie, rodzina, przyjaciele czy grupa, w której się znajdujemy. Nabywca ulega presji otoczenia, która lansuje określony styl życia. Zadaniem marketingu jest poznanie motywacji zakupu nabywców oraz pobudzenie a nawet tworzenie w nich potrzeby zakupu danego dobra czy usługi. Dla przedsiębiorstwa najważniejszym celem jest «stworzenie klienta», który zdecyduje o przyszłości przedsiębiorstwa i jego podstawach egzystencji (E. Michalski, 2009).

Marketing (wg Kotlera) to proces zarządczy, którego celem jest wymiana produktów na konkurencyjnym rynku, zapewniająca wzajemne korzyści sprzedającym i kupującym.

Marketing to również nowoczesny styl myślenia ekonomicznego o sposobie prowadzenia rynkowej działalności gospodarczej. Działalność gospodarcza nastawiona jest na osiągnięcie maksymalnego zysku. Można to zadanie zrealizować, jeżeli działalność ukierunkowana jest na klienta (nabywcę, odbiorcę, użytkownika, konsumenta). Temu właśnie sprzyja marketing, który obejmuje działania rozpoczynające i kończące się na kliencie, ustalając i zaspokajając jego potrzeby. Działania marketingowe zmierzają do zaspokojenia potrzeb konsumentów i tym samym osiągnięcia celów przedsiębiorstwa.

Działania marketingowe służą temu, by (J. Altkorna 2003):

- pozyskać nowych klientów,
- sprawić, by klienci więcej kupowali,
- sprawić, by klienci częściej kupowali.

Do podstawowych działań marketingu należą:

- określenie potrzeb,
- kształtowanie produktu,
- tworzenie i utrzymywanie popytu,
- ustalenie polityki rynkowej,
- finansowanie obrotu towarowego,
- działanie związane z fizycznym ruchem towaru.

Marketing zajmuje się w ogólnym rozumieniu, potrzebami konsumenckimi pod różnymi kątami. Na przestrzeni lat i rozwoju technologicznego powstało mnóstwo nowych metod marketingowych (J. Penc, 1995).

Rodzaje metod marketingowych:

- bezpośredni, zwany medialnym,
- internetowy, który korzysta z sieci internetowej,
- młodzieżowy, wychodzący naprzeciw potrzebom dzieci i młodzieży,
- mobilny, związany m.in. z telefonią komórkową, czyli bardzo nowoczesnym medium informacji,
- polityczny, który przedstawia metody zdobywania poparcia i budowania wizerunku kandydatów i partii,
- niestandardowy, który wykorzystuje różne techniki niekonwencjonalne, czasami nawet kontrowersyjne,
- szeptany, związany z buzz marketing i marketingiem plotki,
- wirusowy, który ma za zadanie rozpowszechniać się w codziennych sytuacjach,
- e-mail marketing, związany z pocztą elektroniczną,
- afiliacyjny, wykorzystujący sieci afiliacyjne i programy partnerskie,
- mix, czyli słynne formuły i koncepcje 4P, 7P i 4C.

Marketing wewnętrzny

Koncepcja marketingu wewnętrznego powstała, gdyż dostrzeżono jak ważną rolę pełni pracownik w tworzeniu więzi z klientem (Tansuhaj, Randall, McCullough, 1988; Gronroos, 1984, za: K. Przybyłowski, S.W. Hartley, R.A. Kerin, W. Rudelius, 1998).

Koncepcja ta dotyczy przedsiębiorstw, które dostarczają swoim klientom usługi. Stanowi ona, iż zanim organizacja rozpocznie marketing skierowany do klientów, powinna skoncentrować się na swoich pracownikach. Jeśli do pracowników zostaną skierowane działania podobne do działań marketingowych, wykształcą oni w sobie orientację rynkową. W koncepcji tej podkreśla się, że rozwój pracowników poprzez proces rekrutacji, szkolenia, komunikację i administrację, to najbardziej istotne aspekty na drodze do sukcesu w branży usługowej (np. Kelly, 1992, Heskett, 1987, za: K. Przybyłowski, S.W. Hartley, R.A. Kerin, W. Rudelius, 1998).

Marketing strategiczny

Marketing strategiczny jest procesem formułowania strategii marketingowej w ramach zarządzania strategicznego i stanowi część składową tego zarządzania. Na marketing strategiczny składa strategiczne planowanie rynkowe oraz projektowanie strategii marketingowych.(J.J. Lambin, 2001) Koncepcję marketingu strategicznego kształtują realia rynkowe firmy, takie jak:

- zmienność otoczenia makroekonomicznego i światowego;
- globalizacja;
- gwałtowny rozwój technologii;
- zmienność zachować konsumentów na rynku;
- wahania koniunktury.

Marketing partnerski

Marketing partnerski *(relationship marketing*) jego podstawą jest utrzymanie bezpośrednich kontaktów pomiędzy sprzedającym a nabywcą. W ramach koncepcji marketingu partnerskiego w działaniach rynkowych kontakty bezpośrednie stanowią istotny warunek odniesienia sukcesu i są rozpatrywane jako długookresowy proces budowania trwałych powiązań z nabywcami. Ważną cechą charakterystyczną marketingu partnerskiego jest odejście od wymiany koncentrującej się wyłącznie na danej transakcji na rzecz wymiany opartej na ścisłej współpracy sprzedającego z nabywcą. (K. Fonfara, *Marketing partnerski na rynku przedsiębiorstw*, 1999)

Skuteczność działania danej firmy zależy nie tylko od jej kontaktów z nabywcami. Koncepcja marketingu partnerskiego przyjmuje się, iż realizacja celów firmy wymaga również aktywności na 6 różnych rynkach, tj. rynku nabywców, rynku dostawców, rynku wewnętrznym, rynku potencjalnych pracowników firmy (rynek pracy), rynku podmiotów opiniotwórczych oraz rynku wpływowych organizacji.

Marketing mix

Marketing mix to specyficzna kompozycja marketingowa, na którą składają się poszczególne, zależne od siebie elementy, które jako zintegrowany system mogą oddziaływać na różnego rodzaju zjawiska rynkowe. Wyróżnia się kilka koncepcji marketingu mix: 4P, 4C, marketing mix dla usług, 7P.

Koncepcja 4P - zaproponowana przez McCarthy'ego[6]:

1. **Produkt** (ang. product) – ważna jest jakość produktu, marka, opakowanie, gwarancja, jego postrzeganie przez konsumentów oraz czy zaspokaja potrzeby klientów. Produkt musi spełniać określone funkcje oraz jest rozpatrywany pod różnymi aspektami, np. rynkowym, cyklu życia, technologicznym.
2. **Cena** (ang. price) – jest wydatkiem, który musi być poniesiony przez konsumentów, aby nabyć produkt, natomiast dla producenta jest wynagrodzeniem za poniesione nakłady. Charakteryzuje się ją pod kątem polityki cenowej, wskaźnika elastyczności cenowej popytu, progów rentowności, rabatów i warunków płatności.
3. **Dystrybucja** (ang. place) – zajmuje się sposobem rozmieszczenia produktów na rynku w celu ich sprzedaży. Ważne są kanały dystrybucyjne, czyli układy wzajemnie zależnych organizacji zaangażowanych w sprzedaż produktu.
4. **Promocja** (ang. promotion) – zaliczamy do niej: reklamę, public relations, sponsorowanie, sprzedaż osobistą, kampanie, techniki marketingowe.

6. www.mfiles.pl/pl/index.php/Marketing_mix, (20-04-2013)

Rozszerzona formuła 7P

5. **Ludzie** (ang. people) – personel i klienci.
6. **Proces** (ang. process) – cała procedura marketingowa: od zainteresowania klienta aż do obsługi posprzedażowej.
7. **Świadectwo materialne** (ang. physicalevidence) – elementy, które świadczą o jakości produktu lub usługi, np. logo, wyposażenie, budynki.

Koncepcja 4C – występują te same elementy, co w formule 4P, ale z punktu widzenia klienta. Strategie marketingu „pull" i „push"[7].

Strategia „pull" zakłada oddziaływanie bezpośrednio na nabywcę poprzez stosowanie inwazyjnych działań promocyjnych. Przekaz reklamowy atakuje odbiorcę, który nie ma możliwości podjęcia decyzji o tym, czy chce się z nim zapoznać. Przykładem takiego przekazu są bannery.

Strategia „push" polega na wzbudzeniu u odbiorcy potrzeby lub chęci do dobrowolnego zapoznania się z przekazem reklamowym. Narzędzia stosowane w ramach tej strategii nie są inwazyjne, a konsument sięga po nie z własnej, nieprzymuszonej woli. Przykładem takiego narzędzia jest newsletter[8]. Użytkownik, który chce go otrzymywać, dobrowolnie podaje swoje dane osobowe, aby subskrybować wysyłkę elektroniczną, która zawiera treści komercyjne, a często też treści merytoryczne.

Promocja a reklama

Jednym z elementów marketingu mix jest promocja. Jest ona pojęciem szerszym niż reklama. Prócz reklamy ma za zadanie przedstawienie i utrwalenie w umyśle potencjalnych klientów pozytywnego i niezapomnianego obrazu firmy. Firma wchodząca na rynek swe działania rozpoczyna od promocji znaku firmy, prezentuje we wszystkich mediach swoje osiągnięcia. Reklama produktu danej firmy rozpoczyna się znacznie później. Niewielkie firmy, których fundusze na reklamę są niewielkie muszą dokładnie przemyśleć swoją kampanię reklamową.

Tabela 13. Narzędzia promocji

Reklama	Sprzedaż osobista	Promocje sprzedaży	Public relations PR
reklama w środkach masowego przekazu np. prasa, radio, telewizja, kino reklama w internecie np. e-mailing bilboardy, lighboardy, plakaty oraz reklama pneumatyczna wydawnictwa reklamowe np. ulotki, foldery, prospekty reklama pocztowa	telesprzedaż prezentacja na targach, wystawach telemarketing sprzedaż wysyłkowa sprzedaż w domu klienta sprzedaż z wykorzystaniem przedstawicieli firmy np. konsultantów i akwizytorów	próbki produktów kupony rabaty ilościowe premie okresowe obniżki cen konkursy, gry, loterie promocyjne karty stałego klienta upominki	wywiady w środkach masowego przekazu wykłady, seminaria, konferencje wydawnictwa propagandowe relacje prasowe sponsoring lobbing finasowanie akcji charytatywnych

Źródło: Opracowanie własne.

Reklama, jako główny element promocji stanowi również część składową marketingu. Celem reklamy jest przyciągniecie konsumenta do przedsiębiorstwa (A. Komosa, 2002). Nie może jednak zbytnio odbiegać to od celów, jakie chce osiągnąć dana organizacja na rynku. A więc cele reklamy muszą być dopasowane do strategii danego biznesu.

Cele działań reklamowych:

- **uświadomienie marki** – cel ten jest do osiągnięcia, gdy reklama jest zbudowana na zasadzie luźnej i przyjaznej pogawędki z odbiorcą.
- **wybudowanie w kliencie poczucia lojalności wobec marki** – lojalny klient staje się odporny na działania konkurencji, reklamy konkurencji nie przemawiają do niego. Oprócz tego, lojalny klient poszerza grono klientów przedsiębiorcy przez to, że opowiada o swoim zadowoleniu ze współpracy z organizacją.

7. www:portalwiedzy.onet.pl, 25.03.2013.
8. www:pl.wikipedia.org/wiki/Newsletter, 25.03.2013.

- **edukacja klienta** – polega na uświadamianiu odpowiedniej grupy ludzi jak posługiwać się i po co są dane towary bądź usługi.
- **walka z konkurencją** – ten cel jest oczywisty, przedsiębiorcy przeznaczają ogromne kwoty pieniędzy po to, by uniemożliwić nowym firmom wejście na rynek, jak również osłabić pozycję już istniejących przedsiębiorstw.
- **tworzenie image przedsiębiorstwa** – duże przedsiębiorstwa produkują czasem tysiące różnych towarów, dlatego też postawili na to, by jedynie sama marka była doskonale znana.

Skuteczność każdej reklamy możemy zbadać stosując model **AIDA** (E. Michalski, 2009).

Tabela 14. Model skuteczności działań promocyjnych AIDA

A	Attention	zwrócenie uwagi – o co chodzi?
I	Interest	wzbudzenie zainteresowania – chcę wiedzieć więcej!
D	Desire	chęć zakupu – chcę to mieć!
A	Action	akcja, działanie –planuję zakup. kupuję

Źródło: Opracowanie własne.

Marka przedsiębiorstwa

Zarządzając przedsiębiorstwem musimy pamiętać o budowaniu marki firmy, czyli dobrego wizerunku firmy. Ważny jest wybór odpowiedniego znaku firmowego oraz dobór właściwych kolorów. Klient często kojarzy daną firmę z konkretnym znakiem lub kolorem np. Play – kolor fioletowy, Orange – pomarańczowy, Plus- zielony, T-mobile – różowy. Właściwe dobranie kolorów do charakteru produktu lub usługi oraz do typu odbiorców to połowa sukcesu. Projektant musi zdawać sobie sprawę z istnienia ogromnych różnic w postrzeganiu znaczenia barw, nie tylko w ogólny i szeroko przyjęty sposób, ale także w sposób subiektywny i uzależniony od rodzaju specjalizacji firmy lub wyrobu. Ta sama barwa w odczuciach osoby pracującej np. w banku może mieć inny wydźwięk niż u osoby pracującej w przychodni lekarskiej. Nie bez znaczenia jest fakt, iż jaskrawoczerwone oznaczenia mają karetki pogotowia, a w stonowanych i bladych odcieniach niebieskiego są najczęściej ulotki reklamowe firm zajmujących się finansami. Warto dodać, że każdy kolor może być interpretowany w podwójny sposób — negatywny i pozytywny. Używając barw w sposób nieświadomy i nieprzemyślany, łatwo o pomyłkę i narażenie się na niemałe straty, np. barwa zielona symbolizuje naturę, ekologię, witalność, młodość, ale może również oznaczać szaleństwo i nieporządek (A. Putowska, 2002). Kreując wizerunek firmy, produktu, usługi, procesu lub osoby, staramy się zadziwić ich wyjątkowymi właściwościami.

Podstawowym celem budowania marki jest zakodowanie w ogólnej świadomości pożądanego wizerunku firmy, produktu, usługi, procesu czy osoby. Najpopularniejsze marki mają zwykle proste, konsekwentnie promowane przez lata przesłanie. Najznakomitsze z nich są łatwo rozpoznawalne przez konsumentów, a swój sukces opierają na charakterystycznych, niepowtarzalnych cechach, co określa się, jako budowanie marki poprzez wartości. Marki światowej sławy nie wymagają promocji, wypracowały bowiem już dawno w świadomości klientów określone skojarzenia. Podobnie jak ludzie, produkty mają szczególne właściwości, które określają ich osobowość: coca-cola jest orzeźwiająca i dostępna dla wszystkich, frytki McDonalda bez względu na porę są zawsze świeżo usmażone, Rolex, wprawdzie kosztowny, niezmiennie zachwyca klasą i niezawodnością.

Jak inni postrzegają człowieka, który jeździ nowym Volkswagenem Beetle, nosi garnitur kupiony w Marks & Spencer czy zegarek marki Swatch? Co pomyślą o osobie ubranej w garnitur od Armaniego, buty od Prady, z Rolexem na ręku? Czy podobnie odbierają go, gdy założy dżinsy firmy Levi's, w ręku trzyma coca-colę lub hamburgera z McDonalda? Jak postrzegane są przez nas te osoby zależy w dużej mierze od tego, jakie skojarzenia budzą w nas marki poszczególnych producentów.

Przypisywanie kolorów do określonych branży lub produktów zawodzi czasami z marketingowego punktu widzenia. Czasami bardziej opłaca się złamać zasady, oczywiście w sposób kontrolowany i bardzo przemyślany, aby zwrócić na siebie uwagę i znacząco odróżnić się od konkurencji.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Znając cele działalności reklamowej, wskaż zależności między potrzebami konsumenta a marketingiem.
2. Wymień i opisz zagrożenia płynące z marketingu.
3. Wyliczy wybrane wskaźniki rentowności – ROA i ROS.
4. Przedstaw rolę marketingu w budowaniu marki, np. Coca-Cola, IBM.
5. Omów znaczenie i rolę kolorów w reklamie

Bibliografia:

Komosa A., *Szkolny słownik ekonomiczny*, Ekonomik 2002.

Rutkowski A., *Zarządzanie Finansami*, Warszawa 2003.

Gierusz B., *Podręcznik samodzielnej nauki księgowania*, Gdańsk 2011.

Michalski E., *Marketing. Podręcznik akademicki*, Warszawa 2009.

Altkorna J., *Podstawy marketingu*, Kraków 2003.

Penc J., *Strategie zarządzania*, Warszawa 1995.

Sarzyńska-Putowska J., *Komunikacja wizualna - wybrane zagadnienia*, Kraków 2002.

Pawlak Z., *Biznesplan – zastosowania i przykłady*, Warszawa 2002.

Przybyłowski, K., Hartley, S. W., Kerin R.A., Rudelius, W., *Marketing*. Kraków 1998.

Banaszyk P., Fimińska-Banaszyk R., Stańda A., *Zasady zarządzania w przedsiębiorstwie*, Poznań 1997.

Gos W., *Bilans, znaczenie, koncepcje sporządzenia*, formy prezentacji, Warszawa 2011.

Fonfara K., *Marketing partnerski na rynku przedsiębiorstw*, Warszawa 1999

Lambin J.J., *Strategiczne zarządzanie marketingowe*, Warszawa 2001

Netografia:

www:pl.wikipedia.org/wiki/Biznesplan, 06.02.2013.

www.druki.gofin.pl/wzor,788,556,bilans-uproszczony.html, 02.02.2013.

www:slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html, 26.03.2013.

www:slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html, 26.03.2013.

www:portalwiedzy.onet.pl, 25.03.2013.

www:pl.wikipedia.org/wiki/Newsletter, 25.03.2013.

www.mfiles.pl/pl/index.php/Marketing_mix, 20-04-2013

www:mfiles.pl/pl/index.php/Plan, 20-03-2013

4. Mój biznes

4.1. Podstawowe pojęcia

Kto to jest przedsiębiorca?

Przedsiębiorcą jest osoba fizyczna, osoba prawna i jednostka organizacyjna, prowadząca we własnym imieniu działalność gospodarczą lub zawodową[1].

Co to jest przedsiębiorstwo?

Przedsiębiorstwo jest zorganizowanym zespołem składników niematerialnych i materialnych przeznaczonym do prowadzenia działalności gospodarczej. Obejmuje ono w szczególności (art. 551 KC):

- oznaczenie indywidualizujące przedsiębiorstwo lub jego wyodrębnione części (nazwa przedsiębiorstwa),
- własność nieruchomości lub ruchomości, w tym urządzeń, materiałów, towarów i wyrobów, oraz inne prawa rzeczowe do nieruchomości lub ruchomości,
- prawa wynikające z umów najmu i dzierżawy nieruchomości lub ruchomości oraz prawa do korzystania z nieruchomości lub ruchomości wynikające z innych stosunków prawnych,
- wierzytelności, prawa z papierów wartościowych i środki pieniężne.

Najprostszą formą prowadzenia działalności gospodarczej jest przedsiębiorstwo jednego właściciela będącego osobą fizyczną – czyli jednoosobowa działalność gospodarcza, potocznie zwana firmą.

Co to jest działalność gospodarcza?

D**ziałalność gospodarcza** jest to zarobkowa działalność wytwórcza, budowlana, handlowa, usługowa oraz poszukiwanie, rozpoznawanie i wydobywanie kopalin ze złóż, a także działalność zawodowa, wykonywana w sposób zorganizowany i ciągły.

Podstawy prawne zakładania działalności gospodarczej określone zostały Ustawą o swobodzie działalności gospodarczej[2] oraz Kodeksem cywilnym.

1. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny (Dz. U. Nr 16, poz. 93 ze zm.) - dalej cytowana jako: KC.
2. Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej (t.j. Dz. U. z 2010 r. Nr 220, poz. 1447)

Fundamentalne cechy jednoosobowej działalności gospodarczej:

- prowadzona i reprezentowana przez jednego właściciela (przedsiębiorcę),
- właściciel odpowiada za wszystkie zobowiązania swojej firmy całym majątkiem, bez żadnych ograniczeń,
- założenie jej nie jest obwarowane jakimikolwiek wymaganiami kapitałowymi,
- dla jej utworzenia wystarcza wpis do CEiDG.

4.2. Procedura zakładania działalności

Rejestracja działalności gospodarczej

Pierwszym korkiem do uruchomienia własnej firmy jest dokonanie jej rejestracji w odpowiednim, dla wybranej formy prawnej rejestrze:

w Centralnej Ewidencji i Informacji o Działalności Gospodarczej (CEIDG) - wpisowi podlegają przedsiębiorcy będący osobami fizycznymi, w tym wspólnicy spółki cywilnej (Dz. U. 2004 Nr 173 poz. 1807).

w Krajowym Rejestrze Sądowym (KRS) – wpisowi podlegają m.in. spółki prawa handlowego, przedsiębiorstwa państwowe, podmioty ekonomii społecznej[3].

Pamiętając i mając na uwadze fakt, iż najprostszą i najpopularniejszą forma prowadzenia działalności gospodarczej to jednoosobowa działalność gospodarcza zajmiemy się procedurą jej uruchomienia krok po kroku.

Wniosek o wpis do CEIDG

Aby zarejestrować działalność gospodarczą, jako osoba fizyczna mamy do wyboru kilka trybów postępowania:

- Zalogowanie się do CEIDG, wypełnienie wniosku on-line i złożenie (podpisanie) go elektronicznie.
- Bez logowania się do CEIDG, przygotowanie wniosku on-line i podpisanie go w dowolnej gminie.
- Pobranie i złożenie wniosku papierowego w gminie. Gmina przekształca go na wniosek elektroniczny.
- Przesłanie wniosku listem poleconym do wybranej gminy. Podpis musi być notarialnie potwierdzony.

Tym samym wiem już, że wniosek o wpis do rejestru CEIDG możemy złożyć:

- Osobiście w urzędzie gminy lub miasta.
- Korespondencyjne, wysyłając podpisany wniosek do właściwego urzędu gminy lub miasta.
- Elektronicznie – za pośrednictwem strony www.firma.gov.pl.

Wpisowi do CEIDG podlegają następujące informacje:

- firma przedsiębiorcy oraz jego numer PESEL,;
- data urodzenia przedsiębiorcy;
- numer identyfikacyjny REGON przedsiębiorcy, o ile taki posiada;
- numer identyfikacji podatkowej (NIP);
- informacja o obywatelstwie polskim przedsiębiorcy, o ile takie posiada, i innych obywatelstwach przedsiębiorcy;
- oznaczenie miejsca zamieszkania i adresu zamieszkania przedsiębiorcy, adres do doręczeń przedsiębiorcy oraz adresy, pod którymi jest wykonywana działalność gospodarcza, w tym adres głównego miejsca wykonywania działalności i oddziału, jeżeli został utworzony; dane te są zgodne z oznaczeniami kodowymi przyjętymi w krajowym rejestrze urzędowym podziału terytorialnego kraju, o ile to w danym przypadku możliwe;
- adres poczty elektronicznej przedsiębiorcy oraz jego strony internetowej, o ile przedsiębiorca takie posiada i zgłosił te informacje we wniosku o wpis do CEIDG;
- data rozpoczęcia wykonywania działalności gospodarczej;
- określenie przedmiotów wykonywanej działalności gospodarczej, zgodnie z Polską Klasyfikacją Działalności (PKD);
- informacje o istnieniu lub ustaniu małżeńskiej wspólności majątkowej;

3. Ustawa z dnia 20 sierpnia 1997 r. o Krajowym Rejestrze Sądowym (t.j. Dz. U. 2007 nr 168 poz. 1186)

- numer identyfikacji podatkowej (NIP) oraz numer identyfikacyjny REGON spółek cywilnych, jeżeli przedsiębiorca zawarł umowy takich spółek;
- dane pełnomocnika upoważnionego do prowadzenia spraw przedsiębiorcy, wraz ze wskazaniem zakresu spraw, które obejmuje dane pełnomocnictwo, o ile przedsiębiorca udzielił pełnomocnictwa i zgłosił informację o jego udzieleniu we wniosku o wpis do CEIDG;
- informacja o zawieszeniu i wznowieniu wykonywania działalności gospodarczej;
- informacja o ograniczeniu lub utracie zdolności do czynności prawnych oraz ustanowieniu kurateli lub opieki;
- informacja o ogłoszeniu upadłości z możliwością zawarcia układu, o ogłoszeniu upadłości obejmującej likwidację majątku dłużnika, zmianie postanowienia o ogłoszeniu upadłości z możliwością zawarcia układu na postanowienie o ogłoszeniu upadłości obejmującej likwidację majątku dłużnika i zakończeniu tego postępowania;
- informacja o wszczęciu postępowania naprawczego;
- informacja o przekształceniu przedsiębiorcy będącego osobą fizyczną wykonującą we własnym imieniu działalność gospodarczą w jednoosobową spółkę kapitałową;
- informacja o zakazie prowadzenia działalności gospodarczej;
- informacja o zakazie wykonywania określonego zawodu, którego wykonywanie przez przedsiębiorcę podlega wpisowi do CEIDG;
- informacja o zakazie prowadzenia działalności związanej z wychowaniem, leczeniem, edukacją małoletnich lub z opieką nad nimi;
- informacja o wykreśleniu wpisu w CEIDG.

Wraz z wnioskiem o wpis do CEIDG składa się oświadczenie o braku orzeczonych – wobec osoby, której wpis dotyczy – zakazów, pod rygorem odpowiedzialności karnej za złożenie fałszywego oświadczenia.

Infolinia CEIDG
dla osób zakładających działalność
801 055 088

Wpis jest dokonany z chwilą zamieszczenia danych w CEIDG, nie później niż następnego dnia roboczego po dniu wpływu do CEIDG wniosku.

Zaświadczeniem o wpisie w CEIDG jest wydruk ze strony internetowej CEIDG.

Wpis do CEIDG jest dokonywany, jeżeli wniosek jest złożony przez osobę uprawnioną i jest poprawny.

W sytuacji, gdy wniosek o wpis w CEIDG zawiera błędy:

- gdy został złożony on-line – system CEIDG poinformuje niezwłocznie o niepoprawności wniosku,
- gdy został złożony w urzędzie gminy lub miasta – organ gminy niezwłocznie wzywa do skorygowania lub uzupełnienia wniosku w terminie 7 dni roboczych.

Rejestracja w CEIDG jest wolna od opłat

Przedsiębiorca może podjąć działalność gospodarczą w dniu złożenia wniosku o wpis do CEIDG. Jednakże przedsiębiorca ma prawo we wniosku o wpis do CEIDG określić późniejszy dzień podjęcia działalności gospodarczej niż dzień złożenia wniosku. Data rozpoczęcia działalności gospodarczej nie może być wcześniejsza niż dzień złożenia (podpisania) wniosku o wpis do CEIDG.

CEIDG przesyła odpowiednie dane zawarte we wniosku o wpis do CEIDG niezbędne dla:

- uzyskania, zmiany albo skreślenia wpisu w krajowym rejestrze urzędowym podmiotów gospodarki narodowej (REGON),
- zgłoszenia identyfikacyjnego albo aktualizacyjnego,
- zgłoszenia płatnika składek,
- złożenia oświadczenia o wyborze formy opodatkowania podatkiem dochodowym od osób fizycznych albo wniosku o zastosowanie opodatkowania w formie karty podatkowej,

- zgłoszenia rejestracyjnego lub aktualizacyjnego, o których mowa w przepisach o podatku od towarów i usług, do właściwego naczelnika urzędu skarbowego wskazanego przez przedsiębiorcę, a po uzyskaniu informacji o nadanym numerze identyfikacji podatkowej (NIP) do:
  – Głównego Urzędu Statystycznego,
  – Zakładu Ubezpieczeń Społecznych albo Kasy Rolniczego Ubezpieczenia Społecznego wraz z informacją o dokonaniu wpisu do CEIDG i nadanym numerze NIP.

Obowiązki wobec ZUS

Po dokonaniu wpisu do CEIDG w terminie 7 dni należy zgłosić się do oddziału ZUS w celu wyboru formy ubezpieczenia i złożyć druk:

- ZUS ZUA– gdy zarejestrowana działalność będzie naszym jedynym źródłem dochodu.
- ZUS ZZA- gdy jesteśmy zatrudnienie na umowę o prace i dodatkowo założyliśmy działalność gospodarczą.

Obowiązki wobec Państwowej Inspekcji Pracy

Po dokonaniu wpisu do CEIDG w terminie 30 dni należy zgłosić się do Państwowej Inspekcji Pracy zawiadamianie o facie zatrudnienia pracowników w związku z założoną działalnością. W takim zawiadomieniu, na piśmie wskazujemy miejsce, rodzaj i zakres prowadzonej działalności gospodarczej.

Zatrudnienie pracownika

Nabór pracowników prowadzi pracodawca. Stosownie do swoich potrzeb określa, ile osób, o jakich cechach (w szczególności dotyczących wykształcenia, umiejętności, doświadczenia zawodowego) i na jakie stanowisko potrzebuje. Poniżej przedstawiono najważniejsze zagadnienia dotyczące przygotowania się do procesu rekrutacji przez osoby poszukujące zatrudnienia.

Każda osoba poszukująca pracy powinna mieć przygotowane CV. Jest to podstawowy dokument zawierający informacje dla pracodawcy o potencjalnym kandydacie dotyczące wykształcenia, przebiegu kariery zawodowej, umiejętności.

CV powinno zawierać:

- imię nazwisko, adres i dane kontaktowe (telefon, email),
- informacje o posiadanym wykształceniu,
- doświadczenie zawodowe,
- znajomość języków,
- dodatkowe umiejętności, przebyte kursy, uzyskane certyfikaty,
- zainteresowania, hobby,
- klauzulę wyrażającą zgodę na przetwarzanie danych osobowych zawartych w CV na cele związane z procesem rekrutacji.

Podstawowymi dokumentem aplikacyjnym jest CV lub życiorys. Zdarza się, że pracodawcy wymagają od kandydatów także listu motywacyjnego. Jednakże to nie wszystkie dokumenty jakie mogą być potrzebne w poszukiwaniach pracy. W ogłoszeniach o pracę często konieczne jest wypełnienia formularza aplikacyjnego (w formie papierowej lub online), zawierające pytania i informacje potrzebne z punktu widzenia pracodawcy. Pozwala to lepiej zorganizować, ujednolicić proces rekrutacji nowych pracowników, tworząc jednocześnie bazę interesujących pracodawcę danych.

Powołując się w CV na przebyte kursy, posiadane certyfikaty należy przygotować je na rozmowę kwalifikacyjną, do wglądu dla osoby prowadzącej rekrutację. Nie wysyłamy ich razem z CV.

List motywacyjny nie jest podaniem o pracę. Ma zachęcić pracodawcę do zapoznania się z daną kandydaturą, zachęcić do przeczytania CV kandydata i zaproszenia na rozmowę kwalifikacyjną. Jest formą odpowiedzi na ogłoszenie o pracy, dlatego powinien być adresowany do konkretnego pracodawcy.

Przed przystąpieniem do jego napisania należy przemyśleć dlaczego chcesz pracować u danego pracodawcy oraz dlaczego należy zatrudnić akurat Koniecznie trzeba sprawdzić, o jakie stanowisko się ubiegamy i określić swoje możliwości podjęcia pracy.

Celem listu jest zaprezentowanie siebie jako najlepszego, optymalnego kandydata na dane stanowisko. Trzeba jednak pisać prawdę, być wiarygodnym i przekonującym.

List powinien być napisany na komputerze (chyba że w ogłoszeniu pracodawca określił własnoręczną formę pisemną) krótko i zwięźle, nie dłuższy niż kartka A4. Czytelność zapewni jedna ze standardowych czcionek (np. Times New Roman) w rozmiarze od 12-14 punktów, nadto treść powinna być podzielona akapitami. List nie może powielać informacji zawartych w CV. Prezentowane informacje powinny być konkretne i poparte faktami.

Z treści listu powinno jednocześnie wynikać skąd kandydat dowiedział się ofercie.

Zapraszając kandydatów na rozmowę kwalifikacyjną pracodawca chce poznać przyszłych pracowników. Rozmowa służy weryfikacji informacji zawartych w dokumentach aplikacyjnych, czy posiadane kwalifikacje, doświadczenie są prawdziwe. Podczas rozmowy osobą rekrutująca może jednocześnie zbadać umiejętności interpersonalne potencjalnego pracownika, np. odporność na stres, zdolności komunikacyjne, asertywność.

1. **Zebranie informacji o firmie i stanowisku**

Należy zebrać informacje dotyczące firmy i stanowiska na które aplikujemy. Kandydat powinien wiedzieć od kiedy firma istnieje i czym się zajmuje, jaką ma pozycję na rynku i czy ma szanse rozwoju. Pozwoli to określić zakres wiedzy i umiejętności które są potrzebne na danym stanowisku, jakie cechy psychologiczne mogą być preferowane.

2. **Zebranie i zestawienie najważniejszych informacji o swojej osobie**

Ważne jest by móc bez problemu podczas rozmowy odpowiedzieć na pytania dotyczące samego siebie. Należy zastanowić się jakie cechy będą przydatne w pracy o którą aplikujemy. Przygotowując sobie te elementy nie będą zaskoczeniem ewentualne pytania dotyczące np. mocnych czy słabych stron. Wcześniejsze przygotowanie i płynna odpowiedź zwiększy szanse na zatrudnienie zapobiegając jednocześnie stresowi związanemu z tym pytaniem.

3. **Opracowanie przykładowej listy pytań, które na pewno się pojawią.**

Przykładowe pytania, które mogą zostać zadane podczas rozmowy ze strony prowadzącego nabór

a) Jakie są Pana/i mocne strony, cechy?
b) Jakie są Pana/i słabe strony, cechy?
c) Dlaczego chciałbyś pracować w naszej firmie?
d) Dlaczego miałbym Pana/ią zatrudnić?
e) Co chciałby Pan/i robić za 5, 10 lat?
f) Co Pan/i wie o naszej firmie?
g) Proszę wskazać 5 cech pasujących do Pana/i charakteru.
h) Czy woli Pan/i pracować w grupie, czy indywidualnie?
i) Jakie zadania sprawiały Panu/i najwięcej, a jakie najmniej satysfakcji?
j) Jakie są Pana/i oczekiwania finansowe?

4. **Przygotowanie pytań, na które my chcielibyśmy uzyskać odpowiedzi?**

Zwiększymy swoje szanse na zatrudnienie wykazując zainteresowanie przyszłą pracą, np. pytając o to jak przebiega proces szkolenia, wdrożenia na nowe stanowisko. Należy jednak pamiętać o zasadzie, że nie powinno się zadawać pytań na które odpowiedzi są ogólnodostępne, np. na stronie internetowej firmy. W ten sposób wykażemy się brakiem odpowiedniego przygotowania do rozmowy kwalifikacyjnej (patrz pkt. 1).

5. **Ocena czasu dotarcia do pracodawcy – punktualność**

Bardzo ważna jest punktualność. Jeżeli kandydat spóźnia się na rozmowę kwalifikacyjną, to świadczy to o braku właściwego zorganizowania, czy wręcz lekceważącym stosunku do nowego pracodawcy. Pozwala to jednocześnie wysunąć wniosek, że skoro kandydat spóźnił się na rozmowę, to będzie się spóźniał do pracy. Często spóźnienie przekreśla szanse kandydata na zatrudnienie w danej firmie, czy nawet pozbawia możliwości rozmowy.

6. **Właściwy ubiór**

Pierwsze wrażenie jest ogromnie ważne. Ubranie może również świadczyć o szacunku do rozmówcy, osoby prowadzącej nabór. Na rozmowę kwalifikacyjną należy wybrać taki strój, który pasuje do danego zawodu lub branży. W razie wątpliwości lepiej ubrać się tradycyjnie, klasycznie niż swobodnie. Standardem dla mężczyzn jest ciemny garnitur, koszula i krawat. Ubiór powinien być czysty i schludny, buty wypastowane.

Kobiety nie powinny ubierać się wyzywająco, odkrywając znacznie swoje ciało – nie powinny odsłaniać swojego brzucha, dekoltu, zakładać przezroczystych bluzek i zbyt krótkich spódnic kończących się 30 centymetrów nad kolanem.

Włosy powinny być świeżo umyte włosy, schludnie upięte, a paznokcie pomalowane przeźroczystym, lub w stonowanym odcieniu, lakierem. W przygotowaniu makijażu na rozmowę lepiej zastosować zasadę „lepiej mniej niż więcej", zachowując umiar. Nie powinno się używać zbyt mocnych perfum.

Jakich pytań nie zadawać i jakich tematów nie poruszać

a) Dotyczących podstawowej działalności przedsiębiorcy np. Czym zajmuje się Państwa przedsiębiorstwo?
b) Komplementy względem osoby rekrutującej, np. Ładnie Pani w tym żakiecie.
c) Negatywnych kwestii o byłym pracodawcy, oczerniania, w tym ewentualnego wypowiedzenia przez niego umowy o pracę.
d) Szczegółowe kwestie dotyczące poprzedniego pracodawcy, tajemnic zakladu.
e) Słabe strony, cechy, chyba że zostanie zadane pytanie, a odpowiedź powinna być bardzo zwięzła.
f) Polityka, religia, życie prywatne.
g) Zarobki i inne świadczenia związane z pracą, o ile nie padnie stosowne pytanie.

Więcej informacji na temat procesu rekrutacji, przygotowania do rozmowy kwalifikacyjnej można znaleźć na stronach wortali[4] poświęconych pracy[5].

Umowa o pracę

Umowę o pracę , zgodnie z obowiązującym prawem, możemy zawrzeć:

- na czas nieokreślony,
- na czas określony,
- na okres próbny - nieprzekraczający 3 miesięcy,
- na czas zastępstwa nieobecnego pracownika,
- na czas wykonania określonej pracy.

Umowa o pracę określa strony umowy, rodzaj umowy, datę jej zawarcia oraz warunki pracy i płacy, w szczególności:

- rodzaj pracy,
- miejsce wykonywania pracy,
- wynagrodzenie za pracę odpowiadające rodzajowi pracy, ze wskazaniem składników wynagrodzenia,
- wymiar czasu pracy,
- termin rozpoczęcia pracy.

Umowę o pracę zawiera się na piśmie. Jeżeli umowa o pracę nie została zawarta z zachowaniem formy pisemnej, pracodawca powinien, najpóźniej w dniu rozpoczęcia pracy przez pracownika, potwierdzić pracownikowi na piśmie ustalenia co do stron umowy, rodzaju umowy oraz jej warunków.

Prawa i obowiązki pracownika i pracodawcy to ogół norm określających zasady, których należy przestrzegać w miejscu pracy, celem osiągniecia założonych efektów.

4. wortal - portal wertykalny (ang. vertical portal) portal wyspecjalizowany, publikujący informacje z jednej dziedziny, tematycznie do siebie zbliżone, np. dotyczące muzyki, filmu, programów komputerowych, motoryzacji, pracy; w przeciwstawienie do zwykłego portalu, obejmującego szeroki zakres tematyczny (horyzontalnego

5. Zob. pracuj.pl; monsterpolska.pl; gazetapraca.pl; praca.money.pl; praca.wp.pl

Tabela 15. Prawa i obowiązki pracownika i pracodawcy

Prawa pracownika	Prawa pracodawcy
• prawo do swobodnie wybranej pracy; • równe traktowania mężczyzn i kobiet w zatrudnieniu; • godziwe wynagrodzenia za pracę; • jednakowego wynagrodzenia za jednakową pracę lub za pracę o jednakowej wartości; • prawo do corocznego, nieprzerwanego, płatnego urlopu wypoczynkowego; • w celu reprezentacji i obrony swoich praw i interesów, może tworzyć organizacje i przystępować do tych organizacji; • zachowuje prawo do wynagrodzenia za czas urlopu szkoleniowego oraz za czas zwolnienia z całości lub części dnia pracy; • przysługuje w każdym tygodniu prawo do co najmniej 35 godzin nieprzerwanego odpoczynku, obejmującego co najmniej 11 godzin nie-przerwanego odpoczynku dobowego; • jeżeli dobowy wymiar czasu pracy pracownika wynosi co najmniej 6 godzin, pracownik ma prawo do przerwy w pracy trwającej co najmniej 15 minut, wliczanej do czasu pracy.	• w celu reprezentacji i obrony swoich praw i interesów, może tworzyć organizacje i przystępować do tych organizacji; • może rozwiązać umowę o pracę bez wypowiedzenia z winypracownika; • może na czas przestoju powierzyć pracownikowi inną odpowiednią pracę, za której wykonanie przysługuje wynagrodzenie przewidziane za tę pracę; • może stosować karę upomnienia i nagany za nieprzestrzeganie przez pracownika ustalonej organizacji i porządku w procesie pracy, przepisów bezpieczeństwa i higieny pracy, przepisów przeciwpożarowych, a także przyjętego sposobu potwierdzania przybycia i obecności w pracy oraz usprawiedliwiania nieobecności w pracy; • za nieprzestrzeganie przez pracownika przepisów bezpieczeństwa i higieny pracy lub przepisów przeciwpożarowych, opuszczenie pracy bez usprawiedliwienia, stawienie się do pracy w stanie nietrzeźwości lub spożywanie alkoholu w czasie pracy – pracodawca może również stosować karę pieniężną; • może wprowadzić jedną przerwę w pracy nie wliczaną do czasu pracy, w wymiarze nie przekraczającym 60 minut, przeznaczoną na spożycie posiłku lub załatwienie spraw osobistych; • może na pisemny wniosek pracownika ustalić indywidualny rozkład jego czasu pracy w ramach systemu czasu pracy, którym pracownik jest objęty; • zobowiązać pracownika do pozostawania poza normalnymi godzinami pracy w gotowości do wykonywania pracy wynikającej z umowy o pracę w zakładzie pracy lub w innym miejscu wyznaczonym przez pracodawcę (dyżur); • może odwołać pracownika z urlopu tylko wówczas, gdy jego obecności w zakładzie wymagają okoliczności nieprzewidziane w chwili rozpoczynania urlopu; • na pisemny wniosek pracownika pracodawca może udzielić mu urlopu bezpłatnego.
Obowiązki pracownika	**Obowiązki pracodawcy**
• zobowiązanie się do wykonywania pracy określonego rodzaju na rzecz pracodawcy i pod jego kierownictwem oraz w miejscu i czasie wyznaczonym przez pracodawcę; • przestrzegania czasu pracy ustalonego w zakładzie; • przestrzegania regulaminu pracy; • przestrzegania przepisów oraz zasad bezpieczeństwa i higieny pracy; • dbać o dobro zakładu pracy, ochrony jego mienia oraz zachowania w tajemnicy informacji, których ujawnienie mogłoby narazić pracodawcę na szkodę; • przestrzegania w zakładzie zasad współżycia społecznego; • jeżeli pracodawca zawarł z pracownikiem umowę o zakazie konkurencji nie może prowadzić działalności konkurencyjnej wobec pracodawcy ani też świadczyć pracy w ramach stosunku pracy lub na innej podstawie na rzecz podmiotu prowadzącego taką działalność.	• zaznajamiać pracowników podejmujących pracę z zakresem ich obowiązków, sposobem wykonywania pracy na wyznaczonych stanowiskach oraz ich podstawowymi uprawnieniami; • organizować pracę w sposób zapewniający pełne wykorzystanie czasu pracy, jak również osiąganie przez pracowników, przy wykorzystaniu ich uzdolnień i kwalifikacji, wysokiej wydajności i należytej jakości pracy; • organizować pracę w sposób zapewniający zmniejszenie uciążliwości pracy, zwłaszcza pracy monotonnej i pracy w ustalonym z góry tempie; • przeciwdziałać dyskryminacji w zatrudnieniu, w szczególności ze względu na płeć, wiek, niepełnosprawność, rasę, religię, narodowość, przekonania polityczne, przynależność związkową, pochodzenie etniczne, wyznanie, orientację seksualną, a także ze względu na zatrudnienie na czas określony lub nie określony albo w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy; • zapewniać bezpieczne i higieniczne warunki pracy oraz prowadzić systematyczne szkolenie pracowników w zakresie bezpieczeństwa i higieny pracy; • terminowo i prawidłowo wypłacać wynagrodzenie; • ułatwiać pracownikom podnoszenie kwalifikacji zawodowych; • stwarzać pracownikom podejmującym zatrudnienie po ukończeniu szkoły prowadzącej kształcenie zawodowe lub szkoły wyższej warunki sprzyjające przystosowaniu się do należytego wykonywania pracy; • zaspokajać w miarę posiadanych środków socjalne potrzeby pracowników; • stosować obiektywne i sprawiedliwe kryteria oceny pracowników oraz wyników ich pracy, • prowadzić dokumentację w sprawach związanych ze stosunkiem pracy oraz akta osobowe pracowników; • przechowywać dokumentację w sprawach związanych ze stosunkiem pracy oraz akta osobowe pracowników w warunkach niegrożących uszkodzeniem lub zniszczeniem, • wpływać na kształtowanie w zakładzie pracy zasad współżycia społecznego; • informować pracowników w sposób przyjęty u danego pracodawcy o możliwości zatrudnienia w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy, a pracowników zatrudnionych na czas określony – o wolnych miejscach pracy; • przeciwdziałać mobbingowi; • w związku z rozwiązaniem lub wygaśnięciem stosunku pracy pracodawca jest obowiązany niezwłocznie wydać pracownikowi świadectwo pracy; • pokryć koszty poniesione przez pracownika w bezpośrednim związku z odwołaniem go z urlopu; • zatrudniając pracownicę w porze nocnej jest obowiązany na okres jej ciąży zmienić rozkład czasu pracy w sposób umożliwiający wykonywanie pracy po-za porą nocną, a jeżeli jest to niemożliwe lub niecelowe, przenieść pracownicę do innej pracy, której wykonywanie nie wymaga pracy w porze nocnej; • zatrudniając pracownicę w ciąży lub karmiącą dziecko piersią jest obowiązany dostosować warunki pracy tak ograniczyć czas pracy, aby wyeliminować zagrożenia dla zdrowia lub bezpieczeństwa pracownicy; • nie może wypowiedzieć ani rozwiązać umowy o pracę w okresie od dnia złożenia przez pracownika wniosku o udzielenie urlopu wychowawczego do dnia zakończenia tego urlopu; • zapewnić młodocianym pracownikom opiekę i pomoc, niezbędną dla ich przystosowania się do właściwego wykonywania pracy.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Ustawa Kodeks pracy.

Organem powołanym do sprawowania nadzoru i kontroli przestrzegania prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, a także przepisów dotyczących legalności zatrudnienia i innej pracy zarobkowej jest **Państwowa Inspekcja Pracy**[6].

Do **zadań Państwowej Inspekcji Pracy** należy:

- nadzór i kontrola przestrzegania przepisów prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, przepisów dotyczących stosunku pracy, wynagrodzenia za pracę i innych świadczeń wynikających ze stosunku pracy, czasu pracy, urlopów, uprawnień pracowników związanych z rodzicielstwem, zatrudniania młodocianych i osób niepełnosprawnych,
- kontrola legalności zatrudnienia, innej pracy zarobkowej, wykonywania
- działalności,
- kontrola legalności zatrudnienia, innej pracy zarobkowej oraz wykonywania
- pracy przez cudzoziemców,
- kontrola wyrobów wprowadzonych do obrotu lub oddanych do użytku pod względem spełniania przez nie zasadniczych lub innych wymagań dotyczących bezpieczeństwa i higieny pracy, określonych w odrębnych przepisach,
- podejmowanie działań polegających na zapobieganiu i ograniczaniu zagrożeń w środowisku pracy
- współdziałanie z organami ochrony środowiska w zakresie kontroli przestrzegania przez pracodawców przepisów o przeciwdziałaniu zagrożeniom dla środowiska,
- opiniowanie projektów aktów prawnych z zakresu prawa pracy,
- prawo wnoszenia powództw, a za zgodą osoby zainteresowanej – uczestnictwo w postępowaniu przed sądem pracy, w sprawach o ustalenie istnienia stosunku pracy.

Państwowa Inspekcja Pracy **udziela bezpłatnie porad** w zakresie prawa pracy[7].

Zatrudnienie niepracownicze

Umowy o prace to nie jedyne formy podejmowania pracy zarobkowej. Kodeks cywilny[8] i przepisy wykonawcze do Kodeksu Pracy dają możliwość zatrudnienia w oparciu o: umowę zlecenie, umowę o dzieło, umowę agencyjną oraz umowę o pracę nakładczą[9]

6. Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 404,poz. 769.).
7. http://www.bip.pip.gov.pl/pl/bip/porady_wszystkie, 10.03.2013.
8. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. - Kodeks cywilny (Dz. U. z 1964, nr 16, poz. 93 ze zm.).
9. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 31 grudnia 1975 r. w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą. (Dz. U z 1976 r, Nr 3, poz.19)

Kluczowe elementy rozróżniające te poszczególne typy umów zawarte zostały w poniższej tabeli:

Tabela 16. Porównanie umów cywilnoprawnych

Kryteria	Umowa zlecenia	Umowa o dzieło	Umowa agencyjna	Umowa o pracę nakładczą
Podstawa prawna	art. 734 -751 KC	art. 627- 646 KC	art. 758 -764 KC	Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą
Przedmiot umowy	dokonania określonej czynności prawnej dla dającego zlecenie	zobowiązanie do wykonania oznaczonego dzieła	zobowiązanie do stałego pośrednictwa lub przedstawicielstwa.	wykonanie pracy zgodnie z warunkami umowy zleconej przez nakładcę
Trwałość umowy	zlecenie wykonane w konkretnym czasie lub bezterminowo	charakter jednorazowy	charakter ciągły	charakter ciągły
Strony umowy	zleceniodawca i zleceniobiorca	przyjmujący zamówienie (wykonawca) i zamawiający	przyjmujący zlecenie (agent) i dający zlecenie - strony umowy muszą być przedsiębiorcami	nakładca i wykonawca
Sposób wykonywania pracy/usługi	zleceniobiorca zobowiązuje się do wykonywania powtarzalnych czynności, a nie do osiągnięcia rezultatu	przyjmujący zamówienie zobowiązuje się do osiągnięcia rezultatu	pośredniczenie lub zawieranie umów oznaczonego rodzaju na rzecz dającego zlecenie lub w jego imieniu	wykonawca zobowiązuje się do osiągnięcia rezultatu wynikającego z zawartej umowy
Charakter wykonania pracy/usługi	zleceniobiorca powinien wykonywać pracę osobiście, może powierzyć wykonanie zlecenia osobie trzeciej tylko wtedy, gdy to wynika z umowy lub ze zwyczaju albo gdy jest do tego zmuszony przez okoliczności	przyjmujący zlecenie może powierzyć wykonanie zlecenia osobie trzeciej tylko wtedy, gdy to wynika z umowy lub ze zwyczaju albo gdy jest do tego zmuszony przez okoliczności	agent może powierzyć wykonywanie zlecenia osobie trzeciej tylko za pisemną zgodą dającego zlecenie	wykonawca nie musi wykonać pracy nakładczej osobiście
Formy umowy	ustna, pisemna lub w sposób dorozumiany (np. poprzez dopuszczenie wykonywania przedmiotu zlecenia)	może być zawarta w każdej formie	może być zawarta w formie dowolnej, w sytuacji gdy wprowadza odpowiedzialność agenta za wykonanie zobowiązania przez klienta powinna być zawarta w formie pisemnej	powinna być zawarta w formie pisemnej
Rodzaj odpowiedzialność	zleceniobiorca nie jest odpowiedzialny za ostateczny efekt, wykonując zlecenie musi działać z należytą starannością	zgodnie z zasadami rękojmi za wady	agent ponosi ryzyko niepowodzenia podjętych działań	wykonawca odpowiada za efekt pracy
Rozwiązanie umowy	dopuszczalność wypowiedzenia w każdym terminie	dopuszczalność wypowiedzenia w każdym terminie	szczegółowo określony tryb i terminy wypowiedzenia wynikający z ustawy	dopuszczalność rozwiązania w każdym czasie na mocy porozumienia stron lub za wypowiedzeniem

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Kodeks cywilny i Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Jak przygotować dobre curriculum vitae i list motywacyjny?
2. Wymień rodzaje umów o pracę i wskaz na ich różnice
3. Wskaż obowiązki pracodawcy

Akty prawne:

Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej, (t.j. Dz. U. z 2010 r. Nr 220, poz. 1447)

Ustawa z dnia 20 sierpnia 1997 r. o Krajowym Rejestrze Sądowym, (t.j. Dz. U. z 2007 Nr 168 poz. 1186)

Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny,(Dz. U. Nr 16, poz. 93 ze zm.)

Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy, (t.j. Dz. U. 2007 Nr 168 poz. 1186)

Netografia:

Huczko P., Jak założyć własną firmę? www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna--firme.html, 7.03.2013.

Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości , Jak zostać i pozostać przedsiębiorcą? www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/, 7.03.2013.

Centrum Innowacji i Transferu Technologii, Przewodnik krok po kroku do własnej firmy, http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki_do_pobrania/publikacje/layout_zmiana_wysylka.pdf, 8.03.2013.

Przydatne strony:

- www. firma.gov.pl
- www.zus.pl
- www.pip.gov.pl
- www.twoja-firma.pl

5. Zarządzanie zespołem

Zarządzanie jest to sztuka kierowania ludzką aktywnością

Jean Paul Getty

Niezmiernie ważną rolę w rozwoju wielu dziedzin życia, odgrywa umiejętne zarządzanie ich zasobami.

Pojęcie zarządzania, nie doczekało się jednoznacznej teoretycznej wykładni i jest wielorako rozumiane. W takim najbardziej bliskim nam pojmowaniu, **zarządzanie** stanowi złożony, wielostronny proces sterowania całokształtem działalności firmy, jej rozwojem i sposobami zachowania się w otoczeniu. Niewątpliwie jest wielką sztuką, której trzeba się stale uczyć – podobnie jak sztuki skutecznego komunikowania– ponieważ zmienia się nie tylko sama firma. Zmieniają się też systemy, znajdujące się z nią w ciągłej interakcji (J. Penc, 2005).

Ten skomplikowany proces, na który składa się zatrudnianie ludzi i konieczność zastosowania różnych technik (np. produkcyjnych) sprawia, iż zarządzanie staje się coraz bardziej złożone. W większości przedsiębiorstw właściciele kapitału (akcjonariusze) powierzają zarządzanie zakładem wyspecjalizowanej kadrze kierowniczej, czyli **menadżerom** (więcej na ten temat w podrozdziale 5.3.), co powoduje często oddzielenie i rozróżnienie funkcji bycia właścicielem firmy od funkcji zarządzającego firmą. Menadżer – jako osoba uprawniona do wydawania poleceń i wskazówek innym, uzyskuje w pewnym znaczeniu władzę, która jest podstawowym warunkiem zarządzania. W odniesieniu do tego można stwierdzić, że **zarządzanie –** to wykonywanie władzy w stosunku do ludzi, rzeczy i kapitału. Kierownik – menadżer wydając polecenia pracownikom, dąży do jakiegoś pożądanego celu przedsiębiorstwa, właśnie za pośrednictwem swoich podwładnych. W odniesieniu do tego **zarządzanie** – to osiąganie konkretnych celów poprzez ludzi. Ponieważ kierując firmą i wydając stosowne polecenia podejmuje się jakieś decyzje (jest decyzyjny), **zarządzanie** utożsamia się także z procesem podejmowania decyzji. Poza tym można powiedzieć, że na ten złożony proces, jakim jest zarządzanie, poza planowaniem, decydowaniem, organizowaniem i strukturą organizacyjną, składa się także motywowanie, informacja i komunikowanie, kontrolowanie, oraz – co jest bardzo istotne – **zarządzanie zespołem ludzi** (B. Piasecki, 1998).

Najbardziej znany we Francji specjalista i autor dzieł na temat zarządzania ludźmi, oraz badacz rozwoju zasobów ludzkich w zarządzaniu

J.M. Perretti postrzega ludzi – pracowników, jako zasoby, które należy optymalizować, a nie jako źródło kosztów, które trzeba minimalizować. Co więcej – uważa, że funkcja personalna w przedsiębiorstwie, przeszła najbardziej spektakularną i najbardziej trwałą ewolucję na przestrzeni lat w dobrym tego słowa znaczeniu.

Tak więc czynnik ludzki w przedsiębiorstwie, stanowi niezmiernie ważny majątek finansowy lub produkcyjny, a dobrze realizowana praktyka zarządzania ludźmi, może w rezultacie prowadzić do wzrostu produkcyjności, obniżki kosztów, **fluktuacji** pracowników (przemieszczanie się pracowników, a dokładniej ich przychodzenie i odchodzenie z pracy w określonym czasie), a nawet do poprawy relacji międzyludzkich. Ponadto dzięki niej firma – w procesie rekrutacji – stawiać będzie na wysoko kwalifikowany personel, zwłaszcza w wysoce konkurencyjnym rynku pracy (B. Piasecki, 1998).

Był wiceprezesem portalu Pracuj.pl, jest jego współzałożycielem. Razem ze swoimi wspólnikami współtworzył firmę, która dziś jest największym polskim portalem rekrutacyjnym. Kierował trzema międzynarodowymi projektami zorientowanymi na rozwój narzędzi wspomagających zarządzanie ludźmi.

Zarządzanie zespołem nie jest prostą sprawą. R. Szczepanik porównał ten proces do budowy domu twierdząc, że etap tworzenia zespołu odpowiada rysowaniu projektu i stawianiu fundamentów. Jeżeli zostanie to źle zaplanowane i niezauważone w porę, to wszystko, co zostanie zrobione później, będzie błędne. Dom trzeba będzie przebudować, albo rozburzyć go aż po piwnice. Z konstruowaniem zespołu jest podobnie – jeżeli źle dobierzemy członków tego zespołu, to pomimo najlepszego ich szkolenia i optymalnego motywowania, rezultaty mogą być mierne. Jeżeli natomiast źle zostanie zaplanowana kultura pracy zespołowej i kultura organizacyjna zespołu, jej zmiana zajmie szereg lat (R. Szczepanik, 2010).

5.1. Zasady organizacji pracy

▶ **Człowiek własną pracą i wysileniem do wszystkiego dojść może.**

Adam Mickiewicz

Czym tak naprawdę jest praca i do czego ta ludzka forma działania jest człowiekowi potrzebna?

Praca to pewna celowa działalność człowieka – zbiorowa lub jednostkowa – zmierzająca do uzyskania jakiegoś wytworu materialnego, bądź niematerialnego. Całemu procesowi pracy (na który składają się sama praca, przedmiot pracy i narzędzia pracy) towarzyszy na ogół przekonanie o jej pożytku (W. Okoń, 2001).

Praca odgrywa doniosłą rolę w życiu człowieka i w życiu społeczności, w której człowiek przebywa. Spełnia ona trzy podstawowe, a za razem współzależne od siebie funkcje:

- Jest czynnikiem tworzenia produktu społecznego – **funkcja ekonomiczna.**
- Jest środkiem uzyskiwania dochodów – **funkcja dochodowa.**
- Jest środkiem zaspakajania aspiracji społecznych i zawodowych – **funkcja społeczna** (W. Pomykało, 1995).

Jak zatem tą pracę zorganizować, aby przyniosła szereg korzyści dla człowieka?

Polski filozof, logik i etyk, twórca etyki niezależnej. Nauczyciel i pedagog

T. Kotarbiński definiuje **organizację,** jako pewną całość, której wszystkie składniki przyczyniają się do powodzenia tej całości. Innymi słowy, **organizacja** – to pewien uporządkowany układ powiązanych wzajemnie elementów, które tworzą całość dającą się wyodrębnić z otoczenia.

Pojęciem pokrewnym do *organizacji,* jest **struktura organizacyjna**, którą tworzą wyodrębnione stanowiska pracy, połączone różnymi więziami organizacyjnymi, oraz **zasady organizacji pracy.** Zasady te, to pewne reguły, których stosowanie zapewnia skuteczność działania organizacyjnego.

Wyróżnić można kilka zasad, które składają się na organizację pracy:

- **Zasada ekonomicznego działania** – polega na dążeniu do osiągnięcia korzystnego efektu pracy, przy danym nakładzie sił i środków **(zasada efektywności)** oraz do osiągnięcia założonego efektu pracy najmniejszym nakładzie sił i środków.
- **Zasada optymalnego wyniku działania** – oznacza, że przy zwiększeniu środków bądź nakładów pracy nie dopuszcza się do przekroczenia momentu, w którym zaczyna maleć wynik działania.
- **Zasada podziału pracy –** dotyczy rozłożenia pracy na elementy proste i powierzenie ich wykonania specjalistom, co stwarza możliwość zwiększenia wyniku działania.
- **Zasada koncentracji pracy** – oznacza powierzenie jednorodnych funkcji tym samym, dobrze przygotowanym wykonawcom, co przynosi oszczędność środków i energii.
- **Zasada harmonii** – polega na odpowiednim doborze materiałów, maszyn i narzędzi oraz skoordynowaniu działań w czasie tak, aby uzyskać najlepsze wyniki.
- **Zasada ciągłości pracy –** polega na utrzymaniu względnie równomiernego tempa pracy, co daje wysoką wydajność.
- **Zasada kompleksowego działania** – oznacza, że każdy fragment pracy musi być rozpatrywany w powiązaniu z pozostałymi.
- **Zasada identyfikacji pracy** – polega na zmierzaniu do uzyskania lepszych wyników ilościowych i jakościowych, poprzez usprawnienie techniczne i organizacyjne.
- **Zasada indywidualizacji –** to przydzielanie pracy według indywidualnych sprawności, możliwości, predyspozycji i zainteresowań (M. Wiszniewska, 2013).

Z organizacją pracy wiąże się także **proces rekrutacji**. Każde zatrudnianie nowego pracownika wymaga przeprowadzenia przez firmę takiej rekrutacji, która jest złożonym, wieloetapowym procesem – często rozłożonym w czasie. Celem procesu rekrutacji jest wyłonienie spośród kandydatów na określone stanowisko takiej osoby, która możliwie najdokładniej spełni oczekiwania firmy. Proces rekrutacji pracowników, w zależności od tego, jakie jest źródło pozyskania kandydatów na dane stanowisko, może przybrać formę rekrutacji **wewnętrznej** (kiedy wolne stanowisko przeznacza się dla pracownika już zatrudnionego, lecz np. na niższym stanowisku) **zewnętrznej** (stanowisko przeznaczone jest dla kandydata spoza firmy) lub **mieszanej**. Proces rekrutacji w różnych przedsiębiorstwach może przebiegać inaczej, jednak da się w nim wyróżnić pewne wspólne, podstawowe **etapy rekrutacji pracowników**:

- Określenie kompetencji potrzebnych na danym stanowisku, które stanowić będą wyznacznik oczekiwań wobec pracownika.
- Sformułowanie ogłoszenia rekrutacyjnego, które nakreśli zadania na danym stanowisku, oraz oczekiwane przez firmę kompetencje.
- Wybór nośnika ogłoszenia rekrutacyjnego, czyli publikacja ogłoszenia w wybranych serwisach i prasie i uruchomienie wszystkich dostępnych firmie kanałów rekrutacji.
- Analiza CV kandydatów, jako pierwszy etap selekcji w procesie rekrutacji, czyli odrzucenie tych kandydatów, którzy nie spełniają minimum oczekiwanego przez firmę.
- Kontakt firmy z wybranymi osobami**,** czyli z kandydatami**,** którzy przeszli pozytywnie proces selekcji. Oni otrzymują zaproszenie na spotkanie rekrutacyjne, które może zostać poprzedzone rekrutacyjną rozmową telefoniczną.
- Istotny element procesu rekrutacji, czyli podejmowanie decyzji przez osoby odpowiedzialne za zatrudnienie nowego pracownika – selekcja kandydatów na podstawie zebranych danych z CV, wywiadu, referencji.
- Udzielanie informacji zwrotnej kandydatom odrzuconym i złożenia oferty pracy wybranemu kandydatowi (ten etap procesu rekrutacji również może obejmować kilka spotkań lub rozmów).
- Proces zatrudniania, czyli przekazania przyszłemu pracownikowi wszystkich niezbędnych do zawarcia umowy o pracę danych (Blog infoPraca, 20.03.2013).

Osoby, które zawodowo zajmują się wyszukiwaniem wybitnych specjalistów na określone stanowiska pracy, to **headhunterzy** (L. Wiśniakowska, 2007).

Najczęściej są to pracownicy dużych korporacji lub agencji pośrednictwa pracy. Ich zadaniem jest identyfikacja szczególnie cenionych na rynku specjalistów i nawiązanie z nimi kontaktu w celu skłonienia ich do zmiany pracodawcy. Proces rekrutacji prowadzony przez „łowców głów" jest poufny[1].

1. http://pl.wikipedia.org/wiki/Headhunter (09.05.2013)

Headhunterzy działają szczególnie aktywnie w branżach wymagających dużej wiedzy, specjalizacji i doświadczenia, a więc tam, gdzie dobrych pracowników jest niewielu (w handlu, finansach, marketingu, prawie, w reklamie i public relations, a także w branżach inżynieryjnych). Szczególną kategorią osób, na którą headhunterzy polują, są **menedżerowie[2]**. Ich rekrutacja przebiega nieco inaczej, niż szukanie wąsko wyspecjalizowanych pracowników. Menedżerowie to bardzo specyficzna grupa ludzi, dla których szczególnie ważna jest potrzeba rozwoju, sukcesu, tworzenia czegoś nowego, przekształcania rzeczywistości. Konwersacja z headhunterem to nie jest zwykła rozmowa kwalifikacyjna. Headhunter dysponuje dużo szerszym wachlarzem narzędzi diagnostycznych, niż potencjalny – nawet bardzo dobrze przygotowany – pracodawca. W trakcie rozmowy headhunter diagnozuje cechy rozmówcy, typ jego osobowości oraz temperament. Sprawdza jego predyspozycje, motywacje i kwalifikacje. Często zaskakuje przygotowanymi materiałami i prosi potencjalnego pracownika o ustosunkowanie się do różnych kwestii[3].

Profesjonalny headhunter jest najczęściej osobą, która doskonale zna się na branży do której rekrutuje. Rekrutacja przez headhunting jest kosztowna, dlatego też stosuje się ją na wysokich, dobrze opłacanych stanowiskach specjalistycznych. Headhunterzy są w stanie dotrzeć do kandydatów na wiele różnych sposobów, wykorzystując w tym celu np.: serwisy społecznościowe, Internet, kontakty biznesowe, bazy danych CV i nierzadko podstęp, a także inne metody, które uzależnione są od tego, kogo headhunter poszukuje[4].

Przy organizacji pracy niezmiernie ważne są także przyjmowane **style kierowania zespołem ludzi,** jakie preferuje menadżer, oraz ich efektywność. Wyróżnić można między innymi trzy podstawowe style kierowania pracą grupy: **autokratyczny**, **demokratyczny** i **liberalny[5]**.

Styl autokratyczny zakłada, że przeciętny człowiek ma chwiejny stosunek do pracy i powierzanych mu obowiązków, od których najczęściej się uchyla. Brakuje mu poczucia odpowiedzialności, dąży do minimalizacji wysiłku wkładanego w pracę. W związku z tym kadry kierownicze – menadżerowie, powinni być surowi i wymagający, gdyż tylko taka postawa zapewni realizację stawianych zadań. Autokratyczny styl kierowania prowadzi do bardzo wysokiej wydajności i efektywności pracy w danej grupie roboczej. Jednak jej jakość jest niska, podobnie jak niska jest motywacja do pracy. Taki styl kierowania zespołem daje najlepsze rezultaty w sytuacjach zagrożenia i presji czasowej (np. obronność kraju, w czasie klęsk żywiołowych) oraz gdy pracownicy nie mają stosownych kwalifikacji zawodowych, a także boją się podejmować indywidualną odpowiedzialność.

Styl demokratyczny natomiast zakłada, że przeciętny pracownik z chęcią przystępuje do realizacji powierzanych mu obowiązków i zadań. Menadżer potrafi być twórczy i odpowiedzialny, a podwładni mają więc prawo do udziału w podejmowaniu decyzji. Menedżer określa jedynie cel działania, który pracownicy realizują wybierając sposób, który uznają za najbardziej odpowiedni. Demokratyczny styl kierowania zespołem – w przeciwieństwie do stylu autokratycznego – sprzyja lepszej jakości pracy i motywacji do podejmowania zadań. Efektywność jednak jest znacznie mniejsza. Stosowanie demokratycznego stylu kierowania jest właściwe w odniesieniu do pracowników wysoko wykwalifikowanych, posiadających dużą potrzebę niezależności i swobody działania.

Styl liberalny zakłada pozostawienie pracownikom niemalże całkowitej swobody w podejmowaniu decyzji, czyli w wyborze celów zawodowych i sposobów ich realizacji. Przyjęcie takiego stylu kierowania ludźmi, prowadzi do nieefektywnej pracy zespołu, a jej wyniki są bardzo niskiej jakości.

Wybór określonego stylu kierowania ludźmi, zależy od kadry kierowniczej (W. Cwalina, J. Sobek, 2013).

Właściwa organizacja pracy może być swoistym kluczem do sukcesu, pośrednio poprzez efektywną pracę poszczególnych zespołów. Poza tym umiejętna organizacja pracy, stwarza warunki do efektywnego wykorzystania czasu (organizacja pracy i zarządzanie czasem mają wiele wspólnego). Nawet nieznaczne błędy w organizacji pracy, mogą mieć istotny wpływ na zmniejszenie jej efektywności. Tutaj także znaczącą rolę odgrywają liderzy poszczególnych zespołów.

2. więcej o menedżerach zob. w rozdziale 5.3 niniejszego podręcznika
3. P. Pacuła, *Headhunting: daj się złapać łowcy głów*, http://menstream.pl/wiadomosci-kariera/headhunting-daj-sie-zlapac-lowcy-glow,0,649763.html (09.05.2013)
4. http://kariera.infopraca.pl/2011/06/headhunter-%E2%80%93-kto-to-taki/ (09.05.2013)
5. W. Cwalina, J. Sobek, *Psychologia organizacji i zarządzania – przywództwo, konflikty, negocjacje, motywacja do pracy, systemy zarządzania*, http://nop.ciop.pl/m5-2/m5-2_1.htm, 21.03.2013.

5.2. Lider – szef, czy kolega

> **Liderem jest ten, kto widzi więcej niż inni,**
> **patrzy dalej niż inni i kto dostrzega rzeczy, zanim zobaczą je inni.**

LeRoy Eims

Osiągnięcie szeroko rozumianego sukcesu, jest marzeniem niemalże każdego człowieka. W sposób szczególny dostrzegalne jest to w świecie biznesu. Sukces i powodzenie w dużej mierze zależą od tych pracowników, którzy kierują ludźmi.

Kierowników nastawionych do wypełniania swoich obowiązków w sposób wybitnie nowatorski nazywa się **liderami.** Piastujący formalnie stanowisko kierownicze lub też nie lider, jest podatny na nowe wizje, jest empatyczny i emocjonalnie nastawiony na ludzkie potrzeby, oczekiwania i nastroje. Fascynują go wielkie innowacje oraz dalekosiężne plany. Liderzy bardziej cenią sobie przebywanie w świecie myśli, teorii i **imaginacji** (zdolność do tworzenia obrazów za pomocą wyobraźni), niż paranie się konkretami codziennej krzątaniny. Liderzy są skłonni do eksperymentowania, elastyczności – prezentują postawę marzycielską i niekonwencjonalną w poczynaniach. Przede wszystkim są twórczy i oryginalni – wrogo nastawieni do rutyny. Liderzy w rozwiązywanie istniejących problemów wkładają mnóstwo serca i emocji w przeciwieństwie np. do menadżerów, o których więcej w kolejnym podrozdziale (W. Pomykało, 1995).

Czym zatem charakteryzuje się **lider**?

Ludzi w naturalny sposób przyciągają osoby **pewne siebie**, co jest charakterystyczne dla ludzi z pozytywnym nastawieniem. Pewność siebie dodaje sił. Dobry przywódca potrafi sprawić, by ludzie byli go pewni, a wielki przywódca, by byli pewni siebie. Poza pewnością siebie – **siła charakteru.** Cechy składające się na właściwy charakter to między innymi uczciwość, integralność, chęć uczenia się, zdobywania wiedzy i nabywania nowych umiejętności, a także niezawodność, wytrwałość, sumienność i hołdowanie etyce pracy. Zazwyczaj słowa człowieka o właściwym charakterze, zgadzają się z jego czynami.

Wybitnych liderów zawsze cechuje **samodyscyplina**, zarówno emocjonalna jak i ta związana z czasem. Osoby zdyscyplinowane mają świadomość, że ponoszą odpowiedzialność za swoje reakcje emocjonalne, nieustannie się rozwijają i ciągle dążą do doskonałości, intensywnie wykorzystując własny czas. Poza tym liderzy powinni posiadać umiejętność **skutecznego porozumiewania się,** ponieważ dobra komunikacja, to początek pozytywnego – wzajemnego oddziaływania na siebie (O. Rzycka. 2013).

Lider zespołu w pewnym sensie ma **prawo do bycia nieco przed i nad zespołem**. Nad – ponieważ musi obserwować komunikację między członkami zespołu, przed– gdyż musi wyczuć, kiedy pojawiają się ewentualne trudności mogące zaważyć na dalszej współpracy całego zespołu. Lider dobrze kierujący zespołem posiada pewien zestaw cech, które decydują m.in. o szacunku w grupie, zdolności do motywacji członków zespołu, oraz o dalekowzroczności w przypadku nowych wyzwań. Te cechy to m.in.:

- **Konsekwencja.**
- **Decyzyjność i elastyczność** (wspomniane w przypadku omawiania procesu zarządzania zespołem).
- **Otwartość.**
- **Szacunek dla innych.**
- **Przedsiębiorczość.**

Dobry lider zna członków zespołu nieco lepiej, niż oni siebie nawzajem. Zauważa ewentualne konflikty i dba o realizacje postawionych celów, utrzymując tym samym wysoki stopień motywacji. Potrafi zweryfikować stadium rozwoju zespołu oraz zadecydować o podjęciu kolejnych kroków we współpracy z zespołem.

Lider doskonały, czyli taki, który mógłby stać się modelowym przykładem dla dzisiejszych nowoczesnych liderów, posiada pewne cechy, na które zwrócili uwagę dwaj profesjonalni trenerzy z wieloletnim doświadczeniem **A. Leigh i M. Maynard**.

Australijski polityk,
profesor ekonomii

Światowej sławy trener wykonawczy,
pracował z wieloma osobami w celu
poprawienia ich umiejętności
przywódczych i komunikacyjnych

Tak więc doskonały lider, łączy w sobie takie cechy, jak: **wnikliwość** (czyli umiejętność komunikacji interpersonalnej), **inicjatywa, inspiracja** (przekonanie o sukcesie), **zaangażowanie** (zaproszenie do wspólnej pracy, a tym samym do osiągnięcia sukcesu), **improwizacja** (kreatywne i elastyczne działania), **indywidualizm** (pewność siebie i asertywność) oraz **orientacja na zadanie,** czyli umiejętność testowania i kontrolowania statusu zadania (J. Jóźwiak, 2013).

Lider – podobnie jak menadżer, to jednostka przywódcza, która kieruje zespołem ludzi. W odniesieniu do tego **przywództwo** należy rozumieć, jako proces komunikacyjny, który pomaga grupom organizować się w taki sposób, aby osiągać zakładane i pożądane cele (S. Morreale, B. Spitzberg, J. Barge, 2007).

5.3. Współczesny menadżer

▶ **Menedżerowie muszą być nie tylko decydentami, lecz także inspiratorami zdolnymi do motywowania ludzi".**

Lee Iacocca

W skutecznym kierowaniu zespołem kluczową rolę odgrywają sprawnie prowadzone działy personalne, a w szczególności ich **menadżerowie** (S. Witkowski, T. Listwan, 2008).

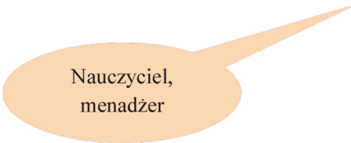
W języku angielskim *menager* oznacza administratora, dyrektora, kierownika, zarządzającego, przełożonego. Są oni zwierzchnikami konkretnego zespołu ludzkiego, a ich rola sprowadza się do „nadzorowania" procesu osiągania przez zespół założonych celów, które są stawiane przez kogoś „trzeciego", lub też sami menadżerowie uczestniczą w ich formułowaniu. Menadżerowie kierują pracą innych, udzielają wskazówek, podpowiadają, instruują i nauczają. Są odpowiedzialni za wszelkie poczynania całego zespołu.

Menadżerowie zajmują różne stanowiska. Na szczycie „piramidy" znajdują się menadżerzy najwyższego szczebla, tzw. *executives,* a więc prezesi, wiceprezesi, dyrektorzy, którzy kierują pracą innych menadżerów. Na średnim szczeblu zarządzania, działają menadżerowie, którymi są zastępcy dyrektorów lub kierowników dużych działów oraz główni inżynierowie, ekonomiści, księgowi. Podlegają oni menadżerom najwyższego szczebla. Najliczniejszą grupę stanowią menadżerowie szczebla najniższego (pierwszego) i najczęściej są nimi kierownicy działów, kierujący pracą szeregowych pracowników.

Menadżerowie realizują tzw. **funkcje zarządzania,** które w kolejności są następujące:

- **Planowanie** (wyznaczanie celu globalnego i celów szczegółowych).
- **Organizowanie** (określanie kto i co powinien robić, aby osiągnąć cel).
- **Kierowanie** (przewodzenie, inicjowanie i motywowanie do podejmowania stosownych działań).
- **Kontrolowanie** działań.

Kierujący zespołem menadżerowie mają do spełnienia również określone role, a mianowicie: **interpersonalne, informujące i decyzyjne** (wspomniane już wcześniej). Muszą wykazać się także pewnymi umiejętnościami, które **R. L. Katz** określił, jako:



- **Umiejętności techniczne** – rozumiane, jak pewna zdolność do posługiwania się narzędziami, metodami i technologią w określonej specjalności.
- **Umiejętności społeczne –** czyli umiejętność współpracy indywidualnie i z poszczególnymi grupami.
- **Umiejętności koncepcyjne –** czyli zdolność menadżera do koordynacji działań poszczególnych grup, a także integrowanie wszystkich dziedzin, które realizowane są w jego polu działania (W. Pomykało, 1995).

Polski informatyk, profesor nauk matematycznych, członek Rady Języka Polskiego i pracownik naukowy

A. Blikle określił menadżera, jako tego, który pragnie budować swój zespół według nowoczesnych zasad oraz kształtować w nim postawy otwartości, życzliwości i wzajemnej współpracy. Powinien dbać o dobrą atmosferę w zespole i powinno mu zależeć na usuwaniu źródeł niechęci, zawiści i poczucia krzywdy (A. Blikle, 2000).

Można przypuszczać, że pewne wymagania stawiane „menadżerom jutra", będą znacznie trudniejsze. Już nie tylko wyuczone, utrwalone i sprawdzone metody pracy, czy rozwinięte umiejętności, ale i nowe – wynikające chociażby ze zmiany organizacji albo wzrostu znaczenia przywódczej jego roli (J. Penc, 2005).

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Dlaczego o zarządzaniu zespołem mówi się, że jest „sztuką"?
2. Jakie funkcje spełnia praca i którą z nich uznałbyś za najważniejszą?
3. Czy lider jest bardziej szefem, czy kolegą?
4. Jakie cechy powinien posiadać „nowoczesny menadżer"?
5. Opracuj proces rekrutacji do firmy, w której jesteś menadżerem.
6. Wybierając przedsięwzięcie, nad którym chcesz pracować określ rolę poszczególnych członków zespołu i ich zadania.

5.4. Praca w zespole

W zarządzaniu zespołem ważna jest praca zespołowa, która stanowi podstawową, a zarazem wyższą formę organizacji pracy. Polega na powierzeniu określonej grupie pracowników czynności lub operacji wydzielonych z procesów pracy[6]. Efektywność pracy zespołowej zależy w dużej mierze od lidera, jego umiejętności budowania zespołu oraz kierowania nim. Dobrze dobrany zespół, uzupełniające się kompetencje członków oraz odpowiedni podział zadań powodują tzw. **efekt synergii**[7].

Do zapamiętania

Efekt synergii – to zasada, którą można potocznie zapisać jako '2+2=5' czyli uzyskanie zwielokrotnionych korzyści dzięki umiejętnemu połączeniu części składowych całości

6. www:pl.wikipedia.org, 15.03.2013.
7. www:mfiles.pl, 15.03.2013.

Każda grupa aby właściwie funkcjonować musi być zintegrowana. Integracja może mieć charakter kulturowy lub normatywny. Aby grupa funkcjonowała właściwie powinna istnieć między nimi właściwa komunikacja. Skuteczność pracy zespołu jest największa, gdy między zachowaniami zadaniowymi i zespołowymi zachodzi czy istnieje właściwa proporcja a zachowania indywidualne są ograniczone do minimum

Etapy rozwoju zespołu:

1. **etap formowania** - dominuje niepokój, poznawanie się członków zespołu, zależność od przywódcy zespołu, testowanie zadania;
2. **etap ścierania się** - dominuje atmosfera konfliktu, rodzi się emocjonalny opór wobec lidera, wobec stawianych zadań, metod, konflikt wobec wszystkiego;
3. **etap normowania się** - daje możliwość kształtowania, spójności grupy, norm i zasad współżycia, współdziałania, choć ciągle jeszcze na tym etapie występuje otwarta; i dynamiczna wymiana poglądów, wyodrębnia się tożsamość grupy, wsparcie;
4. **działanie** - wszystkiego rodzaju problemy interpersonalne zostały rozwiązane, cele i zadania zostały zaakceptowane, zespół podejmuje działanie.
5. **rozwiązanie zespołu –** etap ten występuję tylko wtedy, gdy zespół on powołany do konkretnego zadania

Zalety pracy zespołowej:

1. działanie pracy zespołowej pozwala uzyskiwać lepsze rezultaty niż praca jednostek (synergiczny efekt działania zespołowego);
2. podniesienie wydajności pracy;
3. stworzenie warunków do wykorzystania indywidualnych umiejętności w interesie zespołu;
4. wykonywanie przez członka zespołu tego co jest dla niego odpowiednie, dzięki temu wzrasta zadowolenie z pracy;
5. zmniejsza się poczucie zależności od przełożonego;
6. wzmocnienie więzi pomiędzy poszczególnymi członkami zespołu (integracja), grupa staje się całością;
7. uaktywnienie procesu wzajemnej kontroli i samokontroli.

Wady pracy zespołowej:

1. może prowadzić do konformizmu;
2. może pojawić się w zespole lider - samozwaniec wymuszający na członkach grupy przyjęcie postaw negatywnych;
3. zmusza do częściowej rezygnacji z własnych ambicji na rzecz norm i wartości funkcjonujących w zespole;
4. zespół potrzebuje więcej czasu na podjęcie decyzji lub rozwiązanie danego problemu niż indywidualny pracownik.

Aby grupa mogła sprawnie funkcjonować musi posiadać **lidera**, czyli osobę która przejmie przywództwo i będzie kierowała praca. By dobrze kierować grupą lider powinien wyróżniać się wieloma istotnymi cechami.

Menedżer sprawujący pieczę nad ludźmi ma obowiązek cenić ich, za to kim są; wierzyć, że chcą dać z siebie wszystko; chwalić ich osiągnięcia i jako ich przywódca zgadzać się ponosić za nich odpowiedzialność. Najważniejszym zadaniem menedżera jest pozyskiwanie i utrzymywanie przy sobie wartościowych ludzi. Ludzie, jeśli mają przywódcę, który dostrzega ich wartości, mogą się rozwijać, doskonalić i zwiększać swą efektywność. Osoba która chce odnosić sukcesy jako lider, musi wychować innych liderów. Stworzyć zespół. Skala sukcesu lidera zależy od ludzi z jego najbliższego otoczenia, dlatego zadaniem lidera jest znaleźć najlepszych ludzi, by następnie uczynić z nich najlepszych przywódców, jakimi potrafią być. Bez sukcesorów nie ma sukcesu[8].

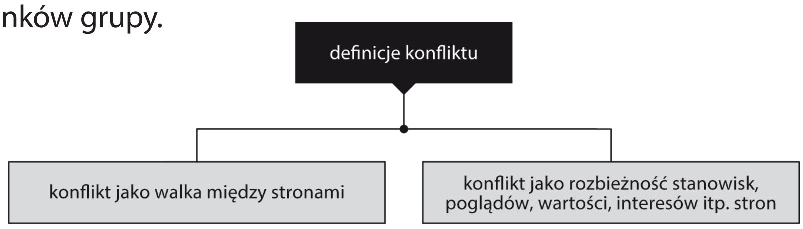
W każdej grupie możemy wyodrębnić pewne charakterystyczne **role grupowe**[9]:

- błazna,
- kozła ofiarnego (syndrom ofiary , w grupie spełnia rolę „bezpiecznika", „zaworu bezpieczeństwa"),
- lidera zadaniowego,
- lidera sympatii,

8. www.biurocentrum.pl/?strona=toptemat&action=pokaz&id=2799 (20-04-2013)
9. por. K. Kalin, P. Muri, *Kierować sobą i innymi*, Kraków 1996

- dziecka grupowego,
- autsajdera,
- adwokata diabła (ciągła opozycja do grupy),
- komentatora,
- sumienia grupy.

W każdej grupie dochodzi do konfliktów. Zadaniem lidera grupy jest umiejętność zapobiegania konfliktom, a jeżeli już powstaną, to ich rozwiązywanie. Konflikt to sprzeczność interesów lub poglądów na dany temat członków grupy.



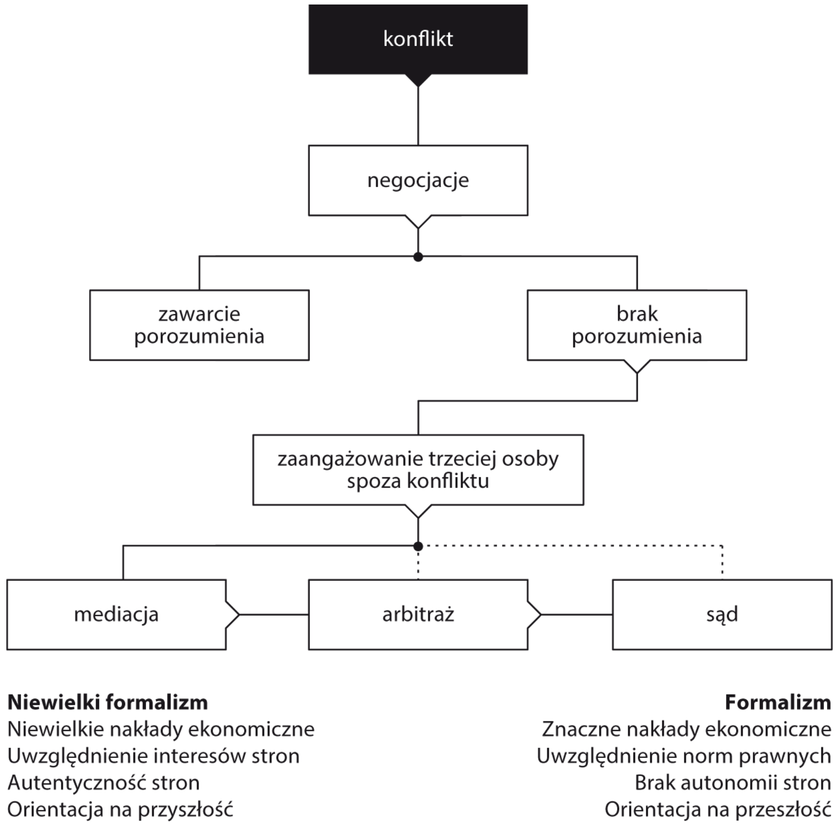
Schemat 1. Podział definicji konfliktu według kryterium przedmiotu

Źródło: A. Lewicka-Zelent, Uwarunkowania gotowości nieletnich do zadośćuczynienia w paradygmacie sprawiedliwości naprawczej, Lublin 2013, s. 70

Przyczyny powstawania konfliktów w zespole[10]:

1. Współzależność pracy w zespole:
    - różnice kompetencji poszczególnych członków zespołu,
    - różnice zadań w kwestiach istotnych dla zespołu,
    - ograniczenie możliwości zaspokojenia wszystkich oczekiwań np. co do pracy, urlopów, premii czy podwyżek,
    - poczucie niesprawiedliwości związane z zasadami rozdziału obowiązków i nagród,
2. Zła komunikacja:
    - utrudnienia w przepływie informacji,
    - niejasne polecenia,
    - brak okazji do wyjaśnienia wątpliwości,
    - nieefektywne zebrania zespołu,
3. Brak wzmocnień pozytywnych:
    - stałe podnoszenie wymagań bez doceniania sukcesów,
    - znacząca przewaga krytyki nad uznaniem,
    - brak wsparcia w sytuacji zmian i kryzysów,
4. Przewaga rywalizacji nad współpracą:
    - akceptowanie podziału na lepszych i gorszych,
    - siłowe rozwiązywanie konfliktów,
    - brak szacunku dla różnych opinii i interesów.

10. http://www.pino.pl/article-view/id,755614,type,1,t,przyczyny-powstawania-konfliktow-i-sposoby-ich-rozwiazywania-w-zespole (09.05.2013)



Schemat 2. Pożądana kolejność stosowania metod dochodzenia do porozumienia

Źródło: A. Lewicka-Zelent w oparciu o: Blankerburg E., Gottwald W., Strempel D.(red.), 1982, Alternativen in der Zivilijustiz, Köln, s. 292.

Wskazane metody rozwiązywania konfliktów (mediacje, negocjacje, arbitraż, sąd) wzajemnie uzupełniają się. Ze względu na pewne ich atrybuty, kolejność ich wykorzystywania w sytuacji zaistnienia konfliktu nie powinna być przypadkowa, ale oparta na pogłębionej analizie ich zalet i wad.

Konflikt może być źródłem korzystnych zmian dla zespołu, ponieważ podnosi motywację i zaangażowanie do pracy. Ważne jest aby lider efektywnie pokierował konfliktem.

5.5. Etyka biznesu

Etyczne implikacje funkcjonowania przedsiębiorstw

Działalność człowieka we wszystkich jego przejawach można w zależności od przyjętego punktu widzenia rozpatrywać, jako działalność *dobrą* lub *złą*. Nadawanie sensu swoim działaniom i określanie ich, jako *dobre* lub jako *złe* nazywanym moralnością. **Moralność** jest pewnym zjawiskiem społecznym, które można określić, jako „…zbiór przekonań na temat dobra i zła, które żywi dana grupa lub jednostka względem ludzkich działań" (B. Przybył, J. Swianiewicz 2002). W tym ujęciu moralność jest pojęciem zakresowo różnym od etyki, która jest wypracowanym systemem osądów moralnych, opartym na określonej teorii dobra i zła. Moralność jest pojęciem pierwotnym w stosunku do etyki, która czerpie z moralności swoje refleksje i inspiracje. Współczesna **etyka to najogólniej rzecz ujmując teoria moralności, chociaż niekiedy oznacza również zespół norm i ocen moralnych charakterystycznych dla danego społeczeństwa lub grupy społecznej** (M. Godziek, 2005).

Obszarem rozważań etyki jest wiele zjawisk, a w szczególności pytanie o naturę dobra i zła. Cel tych rozważań jest dwojaki: ocenienie postępowania człowieka oraz odwołanie się do standardów moralnych (a co za tym idzie poszukiwanie skutecznych zasad postępowania moralnego w określonych sytuacjach). Do kluczowych pojęć stosowanych przez naukę o moralności zaliczamy (B. Przybył, J. Swianiewicz 2002):

- **prawa -** uprawnienie do określonych działań,
- **obowiązki** –zobowiązanie do podejmowania określonych działań lub posłuszeństwo wobec przepisów prawnych,
- **normy moralne** – przyjęte, uniwersalne zasady zachowania, respektowane przez członków danej społeczności, często związane są z obowiązującym systemem religijnym (prawdomówność, szacunek dla innych ludzi, szczególnie starszych, troska o najbliższych, odpowiednie zachowanie w szkole, na ulicy, w urzędzie),
- **normy postępowania** - dopuszczone przez prawo zakres działań w danej społeczności,
- **normy prawne** - reguły zachowania, skonstruowane na podstawie przepisów prawa (obowiązek płacenia podatków, kodeksy, np. ruchu drogowego, postępowania administracyjnego, prawa i obowiązki ucznia),
- **sankcja moralna** – niekoniecznie zamierzona przez człowieka nagroda lub kara za czyn (kara za czyn niemoralny/haniebny, nagroda za czyn dobry),
- **obiektywizm moralny** – stanowisko głoszące, że wartości i normy moralne istnieją niezależnie od odbierającego je podmiotu,
- **subiektywizm moralny** – stanowisko, które uzależnia znaczenie sądów etycznych od indywidualnych emocji i gustów lub od społecznych warunków panujących a danej społeczności i w określonym czasie.

Za początek etyki biznesu uznaje się rok 1745, kiedy została wydana encyklika *Vixpervenit* dotycząca lichwy (Benedykt XIV, 1745). Przez wiele lat ten dział etyki rozwijał się, a w obecnym rozumieniu tego terminu - etykę w biznesie/ etyka biznesu cechują go dwie podstawowe tendencje. Pierwsza to rozszerzanie się etyki na różne dziedziny biznesu, takie jak: reklama i marketing, negocjacje, akwizycja czy sprzedaż obwoźna, proces rekrutacji personelu, ocenianie przedsiębiorstwa, pracowników i in. Drugą tendencją jest dostrzeżenie zjawiska długotrwałych korzyści organizacji (zysk) złączonych z etycznym image. Stopniowo biznes staje się działalnością uzależnioną od społecznej akceptacji. Pojawiają się sformułowania: „przyjazny biznes", „wspólnota w biznesie",„etyczne postępowanie przedsiębiorstwa", „kultura etyczna" czy „etyka po prostu się opłaca". Powszechne staje się podejście uznające, że wartości etyczne nie są barierą dla rozwoju ekonomicznego, ale są fundamentem, bez którego nie może istnieć gospodarka wolnorynkowa.

Moralność jest zależna od społeczeństwa, jakie ją realizuje, jest bardzo zmienna i zależy od wielu czynników ekonomiczno-społecznych i psychologiczno-społecznych. Przyczyną rozchwiania moralności może być np.: transformacja ustrojowa i gospodarcza (zarzucenie starych wartości, niejasność nowych, relatywizm moralny), historia (liberum veto, zabory, komunizm), przenikanie gospodarki i polityki (brak wzorców), nadużywanie prawa (luki, opieszałość egzekwowania), trudności ekonomiczne (braki kapitału by sprostał konkurencji międzynarodowej, obniżanie standardów przez firmy zagraniczne by konkurować w warunkach lokalnych), brak lobby konsumentów, brak promowania wartości.

Etyczne aspekty relacji przedsiębiorstwo-konsument

Zaufanie stanowi zasadniczą jakość zdrowych relacji pomiędzy ludźmi – odnosi się to również do relacji klient – przedsiębiorstwo. Przedsiębiorstwa muszą zdobywać zaufanie poprzez swoje postępowanie, musi zyskać na rynku wiarygodność. Wiarygodność to zespół czterech przenikających się i nieredukowalnych cech: **prawość, uczciwość, dotrzymywanie obietnic, lojalność**.

Na gruncie tychże relacji pojawia się wiele problemów i trudności o charakterze etycznym i moralnym. Za najważniejsze zobowiązania przedsiębiorców wobec konsumentów uznać można:

- **uczciwe postępowanie** – przedsiębiorstwo przestrzega reguł zasad rynkowych bez oszukiwania, bez uchylania się od obowiązków, bądź innych form nieczystego postępowania,
- **uczciwą konkurencję** – przedsiębiorstwo powinno przestrzeganie praw (w szczególny sposób praw antymonopolowych i prawa o ochronie konkurencji) a pracownikom nie wolno angażować się w działania ograniczające konkurencję, naruszające prawa antymonopolowe lub prawo o ochronie konkurencji. Pracownicy i współpracownicy oraz właściciele zakładów nie mogą w sposób nieuczciwy wykorzystywać klientów, dostawców, konkurentów ani innych osób (manipulację, ukrywanie informacji, błędne przedstawianie faktów). Przedsiębiorstwo powinno traktować klientów w sposób

jednakowy. Wiarygodne przedsiębiorstwo działa wyłącznie w zalegalizowanych stowarzyszeniach, celach biznesowych, naukowych lub branżowych,

- **uczciwą reklamę** – przedsiębiorstwo zobowiązane jest do zapewnienia zgodności działań reklamowych i promocyjnych z obowiązującym prawem. Prezentacje produktów i ich porównania musza być przedstawione w sposób uczciwy, całościowy, autentyczny i zgodny z prawdą, tak by dostarczyć odbiorcy możliwie pełnej wiedzy o produkcie, co umożliwić odbiorcy przekazu (reklamy, prezentacji, itp.) wyrobienie sobie własnej, obiektywnej opinii o wartości użytkowej produktu lub usługi.

Czego nie wolno stosować w reklamie

Nakłaniać do rozwijania uzależnień, kłamać, atakować wprost inne towary lub usługi, naruszać dobre obyczaje, naruszać godność człowieka pod każdym względem, nakłaniać do przemocy, dyskryminować, wywoływać szkód w środowisku naturalnym.

Przedsiębiorca zobowiązany jest do przestrzegania następujących zasad etycznych:

- **dotrzymywać zobowiązań,**
- **zachować tajemnicę handlową i zasadę poufności** – podczas działań przedsiębiorstwa wszystkie informacje poufne pozyskane o klientach, współpracownikach lub konkurencji powinny być objęte tajemnicą a ich wykorzystanie powinno ograniczać się wyłącznie do działań przedsiębiorstwa bezpośrednio skierowanych do tychże podmiotów,
- **przestrzegać praw konsumenta.**

Czarny PR

Działania nazywane potocznie w Polsce „czarnym PR" to planowe działania osób (nazywanych stroną pierwszą) pracujących na zlecenie instytucji/osoby (nazywanych stroną drugą), działających w złej wierze, z chęci wprowadzenia opinii publicznej w błąd albo zdyskredytowania opinii – czy to poprzez emitowanie za pomocą mediów lub innych grup opiniotwórczych nierzetelnych bądź kłamliwych informacji o stronie trzeciej lub poprzez różnorodne, naganne działania mające na celu albo odwrócenie uwagi albo powzięcie fałszywego przekonania przez dziennikarzy, opinie publiczną i zainteresowanie grupy, dotyczących strony drugiej. Działania takie z istoty swojej nie mają nic wspólnego z public relations (za: J. Kubek, 2005, s 57).

Nad bezpieczeństwem konsumenta oraz przestrzeganiem jego praw czuwa wiele organów (między innymi Urząd Ochrony Konkurencji Konsumentów, Federacja Konsumentów, Rzecznik Praw Konsumenta), istnieje też szereg uregulowań w polskim i unijnym prawodawstwie. W Polsce ochrona praw konsumentów zapisana jest w Konstytucji RP w artykule 76: *Władze publiczne chronią konsumentów, użytkowników i najemców przed działaniami zagrażającymi ich zdrowiu, prywatności i bezpieczeństwu oraz przed nieuczciwymi praktykami rynkowymi. Zakres tej ochrony określa ustawa*. Uregulowania prawne oraz właściwe organy nadzorcze mają za zadanie ochronę zbiorowych interesów konsumentów poprzez przeciwdziałanie nieuczciwym praktykom rynkowym oraz zwalczaniem niedozwolonych postanowień umownych. Do podstawowych praw konsumenta zaliczyć można: prawo do zwrotu zakupionego towaru, gwarancje, reklamacje, prawo do rzetelnej informacji o produkcie.

Decyzja konsumenta o zakupie danego produktu lub wybrania tej a nie innej usługi jest odpyskowana pewnymi psychologicznymi czynnikami, wśród których za najważniejszy uznać można faktyczną potrzebę posiadania danego produktu/usługi. Na wybór konsumenta składa się kilka elementów: cena towaru, jego jakość, jego marka, jego przydatność, możliwość wykorzystania, renoma firmy, wcześniejsze pozytywne doświadczenia zakupu tego typu produktu/usługi, perswazyjna reklama, naciski ze strony innych osób (np. dzieci), prestiż posiadania danego produktu/usługi, chęć posiadania. Wyznacznikiem zadowolenia klienta jest fakt, że zakupiony produkt/usługa odpowiada potrzebom, które leżały u podstaw decyzji o zakupie, stąd duża rola przedsiębiorstwa w rzetelnym informowaniu i cechach produktu/usługi. Rzetelność ta związana jest również z innymi działaniami o których mowa była powyżej – dotrzymywanie zobowiązań i przestrzeganie praw konsumenta.

Zagrożenia wynikające z nieprzestrzegania zasad etyki w relacjach biznesowych:

- osłabienie lub utrata dobrych relacji z klientami,
- utrata wiarygodności i zaufania klientów,
- nadszarpnięcie lub utrata reputacji,
- utrudnienie w realizacji ważnych celów między innymi poprzez brak zaufania i niewiarygodność przedsiębiorstwa.

Etyczne aspekty relacji przedsiębiorca państwo

Oferowanie korzyści to jeden z przejawów **korupcji**, czyli zachowań lub sytuacji społecznych, w których doszło do naruszenia systemu wartości, akceptowanego przez dane społeczeństwo (np. złamania zasady uczciwości, rzetelności, praworządności). Zgodnie z ustawą o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym**korupcja** to czyn polegający na obiecywaniu, proponowaniu, wręczaniu, żądaniu, przyjmowaniu przez jakąkolwiek osobę, bezpośrednio lub pośrednio, jakiejkolwiek nienależnej korzyści majątkowej, osobistej lub innej, dla niej samej lub jakiejkolwiek innej osoby. Korupcją jest również przyjmowanie propozycji lub obietnicy takich korzyści w zamian za działanie lub zaniechanie działania w wykonywaniu funkcji publicznej lub w toku działalności gospodarczej.

Aby uznać dane działanie za korupcję muszą spełnione być następujące warunki: wzajemna umowa stron („dający", „otrzymujący") oraz konkretne korzyści wynikające z tej transakcji. Do najczęstszych spotykanych form korupcji zaliczamy:

- przekupstwo (łapownictwo),
- protekcję, kumoterstwo oraz nepotyzm (czyli obsadzanie stanowisk publicznych członkami własnej rodziny),
- świadome, niezgodne z prawem dysponowanie środkami z budżetu państwa lub majątkiem, będącym dobrem publicznym,
- stronniczość w przyznawaniu uprawnień (np. przyznawanie koncesji),
- nieuczciwe rozstrzyganie kontraktów, zamówień publicznych, przetargów,
- uchylanie się przez osobę publiczną od płacenia zobowiązań wynikających z przepisów,
- kradzież dobra publicznego,
- defraudację, czyli wykorzystywanie publicznych pieniędzy lub majątku publicznego do własnych korzyści.

Ze zjawiskiem korupcji możemy spotkać się w różnych sferach życia publicznego:

- **korupcja polityczna** – na pograniczu polityki i biznesu. W zamian za poparcie konkretnego przedsiębiorstwa urzędnik państwowy jest „nagradzany" w jakiejś formie finansowej bądź niefinansowej (stanowisko pracy),
- **korupcja legislacyjna-** wpływanie na kształt ustawodawstwa prowadzące do tego, że parlamentarzysta otrzymuje dodatkowe dobra od osób zainteresowanych konkretnym brzmieniem ustawy, rozporządzenia,
- **korupcja gospodarcza** –zapewnienie przychylnych decyzje urzędników za pomocą przekupstwa,
- **korupcja administracyjna** – ta forma występuje w różnych działach administracji publicznej – oświacie, służbie zdrowia, opiece społecznej.

Innym zjawiskiem o nieetycznym wymiarze w zakresie relacji przedsiębiorstwo – Państwo są oszustwa podatkowe.

Oszustwo podatkowe - polega na wprowadzeniu w błąd organu podatkowego przez niezgodne z rzeczywistością przedstawienie lub zatajenie okoliczności mających wpływ na wysokość podatku. Oszustwa podatkowe mogą przybierać różne formy takie jak np. podrabianie towarów akcyzowych (alkohol i wyroby tytoniowe), wprowadzanie do obrotu paliw z zaniżoną akcyzą Zdecydowanie najpowszechniejsze są oszustwa podatkowe związane z zatrudnieniem pracowników (pracownicy tzw. szarej strefy), zaś kolejną istotną grupę stanowią oszustwa związane z ukrywaniem obrotu i/lub dochodu. Przestępstwa takie są przedmiotem zainteresowania organów ścigania i służb specjalnych.

Przykładem nieetycznego zachowania przedsiębiorstwa wobec Państwa jest działanie nazywane **kreatywną rachunkowością** (księgowością), które polega na innowacyjności w sposobach liczenia wartości prezentowanych w sprawozdaniach finansowych mieszczące się na granicy obowiązującego prawa lub wykraczające poza prawo. (Gabrusewicz). Jako przykłady kreatywnej rachunkowości wskazać można: ukrywanie zysku lub straty, ukrycie ryzyka finansowego, manipulowanie podstawowymi wskaźnikami.

Aby mówić o popełnieniu przestępstwa w postaci oszustwa podatkowego koniecznych jest zaistnienie kilka warunków następujące warunki:

- niezgodny ze stanem faktycznym sposób przedstawienia faktów,
- istotne znaczenie tego czynu,
- ukryty cel,
- brak jawności działania,
- działanie ze świadomym zamiar oszukania,
- strona poszkodowana podjęła jakieś działanie na podstawie fałszywych informacji (na podstawie błędnych danych jedna ze stron wyciągnęła nieprawdziwe wnioski).

Przestrzeganie norm prawnych obyczajowych i etycznych jest dla przedsiębiorstwa podstawą do osiągnięcia trwałego pozytywnego wizerunku i odbioru w swoich kontrahentów i współpracowników. Coraz częściej podejmowane są publiczne dyskusje wskazujące na ogromną rolę etyki w kontaktach i relacjach biznesowych. Możliwe, że w pierwszym odbiorze korzyści dla przedsiębiorstwa działającego etycznie nie są wyraźne i często na ich skutek należy poczekać kilka lat, jednak konsekwencją braku norm etycznych lub ich niewłaściwego stosowania są już o wiele lepiej widoczne – wprost mierzalne stratami finansowymi.

Do konsekwencji nieetycznych zachowań należą między innymi:

- utrata zaufania społecznego, w tym własnych pracowników,
- procesy sądowe z udziałem przedsiębiorstw i pracowników,
- utrata miejsc pracy,
- długoterminowe szkody lokalne: bezrobocie,
- utrata reputacji.

Aby można było mówić o etycznym podejściu do biznesu i prowadzenia działalności gospodarczej konieczne jest przyjęcie stanowiska, że maksymalizacja zysku nie jest najważniejszym celem biznesu, mimo iż zysk jest jego warunkiem koniecznym. Relacje zachodzące pomiędzy: przedsiębiorcą a pracownikami przedsiębiorstwa, przedsiębiorcą a klientem, przedsiębiorcą a państwem oraz przedsiębiorcą a społeczeństwem mają charakter etyczny i mimo, że można rozpatrywać je oddzielnie, nie należy jednak zapominać, że są one ze sobą powiązane i od siebie zależne.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Wymień wartości, którymi kieruje się etyka w biznesie.
2. Wyjaśnij pojęcie mobbingu w odniesieniu do relacji w przedsiębiorstwie.
3. Opisz rolę zjawisk politycznych i ich wpływ na zachowania konsumenckie.
4. Znając predykatory zachowań konsumenckich określa jakie czynniki psychologiczne i społeczno-kulturowe kształtują zachowania konsumentów.
5. Zaprojektuj, zgodnie z zasadami etycznymi, działania marketingowe promujące wybrany produkt.
6. Przeanalizuj zachowania wybranego przedsiębiorstwa pod względem etycznym.
7. Wyjaśnij, na czym polega odpowiedzialność etyczna przedsiębiorcy wobec innych podmiotów.
8. Wiedząc, czego nie wolno stosować w reklamie, zaprojektuj i przeprowadź etyczne działania marketingowe.
9. Zaprojektuj kodeks etyczny, jaki będzie obowiązywał w grupie.

Bibliografia:

Baggini J., Fost., *Przybornik etyka*, Warszawa 2012.

Blikle A., *Doktryna jakości*, „PC Kurier", 2000, nr 8.

Ciupak-Zarzycja M., RzaczkowskaE.,Kowalska M., Kozioł M., Majewska K., Sroka R., Syczewska B., Majdrowicza M., Tycner P., Tyczkowska-Kochańska K., *Firma = etyka, Przedsiębiorcy, dostawcy, społeczeństwo*, Warszawa 2009.

Czaplewski W., *Filozofia z przyległościami*, Bydgoszcz 2000.

Godziek M., *Etyka Przedsiębiorczości*, Chorzów 2005.

Kubek, J., *Z zagadnień filozofii zarządzania i etyki biznesu*. Gdańsk 2005.

Kunzmnn P., Burkard F., Wiedmann F., *Atlas filozofii*, Warszawa 1999.

Lipman M., Sharp A., Oscanyan F., *Filozofia w szkole*, Warszawa 2008.

Morreale S., Spitzberg B., Barge J., *Komunikacja między ludźmi*, Warszawa 2007.

Okoń W., *Nowy słownik pedagogiczny*, Warszawa 2001.

Penc J., *Sztuka skutecznego zarządzania*, Karków 2005.

Piasecki B., *Ekonomika i zarządzanie małą firmą*, Warszawa-Łódź, 1998.

Pomykało W., *Encyklopedia biznesu Tom I i II,* Warszawa 1995

Przybył B., Swianiewicz J., *Krytyczne myślenie, Edukacja filozoficzna*, Kielce 2002.

Szczepanik R., *17 nieśmiertelnych błędów szefa*, Gliwice 2010.

Witkowski S., Listwa T., *Kompetencje a sukces zarządzania organizacją*, Warszawa 2008.

Wojtsiak J. *Pochwała ciekawości*, Kraków 2003.

Netografia:

Gabrusewicz T, *Współczesne teorie rachunkowości*, http://www.gabrusewicz.pl/uploads/wspolczesna_teoria_rachunkowosci.pdf, 29.04.2013

Cwalina W., Sobek J., *Psychologia organizacji i zarządzania – przywództwo, konflikty, negocjacje, motywacja do pracy, systemy zarządzania,* http://nop.ciop.pl/m5-2/m5-2_1.htm, 21.03.2013.

Jóźwiak J., *Lider zespołu – nowoczesny model kierowania grupą społeczną,* http://www.alfabetsukcesu.pl/komunikacja/przywodztwo/lider-zespolu-nowoczesny-model-kierowania-grupa-spoleczna, 20.03.2013.

Pacuła P., *Headhunting: daj się złapać łowcy głów*, http://menstream.pl/wiadomosci-kariera/headhunting-daj-sie-zlapac-lowcy-glow,0,649763.html 09.05.2013.

Proces rekrutacji – etapy, http://weblog.infopraca.pl/2011/05/proces-rekrutacji-etapy/. 20.03.2013.

Rzycka O., *Jakie są pożądane cechy lidera?* http://manager.wieszjak.pl/przywodztwo-w-zespole/253397,2,Jakie-sa-pozadane-cechy-lidera.html, 20.03.2013.

Wiszniewska M., *Istota i zasady organizacji pracy. Scenariusz lekcji z przedmiotu Ekonomika i organizacja przedsiębiorstw,* http://www.edukacja.edux.pl/p-2179-istota-i-zasady-organizacji-pracy-scenariusz.php, 20.03.2013.

http://kariera.infopraca.pl/2011/06/headhunter-%E2%80%93-kto-to-taki/ 09.05.2013

http://pl.wikipedia.org/wiki/Headhunter 09.05.2013

Akty prawne:

Ustawa z dnia 9 czerwca 2006 r. o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym (Dz. U. Nr 104, poz. 708, ze zm.)

Przydatne strony:

www.uokik.gov.pl, www.federacja-konsumentow.org.pl

6. Realizowanie i kontrola działalności

6.1. Efektywność przedsięwzięcia

Budowanie sukcesu firmy jest trudnym i długotrwałym procesem, na który składają się z jednej strony wysiłki przedsiębiorcy, a z drugiej wewnętrzne i zewnętrzne czynniki powodzenia (niepowodzenia). Wszystkie są bardzo zróżnicowane, co wynika z odrębnościi indywidualnego charakteru każdego przedsiębiorstwa, odmienności rynku, na którym działa, specyficznych cech i potrzeb klientów oraz posiadanego przez przedsiębiorstwo potencjałów, pozwalającego je w pełni satysfakcjonować.

Uważa się, że zasadniczy wpływ na sukces firmy mają przedsiębiorcy wykorzystujący niedostrzegane przez innych szanse rynkowe i mobilizujący niedostępne dla innych zasoby. Wskazuje się przy tym na charakterystyczne cechy, takie jak (J. Targalski, A. Francik 2009):

- pewność siebie, wiara w sukces i przekonanie o możliwości jego osiągnięcia;
- wytrwałe dążenie do celu, ponawianie prób pomimo niepowodzeń, uczenie się na błędach;
- zdolności innowacyjne, niekoniecznie wynalazcze, ale pozwalające dostrzegać może możliwości, odkrywać nisze rynkowe, wprowadzać zmiany;
- zorientowanie na wyniki, na osiągnięcie sukcesu (powodzenia);
- skłonność do podejmowania skalkulowanego ryzyka;
- gotowość do poświęcenia czasu i umiejętności dla jednego przedsięwzięcia.

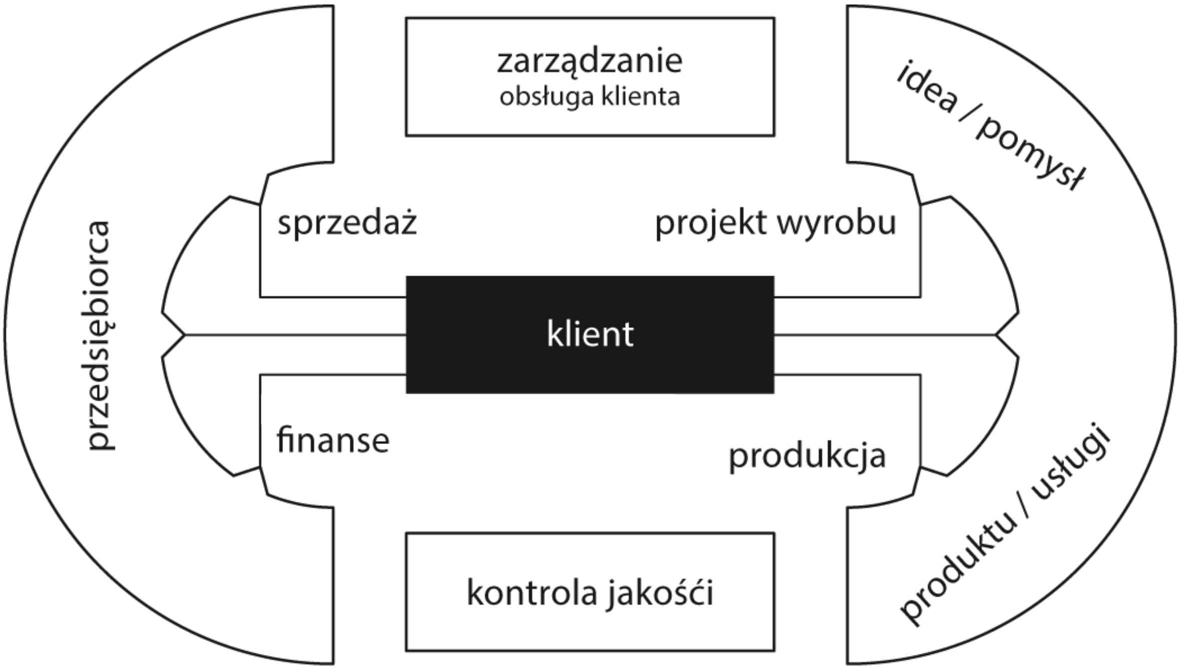
Obok cech osobowych równie ważna jest **profesjonalizacja zarządzania**. Proces zarządzania musi ulegać zmianie.

W miarę postępowania rozwoju firmy, stabilizacji rynkowej, większego doświadczenia i lepszej znajomości konkurencji rośnie jego rola i znaczenie. Tak ważna na początku idea produktu / usługi ustępuje miejsca idei profesjonalnego zarządzania. Firma wymaga coraz bardziej systematycznego planowania i skutecznych mechanizmów kontroli. Coraz bardziej złożony organizm firmy wymaga nowych, adekwatnych do poziomu rozwoju rozwiązań organizacyjno-prawnych.

Decyzje muszą być podejmowane coraz rozważniej i uwzględniać zarówno potencjał wewnętrzny, jak i zewnętrzne uwarunkowania zmiennego otoczenia. Przede wszystkim przedsiębiorca, który chce osiągnąć sukces, musi w procesie zarządzania skupić uwagę na kliencie i tych czynnikach, które mają wpływ na jego zadowolenie.

Do takich czynników zalicza się (J. Targalski, A. Francik 2009):

- projekt wyboru;
- sposób i jakość jego produkcji;
- finansowanie;
- sprzedaż;
- obsługę klienta.



Rysunek 6. Czynniki sukcesu przedsiębiorstwa

Źródło: J. Targalski, A. Francik (red. nauk.), Przedsiębiorczość i zarządzanie firmą. Teoria i praktyka, Warszawa 2009, s. 208.

Dzięki skupieniu uwagi na tych czynnikach oraz wykorzystaniu zasobów przedsiębiorstwa pierwotny pomysł na biznes można przeistoczyć w sukces. Zwłaszcza jeśli klient otrzyma właściwy produkt, o właściwej jakości i cenie, we właściwym miejscu i czasie.

Niekiedy te same czynniki, które są uznawane za sprzyjające powodzeniu, mogą wpływać na niepowodzenie firmy, np.:

- nietrafnie wybrany moment rozpoczęcia działalności;
- wadliwy produkt zaoferowany w niewłaściwym miejscu, po zbyt wysokiej lub zbyt niskiej cenie i bez potrzebnej mu promocji.

W większości przypadków przyczyny niepowodzenia firmy to będzie decyzja w kilku kluczowych obszarach, do których należą (J. Targalski, A. Francik 2009):

1. wybór rodzaju działalności i docelowego rynku;
2. lokalizacja działalności lub punktów sprzedaży;
3. dobór i zatrudnienie pracowników;
4. zarządzanie operacyjne i strategiczne.

Według badań przeprowadzonych na dużej grupie przedsiębiorstw wskazuje się na trzy główne grupy czynników powodzenia (J. Targalski, A. Francik 2009):

Do grupy pierwszej można zaliczyć takie czynniki jak:

- złe planowanie startu, a zwłaszcza przedwczesne wejście na rynek;
- wadliwy, nieudany lub nietrafny wybór wyrobu;
- niewłaściwie dobrana siec lub strategia dystrybucji;
- niejasne zdefiniowanie misji przedsiębiorstwa, powodujące ciągłe zmiany jego profilu i brak stabilizacji;
- poleganie tylko na jednym odbiorcy.

Do drugiej grupy czynników należą czynniki finansowe:

- zbyt mały kapitał początkowy;
- zbyt szybkie i zbyt duże zadłużenie przedsiębiorstwa;

- złe relacje pomiędzy przedsiębiorcą a inwestorem strategicznym (różne cele, odmienna wizja biznesu, odmienne motywacje po obu stronach).

Trzecią grupę stanowią ogólne problemy zarządzania, w szczególności problemy zespołu zarządzającego i zasobów ludzkich. System selekcji zatrudnienia i awansowania,a także system zwalniania pracowników, oraz relacje interpersonalne między pracownikami wbrew pozorom nie są tylko sprawą wewnętrzną, mogą również przyciągać klientów lub przeciwnie – spowodować całkowitą ich utratę.

Odporność na niepowodzenia można powiększyć, dbają o dobrą znajomość rynku, sektora i branży, gromadząc wiedzę i doświadczenie, nadając przedsiębiorstwu jednoczesny profil zaspokajanych potrzeb, z wykorzystaniem zarówno wewnętrznego potencjału, jak też zewnętrznych uwarunkowań makroekonomicznych.

Ryzyko niepowodzenia można ograniczyć, zwracając uwagę na:

- rolę zyskowności i przepływów pieniężnych;
- rolę zadłużenia;
- dostosowanie rozmiarów przedsiębiorstwa do wielkości kapitału początkowego i rozmiarów finansowania kredytem;
- szybkość zwrotu kapitału;
- znaczenie monitorowania wskaźników finansowych.

Istotne z punktu widzenia sukcesu przedsiębiorstwa jest właściwe stosowanie instrumentów promocyjnych.

Instrumenty promocji pełnią dwie zasadnicze **funkcje** (L. Kuczewska, 2004):

- informacyjną, ponieważ umożliwiają komunikowania się przedsiębiorstwa z rynkiem;
- wspierania procesów sprzedaży – zwiększają intensywność oddziaływania przedsiębiorstwa na rynek.

Istnieje wiele możliwości dotarcia do klienta, ale wybór metody zależy od możliwości finansowych oraz od charakteru prowadzonej działalności.

Promocja to zespół instrumentów za pomocą których przedsiębiorca komunikuje się z rynkiem, oraz wspiera sprzedaż swoich produktów. Promocja obejmuje zespół elementów o zróżnicowanej funkcji. Łącznie tworzą one kompozycję, na którą składa się promocja-mix:

- Reklama;
- Promocja dodatkowa;
- Public relations (PR);
- Aktywizacja (sprzedaż osobista);
- Marketing bezpośredni.

Reklama jest masową, odpłatną i bezosobową formą przedstawiania i popierania produktów, usług lub idei przez określonego nadawcę (L. Kuczewska, 2004):

Funkcje reklamy:

- **informacyjna** – polegająca na informowaniu klienta o usługach oraz korzyściach, jakie otrzymuje, kupując tę reklamę;
- **przypominająca** – przypomina się klientom o produktach i marce firmy z nastawieniem na zdobywanie ich wierności i lojalności;
- **zachęcająca i nakłaniająca** – ma na celu nakłonić klienta do zakupu towaru lub usług.

Etapy oddziaływania reklamy na odbiorcę – model AIDA. Formuła ta jest wykorzystywana przy określeniu celów reklamy (B. Kozłecka, K. Osowska, 2010):

ATTENTION (zwrócenie uwagi) – etap 1

INTEREST (wywołanie zainteresowania) – etap 2

DESIRE (wzbudzenie chęci posiadania) – etap 3

ACTION (sprowokowanie odbiorcy do działania – zakup) – etap 4

Jeśli klient zauważy reklamę (**etap 1**) i wzbudzi ona jego zainteresowanie osiąga**etap 2**. Przykuć uwagę klienta może ciekawy materiał reklamowy, sposób jego zaprezentowania. Jeśli pod wpływem reklamy zainteresowany nią klient będzie rozważa chęć zakupu produktu, to przejdzie do **etapu 3**, jeśli skończy się to zakupem (**etap 4**), to reklama okazała się skuteczna.

By zminimalizować ryzyko przy tworzeniu przekazu reklamowego, po sprecyzowaniu segmentu odbiorców oraz określeniu motywów, jakie nimi kierują przy dokonywaniu zakupów, należy posłużyć się **metodą 5M**.

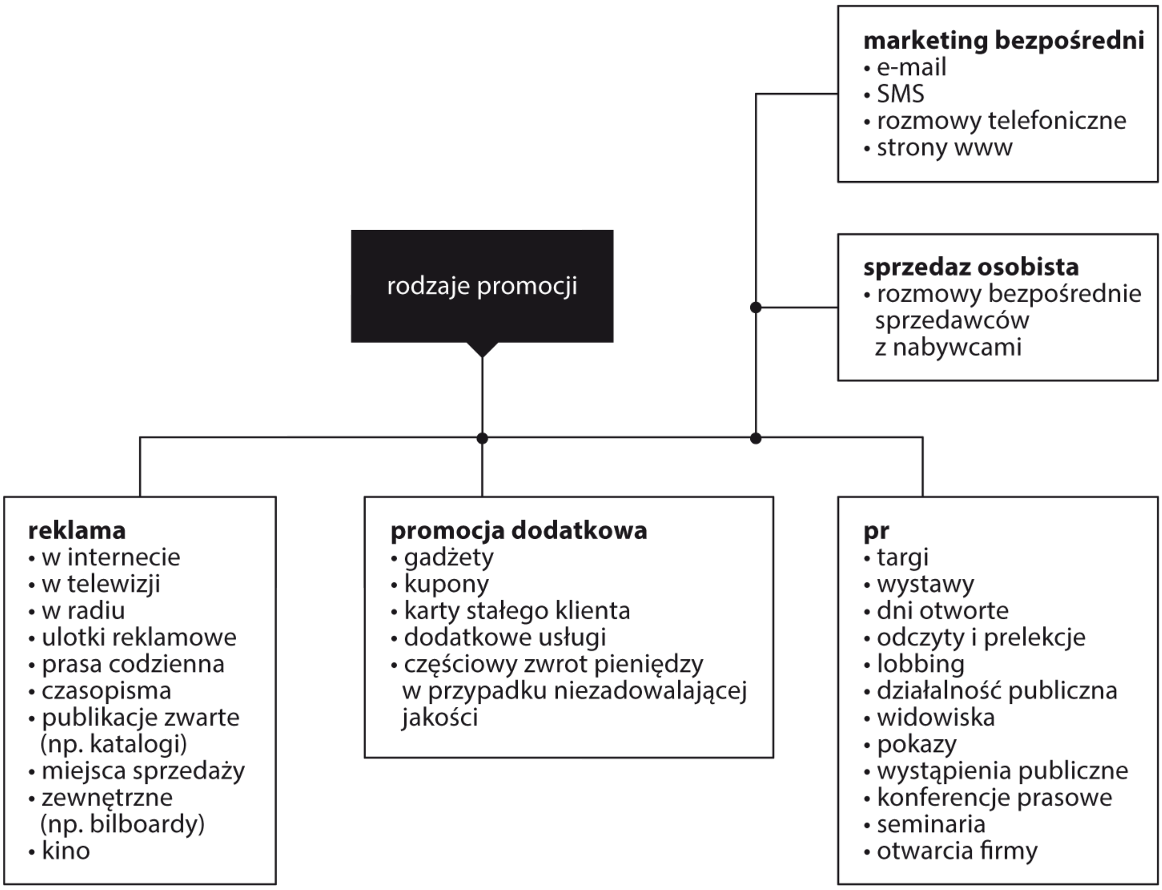
Sprowadza się ona do udzielenia odpowiedzi na 5 pytań:

- Gdzie się reklamować?
- Ile wydać?
- Jakie są cele przedsiębiorstwa?
- Co powinien zawierać przekaz?
- Jak mierzyć rezultaty?

Działania podejmowane podczas opracowywania kampanii reklamowej to[1]:

- analiza rynku (analiza produktów, badanie grupy konsumentów);
- stworzenie przekazu reklamowego (myśli przewodniej), hasła reklamowego;
- opis segmentu docelowego;
- charakterystyka celów reklamy;
- opracowanie oferty;
- wybór nośników reklamy;
- opracowanie budżetu reklamy;
- propozycja ceny skuteczności reklamy.

Ważnym elementem przekazu reklamowego jest hasło reklamowe.



Rysunek 7. Rodzaje promocji

Źródło: Opracowanie własne.

1. Zob. A. Bogacka-Gawrysiak, *Strategia Medialna w Reklamie (2M5), Cz. II,* http://www.wsz-pou.edu.pl/magazyn/?strona=mag_repetyt62&nr=62&p= (09.05.2013)

Hasło reklamowe powinno być:

- oryginalne;
- krótkie;
- łatwo wpadać w ucho;
- wyróżniać przedsiębiorstwo od innych przedsiębiorstw;
- wziąć pod uwagę dbałość o klienta.

Promocja dodatkowa promocja sprzedaży, jest terminem stanowiącym zbiorcze określenie dla różnych instrumentów, nie mieszczących się w ramach innych środków komunikowania się przedsiębiorstwa z rynkiem. Obejmuje ona instrumenty tworzące dodatkowe i nadzwyczajne bodźce zwiększające stopień atrakcyjności produktu wobec nabywcy i podwyższające jego skłonność do zakupu (J. Altkorn, 1997). Uzyskane dzięki niej efekty sprzedażowe mają charakter krótkotrwały, ma jednak za zadanie wyróżnić i uatrakcyjnić produkt w konkretnym miejscu i czasie. Elementami **promocji dodatkowej** są różnego rodzaje bodźce ekonomiczne takie jak:

- gadżety reklamowe (długopisy, upominki);
- obniżki cen;
- bezpłatne próbki towaru;
- kupony;
- karty stałego klienta;
- zwrot pieniędzy w przypadku niezadowalającej jakości;
- loterie;
- gry.

Public relations (PR) – ma na celu stworzenie i utrzymanie życzliwych relacji pomiędzy firmą a otoczeniem. Kreowanie wizerunku firmy w ramach działań PR polega na przekazywaniu informacji na temat jej działalności możliwie największej grupie odbiorców, budowaniu jej wizerunku. W efekcie dobrych stosunków z otoczeniem, dochodzi do pośredniego wpływu na wzrost sprzedaży.

Do **najpopularniejszych środków PR** można zaliczyć:

- kontakty z prasą, radiem, telewizją;
- oddziaływanie na polityków i ośrodki opiniotwórcze w sprawie ustawodawstwa regulującego ważne sprawy dla firmy;
- specjalne wydarzenia: pokazy, wystąpienia publiczne, otwarcia, imprezy;
- organizacja dni otwartych firmy;
- organizacja odczytów i prelekcji;
- działalność publiczna, np. akcje dobroczynne;
- sponsorowanie imprez sportowych, kulturalnych itp.;
- lobbing, np. tworzenie środowiska poparcia dla inicjatyw rozwojowych, utrzymywanie kontaktów z ludźmi biznesu i kultury.

Sprzedaż osobista polega na bezpośrednich kontaktach między sprzedającymii kupującymi. Sprzedawcy, wykorzystując ten instrument promocji:

- przekazują treści skłaniające do zakupu;
- mogą dobrze poznać postawy i motywy nabywców;
- utrzymywać stałe kontakty z klientami;
- pozyskiwać nowych nabywców.

Marketing bezpośredni to forma komunikowania się z pojedynczym klientem poprzez:

- możliwość przesyłania informacji za pomocą SMS-ów;
- wykorzystanie poczty e-mail do reklamy;
- telemarketing, czyli rozmowy reklamowe przez telefon;
- umieszczanie tablic interaktywnych, informacyjnych o produkcie lub usłudze w danym czasie, gdzie aktualizacja danych jest automatyczna.

6.2. Analiza SWOT

Analiza SWOT jest kompleksową metodą służącą do badania podmiotu gospodarczego, ponieważ uwzględnia elementy otoczenia zewnętrznego, makrootoczenia, na które przedsiębiorstwo nie ma wpływu, oraz elementy otoczenia wewnętrznego, mikrootoczenia, na które przedsiębiorstwo oddziaływują i ma wpływ w wyniku podejmowanych działań.

Nazwa **SWOT** pochodzi od słów angielskich (I. Penc-Pietrzak, 2003):

- **Strenghts** – mocne strony organizacji wynikające z otoczenia wewnętrznego;
- **Weaknesses** – słabe strony organizacji wynikające z otoczenia wewnętrznego;
- **Opportunities** – szanse wynikające z otoczenia zewnętrznego;
- **Threats** – zagrożenia wynikające z otoczenia zewnętrznego.

Analiza ta umożliwia całościową ocenę zewnętrznych i wewnętrznych czynników określających potencjał rozwojowy przedsiębiorstwa.

Klasyfikację czynników wpływających na pozycję strategiczną przedsiębiorstwa w analizie SWOT przedstawia niniższy rysunek.

zewnętrzne	**SZANSE**	**ZAGROŻENIA**
wewnętrzne	**MOCNE STRONY**	**SŁABE STRONY**

Rysunek 8. Klasyfikacja czynników w analizie SWOT

Źródło: G. Gierszewska, M. Romanowska, Analiza strategiczna przedsiębiorstwa, Warszawa 2001, s. 210.

Tabela 17. Analiza SWOT przedsiębiorstwa

SILNE STRONY	SŁABE STRONY
Poziom cen – dzięki największej sprzedaży detalicznej w Polsce północnej firma oferuje upusty cenowe, stosuje niską marżę. Polityka cenowa przyciąga klientów. Kwalifikacje zawodowe pracowników – pracownicy mają wysokie kwalifikacje, dużą wiedzę i umiejętności. Jakość produktu lub oferowanej usługi – produkt wytwarzany wg. najnowszych technologii, profesjonalność usług. Oryginalność produktu – produkt wyróżnia się na rynku tym, że jest mało znany, ekologiczny. Oryginalne opakowanie produktu – estetyka. Niezawodność produktu – mała ilość reklamacji. Lokalizacja punktów sprzedaży – usytuowanie w centrum miasta. Przepływ informacji – każdy punkt sprzedaży wyposażony jest w telefon, komputer, fax.	Reklama i promocja – brak odpowiedniej reklamy, badań marketingowych na rynku, nie stosuje się innych środków promocji. Wysokie koszty pracy – wysokie wymagania pracowników, a zwłaszcza obciążenia podatkowe, ZUS. Małe doświadczenie w danej branży – firma od roku funkcjonuje na rynku. Wysokie koszty wynajmu lokali handlowych – lokale znajdują się w centrum miast co podraża koszty wynajmu. Niedoświadczona kadra kierownicza – staż w branży kadry kierowniczej to średnio3 lata, małe doświadczenie w zakresie kierowania przedsiębiorstwem. Brak usług – brak kompleksowej obsługi, np. sprzedaż wraz z montażem powoduje niezadowolenie klientów, a czasami rezygnację z zakupu. Sezonowość – duża rozpiętość przychodów w poszczególnych miesiącach roku, np. najsłabszy okres sprzedaży to miesiące letnie, wzrost obserwuje się w miesiącach zimowych. Zadłużenie kredytem bankowym – comiesięczna spłata raty kredytu zaciągniętego na rozpoczęcie działalności gospodarczej.
SZANSE	**ZAGROŻENIA**
Ewolucja postaw klientów – klienci poszukują produktów naturalnych, ekologicznych. Wykorzystanie niszy rynkowej – tworzenie nowych punktów sprzedaży w miastach i miejscowościach, w których tego typu działalności nikt nie prowadzi. Atrakcyjny system ulg inwestycyjnych – państwo stwarza warunki do prowadzenia tego typu działalności wprowadzając ulgi inwestycyjne, i inne form dofinansowania, np. subwencje, dotacje. Niskie koszty wchodzenia na nowe rynki zbytu – przedsiębiorstwo posiada dobre zaplecze transportowe. Poszerzenie asortymentu – istnieją możliwości wprowadzenia nowych produktów przy wykorzystaniu dotychczasowego potencjału przedsiębiorstwa.	Mała siła nabywcza społeczeństwa – cena produktu jest zbyt wysoka dla przeciętnego konsumenta. Konkurencja – główną konkurencję stanowią wyroby, których produkcja nie wymaga wysokich nakładów technologicznych. Kryzys gospodarczy w kraju – wzrost bezrobocia, wzrost poziomu inflacji, zmniejszająca się liczba ludności kraju w wyniku procesów migracyjnych wpływa na zmniejszenie popytu konsumenckiego. Rosnące koszty wynagrodzeń – w wyniku zmian w systemie ubezpieczeń społecznych, np. wzrost składek na ubezpieczenie rentowe. Pojawienie się atrakcyjnych substytutów – dzięki postępowi technicznemu pojawienie się na rynku coraz więcej substytutów, tańszych bardziej dostępnych dla klientów.

Źródło: Opracowanie własne.

Najbardziej istotne są dla przedsiębiorstwa te atuty, które ważne są dla jego klientów. Po ustaleniu mocnych stron przedsiębiorstwa należy porównać je z atutami konkurentów.

Analiza słabości pozwoli ustalić, gdzie leżą słabe punkty, które mogą podważyć możliwości zrealizowania przez firmę przedsięwzięcia.

Każdy człowiek pragnie osiągnąć sukces, zrealizować cel i dąży do doskonałości w życiu prywatnym jak i zawodowym. Dlatego pogłębiamy wiedzę, zdobywamy nowe doświadczenia, wyznaczamy sobie cele.

CEL = OSIĄGNIĘTY EFEKT

Cechy celu przydatne (ważne) przy jego określaniu*: (można przedstawić to w formie rysunku diagramu)*

– konkretny,
– szczegółowy
– *realny*
– *określony w czasie- wykonywany w określonym czasie*
– *akceptowalny (powinien wyzwalać wymagany poziom motywacji adekwatny do naszych możliwości)*
– *sprawdzalny*
– *zrozumiały*
– *spójny wewnętrznie*
– *elastyczny (modyfikowany)*

Analiza SWOT pozwala usystematyzować wiedzę, obrazuje nowe możliwości lub zagrożenia, uwypukla pewne kwestie a przede wszystkim:

- racjonalizuje pomysł,
- „nakazuje" zapoznać się z otoczeniem,
- ocenia obecne trendy,
- ocenia mocne i słabe strony (swoich, przedsięwzięcia)
- weryfikacja założeń projektowych, celu.

Warto w tym momencie również wspomnieć o zasadzie Pareto (P. Kotler, 1994). Zasada ta mówi, że 80% efektów generowanych jest przez 20% nakładów. W związku z tym należy skupić się na rzeczach najważniejszych. Czasami nie warto być najlepszym we wszystkim. W praktyce jest to prawie niemożliwe. Dlatego tak ważne jest poznanie i ocena swoich mocnych stron, uświadomienie sobie w czym jesteśmy dobrzy, co sprawia nam satysfakcję.

Jak stworzyć analizę SWOT według osób?

Dla analityków, osób które dogłębnie chcą zbadać temat, przeanalizować wszystkie „za i przeciw" uwzględniając dużą ilość czasu do dyspozycji- poprzez uzupełnienie klasycznej tabeli, tj. należy wypisać mocne i słabe strony oraz szanse i zagrożenia

Dla osób bardziej energicznych, lubiących szybkie działanie pracę zespołową- należy wykorzystać „burzę mózgów", wszystkie osoby tworzące zespół wypowiadają się na dany temat. Stosując ten sposób w pierwszej kolejności zapisujemy wszystkie pomysły, następnie je weryfikujemy, analizujemy ich sensowność.

Czasami warto złamać reguły i dokonać podziału tylko na dwie grupy: czynników mających pozytywny i negatywny wpływ na nasze przedsięwzięcie. Nie będzie to klasyczna analiza SWOT, ale pozwoli nam uzmysłowić sobie możliwości osiągnięcia założonego celu.

Ważne elementy które należy wziąć pod uwagę przy określeniu celu: dla nauczyciela

1. ***Określaj cele w sposób pozytywny*** *– zapisuj to, co chcesz mieć/osiągnąć a nie to, czego nie chcesz. Pamiętaj, że nasz umysł przyciąga to, o czym najczęściej myślimy, a podświadomość nie rozumie zaprzeczeń. Jeśli będziesz myślał Nie chcę tej choroby to tylko będziesz przyciągał więcej choroby!*
2. ***Napisz cel w czasie teraźniejszym*** *– podświadomość nie zna przyszłości, jest tylko TERAZ.*
3. ***Umieszczaj cele w kontekście*** *– Kiedy, gdzie, z kim chcesz osiągnąć ten cel? Zobacz, usłysz, poczuj przedsmak tego, co się wydarzy. Zobacz swoje otoczenie, ludzi, wszystko co jest powiązane z celem.*
4. ***Zapisuj jak najwięcej szczegółów*** - jeśli np. chcesz mieć samochód - określ jaki będzie miał kolor, jaki dźwięk będzie wydawał silnik, jaka marka, model, wyposażenie.
5. ***Wybieraj cele zależne od Ciebie*** *– czy sam jesteś w stanie go osiągnąć? Od kogo zależy wynik? Pamiętaj, że*

w im większym procencie cel zależy od Ciebie, tym większe prawdopodobieństwo że go osiągniesz!

6. ***Sprawdź jakimi zasobami dysponujesz*** *– znając własne zasoby (możliwości, umiejętności, kapitał, wiedzę, itd) łatwiej osiągniesz cel, będziesz wiedział co jest Tobie potrzebne do osiągnięcia celu, skąd będziesz czerpał zasoby.*
7. ***Jaka jest wielkość celu?*** – każdy cel powinien mieć odpowiednią wielkość. Jeśli jest zbyt duży - podziel go na kawałki. Ustal dla każdego z nich osobną datę osiągnięcia.
8. ***Cel powinien być ekologiczny*** *– zastanów się, czy jest on zgodny z Twoimi wartościami? Czy nie zaburzy on czegoś w Twoim życiu? Jak będzie się miał do innych ludzi - rodziny, przyjaciół, znajomych z pracy? Czy na pewno im nie zaszkodzi?*
9. ***Brak sprzeczności*** *– zbadaj spójność na poziomie świadomym i podświadomym w stosunku do celu. Wyobraź sobie że już osiągnąłeś swój cel i sprawdź jak się z nim czujesz (pozwól wyrazić się Twojej podświadomości, język emocji, uczuć, ciała), jakie są konsekwencje osiągnięcia celu*
10. ***Oznaki osiągnięcia celu*** – skąd będziesz wiedział, czy osiągnąłeś cel? Zastanów się, co się zmieni, w jaki sposób poznasz że już masz to, czego pragniesz. Jak uczcisz zdobycie celu?

6.3. Masz biznes – co dalej?

Przedsiębiorstwa, które rozpoczynają działalność i te już funkcjonujące na rynku są pod wieloma względami unikatowe. Dotyczy to małych biznesów. Różnią się one:

- rodzajem i specyfiką podejmowania działalności;
- klientelą, do której adresuje działalność, czyli rynkiem;
- poziomem innowacyjności.

Istnieją jednocześnie pewne prawidłowości ich rozwoju, przechodzą one przez określone fazy, napotykają określone problemy i wyzwania, których rozstrzygnięcie wymaga:

- wiedzy;
- kwalifikacji;
- kapitału.

Można wytypować pięć faz rozwoju małego biznesu (J. Targalski, A. Francik, 2009):

1. powstanie (założenie przedsiębiorstwa);
2. przetrwanie na rynku;
3. sukces:
   – z nastawieniem na eksploatację (konsumpcję);
   – z aktywnym nastawieniem na wzrost;
4. dynamiczny wzrost (ekspansja);
5. dojrzałość.

Przedsiębiorstwa przechodzą przeobrażenia. Wewnętrzne uwarunkowania i czynniki zewnętrzne powodują, że:

- zmienia się rola i poziom zaangażowania właściciela oraz styl zarządzania;
- kształtuje się coraz bardziej złożona struktura organizacyjna;
- rośnie lub maleje stopień formalizacji systemu zarządzania;
- przyjmowane są różne cele strategiczne;
- a w wyższych fazach strategie zarządzania.

Wśród czynników, które stymulują szybszy rozwój firmy, prowadząc do sukcesu, oraz czynników, których wystąpienie może przyczynić się do niepowodzenia lub upadku cztery odnoszą się do właściciela, a cztery do przedsiębiorstwa.

Do właściciela odnoszą się (J. Targalski, A. Francik, 2009):

1) cele własne przedsiębiorcy i ich ewentualna identyfikacja z celami firmy;
2) zdolność właściciela do wykonywania tak ważnych zadań jak:
   - marketing;
   - wdrażanie innowacji;
   - wytwarzanie (wykonawstwo);
   - zarządzanie dystrybucją itp.
3) zdolności, umiejętności i postawy kierownicze właściciela takie jak:

- gotowość do delegowania uprawnień;
- kierowanie działaniami grupy pracowników;

4) zdolność do strategicznego patrzenia w przyszłość i dopasowania sił i słabości firmy do własnych celów.

Do przedsiębiorstwa odnoszą się (J. Targalski, A. Francik, 2009):

1) zasoby finansowe – w tym gotówka i zdolność kredytowa;
2) zasoby ludzkie – liczba i kwalifikacje, szczególnie na poziomie zarządu i kierownictwa;
3) system zarządzania – system informacyjny oraz system planowania i kontroli;
4) silne strony przedsiębiorstwa (zasoby biznesowe), w tym:
   - stosunki z dostawcami odbiorcami;
   - udział w rynku;
   - możliwości produkcji i kanały dystrybucji;
   - technologia i reputacja;
   - wszystko to, co daje firmie pozycję konkurencyjną w branży i na rynku.

W różnych okresach (fazach) działalności przedsiębiorstwa czynniki te mają różne znaczenie i natężenie. Zdolności operacyjne właściciela mają ogromne znaczenie w początkowej fazie istnienia firmy, natomiast w okresie późniejszym wzrasta rola zdolności strategicznych właściciela. Podobnie wzrasta znaczenie zasobów ludzkich, a maleje znaczenie zasobów biznesowych.

Przedsiębiorcy w początkowych fazach rozwoju wybierają zwykle jedną z dwóch strategicznych możliwości:

- specjalizację;
- lub dywersyfikację.

Specjalizacja polega na skoncentrowaniu się przedsiębiorstwa na jednym rodzaju działalności i na rynkowym wyeksponowaniu odmienności firmy od innych (J. Targalski, A. Francik, 2009). Zalecana jest ona szczególnie młodym firmom, które nie osiągnęły jeszcze przewagi konkurencyjnej.

Dywersyfikacja polega na koncentrowaniu działalności przedsiębiorstwa na dwu lub więcej dziedzinach (J. Targalski, A. Francik, 2009).

Strategie specjalizacji i dywersyfikacji mogą być realizowane:

- **metodą rozwoju wewnętrznego**, która wymaga skupienia się na zarządzaniu wewnętrznymi procesami wzrostu (inwestycje wewnętrzne) lub;
- **metodą rozwoju zewnętrznego**, polegającą na łączeniu się z innymi firmami (fuzje przedsiębiorstw) lub nabywaniu przedsiębiorstw.

W praktyce nabywania szczególne znaczenie ma analiza przedsiębiorstwa.

Tabela 18 Analiza przeglądowa przedsiębiorstwa

1. Dane ogólne	• rodzaje przedsiębiorstwa; • strategie; • wiek – dotychczasowy rozwój; • trendy.
2. Produkt	• specyfikacja techniczna; • wielkość produkcji; • ceny; • wartość dodana.
3. Zespół menedżerski	• główne stanowiska, wykształcenie, kariera, umiejętności; • struktura organizacji; • charakterystyka zespołu.
4. Pozycja na rynku	• rozmiar rynku; • wzrost rynku i czynniki wzrostu; • segmentacja rynku; • identyfikacja klientów i relacje z klientami; • kanały dystrybucji; • udziały w rynku; • czynniki wyróżniające; cena, jakość, marka itp.
5. Analiza konkurencji	• bariery wejścia na rynek i wyjścia z rynku; • czynniki konkurencyjne; • zagrożenie substytucją; • siła dostawców; • siła nabywców; • trendy: technologiczne, ekonomiczne, fiskalne.
6. Działalność operacyjna	• wielkość zatrudnienia i struktura zatrudnienia; • proces wytwórczy i system planowania; • zdolności produkcyjne; • zaopatrzenie; • kontrola jakości; • wyposażenie w środki trwałe; • badania i rozwój.
7. Finanse	• zyskowność sprzedaży; • wsparcie i płynność finansowa; • przepływ funduszy; • aktywa.
8. Wycena wartości	• wartość w czasie; • analiza efektywności inwestycji.
9. Ryzyko rzeczywiste	• w sektorze; • ryzyko technologiczne; • ryzyko finansowe; • wiarygodność przedsiębiorstwa; • relacje dostawcy – pracownicy – odbiorcy.
10. Sprzedający (właściciel)	• sprzedaż; • wartość (cena) realistyczna; • zastrzeżenia, koncesje, ograniczenia; • wartość, która może być dodana.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: J. Targalski, A. Francik (red. nauk.), Przedsiębiorczość i zarządzanie firmą. Teoria i praktyka, Warszawa 2009,s. 254-255.

Z nabyciem przedsiębiorstwa wiążą się zarówno korzyści, jak i zagrożenia.

Korzyści to np.:

- nabycie nowych technologii, nowych wyrobów i nowych rynków;
- obniżka kosztów prowadzenia działalności gospodarczej na większą skalę;
- ograniczenie konkurencji.

Zagrożenia to np.:

- przestarzałe technologie;
- mała rentowność;
- ukryte zobowiązania (zadłużenie);
- silna konkurencja.

Siedem śmiertelnych chorób

W. Edwards Deming wymienia siedem śmiertelnych chorób, które mogą niszczyć kondycję przedsiębiorstwa:

Pierwszą patologią biznesu, którą odnotował, jest oportunizm – brak stałości celu, długofalowych planów, jakichkolwiek wielkich idei sukcesu rynkowego.

Drugą chorobą jest presja na doraźne zyski, czyli zbyt duża koncentracja na osiągnięcie szybkich zysków.

Trzecią jest ocena wyników na podstawie liczb. Niszczy to ducha pracy zespołowej, wzmaga rywalizację, pozostawia pracowników w goryczy, przygnębionych i pokonanych.

Czwartą chorobą jest karuzela menedżerów, którzy dziś są, jutro odchodzą.

Piąta to prowadzenie firmy na podstawie statystyk sprawozdawczości. Najważniejszy czynnik – zadowolony klient – pozostaje często nieznany i niepoznawalny.

Szósta to wysokie koszty medyczne związane z nienależytą uwagą poświęcaną tematowi zdrowia i bezpieczeństwa pracy w organizacji.

Siódma to nadmierne koszty z tytułu odszkodowań, rekompensaty szkód w procesach wygranych przez prawników skarżącego (za: S. Young, 2005, s. 135-136).

Źródło: S. Young, . Etyczny kapitalizm. Wrocław 2005.

TEMATY DO DYSKUSJI

1. Przygotuj prezentację, w której przedstawione zostaną efekty pracy przedsięwzięcia ze wskazaniem jego mocnych i słabych stron.
2. Oceń możliwości realizacji podobnego przedsięwzięcia na gruncie realnej polityki rynkowej.
3. Dokonaj analizy aktualnych zjawisk politycznych i określ ich rolę dla prowadzonego przedsięwzięcia.
4. Dokonaj analizy rynku wybranej działalności w perspektywie 2-letniej, ze wskazaniem możliwości rozszerzenia działalności na inne obszary/ formy działalności.

Bibliografia:

Kotler P., *Marketing. Analiza, planowanie, wdrożenie i kontrola*, Warszawa 1994.

Koźmiński A.K., Piotrowski W., *Zarządzanie - teoria i praktyka*, Warszawa 1996.

Machaczka J., *Podstawy zarządzania*, Kraków 2001.

Stabryła A., *Podstawy zarządzania firmą*, Warszawa 1995.

Young, S, *Etyczny kapitalizm*. Wrocław 2005.

Informatyka

Wstęp

Drodzy Nauczyciele,

Oddaję w Państwa ręce podręcznik do *Informatyki*, będący cegiełką w większym opracowaniu, tworzonym przez interdyscyplinarny zespół ekspertów. Proponowane opracowanie adresowane jest do nauczycieli liceów ogólnokształcących i techników.

Choć przedstawiany podręcznik został napisany w oparciu o nową podstawę programową kształcenia ogólnego, a także treści poza nią wykraczające, korzysta przede wszystkim z bogatej praktyki obcowania Autora ze sprzętem i oprogramowaniem komputerowym. Jest to zbieżne z opartym na doświadczeniu charakterem nauki, jaką w znacznym stopniu jest informatyka. Tak jak nie da się uprawiać zawodu inżyniera-projektanta w oderwaniu od rzeczywistości, tak jak nawet najlepszy wykładowca kursu prawa jazdy nie zastąpi jazd próbnych, tak mija się z celem teoretyczna nauka obsługi komputera i programów bez równoległego spędzania czasu przed monitorem oraz praktycznych eksperymentów. Nie da się od komputera uciec, to narzędzie w dzisiejszych czasach towarzyszy każdemu bez wyjątku. Więcej, coraz szerszy zakres swojej aktywności człowiek przenosi się platformę wirtualną i rezygnuje z jej formy papierowej, względnie innej materialnej. Nie dość tego, musimy pamiętać, że nasze komputery od dawna przestały być samotną, anonimową wyspą, funkcjonują wraz ze swoimi operatorami w równoległym, alternatywnym świecie, z własną formą demokracji, z własnym kodeksem praw i obowiązków.

Nauczyciel, jako przewodnik młodego człowieka, razem z nim musi funkcjonować w tej rzeczywistości, oferować mu wiedzę pochodzącą zarówno z przeszłości, jak i współczesną, a wszystko to musi opakować w formę odpowiadającą kanałom komunikacji młodzieży, wykorzystywać warsztat spójny z ich urządzeniami, a nawet gadżetami zdobywającymi wśród nich szeroką popularność. Nie da się ani zatrzymać rozwoju metod przekazu, ani tym bardziej cofnąć do zanikających metod tradycyjnych.

Podręcznik ten nie ma zamiaru być kompletną encyklopedią wiedzy z zakresu informatyki, stara się jedynie uchwycić aktualną rzeczywistość świata cyfrowego i technik segmentu ICT. Bliżej mu do drogowskazu ukierunkowującego nauczyciela, do porządkowania tematów, które warto byłoby poruszyć na lekcji. Nie wyczerpuje całości wiedzy w żadnym z zakresów zagadnień, gdyż nawet próba dążenia do kompletności kończy się zejściem na poziom szczegółowy, a im bardziej takim się staje, tym łatwiej się dewaluuje i szybciej dezaktualizuje w obliczu ogromnego tempa zmian.

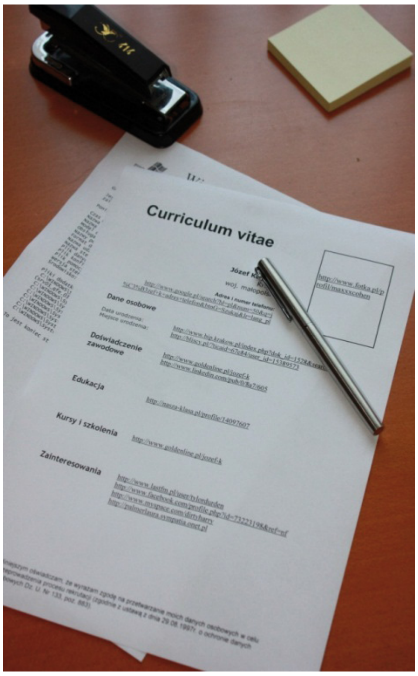
Rolą niniejszego podręcznika jest raczej uchwycenie pewnego, aktualnego na ten moment, stanu wiedzy komputerowej, w granicach wyznaczonych przez podstawę programową, a momentami – wykraczający poza nią.

Autor ma też nadzieję, że da on natchnienie przewodnikowi ludzi młodych do poszerzania jego treści o własne doświadczenia i wiedzę pochodzącą z wielu źródeł.

1. Komputer moim narzędziem pracy

Druga połowa XX w. była świadkiem rewolucji w koncepcji najistotniejszego czynnika supremacji w świecie. Od czasów starożytnych aż po rewolucję przemysłową w XIX w. główne źródło przewagi nad innymi narodami stanowiła wiedza i budowana w oparciu o nią potęga militarna, gospodarcza i kulturalna. Model ten utrzymywał się przez wieki, aż do lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, i wyparty został przez koncepcję społeczeństwa informacyjnego. Jak do tego doszło?

W 1969 roku powstała pierwsza rozproszona sieć komputerowa – ARPANET. Następnie w latach 1982-1983 pojawił się drugi podstawowy filar Internetu – system DNS, wiążący numery IP komputerów z hierarchicznie budowanymi nazwami domen internetowych. Wraz z nim stworzono dwa protokoły o połączonej nazwie TCP/IP[1].



Rys. 1 Nowoczesne CV

Źródło: Opracowanie własne

Po przejęciu w 1989 roku Internetu przez uniwersytety i organizacje naukowe oraz stworzeniu koncepcji World Wide Web, czyli sieci dokumentów hipertekstowych.

Na bazie tych wydarzeń w latach 90-tych nastąpił znaczący przełom w pojmowaniu świata. Prymat posiadanej, zgromadzonej wiedzy ustąpił miejsca w hierarchii informacji, tj. umiejętności sprawnego i szybkiego docierania do wiarygodnych źródeł wiedzy. Wobec ogromu wiedzy zdobytej przez wieki takie podejście pozwala na sprawne dysponowanie nią w znacznie szerszym zakresie i znacznie swobodniej niż gdyby ją gromadzić. Zamiast posiadać książkę lub inną rzecz, można mieć zaledwie gwarancję jej niezwłocznego udostępnienia, zaś w fizycznym wymiarze – miejsce opasłego tomu zajmuje obecnie jednolinijkowy adres, pod którym ów almanach się znajduje.

Zmiana nastąpiła także w umysłach – przede wszystkim uczniów i studentów, rówieśników jej wdrożenia, gdyż czas ich intensywnego rozwoju i poszukiwań przypadł na okres społeczeństwa już informacyjnego.

W wiekach dominacji wiedzy, model jej zdobywania wyglądał następująco: dziecko uczyło się najpierw od rodziców, potem nauczycieli, a następnie krąg źródeł poszerzał się o książki i encyklopedie.

Obecnie uczeń, po wstępnym okresie zdobywania wiedzy od rodziców, dość szybko opanowuje środowisko technik komputerowych i odkrywa Internet. Już we wczesnych latach rozwoju jego model poszukiwawczy opiera się na usługach takich jak Google i Wikipedia i tą drogą dociera do wiedzy. Pojawiło się nawet określenie na takie wyszukiwanie, mówi się„wygooglałem coś" lub „założyłem gogle (google)" – w celu znalezienia odpowiedzi na pytanie. W o wiele mniejszym stopniu takie zachowanie

1. Transmission Control Protocol i Internet Protocol. TCP to protokół kontroli transmisji, IP to protokół definiujący sposób adresowania. Dane przesyłane przez sieć komputerową rozbijane są na pakiety u nadawcy i z powrotem składane w jedną całość u odbiorcy.

dotyczy osób starszych, wytrenowanych na modelu wiedzowym (opartym na wykorzystaniu wyuczonych, czerpanych z pamięci informacji, bez sięgania za każdym razem do źródeł zewnętrznych).

Obecna infrastruktura techniczna sprzyja takiemu sposobowi odnajdywania wiedzy i właściwych rozwiązań. Otaczają nas komputery (stacjonarne, laptopy, palmtopy i tablety), smartfony i telefony komórkowe z dostępem do Internetu, w wielu instytucjach i sklepach mamy infokioski, będących niczym innym jak współczesną budką telefoniczną, telebimem i kioskiem z periodykami, tyle że oferującą usługi sieci www. Internet jest wszędzie bądź prawie wszędzie.

Dodatkowo całość sprzętu komputerowego można podzielić na komputery wraz z urządzeniami peryferyjnymi, serwery, w tym serwery dedykowane (pocztowe, internetowe, firewalle), oraz na infrastrukturę sieciową.

Przyjrzyjmy się więc składnikom tego łańcucha wzajemnych powiązań.

Hardware

Mianem hardware'u określa się całą infrastrukturę materialną, fizycznie istniejącą, taką jak: moduły, kable, obudowy. Jest to szkielet techniczny, narzędzie, umożliwiające wytworzenie i użytkowanie na nim niematerialnego wytworu myśli ludzkiej, jakim jest oprogramowanie. Tak jak sam mózg nie stanowi jeszcze o geniuszu człowieka, dopiero to, co się w nim dzieje, tak dopiero oprogramowanie stanowi o wartości sprzętu komputerowego. Komputer i wszystkie jego odmiany stanowią interfejs komunikacyjny człowieka z wirtualnym światem. On tłumaczy to, co rozumie i czego chce człowiek, na język maszyn. Poza tym osobistym asystentem człowieka korzystamy jeszcze z wielu urządzeń otwierających nas na świat, tworzących globalną sieć komputerową (WWW – World Wide Web), których zasady porozumiewania się regulują odpowiednie protokoły, a ich praktyczna strona realizowana jest przez oprogramowanie.[2]

1.1. Infrastruktura sieciowa

1.1.1. Podstawowe pojęcia związane z siecią Internet

Sieć komputerowa jest to zbiór wielu wzajemnie ze sobą połączonych komputerów. Medium transmisyjnym stanowiącym łącze pomiędzy komputerami w sieci mogą być kable, linie telefoniczne, łącza światłowodowe, satelitarne itp. Ze względu na obszar, który obejmują sieci komputerowe, możemy podzielić je na trzy grupy:

- lokalne – LAN (Local Area Network),
- miejskie – MAN (Metropolitan Area Network),
- rozlegle – WAN (Wide Area Network).

Komputery połączone w sieć muszą się ze sobą komunikować, a jest to możliwe, jeśli zostanie zdefiniowany ich wspólny język. Rolę języków komunikacji komputerów pełnią **protokoły komunikacyjne,** zgodnie z którymi odbywa się wymiana danych pomiędzy komputerami w sieci. Aby komunikacja odbywała się w sposób prawidłowy, komputery uczestniczące w wymianie danych muszą używać tego samego protokołu. We współczesnej sieci rolę tę pełnią dwa protokoły o połączonej nazwie TCP/IP.

Jak działa TCP/IP?

Wyobraźmy sobie proces przesłania kopii dokumentów z archiwum w Lublinie do archiwum w Szczecinie. Pracownicy archiwum w Lublinie kserują dokumenty, odpowiednio je oznaczają, pakują je w paczki i wrzucają na samochody. Następnie kierowcy wyruszają w drogę. Ze względu na panujące na drodze

2. Godną polecenia witryną z darmowym lub niewiele płatnym oprogramowaniem jest choćby strona www.dobreprogramy.pl lub dział download w magazynie www.chip.pl.

warunki, kategorię drogi i jakość nawierzchni, część z nich wybrała drogę przez Łódź, inni zaś pojechali przez Toruń. Jeśli wszyscy kierowcy dotarli na miejsce i przewożone paczki były w idealnym stanie (tzn. daje się z nich odtworzyć pierwotną postać dokumentów), to archiwum w Szczecinie (zgodnie z wcześniejszą umową) zatelefonuje do Lublina i potwierdzi odbiór przesyłki. W przypadku braku potwierdzenia odbioru paczki archiwum w Lublinie wykona kolejną kopię dokumentów, które były przewożone w tej paczce i wyśle kolejnego gońca, aby ją dostarczył.

Praca w sieci komputerowej polega, w dużej mierze, na wymianie danych pomiędzy komputerami. Jak już wspomniano, zasady tej komunikacji określa protokół. W przypadku TCP/IP dane przesyłane pomiędzy komputerami dzielone są na stosunkowo niewielkie porcje, zwane **pakietami**.

Każdy pakiet oprócz fragmentu przesyłanego dokumentu zawiera opis – nagłówek zawierający informacje dotyczące m.in. adresu nadawcy, adresu odbiorcy, wielkości pakietu, kodów kontrolnych oraz położenia danego fragmentu w przesyłanym dokumencie. Ostatnie dwa z wymienionych atrybutów mają szczególne znaczenie dla rekonstrukcji dokumentu po stronie odbiorcy. Po pierwsze, odbiorca chce wiedzieć, czy otrzymane dane nie zawierają błędów – weryfikuje więc poprawność otrzymanego pakietu na podstawie kodów kontrolnych. Po drugie, komputer-odbiorca musi poskładać nadchodzące fragmenty w całość – tu korzysta z informacji opisującej położenie danego fragmentu w całym dokumencie. Każdy prawidłowo odebrany pakiet jest potwierdzany przez odbiorcę. Jeżeli po ustalonym czasie nie nadchodzi potwierdzenie odebrania pakietu, nadawca ponowi próbę przesłania, co daje gwarancję poprawnego transportu całego dokumentu, niezależnie od różnych przygód, które mogą spotkać pojedyncze pakiety w drodze od nadawcy do odbiorcy.

Poszczególne przesyłane pakiety mogą docierać do odbiorcy różnymi drogami, tzn. za pośrednictwem różnych urządzeń sieciowych, zwanych **koncentratorami** (ang. *hubs*), **switchami, routerami** (ang. *routers*) i **bramkami**. Zadaniem tych maszyn jest wyszukiwanie najlepszej możliwej drogi łączącej nadawcę z odbiorcą i przesyłanie danych.

Adresy, domeny

Mówiąc o przesyłaniu pakietów, wspomniano, iż każda porcja danych opatrzona jest adresem nadawcy i adresem odbiorcy. By umożliwić bezbłędne odszukanie adresata każdego pakietu, musimy zagwarantować niepowtarzalność (w ramach całej sieci) identyfikatorów-adresów przypisanych poszczególnym komputerom. Nie powinna zatem mieć miejsca sytuacja, w której dwa lub więcej komputerów w sieci posługiwałyby się tym samym **adresem IP** (unikatowy identyfikator nadawany komputerom pracującym w sieci), gdyż byłoby to źródłem niejednoznaczności w doręczaniu przesyłanych pakietów.

Globalne adresy w sieci Internet są liczbami 32-bitowymi (4 bajty). Zapisujemy je w formie czterech trzycyfrowych liczb oddzielonych kropkami, np.: 212.77.100.101. Jeśli na początku liczby występuje 0, to można go pominąć. Ponadto większość komputerów w sieci Internet można identyfikować dwoma sposobami. Oprócz adresu numerycznego mają one też nazwę domenową, która jest znacznie łatwiejsza do zapamiętania. Nazwa określa zazwyczaj przynależność danego komputera do określonej firmy czy organizacji, np.: ecdl.miroman.lublin.pl. Aby zrozumieć tę nazwę, należy ją czytać od końca, czyli od prawej strony do lewej. Rozszyfrujmy podany poniżej adres:

ecdl.miroman.lublin.pl
pl – kraj Polska;
lublin – miasto Lublin;
miroman – nazwa firmy;
ecdl – to nazwa komputera w sieci lokalnej.

Ostatni element nazwy oznacza strefę geograficzną, czyli dwuliterowy symbol kraju. Mówimy, że wszystkie komputery mające adres kończący się symbolem **.pl** pracują w **domenie pl**. Idąc dalej tym tropem, komputery o adresie kończącym się **lublin.pl** należą do domeny **lublin.pl**, następnie widzimy nazwę skrótową instytucji, organizacji czy firmy:

Miroman oraz ostatni człon to nazwa serwera w sieci lokalnej tej firmy. Oprócz stref geograficznych wyróżniamy również domeny związane z typem zastosowań (skróty trzyliterowe) – zestawienie poniżej. Na przykład **com.pl** oznacza domenę organizacji komercyjnej zlokalizowanej w Polsce. Nie zawsze nazwa domenowa kończy się strefą geograficzną. Zwłaszcza komputery z USA oraz firmy i organizacje o charakterze międzynarodowym posiadają nazwy domenowe zakończone dziedziną zastosowań. Od 2002 roku przybyło kilka nowych domen globalnych, takich jak: .biz, .info, .name.

Oto kilka przykładów: ibm.com; irc.net; nasa.gov; unicef.org.

Tabela 1. Nazwy domen w odniesieniu do zastosowań

Nazwa	Opis
Com	zastosowanie komercyjne
gov	instytucje rządowe
org	organizacje non-profit
mil	wojskowe
edu	domeny edukacyjne
net	firma działająca w sieci
inf	serwisy promocyjne i informacyjne

Źródło: Opracowanie własne

W praktyce ludzie posługują się częściej nazwami, pozostawiając komputerom odszukiwanie odpowiadających im adresów numerycznych. Istnieje również powód, aby korzystać z adresów symbolicznych. Adresy numeryczne komputerów ulegają od czasu do czasu zmianie. Adresy symboliczne, czyli nazwy, pozostają zwykle niezmienne. Cała tajemnica polega tutaj na skojarzeniu nowego adresu (numerycznego) ze starą nazwą. Takie postępowanie pozwala użytkownikom na łatwe odszukanie danego komputera w sieci, niezależnie od zmian zachodzących w konfiguracji i adresach IP. Istnieją jednak okoliczności, w których bez znajomości adresu IP ani rusz. W sytuacji, gdy awarii ulegnie system odpowiadający za dekodowanie adresów symbolicznych na adresy numeryczne (usługa ta nazywana jest krótko DNS – Domain Name System) odnalezienie konkretnej maszyny w sieci może okazać się niemożliwe, jeśli nie będziemy znali jej adresu IP We własnym interesie należy zatem zapamiętać lub zapisać sobie adresy IP komputerów, na których mamy swoje konta, lub z których najczęściej korzystamy. Chcąc sprawdzić, czy domena, którą planujemy zarejestrować jest dostępna, możemy skorzystać z formularzy dostępnych w serwisach WWW firm oferujących rejestrację domen. W odniesieniu do domen obsługiwanych przez NASK formularz taki znajdziemy pod adresem www.dns.pl.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Czy Internet ma szansę zastąpić w przyszłości źródła książkowe, stając się „jedynym słusznym źródłem informacji"?
b) Wyjaśnij, czym jest etykieta. Czy przestrzegasz jej zasad, korzystając z różnych usług w sieci komputerowej?
c) Przedstaw i scharakteryzuj zasady administrowania siecią komputerową w architekturze klient-serwer, posługując się prawidłową terminologią.
d) Określ ustawienia sieciowe danego komputera i jego lokalizację w sieci.

1.2. Budowa komputera

Zasadniczo komputer można podzielić na dwie sfery: hardware, czyli część fizyczną, materialną, którą można dotknąć i software – cały wirtualny świat oprogramowania. Oprogramowanie dzielimy na: aplikacyjne, narzędziowe i dane. Przyjmuje się, że wiedza o bazie sprzętowej stanowi około 10% całkowitej wiedzy o komputerze, większość zaś to nadbudowana na tej infrastrukturze rzeczywistość wirtualna, programowa.

Obecnie dysponujemy wieloma urządzeniami będącymi *de facto* komputerami. Mają one zróżnicowaną budowę i możliwości, od niewielkich po duże maszyny. W toku ewolucji techniki uzyskały one swoje wyspecjalizowane funkcje, co pozwoliło podzielić je na grupy, takie jak:

- Komputery osobiste (PC) – najliczniejsze jednostki stacjonarne, spotykane we wszystkich lokalizacjach – od domów, poprzez uczelnie, po biura firm i instytucji, sklepy i dowolne miejsca, w których gromadzi się, przetwarza i wykorzystuje dane.
- Serwery – komputery łączące podległe jednostki w sieć, stanowiące także bazę do zdalnego zarządzania i wspólne miejsce gromadzenia i przechowywania danych. Pojęcie to zostało rozszerzone i obecnie obejmuje również wirtualne programy świadczące usługi na rzecz innych programów. Wynika to z definicji funkcjonalnej słowa „serwer", niemniej na płaszczyźnie sprzętowej oznacza jednostkę nadrzędną dla komputerów i innych urządzeń osobistych.
- Mainframe – wielokrotnie mocniejsze od uprzednio wymienionych jednostki lub grupy jednostek zarządzające siecią z dużą liczbą użytkowników, przetwarzają duże ilości danych na potrzeby instytucji, mogą też pełnić rolę serwerów w rozbudowanych sieciach.
- Superkomputery i komputery równoległe – największe komputery, o ogromnej mocy obliczeniowej, najczęściej używane do czasochłonnych obliczeń naukowych i symulowania skomplikowanych procesów, zjawisk i systemów, jak choćby prognozowanie pogody.
- Komputery wbudowane lub osadzone (ang. embedded) – to specjalizowane komputery do sterowania automatyką przemysłową, elektroniką użytkową. Mają kadłubową formę i często nie funkcjonują samodzielnie, bez urządzenia macierzystego.

W przeciwnym kierunku gabarytowym od komputera klasy PC możemy w obecnych czasach spotkać szereg urządzeń, których możliwości są zbliżone lub takie same jak komputera osobistego:

- Laptopy/notebooki – mniejsza i poręczniejsza wersja PC z ekranem w formie otwieranej klapki, często ze zredukowaną klawiaturą (mniej klawiszy).
- Netbooki – urządzenia, których zasadniczą rolą jest zapewnienie użytkownikowi dostępu do Internetu w każdym miejscu. Ze względu na kryterium redukcji ceny często pozostałe funkcje urządzenia są upośledzone w stosunku do poprzednio wymienionych.
- Palmtopy/PDA – jeszcze mniejsze urządzenia, wielkości dłoni lub kieszeni, w konsekwencji nieposiadające standardowej klawiatury – obsługuje się je rysikiem i klawiaturą ekranową.
- Smartphone – hybryda telefonu komórkowego i komputera typu palmtop. Często posiadają wbudowane dodatkowe funkcje, takie jak: dyktafon, odtwarzacz muzyki w formacie mp3, aparat fotograficzny i kamera.
- Tablety – przebojem zdobywające rynek urządzenia podobne do PDA i smartfonów, ale o znacznie większej przekątnej ekranu, będące *de facto* komputerami panelowymi. Ich poręczność wraz porównywalnymi z laptopami i komputerami stacjonarnymi możliwościami stały się kluczem do podbijania rynku i wypierania starszych typów konstrukcji.

W każdym z tych urządzeń można wskazać zasadnicze typy modułów charakterystycznych dla komputerów, będących ich wyznacznikiem.

1.2.1. Pięć elementów niezbędnych do działania komputera

Klasyfikację zawartości sprzętowej komputera zaczniemy od zaledwie 5 elementów niezbędnych do jego działania. Każdy z nich stanowi skomplikowaną całość i bez zamontowania któregokolwiek z nich nasz komputer nie ruszy którymkolwiek z wentylatorów umieszczonych w obudowie, całkowicie odmówi współpracy. Nie będzie reagował na przyciski i będzie zdawał się być martwy. Dla ułatwienia zapamiętywania należy dodać, że 3 spośród 5 wymaganych elementów swoją nazwę w języku polskim rozpoczyna od litery „p".

Do działania komputera niezbędne są:

1) procesor;
2) pamięć operacyjna RAM;
3) płyta główna;
4) karta grafiki;
5) obudowa z zasilaczem.

Zapewne niektórych zaskoczy tu brak dysku twardego, klawiatury czy monitora. Bez nich jednak komputer jest zdolny do pracy, ma jedynie ograniczony kontakt z człowiekiem, który go obsługuje oraz nie jest zdolny do gromadzenia i przechowywania informacji.

1.2.1.1. Procesor

Procesor nazywany jest sercem komputera (może poprzez skojarzenie jego taktowania z biciem serca), a jego rolę można porównać do mózgu człowieka. Procesor oznaczany jest często skrótem angielskim CPU, czyli Central Processing Unit. Jest on podstawowym wyznacznikiem mocy obliczeniowej komputera, niesłychanie skomplikowanym układem scalonym, mieszczącym na niewielkiej powierzchni – około 1 cm^2 – monokryształ krzemu, na który, wykorzystując technikę fotolitografii, naniesiono szereg warstw półprzewodnikowych tworzących sieć od kilku tysięcy do kilkuset milionów tranzystorów. Sam procesor umieszczony jest na laminatowej płytce, często przykryty pokrywą radiacyjną, na spodniej stronie płytki zaś znajdują się wyprowadzenia w postaci niezwykle elastycznych, miękkich nóżek pokrytych złotem. We współczesnych procesorach spotyka się 775, a nawet 939, nóżek!

Podstawową cechą procesora jest liczba bitów (długość) „słowa", na którym wykonywane są operacje obliczeniowe. Jeśli słowo ma 32 bity mówimy, że procesor jest 32-bitowy, jeśli 64 bity – 64-bitowy. W przeszłości stosowano także procesory 8 i 16 bitowe, jak zatem widać wraz z rozwojem technologii długość słowa rośnie.

Inna cecha odróżniająca procesory od siebie to architektura CISC lub RISC, choć w obecnych popularnych procesorach łączy się je obie i programista widzi CPU jako CISC, ich rdzeń jest jednak RISC-owy. Rozkazy CISC są rozbijane na **mikrorozkazy** (ang. microops), które są następnie wykonywane przez RISC-owy blok wykonawczy.

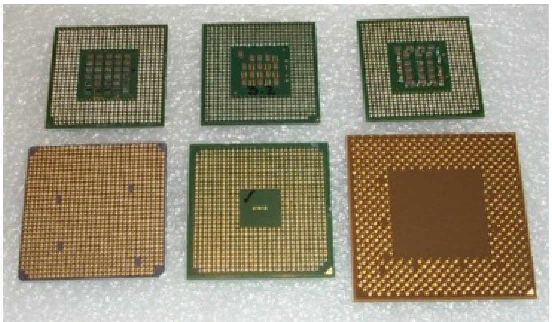
Kolejnym charakterystycznym parametrem procesora jest szybkość wykonywania rozkazów – częstotliwość taktowania. Dla danej architektury procesora, szybkość ta wynika przede wszystkim z czasu trwania pojedynczego taktu. Podaje się ją w GHz. Ze względu na problemy z odprowadzaniem ciepła powstającego podczas pracy takiej struktury maksymalne częstotliwości oscylują w granicach 3 GHz, ale pamiętać należy, że współczesna architektura komputerów umożliwia dynamiczne obniżenie się taktowania procesorów, gdy parametr ten nie jest wykorzystywany na odpowiednim poziomie.

Obecne wszystkie procesory posiadają wielordzeniową budowę, choć genezą tego zjawiska był fakt, że w czasie wojny dwóch największych wówczas producentów procesorów – firmy Intel® i AMD®, procesory pierwszego z nich obsługiwały 2–3 potoki w jednym takcie, zaś drugiego aż 6–7. Wkrótce okazało się jednak, że równoległa struktura współpracujących ze sobą rdzeni jest wydajniejsza, a przede wszystkim tańsza w produkcji i firma Intel® zdominowała ten segment rynku części komputerowych.

Obecnie (2013 rok) procesory wykonywane są w procesie technologicznym 32 nm (nanometrów, czyli 10^{-9} m), co oznacza, że odległość między tranzystorami w CPU wynosi 32 milionowe części milimetra, na co wskazują specyfikacje producentów.

Ze względu na funkcjonalną strukturę można wyróżnić w procesorze takie elementy, jak:

- **rejestry** służące do przechowywania danych oraz wyników, które mogą być ogólnego lub specjalnego przeznaczenia;
- **arytmometr** –wykonujący operacje obliczeniowe na danych;
- **układ sterujący** przebiegiem wykonywania programu;
- **inne układy**, w które producent wyposaża procesor w celu usprawnienia jego pracy (np. pamięć podręczna cache).



Rys. 2. Typowe przednie strony procesorów. Poniżej spody z widocznymi nóżkami

Źródło: Opracowanie własne

Do typowych rozkazów wykonywanych przez procesor należą:

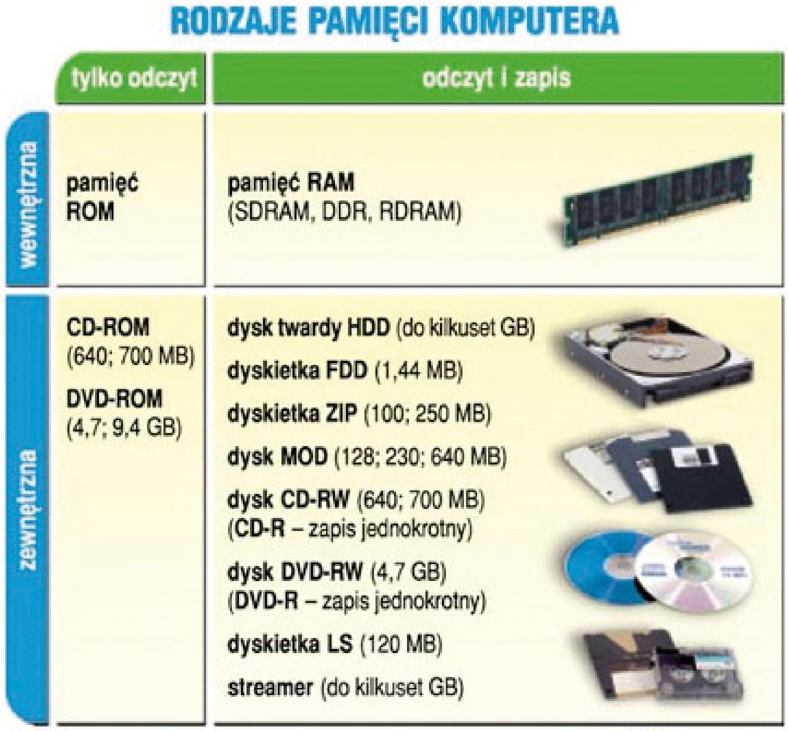
- działania arytmetyczne:
  – dodawanie,
  – odejmowanie,
  – porównywanie dwóch liczb,
  – dodawanie i odejmowanie jedności,
  – zmiana znaku liczby.
- działania na bitach:
  – iloczyn logiczny – AND,
  – suma logiczna – OR,
  – suma modulo 2 (różnica symetryczna) – XOR,
  – negacja – NOT,
  – przesunięcie bitów w lewo lub prawo.
- kopiowanie danych:
  – z pamięci do rejestru,
  – z rejestru do pamięci,
  – z pamięci do pamięci (niektóre procesory),
  – (podział ze względu na sposób adresowania danych).
- Skoki:
  – bezwarunkowe,
  – warunkowe.

1.2.1.2. Pamięć operacyjna

Pamięć operacyjna to układy logiczne wpinane za pomocą złącza krawędziowego w gniazda płyty głównej komputera. RAM (ang. Random Access Memory – pamięć o dostępie swobodnym) ma za zadanie szybką komunikację z procesorem. Poza cache (pamięcią podręczną) jest podstawowym miejscem, skąd pobiera on rozkazy i przechowuje dane na bieżąco mu potrzebne. Zaletą tej pamięci w stosunku do pamięci wirtualnej tworzonej na dysku twardym jest dziesięciokrotnie krótszy czas dostępu. Jej zawartość kasuje się wraz z odcięciem zasilania.

Parametrami odróżniającymi pamięci to ich typ, pojemność i szybkość dostępu. Handlowe oznaczenia pamięci dostępnych obecnie na rynku to: SDRAM, DDR SDRAM, DDR2, DDR3 oraz SO-DIMM używane w laptopach. W celu uniknięcia pomyłek przy montażu różnią się między sobą ilością wyprowadzeń na krawędzi oraz wcięciami w laminacie, gdyż montaż niewłaściwego modułu może doprowadzić do jego uszkodzenia (kości pamięci różnią się także elektrycznie).

Szczególną rolę w komputerze pełni pamięć nieulotna ROM. Najczęściej umieszczony jest na niej BIOS – podstawowy system wejścia/wyjścia (Basic Input/Output System), który startuje bezpośrednio po uruchomieniu komputera. Po włączeniu zasilania dowodzony przez niego komputer określa, jakie urządzenia są dostępne – poszukuje napędów, w tym dysków twardych, testuje i instaluje dostępny sprzęt (np. przydziela mu przerwania), a na koniec odczytuje rekord startowy MBR i znajduje pliki systemu operacyjnego, po czym przekazuje mu zarządzanie komputerem. Nie zawsze BIOS jest zapisywany w sposób trwały w pamięci ROM, istnieją równolegle rozwiązania, w których jest umieszczony w pamięci typu flash, przez co możliwy jest upgrade BIOSu do nowszych wersji.



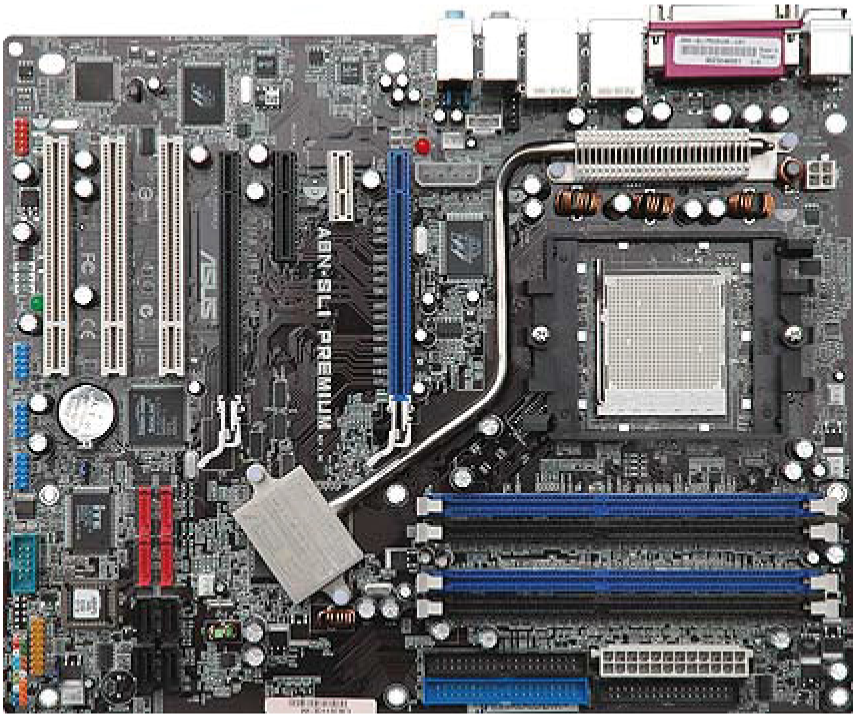
Rys. 3. Rodzaje pamięci komputera (za: www.wersus.com.pl, 07.07.2012)

Przy okazji warto wspomnieć o jednostkach pojemności pamięci. Podstawową jest jeden bit (1b), przyjmujący wartość 1 albo 0 (w praktyce oznacza to, że w danej komórce pamięci prąd jest lub go nie ma). Stąd geneza zastosowania systemu dwójkowego do obliczeń w komputerach. Ponieważ bit przyjmuje tylko dwie wartości, jest jednostką niepraktyczną i zbyt ograniczoną, wprowadzono zatem kolejną – 1 bajt (1B). 1B równy jest 2^3b, czyli 8 bitom. Za jego pomocą można już zapisać i rozróżnić 256 znaków, co wystarczy na zapis wszystkich liter alfabetu, cyfr oraz znaków specjalnych, jakich użytkownik komputera może potrzebować. Zbiór dostępnych znaków został zestandaryzowany i nosi nazwę kodów ASCII.

W praktyce także 1B okazał się jednostką zbyt małą i na co dzień mamy do czynienia z jednostkami pochodnymi, takimi jak: kilobajt, megabajt, gigabajt, terabajt. Każda z nich jest większa od poprzedniej o 2^{10}, czyli 1024 razy. Przez porównanie do systemu dziesiętnego potocznie zakłada się, że każda z nich jest jednostką tysiąc razy większą. Istnieją jeszcze większe jednostki od przytoczonych, rosnące o wspomniane 2^{10}, jednak na obecnym poziomie ilości gromadzonych danych są rzadziej spotykane. Oto zestawienie jednostek pochodnych: bajt (B); kilobajt (kB); megabajt (MB); gigabajt (GB); terabajt (TB); petabajt (PB); eksabajt (EB); zettabajt (ZB); jottabajt (YB).

1.2.1.3. Płyta główna

Płyta główna jest elementem integrującym wszystkie pozostałe moduły komputera. Jej charakterystyczną cechą są wystające w prawie wszystkich kierunkach złącza i gniazda. W nią wpina się procesor z jego radiatorem i wentylatorem, pamięci, karty rozszerzeń, dyski i inne napędy, z niej też prowadzą wyprowadzenia do praktycznie wszystkich peryferiów, od monitora, klawiatury i myszki począwszy. Płyta główna w postaci wielowarstwowej płyty drukowanej oprócz złącz ma wlutowany **chipset**, układy pamięci cache i BIOS. Chipset tworzą najczęściej dwa układy scalone, nazywane mostkami – północnym i południowym. Najważniejsze elementy komputera, takie jak procesor, pamięć operacyjna i magistrala karty grafiki (AGP lub PCI-Express), są sterowane przez **mostek północny**, zawierający dodatkowo szynę systemową FSB, po której odbywa się komunikacja między tymi komponentami. Pozostałe elementy, zarówno jednostki centralnej komputera jak i urządzenia peryferyjne, obsługuje **mostek południowy**.

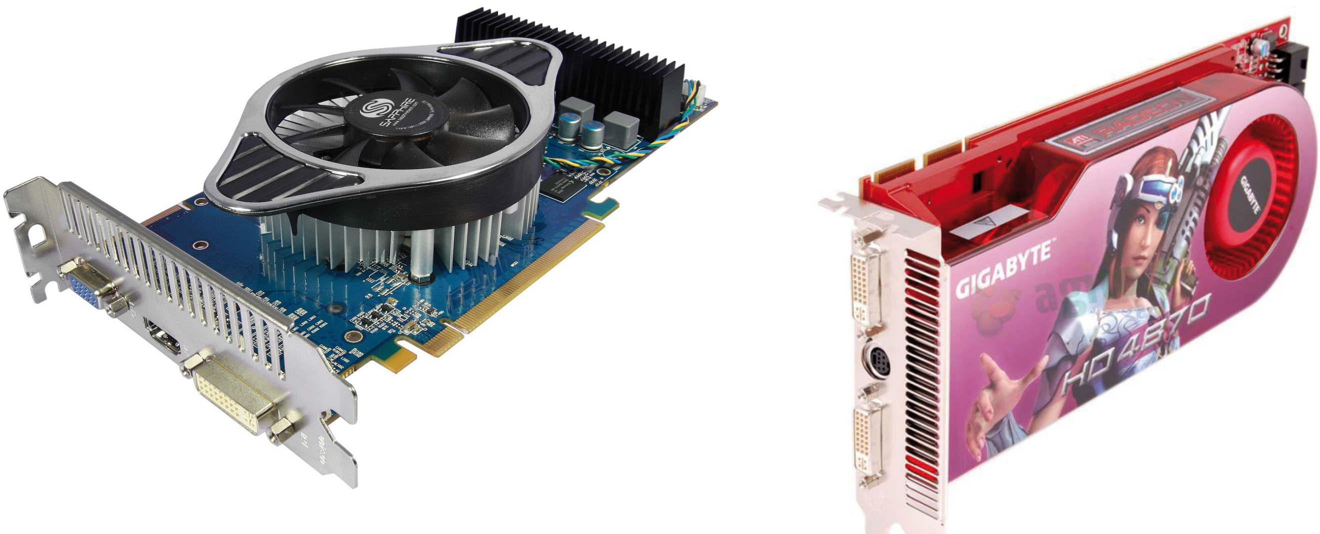


Rys. 3. Przykładowa płyta główna

Źródło: Opracowanie własne

1.2.1.4. Karta grafiki

Moduł instalowany w slot AGP lub PCI-Express płyty głównej albo układ zintegrowany z płytą i odpowiadający za zamianę przetworzonych przez komputer informacji na obraz, który poprzez złącze analogowe D-Sub (VGA), cyfrowe DVI, HDMI lub S-Video i odpowiedni przewód jest następnie wysyłany na monitor lub projektor. Obecnie można kupić jedynie karty wyświetlające wyłącznie grafikę trójwymiarową 3D, z własną pamięcią graficzną, wyświetlające minimum 16,8 mln kolorów (choć oko ludzkie tylu nie rozróżnia), a nawet kolor 16-bitowy (High Color) i 32-bitowy (True Color). W karty graficzne wbudowuje się też wiele zaawansowanych technologii poprawiających wyświetlanie na przykład obiektów we mgle, płomienia, ożywiających teksturowanie obiektów.



Rys. 4. Przykładowe karty grafiki

Źródło: Opracowanie własne na podstawie materiałów reklamowych

1.2.1.5. Obudowa z zasilaczem

Właściwie wystarczy sam zasilacz. Obudowa stanowi jednie szkielet montażowy zasilacza, napędów i płyty głównej oraz zabezpiecza wnętrze komputera przez przypadkową ingerencją, izoluje od pól magnetycznych i chroni człowieka przed porażeniem prądem.

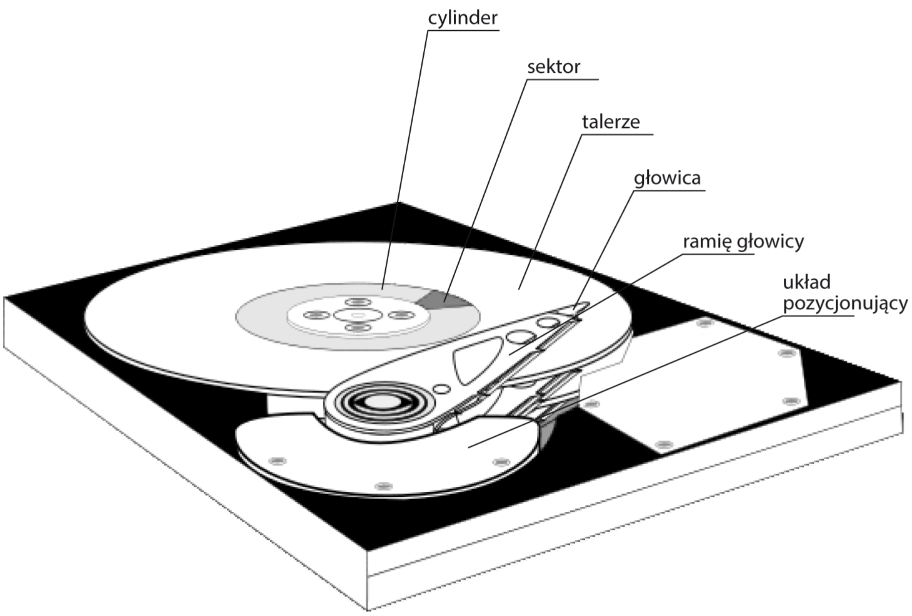
Główną rolą zasilacza jest konwersja prądu sieciowego o napięciu 230V do wartości akceptowalnych przez płytę główną, napędy i wentylatory. Napięcia jakie spotyka się wewnątrz obudowy to 3,3V, 5V i 12V, choć na przykład procesory wtórnie potrafiły pobierać zaledwie 1,65V.

1.2.2. Napędy wewnętrzne i zewnętrzne wraz z nośnikami danych

Napędy możemy podzielić na 2 grupy:

1) napędy zintegrowane z nośnikiem, stanowiące całość;

Ich głównym przedstawicielem jest dysk twardy – w skrócie HDD (hard diskdrive), którego złącze ewoluowało od ATA (IDE), poprzez Fast ATA/EIDE, Ultra ATA/UDMA 33/66/100, do Serial ATA, SATA II oraz, szczególnie ceniony w serwerach, interfejs SCSI. W ostatnich latach powstały popularne obecnie szybkie dyski zewnętrzne SSD oraz pendrive'y – niewielkie rozmiarowo pamięci wpinane do portu USB komputera.



Rys. 5. Budowa Dysku twardego – HDD

Źródło: Opracowanie własne

Na szczególną uwagę zasługują HDD wyposażone w złącze SCSI, gdyż technologia ta rozwinęła się w kierunku maksymalnej niezawodności, łączenia dysków w macierze oraz podłączania i odłączania bez konieczności wyłączania komputera – tzw. technologia hot swap.

2) napędy do odtwarzania/nagrywania zapisu na zewnętrznych nośnikach.

W tej kategorii mamy w szczególności:

a) **stację dyskietek** – FDD (floppydiskdrive), która długo panowała na rynku i w związku z tym przeszła proces ewolucyjny (od obsługi dyskietek 5,25" i pojemności 360 kB oraz 1,2 MB, do dyskietek 3,5" i 1,44 MB, z późniejszą odmianą obsługującą dyski magnetooptyczne czy dyskietki ZIP o pojemności 100 MB, 250 MB i 700 MB) – obecnie w zaniku, wyparta przez pojemniejsze i tańsze napędy optyczne, obsługujące płyty jako nośniki;

b) **napędy optyczne** – CD-ROM/CD-RW/Combo/DVD-ROM/DVD-RW, w tym DoubleLayer czy Double-Sided/Blue-Ray – obsługujące płyty CD 650 MB, 700 MB i 800 MB. W przypadku napędów DVD nośnik – płyta DVD, ma pojemność odpowiednio 4,7 GB, 8,4 GB, a w przypadku płyt Blue-Ray nawet 33 GB i 50 GB;

c) **napęd taśmowy** – streamer, popularny szczególnie w bankach, przeznaczony do tworzenia kopii zapasowych ze względu na dużą pojemność. Jego wadą jest oparcie na technologii taśmy magnetycznej – nietrwałej i o wolnym dostępie do żądanego miejsca zapisu (taśma musi być przewinięta);

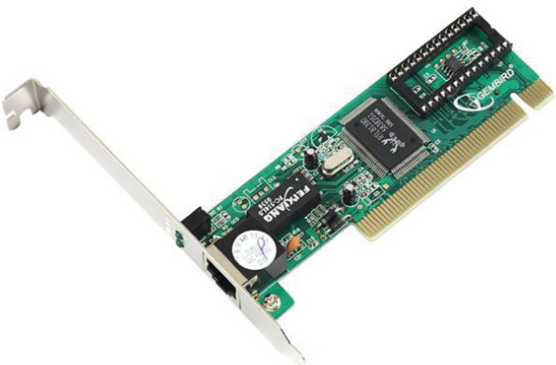
d) **czytniki kart pamięci** – niewielkich, ale bardzo pojemnych plastikowych kart w standardach: Compact Flash, SD (Secure Digital) i micro SD, MS (Memory Stick) i MS Duo, MMC. Poza nimi (które są wiodące) opracowano jeszcze kilka odmian i standardów kart, co sprawiło, że czytniki w rozbudowanych wersjach potrafią obsłużyć nawet 33 ich typy (33in1). Ten wysyp i popularność kart zawdzięczamy zastosowaniu zewnętrznych nośników pamięci w urządzeniach kompaktowych: fotograficznych aparatach cyfrowych, telefonach komórkowych, odtwarzaczach mp3 i mp4, palmtopach. Oprócz pojemności takiej karty istotna jest również szybkość transferu, który uznaje się za szybki, gdy jest w granicach 20 MBps.

1.2.3. Karty rozszerzeń

Karty zwiększają możliwości komunikacyjne komputera i dają dostęp do wielu rozszerzeń, wzbogacając zakres funkcjonalny komputera. Wpina się je w gniazda płyty głównej za pomocą złącza krawędziowego. Dawniej były to złącza ISA, następnie PCI i, osobno dla karty grafiki, AGP, a współcześnie – złącza o nazwie PCI-express.

Typowymi kartami spotykanymi w naszych komputerach są:

a) karta grafiki;
b) karta dźwiękowa;
c) karta sieciowa i modem;
d) karta telewizyjna.



Rys. 6 Karta sieciowa – przykład karty rozszerzeń (widać złącze krawędziowe służące do montażu na płycie głównej)

Źródło: Opracowanie własne, materiały reklamowe

Karta grafiki została omówiona powyżej, w części dotyczącej elementów niezbędnych do działania komputera.

1.2.3.1. Karta dźwiękowa

Umożliwia rejestrację, przetwarzanie i odtwarzanie dźwięku. Poprawna jest również nazwa „karta muzyczna". Wiodącą marką na rynku kart dźwiękowych jest seria Sound Blaster firmy Creative Labs. Składa się z generatora dźwięku, przetworników A/C i C/A, miksera i wzmacniacza oraz interfejsu MIDI – pozwalającego podłączyć zewnętrzne cyfrowe urządzenia muzyczne w tym standardzie. Podstawowym pojęciem w tej kategorii jest próbkowanie (sampling), polegające na digitalizacji dźwięków. W celu uzyskania jakości CD odbywa się ono dla częstotliwości 44,1 kHz. W podstawowych zastosowaniach, w celu redukcji kosztów zestawu przy jednoczesnym zachowaniu w miarę poprawnej multimedialności, rezygnuje się z oddzielnej karty na rzecz układu zintegrowanego z płytą główną.

1.2.3.2. Karta sieciowa i modem

Oba urządzenia służą do skomunikowania komputera z innymi komputerami w sieci. Modem dokonuje połączenia poprzez sieć telefoniczną (analogową lub cyfrową – ISDN), karta sieciowa zaś łączy się poprzez lokalną sieć komputerową LAN. Charakterystycznym dla modemu jest złącze wyjściowe RJ-11. Karty sieciowe możemy natomiast podzielić na:

– karty łączące się szeregowo przez gniazdo BNC (karty starszego typu) i kabel koncentryczny;
– karty łączące się przez złącze wyjściowe RJ-45 i kabel 8-żyłowy, popularnie nazywany skrętką – układ gwiazdy (każdy komputer jest bezpośrednio podłączony do huba);
– karty bezprzewodowe: radiowe lub Wi-Fi, łączące się przez punkty dostępowe.

1.2.3.3. Karta telewizyjna

Inaczej tuner telewizyjny, umożliwia odbiór programów telewizji naziemnej i satelitarnej (w tym również telewizji cyfrowej). Dysponuje też możliwością przechwytywania fragmentów wideo i prostej edycji wideo.

1.2.4. Urządzenia peryferyjne

Intuicyjnie urządzenia peryferyjne (zewnętrzne) dzielimy na wejściowe i wyjściowe. Wejściowe to te, za pomocą których użytkownik komunikuje się z komputerem, wprowadzając dane i wydając polecenia czy to osobiście, manualnie czy werbalnie, czy też poprzez dygitalizowanie rzeczywistości utrwalonej w analogowy sposób.

Do urządzeń wejściowych zaliczamy:

a) klawiaturę;
b) urządzenie wskazujące – mysz, touchpad (ekran dotykowy) lub trackball;
c) skaner;
d) mikrofon;
e) fotograficzny aparat cyfrowy lub kamerę.

Do urządzeń wyjściowych zaliczamy zaś:

a) monitor, projektor;
b) drukarkę;
c) plotter;
d) głośniki i słuchawki.

Istnieją także urządzenia pełniące równocześnie rolę wejściową i wyjściową. Zaliczamy do nich na przykład ekran dotykowy.

Klawiatura o układzie QWERTY zawiera najczęściej 102 klawisze – alfanumeryczne, numeryczne, funkcyjne, specjalne i sterowania kursorem, nie zawiera natomiast znaków diakrytycznych, charakterystycznych dla wielu języków. Te specjalne litery, niespotykane w alfabecie łacińskim, uzyskuje się za pomocą kombinacji klawiszy prawy Alt i litera najbardziej zbliżona do lokalnej.

Dla języka polskiego odpowiednie kombinacje klawiszy wyglądają następująco:

ą=Alt+a;

ę=Alt+e;

ó=Alt+o;

ł=Alt+l;

ń=Alt+n;

ć=Alt+c;

ś=Alt+s;

ż=Alt+z;

ź=Alt+x.

Oprócz podanych wyżej wykorzystuje się jeszcze kombinacje do szybkich operacji na oknach w systemie MS Windows (np.: przełączanie otwartych okien to Alt+Tab; Alt+F4 – zamykanie aktywnego okna) czy też do nawigacji w aplikacjach, zaznaczania (Ctrl+a – zaznaczenie całego tekstu lub wszystkich elementów), kopiowania, wycinania i wklejania zaznaczonej zawartości (odpowiednio: Ctrl+c, Ctrl+x, Ctrl+v).

Urządzenia wskazujące służą do wskazywania i wyboru elementów umieszczonych na pulpitach graficznych systemów operacyjnych za pomocą przemieszczanego precyzyjnie kursora. Pierwszym z nich była mysz, a jej koncepcja została przeniesiona na pozostałe urządzenia wskazujące (ekran dotykowy i trackball), dlatego omówimy tylko funkcjonalność myszy. Otóż, do sterowania kursorem wykorzystuje się przede wszystkim ruch urządzenia po płaskiej powierzchni, który odwzorowywany jest na ekranie. Oprócz tego mysz posiada wbudowane 2 przyciski: lewy służy do zaznaczania i zatwierdzania wyboru, prawy – do otwierania podręcznego menu z aktualnym zestawem możliwych poleceń do wyboru. Szczególną funkcjonalnością myszy jest metoda „przeciągnij i upuść" (drag&drop), która polega na kliknięciu na danym elemencie (ikonie, pasku tytułu, itp.) i przytrzymaniu lewego przycisku myszy, następnie (bez zwalniania przycisku) na przesunięciu myszy po stole, co zaskutkuje przeniesieniem lub skopiowaniem danego elementu (kopiowanie lub przeniesienie zależy od tego, czy dodatkowo przytrzymuje się czy też nie klawisz Ctrl na klawiaturze).

Skaner to urządzenie potrafiące odwzorować wiernie punkt po punkcie zawartość kartki papieru – zamienić obraz rzeczywisty na cyfrową interpretację. Dokonuje tego za pomocą przesuwającej się listwy elementów światłoczułych – matrycy CCD. Możemy wyróżnić skanery: ręczne, płaskie, bębnowe. Urządzenia te mogą posiadać też przystawkę do skanowania slajdów.

Mikrofon, nie tylko w komputerach, służy do wprowadzenia dźwięku do komputera. Dość długo był wykorzystywany wyłącznie przez muzyków. Od pewnego czasu ogromną karierę robią aplikacje i technologie umożliwiające przekaz dźwiękowy w czasie rzeczywistym, takie jak telefonia internetowa VoIP (voiceover IP) i programy do komunikacji natychmiastowej – IM (Instant Messaging). Obie te technologie ewoluują od przekazywania wyłącznie dźwięku do pełnego kontaktu video łączących się osób.

Fotograficzny aparat cyfrowy to alternatywny do skanera sposób na cyfryzację obrazu i w ten sposób uczynienie go rozpoznawalnym przez aplikacje komputerowe, najczęściej komunikuje się z komputerem albo poprzez podłączenie portami USB w komputerze i microUSB w aparacie, albo przez wyjęcie karty pamięci z aparatu i umieszczenie jej w czytniku komputera. **Kamera** wraz z mikrofonem stanowią obecnie podstawowy zestaw do komunikacji natychmiastowej – IM.

Monitor wyświetla wyniki wykonywanych operacji oraz komunikaty generowane przez komputer, słowem: stanowi podstawowe źródło informacji zwrotnej dla użytkownika. Pierwotnie monitory CRT wzorowały się na odbiornikach TV, posiadały wypukły kineskop i wyświetlały dwa kolory: czarny i zielony, bursztynowy albo biały. Z czasem ewoluowały zarówno parametry monitora, jak i jego konstrukcja. Monitory CRT wymagały przetworzenia cyfrowego sygnału pochodzącego z komputera na sygnał analogowy. Operację tę wykonywał konwerter analogowo-cyfrowy RAMDAC umieszczony na karcie grafiki. Następcą tego typu monitora stały się ciekłokrystaliczne panele LCD. Ich bardzo praktyczną zaletą jest niewątpliwie płaska konstrukcja, sprawiająca, że ich użytkowanie jest wygodniejsze niż poprzednika. Monitor LCD zbudowany jest z ciekłych kryształów umieszczonych pomiędzy dwoma warstwami szkła, tranzystorów i lamp podświetlających. W przeciwieństwie do monitora CRT muszą jednak pracować w zalecanej, preferowanej rozdzielczości, inaczej nie zachowują zadowalających parametrów obrazu (w rozdzielczościach innych niż zalecane prosta potrafi mieć zmienną grubość, litery zbudowane są z różnej grubości kresek). W przypadku paneli LCD niemożliwe jest też używanie urządzeń mierzących kolor i pozwalających na precyzyjną kalibrację, co daje przewagę monitorom kineskopowym w zastosowaniach graficznych i wydawniczych.

Część przedstawionych poniżej informacji porównawczych na temat monitorów pochodzi z archiwalnych numerów informatorów reklamowych branży informatycznej, które w chwili obecnej nie są już możliwe do odnalezienia.

Tab. 2. Porównanie pozostałych cech LCD i CRT

Porównanie parametrów monitorów CRT i LCD - zestawienie zalet i wad	
CRT	**LCD**
aktywny obszar ekranu – mniejszy od kineskopu	aktywny obszar ekranu – równy całkowitej powierzchni
błędy zbieżności – nierzadko silne	błędy zbieżności – niemożliwe
czytelność na krawędziach ekranu – zazwyczaj zaledwie satysfakcjonująca	czytelność na krawędziach ekranu – bardzo dobra
czytelność obrazu –- zazwyczaj dobra	czytelność obrazu – zazwyczaj bardzo dobra
emisja ciepła –- bardzo wysoka	emisja ciepła – niska
ergonomia –- skomplikowane ustawienie, czasem wymaga wiedzy specjalistycznej, mało elastyczny, ciężki	ergonomia – ustawienie stosunkowo proste, może być obracany, lekki
interferencja elektromagnetyczna – bardzo podatny	interferencja elektromagnetyczna – niemożliwa
jasność/kontrast – zazwyczaj tylko dobre	jasność/kontrast –bardzo dobre
migotanie obrazu – zawsze obecne	migotanie obrazu –całkowicie statyczny obraz
odbicia –odbijanie światła zewn. (z wyjątkiem płaskich ekranów)	odbicia – brak odbić dzięki płaskiemu ekranowi
pobór mocy – wysoki	pobór mocy – niski
promieniowanie – obecne	promieniowanie – niemożliwe
równomierna dystrybucja jasności – zależy od konkretnego egzemplarza, zazwyczaj zaledwie satysfakcjonująca	równomierna dystrybucja jasności – bardzo dobra (kiedy podświetlenie ekranu jest jednorodne)
skala szarości – zazwyczaj lepsza niż w LCD	skala szarości – relatywnie słabsza niż w CRT
stabilność koloru – może być bardzo dobra	stabilność koloru – dobra
wymagana przestrzeń – duża	wymagana przestrzeń – mała
zakres kolorów – większy niż w LCD	zakres kolorów –- mniejszy niż w CRT
zniekształcenia poduszkowate/błędy liniowości – częste	zniekształcenia poduszkowate/błędy liniowości – niemożliwe

Źródło: Era Komputera, aktualnie niedostępne

Odmianą monitorów LCD są matryce TFT używane w notebookach. TFT to nazwa wyświetlacza sterowanego cienkowarstwowymi tranzystorami o aktywnej matrycy.

Obecnie panele LCD, wraz z odmianą TFT, są szybko wypierane z rynku przez monitory LED, które również są odmianą technologii LCD. Są one jeszcze cieńsze i jeszcze bardziej energooszczędne oraz dają bardziej kontrastowy i żywy obraz. Różnią się źródłem światła podświetlającego ekran – zamiast CCFL (tradycyjnej świetlówki) mają mini diody emitujące światło (LED). Ale i tej technologii wróży się rychły koniec, wraz z całą technologią LCD, a to za sprawą rozwijającej się organicznej technologii OLED.

Cały obraz tworzony na monitorze składa się z pikseli, czyli kolorowych punktów na ekranie. Każdy pojedynczy piksel złożony jest z trzech subpikseli w kolorach podstawowych dla wyświetlania: zielonym, czerwonym i niebieskim. Zapalenie się wszystkich subpikseli w pikselu daje biały punkt na ekranie.

Projektor multimedialny. Jeśli chcemy obraz generowany przez nasz komputer pokazać większej grupie osób, monitory okazują się być za małe. Do celów prezentacyjnych używa się **projektorów**. Podłącza się je także do wyjścia karty graficznej, zaś obraz jest wyświetlany na jasnej płaskiej powierzchni –ścianie lub dużym białym ekranie.

Ze względu na konstrukcję wyróżniamy projektory DLP lub LCD (3LCD). Źródłem światła w projektorach DLP jest lampa łukowa, która jest najdroższym a jednocześnie najmniej trwałym elementem projektora. Zbliżający się koniec żywotności lampy można poznać po nierównomiernym naświetleniu obrazu – znacznie jaśniejszym środku i ciemniejszych brzegach. Z kolei projektory 3LCD generują mniej wyrazisty obraz o gorszym nasyceniu kolorów, za to są poręczniejsze, trwalsze i tańsze.

Zarówno monitor, jak i projektor wyświetla obraz w sposób nietrwały. Aby zachować go na nośnikach, takich jak na przykład papier, konieczne jest użycie urządzeń typu drukarka czy ploter.

Drukarka to podstawowe urządzenie przeznaczone do utrwalania na papierze efektów pracy komputera. Pierwsze drukarki wywodziły się z maszyn do pisania. Były to drukarki monochromatyczne, kolejno: 9-, 18- i 24-igłowe. Drukowanie polegało na uderzaniu igieł przesuwającej się głowicy w barwną tasiemkę i odbijanie się wzoru złożonego z kropek na papierze. Drukowanie za pomocą **drukarek igłowych** było bardzo tanie, a jednocześnie bardzo głośne. Pozwalało też na jednoczesne drukowanie oryginału i kopii po podłożeniu kalki.

Drukarki igłowe zostały wyparte z domów przez **drukarki atramentowe** – cichsze, szybsze i dające kolorowe wydruki. Technika druku atramentowego opiera się na przesuwaniu się pod głowicą kartki papieru, która – linijka po linijce – jest bombardowana mikroskopijnymi kropelkami tuszu wysyłanymi z zasobników przez głowicę piezoelektryczną. Wadą tych drukarek są koszty eksploatacyjne – drogi tusz, wystarczający na niewielką ilość wydruków.

Pewną odmianą drukarek atramentowych są **drukarki termotransferowe i termosublimacyjne** wykorzystujące wysoką temperaturę do przenoszenia kropelek wosku na nośnik. Nośnik może być nierówny i porowaty, co czyni je urządzeniami pożądanymi w pracy firm reklamowych. Druk z ich zastosowaniem jest bardzo drogi.

Drukarki laserowe uzupełniają ofertę drukarek. Łączą w sobie zalety drukarek atramentowych – pozwalają na wyraźny i kolorowy wydruk, a dodatkowo robią to niezwykle szybko i wydajnie. Ich zaletą jest też koszt wydruku – niższy niż w przypadku „plujek", nieco wyższy od wydruków igłowych. Druk laserowy można porównać do odbijania pieczątki. Obraz pierwotnie jest tworzony na bębnie obrazowym – za pomocą pola elektrostatycznego i lasera rozkładany jest na nim toner – a następnie zostaje przyklejony do kartki papieru i utrwalony wysoką temperaturą. Wprawdzie materiały eksploatacyjne (tonery i bęben światłoczuły) wystarczają w tym typie drukarek na kilka tysięcy wydruków (bęben najczęściej na 40 tys., tonery na 2,5–3,5 tys. stron), czyniąc wydruk pojedynczej kartki tanim, jednakże zakup tonera czy wymiana bębna zawsze kojarzy się z wysokim jednorazowym kosztem. Należy więc planować wymianę tych materiałów, by nie była zaskoczeniem.

Tab.3. Porównanie cech drukarek

Cecha drukarki	Drukarka igłowa	Drukarka atramentowa	Drukarka laserowa
Źródło barwnika	Tasiemka barwiąca	Tusz w głowicy	Toner
Druk kolorowy	Nie	Tak	Tak
Tempo zużywania się materiałów eksploatacyjnych	Średnie (wystarcza na 500–1000 stron)	Szybkie (do 200 stron)	Wolne (2,5–3,5tys.)
Koszt materiałów eksploatacyjnych	Najniższy, do 20 zł	Wysoki, oryginalne tusze >130 zł/kolor	Niski, jeśli przeliczyć na okres używania, wysoki – jednorazowy w momencie wymiany, 250–450 zł/ kolor
Szybkość wydruku	Bardzo wolna	Tempo średnie	Bardzo szybka
Głośność	Bardzo głośna	Bardzo cicha	Względnie cicha
Możliwość drukowania kopii jednoprzebiegowo – przez kalkę	Tak	Nie	Nie

Źródło: Opracowanie własne

Ploter używany jest w biurach projektowych i agencjach reklamowych do tworzenia obrazów wielkoformatowych. Wyglądem przypomina deskę kreślarską. Do deski przytwierdzona jest pionowa linijka, do której przymocowany jest pisak. Linijka może poruszać się w poziomie, a pisak wzdłuż linijki w pionie. Złożenie tych ruchów pozwala uzyskać efekt podobny do kreślenia ręką ludzką.

Głośniki i słuchawki komputerowe nie różnią się od głośników i słuchawek spotykanych w urządzeniach audio w segmencie AGD/RTV. Zamieniają impulsy elektryczne otrzymywane z karty dźwiękowej na drgania słyszane przez ucho ludzkie jako dźwięki. Oprócz muzyki umożliwiają bezpośrednie rozmowy za pomocą aplikacji IM i wideokonferencje przez Internet.

1.2.5. Montaż i demontaż podzespołów komputera

Współczesne komputery mają budowę modułową. W jednostce centralnej poszczególne elementy przytwierdza się albo do szkieletu obudowy, albo wciska w odpowiednie gniazda płyty głównej. Urządzenia peryferyjne dołączane są poprzez mocno zróżnicowane wtyki i gniazda. Wszystkie moduły mają złącza konstruowane w ten sposób, by zminimalizować ryzyko nieodpowiedniego przypięcia, które (z uwagi na różne specyfikacje elektryczne poszczególnych modułów) mogłoby doprowadzić do ich uszkodzenia lub zniszczenia (spalenia). Z uwagi na fakt, że następuje w tej dziedzinie szybki rozwój, pociągający za sobą zmiany dotyczące zarówno parametrów wydajnościowych, jaki i elektrycznych części konstrukcyjnych, zmieniają się konstrukcje złącz nawet w obrębie danego typu podzespołu. Proces ten postępuje tak dynamicznie, że z dużym prawdopodobieństwem można założyć, iż zbyt szczegółowy opis montażu poszczególnych modułów z dokładnym opisem gniazd i wtyków byłby nieaktualny już w dniu wydruku niniejszej publikacji.

Ponadto, tak jak nikt nie zostanie mechanikiem samochodowym po teoretycznym kursie, bez zajrzenia pod maskę pojazdu, tak jak nikt nie będzie kierowcą bez praktyki na jazdach próbnych, tak w celu poznania wnętrza komputera należy zdjąć obudowę i zajrzeć do środka.

Zanim jednak to nastąpi, trzeba pamiętać o odpięciu komputera od zasilania. Jest to czynność podstawowa zarówno ze względu na bezpieczeństwo osoby eksperymentującej, jak i z uwagi na wrażliwe elementy wewnątrz obudowy. Niektóre z nich pracują na tak małych prądach, że wystarczy przeskok iskry pomiędzy spoconą dłonią i stykami, by trwale uszkodzić choćby pamięć.

Opis demontażu i montażu różnorodnych generacji podzespołów stanowiłby spore dzieło, a Autor niniejszej publikacji nie ma takich zapędów, zresztą nie jest to celem niniejszej publikacji. Warto jednak przytoczyć choćby ogólne wskazówki. I tak, z uwagi na różnorodność modułów i wielość ich generacji, producenci dbają, by różniły się one także budową złącza. W celu uniemożliwienia montażu elementu w niewłaściwym gnieździe bądź wpięcia wtyczki do gniazda o nieodpowiedniej specyfikacji elektrycznej, każda wtyczka i każde złącze jest charakterystyczne dla danej generacji określonego podzespołu. Złącza grzebieniowe (krawędziowe), mają różne liczby styków i – co za tym idzie – są różnej długości, zaś elementy tak samo długie mają inaczej rozmieszczone wcięcia, odpowiadające poprzeczkom właściwego gniazda. Wtyki (męskie) mają inną liczbę pinów, w innym układzie, gniazda (żeńskie) mają dostosowany do odpowiedniego wtyku układ i liczbę otworków. Różne są także kształty wtyków i gniazd, tak aby pasowały do siebie tylko określone.

W celu identyfikacji dodatkowo na podzespołach umieszczane są naklejki (tzw. stickery) zawierające informacje o tym, co to za element, której generacji, a także jakiej pojemności lub wydajności. Część opisów umieszczona jest bezpośrednio na układach scalonych i płytkach drukowanych – opisywane w ten sposób w ten sposób są na przykład gniazda płyty. Zwiększa to prawdopodobieństwo właściwego doboru modułu oraz prawidłowego osadzenia go w gnieździe.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Co zrobiłbyś w celu przyspieszenia uruchamiania się komputera oraz wczytywania się systemu operacyjnego? Jakie zmiany w hardware zaproponujesz? Co ulepszyłbyś w zakresie oprogramowania?
b) Zakupiłeś nową grę, w której niewłaściwie wyświetlają się płomienie. Jakie ustawienia karty grafiki odpowiadają za ten parametr? W jaki sposób poprawić wydajność graficzną komputera?
c) W jaki sposób wykryć i zdefiniować konflikty sprzętowe komputera? Czym się objawiają? Otrzymałeś komunikat błędu, po którym komputer ciągle się restartuje. Jak wykorzystasz pozyskaną w ten sposób informację?

1.3. Oprogramowanie

Program komputerowy, inaczej **aplikacja,** to – najogólniej rzecz ujmując – zestaw instrukcji do wykonania przez komputer. Często oba pojęcia są stosowane zamiennie, choć nie zawsze aplikacja jest jednym programem. Aplikacja przetwarza dane, czyli wykonuje na nich rozmaite operacje. Za względu na pełnione funkcje można dokonać podziału dostępnego oprogramowania na:

1. systemowe;
2. aplikacyjne;
3. narzędziowe.

1.3.1. System operacyjny

System operacyjny jest najważniejszym programem w komputerze. Do niego należy zarządzanie plikami i dyskami komputera, współpracą urządzeń składowych, np. napędów optycznych czy kart rozszerzeń, oraz pośredniczenie pomiędzy człowiekiem a sprzętem komputerowym, będąc przyjaznym dla obu stron. Dla bezpieczeństwa, by użytkownik nie dokonał bezwiednie zmian o dalekosiężnych skutkach, w systemach operacyjnych wydziela się jądro systemu (kernel), które potrafi kontaktować się z aplikacjami poprzez powłokę systemową (shella). Spotyka się 3 rodzaje jąder systemowych: monolityczne, hybrydowe i mikrojądro.

Najbardziej rozpowszechnionym jest system Windows firmy Microsoft, ale oprócz niego możemy spotkać systemy MacOS X, Unix i Linux w wielu odmianach.

Fizycznym zapisem na dysku, zarówno programów jak i danych, jest plik. Pliki z kolei, z uwagi na zazwyczaj dużą ich liczbę, są posegregowane i umieszczone w folderach i podfolderach (katalogach i podkatalogach).

Większość systemów operacyjnych posiada środowiska graficzne GUI ułatwiające ich obsługę. Dla konkretnego systemu operacyjnego tworzone jest dedykowane oprogramowanie. Spotyka się też rozwiązania „system i komputer tej samej firmy". Rozwiązanie takie jest zwykle bardziej stabilne, ale przywiązuje nas zwykle do jednego producenta, gdy chcemy na przykład dokupić drukarkę czy rozbudować sieć w firmie.

Microsoft Windows to rodzina kilku linii systemów operacyjnych wyprodukowanych przez firmę Microsoft. Sam pomysł stworzenia systemu okienkowego firma Microsoft odkupiła od firmy XEROX. Obecnie systemy rodziny Windows spotyka się w prawie każdym komputerze osobistym. Kolejność powstania systemów operacyjnych Windows datuje się następująco:

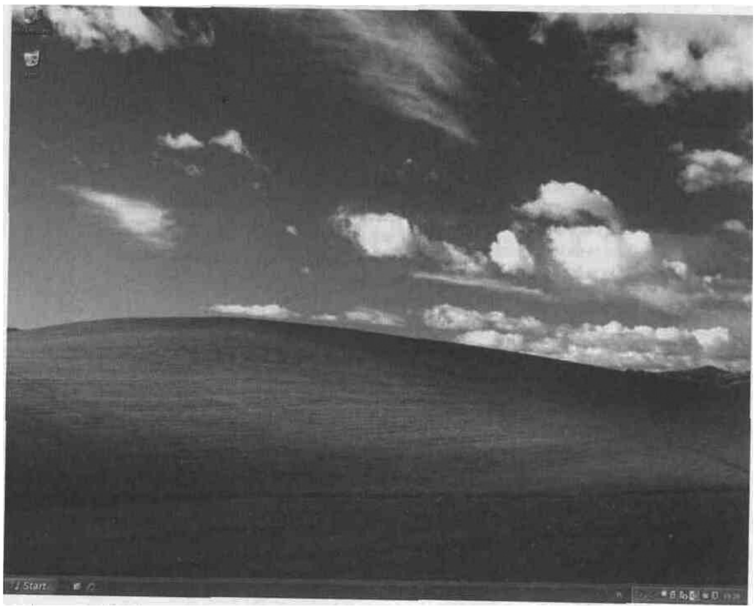
1) Windows 1.0 – 1985 r.;
2) Windows 2.0 – 1987 r.;
3) Windows 3.0 –1990 r. – pierwszy produkt rodziny, który osiągnął szerszy sukces. Wprowadzone ulepszenia dotyczyły przede wszystkim interfejsu użytkownika i możliwości pracy wielozadaniowej;
4) Windows NT – 1993 r. – seria NT była postrzegana jako system dla profesjonalistów. Połączenie linii systemów operacyjnych dla użytkowników domowych i profesjonalistów dokonało się dopiero przy okazji wprowadzenia systemu Windows XP;
5) Windows 95 – 1995 r. – zmiany w interfejsie użytkownika, dodano rozwijane menu, rzeczywista praca wielozadaniowa, otwartość na sieć Internet, obsługa standardu Plug&Play;

6) Windows 98 – 1998 r. – następca Windows 95, krytykowany za pracę wolniejszą niż poprzednik. Zmodernizowano interfejs użytkownika, charakteryzujący się teraz integracją przeglądarki Internet Explorer z Eksploratorem Windows, dodano obsługę USB. Większość niedogodności została wyeliminowana w wydanej w roku 1999 wersji Windows 98 Second Edition;
7) Windows 2000 – 02.2000 r. – system łączący większość walorów Windows NT i 98; wygodny system plików, stabilność działania, bogata obsługa sprzętu.
8) Windows Me – 09.2000 r. – skierowany do użytkowników domowych, ukierunkowany bardziej na rozrywkę i zgodność z posiadanym sprzętem i oprogramowaniem niż jego zabezpieczeniami i stabilnością działania. Ostatni z systemów operacyjnych wywodzących się z linii DOS;
9) Windows XP – 2001 r. – udana próba stworzenia jednolitej linii systemów Windows. System opiera się na kodzie NT z dodanym nowym interfejsem graficznym zawierającym wiele nowości i usprawnień. Dla celów niniejszego opracowania za przykład posłużył system operacyjny Windows XP;
10) Windows VISTA – 2007 r. – raczej nieudany system, dość szybko doczekał się następcy;
11) Windows 7 – 2010 r. – aktualnie powszechnie stosowany system operacyjny;
12) Windows 8 – nowy system o zmienionej koncepcji interfejsu. Dystrybuowany w 3 wersjach: Windows 8, Windows 8 Pro, Windows 8 Enterprise. Premierę miał w listopadzie 2012 roku.

Ogólne wiadomości o systemie Windows

Pulpit

Pulpit to przestrzeń robocza, która ukazuje się po uruchomieniu komputera i zalogowaniu się użytkownika. Skojarzenie z blatem biurka jest jak najbardziej zamierzone. Na ekranie często możemy umieszczać, przesuwać rożne obiekty, tak jak na prawdziwym biurku. Na pulpicie Windows można wyróżnić kilka stref (Rys. 6):

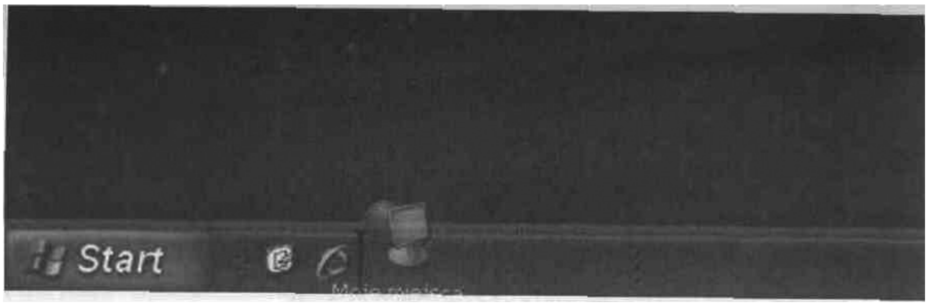


Rysunek 6. Pulpit Windows XP

Źródło: Opracowanie własne

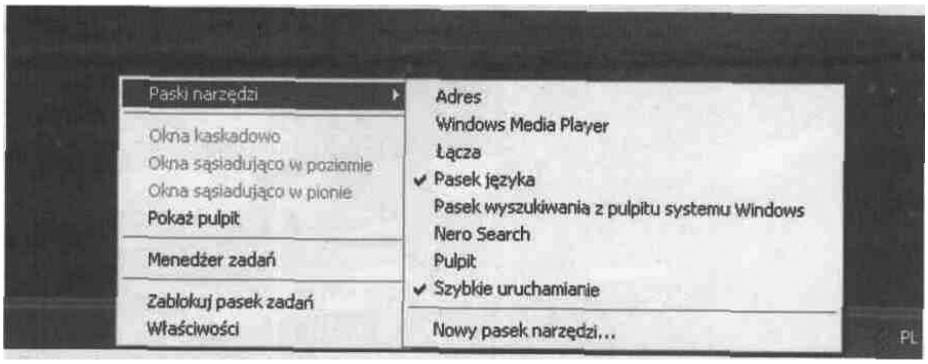
1. Przycisk START, który uruchamia menu z dostępem do licznych funkcji systemu.

2. Pasek zadań – tu „odkładane" są programy po zminimalizowaniu okien. Za jego pomocą możemy szybko przemieszczać się między otwartymi programami. Na pasku zadań można umieścić dodatkowe elementy, takie jak elementy użytkownika (np.: skróty do programów – Rys. 7) oraz predefiniowane, gotowe wzorce systemowe (p..: pasek szybkiego uruchamiania, pasek języka itd. – Rys. 8).



Rysunek 7. Przenoszenie elementów na pasek zadań

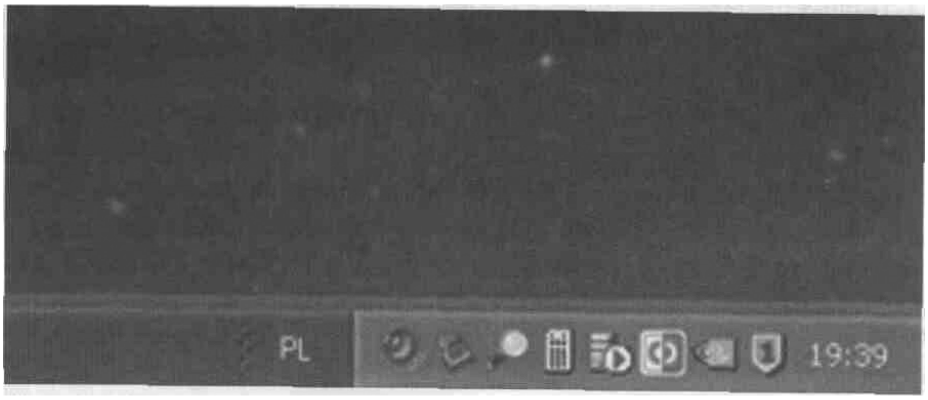
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 8. Wbudowane paski narzędzi

Źródło: Opracowanie własne

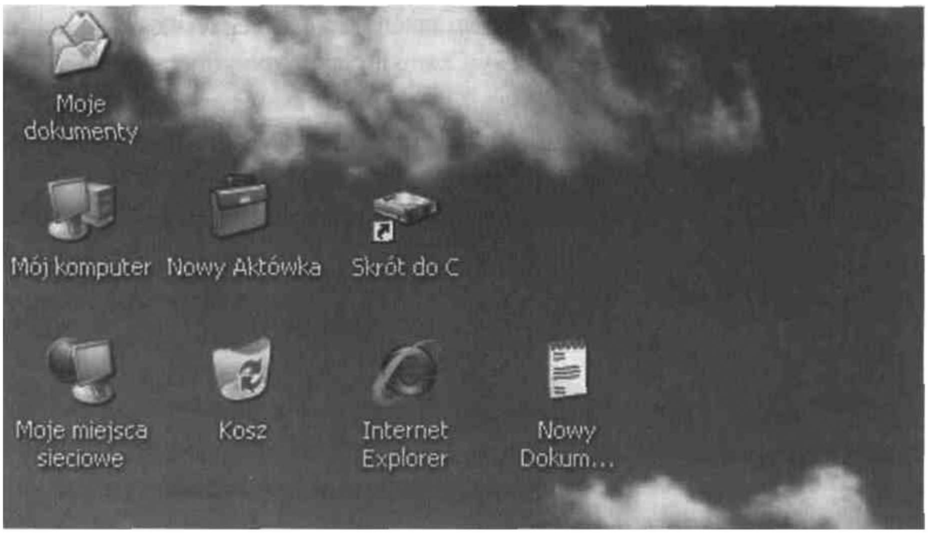
3. Zasobnik systemowy – prawa część paska zadań. Ikony alokowane w tym miejscu informują użytkownika o programach uruchomionych podczas startu systemu operacyjnego, np.: programy antywirusowe, bazy danych, komunikatory internetowe, dialery. Zbyt duża liczba „działających w tle” programów uruchamianych poprzez zasobnik systemowy uszczupla zasoby sprzętowe komputera, dlatego użytkownik powinien kontrolować stan zasobnika (Rys. 9).



Rysunek 9. Zasobnik systemowy

Źródło: opracowanie własne

4. Ikony pulpitu, skróty – graficzne opisy programu, pliku, folderu (Rys. 10).



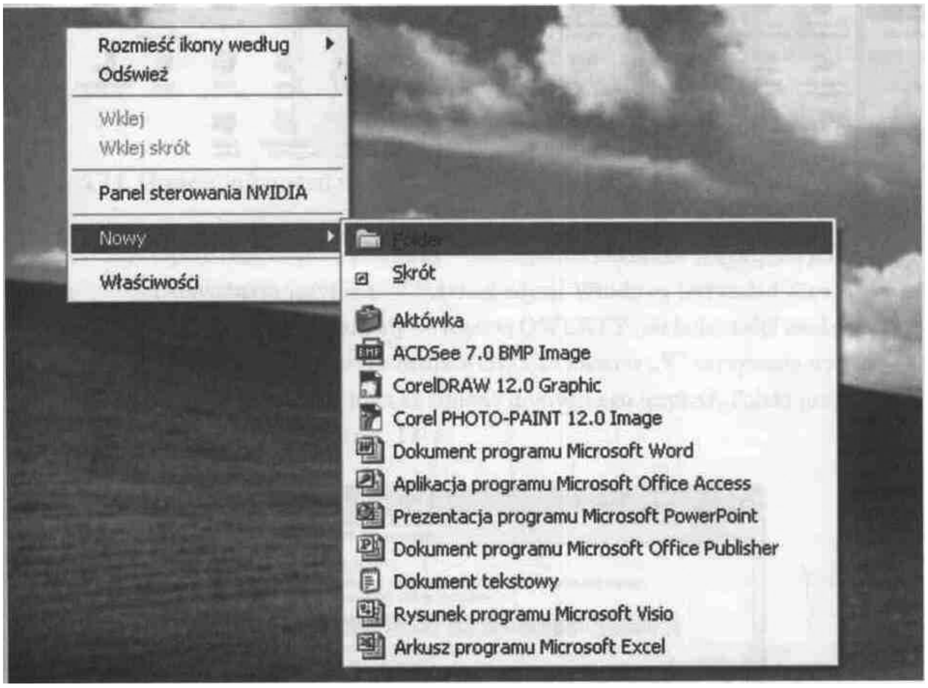
Rysunek 10. Ikony, skróty pulpitu

Źródło: Opracowanie własne

System Windows komunikuje się z użytkownikiem za pomocą okien. W oknach wyświetlana jest zawartość plików, folderów. Standardowymi elementami okna Windows są przyciski: minimalizuj, przywróć w dół/maksymalizuj, zamknij, pasek przewijania.

Z poziomu menu START użytkownik ma dostęp do zainstalowanych programów, jak też opcji konfiguracyjnych systemu operacyjnego. Oprócz menu START w systemie Windows spotykamy się z:

I. „Menu podręcznym" (kontekstowym) – z reguły dostępne jest ono po kliknięciu na obiekcie prawym przyciskiem myszki. Menu kontekstowe zawiera najczęściej używane przez użytkownika opcje poszczególnych programów (Rys. 11). Pracując na co dzień z programami, z pewnością docenimy ten rodzaj menu.



Rys. 11. Menu kontekstowe (podręczne)

Źródło: Opracowanie własne

2. „Paskiem menu" – występuje zwykle jako część okna, składa się z przycisków. Po naciśnięciu na odpowiedni przycisk menu lewym klawiszem myszy następuje jego aktywacja.

Panel sterowania

Panel sterowania jest wydzieloną częścią systemu operacyjnego służącą do ustawiania i zmiany jego parametrów, np.: dodawania sprzętu, instalacji/usuwania programów, zarządzania użytkownikami, zasilaniem, połączeniami sieciowymi.

Wśród wielu opcji Panelu sterowania na uwagę zasługują:

– opcje regionalne i językowe – szczególnie zakładka Języki, przycisk Zaawansowane.

Domyślnym językiem w polskiej wersji Windows jest układ klawiatury o nazwie „Polski programisty", tożsamy z układem Angielski (stany Zjednoczone) – QWERTY, ale udostępniający możliwość wpisywania liter z polskimi znakami diakrytycznymi (ą, ę, ó, ł, ś, ć, ń, ż, ź). Często zdarza się, iż użytkownik wciskając klawisz „z", otrzymuje wynik w postaci znaku „y". Dzieje się tak po przełączeniu układu klawiatury w tryb Polski (214). Do prawidłowego układu klawiatury można szybko powrócić naciskając kombinację klawiszy Ctrl+Shift.

– Ekran – miejsce, w którym użytkownik może zdefiniować na przykład wygląd pulpitu, tapety, styl okien, wygaszacz ekranu, rozdzielczość itp.

– Połączenia sieciowe – tutaj ustawia się parametry dostępu do sieci: rodzaj połączenia, adresy IP i bramy oraz serwerów DNS.

– Opcje automatycznych aktualizacji systemu. Według zaleceń Microsoftu na zainstalowanie poprawki krytycznej użytkownik ma maksymalnie 24 h. Taki jest margines bezpieczeństwa, by komputer z dużym prawdopodobieństwem nie stał się ofiarą ataku przez ogłoszoną oficjalnie lukę w oprogramowaniu.

1.3.2. Oprogramowanie aplikacyjne

Oprogramowanie tego typu instaluje się bezpośrednio na stacjach roboczych, choć w ostatnich latach na fali wirtualizacji i outsourcingu można mieć dostęp do wydzierżawionej aplikacji i niekoniecznie ją posiadać. Pojawiło się nawet pojęcie „pracy w chmurze".

Ponieważ komputery zagościły w naszym życiu: od prywatnego, przez zawodowe, po publiczne (np. administracja)i od poważnych, profesjonalnych zastosowań po rozrywkę, konieczna staje się klasyfikacja oprogramowania w podziale na grupy ze względu na kryterium zastosowania.

Tak więc możemy wyróżnić następujące grupy:

1) **Edytory tekstu** – z takimi przedstawicielami, jak: Notatnik, WordPad, MS Word, OpenOffice.org Writer, czy wysoce specjalistyczny 3B2. Rozszerzenia nazw charakterystyczne dla plików tekstowych to *.txt, *.doc, *.docx, *.odt, *.dot, *.dotx, oraz format chroniony *.pdf.
2) **Programy graficzne**, wśród których istnieje dodatkowy podział na poruszające się w grafice rastrowej (bitmapowej) – MS Paint, GIMP, IrfanView, Adobe Photoshop, Corel Photopaint, oraz poruszające się w grafice wektorowej – Corel Draw, Inkscape, Adobe Illustrator CS. Charakterystyczne rozszerzenia: *.bmp, *.gif, *.jpg, *.tif, *.png, *.cdr, *.svg.
3) **Arkusze kalkulacyjne,** takie jak: MS Excel, OpenOffice.org Calc, QatroPro. Charakterystyczne rozszerzenia: *.xls, *.xlsx, *.xltx, *.ods.
4) **Bazy danych** – MS Access, dBASE, Oracle, PostgreSQL, MySQL, MS SQL Server, bazy danych XML, na bazie których firmy komputerowe nabudowały szereg aplikacji lokalizowanych na poszczególne sektory gospodarki. Rozszerzenia (często spotykamy 2 typy plików: z danymi i pliki indeksowe, nie będziemy ich tu rozdzielać): *.db, *.ntx, *.mdb, *.idx, *.accdb.
5) **Programy CAD** (computeraid design) i **GIS** (systemy informacji geograficznej) – AutoCad i Catia, SolidWorks, SolidEdge, Nastran, Unigraphics NX. Uniwersalny format to *.dxf.

6) **Programy do grafiki menedżerskiej i prezentacyjnej**, m.in.: MS PowerPoint; OpenOffice.org Impress. Rozszerzenia to *.ppt, *.pptx, *.pps, *.odp.
7) **Oprogramowanie DTP** – do składu i przygotowania materiału do druku na naświetlarce lub maszynie drukarskiej – PageMaker, Ventura Publisher, Design Studio.
8) **Programy muzyczne**, nie tylko do odsłuchiwania, ale też do tworzenia muzyki na komputerze: WinAmp, Windows Media Player, wiele specjalistycznych niszowych aplikacji do tworzenia i obróbki dźwięku. Pliki: *.mp3, *.ac3, *.wav.
9) **Programy do odtwarzania i obróbki filmów:** AllPlayer, Best Player, WindowsMedia Player, WinAmp. Rozszerzenia: *.avi, *.mp4.
10) **Aplikacje obsługujące dostęp do Internetu,** na przykładprzeglądarki (Internet Explorer, Mozilla Firefox, Opera, Netscape, Google Chrome) oraz wbudowane w nie nakładki – wyszukiwarki (Google, Yahoo, Bing, Ask);
11) **Programy pocztowe** – poza dostępem przez stronę www do winmaila, mamy możliwość wykorzystania profesjonalnych aplikacji z rozbudowaną obsługą poczty i kontaktów, np.: MS Outlook Express, MS Outlook, Windows Mail, The Bat, Thunderbird, Eudora, Pegassus Mail;
12) **Programy typu IM** (Instant Messaging) – do komunikacji w czasie rzeczywistym z wiodącą grupą komunikatorów: ICQ, Skype, Gadu-Gadu, Tlen, oraz programami obsługującymi chatroomy.
13) **Gry** – gry uruchamiane na lokalnym komputerze, sieciowe, on-line, RPG, a wśród nich: typowe strzelanki (wszystko co się rusza to wróg), przygodowe (z misjami), zręcznościowe, społecznościowe, logiczne.

Aplikacje z grupy edytorów tekstu, arkuszy kalkulacyjnych, baz danych i grafiki prezentacyjnej są często łączone w pakiety aplikacji biurowych, a ich funkcje w wielu miejscach się przenikają, dodatkowo przez moduł OLE możliwe jest swobodne przenoszenie treści pomiędzy dokumentami w różnych aplikacjach pakietu. Dlatego można scalić te grupy na rzecz jednego kontenera z –ogólnie ujmując – aplikacjami biurowymi.

Wszystkie typy wymienionych programów tworzą ogromną różnorodność możliwych zastosowań komputera i czynią go wartościowym i niezastąpionym partnerem człowieka w życiu.

1.3.3. Oprogramowanie narzędziowe

W pracy z komputerem niezbędne są programy ułatwiające gospodarkę plikami, programy kompresujące pliki w celu ich sprawnego pobierania i wysyłania lub zmniejszenia zajmowanego miejsca na dysku oraz programy pomagające chronić nasz komputer przed nieuprawnioną ingerencją.

Najczęściej spotykany to wbudowany w MS Windows Explorator Windows i będący na licencji shareware Total Commander –pozwala na łatwe porządkowanie, hierarchizowanie i wyszukiwanie zawartości. Do archiwizerów zaliczają się na przykład programy obsługujące formaty *.zip i *.rar (WinZip, WinRar).

W obecnym świecie czas dziewiczo radosnego i bezpiecznego surfowania po sieci mamy już za sobą i szaleństwem jest używanie nieizolowanego od sieci komputera bez zainstalowanego pakietu antywirusowego, który nie tylko umie wyszukiwać złośliwe oprogramowanie, ale też wykryć i zlikwidować nieznane mu zagrożenie na podstawie charakterystycznego zachowania się kodu – poprzez zaawansowaną heurystykę analizy programów. Normą jest też pełnienie przez niego roli firewalla i skanowanie zawartości komputera w czasie rzeczywistym. Pakiet antywirusowy musi być rezydentem – powinien być zainstalowany i nieustannie uruchomiony na komputerze. Do bardziej znanych należą NOD32/Eset Smart Security, Norton AV, Kaspersky, Panda AV, Avast.

Trzeba jednak pamiętać, że program antywirusowy musi być stale aktualizowany i skuteczny praktycznie w 100%. Dla bezpieczeństwa komputera nie ma znaczenia, czy zostanie on zainfekowany armią wirusów i trojanów przy braku ochrony, czy też nasz program ma skuteczność „zaledwie" 99,0% i dlatego wpuści pojedyncze złośliwe oprogramowanie. Wprawdzie istnieją rankingi skuteczności tego typu oprogramowania, które są nieustannie aktualizowane, trudno jednak wyłonić rzeczywiście bezkonkurencyjnego lidera. Zwycięzcy rankingów zmieniają się bardzo często.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Jakie znasz inne systemy operacyjne oprócz MS Windows? Czy umiesz posłużyć się analogicznymi do Panelu sterowania narzędziami do konfiguracji systemu? Jak się nazywają, gdzie je znaleźć?
b) W jaki sposób odbywa się reprezentacja różnych form informacji w komputerze: liczb, znaków, obrazów, animacji, dźwięków? Dlaczego niektóre formaty zapisu dają się pokaźnie kompresować, a inne nie?
c) Omów sposoby uzyskiwania pomocy dla programów na licencjach niekomercyjnych.

BIBLIOGRAFIA:

Sokół M., *Internet. Kurs,* Wyd. 3, Gliwice 2011,

Danowski B., Krupińska A., Dziecko w sieci, *Septem*, 2007.

Pikoń K., *ABC internetu. Wydanie VII*, Gliwice 2011.

Korman D., Zawadzka G., *Informatyka Europejczyka. Poradnik metodyczny dla nauczycieli informatyki w szkołach ponadgimnazjalnych. Zakres rozszerzony,* Wyd. 2, Gliwice 2013.

Danowski B., *Hardware. Leksykon pojęć sprzętowych*, Gliwice 2005.

Metzger P., *Anatomia PC,* Wyd. 9, Gliwice 2007,

NETOGRAFIA:

www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_Internetu, 18.03.2013.

www.sienko.net.pl/cwp/cwp03.html, 18.03.2013.

www.zskl.zsk.p.lodz.pl/~zielin/wyklady/WYKLAD1.htm, 18.03.2013.

www.pl.wikipedia.org/wiki/Sprzęt_komputerowy

2. Wirtualny świat – Internet i multimedia

2.1. Sieci jako nieprzebrane źródło wiedzy i informacji

Szybki rozwój współczesnej cywilizacji przyczynił się do skomputeryzowania prawie wszystkich dziedzin życia. Powszechne używanie komputera spowodowało, że umiejętność posługiwania się nim stała się nieodzownym elementem wykształcenia każdego człowieka.

Sieć Internet jest prawdziwą kopalnią informacji. Zasoby sieciowe są tak ogromne, że nikt nie jest w stanie zapoznać się ze wszystkimi, a przyrastają w takim tempie, że gdyby nawet ktoś znał jakimś cudem liczbę stron www w danym momencie, to w ułamku sekundy ta informacja się dezaktualizuje. Znamienne są również ciągłe zmiany zasobów spowodowane ich aktualizacją, uzupełnianiem, zmianą formy prezentacji itp. Znane są źródła, które istnieją w sieci już wiele lat, inne pojawiają się i znikają jak komety. Ta wielość i różnorodność danych i informacji może być postrzegana zarówno jako mocna, jak i słaba strona Internetu. Dobrze jest mieć dostęp do wielu źródeł i wybór, konieczne jest jednak posiadanie narzędzi wyszukiwania żądanych informacji.

Zadanie poszukiwania związanych ze sobą tematycznie informacji bądź kontekstowego wyszukiwania stron www i innych dokumentów pasujących do zadanego wzorca realizują systemy indeksujące zasoby sieci Internet. Są to systemy komputerowe, które nieustannie przeglądają zasoby Internetu w poszukiwaniu nowych i odnawianych zasobów. Informacje o zasobach sieci gromadzone są w bazie danych i stanowią podstawę do wspomagania poszukiwań w sieci. Nowoczesne techniki magazynowania danych i indeksowania zasobów pozwalają na bardzo szybkie odszukiwania zbioru dokumentów, w których potencjalnie znaleźć możemy informacje na zadany temat, bądź takich, w których treści pojawia się poszukiwane słowo czy fraza.

Nowoczesne przeglądarki WWW oferują zazwyczaj wbudowany mechanizm łączenia się ze stroną (najczęściej będzie to strona zaproponowana przez producenta przeglądarki), na której znajdują się narzędzia przeszukiwania zasobów Internetu. We wszystkich przeglądarkach wyszukiwanie można uruchomić bezpośrednio przyciskiem na pasku narzędzi, wpisując szukaną frazę w odpowiednie okno bądź z poziomu menu. Innym sposobem jest uruchomienie strony wyszukiwarki, na przykład Google (najpopularniejszej) i tam wpisanie kryteriów poszukiwań.

Po wpisaniu słowa kluczowego bądź fragmentu tekstu poszukiwanego dokumentu klikamy klawisz Wyszukaj. Po kilku sekundach w oknie przeglądania dokumentów powinien pojawić się wynik poszukiwań w postaci odnośników (linków) do znalezionych dokumentów pasujących do zadanego wzorca. W zależności od formy prezentowania wyników poszukiwań obok łączników do dokumentów mogą (ale nie muszą) znajdować się również początkowe fragmenty treści stron www albo graficzne miniatury witryn www pozwalające łatwo zorientować się, czy dany dokument zawiera te informacje, o które nam chodziło. We własnym interesie należy zapamiętać, ustawić jako stronę główną, zapisać lub dodać do zbioru ulubionych/zakładek (zależnie od przeglądarki) adresy jednej a nawet kilku wyszukiwarek internetowych, ponieważ:

- w wyniku awarii jakiś serwer oferujący przeszukiwanie Internetu może być niedostępny;
- duże obciążenie sieci (a w szczególności powszechnie znanych wyszukiwarek) może sprawić, iż transfer danych z konkretnego serwera będzie bardzo wolny;
- wynik kontekstowego przeszukiwania zasobów sieciowych realizowany przy wykorzystaniu różnych narzędzi może być odmienny. Polskie wyszukiwarki oferują zwykle w pierwszej kolejności bogaty wybór zasobów polskojęzycznych.

Korzystając z wyszukiwarek, warto zwrócić uwagę na szczegółowe instrukcje formułowania złożonych zapytań. Wprawdzie podstawowe wyszukiwanie jest bardzo uproszczone – wystarczy kolejno, oddzielając spacjami wpisać wyrazy znajdujące się z dużym prawdopodobieństwem w wyszukiwanym pliku, jednak skutkuje to zazwyczaj odnalezieniem wielu tysięcy wyników. Zaawansowane wyszukiwanie przydaje się zwłaszcza w sytuacji, gdy poszukujemy dokumentów zawierających słowo pojawiające się na wielu stronach www, ale być może w różnych kontekstach. Dość prostą i typową konstrukcją pozwalającą zawęzić kontekst poszukiwanego wzorca jest dodanie znaków „+" lub „-" na początku słowa wpisywanego do wzorca przeszukiwania. Dodanie symbolu „+" sprawia, że w wyniku selekcji otrzymamy strony, na których występuje wskazane słowo, zaś „-" przed słowem oznacza, iż interesują nas strony nie zawierające słowa występującego bezpośrednio po znaku „-". Między znakami „+", czy „-" a słowem, którego dotyczy ograniczenie nie powinny występować żadne spacje. Rozważmy następujący przykład:

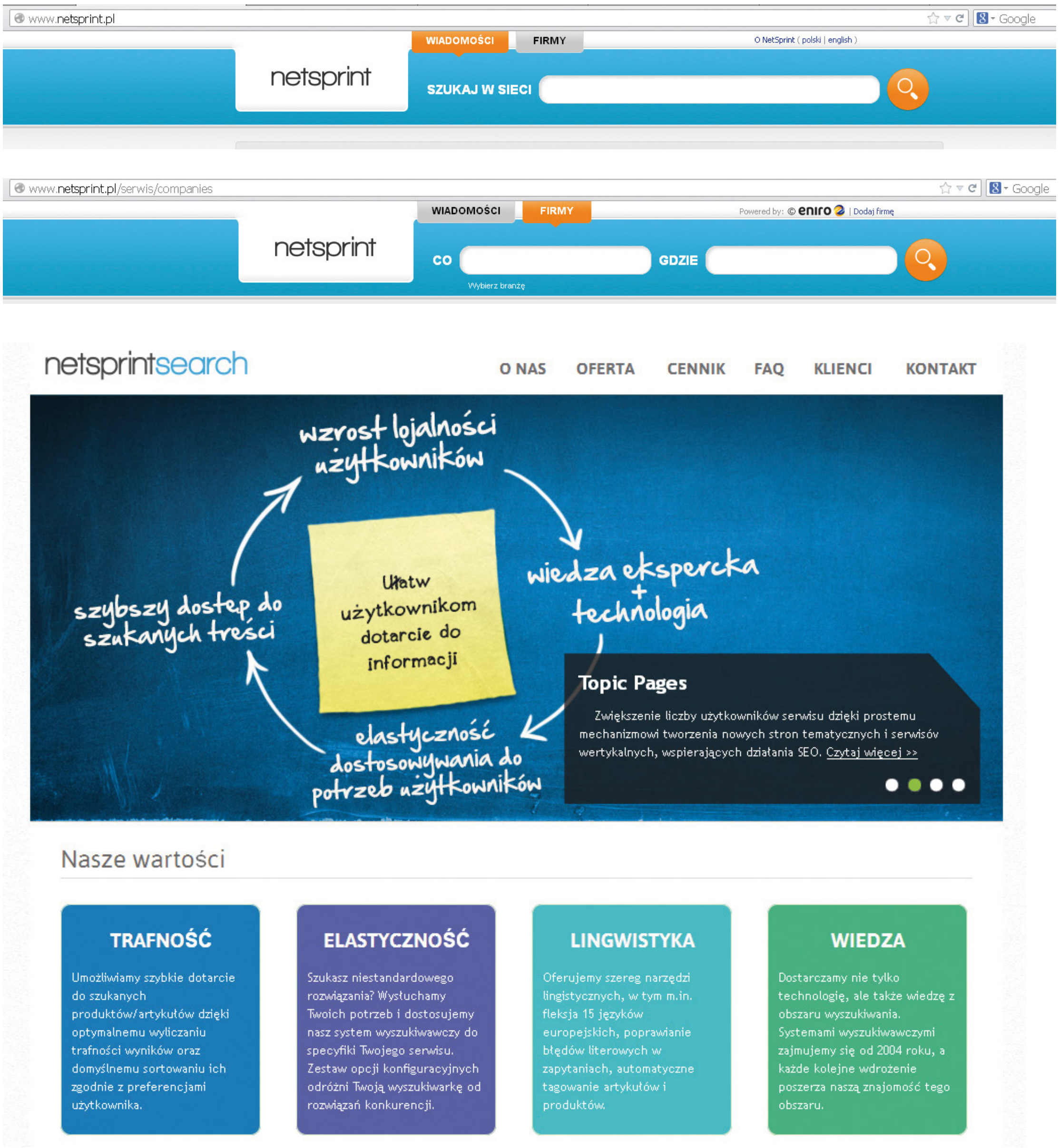
Interesuje nas oferta towarzystw ubezpieczeniowych w zakresie ubezpieczeń zdrowotnych. Wydając zapytanie „ubezpieczenie", otrzymujemy setki adresów stron poświęconych ubezpieczeniom komunikacyjnym, na życie, wypadkowych, II i III filaru itp. Chcąc temu jakoś zaradzić, możemy próbować precyzyjniej określić zawartość poszukiwanych stron. Proponowane zapytanie może mieć choćby taką postać:

Ubezpieczenie -komunikacyjne -życie -wypadkowe +zdrowotne

Część stron kodowanych jest bez użycia polskich znaków diakrytycznych bądź znaki te są kodowane w różny sposób. Odnalezienie podobnych stron kodowanych w różnych standardach znaków narodowych wiąże się z wydaniem dwóch lub więcej zapytań. Litera „ż" znajdująca się na takiej stronie w słowie „życie" nie spowoduje odrzucenia tego wyniku.

Obecnie prawie monopolistyczną pozycję wśród przeglądarek ma produkt najbogatszej korporacji świata – Google. Wprawdzie inny potentat branży oprogramowania – Microsoft agresywnie promuje swoją wyszukiwarkę – Bing, istnieją także takie, jak Babylon i Ask (firmy Ask.com), ale korzystanie z nich ma charakter marginesowy w porównaniu do ilości użyć potentata. Wymienione wyżej ogólnoświatowe produkty są ambitnie lokalizowane na dowolny język świata, stąd agresywnie wypierają rodzime produkty, które znikają lub dołączą do tła Google.

Jedną z rodzimych wyszukiwarek oferujących bogaty zasób informacji na temat krajowych zasobów Internetu jest polski NetSprint (Rys. 12). Na głównej stronie tego „szperacza sieci" znajdziemy łącznik do dokumentu opisującego formy wydawania precyzyjnych zapytań.



Rys. 12. Polska wyszukiwarka Netsprint – opcje wyszukiwania

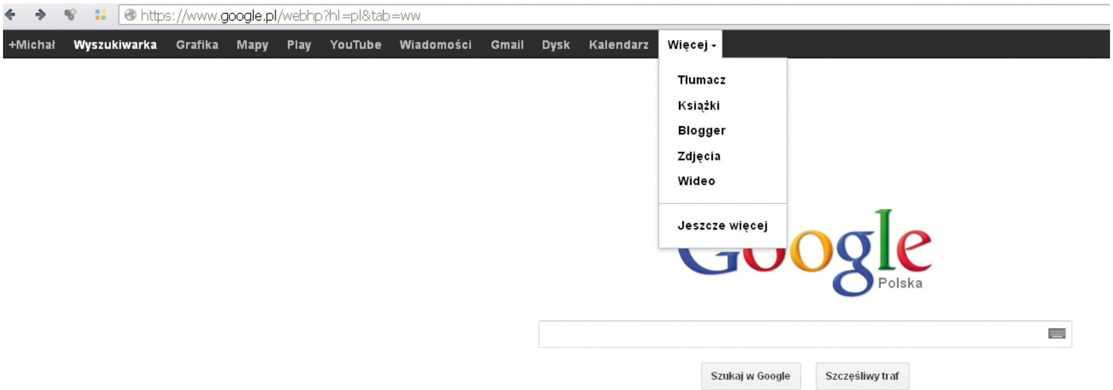
Źródło: Opracowanie własne

Wyszukiwanie wartościowych dokumentów w sieci Internet tylko pozornie jest zadaniem prostym. W rzeczywistości znalezienie unikatowych informacji w gąszczu dokumentów może stanowić poważne wyzwanie. Dobre systemy wyszukiwawcze oferują użytkownikom dwie metody formułowania zapytań: odpytywanie proste i zaawansowane – zawierające złożone reguły wyznaczające kryteria poszukiwania dokumentów pasujących do wzorca. W praktyce częściej korzysta się z zapytań prostych, ale warto zapoznać się również z metodami formułowania zapytań złożonych, zwłaszcza jeśli zasoby www mają być źródłem wiarygodnych informacji, na przykład do pisanej pracy dyplomowej.

Systemy wyszukiwarek sieciowych nieustannie przeglądają zasoby sieciowe w poszukiwaniu nowych dokumentów i sprawdzając ewentualne modyfikacje w dokumentach znajdujących się już w bazie danych systemu. Przeglądając dokładnie serwisy wyszukiwarek www, niekiedy spotkać można informacje o prawdopodobnym czasie, po jakim system samodzielnie powinien odszukać nowe dokumenty i dodać je do bazy informacji o zasobach. Zazwyczaj administratorzy wyszukiwarek podają również wskazówki, w jaki sposób możemy zapobiec automatycznemu gromadzeniu informacji o odwiedzanych stronach w systemach wyszukiwarek. Informacje te wyszukiwarka zbiera na potrzeby spontanicznego pozycjonowania stron w rankingach wyszukiwania, niemniej można uznać je za informacje z kategorii szpiegujących.

Choć nieustanna praca wyszukiwarek z dużym prawdopodobieństwem zaowocuje odnalezieniem stron www z okresu ostatnich tygodni, mamy możliwość „ręcznego" wskazania i usuwania adresów dokumentów oraz informacji określających przynależność zawartości danego dokumentu do konkretnej kategorii tematycznej w systemach wyszukiwań.

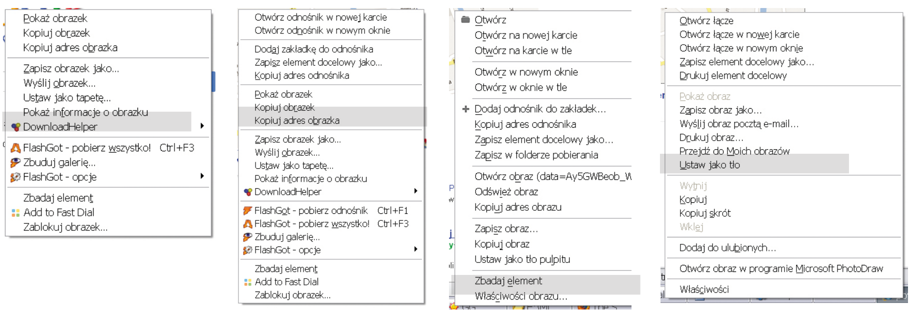
Zasoby światowej sieci internetowej to nie tylko dokumenty tekstowe i wiadomości. Istnieje szereg kategorii wyszukiwania oraz usług wpiętych w wiodącą wyszukiwarkę – grafika, mapy, kalendarz, tłumacz, poczta Gmail itp.



Rys. 13. Kategorie wyszukiwania i usług wyszukiwarki Google

Źródło: Opracowanie własne

Wiele programów posiada specyficzne formaty plików wynikowych. Do celów wymiany informacji powstały ogólnie uznane specyfikacje zapisu, tak by większość uznanego oprogramowania pozwalała zarówno je odczytać, jak i wyeksportować pracę w celu udostępnienia do powszechnie akceptowanego formatu. Także elementy strony www można w większości eksportować do plików w celu wykorzystania ich w trybie off--line lub zaimplementowania w dokumentach, prezentacjach itp. W zakresie tekstu z reguły działają metody znane z edytorów, polegające na zaznaczeniu interesującego fragmentu i użyciu mechanizmu kopiuj/wklej w dowolnej znanej postaci (albo z menu, albo spod prawego przycisku myszki i menu podręcznego, bądź za pomocą skrótów klawiszowych Ctrl+ci Ctrl+v). Elementy graficzne, programy, skompresowane paczki z plikami oraz udostępnioną muzykę można pobierać ze strony z wykorzystaniem prawego przycisku myszy i opcji menu podręcznego. W zależności od przeglądarki będą to różne polecenia typu: „Zapisz jako...", „Zapisz obrazek jako…", „Zapisz obraz jako…", „Zapisz element docelowy jako…".



Rys. 14. Różne sposoby pobierania obrazów ze strony www

Źródło: Opracowanie własne

Działając w odwrotnym kierunku, tzn. chcąc umieścić w sieci informację bądź obraz, bądź dowolne multimedia, trzeba zadbać o odpowiedni format pliku na etapie jego tworzenia. Edytor tekstów Word i konkurencyjny Writer z pakietu OpenOffice.org posiadają opcję zapisu dokumentu w formacie *.html, odpowiednim dla przeglądarek. Dokument jako załącznik do pobrania zapisuje się najczęściej w formacie *.pdf, gdyż po pierwsze zabezpiecza się go w ten sposób przed nieuprawnioną modyfikacją, a po drugie eliminuje ryzyko przeniesienia infekcji makrowirusowej, mogącej się zagnieździć w dokumencie formatu *.doc i *.docx (oba formaty pozwalają na używanie makr). Nieodpowiednim formatem grafiki dla stron www jest zarówno *.bmp (wielkość pliku), *.tif, jak i *.jpg, powszechnie używanym jest format *.gif. Duże pliki umieszczone na stronie spowalniają jej wczytywanie, są też trudne do pobrania, dlatego zaleca się ich skompresowanie, na przykład do formatu *.zip lub *.rar, przed umieszczeniem jako załączniki na stronie.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Mechanizmy związane z bezpieczeństwem danych: sprzętowe i programowe. Szyfrowanie, klucz, certyfikat, zapora ogniowa, RSA – omówienie pojęć i ich zastosowania.
b) Tworzenie zasobów sieciowych związanych z kształceniem i zainteresowaniami.
c) Zapisywanie istotnych informacji, dobierając formaty plików do rodzaju i przeznaczena zapisanych w nich informacji.

2.2. Oswajanie sieci jako miejsca spotkania. Wykorzystanie sieci do własnych działań kreatywnych

Zadziwiającą rolę odegrała sieć www w procesie ewolucji relacji międzyludzkich. Pierwotnie podważyła komunikację w postaci listów – e-mail zawiera te same atrybuty co tradycyjny list, charakteryzuje się uproszczonym sposobem adresowania, przy czym dociera do odbiorcy znacznie szybciej, jest bezpłatny i, będąc niezależnym od czynnika ludzkiego w przekazie, znacznie rzadziej się gubi.

Krótkie wiadomości tekstowe przekazywane przez pagery czy też SMS-y w telefonach komórkowych znalazły alternatywę w postaci programów zbiorczo nazwanych IM (ang. *instant messaging*) – pozwalających na rozmowy w czasie rzeczywistym.

Do nich zalicza się czat (*chat*) – pierwotna forma „pogawędek", zarówno zbiorowych jak i indywidualnych. Zbiorowe konwersacje odbywają się w podziale na kategorie tematyczne, które tworzą tzw. pokoje. Możliwe jest wyodrębnienie się z pokoju do rozmowy prywatnej z innym uczestnikiem chatu. Identyfikacja uczestników odbywa się na poziomie rejestracji, o ile jest prowadzona, później nie ma wymogu posługiwania się realnym imieniem – uczestnicy dyskusji posługują się nickiem – rodzajem pseudonimu. Do nicka przypisane jest indywidualne, wymyślone przez właściciela hasło, co w kolejnych wejściach na chat umożliwia autoryzację wyłącznie poprzez podanie właśnie nicka i hasła. Pogawędka odbywa się za pomocą krótkich wiadomości wpisywanych z klawiatury.Nad przestrzeganiem netykiety czuwa zazwyczaj moderator. Jego obecność jest wyróżniona innym kolorem czcionki, niedostępnym dla zwykłych użytkowników, np. żółtym. Wypowiedzi można wzbogacać ikonkami lub obrazkami wyrażającymi emocje – emotikonami. Podstawowy zestaw emotikonów opiera się o znaki dostępne z klawiatury i kody ASCII. I tak uśmiech wyraża zestawienie dwukropka i nawiasu zamykającego, czyli :), smutek to dwukropek i nawias otwierający, czyli :(, bądź w wersji rozbudowanej – uzupełnionej o „nos", emotikony będą wyglądał odpowiednio :-) i :-(. Często chaty mają wbudowane interpretery wrażliwe na takie połączenia znaków i zamieniają je na bardziej czytelne obrazki ☺ i ☹. Istnieje cały katalog emotikonek i ich interpretacji, wprawy w ich stosowaniu nabiera się w praktyce.

Inną formą, kładącą nacisk na komunikację osobistą dwóch osób, (w odróżnieniu od chatu preferującego komunikację zbiorową) są komunikatory. Są czymś pośrednim pomiędzy listą dyskusyjną a IRC'em (ang. *Internet Relay Chat*). Przykładem popularnego komunikatora jest światowy ICQ (skrót oznaczający fonetycznie wyrażenie *I seek You*, czyli *Szukam ciebie*) oraz, dominujący w Polsce Gadu-Gadu. Komunikatory skutecznie konkurują z SMS-ami i zanikającymi pagerami, głównie dzięki łatwości wpisywania tekstu oraz kosztu – za korzystanie z komunikatora nie ponosimy opłaty. Funkcjonalność komunikatorów ewoluuje o dodatkowe skojarzone usługi. Wzrost przepustowości łącz Internetowych zaowocował również udostępnieniem w komunikatorach komunikacji głosowej, a nawet wideo. Istnieją nawet komunikatory, które wyszły od usług kojarzonych z telefonami i rozwinęły się w kierunku transmisji obrazu, a funkcja pisania krótkich wiadomości jest w nich wtórna. Niewątpliwym królem rynku w tej kategorii jest Skype. Od tych innowacji już niedaleko do telefonii internetowej, zwanej VoIP (ang. *voiceover IP*, głos przez sieć), która na płaszczyźnie kosztów skutecznie konkuruje z telefonią stacjonarną.

Formą współczesnej prezentacji własnych doświadczeń i przemyśleń, a czasem rodzajem dziennika lub pamiętnika jest blog.

Wszystkie zaprezentowane rozwiązania przenikają do kursów e-learningowych (zdalnego nauczania) oraz ułatwiają wymianę poglądów i informacji zarówno pomiędzy uczniami, jak i w relacji uczeń–nauczyciel po godzinach spędzonych w szkole i stanowią ważny czynnik w procesie kształcenia permanentnego.

Przyczyniają się też do kształtowania i ugruntowania społeczeństwa informacyjnego.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wykorzystanie oprogramowania dydaktycznego i technologii informacyjno-komunikacyjnych w pracy twórczej i przy rozwiązywaniu zadań i problemów szkolnych. Jak to wygląda w Twojej szkole?
b) Sposoby konwersji plików multimedialnych i wpływ przetwarzania na ich jakość.
c) Praca z obrazem i filmem – opracowanie i przetwarzanie. Wymiana informacji w drodze dyskusji w sieci.

2.3. Komputer i programy edukacyjne środkiem do poszerzania wiedzy i umiejętności w każdej dziedzinie

Komputer wraz z tablicą multimedialną stanowią jeden ze współczesnych środków dydaktycznych wspomagających proces nauczania, a występując w roli pomocy dydaktycznej, znacząco wpływa na kształtowanie się języka specjalistycznego charakterystycznego dla danego przedmiotu. Potwierdzają to liczne badania przeprowadzone w szkołach II, III i IV etapu kształcenia oraz w szkołach wyższych, tak krajów zachodnich jak i byłego bloku wschodniego. Komputery wywołują duże zainteresowanie uczniów i wymuszają je także wśród nauczycieli, co przekłada się na tworzenie nowego modelu szkoły – nie tylko z zajęciami stacjonarnymi.

Twórcze użycie komputerów na lekcji umożliwia pokazanie procesów i zjawisk trudnych lub zbyt kosztownych do odtworzenia w pracowni albo niemożliwych do przedstawienia w inny sposób – symulacja bardzo szybko (lub bardzo wolno) przebiegających zjawisk i procesów bądź zjawisk istniejących w egzotycznych jak na Polskę warunkach. Przykładem może być symulacja zjawisk pogodowych, wybuchu wulkanu czy pracy silnika odrzutowego. Komputer daje przy tym możliwość interaktywnego uczestniczenia zarówno na etapie wprowadzania założeń, jak i podczas całego cyklu edukacyjnego, czym różni się od nauczania z wykorzystaniem radia i telewizji oraz filmów. Taka koncepcja pracy umożliwia indywidualizację tempa uczenia się, co jest o tyle ważne, że każdy z nas dysponuje różnym poziomem zdolności i percepcji, a komputer może wtedy sprawować permanentną kontrolę nad tym, co udało się zrobić i przydzielać nową porcję zadań, gdy materiał będzie opanowany w odpowiednim stopniu. Nauczyciel sprawuje wtedy rolę superwizora i ostatecznego arbitra w sytuacjach wykraczających poza model nauczania stworzony w komputerze. Takie nauczanie przebiega w sposób zindywidualizowany bez względu na liczebność klasy.

Ciekawostką z przeprowadzonych do tej pory eksperymentów i testów jest hipoteza granicząca z pewnością, że najlepsze wyniki daje wykorzystanie komputera w rozwiązywaniu problemów. Tutaj najpełniej ujawniają się jego gigantyczne możliwości– powstał wszak po to, by uczestniczyć bardzo aktywnie w procesie kreowania sytuacji problemowych, jak i pomagać w ich rozwiązywaniu, a następnie weryfikowaniu. Na podstawie licznych prób przeprowadzenia lekcji z wykorzystaniem komputera matematyk H. Kąkol[1] sformułował następujące wnioski:

- wizualizacja matematyki na ekranie monitora może być źródłem wielu nowych, często niespodziewanych sytuacji problemowych, których analiza doprowadza uczniów do odkrywania i formułowania różnorodnych problemów matematycznych. Możliwość „zobaczenia matematyki", często w ruchu, może przyczynić się do rozwijania intuicji matematycznych, tak bardzo potrzebnych w poszukiwaniu pomysłów rozwiązania rozpatrywanego problemu;
- możliwość wykonywania różnych eksperymentów komputerowych – obserwacja i analiza celowo dobieranych przypadków – daje możliwość nie tylko odkrywania pewnych prawidłowości, formułowania hipotez dotyczących rozwiązywanego problemu, ale także sprawdzenia tych hipotez, potwierdzenia słuszności wyboru odpowiedniego kierunku poszukiwań, a czasami znalezienia teoretycznego sposobu weryfikacji postawionej hipotezy, odkrycia idei dowodu matematycznego;
- stosowanie komputera w nauczaniu problemowym wymaga od ucznia pewnej dojrzałości umysłowej i matematycznej. W pierwszym rzędzie musi on mieć rozwiniętą zdolność prowadzenia obserwacji. Powinien umieć analizować otrzymane informacje, wykorzystywać analogie oraz stosować redukcyjno-dedukcyjne reguły wnioskowania. Widać więc, że komputer wydatnie wspomaga proces nauczania.

Ze względu na olbrzymie możliwości graficzne obecnych komputerów są one przydatne w zadaniach polegających na konstruowaniu i wizualizacji. Komputery pozwalają zaprezentować wykresy funkcji, modele brył, których fizycznie może nie być w danej pracowni szkolnej. Pozwalają uczyć wzorów na pola wielokątów, jednocześnie pokazując pochodzenie tych wzorów.

Komputer nie zastąpi nauczyciela. Nauczyciele nie tylko nie staną się przeżytkiem, ale ich rola nawet wzrośnie, o ile rozwiną się w kierunku nowych możliwości, bez zbytniego pielęgnowania starych nawyków i rutyny. Komputery, w sensie środków dydaktycznych na czasie, mogą być efektywnym narzędziem nauczania i uczenia się, w tym samokształcenia podczas samodzielnej pracy. Mogą też być aktywnym elementem rozwiązania problemu zajęć wyrównawczych i uzupełniania luk w wiadomościach. Kształtując język pojęć i dyscyplinę logicznego myślenia, komputery przyczyniają się do rozwoju umiejętności właściwego formułowania problemu, z wykorzystaniem specjalistycznego słownictwa i systematycznego, algorytmicznego podejścia do koncepcji jego rozwiązania. Istotnym zagadnieniem jest dobór odpowiednich programów dydaktycznych, które sprostają wymaganiom i oczekiwaniom stawianym technice komputerowej. One właśnie w decydującym stopniu będą czynnikiem „za" lub „przeciw" wykorzystania komputera na lekcji i w czasie samodzielnej pracy. Nie wszystkie programy komputerowe są odpowiednim narzędziem zarówno pod względem merytorycznym, jak i dydaktycznym. Autorki artykułu „Propozycja kryterium oceny dydaktycznych programów komputerowych" (B. Ornowska, T. Słowińska, 1991) podjęły próbę przedstawienia kryteriów oceny programów komputerowych pod względem dydaktyki. Proponowana przez obie autorki ocena dydaktyczna programów komputerowych uwzględnia trzy główne aspekty:

1) wartość techniczną programu;
2) wartość dydaktyczną programu;
3) możliwość zastosowania programu.

Podstawową cechą każdego programu komputerowego musi być jego sprawność techniczna. Sposób sterowania przebiegiem programu istotnie wpływa na jakość komunikowania się z komputerem, może motywować lub rozpraszać. Obsługa programu dydaktycznego powinna być prosta. W tym celu program musi na bieżąco informować o sposobie wprowadzania informacji do komputera. W przypadku uzyskania nietypowej informacji komputer powinien powiadomić o tym i umożliwić ponowne wprowadzenie informacji.

1. Kąkol H., Problemowe nauczanie matematyki a komputer, Matematyka, nr 2, Warszawa 1991.

Ocenę wartości dydaktycznej programu komputerowego należy rozpocząć od sprawdzenia, czy nie zawiera on błędów merytorycznych. Drugim aspektem jest poprawność w sensie językowym – ortograficzna i gramatyczna poprawność tekstów pojawiających się na ekranie. Także wielu twórczych nauczycieli przygotowuje interaktywne lekcje i publikuje je na przykład na stronach portalu www.scholaris.pl w postaci:

1. e-lekcji;
2. ćwiczeń interaktywnych;
3. prezentacji multimedialnych.

Warto poszukać innych portali, choć nie wszystkie są wartościowe lub nie zawierają wiarygodnych treści, tak więc w doborze powinno się kierować poradą światłego nauczyciela.

Programy edukacyjne i komputer można wykorzystać także do samodzielnej nauki, bez nadzoru nauczyciela. Wydaje się nawet, że jest to nawet cenniejsze niż praca pod nadzorem, wymaga bowiem przyjęcia na siebie odpowiedzialności za to, co się osiągnie, dyscypliny wewnętrznej i automotywacji do poszerzenia swojej wiedzy. Jest to też swoisty sprawdzian przed samym sobą, czy potrafimy pracować samodzielnie, bez konieczności sprawowania nad nami kontroli.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Czym się kierować dobierając zestaw: portal wiedzowy, forum, newsroom do swojego obszaru zainteresowań?
b) Czy spotkałeś się z e-learningiem? Jakie niekomercyjne platformy znasz? Spróbuj odnaleźć jak najwięcej informacji na temat możliwości pracy na platformie moodle.

2.4. Wykorzystywanie komputera i technologii informacyjno-komunikacyjnych do rozwijania zainteresowań

Szczególnie pożądaną sprawnością jest umiejętne wyszukanie forów o tematyce, która jest przedmiotem naszego zainteresowania. Jeśli interesują nas na przykład nietoperze, to warto znaleźć takie miejsce wymiany informacji na ich temat pomiędzy pasjonatami – chiropterologami. Z ich wypowiedzi można się dowiedzieć o wiele więcej, niż udałoby się znaleźć w dostępnych podręcznikach, poza tym jest to wiedza jak najbardziej praktyczna, której nie sposób przecenić. Świetna jest też możliwość zadawania tym ekspertom pytań i wyjaśniania z ich pomocą wątpliwości i zagadek, które w naturalny sposób pojawiają się u kogoś na początku drogi do bycia specjalistą w dziedzinie nietoperzy. Wszak istnieje duże prawdopodobieństwo, że to, co zaobserwujemy u naszych podopiecznych, ktoś już kiedyś widział, zbadał i wyjaśnił.

Warto zdać sobie sprawę, że Internet jest globalną wioską i nawet jeśli dziedzina wiedzy, która nam się spodobała, jest egzotyczna w naszym środowisku – nie znamy w okolicy fizycznie nikogo, kto by się tym zajmował – to Internet umożliwia odnalezienie się osób odległych terytorialnie, za to bliskich w sferze zainteresowań.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wymień i omów nowe urządzenia informacyjno-komunikacyjne, które zwróciły Twoją uwagę w ostatnim czasie.

Bibliografia:

Anyszko R.,Kott., *Wychowanie dzieci w zakładzie leczniczym*, Warszawa 1988.

Hassa A., Komputer jako środek dydaktyczny, *Komputer w szkole*, nr 3, 1998. Juszczyk, W. Zając, *Komputerowa edukacja uczniów z zaburzeniami w czytaniu i pisaniu*, Katowice 1997.

Kąkol H., Problemowe nauczanie matematyki, a komputer, Matematyka, nr 2, 1991.

Ornowska B., Słowińska T., Propozycja kryterium oceny dydaktycznych programów komputerowych, *Matematyka*, nr 5, 1991,

Osmańska – Furmanek W., Jędryczkowski J., *Prezentacje multimedialne w procesie uczenia się*, Toruń 2004.

Tanaś M., *Edukacyjne zastosowanie komputerów*, Warszawa 1997.

Zakrzewska B., Koncepcja procesu reedukacji uczniów z trudnościami w pisaniu i czytaniu, Życie szkoły, nr 7, 2003.

3. Bezpieczne i kulturalne korzystanie z zasobów sieciowych. Netykieta

3.1. Posługiwanie się komputerem lokalnie i w sieci. Rewolucja informacyjna w społeczeństwie

Współczesny świat nauczył się korzystać z możliwości, jakie daje sprzęt komputerowy, niemal w każdej dziedzinie życia, zwłaszcza w powiązaniu z Internetem i, ogólnie, zdobyczami informatyki. Główne sfery życia społecznego, gospodarczego i kulturalnego ich mają swoje odwzorowanie w sieci. Powstały nowe pojęcia związane z tą aktywnością, takie jak:

- **e-government** – paleta rozwiązań wykorzystywanych przez administrację rządową i instytucje samorządowe do zdalnej obsługi petentów.
- **e-commerce** – handel i usługi internetowe, począwszy od obecności firm w sieci, poprzez strony firmowe i sklepy internetowe (niektóre z nich w pełni bazują na sprzedaży przez Internet), do portali aukcyjnych, takich jak www.allegro.pl czy www.e-bay.com, na których sprzedają zarówno osoby fizyczne, jak i wyspecjalizowane firmy. Specyficznym typem handlu w sieci jest możliwość zawierania kontraktów i umów w Internecie realizowana przez Urząd Zamówień Publicznych. Prowadzony przez UZP *Biuletyn Zamówień Publicznych* służy do publikacji ogłoszeń przetargowych, obowiązkowych dla instytucji sektora administracji (dysponujących środkami publicznymi, w tym dotacjami UE), a dobrowolnych dla każdego innego podmiotu pragnącego dokonać wyboru wykonawcy zamówienia na przykład w trybie przetargu nieograniczonego. Taki sposób kontraktowania sprzyja gospodarności w wydawaniu pieniędzy publicznych oraz transparentności dystrybucji tych środków.
- **e-banking** – bankowość elektroniczna, która pozwola klientom banku na samodzielne wykonywanie czasochłonnych operacji, na przykład płatności za rachunki, zmniejszając w ten sposób koszty obsługi, redukując zatrudnienie na stanowiskach kasowych i wymuszając przesunięcie pracowników do innych czynności, wreszcie likwidując uciążliwe kolejki do okienek na rzecz wygodnego zarządzania kontem z fotela przy pomocy komputera domowego. Operacje elektroniczne przyspieszyły też obieg pieniądza, z 3 dni do paru godzin, oraz pozwoliły na błyskawiczną wymianę informacji pomiędzy bankami, co zablokowało drogę do nadużyć, na przykład w postaci słynnego oscylatora ekonomicznego z roku 1989.
- **e-working** – czyli telepraca, praca wykonywana z domu. Nowa atrakcyjna forma zatrudnienia, zwłaszcza dla ludzi z dysfunkcjami ruchowymi, mieszkających w dużej odległości od miejsca zatrudnienia lub mogących świadczyć pracę tylko w sposób przerywany, nieregularny lub tylko w określonym czasie (np. rodzic wychowujący małe dziecko czy moderator forum internetowego).

- **e-learning** – kursy i studia przez Internet. Coraz bardziej popularna forma kształcenia. Zajęcia składają się z wideokonferencji, testów on-line, a materiały dydaktyczne są rozprowadzane w postaci elektronicznej. Jest to nie tylko atrakcyjny sposób na przekwalifikowanie się lub uzupełniania braków w wykształceniu, ale także ogromna szansa dla ludzi mieszkających z dala od dużych ośrodków naukowych, na niedostępnych na przykład zimą terenach. Ostatnio dostrzeżono też możliwość wykorzystania e-learningu jako zajęć z uczniem zdolnym lub dodatkowych ćwiczeń dla ucznia opóźnionego. W dobie cięcia kosztów funkcjonowania szkół i likwidacji zajęć pozalekcyjnych jest to szczególnie cenna możliwość

Oprócz wymienionych „e-" z technologii informatycznych w szerokim zakresie korzysta medycyna. Nie tylko badania naukowe nad DNA czy nowotworami, lecz także podstawowe badania diagnostyczne są obecnie zdominowane przez komputery – choćby badanie USG, w badanie wzroku (metody komputerowe zastąpiły tradycyjne) czy diagnostyka wad serca u niemowląt. Ponadto wymuszono prowadzenie całej dokumentacji medycznej w specjalistycznych programach – od rejestracji, po raportowanie do NFZ.

Netykieta

Tak jak w życiu codziennym obowiązuje nas kultura osobista i zachowanie się zgodnie z zasadami *savoir-vivre'u*, tak w sieci funkcjonuje kodeks wzorowego zachowania i dobrych manier zwany **netykietą**. Jego trzy główne zasady to:

1) Myśl.
2) Nie nadużywaj.
3) Nie działaj na czyjąś szkodę.

Ponadto do podstawowych reguł netykiety należą (wybór na podstawie http://netykieta.prv.pl/, marzec 2013):

1. Reguły w dziedzinie komunikacji elektronicznej:

a) E-mail (poczta):

- nie przesyłaj plików większych niż 200 KB bez uprzedzenia adresata. Staraj się mimo wszystko nie przesyłać tą drogą dużych plików. Jeśli to możliwe – lepiej użyć jednego z serwisów do przekazywania przez sieć dużych plików, jak np. https://www.dropbox.com;
- nie rozsyłaj łańcuszków szczęścia ani innego spamu (niechcianej poczty);
- jeśli wstawiasz stopkę z podpisem w mail'ach, postaraj się by nie była ona dłuższa niż 3–4 linijki. Umieść tam istotne informacje, konkretne i jak najkrótsze. Jeśli chcesz cytować sławnych – nie wysyłaj nikomu dwa razy tego samego, bo to mija się z celem;
- sprawdź swój komputer, czy nie jest zainfekowany, byś nie przesyłał wirusów innym;
- gdy wysyłasz list do grupy osób, korzystaj z pola „UDW" (Ukryty do Wiadomości). Nie każdy chce, by jego adres e-mail został ujawniony pozostałym adresatom;
- staraj się nadawać tytuł wysyłanym mail'om, np. odzwierciedlający zawartość wiadomości.

b) Komunikatory, takie jak Skype czyGadu-Gadu:

- ustawiając status opisowy w programie tego typu, staraj się, żeby dawał on jakąkolwiek informację, a nie np.: „papa!!!", „Elvis żyje". Znacznie sensowniejszy jest opis „będę po 20:00", „tylko w ważnych sprawach";
- nie wstawiaj w wiadomości całej galerii emotikonów (buziek) naraz. Emotikony mają wyrażać uczucia, które ciężko inaczej pokazać w sieci.

c) Fora dyskusyjne:

- nie należy pisać całej wypowiedzi dużymi literami, gdyż oznacza to krzyk;
- nie zadawaj pytania, na które już kiedyś została na forum udzielona odpowiedź. Zanim je zadasz, sprawdź, czy nie ma na nie odpowiedzi w FAQ lub za pomocą wyszukiwarki na forum co najmniej dwie pierwsze jego strony;
- nie pisz nie na temat, w nieodpowiednim wątku;
- nie powtarzaj swojej wypowiedzi wielokrotnie;
- nie używaj w swojej stopce na forum obrazków powyżej 100 KB, ani nieforemnych – zbyt szerokich lub wysokich.

d) Strony www – tworzenie:

- dobieraj tak kolory, żeby dało się choć chwilę na to patrzeć;
- nie umieszczaj na pierwszej stronie plików większych niż 50 KB. Choć to pierwsza strona, niech się nie ładuje w nieskończoność;
- jeśli nie jest to galeria zdjęć, umieszczaj obrazy w rozdzielczości 72 piksele na cal;
- nie przywłaszczaj sobie bezprawnie efektu pracy innych osób;
- staraj się, aby strona była dobrze wyświetlana w każdej z popularnych przeglądarek (Internet Explorer, Mozilla FireFox, Opera, Chrome).
–

2. Reguły typowo kulturalne – w zakresie relacji międzyludzkich

- nie obrażaj nikogo, staraj się tego nie czynić publicznie nawet wtedy, gdy masz ku temu powody;
- swoje opinie wyrażaj zawsze w sposób kulturalny. Pamiętaj zawsze, że nie jesteś sam jeden na świecie i że nie jesteś najważniejszy.

Na koniec pamiętaj, że tak na prawdę w Internecie nikt nie jest anonimowy! Zawsze można dojść do tego, kto, skąd, kiedy, gdzie i co.

3.2. Społeczne i prawne zagrożenie wynikające z korzystania z Internetu

Przy dynamicznym rozwoju informatyki i Internetu należy sobie uświadamiać pewne zjawiska negatywne związane z używaniem tegoż narzędzia. Powinni na nie zwrócić uwagę szczególnie nauczyciele i rodzice. Zagrożenia te można podzielić na kilka rodzajów:

a) **Fizyczne** – wpływające na wzrok i postawę. Należy dbać o higienę pracy przy komputerze, zapewnić bezpieczne warunki pracy, właściwy sprzęt, oświetlenie, uczyć prawidłowej postawy podczas pracy na komputerze i zmuszać do czynienia przerw rekreacyjnych podczas pracy.

b) **Moralne** – łatwy, niekontrolowany dostęp do informacji niekoniecznie bezpiecznej (np. narkotyki, pornografia, instrukcja konstruowania bomby). Niezbędna jest bliskość i zainteresowanie opiekunów tym, co robią podopieczni, aby można było we właściwym momencie interweniować.

c) **Psychiczne** – uzależnienie od komputera, funkcjonowanie w wirtualnej rzeczywistość oderwanej od życia. Komputer może uzależnić w taki sam sposób jak alkohol, praca czy narkotyki. Początkowo uzależnienie jest niezauważalne. Z czasem, rozwijając się, zaczyna powodować wyraźne szkody. Pierwszą z nich jest postępująca izolacja. Uzależniony od komputera nawet nie szuka związków z innymi ludźmi – szybko zastępuje je maszyna, do której na koniec zaczyna mieć stosunek emocjonalny. Nie potrafi zwyczajnie komunikować się z innymi ludźmi, okazując duży lęk przed kontaktami z nimi, czasami maskując go przez okazywanie swojej wyższości. Drugie poważne niebezpieczeństwo, jakie niesie ze sobą uzależnienie się od komputera, to rozładowywanie z jego pomocą wszelkich napięć. Skrajnie głęboko uzależnieni poczucie bezpieczeństwa znajdują wyłącznie przy komputerze.

Należy tu wspomnieć o ważnej roli nauczycieli, którzy powinni uświadamiać rodzicom te zagrożenia dla psychiki ich dzieci i wspólnie, rodzice i nauczyciele, powinni dbać, aby dzieci i młodzież zainteresować grami rozwijającymi ich osobowość, aby miały dostęp do encyklopedii i programów edukacyjnych, a nie były pozostawione same sobie. Dzieci i młodzież muszą czuć życzliwe zainteresowanie ich sprawami i rozwojem płynące ze strony osób im bliskich.

d) **Intelektualne** – bezkrytyczne zaufanie do możliwości maszyny, „szok informacyjny". Gdy napływ informacji jest zbyt szybki, mózg siłą rzeczy traci zdolność racjonalnej selekcji wiadomości na sensowne vs. nic nie warte. Chcąc nie chcąc, zaczyna absorbować wiadomości przypadkowe, odkładając do głowy nic nie warte bardzo ważne wiadomości o niczym

e) **Społeczne** – zachowania nieetyczne, brak hamulców. Na przykład grzeczna i dobra w rzeczywistości uczennica w trakcie rozmowy z kimś poprzez sieć „wypluwa" z siebie serię okropnych przekleństw, których nigdy nie odważyłaby się powiedzieć na głos, nawet sama przed sobą. Trzeba o tym z uczniami rozmawiać, czasem nawet zawstydzać i uświadamiać, że kultura i dobre wychowanie jest wartością samą w sobie, nawet wobec anonimowego rozmówcy.

f) **Sieciowe** – w sieci można znaleźć ogromne ilości informacji, od aktualnych wiadomości z dowolnego miejsca świata do szczegółowych treści interesujących jedynie wąskie grono specjalistów.

Oprócz niezaprzeczalnych korzyści z rozwoju sieci WWW, istnieją jej negatywne aspekty. Ilość informacji zawartych w Internecie nie koreluje z ich jakością. Nigdy nie można być do końca pewnym znalezionych treści.

Uzależnienie od sieci nie jest stanem jednorodnym, przejawia się różnymi zespołami zachowań:

- **uzależnienie cyberseksualne** – oglądanie, kupowanie czy kopiowanie na swój dysk pornografii sieciowej;
- **elektroniczny hazard** – przeznaczanie czasu i środków na gry sieciowe, aukcje, zakłady;
- **przeładowanie informacjami** – nadmierne gromadzenie i przeglądanie danych z Internetu;
- **uzależnienie od komputera** – obsesyjne granie w sieci.

Wraz z coraz większym rozwojem technologii informacyjnej zagrożenia będą coraz większe, łatwo staną się epidemią, jeśli nie zadba się o odpowiednie kształcenie użytkowników, w szczególności dzieci i młodzieży.

Wskazówki bezpieczeństwa, które warto wziąć pod uwagę w czasie rozmów z nastolatkami na temat zagrożeń w Internecie:

- Sporządzić domowy regulamin korzystania z Internetu. Określić rodzaj witryn, których dzieci nie mogą przeglądać, godziny, w których mogą korzystać z Internetu oraz zasady komunikacji internetowej, obejmujące korzystanie z chatroomów.
- Komputery z dostępem do Internetu ustawić w ogólnodostępnym miejscu, nie w pokojach dzieci.
- Wyposażyć komputer w narzędzia do filtrowania zawartości Internetu (np. funkcja kontroli rodzicielskiej), które będą uzupełniać nadzór rodzicielski.
- Zabronić umawiania się z osobami poznanymi w Internecie.
- Bez pozwolenia dzieci nigdy nie powinny ujawniać jakichkolwiek informacji osobistych: w wiadomościach e-mail, chatroomach, wiadomościach błyskawicznych, formularzach rejestracyjnych, profilach osobistych, ani nie powinny uczestniczyć w konkursach internetowych.
- Nie pozwolać dzieciom na pobieranie programów, muzyki i plików bez zezwolenia osoby dorosłej. Rodzic powinien powiedzieć im, że udostępnianie plików lub pobieranie z Internetu tekstów, obrazów lub ilustracji może stanowić naruszenie praw autorskich i złamanie prawa.
- Zachęcać dzieci do mówienia o tym, co wzbudza w nich niepokój lub poczucie zagrożenia. Dowiedzieć się więcej o sposobach postępowania z internetowymi pedofilami i dręczycielami.
- Przedstawić zagrożenia związane z pornografią w Internecie i skierować młodego człowieka do właściwych witryn poświęconych zdrowiu i seksualności.
- Przedstawić sposoby chronienia się przed spamem.
- Zapoznać się z witrynami, które dzieci często odwiedzają. Upewnić się, że nie odwiedzają witryn z obraźliwymi treściami i nie wysyłają informacji osobistych lub swoich zdjęć.
- Uczyć młodzież odpowiedzialnego, etycznego zachowania w Internecie. Dzieci nie powinny używać Internetu do rozsiewania plotek, tyranizowania lub grożenia innym.
- Transakcje finansowe dokonywane w Internecie (np. zamówienie, kupno lub sprzedaż jakiegoś) przedmiotu muszą być uzgadniane z rodzicami.
- Przedstawić zjawisko hazardu internetowego oraz zagrożenia, jakie ze sobą niesie. Przypomnieć młodzieży, że uprawianie hazardu internetowego przez osoby niepełnoletnie jest nielegalne.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Omów zagadnienia: przestępczości komputerowej, w tym piractwa komputerowego oraz nielegalnych transakcji w sieci, oraz zasady bezpiecznego udostępniania i adminstrowania danymi zamieszczanymi w sieci.

b) Opisz wynikające z rozwoju technologii informacyjno-komunikacyjnych szanse i zagrożenia dla rozwoju społeczeństwa.

c) Komputer i technologie informacyjno-komunikacyjne jako czynnik rozwoju albo uwstecznienia współczesnego człowieka – wyjaśnij i uzasadnij własne stanowisko.

Bibliografia:

Szewczyk A., *Oblicza ubóstwa w społeczeństwie informacyjnym*, Warszawa 2006.

Szewczyk A., *Dylematy cywilizacji informatycznej*, Warszawa 2004.

Szewczyk A., *Problemy moralne w świecie informacji*, Warszawa 2008.

Haber L.H., Niezgoda M., *Społeczeństwo informacyjne. Aspekty funkcjonalne i dysfunkcjonalne*, Kraków 2007.

Białobłocki T., Moroz J., Nowina-Konopka M., Zacher L. W., *Społeczeństwo informacyjne. Istota, problemy, wyzwania*, Warszawa 2006.

4. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera

4.1. Algorytm jako metoda rozwiązywania problemu

Algorytm definiuje się jako metodę systematycznego, krok po kroku, postępowania prowadzącego do rozwiązania problemu lub osiągnięcia celu. Za pierwowzór współczesnych algorytmów uznaje się stworzony wieki temu algorytm Euklidesa. Algorytm porównuje się także do instrukcji postępowania lub przepisu wykonania. Postępowanie algorytmiczne kojarzy się z precyzyjną, dokładną i o minimalnych nakładach metodą dążenia do celu. Ważną cechą algorytmu jest fakt, że dla tych samych danych wejściowych zastosowanie tego samego algorytmu zawsze doprowadzi do identycznych rozwiązań. **Postępowanie algorytmiczne** jest przeciwieństwem losowego eksperymentowania, stosowanego czasem do znalezienia rozwiązania.

W procesie algorytmicznym dość wyraźnie zaznaczone są etapy definiowania problemu, projektowania i otrzymywania rozwiązania. Rozwiązanie nazywa się dobrym, jeśli jest zrozumiałe dla każdego, poprawne i efektywne[1].

Bardziej szczegółowo, proces komputerowej metodologii osiągania celu można scharakteryzować 6 etapami[2]:

1. opis i analiza sytuacji problemowej;
2. sporządzenie specyfikacji problemu z uwzględnieniem opisu danych wejściowych, opisu wyników, opisu powiązań i zależności pomiędzy danymi i wynikami;
3. zaprojektowanie rozwiązania – program, algorytm, struktura danych i środowisko w postaci odpowiedniego języka programowania;
4. komputerowa realizacja rozwiązania wraz z badaniem efektywności działania dla różnych danych.
5. testowanie rozwiązania, weryfikacja poprawności i zgodności ze specyfikacją;
6. prezentacja rozwiązania oraz stworzenie dokumentacji dla przyszłych użytkowników.

Do zadań realizowanych algorytmicznie należy choćby sortowanie danych, porządkowanie z uwagi na zadane kryterium, wyszukiwanie elementu spełniającego zadane kryteria.

Algorytmiczne podejście do rozwiązywania problemów możemy spotkać w działalności gospodarczej firm. Każdy wykonawca robót budowlanych czy drogowych ma do czynienia z kosztorysem wykonawczym, który jest dokładną procedurą wykonania poszczególnych prac. Charakter algorytmu mają także instrukcje napraw sprzętu AGD czy też sposób udzielania pierwszej pomocy ofierze wypadku.

1. M. Sysło, *Algorytmika i programowanie. Wprowadzenie do algorytmiki i programowania, wyszukiwanie i porządkowanie informacji*, Warszawa 2009.
2. tamże

TEMATY DO DYSKUSJI

a) W programie Excel oblicz realny koszt (z podatkiem) zakupu zestawu komputerowego. W sklepie uzyskujesz ceny poszczególnych elementów bez podatku VAT. Opisz to zdanie w postaci listy kroków.
b) Napisz algorytm kosztorysu wykonawczego dowolnie wybranej usługi.
c) Opracuj algorytm w postaci czynności, realizując wysyłanie listu elektronicznego do kolegi (przy użyciu portalu internetowego, na którym masz konto i znasz jego e-mail) z zapytaniem odnośnie wybranej sytuacji probelmowej.
d) Podaj algorytm wyszukiwania lidera w *n*-elementowym zbiorze.
e) Posłuż się metodą „dziel i zwyciężaj" w rozwiązaniu dowolnie wybranej sytuacji problemowej.
f) Zastosuj rekurencję/podejście zachłanne w rozwiązaniu prostej sytuacji problemowej.

4.2. Nie chowaj rozwiązania do szuflady!

Po zrealizowaniu procesu rozwiązywania problemu za pomocą programu komputerowego należy przetestować otrzymane rozwiązanie, ocenić jego własności, odporność na nieumyślne lub celowe uszkodzenia. Bardzo ważne jest powtórne porównanie jego zgodności ze specyfikacją.

Z uwagi na zawodność pamięci ludzkiej należy sporządzić opis dochodzenia do końcowego efektu. Niekwestionowaną wartością dodaną będzie zaprezentowanie problemu, całego postępowania i efektów innym, może się to bowiem przyczynić do dalszego zgłębiania i analizy zjawiska, tworzenia nowych algorytmów, rozwoju osobistego uczestników spotkania.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Profesjonalne testowanie oprogramowania – etapy.
b) Dobór odpowiedniej formy prezentowania efektów pracy i zastosowanej metodyki.
c) Czy komputer może podpowiedzieć nam, co należy zrobić? Testowanie rozwiązań.

Bibliografia:

Sysło M., *Algorytmika i programowanie. Wprowadzenie do algorytmiki i programowania, wyszukiwanie i porządkowanie informacji*, Warszawa 2009.

Cormen T. H, Leierson C. E., Rivest R. L., *Wprowadzenie do algorytmów*, Warszawa 1997.

Harel D., *Algorytmika. Rzecz o istocie informatyki*, Warszawa 1992.

Sysło M. M., *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, Warszawa 1998.

5. Opracowanie informacji za pomocą komputera – arkusze kalkulacyjne, grafika menedżerska i prezentacyjna

5.1. Kto piękny, ten piękny, inni mają Photoshopa

Każdy obraz stworzony lub tylko edytowany w komputerze można zaliczyć do jednej z dwóch kategorii: albo jest bitmapą, albo grafiką wektorową. W dobie dominacji systemu operacyjnego Windows najłatwiej dostępnym rodzajem edytora grafiki rastrowej jest wbudowany w ten system program pod nazwą Paint, w którym obraz powstaje przez odpowiednie zabarwienie poszczególnych punktów (inaczej pikseli) na ekranie. Taki obraz jest pamiętany w postaci bitmapy, tzn. zbioru pikseli. W ten sposób tworzy się grafikę zwaną rastrową. W edytorach grafiki bitmapowej edycja jest możliwa na poziomie pojedynczych punktów lub ich grup, można na przykład zmienić kolor jednokolorowego obszaru otoczonego innym kolorem. Edytory tego typu można również wykorzystywać do korekcji zdjęć pamiętanych w formacie bitmapy, choć akurat skromne możliwości zawarte we wspomnianym programie sugerują użycie bardziej zaawansowanej aplikacji, na przykład wspomnianego w tytule rozdziału Adobe® Photoshopa.

W celu wykonania jakiejkolwiek operacji na rysunku konieczne jest wskazanie, którego elementu ma ona dotyczyć – należy go zaznaczyć. Zaznaczanie (inna nazwa to *maskowanie*) fragmentów rysunku polega na wyodrębnieniu fragmentu kompozycji, który ma być edytowany (kopiowany, przekształcany, powiększany/zmniejszany, zamierzono zmianę jego barwy itp.). Dodatkowo ułatwia to tworzenie choćby kompozycji symetrycznych lub złożonych z powtarzających się motywów – program może posiadać bezpośrednio takie narzędzia bądź efekt jest możliwy do osiągnięcia po wklejeniu kopii i jej symetrycznym odbiciu względem jakiejś osi. Do dyspozycji jest zaznaczanie regularnego (np. kwadratowego, prostokątnego) obszaru lub obszaru o dowolnym kształcie. Niektóre edytory mają jeszcze inne, bardziej rozbudowane możliwości zaznaczania fragmentu rysunku, GIMP na przykład pozwala jednym kliknięciem zaznaczyć wszystkie obszary rysunku, które mają określony kolor. Aby poddać edycji fragment bitmapy, należy po zaznaczeniu skorzystać z narzędzi na przykład zmiany wielkości i położenia. Warty zauważenia jest fakt, że przy powiększaniu obrazu nie zwiększa się liczba punktów, które go tworzą – powiększanie się punktów obrazu powoduje utratę ostrości i efekt „schodkowania". Bardziej zaawansowane edytory grafiki rastrowej (np. program GIMP) umożliwiają automatyczne wygładzanie krawędzi przy skalowaniu. Niemniej, w przypadku krzywych i łuków przy odpowiednim powiększeniu każda z tych linii będzie miała poszarpane krawędzie i schodki.

Jeśli planuje się wykonanie tej samej operacji na kilku obiektach, programy zazwyczaj umożliwiają ich grupowanie z użyciem (przytrzymaniem) klawisza Shift.

Inną koncepcję budowania obrazu reprezentują edytory grafiki wektorowej, z których najbardziej znaną aplikacją komercyjną jest Corel® Draw, zaś po stronie oprogramowania open source – Inkscape. W edytorach tych każdy element rysunku, tak tworzony w trybie rysowania odręcznego jak i z gotowych elementów, jest zapamiętywany za pomocą wzorów matematycznych. Nawet fragmenty odręczne są interpolowane do krzywych matematycznych. Każdy element rysunku jest osobnym tzw. wektorem. Dzięki temu można wrócić w każdej chwili do jego edycji i zmiany właściwości – położenia, koloru i wymiarów. Można modyfikować sposób i kolejność nakładania się poszczególnych obiektów oraz grupować/rozgrupowywać je w dowolnym momencie.

Obraz wykonany jako grafika wektorowa może być zapisany w formacie grafiki rastrowej, jednakże nastąpi wtedy utrata informacji o budujących go wzorach matematycznych. Bitmapa z kolei może być wczytana do programu grafiki wektorowej, będzie jednak wówczas jednym obiektem, który da się skalować, ale ingerencja w jego zawartość jest ograniczona.

Pliki zawierające grafikę rastrową są zwykle większe od plików z grafiką wektorową. Dzieje się tak dlatego, że definicja matematyczna, nawet długiego odcinka, okręgu, łuku lub innego kształtu, jest krótsza niż zapamiętanie koloru i pozostałych parametrów każdego punktu składowego tegoż elementu.

Z czasem zauważono, że w plikach bitmapowych można grupować informacje o wyglądzie sąsiednich, tak samo zdefiniowanych punktów, co dało początek kompresji pliku. Kolejnym pomysłem na zmniejszenie rozmiaru (wagi) takiego pliku jest progowanie kolorów, tzn. zrównanie zbliżonych kolorów do tego samego poziomu i zapisanie ich jako jeden kolor. Pierwsze rozwiązanie pozwalało na stosunkowo niewielką kompresję, za to zachowywało całą informację o obrazie, drugie znacznie lepiej kompresuje pliki, lecz odbywa się to kosztem utraty jakości, stąd mówi się o kompresji stratnej. W praktyce jest to kompromis pomiędzy niewielką utratą jakości rysunku a ograniczeniem jego rozmiaru, co pozwala na jego szybsze pobieranie z sieci i tym samym na szybsze wczytywanie się na przykłąd strony www.

Najpopularniejsze formaty plików z grafiką rastrową to:

- *.bmp – standardowy, nieskompresowany format tych plików, w którym wielkość pliku można moderować, na przykład poprzez liczbę zapamiętanych kolorów;

- *.gif – pomimo kompresji także bezstratny format grafiki rastrowej, z ograniczeniem zapamiętywanej liczby kolorów do 256;

- *.png – rastrowy format plików graficznych oraz system bezstratnej kompresji danych graficznych. Obsługuje stopniowaną przezroczystość (tzw. kanał alfa) oraz 48-bitową głębię kolorów, pozwala na skalowanie liczby kolorów. PNG został opracowany jako następca GIF w 1995 roku;

- *.tif – format TIFF pliku stosowany jest przede wszystkim dla materiałów przeznaczonych do druku, pozwala uzyskać bezstratną kompresję do 40% oryginalnej wielkości pliku;

- *.jpg – format kompresji stratnej, traci się na jakości obrazu, najczęściej można dokonać wyboru jak mocno ma być dokonywany proces kompresji. Pozwala na uzyskanie znacznej oszczędności w rozmiarze pliku;

- *.xcf – wewnętrzny format programu GIMP, nie stosuje kompresji, ma duży rozmiar z powodu zachowywania zaznaczeń, warstw, kanałów i ścieżek, jakie do tej pory zostały użyte. Nie „spłaszcza" obrazu.

Formaty grafiki wektorowej:

- *.cdr – popularny format stworzony przez firmę Corel®;

- *.ai – format konkurenta Corela – programu Adobe®Illustrator;

- *.eps – wywodzący się z PostScriptu, przez wiele lat jako jedyny używany do celów DTP, służy do przechowywania pojedynczych stron grafiki wektorowej w postaci umożliwiającej osadzanie ich w innych dokumentach;

- *.svg – uniwersalny format dwuwymiarowej grafiki wektorowej (statycznej i animowanej).

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Dla wybranego przedsięwzięcia opracuj materiały reklamowe składające się ze zdjęć reklamowych i filmów, uwzględniając:
   – edytowanie obrazu w grafice rastrowej i wektorowej – omów różnice między nimi;
   – odpowiednio przekształć otrzymane pliki graficzne i filmy.

b) Przygotowane we wcześniejszym ćwiczeniu materiały wykorzystaj do stworzenia w programie Power Point prezentacji reklamującej wybraną firmę/produkt.

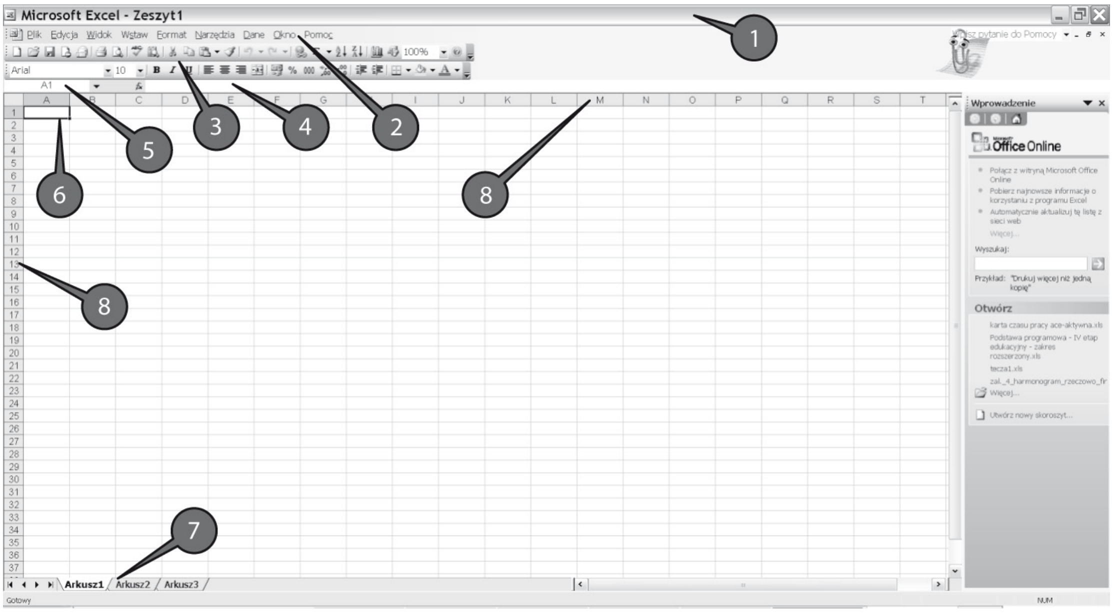
5.2. Lepsze i szybsze niż kalkulator

Arkusz kalkulacyjny to program komputerowy przedstawiający dane, głównie liczbowe, w postaci zestawu tabel dwu- i trójwymiarowych. Pozwala na automatyczną obróbkę danych oraz na ich prezentację na różne sposoby, szczególnie poprzez wykresy. Program, bez którego nie może się obyć współczesna księgowość i biuro.

Automatyzacja obróbki danych możliwa jest dzięki takim rozwiązaniom,jak wbudowana funkcja kopiowania danych i formuł w kierunku ruchu myszki w ramach mechanizmu przeciągnij-i-upuść (*drag&drop*), najważniejszym zaś narzędziem obsługi danych w arkuszu kalkulacyjnym są funkcje (matematyczne, statystyczne, daty i czasu, finansowe, bazodanowe, logiczne), za pomocą których odbywa się ich automatyczne przetwarzanie.

Z racji popularności w naszym kraju w niniejszym podręczniku zostanie omówiony, a raczej zostanie zrobiony wstęp do programu, Microsoft® Excel.

Microsoft® Excel jest arkuszem kalkulacyjnym pozwalającym na tworzenie skoroszytów zawierających arkusze, na przetwarzanie danych z pomocą formuł, tworzenie wykresów, list oraz plików sieci Web. Środowisko graficzne arkusza opiera się na standardzie wszystkich programów pakietu Office, ale dodatkowo oferuje swoje własne elementy, takie jak nowe przyciski, polecenia i elementy sterujące, zaś cały obszar roboczy jest wstępnie pokryty siatką. Plik wynikowy Excela, zapisywany fizycznie z rozszerzeniem *.xls lub *.xlsx (dla szablonów *.xlt lub *.xltx), zawiera w sobie skoroszyt złożony z arkuszy – domyślnie 3. Każdy arkusz posiada komórki, których adresowanie opiera się na współrzędnych kolumn i wierszy. Występuje dodatkowo pasek formuły, na którym wyświetlana jest zawartość aktywnej komórki. Obok, po lewej stronie, znajduje się pole nazwy, zawierające adres jej odwołania. W trakcie edycji formuły pole nazwy zmienia się na pole wyboru funkcji.



Rys. 15. Okno programu MS Excel

Źródło: Opracowanie własne

Opis elementów okna programu Excel:

1) pasek tytułowy;
2) pasek menu;
3) pasek narzędziowy – standardowy i formatowania;
4) pasek formuły;
5) pole nazwy/pole wyboru funkcji;
6) wskaźnik aktywnej komórki – pogrubione obramowanie komórki,wskazuje miejsce aktualnego wprowadzania danych;
7) arkusze – w Excelu 2003 można posłużyć się maksymalnie 256 arkuszami, złożonymi z 65 536 komórek;
8) oznaczenie kolumny (litera) i wiersza (cyfra/liczba).

Każda komórka posiada swój indywidualny adres. Litery w tym adresie odpowiadają danej kolumnie, liczba to numer wiersza. Przykładowo komórka B3 znajduje się w kolumnie B i wierszu 3.

W celu wprowadzenia danych do komórki trzeba ją najpierw uaktywnić. Najprościej jest ustawić się na danym polu i wpisać wartość. Uaktywnienie następuje też po dwukrotnym kliknięciu lewym przyciskiem myszy w wybraną komórkę. Obie metody pozwalają zarówno na wprowadzenie nowej wartości, jak i na poprawienie poprzedniej. Aktywna komórka wyróżniona zostaje grubym obramowaniem.

Jeśli zaistnieje potrzeba zaznaczenia prostokątnego zakresu komórek lub wielu nieprzylegających do siebie komórek lub zakresu, można tego dokonać, przytrzymując klawisz Shift (dla komórek przylegających) lub Ctrl (dla niezależnych) i przesunąć mysz techniką przeciągnij-i-upuść. Zaznaczenie prostokątnej grupy komórek możliwe jest też procedurą rozpoczynającą się od kliknięcia w początkową komórkę, następnie przytrzymaniu klawisza Shift i powtórnym kliknięciu, tym razem w komórkę końcową. W trakcie zaznaczania techniką przeciągnij-i-upuść Excel pokazuje w polu nazwy wielkość zaznaczanego obszaru (ilość wierszy x ilość kolumn), po zakończeniu zaznaczania w polu nazwy pozostaje adres komórki, od której rozpoczęto zaznaczanie.

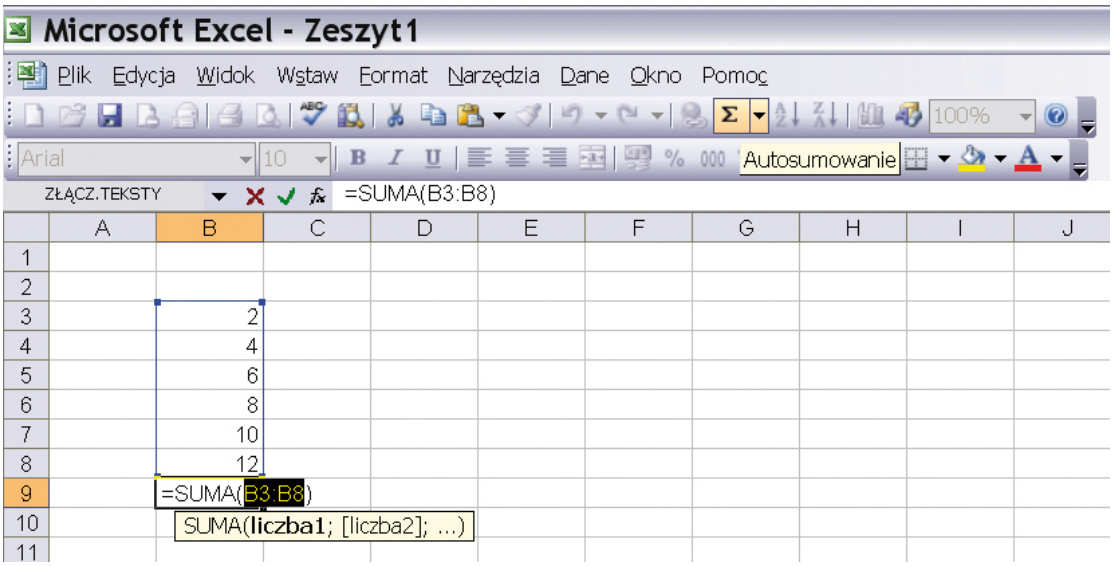
5.2.1. Formuły

W komórkach arkusza przechowywane są dwa typy informacji:

- **Wartość** – jest to informacja stała, nie zmienia się. Wartością może być liczba, tekst, data/czas. Jest ona również wyświetlana w niezaznaczonej komórce na ekranie.
- **Formuła** – składa się z odwołań do komórek, wartości, operatorów oraz predefiniowanych funkcji wykonujących na nich obliczenia. Po przetworzeniu przez Excela w komórce generowany jest wynik formuły, który jest wyświetlany na ekranie. Niemniej, ponieważ formuła dalej przechowuje swoją definicję, w tym odwołania do innych komórek, każdorazowa zmiana wartości jednej z nich lub większej ilości komórek wywoła lawinową modyfikację wyników obliczonych przez formuły zawierające do niej odwołanie. Takie właściwości czynią z arkuszy kalkulacyjnych potężne narzędzie, zarówno dla naukowców jak i biznesu.

Formuły można wprowadzać poprzez pasek formuły, jak i bezpośrednio w aktywnej komórce. Po zakończeniu edycji formuły zmiany trzeba zatwierdzić klawiszem Enter lub przyciskiem zawierającym znaczek odhaczenia, znajdującym się obok paska formuły.

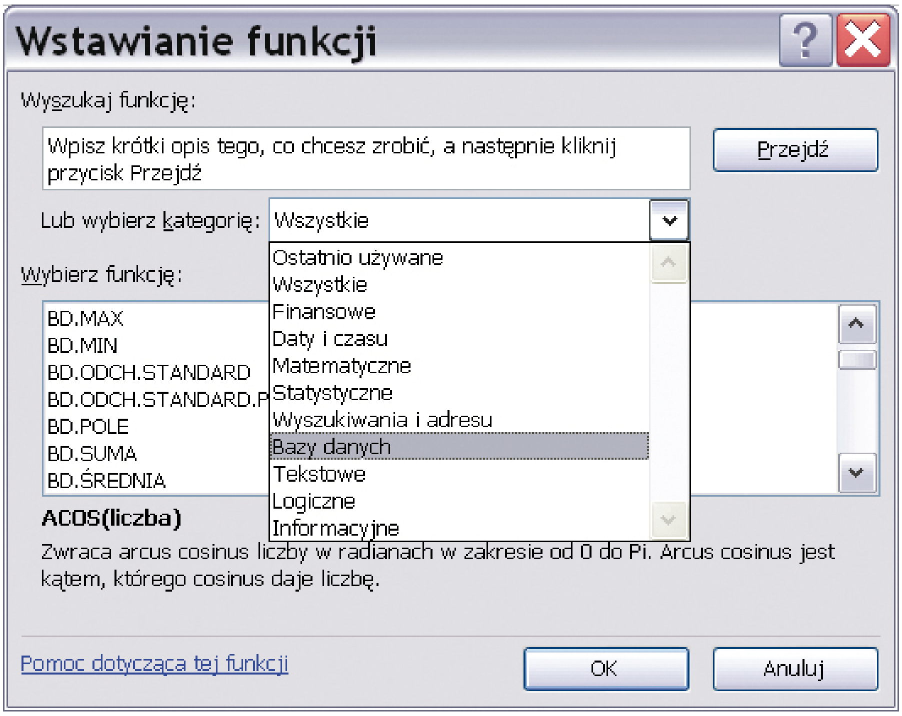
W formułach Excela można posługiwać się nie tylko operatorami matematycznymi, bardzo przydatne są funkcje – gotowe formuły. Funkcje mogą być włączane w formuły oraz zagnieżdżane jedna w drugiej. Najprostszymi funkcjami wykorzystywanymi w arkuszu są autosumowanie, średnia, licznik (ilość komórek), minimum i maksimum. Funkcje te, jako wyróżnione, można w łatwy sposób bezpośrednio wprowadzić przyciskiem autosumowania na pasku narzędziowym.



Rys. 16. Edycja formuły zawierającej autosumowanie w programie MS Excel

Źródło: Opracowanie własne

Większy wybór funkcji uzyskuje się po rozwinięciu listy funkcji, w którą zamieniło się pole nazwy, bądź przez przycisk funkcji f_x po lewej stronie od wpisywanej formuły (patrz Rys. 17).



Rys. 17. Funkcje dostępne w programie MS Excel

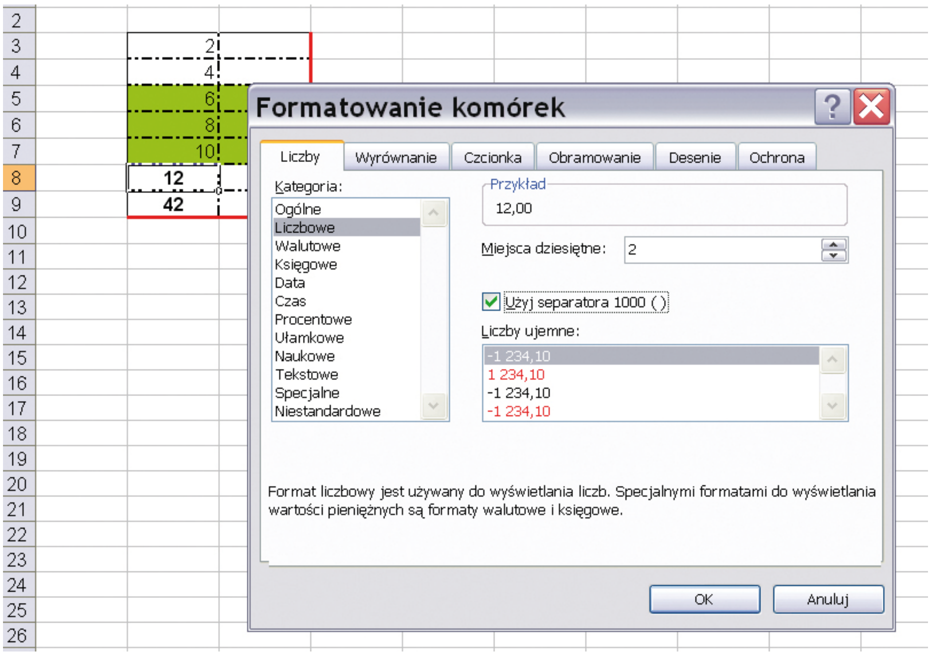
Źródło: Opracowanie własne

Tworząc arkusze kalkulacyjne należy zwracać uwagę na spójność formuł. Częste błędy w formułach to różna liczba nawiasów i cudzysłowów otwierających i zamykających.

5.2.2. Formatowanie

W Excelu możliwe są dwa rodzaje formatowania. Pierwszy polega na poprawie widoczności zawartości arkuszy poprzez stosowanie tła, ramek tabel, koloru i stylu czcionek, dostosowywanie rozmiarów komórek do zawartości itd. Formatowanie to pełni rolę estetyczną. Formatować można zawartość komórki, samą komórkę, tabelę, cały arkusz, aż po skoroszyt, wykorzystując różne opcje obramowania komórek, tabel i arkusza, opcje wydruku wraz z dopasowaniem do strony (arkusz wszak nie jest pojedynczą kartką papieru!), oraz nagłówki i stopki. Zaleca się praktyczne omówienie tych zagadnień na przykładowym arkuszu z zawartością.

Drugim typem jest formatowanie liczb. Excel oferuje bogaty zestaw kategorii formatów liczb, od ogólnego (brak wskazanego wyraźnie formatu), poprzez liczbowe, walutowe, księgowe, daty, czasu, procentowe, ułamkowe, naukowe, tekstowe, aż po specjalne i niestandardowe. To ostanie jest otwarciem się programu na inne, mniej powszechne typy danych.

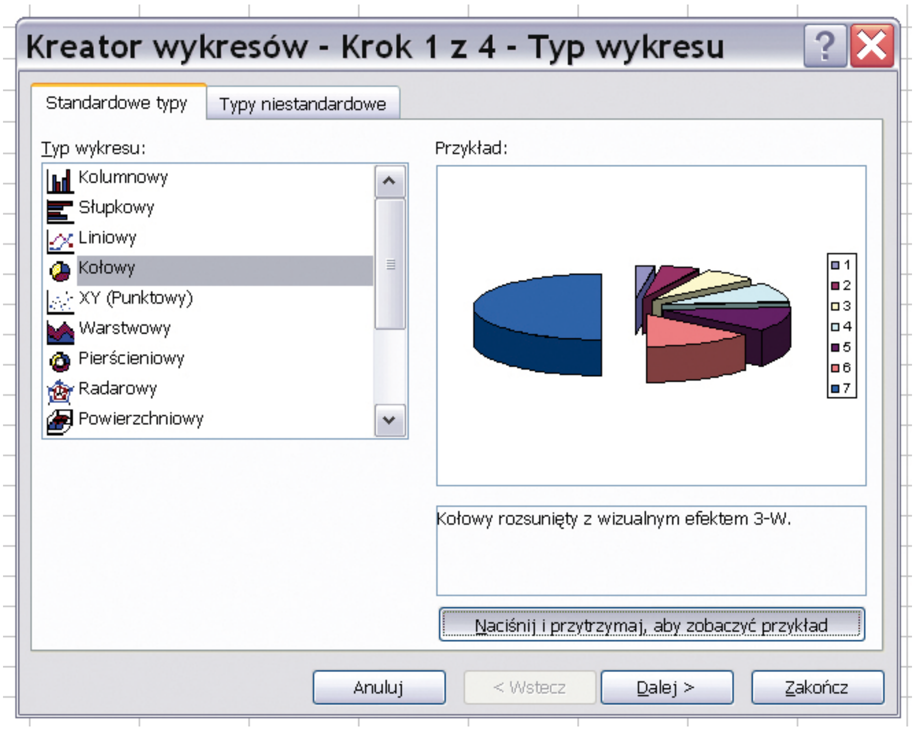


Rys. 18. Formatowanie liczb w programie MS Excel (w tle widać sformatowane komórki i czcionkę)

Źródło: Opracowanie własne

5.2.3. Wykresy i prezentacja wyników

Efekty pracy nie muszą wcale ograniczać się do tabel z kolumnami i rzędami liczb. Można dokonać wizualizacji wyników za pomocą bogatego zestawu wykresów. Do wyboru są wykresy: kolumnowe, słupkowe, liniowe, kołowe i wiele innych



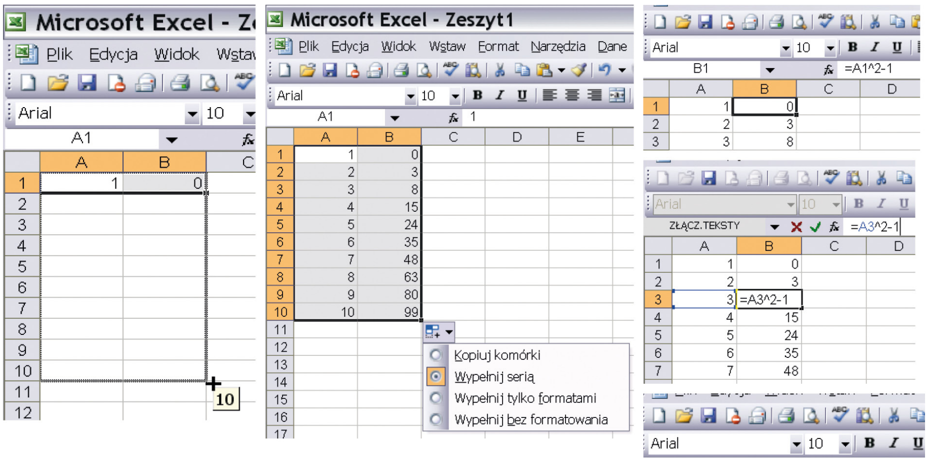
Rys. 19. Kreator wykresów w programie MS Excel

Źródło: Opracowanie własne

Sztuką jest dobranie odpowiedniego wykresu do zawartości. Obszar wykresu i poszczególne jego elementy można formatować – dodawać legendę i tytuł, etykiety danych, opis osi.

Tak jak w formułach, zmiana danych źródłowych spowoduje automatyczne przeliczenie wartości wynikowych i samoczynne skorygowanie się zależnych elementów wykresu (słupków danych, opisów osi).

Praca w arkusz kalkulacyjnym jest wyjątkowo efektywna w przypadku podstawiania dużej ilości danych do tego samego wzoru. Dzięki możliwości kopiowania nie tylko danych, ale też formuł w kierunku ruchu myszy (przy zastosowaniu techniki przeciągnij-i-upuść), następuje automatyczne powielenie formuł oraz zaktualizowanie się argumentów funkcji obliczających (Rys. 20).



Rys. 20. Proces kopiowania (powielania w dół)

Źródło: Opracowanie własne

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Stwórz w programie Excel bazę danych – księgowość wybranego przedsięwzięcia. Wykorzystaj przygotowany arkusz kalkulacyjny do obrazowania zależności funkcyjnych i zapisywania algorytmów, zaprezentuj wyniki swojej pracy, dobierając odpowiednie wykresy.

5.3. Jak cię widzą, tak cię piszą

Prezentacja multimedialna to audiowizualna forma prezentowania wykładów, referatów czy komunikatów, może ona stanowić wprowadzenie do dyskusji, samoistny pokaz, materiał poglądowy do zaprezentowania podczas konferencji naukowych itp. Do prezentacji można wykorzystywać nie tylko sam komputer, ale także projektor multimedialny[1]. Podstawą dla prezentacji jest zawsze pewien, choćby całkiem prosty, scenariusz multimedialny, na podstawie którego przygotowane elementy składowe łączy się w „całość". Tymi elementami mogą być: zdjęcia, tekst, rysunki, dźwięki i obrazy, animacje albo filmy. Prezentacje najczęściej tworzone są w aplikacjach MS Power Point pakietu Office lub aplikacjach Impress będącego składnikiem pakietu OpenOffice.org. Celem tworzenia prezentacji jest zaangażowanie więcej niż jednego zmysłu w przyswajanie podawanych informacji, co zwiększa tempo i skuteczność tego procesu.

Prezentacje multimedialne spotyka się często jako środek do prezentacji wyników finansowych firm, reklamowania produktów, jako element e-learningu. Obok komercyjnych zastosowań, prezentacja może służyć

1. por. http://pl.wikipedia.org/wiki/Prezentacja_multimedialna, 3.05.2013

do uatrakcyjnienia pokazu na przykład albumu rodzinnego, fotografii z wakacji, czy też jako zbiór ulubionych widoków, krajobrazów. Prezentacja może być funkcjonować samodzielnie lub wymagać dodatkowych objaśnień współpracującego z nią człowieka.

5.3.1. Trochę historii

Pierwszymi profesjonalnymi programami do tworzenia prezentacji były: Harvard Presentation Graphics i Microsoft Power Point. W tabeli przedstawiono chronologię rozwoju tej dziedziny wiedzy.

Tab. 5. Historia programów do tworzenia prezentacji

Rok powstania	Nazwa	System operacyjny	Producent
1986	Harvard Presentation Graphics	DOS, Windows	Software Publishing Corporation
1987	Power Point	Windows, Mac OS	Microsoft
1990	Freelance Graphics	Windows	IBM Lotus Development Corp.
1993	Corel Presentations	Windows	Corel Corporation
1998	StarOfficeImpress	Windows, Linux, Solaris	Sun Microsystems
1998	KPresenter	Linux, Unix	KDE Project
2000	OpenOffice.org Impress	Windows, Linux, Solaris, Mac OS, FreeBSD	OpenOffice.org
2003	NeoOfficeImpress	Mac OS	Patrick Lubyi Edward Peterlin
2005	Keynote	Mac OS	Apple

Źródło: www.prezentacje.multimedialne.net/historia.htm, 07.04.2007

- Harvard Presentation Graphics był pionierem w tworzeniu prezentacji. Był pierwszym programem pozwalającym łączyć tekst z grafiką i diagramami. Do końca lat 80 był głównym programem do tworzenia slajdów.
- Microsoft® Power Point, obecnie najpopularniejszy program do tworzenia prezentacji, jest elementem pakietu MS Office i Mac OS. Korzystają z niego biznesmeni, trenerzy, nauczyciele oraz zwykli użytkownicy. Dzięki zintegrowaniu środowiska pakietów mechanizmem OLE, można łatwo importować do prezentacji teksty, tabele i wykresy z pozostałych programów pakietu. Najnowsze wersje umożliwiają zagnieżdżanie w prezentacji plików dźwiękowych i video.
- Freelance Graphics należy do pakietu SmartSuite firmy IBM Lotus. Obok podstawowych opcji program ten ma ciekawą funkcjonalność – szybką wymianę komentarzy i uwag pomiędzy użytkownikami sieci, oraz możliwość bezpośredniego uruchomienia prezentacji na komputerze innego użytkownika sieci. W obecnym stanie jest to jednak sprzeczne z zasadami bezpieczeństwa.
- Corel Presentations – początkowa nazwany Presentations, był częścią składową pakietu WordPerfect. W 1994 roku doszło do wykupienia WordPerfectCorporation przez firmę Novell Netware. Dwa lata później Corel Corporation przejął Novella i dopiero on dorzucił do tego pierwotnego pakietu kilka nowych opcji – edytora bitmap z możliwością wypełnienia i dodawania efektów specjalnych, narzędzia do grafiki wektorowej obsługującej krzywe Beziera, łuki, edycję węzłów. Dodatkowe smaczki w tym produkcie to: symulacja efektów trójwymiarowych, trasowanie map, a także wypełniania tekstem liter.
- OpenOffice.org Impress jest bezpłatną alternatywą dla Power Pointa na licencji GPL z funkcjami podobnymi do produktu konkurenta. Ciekawą innowacją jest możliwość eksportowania pracy bezpośrednio do formatu *.pdf lub flash. Słabiej natomiast obsługuje dźwięki oraz filmy.

- KPresnter to program, który działa pod systemami Linux oraz UNIX i potrafi importować prezentacje w formacie *.pps z Power Pointa. Program ten funkcjonalnością odpowiada pozostałym programom.
- NeoOfficeImpress wykorzystuje środowisko Java, przez co wyróżnia się odpornością na błędy systemowe i uniezależnia się w dużym stopniu od kondycji komponentów komputera. Jest bezpłatny, wciąż rozwijany, działa tylko pod Mac OS.

Keynote to część składowa pakietu iWork firmy Apple. Jest w pełni funkcjonalny, można w nim wykorzystywać m. in. zdjęcia, dźwięki oraz pliki video. Keynote używa formatu „key", ale daje także możliwość zapisu plików w formacie *.pps. Pozwala też na eksport do html, flash, PDF oraz Apple Quick Time.

5.3.2. Nieco teorii, nieco praktyki

Wyróżnić można dwa typy prezentacji multimedialnych: prezentacje interaktywne i prezentacje liniowe. Prezentacje interaktywne dają użytkownikom możliwość: pełnej kontroli nad wyświetlanymi treściami, swobodnej nawigacji między slajdami, skoków do innego działu, zarówno już oglądanego, jak i znajdującego się w dalszej części. Kontrola użytkownika wymaga stosowania nieco innych narzędzi przy jej tworzeniu w zależności od tego, czy jest to prezentacja osadzona na stronie internetowej, napisana za pomocą HTML, prezentacja utworzona w Adobe® Flash lub Macromedia®Director.

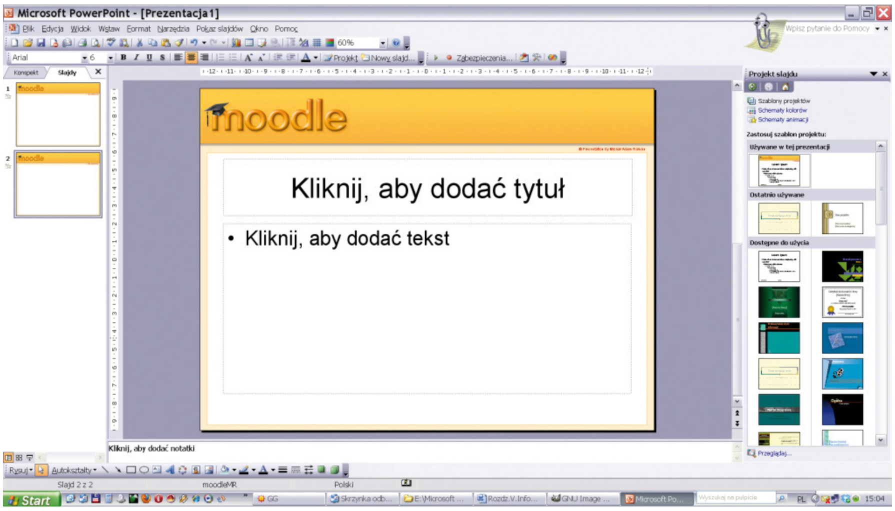
Prezentację w formie strony internetowej w HTMLu zaleca się używać w przypadku bardzo rozbudowanych struktur i dużych ilości prezentowanego materiału. Charakter pracy z taką prezentacją przypomina surfowanie po stronie www. Fizycznie składa się ona z wielu plików i najczęściej uruchamia się po otworzeniu w przeglądarce pliku index.html.

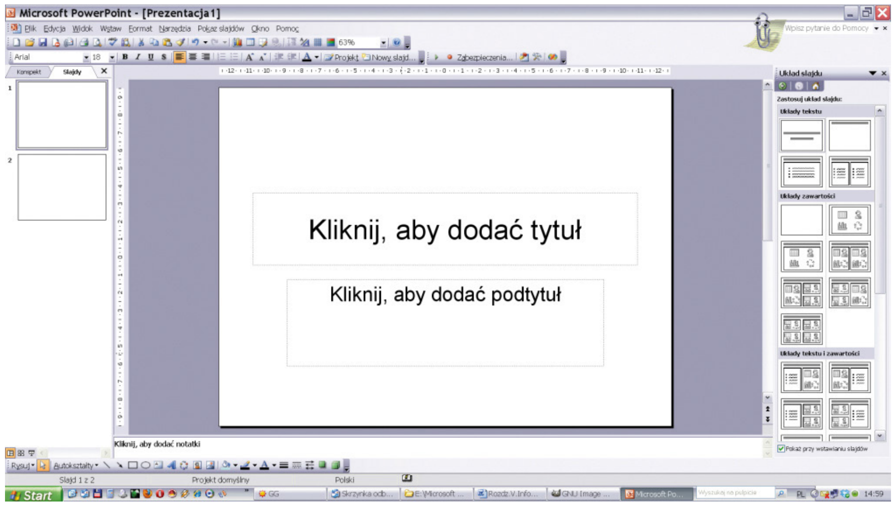
Taka koncepcja budowy pozwala na zastosowanie bardzo złożonych struktur, opracować obszerne materiały. Z drugiej strony restrykcyjne wymogi co do wielkości i skalowalności np. obrazków publikowanych w sieci sprawiają, że składa się z wielu niewielkich plików i może być wyświetlana bezpośrednio przez Internet. Konieczne jest jednak zainstalowanie odpowiednich wtyczek (ang. *plug-in*) w używanych przeglądarkach.

Prezentacje obu wspomnianych wyżej firm to obecnie najbardziej popularne rozwiązania prezentacji interaktywnych. Jeśli zostaną pobrane do wyświetlania off-line (bez konieczności posiadania dostępu do Internetu), na przykład na płycie CD, startują za pomocą pliku wykonywalnego z rozszerzeniem *.exe. Oznacza to, iż użytkownik nie musi posiadać żadnych dodatkowych programów ani wtyczek. Takie prezentacje są jednak rzadko tworzone na początkowych etapach znajomości warsztatu ze względu na trudność tworzenia i specyfikę programowania. Pojawiają się pewne trudności w budowie struktury takich prezentacji.

Prezentacje liniowe (grafika prezentacyjna) to taki rodzaj prezentacji, w których zawarty materiał jest wyświetlany „slajd po slajdzie", nie można w nich budować złożonych struktur, a nawigacja pomiędzy poszczególnymi działami jest rzadko spotykana i to w okrojonej postaci. Autor prezentacji na etapie tworzenia decyduje w jakiej kolejności będą wyświetlane kolejne części zawartego materiału, a w trakcie wyświetlania danej części może tylko zdecydować o czasie wyświetlania slajdu, o ile taką możliwość przewidział i nie ustawił automatycznego chronometrażu.

Slajd jest podstawowym elementem takiej prezentacji, składa się ona zatem z kolejno wyświetlających się w trakcie pokazu ekranów. Na każdym z nich umieszcza się takie obiekty, jak: pola tekstowe, zdjęcia, filmy, animacje. Możliwe jest utworzenie prezentacji na podstawie predefiniowanych w programie szablonów lub na podstawie indywidualnego, pobranego lub samodzielnie sparametryzowanego i utworzonego, szablonu zawierającego powtarzające się logo, hasło, kompozycję itp. Niezależnie od ustawień dotyczących całej prezentacji, programy dysponują propozycjami układów elementów na slajdzie, charakterystycznymi dla określonych typów projektowanej zawartości. Pozwala to na komfortowe umieszczanie zaplanowanych przez autora obiektów, takich jak: tekst w postaci wyliczenia, schematy organizacyjne, slajd z tytułem i zawartością w formie tabeli lub obrazka. Istnieje też możliwość wyboru pustego slajdu, który pozwala na własną kompozycję, zgodną z zaplanowaną koncepcją scenariusza.

a) 

b) 

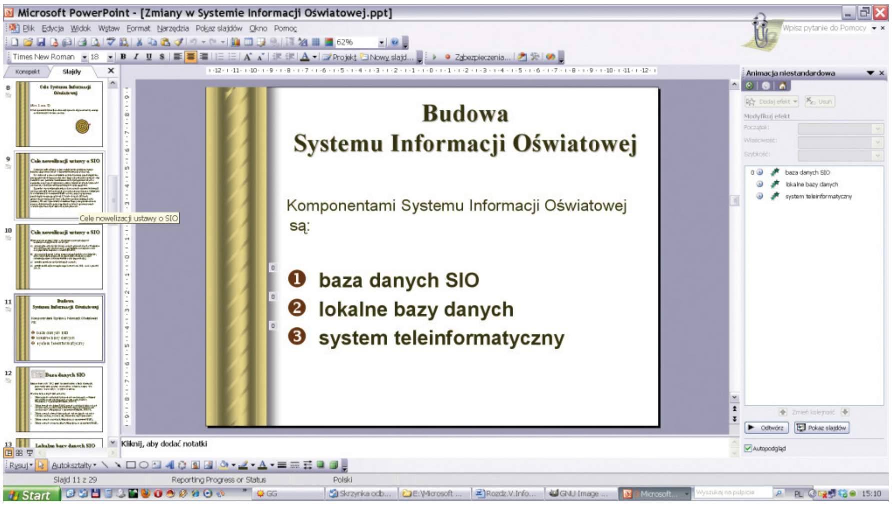
Rys. 21. a) Szablony dostępne w widoku projektu prezentacjib) Slajd w układzie tytułowym, po prawej można wybrać inne dostępne układy do wyboru

Źródło: Opracowanie własne

Zanim zostanie uruchomiony program do tworzenia prezentacji należy przygotować scenariusz lub choćby ogólny projekt, by efekt był w miarę „sensowny". W przeciwnym razie prezentacja może być przypadkowa i chaotyczna. Należy się zastanowić, jakiemu celowi prezentacja ma służyć. Autor prezentacji może mieć wiele pomysłów dotyczących swojej prezentacji i jeśli ich nie uporządkuje, nie może liczyć na pozytywny rezultat pracy. Szczególną wadą prezentacji może być nienormalne „kadzenie" organizatorowi szkolenia lub rekruterowi publiczności. Prezentacja powinna tak naprawdę odpowiadać potrzebom odbiorców. Niedobrym pomysłem będzie tworzenie prezentacji komercyjnej tylko pod gust nabywcy prezentacji. Tworzenie prezentacji powinno przebiegać zgodnie z intuicją autora. Prezentacje najczęściej są wyświetlane przez projektory lub na ekranie komputera, ale częstą praktyką jest publikowanie jej w Internecie, jako załącznika lub w postaci strony sieci web.

Innymi ważnymi **wskazówkami, o których należy pamiętać, tworząc prezentację,** są: używanie nieszyfrowanej czcionki tekstu w odpowiednim rozmiarze, dobieraniu do tekstu odpowiednio kontrastowych kolorów tła, urozmaicanie prezentacji, unikanie przeładowania informacji zawartych na slajdzie, zsynchronizowanie kolejności slajdów z prezentowanymi treściami, podawanie rzetelnych informacji, dobór tempa wyświetlania do ilości zawartych informacji oraz możliwości absorpcji treści przez odbiorców.

Aby uatrakcyjnić prezentację, można wprowadzić animowane przejścia między slajdami. Można wstawić też efekt dźwiękowy, który będzie odtwarzany, gdy slajd pojawi się na ekranie, wybiera się go z gotowej listy lub z dowolnego pliku muzycznego zawartego na dysku. Takie efekty dźwiękowe mogą być odtwarzane podczas pokazu automatycznie albo po kliknięciu myszką na obiekt symbolizujący dźwięk.



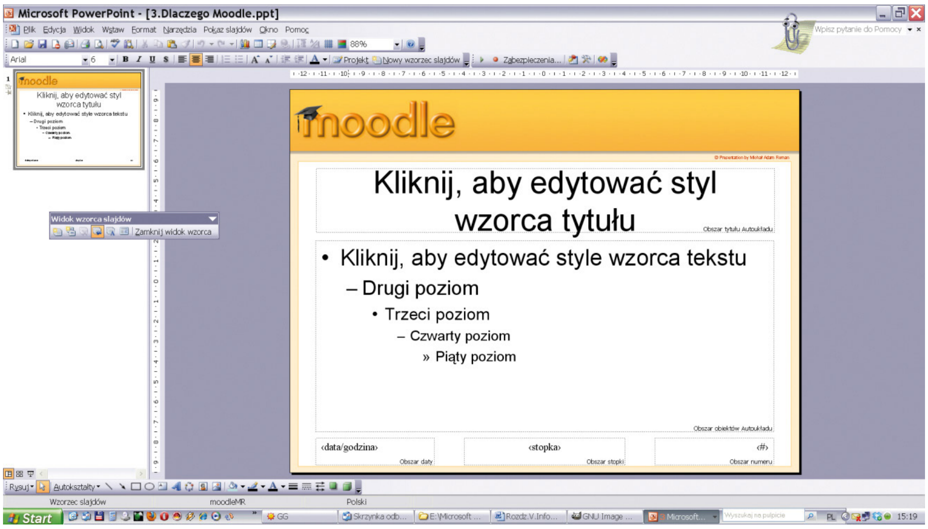
Rys. 22. Prezentacja z animowaniem przejść pomiędzy slajdami oraz animowanie wejść elementów na ekran. (menu animacji po prawej)

Źródło: Opracowanie własne

Ciekawym rozwiązaniem jest umieszczone pod głównym oknem projektowania slajdu pole do wprowadzania notatek. Notatki widzi prowadzący, nie jest ona widoczna dla widowni oglądającej prezentację (na Rys. 22 w polu tym znajduje się tekst: „kliknij, aby dodać notatkę").

Elementy predefiniowane slajdów można ustawić globalnie, używając wzorca slajdów. Wykorzystując wzorzec można sprawić na przykład, że logo lub główna myśl będzie się pojawiała na każdym nowym slajdzie oprócz pierwszego. Nie trzeba przy tym dokonywać pracochłonnego pozycjonowania elementu na każdym nowo powstałym slajdzie, jeśli wykorzystamy wzorzec, ta zawartość będzie pojawiała się automatycznie.

Wzorzec dostępny jest z poziomu menu Widok.



Rys. 23. Widok wzorca slajdów

Źródło: Opracowanie własne

Pokaz slajdów w programie Power Point można uruchomić na trzy sposoby – najprościej jest nacisnąć klawisz F5. Wyświetli się cały pokaz. Aby wyświetlić pokaz od bieżącego miejsca, trzeba użyć kombinacji klawiszy Shift+F5 lub wybrać trzecią w kolejności od lewej ikonę na dole okna, nad poleceniem Rysuj.

Należy zauważyć, że na obecnym etapie rozwoju technologii informacyjnej prezentacje multimedialne stały się czymś powszechnie tworzonym i wykorzystywanym. Znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach życia współczesnych społeczeństw, zarówno w pracy i nauce, jak i życiu towarzyskim i rodzinnym. Można zatem oczekiwać nowej, bardziej zaawansowana technologii w tej dziedzinie,. tworzącej na przykład trójwymiarowe prezentacje multimedialne.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Opisz podstawowe modele barw i ich zastosowanie.
b) Opracuj obrazy i filmy pochodzące z różnych źródeł, tworząc albumy zdjęć.
c) Jak wykorzystać arkusz kalkulacyjny do obrazowania zależności funkcyjnych i do zapisywania algorytmów?
d) Zaprezentuj grupie wybrany produkt/firmę, wykorzystując wcześniej przygotowane filmy i zdjęcia. Przygotuj prezenację multimedialną na podstawie konspektu, a następnię umieść ją na stronie internetowej wskazanej przez nauczyciela.

5.4. Twoje okno na świat

Obecne programy biurowe oraz graficzne są na tyle zaawansowane i posiadają tak mocno rozbudowane możliwości, że obróbka każdego tekstu, tabeli, obrazka czy animacji nawet dla niezbyt biegłego w informatyce człowieka nie stanowi problemu. Z drugiej strony dostęp do materiałów, gotowych lub półfabrykatów, stał się łatwy za sprawą Internetu i graficznego interfejsu oferowanego przez przeglądarki. W sukurs amatorom tworzenia nowych jakości idzie też ogromny silnik w postaci wyszukiwarek, takich jak Google. Humorystycznie mówi się, że jeśli czegoś nie znajdzie się w Internecie to znaczy, że to coś nie istnieje.

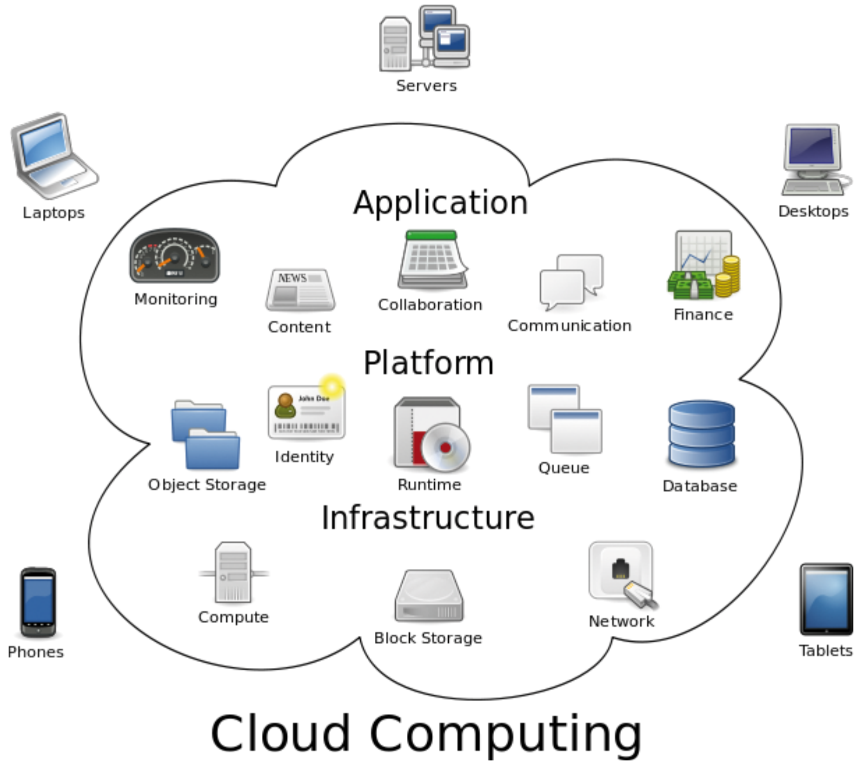
Tradycyjni użytkownicy komputerów przyzwyczaili się do tego, że wszystkie aplikacje instaluje się na twardych dyskach. Przyszłość świata komputerowego zapowiada jednak coś zupełnie innego. Największe programistyczne korporacje promują aktualnie ideę „**cloudcomputing**", czyli usług działających w chmurze. Polega to na tym, że zamiast instalować programy na każdym z komputerów po kolei, ostatecznie na serwerze sieci w firmie, wystarczy przez przeglądarkę internetową zalogować się do swojego konta gdzieś w świecie, by mieć do nich dostęp.

W technologii tej pracuje już wiele pożytecznych i używanych na co dzień programów. Entuzjastycznym promotorem cloudcomputingu jest Google, które w ten sposób udostępnił wszystkie swoje usługi. Wprawdzie przeglądarkę istaluje się na dysku komputera lokalnego, ale klienta poczty Gmail nigdy nie było trzeba instalować na dysku, dlatego nie może dziwić, że nagle pojawiły się usługi całkiem nowej generacji. Dobrym przykładem są też Dokumenty Google (Google docs), które za darmo i bez reklam udostępniają pełny zakres możliwości identycznych jak te w pakiecie Office należącym do giganta z Redmond i udostępniane za pokaźną opłatą w złotych polskich lub jej równowartość w USD.

Dokumenty, prezentacje, zdjęcia, muzyka i inna zawartość naszych komputerów kiedyś ulokowana na dyskach twardych i wszelkiego rodzaju nośnikach wymiennych – pierwotnie dyskietkach, potem płytach CD/DVD i pendrive'ach – obecnie coraz częściej ulokowana jest w sieci, na wirtualnych dyskach (Dropbox, Google drive, Skydrive, chomikuj.pl itp.) i portalach społecznościowych (Nasza-klasa, Facebook). Dzielimy się dokumentami, arkuszami, prezentacjami, pracując w chmurze czy wykorzystując Google docs.

Jakie są tego zalety? Jedna osoba nie musi kupować licencji danego programu na kilka stanowisk (fizycznych komputerów, czasem licencjonowanie jest nawet na każdy rdzeń procesora), jeśli zamierza korzystać z niego w różnych miejscach. Dodatkowo wszelkie dane znajdują się na bezpiecznym serwerze, a więc nie ma ryzyka ich przypadkowej utraty.

Na czym polega praca w chmurze? Jest to innowacyjna technologia, w której komputera osobistego używa się jedynie jako „wtyczki do sieci", a dostęp do danych, które w tradycyjnej technologii są dostępne na dysku własnego komputera, staje się możliwy po zalogowaniu się na odpowiedni serwer. Rozróżnia się chmury publiczne oraz prywatne. Te pierwsze są zewnętrznym, ogólnie dostępnym dostawcą aplikacji i usług. Natomiast chmury prywatne są użytkowane jedynie przez jakąś formę lub organizację, która tworzy je na własny użytek. Zapewne u wielu osób, które jeszcze nie korzystają z tej innowacyjnej technologii, rodzi się pytanie o bezpieczeństwo danych przechowywanych na zdalnym serwerze. Nie jest to pytanie bezzasadne, ale nie powinno też ono budzić w nas szczególnych obaw. Z pewnością dane zgromadzone na jakimkolwiek nośniku podłączonym do globalnej sieci Internetu są, do pewnego stopnia, narażone na ingerencję niepowołanych osób.



Rys. 24. Praca w chmurze. Autor:S. Johnson

Źródło: www.wikipedia.org, 21 marzec 2013.

Obecnie łatwo zaistnieć oficjalnie w Internecie jako choćby niewielka strona internetowa, mogąca służyć zarówno przedsiębiorstwu, instytucji, jak i osobie prywatnej. Obecnie nie ma chyba firmy, która nie prezentowałaby się w jakiś sposób w Internecie. Najpopularniejszą formą jest witryna złożona ze strony głównej i kilku podstron, zawierająca podstawowe informacje o historii i dzisiejszym kształcie firmy, dane kontaktowe, możliwości dojazdu, logo, hasła reklamowe itp. Bardziej ambitne pomysły zawierają odsyłacze do udostępnionych zasobów (instrukcji, wzorów dokumentów itp.), katalogów wyrobów, cenników, formularzy kontaktowych, aż po pełny sklep internetowy z możliwością tworzenia zamówień, dokonywania płatności on-line, ze strefą klienta i programami lojalnościowymi. Żartobliwie można powiedzieć, że jeśli firmy nie da się znaleźć w Internecie, to znaczy, że nie istnieje ☺.

Tworząc stronę www, należy pamiętać o paru zasadach, związanych przede wszystkim z estetyką i funkcjonalnością serwisu.

Dobór kolorystyki odbywa się w oparciu o typ działalności i rodzaj przekazywanych informacji. Do działalności prawniczej albo doradztwa finansowego nie będzie pasować krzykliwy charakter grafiki, który świetnie sprawdzi się w sklepie internetowym artykułów funkcjonującym na rynku silnej konkurencji, gdzie łowi się klienta promocjami, gadżetami, nowinkami technicznymi itp.

Informację się dawkuje, nie umieszcza się wszystkich szczegółów na stronie głównej, dostęp do wszystkich informacji powien być łatwy – stosuje się w tym celu odsyłacze, linki i inne elementy aktywne strony. Informacje dzieli się na na tematy – historia firmy, siedziba i kontakt, oferta, cenniki, serwis i wsparcie techniczne. Piękne widoki i ilustracje są ważne, lecz pamiętać należy, że nie stanowią one głównego celu istnienia całej witryny. Nie mogą przyćmiewać istotnych treści.

Strona powinna być „lekka” – jej wczytywanie nie powinno zajmować zbyt wiele czasu nawet na słabszych komputerach. Dlatego też, nawet kosztem jakości, ogranicza się wielkość, ilość kolorów i rozdzielczość zdjęć, dba się o optymalizację kodu źródłowego, często stosuje się chwyt w postaci szybkiego wczytania w niskiej rozdzielczości, a następnie automatycznego poprawiania się jakości poszczególnych elementów.

Karygodnym grzechem, który szybko eliminuje stronę z listy często odwiedzanych, jest jej rzadka modyfikacja i aktualizacja. „Martwa" strona – nie zmieniająca się lub zmieniająca się rzadko, z nieaktualnymi informacjami, będzie coraz rzadziej odwiedzana przez internautów.

Podstawowym i pierwotnym językiem programowania stron www jest HTML (ang. *HyperTextMarkup Language*) – hipertekstowy język znaczników, oprócz niego najbardziej współcześnie rozpowszechnione i chętnie używane są PHP (obiektowy język programowania zaprojektowany do generowania stron internetowych w czasie rzeczywistym) i Java.

Oczywiście rzadko kto koduje strony www przy pomocy czystego HTMLa. Taki kod można wygenerować nawet przy pomocy zwykłego notatnika z Windowsa. Jeśli jest prawidłowo napisany, wystarczy efekt pracy zapisać z rozszerzeniem nie *.txt, a *.htm, po czym otworzyć w przeglądarce.

Przykładowy kod źródłowy w HTML może wyglądać tak:

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC „-//W3C//DTD HTML 4.0 Transitional//EN”><html>
<head>
<title>Strona przykładowa</title>
</head>
<body>Najpierw zwykły tekst – bez polskich liter!<br>Moze ktos juz robil strone w html zawierajaca: <b>tabelki</b>, <br><b>formularze</b> i <b>
tekst</b> ? <br>
<!--Tak się umieszcza komentarz <br> oznacza przjeście do nowej linii -->
<br><br><H1>Tabela</H1><tablecellspacing=”2” cellpadding=”2” border=”2”>
<!-- Zdefiniowanie tabeli --> <tr>
<!-- Początek wiersza --> <th>oceny<br>uczniów</th> <th>matematyka</th> <th>polski</th></tr><tr> <th>Tymoteusz</th> <td>4+</td>
<td>5</td></tr><tr> <th>Filemon</th> <td>3</td> <td>4+</td></tr></table><br><br><H3>Formularz</H3><br><form action=”konto.php”
name=”formularz”>Imię <inputtype=”text” name=”imie” size=”20” maxlength=”30”><br><textareacols=”50” rows=”5” name=”dane”>Dane osobowe
</textarea><br>Płeć <inputtype=”radio” name=”plec” value=”M” checked>Mężczyzna <inputtype=”radio” name=”plec” value=”K” >Kobieta<br><in
puttype=”checkbox” name=”zgoda” value=”tak”>Zgadzam się na przetwarzanie danych<br><inputtype=”submit” name=”akceptacja” value=”Załóż
konto”></form></body></html>
```

Ułatwieniem dla tworzących witryny są takie programy, jak komercyjne: Adobe Dreamwaver (do niedawna MacromediaDreamwaver), Microsoft FrontPage – składnik pakietu Office, czy też polski Pajączek, oraz darmowe alternatywy: CoffeeCupFreeHTML Editor, PHPEdit albo Nvu z ciekawą funkcjonalnością – może pracować w graficznym trybie WYSIWYG (ang. *What You See Is What You Get* – To Co Widzisz Jest Tym Co Otrzymasz).

Wystawiając cokolwiek do Internetu firma, powinna pamiętać, że strona może stać się celem ataku, którego najłagodniejszą konsekwencją może być niemożność wyświetlania portalu firmowego. Znane są przypadki podmiany strony na użyteczną dla cyberprzestępcy – choćby jako źródło wyłudzania haseł, może też być wykorzystana jako „zombie" służące do maskowania ataku na strony istotne z punktu widzenia bezpieczeństwa państwa.

Rzadsze obecnie są przypadki włamań do strategicznych serwerów firmy poprzez witrynę www, gdyż umieszcza się ją albo na wydzielonym serwerze www, na którym może być ewentualnie obsługa poczty, ale nic ważniejszego, albo wysyłana jest na serwer zewnętrznego usługodawcy zajmującego się tzw. hostingiem stron. Taka zewnętrzna firma z reguły korzysta z szybkich łączy oraz kilku dostawców, przez co gwarantuje zarówno działanie serwisu bezawaryjnie non-stop 24/7/365, jak i odpowiednio szybki transfer danych do komputera odbiorcy, umożliwiający szybkie wczytanie strony.

Obsługą takiego serwisu powinien zajmować się profesjonalny webmaster. Każda witryna firmowa, aby zaistniała w sieci oprócz samej konstrukcji i umieszczenia na serwerze dedykowanym musi być zarejestrowana w rejestrze domen i mieć przydzielony adres IP. W Polsce głównym operatorem jest Krajowy Rejestr Domen.

Serwery sieci Internet identyfikowane są przez ich unikalne adresy numeryczne – IP, składające się z 4 grup po 3 cyfry oddzielonych kropkami. Dla ułatwienia komunikacji w powszechnym użyciu są nazwy zapisane w postaci kombinacji ciągu liter i cyfr, nazywane domenami (dokładniej „nazwami domenowymi"). Łatwiejsze i prostsze jest jednak posługiwanie się nazwami literowymi kojarzącymi się z firmą lub instytucją, do której należą. Rejestr nazw domenowych prowadzony przez NASK (Naukowa i Akademicka Sieć Komputerowa) pozwala na skierowanie połączenia do komputera o numerze IP przypisanym do podanej nazwy symbolicznej – domeny, tłumacząc nazwę domenową na adres komputera w sieci Internet.

Do zamiany nazwy symbolicznej na odpowiadający jej adres numeryczny komputera i odwrotnie wykorzystywane są tzw. serwery nazw domenowych (ang. *domain name servers*). Pełna nazwa literowa domeny składa się z ciągu nazw oddzielonych kropkami (podobnie jak w adresie IP, tyle że zamiast cyfr są nazwy). Poszczególne poziomy domeny kończy znak kropki umieszczony po ich prawej stronie. Pierwsza z prawej nazwa domeny, która nie jest zakończona kropką, jest nazywana domeną najwyższego poziomu. Domeny najwyższego poziomu, zwane krajowymi, składają się z dwóch liter jednoznacznie identyfikujących kraj, do którego są przypisane. W przypadku Polski jest to .pl, w przypadku Niemiec .de, dla Wielkiej Brytanii – .uk. Oprócz domen krajowych w domenie najwyższego poziomu istnieje czternaście domen podstawowych (ang. *generic*), które nie są kojarzone terytorialnie z nazwą żadnego państwa: .com (komercyjna), .org (organizacje, zwłaszcza non-profit i społeczne), .mil (wojskowa), .gov (administracji publicznej szczebla rządowego), .int, .net, .edu (edukacyjna), .info, .biz, .name, .museum, .aero. Więcej informacji można znaleźć pod adresem: www.icann.org.

Każde połączenie inicjowane z komputera lokalnego po podaniu przez użytkownika adresu w postaci nazwy domeny, rozpoczyna się od kolejnego „odpytywania" serwerów nazw domenowych DNS o adres numeryczny odpowiadający podanej nazwie komputera w sieci. Kolejne zapytania kierowane są do serwerów odpowiadających za bazy danych kolejnych poziomów nazwy domeny.

Każda nazwa domeny musi być zarejestrowana w jednym, unikalnym rejestrze odpowiadającym poziomowi danej domeny, tzn. może w nim występować tylko raz. Dane z tego rejestru przechowywane są następnie w pamięci szeregu komputerów tworzących sieć serwerów DNS (serwerów nazw domenowych danego poziomu domeny). Jest to ważne nie tylko przez wzgląd na bezpieczeństwo wpisów (kilka kopii na równoległych serwerach), ale również przyspiesza dostęp do danych o domenach. Każda nazwa domeny musi być delegowana do co najmniej dwóch serwerów DNS. Zwyczajowo jeden z nich pełni rolę „głównego" (ang. *primary*), drugi zaś – dodatkowego (ang. *secondary*). Co ciekawe, nie istnieje ograniczenie maksymalnej ilości serwerów DNS, na których może istnieć wpis dotyczący danej nazwy domeny[2].

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Omów kierunki rozwoju pracy w chmurze, a także zagrożenia płynące z powierzania materiałów innym firmom.
b) Zaprojektuj schematycznie układ strony internetowej.
c) Wykorzystując posiadaną wiedzę, zaprojektuj i stwórz stronę internetową reklamującą wybraną firmę/produkt.

Bibliografia:

Haskin D., *Multimedia nie tylko dla orłów*, Intersoftland, 1995.

Koba G., *Technologia informacyjna dla szkół ponadgimnazjalnych*, Migra, 2002.

Płoski Z., *Słownik encyklopedyczny – informatyka*, Wrocław 1999

Szewczyk A. (red.), *Multimedia w biznesie*, Warszawa 2008.

Falkiewicz W., *Pojęcie informacji w technologii multimedialnej*, Warszawa 2005.

2. www.dns.pl/informacje-ogolne.html , 2013.03.27.

Świerk G., Madurski Ł., *Multimedia. Obróbka dźwięku i filmów. Podstawy*, Warszawa 2004.

Grzeszczyk T., *Systemy multimedialne w zarządzaniu przedsiębiorstwem. Metody implementacji*, Warszawa 2003.

Jankowski M., *Elementy grafiki komputerowej*, Warszawa 2006.

Kopertowska M., Sikorski W., *Grafika menedżerska i prezentacyjna. Poziom zaawansowany*, Warszawa 2007.

King J., *Grafika w sieci WWW*, Mikom, Warszawa 2006.

Sharma A., *Zrozumieć Color Management*, Warszawa 2006.

Fleming B., Dobbs D.,*Tworzenie cyfrowych postaci*, Warszawa 2007.

Maestri G., *Animacja cyfrowych postaci*, Warszawa 2007.

Netografia:

www.wikipedia.org (definicje, wyjaśnienia niektórych pojęć)

www.gimp.org, dokumentacja programu GIMP

http://pl.wikipedia.org

www.prezentacje.multimedialne.net

www.microsoft.com/poland/office/akademia

www.2msystem.pl/tworzenie_prezentacji_multimedialnych.htm

HTML, strony www, sklepy internetowe

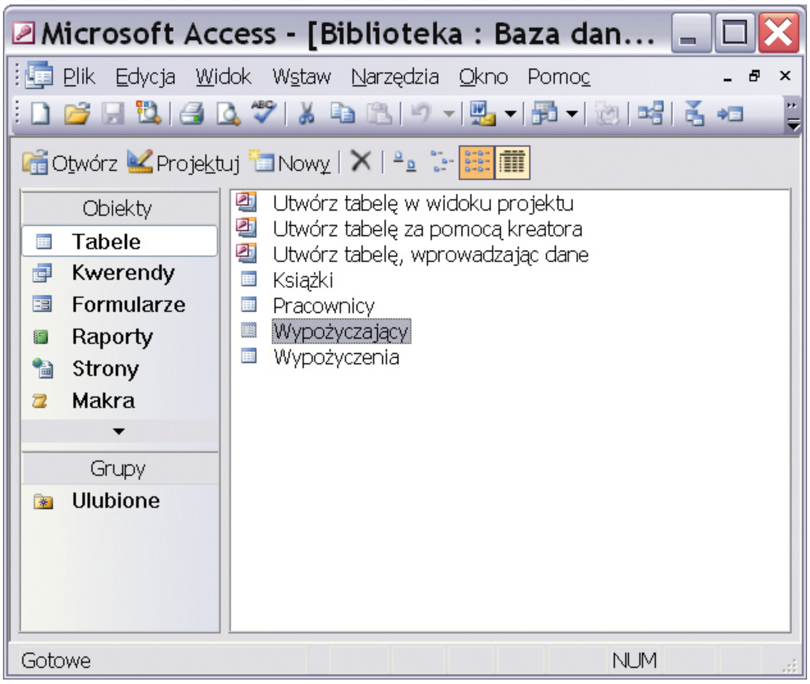
6. Gromadzenie, selekcjonowanie i opracowywanie informacji w bazach danych

Bazy danych mają szerokie zastosowanie wszędzie tam, gdzie niezbędne jest przetwarzanie jakichkolwiek danych. Zwykły użytkownik komputera, a nawet osoba, która z niego nie korzysta, spotyka się z nimi na każdym kroku. Kupno biletu lotniczego lub do teatru, robienie zakupów, czy nawet wykonanie zwykłego połączenia telefonem stacjonarnym bądź komórkowym, to czynności, które, choć nie kojarzą się z omawianym działem informatyki, szeroko korzystają z jego wytworów.

Baza danych to zbiór informacji (danych) wraz z możliwością łatwego do nich dostępu oraz ich modyfikacji (dodawanie nowych, zmiana istniejących i usuwanie starych) z poziomu aplikacji obsługującej bazę.

Ze względu na sposób organizacji danych wyróżniamy bazy:

a) kartotekowe;
b) hierarchiczne;
c) relacyjne (współcześnie najbardziej popularne);
d) obiektowe;
e) sieciowe.



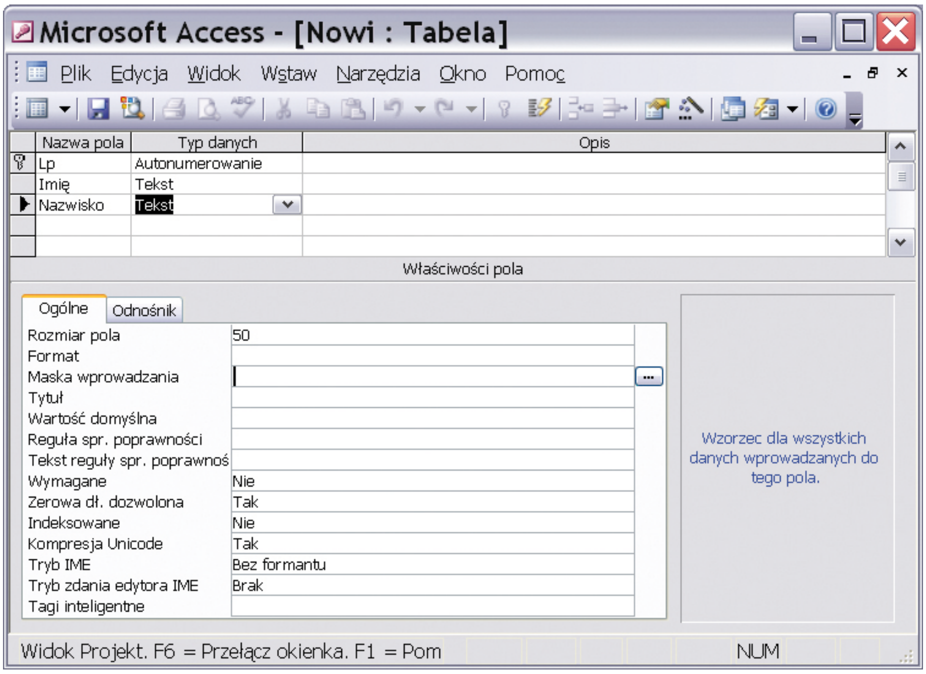
Rys. 25. Okno programu MS Access z widokiem na utworzone tabele

Źródło: Opracowanie własne

6.1. Zapanować nad dużą porcją danych

Z bazami danych wiąże się szereg pojęć i definicji, które należy sobie obligatoryjnie przyswoić. Należą do nich: **tabele, rekordy, pola, typy danych, klucz główny, indeksy, relacje, formularze, kwerendy, raporty**.

Głównym elementem składowym bazy jest **tabela**, która przypomina z wyglądu arkusz kalkulacyjny, gdyż składa się z wierszy i kolumn. W bazie danych wiersze noszą nazwę **rekordów**, a znajdujące się na przecięciu wiersza i kolumny komórki nazywa się **polami**. Każde pole musi być opisane przez tworzącego bazę za pomocą typu danych, który szczegółowo definiuje rodzaj dostarczanej danej. Podstawowe typy to: Autonumerowanie, Liczba (Byte, Długa, Podwójnej długości), Tekst, Nota, Data/Godzina, Waluta, Tak/Nie, Obiekt OLE, Hiperłącze.



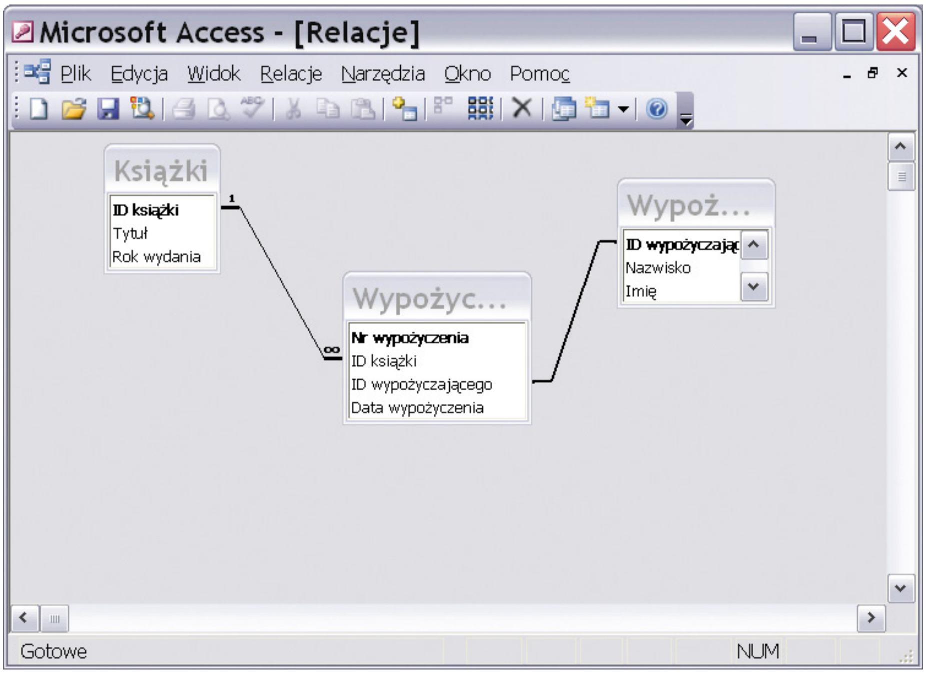
Rys. 26. Tabela w widoku projektu. Definiowanie typu pola (pole „Lp." stanowi klucz podstawowy)

Źródło: Opracowanie własne

Do celów szybkiego kojarzenia danych z różnych tabel na jednym lub kilku polach zakłada się tzw. **klucz główny** (podstawowy). Wartości w tym polu muszą być unikatowe, nie mogą się powtarzać, ponieważ stanowi on identyfikator rekordu. Jego obecność jest obowiązkowa, jeśli nie ma ingerencji ze strony użytkownika, program sam automatycznie go ustawi.

W celu szybkiego wyszukiwania żądanych danych po zbudowaniu bazy zakłada się na nią **indeksy**. Proces jest niezauważalny dla użytkownika i polega na wewnętrznym segregowaniu zgromadzonych danych.

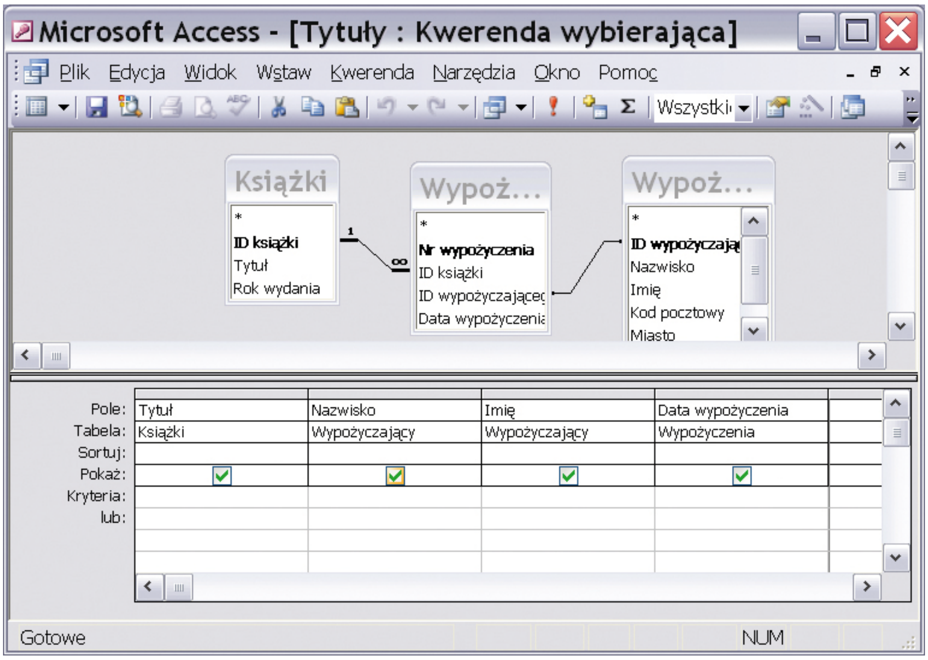
Pomimo rozmieszczenia danych po różnych tabelach, możliwe jest odpytanie bazy z informacji zawartych w całej bazie. W tym celu należy połączyć tabele **relacjami**. Podstawowe relacje to jeden-do-jednego i jeden--do-wielu. Twórca musi na tym etapie zapewnić integralność i spójność bazy danych. Dobrą praktyką jest wymuszanie więzów integralności. Nie da się połączyć ze sobą tabel, jeśli będą w nich występowały wady i anomalie. Do podstawowych wad zalicza się zjawisko redundancji (powtórzenia) oraz niezgodność typów danych, a do anomalii – anomalię aktualizacji bazy danych (gdy nastąpi zdublowanie rekordów) oraz anomalię przy usuwaniu.



Rys. 27. Relacje pomiędzy tabelami. Wymuszone więzy integralności w relacji jeden-do-wielu pomiędzy tabelą Książki i Wypożyczenia symbolizują odpowiednie znaki.

Źródło: Opracowanie własne

Bazę zawierającą tabele połączone relacjami można odpytywać, czyli uzyskiwać wybór z zawartych w niej danych, na podstawie zadanych kryteriów. W tym celu został stworzony cały język zapytań, w skrócie nazywany SQL. Bazę odpytuje się za pomocą **kwerend** (słowo pochodzi od ang. *query*). Choć istnieje kilka typów kwerend, najczęściej wykorzystuje się kwerendę wybierającą. Wynik swojej pracy kwerenda przechowuje w wirtualnej tabeli, którą tworzy.

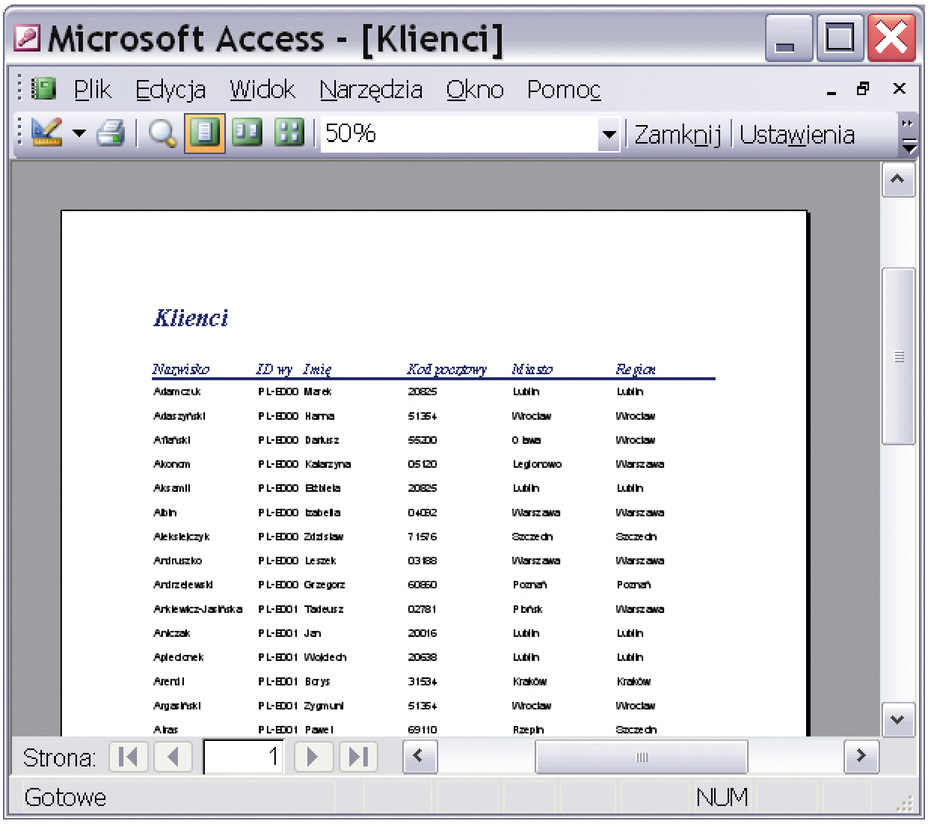


Rys. 28. Kwerenda wybierająca w widoku projektu

Źródło: Opracowanie własne

Choć kwerendy są potężnym narzędziem do zarządzania bazą oraz wydobywania interesujących informacji z gąszczu nagromadzonych danych, to ich konstrukcja nie jest przyjazna w obsłudze dla osoby niekoniecznie zaawansowanej w dziedzinie komputerów. Z drugiej strony kwerenda może mieć charakter otwarty, część parametrów zapytania może być narzucona z góry, a część pozostawiona do wprowadzenia przez operatora bazy. W celu ułatwienia wykonania tej operacji tworzy się **formularze** stanowiące wygodny interfejs do wprowadzania uzupełniających parametrów zapytania. Rola formularzy może obejmować nie tylko wprowadzanie, ale także edytowanie i usuwanie danych i to nie tylko w kwerendzie, ale też w tabelach. Do formularza można dodawać pola tekstowe i przyciski, czyniąc go bardziej przyjaznym człowiekowi.

Końcowy efekt pracy kwerendy można wyświetlić lub wydrukować do **raportu**stanowiącego miły dla oka sposób prezentacji danych pobranych z tabeli podstawowej lub wirtualnej. Każdy raport zawiera informacje pobrane wprost z tabel lub kwerend, które przechowuje projekt raportu.



Rys. 29. Raport

Źródło: Opracowanie własne

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Zastosowania i filozofia języka SQL.
b) Istota relacyjnych baz danych.
c) Zaprojektuj relacyjną bazę danych i wykaż się przed grupą umiejętnością wyszukania w niej potrzebnych informacji – zaprezentij różne metody.

6.2. Ty tu rządzisz

Zanim przystąpi się do tworzenia bazy, powinno się starannie przygotować do tego zadania, stworzyć algorytm pracy tak, by całe przedsięwzięcie nie wymknęło się spod kontroli i nie zaczęło żyć własnym życiem.

Przed utworzeniem bazy danych należy uzyskać odpowiedzi na następujące pytania:

- Kto będzie korzystał z bazy danych i w jakim celu?
- Jakie tabele zbierające dane będą potrzebne?
- Jakie kwerendy i raporty będą potrzebne użytkownikom tej bazy?
- Jakie formularze będą używane do zbierania informacji uściślających zapytania?

Bez odpowiedzi na te pytania nie da się stworzyć efektywnej i użytecznej bazy danych, prawidłowo zaprojektowanej i spełniającej oczekiwania zamawiającego.

Określenie celu

Projektowanie bazy danych rozpoczyna się od określenia celu, któremu ma ona służyć i sposobu jej używania. W trakcie określania przeznaczenia bazy danych zacznie się wyłaniać lista informacji, które baza ma dostarczać. Poszczególne informacje odpowiadają polom (zbiorczo kolumnom) w bazie danych, a zagadnienia, których one dotyczą, odpowiadają tabelom.

Zdefiniowanie pól potrzebnych w bazie danych

Każde pole to informacja dotycząca pojedynczego zagadnienia. Trzeba utworzyć osobne pola przechowujące każdą z informacji. Takim polem w tabeli dotyczącej klientów będzie na przykład nazwa firmy, adres, NIP, numer telefonu. Informacje należy przechowywać w jak najmniejszych jednostkach logicznych, nie powinny to być dane wyliczane ani pośrednie.

Co dalej?

Dopiero teraz mogą nastąpić kolejne etapy pracy – przypisanie pól do odpowiednich tabel, powiązanie tabel relacjami i stworzenie kwerend odpytujących bazę. W celu ułatwienia obsługi pozyskiwania dodatkowych parametrów zapytań należy utworzyć formularze, rezultat pracy kwerendy powinien zaś być wygenerowany w postaci raportów.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wymień kroki projektowania baz danych.
b) Przetestuj poprawność działania bazy – wyszukiwanie informacji i poruszanie się w obrębie przygotowanej bazy.
c) Porównaj sposób potwierdzania i wpisywania danych z Excelem. Który sposób jest bardziej szczegółowy?

Bibliografia:

Banachowski L., *Bazy danych. Tworzenie aplikacji,* Warszawa 1998.

Ullman, J.D., Widom J., *Podstawowy wykład z systemów baz danych*, Warszawa 1999..

Benyon-Davies P., *Systemy baz danych*, Warszawa 1998.

Connolly T., Begg C., *Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation and Management*, Addison, 1998.

Date C. J., *Wprowadzenie do baz danych*, Warszawa 1981.

Delobel C. i M. Adiba,*Relacyjne bazy danych*, Warszawa 1989.

Elmasri, R. and S. B. Navathe, *Fundamentals of Database Systems*. Redwood City 1994.

Figura D., *Obiektowe bazy danych*, Warszawa 1996.

Harris, W., *Bazy danych nie tylko dla ludzi biznesu*, Warszawa 1994.

Pankowski T., *Podstawy baz danych,* Warszawa 1992.

Riordan R. M., *Projektowanie systemów relacyjnych baz danych*, Warszawa 2000.

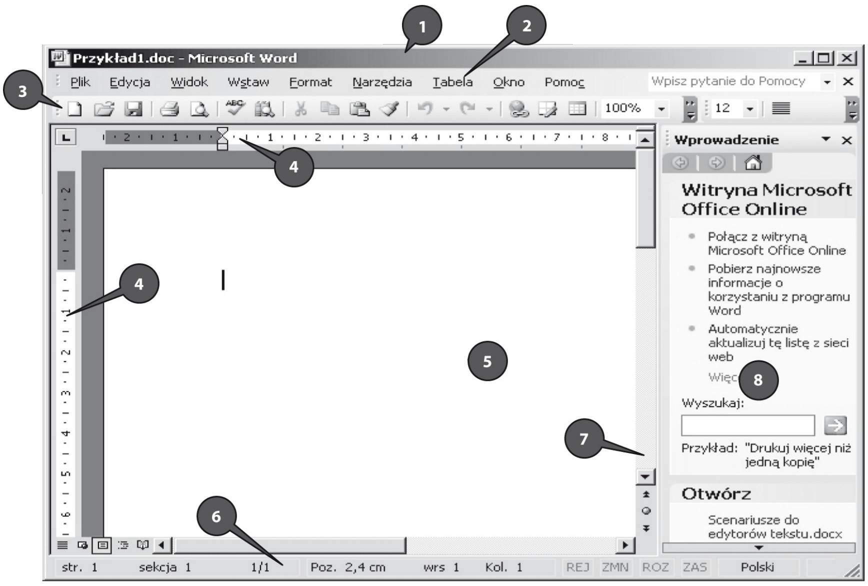
Ullman, J.D., *Systemy baz danych*, Warszawa 1988.

7. Opracowywanie informacji za pomocą komputera, w tym rysunków, tekstów

System operacyjny Windows dysponuje wbudowanymi prostymi edytorami tekstu: pierwszy – najprostszy – to Notatnik, drugi – o nieco większych możliwościach – to WordPad. Do dyspozycji mamy również inne proste i praktyczne narzędzie – kalkulator. Do bardziej zaawansowanych, a nawet profesjonalnych zastosowań, warto rozważyć użycie odrębnej aplikacji – MS Worda będącego częścią składową pakietu Microsoft Office. Dodatkową. Niewątpliwą zaletą wykorzystania tego programu jest fakt, że w ramach pakietu jest zintegrowany z arkuszem kalkulacyjnym (MS E xcel), bazodanową aplikacją MS Access, programem do grafiki menedżerskiej i prezentacyjnej PowerPoint, a także dodatkowymi programami, takimi jak Outlook będący aplikacją typu PIM (ang. *Personal information management*) z funkcjonalnością kalendarza, moduł graficzny Microsoft PhotoDraw i.in. Zaletą „pakietowości" jest łatwa wymiana elementów dokumentów pomiędzy aplikacjami poprzez mechanizm OLE (ang. *Objectlinking&embedding*). Pracę z wymienionymi programami usprawniają liczne kreatory i szablony, co jest szczególnie istotne dla kogoś z niewielkim doświadczeniem w posługiwaniu się komputerem. Na potrzeby niniejszego opracowania posłużono się pakietem Microsoft Office 2003, powszechnym w szkolnych pracowniach SBS.

7.1. Dokument na miarę XXI wieku

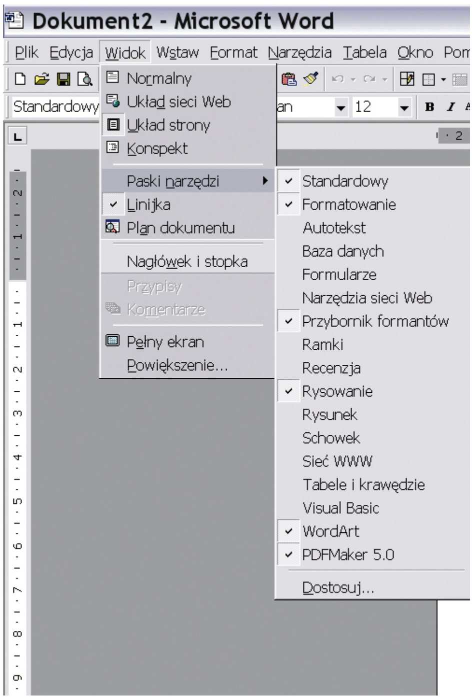
Zanim rozpoczniemy pracę z dokumentem, zapoznamy się z interfejsem Worda i z postawionymi do naszej dyspozycji funkcjonalnościami.



Opis elementów ekranu MS Word:

1) **Pasek tytułu**. Wyświetla nazwę bieżącego dokumentu i nazwę programu. Umożliwia przesuwanie okna aplikacji po całym ekranie.
2) **Pasek menu**. Zawiera poszczególne pozycje menu. Każda z głównych pozycji menu zawiera podmenu, które rozwija się po kliknięciu w napis (np. Plik).
3) **Paski narzędzi**. W programie Microsoft Office Word 2003 domyślnie wyświetlane są dwa paski narzędzi: pasek Standardowy (zawiera przyciski: Nowy, Otwórz, Zapisz itd.) oraz pasek Formatowanie (zawiera przyciski: Styl, Rodzaj czcionki, jej rozmiar, Pogrubienie, Kursywa, Podkreślenie, indeks górny/dolny i inne). Poprzez menu Widok\Paski narzędzi można włączyć lub wyłączyć wyświetlanie pasków. Poprzez menu Widok\Paski Narzędzia\Dostosuj można dodawać lub usuwać przyciski z paska narzędzi. Pasek można dostosować do własnych potrzeb poprzez przycisk znajdujący się na końcu z prawej strony.
4) **Linijka górna i boczna**. Ułatwiają ustawianie marginesów oraz rozmieszczanie różnych elementów na stronie ekranowej, linijka górna umożliwia ponadto dodawanie znaków tabulacji.
5) **Obszar roboczy**. Jest to ta część strony ekranowej, w której można wpisywać tekst.
6) **Pasek statusu**. Wyświetla różne bieżące informacje dotyczące miejsca położenia kursora, np.: numer strony, liczbę wszystkich stron w dokumencie, tryb działania klawiatury.
7) **Pasek przewijania**. Boczny, umożliwia przesuwanie strony ekranowej w dół i w górę, znajdują się tam również przyciski do zmiany strony.
8) **Okno zadań**, zawierające między innymi listę nazw ostatnio otwieranych dokumentów, przycisk tworzenia nowego dokumentu oraz łącza do stron WWW firmy Microsoft w Internecie dedykowanych programowi Word.

Wszystkie paski narzędzi są obiektami dokowalnymi, co oznacza, że dowolny pasek narzędzi, nawet pasek menu, można umieścić w dowolnie wybranym miejscu ekranu, w tym także na innych krawędziach niż górna. Realizuje się to myszką, metodą przeciągnij i upuść (ang. *drag&drop*), przy czym należy złapać myszką za uchwyt paska (małą, szarą wykropkowaną linią przy lewej krawędzi paska).

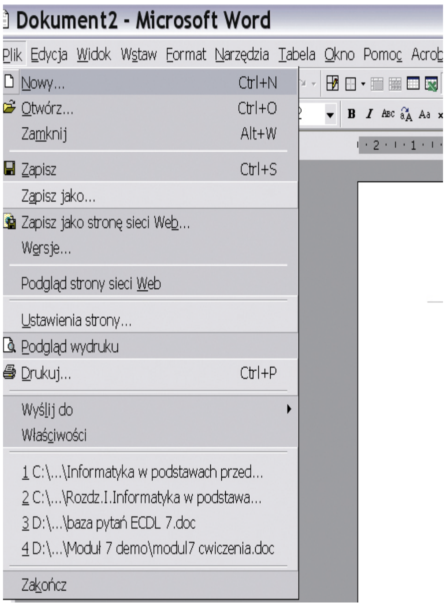


Rys. 30. Wybór pasków narzędzi

Źródło: Opracowanie własne

Word udostępnia **dwie metody tworzenia nowych dokumentów**:

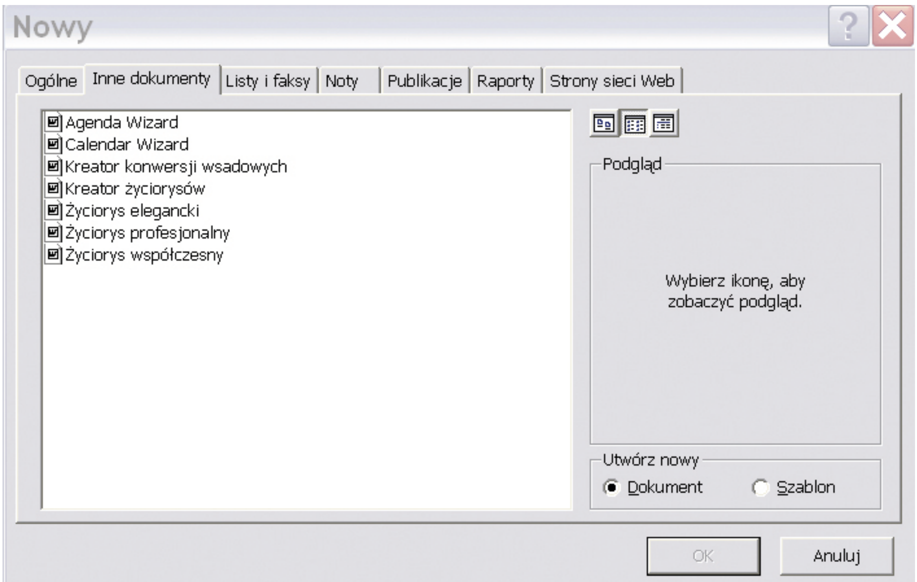
1) **Pusty plik dokumentu** utworzony w oparciu o domyślne ustawienia Worda, użytkownik musi go jedynie ręcznie sformatować. W celu utworzenia pliku tą metodą trzeba wybrać z menu głównego polecenie Plik/Nowy lub nacisnąć znajdującą się na standardowym pasku narzędzi odpowiednia ikonkę (Rys. 31).



Rys. 31. Tworzenie nowego dokumentu

Źródło: Opracowanie własne

2) **Plik utworzony na podstawie szablonu dokumentu** zawierającego szereg wartości, sposobów formatowania, pasków narzędzie zdefiniowanych przez użytkownika makropoleceniami przypisanymi do tego szablonu. Tworzenie dokumentu w oparciu o gotowy szablon może zaoszczędzić sporo czasu, szczególnie w przypadku gdy często tworzymy standardowe rodzaje dokumentów. W celu utworzenia pliku na podstawie szablonu z menu głównego wybiera się Plik/Nowy, a następnie w oknie zadań wybieramy Nowy z szablonu/Szablony ogólne. Po wyborze szablonu w obszarze podglądu może się pojawić miniaturowy widok wybranego szablonu.



Rys. 32. Szablony MS Word

Źródło: Opracowanie własne

Na ekranie pojawi się dokument utworzony w oparciu o wybrany szablon. Żeby wprowadzić nowe wartości, należy postępować zgodnie z informacjami umieszczonymi na szablonie. Word oferuje szereg różnych szablonów dokumentów, nie wszystkie z nich są jednak instalowane domyślnie podczas instalacji pakietu. Jeżeli wybierzemy szablon, który nie jest jeszcze zainstalowany, to program poprosi o włożenie do napędu CD płytki instalacyjnej pakietu Office.

7.1.1. Podstawy formatowania

Mimo że zawartość samego dokumentu Worda może być perfekcyjnie poprawna, to jednak dobranie odpowiedniego sposobu formatowania może zdecydowanie zwiększyć wrażenie, jakie dokument zrobi na osobach go przeglądających.

Word oferuje cały szereg opcji formatowania, które można zastosować w swoich dokumentach. Formatować można czcionkę, akapit, stronę lub cały dokument. I tak:

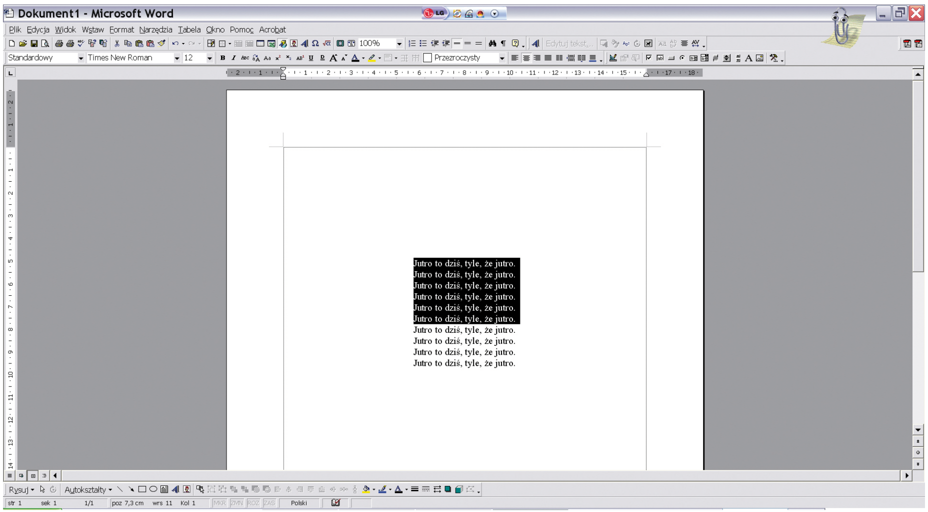
1) **formatowanie czcionek** – pozwala na zmianę wyglądu czcionek, przy użyciu których są prezentowane teksty i liczby;
2) **wyrównywanie** – pozwala na zmianę sposobu wyrównywania tekstu w akapicie (do lewej, do prawej, do środka i wyjustowanie) oraz w komórkach tabel, do formatowania akapitu należy również ustawienie interlinii (odstępów między wierszami), wcięć, tabulatorów oraz odstępów górnych i dolnych;
3) **obramowania** – pozwalają na tworzenie obramowań dookoła poszczególnych fragmentów tekstu lub całej strony;
4) **formatowanie kolumn i wierszy** (opcja dotyczy główne tabel) – pozwala na zmianę szerokości kolumn oraz wysokości wierszy, co umożliwia dopasowanie rozmiarów komórek do rozmiarów zapisanych w nich informacji;
5) **formatowanie całego dokumentu** – ustawienia rozmiaru papieru, położenia strony (pionowa lub pozioma), marginesów, nagłówków i stopek, numeracji stron.

Domyślną czcionką używaną przez program Word jest Times New Roman w rozmiarze 12 punktów. W każdej chwili można zmienić sposób formatowania wielu opcji czcionek w dowolnym obszarze dokumentu:

1) **Czcionka** (krój czcionki, rodzaj czcionki) – jest to krój pisma, używany do wyświetlania znaków na ekranie, Word umożliwia korzystanie ze wszystkich prawidłowo zainstalowanych w systemie czcionek;
2) **Styl czcionki** – określa tzw. wagę oraz kąt ustawienia znaków czcionki, do wyboru mamy zazwyczaj styl Normalny, **Pogrubiony**, *Kursywa* i ***Pogrubiona kursywa***;
3) **Rozmiar czcionki** – określa wielkość czcionki wyrażoną w punktach;
4) **Podkreślenie** – sposób podkreślenia znaków czcionki, nie należy mylić go z obramowaniem akapitu lub fragmentu tekstu (np. na dolnej krawędzi) – te dwa elementy nie mają ze sobą nic wspólnego;
5) **Kolor** – określa, w jakim kolorze czcionka jest wyświetlana na ekranie (drukowana na drukarce);
6) **Efekty** – różnego rodzaju dodatkowe efekty mające wpływ na sposób wyświetlania czcionki.

Aby zmienić sposób formatowania czcionki, krzystając z paska narzędzi formatowania należy:

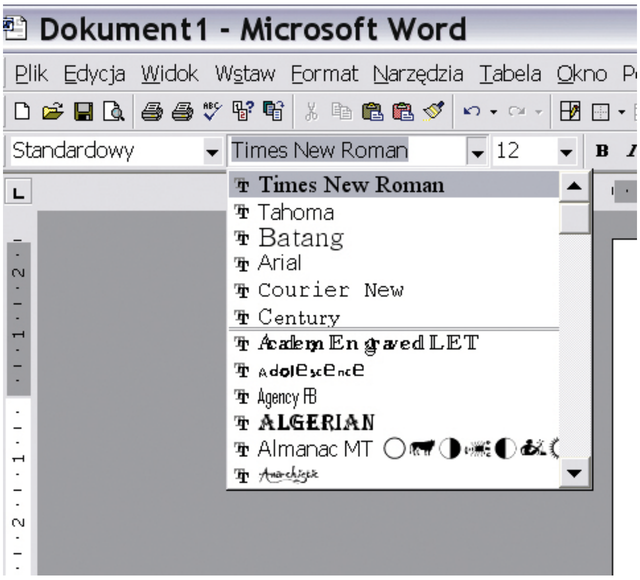
1. Zaznaczyć tekst za pomocą myszy lub klawiatury (Rys. 33). Żeby zaznaczyć część tekstu przy użyciu, myszy należy ustawić się na danym fragmencie, wcisnąć lewy przycisk myszki, a następnie „przeciągnąć” mysz w dół zaznaczonego tekstu, cały czas trzymając wciśnięty przycisk myszy. Aby zaznaczyć tekst z klawiatury, należy ustawić się na jego fragmencie, a następnie zastosować kombinację klawiszy Shift i strzałek znajdujących się obok klawiatury numerycznej.



Rys. 33. Zaznaczanie tekstu w MS Word

Źródło: Opracowanie własne

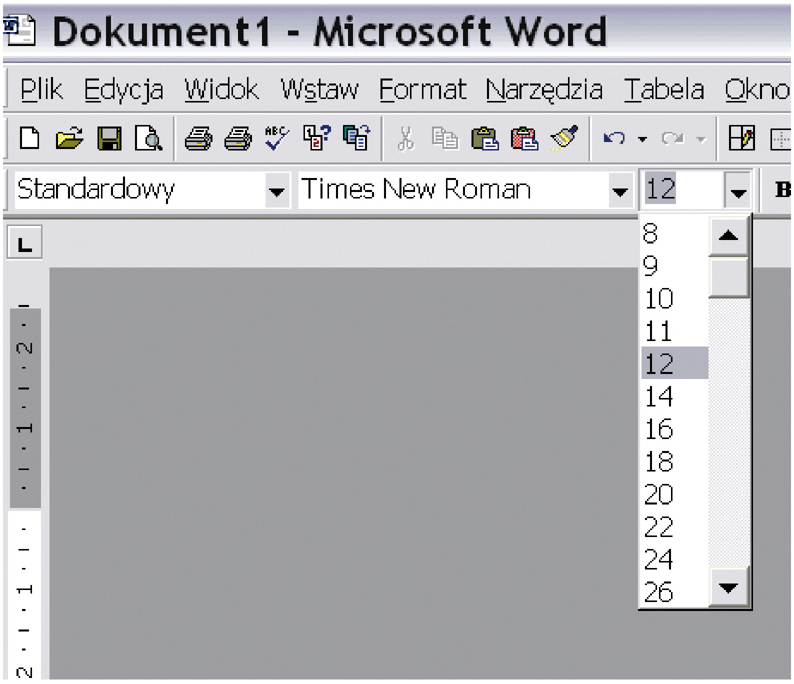
2. Wybrać odpowiedni krój z listy rozwijanej Czcionka.



Rys. 34. Wybór czcionki

Źródło: Opracowanie własne

3. W celu zmiany rozmiaru czcionki trzeba wybrać listę rozwijaną Rozmiar czcionki, wybrać rozmiar czcionki albo wpisać z klawiatury, na końcu wybór zatwierdzić enterem.



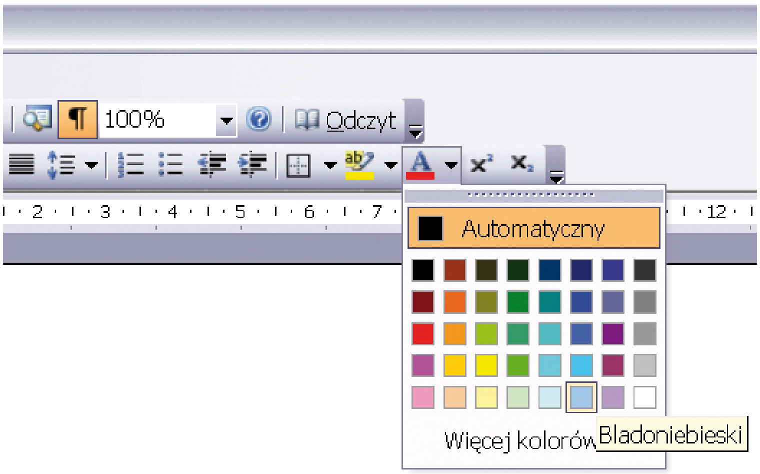
Rys. 35. Wybór rozmiaru czcionki

Źródło: Opracowanie własne

Styl czcionki dostępny jest w dwojaki sposób: albo poprzez wybór odpowiedniego przycisku na pasku narzędzi, albo po naciśnięciu kombinacji klawiszy. I tak:

d) w celu pogrubienia zaznaczonego fragmentu tekstu należy z paska narzędzi wybrać przycisk **pogrubienia B** lub nacisnąć kombinację klawiszy Ctrl+B;
e) w celu pochylenia zaznaczonego fragmentu tekstu trzeba wybrać przycisk *kursywy I* lub nacisnąć kombinację klawiszy Ctrl+I;
f) podkreślenie otrzymamy, naciskając U na pasku narzędzi lub poprzez kombinację klawiszy Ctrl+U.

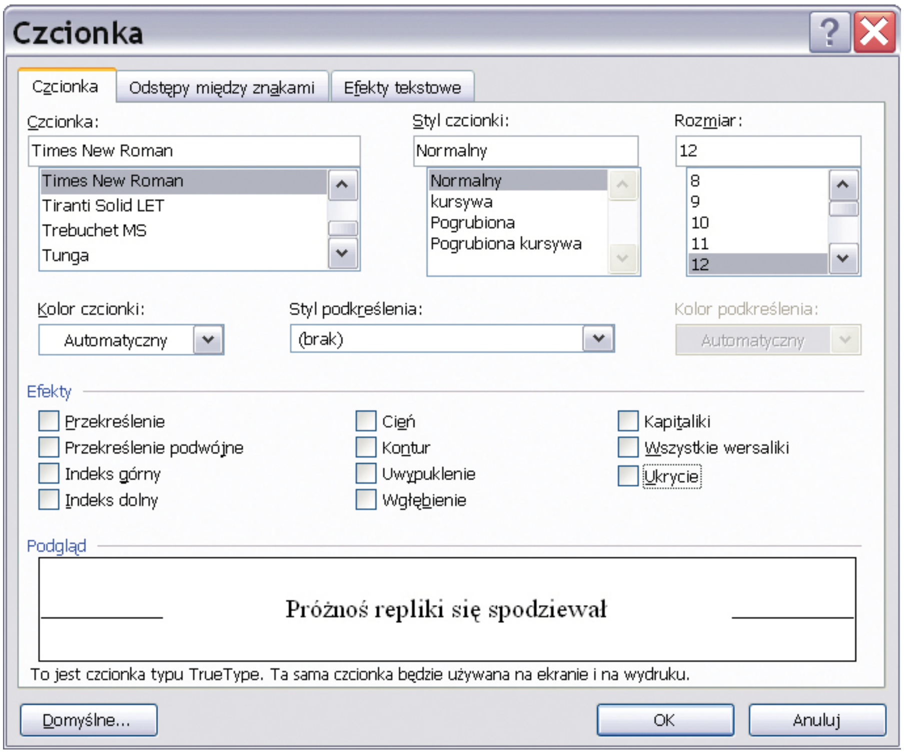
Aby zmienić kolor zaznaczonych znaków, na pasku formatowania należy wybrać przycisk Kolor czcionki i po rozwinięciu się tablicy kolorów kliknąć w ten pożądany.



Rys. 36. Wybór koloru czcionki

Źródło: Opracowanie własne

Wszystkie opisane powyżej opcje są dostępne również przez menu kontekstowe. Najprostszym sposobem dotarcia do niego (i to niezależnym od wersji MS Office) jest zaznaczenie fragmentu tekstu, który ma być sformatowany, następnie wciśnięcie prawego klawisza myszy i wybranie opcji Czcionka. Menu kontekstowe pozwala również na zmianę odstępów między znakami oraz efekty tekstowe.

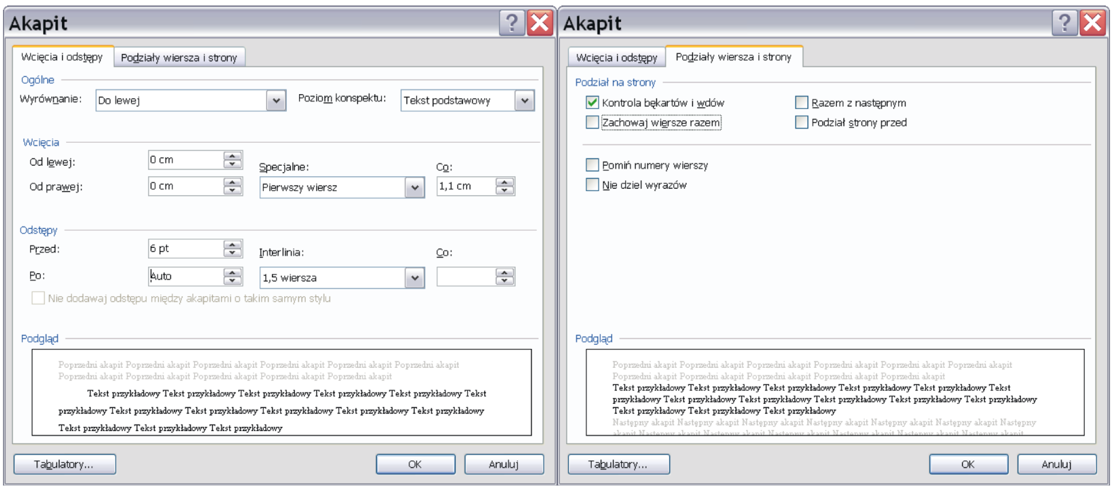


Rys. 37. Opcje menu kontekstowego „Czcionka"

Źródło: Opracowanie własne

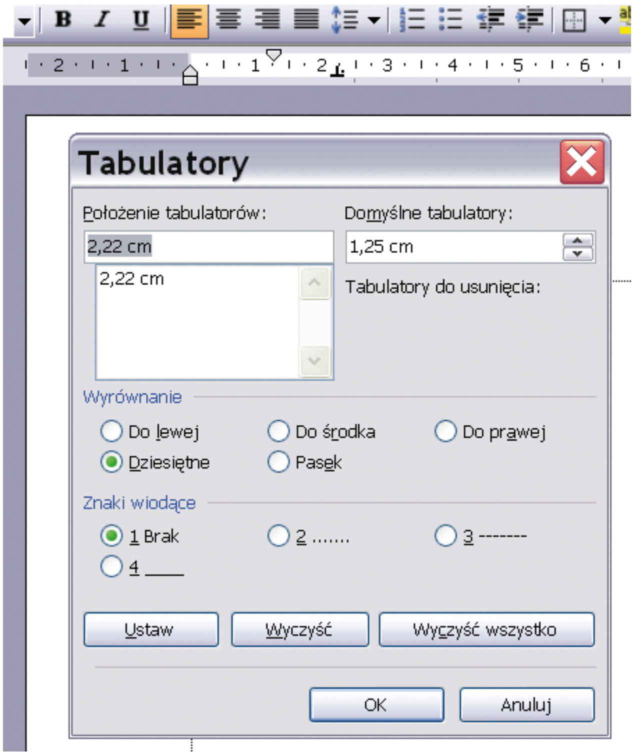
Akapit także można formatować albo za pomocą przycisków na pasku narzędzi, albo za pomocą menu kontekstowego wywoływanego po naciśnięciu prawego przycisku myszy.

Do wyboru jest możliwość wyrównania tekstu w akapicie (do lewej, do prawej, do środka i wyjustowanie), ustawienie interlinii (odstępów między wierszami), wcięć, sformatowanie tabulatorów oraz odstępów górnych i dolnych, tu znajdują się też opcje podziału wiersza i strony. Dostępne rozwiązania znajdują się na kolejnych zrzutach ekranowych.



Rys. 38. Opcje formatowania akapitu oraz podziałów wiersza i strony

Źródło: Opracowanie własne

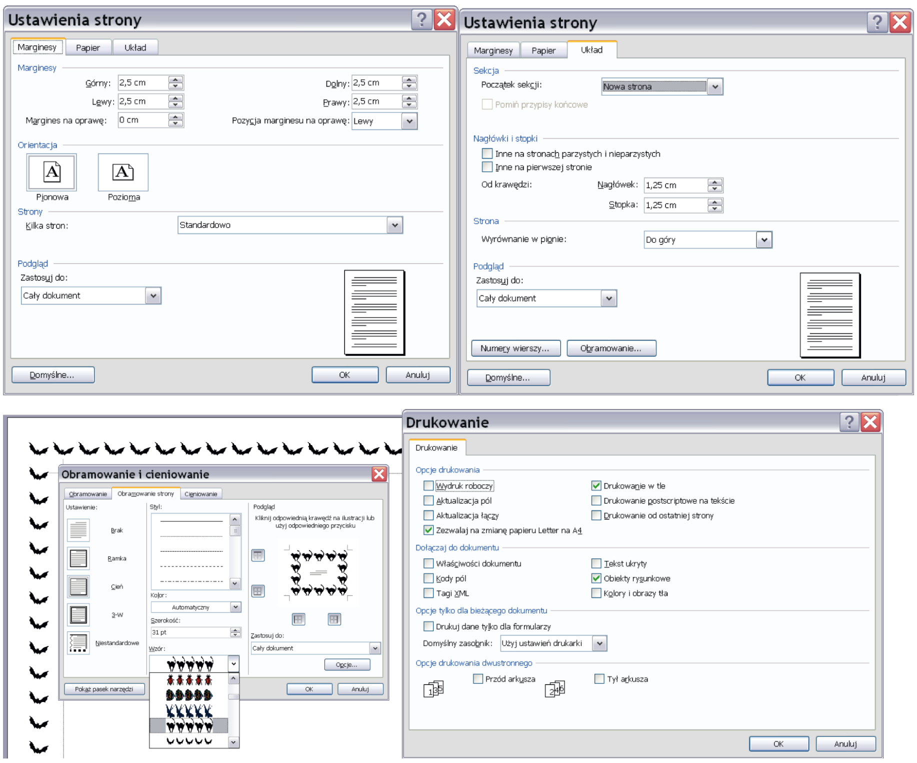


Rys. 39. Linijka górna z zaznaczonymi wcięciami i tabulatorem oraz formatowanie tabulatora (znaki wiodące mogą stanowić odnośniki między oddalonymi pozycjami)

Źródło: Opracowanie własne

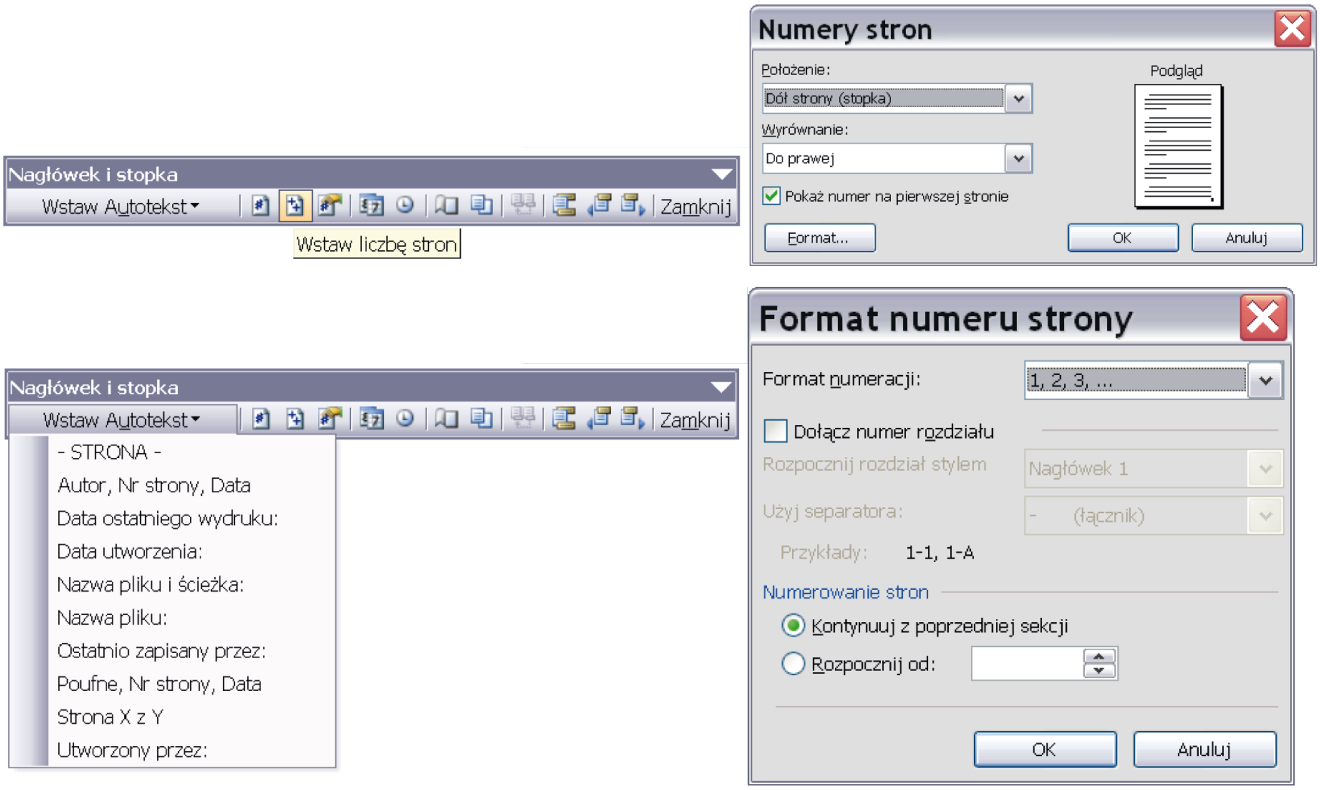
Na szczególną uwagę zasługuje justowanie. Wyrównuje ono prawy i lewy margines kosztem odstępów pomiędzy całymi wyrazami. W skrajnym przypadku, gdy w wierszu są tylko 2 wyrazy i wymuszono przejście do następnej linii bez kończenia akapitu (za pomocą Shift+Enter), pierwszy wyraz zostanie wyrównany do lewej, a drugi do prawej, pomiędzy nimi zaś będzie „ziała przepaść". Akapit to podstawowy sposób dzielenia tekstu na rozpoznawalne wzrokiem mniejsze fragmenty w celu zwiększenia jego czytelności.

Word pozwala na pełną kontrolę nad dokumentem: rozmiarem jego strony, orientacją (położeniem), marginesami, obramowaniami strony, łamaniem stron, nagłówkami i stopkami, numeracją, zawartością i kolejnością drukowanych stron oraz skalowaniem arkusza przygotowanego do druku – pozwala na wpasowanie wydruku w rozmiar papieru.



Rys 40. Opcje układu strony, obramowania i druku
Źródło: Opracowanie własne

Nagłówek i stopkę można wstawić po wybraniu z menu grupy Widok, a następnie przycisku Nagłówek i stopka. Pojawi się pole tekstowe, w które można wpisać tytuł nagłówka lub można skorzystać z gotowego autotekstu. Z tego poziomu możliwe jest także ponumerowanie stron, mimo że w menu grupy Widok znajduje się odrębny przycisk pozwalający na wstawienie numeracji w rozmaitych opcjach.

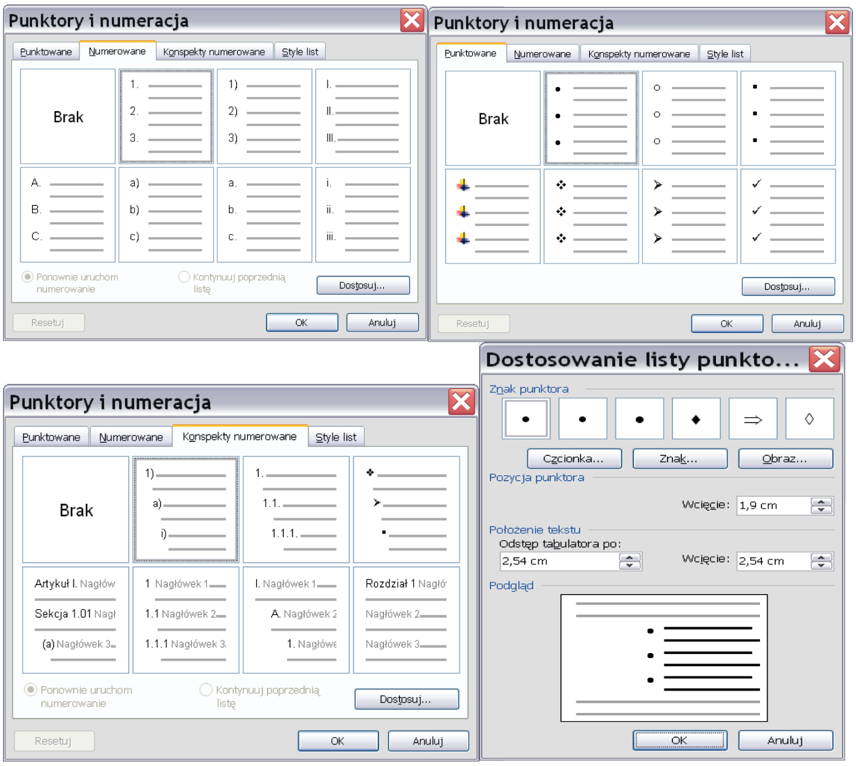


Rys. 41 i 42 Po lewej wstawienie nagłówka/ stopki, po prawej numerowanie stron i ich formatowanie

Źródło: Opracowanie własne

7.1.2. Wypunktowanie i numerowanie

Tworząc dokument, dla zwiększenia czytelności często stosuje się wypunktowanie lub numerowanie wyliczanych treści. Punktory i numeracje posiadają swoje przyciski na pasku narzędziowym, są dostępne w menu podręcznym otwieranym przez kliknięcie prawego przycisku myszy, bądź są dostępne w grupie format. Możliwe jest zastosowanie szerokiej gamy standardowych punktorów i numeracji, także wielopoziomowych konspektów numerowanych, bądź stworzenie własnego formatu punktora lub numeru – po wybraniu przycisku Dostosuj w oknie dialogowym.



Rys. 43. Punktory i numeracja

Źródło: Opracowanie własne

7.1.3. Podziały stron, sekcji, kolumn

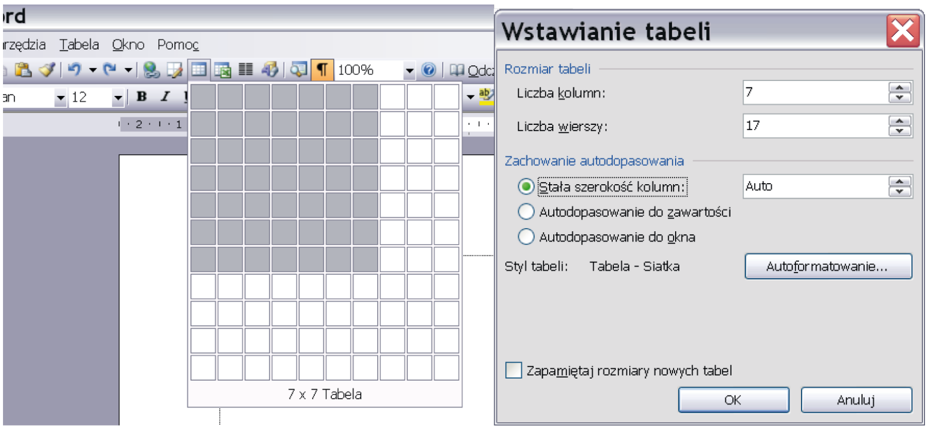
Pracując z dokumentem o dość dużej liczbie stron, trudno jest nad nim zapanować. Niekiedy zdarza się, że dokument posiada strony w orientacji poziomej i pionowej. Często do tak pieczołowicie sformatowanego dokumentu dopisuje się tekst lub dodaje kilka stron. Word sam dzieli tekst na strony, stosując „miękkie podziały”. Zwykle w takim przypadku konieczne jest ponowne sformatowanie dokumentu. Aby zapanować nad dokumentem, warto zastosować tzw. twardy podział stron (wymusić koniec strony). Twarde zakończenie ściśle związane jest z określonym miejscem w tekście – przesuwanie się tego tekstu w wyniku modyfikacji czy formatowania będzie powodowało przesuwanie się wraz z nim znaku końca strony. Wymuszenie końca strony ułatwia dopisywanie tekstu do już istniejącego. Dzięki temu dopisywany tekst „nie spycha” w dół już istniejącego oraz nie niszczy formatowania na kolejnych stronach. Z kolei podział sekcji pomaga przy tworzeniu dokumentów o różnej orientacji stron. Natomiast podział kolumny przydaje się w przypadku pracy z dwoma lub więcej kolumnami, gdy występuje potrzeba równomiernego rozłożenia treści w sąsiadujących kolumnach.

Rys. 44. Aby wstawić twardy podział stron z menu „Wstaw” należy wybrać Podział. Wstawienie podziału sekcji umożliwia podział dokumentu na strony o orientacji poziomej i pionowej, podział kolumny na równomierne rozłożenie tekstu w kolumnach

Źródło: Opracowanie własne

7.1.4. Wstawianie i formatowanie tabel

Do wstawiania tabeli służy przycisk „Wstaw tabelę” na Standardowym pasku narzędzi lub można tego dokonać poleceniem Wstaw tabelę z menu Tabela. Pierwszy sposób pozwala na graficzne modelowanie rozmiaru tabeli, tabela ma jednak ograniczone rozmiary, adekwatne do rozmiaru ekranu i miejsca położenia przycisku. Drugi sposób otwiera okno dialogowe pozwalające na dowolne zdefiniowanie tych rozmiarów

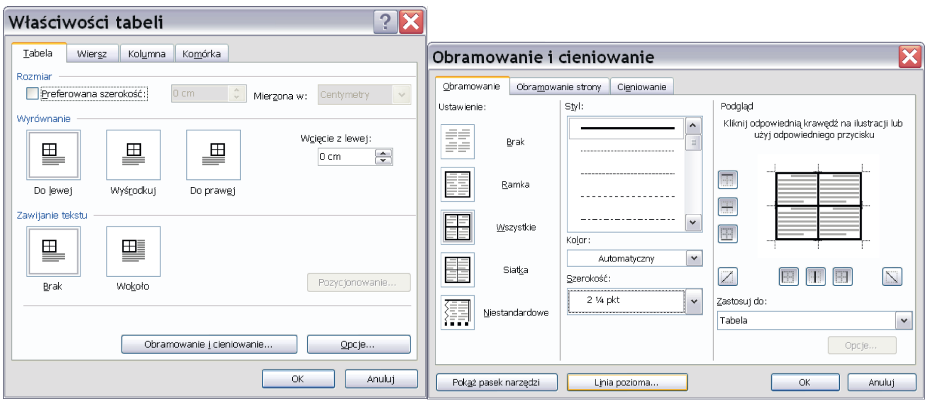


Rys. 45. umożliwiające deklarowanie rozmiarów tabeli

Źródło: Opracowanie własne

W tabeli każda komórka jest traktowana jako osobny akapit i dla komórki możemy zmieniać formatowanie takich cech, jak: czcionka, wyrównanie, wcięcia, korzystając z przycisków na pasku narzędzi Formatowanie. Po naciśnięciu Enter przechodzi się do nowej linii, ale w tym przypadku komórka rozciągnie się i powstanie w niej nowy akapit. Wciśnięcie klawiszy kursora pozwala wędrować pomiędzy znakami w obrębie komórki, natomiast do następnej komórki tabeli przechodzi się wciskając klawisz Tab.

Formatowanie tabeli jest możliwe przez okno dialogowe Właściwości tabeli, w którym znajduje się dodatkowy przycisk odsyłający do kolejnego okna Obramowanie i cieniowanie. W pierwszym z nich można zmienić wymiary wierszy, kolumn, komórek, wyrównać tabelę na stronie oraz otoczyć tekstem, w zakładce Komórka można dodatkowo ustawić równanie zawartości w pionie. Drugie pozwala na dowolne sformatowanie obiektu w zakresie stylu i koloru obramowania tabeli, jej cieniowania, koloru wypełnienia komórki itp.

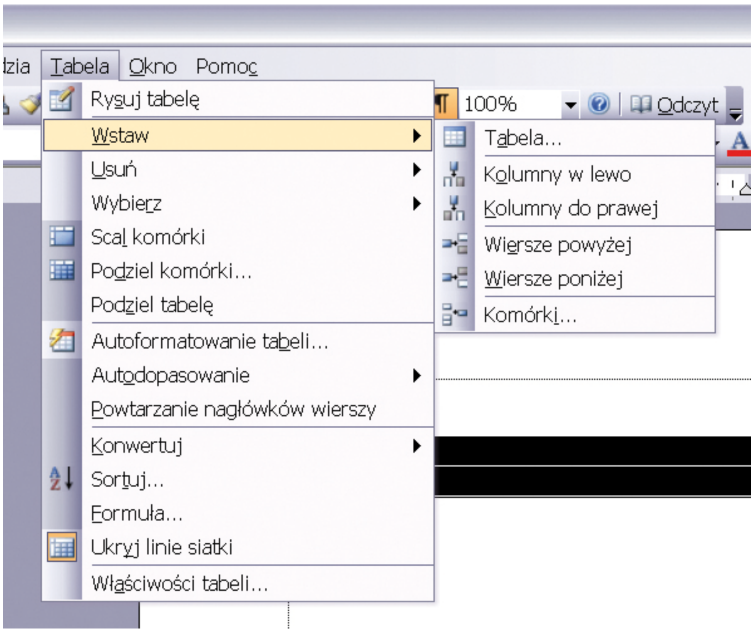


Rys. 46. Właściwości tabeli i opcje obramowania i cieniowania tabeli

Źródło: Opracowanie własne

W tabeli można wykonywać szereg różnych operacji typu: wstawianie lub usuwanie komórek, wierszy i kolumn, scalanie komórek i dzielenie, a nawet podział tabeli na dwie odrębne. Na tabeli można wykonać autoformatowanie, wreszcie można zaznaczoną tabelę przekonwertować na tekst (operacja odwrotna – konwersja zaznaczonego fragmentu tekstu na tabelę jest również dostępna w tym menu).

Aby wstawić pojedynczą komórkę do tabeli należy zaznaczyć jedną komórkę w tabeli w miejscu, w którym ma być wstawiona nowa komórka. Następnie należy wcisnąć przycisk Wstaw tabelę z paska narzędzi standardowych i uruchomić polecenie Wstaw komórki z menu Tabela. Pojawi się okienko, w którym trzeba określić, czy po wstawieniu komórki pozostałe komórki powinny być przesunięte w prawo (przesuwa w prawo wszystkie komórki w wierszu) czy w dół (przesuwa w dół wszystkie komórki w kolumnie). Wybranie jednej z dwóch możliwych opcji spowoduje wstawienie całego wiersza lub kolumny.



Rys. 47. Opcje operacji na tabeli

Źródło: Opracowanie własne

W ten sam sposób można wstawić grupę komórek. Wystarczy zaznaczyć w tabeli kilka sąsiadujących komórek i wcisnąć przycisk Wstaw tabelę, a do tabeli zostaną wstawione komórki w takim układzie, w jakim były zaznaczone.

Wstawienie wiersza/kolumny uzyskuje się przez zaznaczenie wiersza lub kolumny w tabeli (jeżeli zaznaczy się dwa wiersze, to dwa wiersze zostaną wstawione) i wciśnięcie przycisku Wstaw tabelę lub uruchomienie polecenia Wstaw wiersz (kolumny) z menu Tabela. Nowy wiersz (kolumna) będzie wstawiony przed zaznaczonym.

Zaznaczenie grupy komórek i wciśnięcie klawisza Delete powoduje wyczyszczenie zawartości tych komórek. Żeby usunąć komórkę lub grupę komórek, należy je zaznaczyć, po czym użyć polecenia Usuń komórki z menu Tabela. Do usunięcia komórek można również użyć klawisza Backspace. Na ekranie pojawi się okienko, w którym musimy określić, jak przesunąć pozostałe komórki.

7.1.5. Wstawianie obiektów graficznych

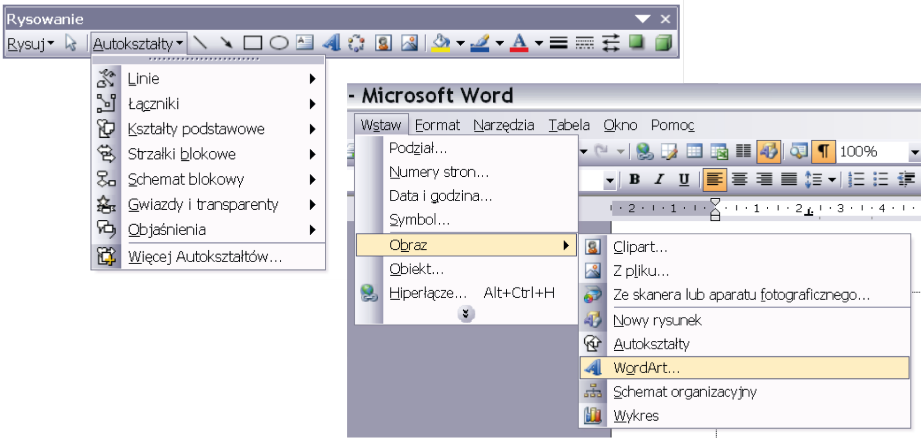
Microsoft Word pozwala na łatwe dodawanie do dokumentów różnorodnych obiektów graficznych i wykresów.

Obiekty rysowane (linie, strzałki, autokształty, prostokąty, owale i inne kształty) przyczyniają się do podniesienia walorów wizualnych dokumentu i wyróżnienia elementów, na które czytelnik powinien zwrócić szczególną uwagę.

Pola tekstowe pozwalają na wygodne umieszczanie notatek w dowolnym miejscu strony. Obiekty Clipart podnoszą atrakcyjność dokumentu poprzez umieszczenie w nim profesjonalnie przygotowanych predefiniowanych ilustracji.

W omawianej wersji edytora tekstów większość elementów graficznych można wydobyć ze specjalnego paska narzędzi o nazwie Rysowanie, który pojawia się po kliknięciu przycisku na pasku narzędziowym lub włącza się go poprzez menu Widok/Paski narzędzi.

Zaawansowane opcje wstawiania obiektów graficznych zostały umieszczone w menu w grupie Wstaw/Obraz.



Rys. 48. Pasek narzędzi Rysowanie oraz wstawianie w dokumencie dowolnego obiektu graficznego

Źródło: Opracowanie własne

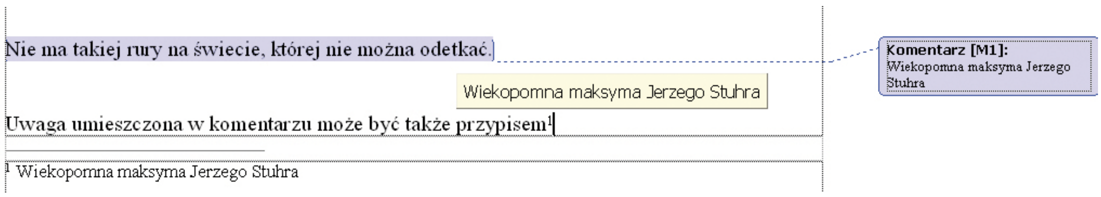
7.1.6. Komentarze i przypisy

W dokumentach można umieszczać również komentarze i przypisy. Komentarze służą do robienia notatek na własny użytek lub dla innych osób pracujących nad dokumentem.

Przypisy najczęściej podają źródło cytowania.

Komentarze i przypisy można wstawiać, edytować i usuwać. W celu wstawienia komentarza należy:

- zaznaczyć tekst lub element, którego ma dotyczyć komentarz, bądź kliknąć na końcu tego tekstu;
- w menu grupy Wstaw wybrać polecenie Komentarz, bądź użyć skrótu Alt+M;
- w dymku komentarza wpisać tekst komentarza;
- przypis wstawiamy analogicznie – wybierając z menu Wstaw polecenie Odwołanie/Przypis dolny, przypis nie tylko znajdzie się na dole strony, ale po najechaniu na numer przypisu pojawi się przy ikonie koperty.



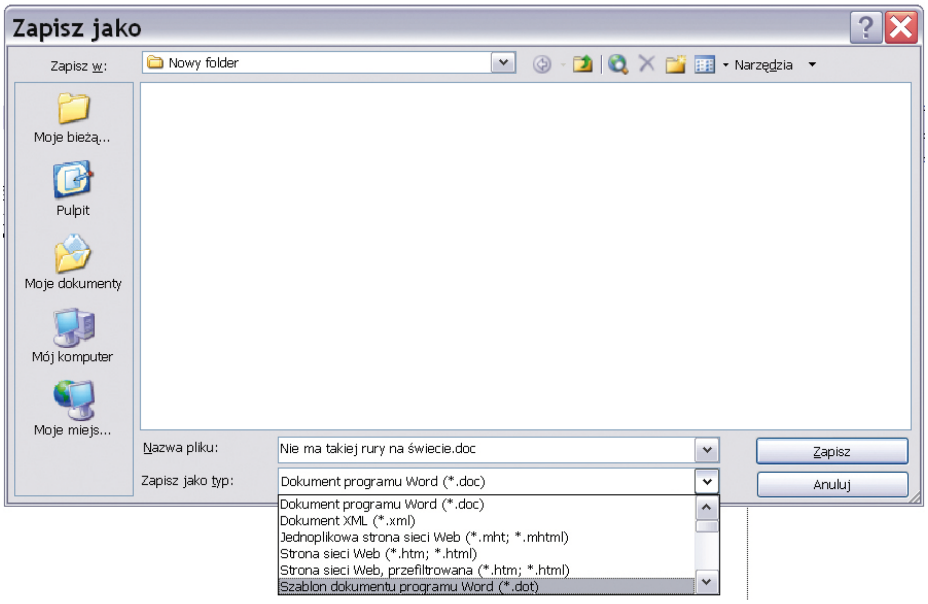
Rys. 49. Komentarz i przypis

Źródło: Opracowanie własne

7.1.7. Zapisywanie dokumentu

Zapisanie dokumentu w postaci pliku na dysku skutkuje również zapisem wielu ustawień strony i opcji drukowania. Przygotowane uprzednio ustawienia strony i formatowania można zapisać jako szablon, wybierając z menu Plik/Zapisz jako odpowiedni typ dokumentu – szablon dokumentu programu Word.

W ten sam sposób można dokument Worda zapisać w formacie *.rtf (w celu przesłania na komputer z włączoną blokadą dla plików zawierających makrodefinicje) albo *.html (w celu publikacji w sieci, np. jako komponent lekcji w Moodle).



Rys. 50. Zapisywanie dokumentu jako szablon

Źródło: Opracowanie własne

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Wskaż braki i niedoskonałości narzędzia, jakim jest Twój edytor tekstów, w zastosowaniach DTP. Czego brakuje MS Word, aby mógł być wykorzystywany do składu materiałów?
b) Jaka jest rola słownika w edytorze? Czy na pewno poprawia błędy? Czy można go oszukać?
c) Przygotuj szczegółowy prospekt informacyjny dla wybranej firmy/produktu uzasadniający jej/jego unikatowość i zachęcający do zapoznania się z ofertą firmy/producenta produktu.

Bibliografia:

Syllabus ECDL, wersja 5.0, PTI 2007.

Żarowska A., Węglarz W., *ECDL na skróty*, Warszawa 2011.

Langer M., *Po prostu Word 2003 PL*, Warszawa 2004.

8. Aspekty prawne w pracy z komputerem: przestrzeganie prawa autorskiego, ochrona danych osobowych

Nieznajomość prawa nie zwalnia od odpowiedzialności. Znajomość – często.

St. J. Lec

Prawo autorskie funkcjonuje w Polsce stosunkowo krótko. Nie obrosło więc w dużo przepisów wykonawczych i interpretacji. Niemniej jest przyjęte w bardzo rygorystycznej formie, a im mniejsza wiedza w tym zakresie stróżów i egzekutorów prawa różnych szczebli, tym większa gorliwość w literalnym egzekwowaniu zapisów. Z drugiej strony mamy rzesze korzystających z oprogramowania z zupełnym brakiem świadomości zasad, na jakich mogą to robić i czego im robić nie wolno. Taka nonszalancja i całkowita ignorancja użytkowników oprogramowania w tym zakresie często przekracza dozwolone granice i, wykraczając za nie, staje się przejawem współczesnej odmiany piractwa – piractwem komputerowym. Dlatego ważne jest, by istniał choć cień szansy na rzetelną ocenę sytuacji w oparciu o racjonalne przesłanki, niekoniecznie będące kalką sytuacji opisanych w przepisach prawa, zarówno jednej, jak i drugiej strony przeprowadzanej kontroli. Ważne tym bardziej, że osoba łamiąca prawo zostanie na pewno surowo ukarana, zaś skutki pomyłek i błędów przedstawicieli wymiaru sprawiedliwości zawsze dotykają obywatela. Nawet jeżeli nieprawidłowe działanie władzy zostanie udowodnione, poszkodowany rzadko usłyszy choćby „przepraszam", nie mówiąc o zadośćuczynieniu. Najrozsądniej więc byłoby unikać sytuacji prowokujących do nadinterpretacji prawa i świadomie korzystać z oprogramowania w ramach praw przysługujących użytkownikowi od momentu nabycia licencji.

Zanim przystąpimy do opisu zagadnienia, warto przytoczyć podstawowe definicje, a następnie przytoczyć przepisy regulujące tę dziedzinę aktywności człowieka.

Prawem autorskim nazywamy zespół praw i przepisów regulujących relacje pomiędzy twórcą dzieła a jego późniejszymi użytkownikami, które pozwalają autorowi dzieła decydować o warunkach, na jakich jego dzieło będzie używane i pozwala mu czerpać z niego korzyści. Podstawą prawną jest ustawa O prawie autorskim i prawach pokrewnych.[1] Ustawa ta rozróżnia dodatkowo prawo autorskie osobiste i prawo autorskie majątkowe.

1. Ustawa z dnia 4 lutego 1994 roku O prawie autorskim i prawach pokrewnych, Dz. U. z 2006 r. nr 90, poz. 631, ze zm.

Prawo autorskie **osobiste** związane jest z **uprawnieniami autora dzieła do firmowania dzieła własnym nazwiskiem**. Ustawodawca uznał to za **uprawnienie niezbywalne**. Zgodnie z tym z utworu może korzystać lub nim rozporządzać wyłącznie osoba uprawniona, zazwyczaj autora dzieła.

Prawo autorskie **majątkowe** reguluje **kwestię ekonomiczną** towarzyszącą korzystaniu z dzieła. Kluczowym stwierdzeniem jest to, że **prawa majątkowe można nabyć**. Dokumentem, który to sankcjonuje, jest licencja. W niej też zawarte są warunki korzystania i prawa przysługujące nabywcy. W majątkowym prawie autorskim określa się również czas trwania tego prawa. Licencja dla użytkownika końcowego w nomenklaturze określana jest skrótem **EULA** (End User Licence Agrement). Odrębne zasady wykorzystania dzieła dotyczą pośredników i dystrybutorów dzieła.

Piractwo to zbiorcza nazwa różnego rodzaju niedozwolonych czynów związanych z komputerem, ale nie tylko. Sprawstwem będzie tutaj zarówno kopiowanie programów, jak też muzyki, książek lub filmów. Powszechne obecnie są audiobooki, często umieszczane na dyskach twardych, CD i pendrive'ach, ale niewiele z nich zostało nabytych legalnie. Piractwem jest też używanie plików zdobytych na przykład poprzez sieci P2P (*peer-to-peer*).

Regulacja odpowiedzialności za tego typu działania jest bardzo skomplikowana. Nie dość, że podlega aż dwóm reżimom prawnym, to są to skrajne systemy prawa: cywilnego i karnego. Podstawowa jest wspomniana powyżej regulacja wynikająca z Art. 116 ustawy O prawie autorskim i prawach pokrewnych:

1. *Kto bez uprawnienia albo wbrew jego warunkom rozpowszechnia cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 2.*
2. *Jeżeli sprawca dopuszcza się czynu określonego w ust. 1 w celu osiągnięcia korzyści majątkowej, podlega karze pozbawienia wolności do lat 3.*
3. *Jeżeli sprawca uczynił sobie z popełniania przestępstwa określonego w ust. 1. stałe źródło dochodu albo działalność przestępną, określoną w ust. 1, organizuje lub nią kieruje, podlega karze pozbawienia wolności od 6 miesięcy do lat 5.*

W klimacie piractwa pojawił się szereg pojęć określających osoby uprawiające piractwo.

- **Haker** – osoba, która wyszukuje i ewentualnie wykorzystuje luki bezpieczeństwa w oprogramowaniu komputerowym. Dzięki nim może uzyskiwać dostęp do zabezpieczonych zasobów.
- **Cracker** – osoba łamiąca zabezpieczenia zasobów sieciowych, włamywacz sieciowy.
- **Black hat** (czarny kapelusz) –haker działający na granicy lub poza granicami prawa. Nie publikuje w ogóle znalezionych błędów, wykorzystując je w nielegalny sposób albo publikuje je od razu w postaci gotowych programów (tzw. exploitów), które mogą zostać użyte przez osoby o niższych umiejętnościach (choćby *scriptkiddies*). Niektóre osoby kwestionują w tym przypadku użycie słowa „haker", zastępując je wyrazem „cracker". Za takie działania grozi kara więzienia.
- **White hat** (biały kapelusz) – haker działający zupełnie legalnie lub też starający się nie popełniać szkód. Odkryte przez siebie luki w zabezpieczeniach podaje zwykle w formie, w jakiej łatwo mogą zostać załatane poprawkami przez autorów oprogramowania, lecz trudnej do wykorzystania w celu wyrządzenia komuś szkody. W tej grupie spotyka się audytorów bezpieczeństwa. Za takie działania nie grozi kara więzienia.
- **Grey hat** (szary kapelusz) – haker/cracker stosujący po części metody działania obu wyżej wymienionych grup. Nie grozi mu więzienie.

Prawo autorskie chroni zarówno dzieła materialne (obraz, rzeźbę), jak i wartości intelektualne, do których zaliczają się programy komputerowe.

W dziedzinie oprogramowania wyróżniamy szereg typów licencji, mniej lub bardziej restrykcyjnych dla nabywcy programu i – tym samym – w różnym stopniu ograniczających swobodne korzystanie z programu.

Najprostszym dla użytkownika typem licencji jest **freeware**. Jak sama nazwa wskazuje, nie jest ona obciążona żadnymi kosztami ani zobowiązaniami, pozwala na swobodne dysponowanie programem, twórca lub właściciel zrzeka się wynagrodzenia. Jedyne ograniczenie wynika z najgorszego przejawu piractwa – niedopuszczalne jest przywłaszczenie, czyli rozpowszechnianie tej aplikacji jako własnej i czerpanie z niej zysków.

Kolejnym typem jest licencja **public domain**, która w dobie Internetu, wydawałoby się, powinna odejść w niepamięć, ma się jednak dobrze – za sprawą wojny pomiędzy czasopismami. A więc po kolei: licencja public domain oznacza, iż wprawdzie program dystrybuowany jest bezpłatnie, niemniej użytkownik ponosi koszt nośnika, na którym jest on umieszczony oraz dostawy. Dawniej był to koszt dyskietki lub płyty CD i przesyłki pocztowej. Obecnie aplikacje licencjonowane w ten sposób można spotkać jako płatny pendrive z oprogramowaniem lub jako dodatek do periodyku – sama gazeta na przykład kosztuje 4,50 zł, w przypadku zakupu z dołączoną płytą zawierającą w całości oprogramowanie freeware natomiast czasopismo kosztuje już 19,99 zł.

W hierarchii kosztów mamy następnie do czynienia z licencją **shareware**. Program licencjonowany w ten sposób nie jest w prawdzie darmowy, jednakże opłata jest na tyle niska, że jej poniesienie nie stanowi żadnego wysiłku finansowego dla użytkownika. Często twórca zrzeka się jej na rzecz organizacji charytatywnej lub prosi o wsparcie nią szczytnego celu. W praktyce można spotkać się z ignorowaniem tego skromnego obowiązku, lecz tu należałoby zaapelować do uczciwości i sumienia nabywcy.

Kolejny typ to licencja typu **demo/trial**, czyli wersja demonstracyjna lub testowa programu. Często licencje te są łączone i granice między nimi się zacierają. Przyjęło się, że wersja demonstracyjna to program o ograniczonej funkcjonalności, z częścią opcji niedostępnych, natomiast trial to wersja próbna – z pełną funkcjonalnością przez określony czas testowania. O ile wersję demonstracyjną można traktować jako reklamówkę, rozwiązanie nastawione na wywołanie popytu, to okres próbny, ograniczony czasowo, służy raczej ocenie, czy przedstawiona aplikacja zaspokaja potrzeby użytkownika i czy warto za nią wnieść pełną opłatę licencyjną. W przypadku decyzji negatywnej wersję próbną należy usunąć z komputera – często sam dystrybutor oprogramowania zadba o to, by po okresie próbnym program przestał działać. Także potentaci w dziedzinie software nie stronią od tego rozwiązania, przykładem może być 60-dniowa wersja Office firmy Microsoft®.

Zdecydowanie najdroższym rozwiązaniem jest pełna **licencja komercyjna**, należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że pierwotnym celem przeznaczenia oprogramowania jest bogaty rynek biznesowy, a nie tzw. *thin client* – użytkownik domowy, prywatny. Twórca oprogramowania oczekuje, że tak jak jego aplikacja pozwala na zwiększenie zysków podmiotu gospodarczego, poprawi jego kondycję finansową, tak i on chce mieć możliwość udziału w tym sukcesie, zyskać zwrot poniesionych nakładów i zarobić.

Licencja komercyjna to nie tylko same koszty wytworzenia oprogramowania. Wraz z nim w cenie ujęta jest dystrybucja, ograniczona odpowiedzialność producenta za wady ukryte, często podręcznik i dostęp do kursów on-line w celu łatwiejszego przyswojenia sobie nowości oraz wsparcie techniczne – helpdesk, dostępny różnymi kanałami, który realizują żywe osoby.

Należy nadmienić, że w ramach licencji komercyjnej można wyróżnić dwa podtypy: licencję **BOX** i **OEM**. Pierwsza z nich, „pudełkowa", pozwala na swobodny dobór sprzętu na którym zostanie zainstalowania aplikacja, nie jest z nim związana, często wersja dystrybuowana zawiera nośnik z wersją instalacyjną. Oprogramowanie to można swobodnie przenosić między maszynami, należy jednak pamiętać o odinstalowaniu go z komputera źródłowego, by nie zmieniła się liczba kopii, do których użytkownik ma prawo. Wersja OEM nie może być sprzedawana samodzielnie, gdyż warunki licencji nakazują pakietową sprzedaż aplikacji wraz z przypisanym sprzętem (częścią komputera – w przypadku systemu operacyjnego, lub z zestawem – w przypadku pakietu biurowego). Kupowanie oprogramowania w wersji OEM wiąże się jednak z o wiele niższymi kosztami, co jest (poza ceną części) wynikiem porozumienia producenta części i twórcy programu w sprawie wspólnej dystrybucji.

Z uwagi na fakt, że niektórzy producenci zmonopolizowali rynek podstawowego oprogramowania, niszcząc lub marginalizując konkurencję, zaś organy państwowe zbyt opieszale reagują na zaistniałą sytuację i, gubiąc się w biurokratycznych procedurach odwoławczych, nie były w stanie ochronić rynku przed tym przejawem nieuczciwej konkurencji, powstał nowy, alternatywny sposób licencjonowania, wywodzący się z ruchów społecznych i wolontariatu. Jego dostrzeżenie i wsparcie przez instytucje państwowe daje nadzieję na przywrócenie zdrowych mechanizmów rynkowych.

Ostatnim omawianym typem będzie więc licencja **open source** albo inaczej **GNU GPL** (*General Public License*). Programy budowane w oparciu o taką licencję rozprowadzane są całkowicie za darmo do niekomercyjnego użytku, w dodatku z nieskompilowanym i nieszyfrowanym kodem źródłowym. Ma to na celu umożliwienie rozwoju aplikacji, gdyż każdy ma prawo ją zmodyfikować, usprawnić, wyeliminować błędy, dodać nową funkcjonalność. Pod warunkiem jednak, że po dokonaniu zmian nową wersję wraz z otwartym kodem źródłowym upowszechni również za darmo. Z zakresu systemów operacyjnych taki rodzaj licencjonowania ma większość dystrybucji Linuxa, w dziedzinie pakietów biurowych istnieje OpenOffice.org oraz Libra Office, do zastosowań graficznych funkcjonuje GIMP (do grafiki rastrowej) i Inkscape (do grafiki wektorowej), w zastosowaniach edukacyjnych wyróżnia się platforma e-learningowa Moodle.

Na koniec należy zaznaczyć, że prawo autorskie obowiązuje także w Internecie, zeskanowanie książki i umieszczenie w sieci jako pliku *.pdf jest zaś kategorią przestępstwa w tej dziedzinie. Ciekawym pomysłem jest możliwość zakupu książek w postaci e-booka w księgarniach internetowych. Bardzo często taka wersja elektroniczna książki posiada na każdej stronie publikacji „pieczęć" świadczącą o tym, iż jest to kopia dla określonego nabywcy, czyli kopia personalizowana.

TEMATY DO DYSKUSJI

a) Czy czujesz się autorem treści chronionych? Jak stosować ochronę własności intelektualnej, nie doprowadzając jednocześnie tej ochrony do absurdu?
b) Ściąganie treści z Internetu to sposób na zorganizowanie czasu wolnego czy nielegalna praktyka – wyjaśnij i uzasadnij swoje stanowisko.

Bibliografia:

Adamski A., *Prawo Karne Komputerowe*, Warszawa 2000.

Adamski A., *Prawne aspekty nadużyć popełnianych z wykorzystaniem nowoczesnych technologii przetwarzania informacji*, Toruń 2000.

Burgess G.A., *Przewodnik po internecie dla prawników*, Warszawa 2005.

Dobrzański J., Masłowski K., *Scene of the Cybercrime. Computer Forensics Handbook*, 2004.

Waglowski P., *Prawo w sieci. Zarys regulacji Internetu*, Warszawa 2005.

Matematyka

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań zatytułowanym „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Ja w świecie liczb

Z liczbami spotykasz się na każdym kroku, każdego dnia, dlatego musisz sprawnie wykonywać różnego rodzaju działania na liczbach rzeczywistych. Przypomnij sobie, czego nauczyłeś się w gimnazjum, i postaraj się jak najlepiej opanować nowe wiadomości i umiejętności, które w życiu na pewno ci się przydadzą.

To już potrafię:

1. Odczytać i zapisać liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
2. Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych;
3. Zamienić ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienić ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
4. Zaokrąglić rozwinięcia dziesiętne liczb;
5. Obliczyć wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne;
6. Szacować wartości wyrażeń arytmetycznych;
7. Stosować obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.);
8. Interpretować liczby wymierne na osi liczbowej;
9. Obliczyć odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
10. Wskazać na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$;.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 W 2005 roku Szanghaj liczył około 14 600 000 mieszkańców. W postaci wykładniczej liczbę tę zapisuje się jako:

a) $146 \cdot 10^5$ b) $14{,}6 \cdot 10^6$

c) $0{,}146 \cdot 10^8$ d) $1{,}46 \cdot 10^7$

Zad.2 Liczbę $\sqrt{72}+\sqrt{32}-\sqrt{98}$ można zapisać w postaci:

a) $2\sqrt{6}+4\sqrt{2}-7\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$
d) $17\sqrt{2}$

Zad.3 Dane są liczby zapisane w systemie rzymskim, największa z nich to:

a) MCMLX
b) MCMXCIX
c) MMVII
d) MCMLXXIV

Zad.4 Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{7}{\sqrt{5}}$, należy mianownik tego ułamka pomnożyć przez:

a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{5}-1$
d) $\sqrt{5}+1$

Zad.5. Drut o długości 45 m przecięto na trzy części, których stosunek długości jest równy 1: 3: 5. Najdłuższa z tych części ma długość:

a) $15\ m$
b) $5\ m$
c) $25\ m$
d) $9\ m$

Zad.6 Przybliżona wartość$\sqrt{13}$ wynosi:

a) 3,62
b) 3,60
c) 3,61
d) 3,63

Zad.7 Ile jest liczb ujemnych wśród liczb przeciwnych do: $-\frac{1}{4}, 2,\ \frac{3}{5},\ 5\frac{1}{2}, -0{,}75$?

a) 5
b) 3
c) 2
d) 4

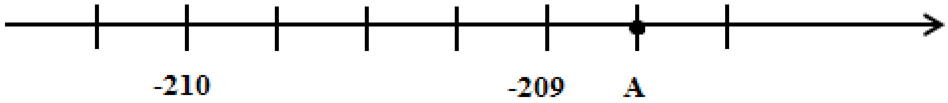
Zad.8 O godzinie 4^{00} termometr wskazywał $-12°C$, a o godzinie 10^{00} ten sam termometr wskazywał $+2°C$. Różnica temperatur w tym dniu wynosiła:

a) -10
b) 14
c) -14
d) 10

Zad.9 Jeśli jest godzina 13^{14}, to do godziny 15^{32} pozostało sekund:

a) $10\ 000$
b) 8280
c) 7500
d) 2180

Zad.10. Punkt A na osi liczbowej ma współrzędne:



a) $-208{,}75$ b) $-209{,}25$

c) $208{,}75$ d) $209{,}75$

ZADANIA OTWARTE

1. Masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24} kg$, masa Księżyca $7 \cdot 10^{22} kg$. Ile wynosi stosunek masy Ziemi do masy Księżyca? Wynik podaj w przybliżeniu.

2. Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}$?

3. Zapisz wyrażenie $\left[\frac{(a^7:a^5)^3 \cdot a^4}{a^{13}:a^2}\right]^3$ w postaci potęgi liczby a

4. Z dwóch przystani na rzece odległych od siebie o 100 km wyruszają dwie łódki. Jedna płynie z A do B z prędkością 12 km/h, druga z B do A z prędkością 13 km/h. Po jakim czasie łódki się miną?

5. Jednego dnia cenę pewnego towaru zwiększono o 15%, zaś następnego dnia zmniejszono o 20%. Oblicz początkową cenę tego towaru, jeśli ostatecznie po tych zmianach wynosiła ona 345 zł.

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	4	C	C	B	C	B	A

Zadania otwarte

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – Masa ziemi – $6 \cdot 10^{24} kg$ y – Masa księżyca – $7 \cdot 10^{22} kg$ $\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{7 \cdot 10^{22} kg} = \frac{6}{7} \cdot 10^2 = \frac{600}{7} \approx 85{,}714$
2	$\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}} = \frac{4-(7-4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{20}{9}} = \frac{9}{20}$ $1{,}8 - 100\%$ $\frac{9}{20} - x$ $45 = 1{,}8x \Rightarrow x = 25\%$

3	$\left[\frac{(a^7 : a^5)^3 \cdot a^4}{a^{13} : a^2}\right]^3 = \left[\frac{(a^2)^3 \cdot a^4}{a^{10}}\right]^3 = \left[\frac{a^{10}}{a^{10}}\right]^3 = a^0$
4	x – czas do spotkania $12x$ – droga I łódki $13x$ – droga II łódki $14x + 13x = 100 \Rightarrow x = 4$ Odp. Łódki miną się po 4 godzinach.
5	x – cena początkowa $x + 0{,}15x - 0{,}20 \cdot 1{,}15x = 345 \Rightarrow x = 375\ zł$ Odp. Początkowa cena wynosiła 375 zł.

1.1 Zbiory liczbowe

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości i inne wytwory dzieł ludzkich, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próbę liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano dobra, dni, czy np. ludzi w konkurencyjnej grupie. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce[1].

Zbiór liczb naturalnych (N) – nazywamy zbiór liczb 0,1,2,3,4,5,6,7,8...

Zapis matematyczny zbioru:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Zbiór ten jest zbiorem nieskończonym. Najmniejsza liczba naturalna w tym zbiorze to 0. Największa liczba naturalna nie istnieje. Podzbiorem liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych dodatnich:

$$\mathbb{N}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\} = \mathbb{N} \backslash \{\mathbf{0}\}$$

Zbiór liczb całkowitych (Z) – stanowią wszystkie liczby naturalne **N** i liczby do nich przeciwne ...–5,–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,5...

Zapis matematyczny zbioru:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\}$$

Zbiór liczb całkowitych jest zbiorem nieskończonym. Nie istnieje najmniejsza i największa liczba całkowita. Zbiór ten możemy podzielić na dwa podzbiory: liczb całkowitych dodatnich oznaczanych jako $\mathbf{C}_+ = \{1,2,3,\ldots\}$ oraz liczb całkowitych ujemnych oznaczanych jako $\mathbf{C}_- = \{\ldots,-3,-2,-1\}$.

Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb, 10.02.2013

Zbiór liczb wymiernych (W) to zbiór wszystkich liczb, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i q jest różne od 0. Jest to zbiór nieskończony. Postać p/q liczby wymiernej nazywamy postacią ułamkową tej liczby.

Podzbiorem liczb wymiernych jest zbiór liczb naturalnych i całkowitych. Oznacza to, że każda liczba całkowita i naturalna jest jednocześnie liczbą wymierną.

Przykłady liczb wymiernych[2]:

$$-0.04=\frac{-4}{100}=\frac{-1}{25}$$
$$\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$$
$$-\sqrt[3]{27}=-3=\frac{-3}{1}$$
$$0.166(6)=\frac{1}{6}$$
$$5=\frac{5}{1}$$

Rysunek 1-1 – Liczby wymierne

Jak widać, każdą z nich da się zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Zbiór liczb niewymiernych (NW) – nazywamy zbiór liczb, które nie dadzą się przedstawić w postaci ułamka p/q, gdzie p i q należą do zbioru liczb całkowitych i dodatkowo q jest różne od 0.

Przykłady liczb niewymiernych[3]:

$$\pi$$
$$\sqrt[2]{2}$$
$$-\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[5]{7}$$
$$\sqrt[2]{\pi}$$
$$\frac{1}{\pi}$$

Rysunek 1-2 – Liczby niewymierne

Zbiór liczb rzeczywistych (R) – jest sumą zbiorów liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych. Jest uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych.

Przykłady liczb rzeczywistych[4]:

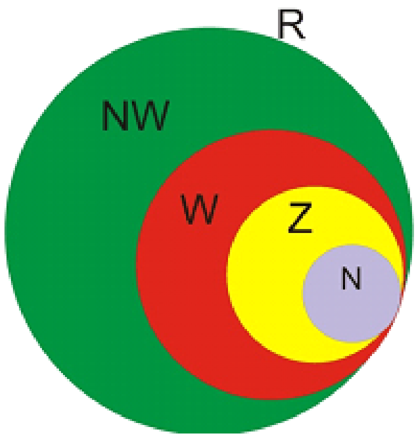
$$0$$
$$\pi$$
$$-0.123$$
$$\sqrt{5}$$
$$\sqrt[5]{7}$$
$$-3$$
$$\frac{3}{4}$$
$$1230$$

Rysunek 1-3 – Liczby rzeczywiste

2 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png, 10.02.2013
3 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png, 10.02.2013
4 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png, 10.02.2013

Zbiór liczb rzeczywistych dzieli się na dwa podzbiory: zbiór liczb rzeczywistych **dodatnich** $\mathbb{R}_+$ i **ujemnych** $\mathbb{R}_-$.

Zależności między zbiorami liczbowymi:



Symbol $\subset$ czytamy „zawiera się".

- $N \subset Z$
- $N \subset W$
- $Z \subset W$
- $W \subset R$
- $NW \subset R$

Rysunek 1-4 – Zależności między zbiorami liczbowymi

ZADANIA

1.1.1 Z podanych liczb wypisz liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne. Które z nich mają rozwinięcie nieskończone okresowe?

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{2}{13}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 44, 0, (123), $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{27}$, –3, 16, $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt[3]{5}$, –5

Odpowiedź:

0, (6); 0,125; –0,(153846); 1,118…; 1,5707…; 44; 0,123123…; 1,732…; –3; –3,16; 1,4142…; 0; 1,709…; –5

N={0; 44}, Z={–5;–3; 0; 44 }, W={–5; –3,16; –3; $-\frac{2}{13}$, 0; 0,(123); ;$\frac{2}{3}$, 44}, NW={$\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$}

1.1.2 Wypisz wszystkie elementy zbioru A wiedząc, że A jest zbiorem:

a) wszystkich całkowitych, jednocyfrowych liczb nieparzystych,

b) wszystkich liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 20, podzielnych przez 3,

c) wszystkich dwucyfrowych liczb pierwszych mniejszych od 30,

d) wszystkich dodatnich dzielników liczby 12.

Odpowiedź: a) 1, 3, 5, 7, 9; b) 3, 6, 9, 12, 15,18; c) 11, 13, 17, 19, 23, 29; d) 1, 2, 3, 6, 12

1.1.3 Wypisz wszystkie elementy zbioru A, jeśli:

a) $A = \{x: x|20 \wedge x > 0\}$

b) $A = \{x: x \in N \wedge x < 20 \wedge NWD(x,18) = 1\}$

c) $A = \{x: x \in N \wedge x < 25 \wedge NWD(x,24) = 2\}$

d) $A = \{x: x \in N \wedge NWW(x,12) = 48\}$

Odpowiedź: a) A = {1,2,4,5,10, 20}; b) A = {1,5,7,11, 13, 17, 19}; c) A = {2,10, 14 }; d) A = {48}

Ciekawostka

Zbiór liczb rzeczywistych najprościej określamy mówiąc, że są to „wszystkie liczby". Jest to pewne uproszczenie, ponieważ istnieją liczby, które nie należą do zbioru liczb rzeczywistych – są nimi liczby zespolone.

Zbiór liczb zespolonych został wprowadzony ze względu na to, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie można było wykonywać pierwiastkowania liczb ujemnych. Liczby zespolone mają postać: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{i}$, gdzie $\boldsymbol{i} = \left(\sqrt{-1}\right)$ nazywa się jednostką urojoną. Liczba a jest nazywana częścią rzeczywistą, liczba b częścią urojoną.

1.2 Różne postacie liczb rzeczywistych

Teraz nauczę się:

Przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków i potęg).

Po usystematyzowaniu wiedzy na temat zbiorów liczbowych, zastanówmy się, w jaki sposób możemy przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego czy ułamka dziesiętnego okresowego).

Aby otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby zapisanej w postaci ułamka zwykłego, należy podzielić jego licznik przez mianownik, np. $\frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{25} = 0{,}04; \frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots$

A w jaki sposób przejdziemy z rozwinięcia dziesiętnego na postać ułamka zwykłego?

Przykład 1

Zapisz liczbę $0{,}333\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$0{,}333\ldots = x\ /\cdot 10$

$3{,}333\ldots = 10x$

$3 + 0{,}333\ldots = 10x$

$3 + x = 10x$

$3 = 9x / : 9$

$x = \frac{3}{9}$ ostatecznie otrzymujemy:

$x = \frac{1}{3}$

Przykład 2

Zapisz liczbę $0,(125)$ w postaci ułamka zwykłego

$0,(125) = 0{,}125125\ldots$

$0{,}125125\ldots = x\ /\cdot 1000$

$125{,}125125\ldots = 1000x$

$125 + 0{,}125125\ldots = 1000x$

$125 + x = 1000x$

$125 = 999x / : 999$

szukanym ułamkiem jest:

$x = \frac{125}{999}$

Przykład 3

Zapisz liczbę $3{,}7235235235\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$3{,}7235235235\ldots = x\ / \cdot 10$

$37{,}235235235\ldots = 10x\ /\cdot\ 1000$

$37235{,}235235\ldots = 10000x$

Jeżeli: $37235{,}235235\ldots - 37{,}235235235\ldots = 37198$, czyli

$10000x - 10x = 37198,$

$9990x = 37198\ / : 9990$

więc $x = \frac{37198}{9990} = \frac{18599}{4995}$

Nie wszystkie liczby rzeczywiste można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego skończonego czy też rozwinięcia nieskończonego okresowego. **W takiej formie można zapisać wszystkie liczby wymierne.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Stosując algorytm podany powyżej wykaż, że $0{,}999\ldots = 1$.

Rozwiązanie:

$0{,}999\ldots = x \;/\cdot\; 10$

$9{,}999\ldots = 10x, \textit{ponieważ } 0{,}999\ldots = x$

Jeżeli: $9 + 0{,}999\ldots = 9{,}999\ldots$

$to: 9 + x = 10x$

$9 = 9x \;/ : 9$

$x = 1$

Skoro, to: $0{,}999\ldots = x$,

to $0{,}999\ldots = 1$ c.n.d

ZADANIA

1.2.1 Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamków. Wskaż wśród nich liczby niewymierne.

$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{33}, \frac{8}{15}, \frac{9}{25}, \frac{1}{4}$

Odpowiedź: 0,1(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,4; 0,(15); 0,5(3); 0,36; 0,25

NW = {1,(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,(15); 0,5(3)}

1.2.2 Przedstaw poniższe liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych:

a) 0,(17) b) 0,(453) c) 0,3(8)

d) 0,25(6) e) 2,6(13) f) −2,34(5)

Odpowiedź: a) $\frac{17}{99}$; b) $\frac{453}{999}$; c) $\frac{35}{90}$; d) $\frac{231}{900}$; e) $\frac{2587}{990}$; f) $\frac{21111}{900}$

1.2.3 Znajdź rozwinięcie dziesiętne różnicy liczb:

a) 1,3(5) – 0,7(4) b) 0,8(7) – 0,3 (6)

c) 0,(67) – 0,(33) d) 0,23(5) – 0,1(1)

Odpowiedź:

a) $\frac{122}{90} - \frac{67}{90} = \frac{55}{90} =$ 0,6(1); b) $\frac{79}{90} - \frac{33}{90} = \frac{46}{90} =$ 0,5 (1); c) $\frac{67}{99} - \frac{1}{3} = \frac{102}{297} =$ 0,(34); d) $\frac{212}{900} - \frac{10}{90} = \frac{112}{900} = 0{,}12(4)$

1.2.4 Zbadaj, czy zachodzi równość:

a) $0{,}0(6) + 0{,}0(3) = \frac{2}{15}$ b) $0{,}(3) - 0{,}(2) = \frac{1}{6}$

c) $0{,}(1) \cdot 0{,}(1) = 0{,}(1)$ d) $3 \cdot 1,(4) = 4,(3)$

Odpowiedź:

a) $\frac{6}{90} + \frac{3}{90} = \frac{9}{90} = 0{,}1$ NIE;

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ NIE;

c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ NIE;

d) $3 \cdot \frac{13}{90} = \frac{39}{90} = 0{,}4(3)$ TAK

1.3 Wartości wyrażeń arytmetycznych

Teraz nauczę się:

Obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Wyrażenie wymierne[5] to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych (liter) o tej własności, że występują w nim wyłącznie takie operacje arytmetyczne, które po podstawieniu za zmienne liczb wymiernych dają w wyniku liczbę wymierną.

Aby obliczyć wartość wyrażenia wymiernego, wykonujemy we właściwej kolejności podane działania, a wynik zapisujemy w najprostszej postaci.

Ustalenie właściwej kolejności wykonywania działań podlega następującym zasadom:

1. Jeśli w wyrażeniu występują nawiasy, w pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach.
2. Jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów lub działania w nawiasach zostały już wykonane, to pozostałe działania wykonujemy w następującej kolejności:

- potęgowanie i pierwiastkowanie,
- mnożenie i dzielenie,
- dodawanie i odejmowanie.

ZADANIA

1.3.1 Wykonaj obliczenia:

a) $$\frac{\left(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{5}\right) \cdot 7\frac{2}{8}}{\left(8 - \frac{4}{6}\right) : 4\frac{1}{7}} =$$

b) $$\left(6\frac{2}{5} - 4\frac{3}{16}\right) \cdot 2\frac{2}{3} =$$

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne, 11.02.2013

c) $$\frac{\left(6\frac{1}{8}-2\frac{3}{5}\right):\left(1\frac{2}{15}-3\frac{4}{6}\right)}{\left(16\frac{2}{5}+14\frac{1}{7}\right)\cdot 2\frac{3}{10}}:\frac{141}{76}=$$

d) $$\frac{371}{285}:\frac{6\frac{1}{5}-7\frac{1}{6}+2\frac{1}{5}\cdot 3\frac{2}{8}}{5\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}\cdot 3\frac{6}{12}}=$$

Odpowiedź: a) $-11\frac{11}{90}$; b) $5\frac{27}{30}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) -1

1.3.2 Oblicz:

a) $$\frac{2{,}4:1{,}32-0{,}12:1{,}5}{2{,}3\cdot 0{,}25+1{,}18:3{,}2}=$$

b) $$\frac{3\cdot(0{,}15-1{,}57)+(23{,}58-3{,}24):2{,}3}{2{,}6\cdot(0{,}12+4{,}35):2{,}33}=$$

c) $$\frac{(6{,}25:0{,}023-1{,}22):0{,}05}{13{,}24-1{,}45\cdot 2{,}8:1{,}13}=$$

d) $$\frac{(1{,}55:0{,}23)\cdot 2{,}15+(8{,}43-2{,}11)}{5{,}3:(1{,}24+2{,}98)\cdot 0{,}008}=$$

Odpowiedź: a) 1,84; b) 0,9; c) 508; d) 0,13

1.3.3 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $$\frac{0{,}125\cdot 3\frac{1}{5}-(0{,}24:0{,}12)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{10:3\frac{1}{3}-6\cdot\frac{2}{3}+1\frac{7}{20}:5{,}4}=$$

b) $$3{,}4:\left(\frac{2{,}4-3\frac{3}{4}+1{,}2:\frac{1}{8}}{6:2{,}25-1{,}45\cdot 1\frac{2}{3}}\right)\cdot\frac{372}{34}=$$

c) $$\left\{4\frac{1}{9}-2{,}5:\left(1\frac{2}{15}+3\frac{4}{3}\right):13{,}3\right\}:\frac{400147}{98154}=$$

d) $$-\frac{14985}{1969}+\frac{4{,}55\cdot\frac{5}{11}+(-2{,}5)\cdot 0{,}9}{[0{,}7\cdot(-0{,}34)-0{,}120]:3\frac{3}{2}}:\frac{1\frac{2}{3}}{5\frac{11}{20}}=$$

e) $$\frac{\left[\left[3{,}32:2\frac{1}{6}-\frac{7}{8}\cdot 0{,}6\right]\cdot 1{,}2+\frac{3}{6}\right]:\frac{975}{1012}}{\left(1{,}2+1\frac{1}{3}\cdot 0{,}21:1{,}3\right)\cdot\frac{11}{15}}:\left(-\frac{11107}{13000}\right)=$$

Odpowiedź: a) $-2\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 0; e) -2

1.4 Potęgi

Teraz nauczę się:

- Obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych i stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- Wykorzystywać podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką).

Definicja[6]

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę mnożąc przez siebie n-razy liczbę a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ czynnikow}}$$

Prawa działań na potęgach

Niech n, m będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

1) **Iloczyn potęg o tych samych podstawach:** $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$
2) **Iloraz potęg o tych samych podstawach:** $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$
3) **Potęga iloczynu:** $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$
4) **Potęga ilorazu:** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$
5) **Potęga potęgi:** $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$
6) **Potęga ilorazu o wykładniku ujemnym:** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz:

a) 2^3 b) $(-4)^2$ c) $(-\frac{2}{5})^4$ d) $(-\frac{1}{3})^3$

e) $(-1\frac{1}{4})^2$ f) $(2\frac{2}{3})^0$ g) $(0,4)^3$ h) $(0,02)^4$

i) $(-0,5)^2$ j) $(\sqrt{3})^2$ k) $(\sqrt[3]{2})^3$ l) $(-2\sqrt{3})^4$

Odpowiedź:

a) 8; b) 16; c) $\frac{16}{625}$; d) $-\frac{1}{27}$;

e) $\frac{25}{16}$; f) 1; g) 0,064; h) 0,00000016;

i) 0,25; j) 3; k) 2; l) 144

---

6 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 12.02.2013

1.4.2 Zastosuj prawa działań na potęgach:

a) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^1 \cdot 3^{-2}$ b) $(0,4)^1 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,4)^{-3}$ c) $(2\frac{3}{4}) \cdot (2\frac{3}{4})^0 \cdot (2\frac{3}{4})^2 \cdot (2\frac{3}{4})^3$

d) $(-4)^4 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^1 \cdot (-4)^{-5}$ e) $3^2 \cdot 22^2 \cdot (-1)^0$ f) $(\frac{1}{5})^5 \cdot (2\frac{3}{4})^5 \cdot 3^5$

g) $(4,2)^3 \cdot (\frac{2}{6})^3 \cdot (1\frac{4}{12})^3$

Odpowiedź:

a) $3^8 = 6561$; b) 0,4; c) $(2\frac{3}{4})^6$; d) $(-4)^{-2} = 16$; e) $66^2 = 4356$; f) $(\frac{33}{20})^5$; g) $(\frac{28}{15})^3$

1.4.3 Oblicz:

a) $\frac{10^3}{12^3}$. b) $\frac{(1,2)^4}{120^4}$ c) $\frac{(2,2)^2}{(0,16)^2}$

d) $(4\frac{5}{6})^3 : (1\frac{1}{5})^3$ e) $(3,4)^2 : (\frac{7}{2})^2$ f) $(\sqrt[3]{12})^3 : (-2)^3 : (-22)^0$

Odpowiedź: a) $(\frac{5}{6})^3$; b) $(0,01)^4$; c) $(13,75)^2$; d) $(\frac{145}{36})^3$; e) $(\frac{34}{35})^2$; f) 1,5

1.4.4 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 : \left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}{0,36 : \left(\frac{2}{12}\right)^4} =$ b) $\frac{5^4 - 5^3}{5^2} : \frac{2^5}{\frac{1}{5}} =$ c) $\frac{7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7^5}{7^{10} \cdot 4 - 7^6} \cdot 7^3 =$ d) $\frac{(3 \cdot 2^8 - 2^4 \cdot 6)}{9 : 3^3 \cdot 3^3} : 2^4 =$

Odpowiedź: a) $\frac{100}{36^4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{4949}{9603}$; d) 378

1.4.5 Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:

a) $\frac{a^5 \cdot a^3 : a^2}{a^0 \cdot (a^{10})^2 : a} =$ b) $\frac{(a^4 \cdot a^7) : a^3 \cdot a^8}{a^6 : a^0 \cdot (a^9)^4} =$

c) $\frac{(a^5)^3 \cdot (a^6)^{11} : (a^4)^7}{(a^9)^5 : (a^3)^2} \cdot a^6 =$ d) $\frac{(-a)^4 : (-a)^{-5}}{((-a)^{-2})^4 \cdot a^3} =$

Odpowiedź: a) a^{-13}; b) a^{41}; c) 2^{20}; d) $(-a)^{14}$

1.4.6 Oblicz:

a) $(0,4)^{-3} \cdot (1\frac{4}{5})^{-2} =$ b) $(1,2)^{-3} \cdot (-4,3)^{-2} =$ c) $\frac{22^{-1} + 66^0}{(0,6)^{-2} - 3^{-1}} =$

d) $\frac{(1,3)^{-3} - 2^{-4}}{(5:2^3):(3,3)^{-2} - (-6)} =$ e) $[(3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1}) + 2^{-2}] + 2^{-2} =$ f) $[(\frac{1}{5})^{-2} + (\frac{1}{5})^{-2} \cdot (\frac{1}{5})^{-2}] : (\frac{1}{5})^{-2} =$

Odpowiedź:

a) 253,125; b) 0,03; c) $\frac{138}{781}$; d) 0,0663; e) 2,5; f) 26

1.4.7 Oblicz:

a) $\frac{27^3 \cdot 9^2 \cdot 2^4 \cdot 81}{2^3 \cdot 3^{14}} =$

b) $\frac{(-0,2)^5 \cdot (-5^2)^{-3}}{125^{-2} : (-5)^5}$

Odpowiedź: a) $\frac{2}{27}$; b) 1

Ciekawostka

Postać wykładnicza (notacja naukowa) to zapis liczby bezpośrednio w formie iloczynu postaci[7]:

$$\pm M \cdot 10^{E}$$

gdzie: M jest mantysą należącą do przedziału $\langle 1, 10)$, E jest wykładnikiem całkowitym.

PRACA SAMODZIELNA:

1.4.8 Przedstaw w postaci wykładniczej z zaokrągleniem do 2 cyfr po przecinku:

a) 0,000004359

b) 0,000000678

Odpowiedź: a) $4{,}36 \cdot 10^{-6}$; b) $6{,}78 \cdot 10^{-7}$

1.4.9 Wyszukaj w Internecie potrzebne informacje i zapisz podane wielkości w postaci wykładniczej:

a) prędkość światła w próżni

b) masa największej ryby świata

c) masa Ziemi

d) wiek Wszechświata

e) elementarny ładunek elektryczny

f) jednostka astronomiczna 1AU

g) masa atomu wodoru

h) liczba ludności świata według danych z 31.10.2011 r.

i) podaj inne ciekawe propozycje takich liczb

Odpowiedź: a) $3 \cdot 10^{8}$m/s; b) płetwal błękitny $1{,}2 \cdot 10^{5}$ kg; c) $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg; d) $14 \cdot 10^{9}$ lat; e) $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C; f) $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km; g) $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; h) $7 \cdot 10^{9}$.

Ciekawostka

Zapis potęgowania przy użyciu indeksu górnego wprowadził Kartezjusz w XVII wieku. Naturalne potęgi liczby 2 są podstawą **arytmetyki komputerów**. Na przykład 2^n jest liczbą możliwych wartości zmiennej składającej się z n bitów (każdy bit może mieć wartość 0 lub 1, razem jest ich *n*). Z tego powodu zwykle operuje się też wielokrotnościami liczby 2 (bądź jej pewnej potęgi). Osiem bitów tworzy oktet (lub bajt). Większe wartości również są wielokrotnościami liczby 2, nie zaś 10, jak wskazywałyby ich nazwy, np. kilobajt to 1 024, a nie 1 000 bajtów[8].

7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza, 17.02.2013

8 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 17.02.2013.

Za pomocą potęg wyrażone są również jednostki miar układu SI, np.:

- 10^9 to miliard (przedrostek G), GHz – gigaherc
- 10^{12} to bilion (przedrostek T), Tm – terametr
- 10^{15} to biliard (przedrostek P), Ps – petasekunda
- 10^{18} to trylion (przedrostek E), EB – eksabajt
- 10^{21} to tryliard (przedrostek Z), Zm – zettametr
- 10^{24} to kwadrylion (przedrostek Y), Yg – jottagram

Praca dla chętnych

Wyszukaj informacje na temat innych potęg układu SI. Podaj przykłady ich wykorzystania.

1.5 Pierwiastki

Teraz nauczę się:

- Posługiwać się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosować prawa działań na pierwiastkach.

Początki symbolu pierwiastka są dość niejasne. Niektóre źródła podają, że symbol został wprowadzony przez Arabów[9].

Definicja

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką,

że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość:

$|a| = \sqrt{a^2}$

$\sqrt[2]{a}^2 = a$

$\sqrt[3]{a}^3 = a$

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Prawa działań na pierwiastkach

Dla $a, b \geq 0, n \in N$ zachodzą następujące prawa działań na pierwiastkach:

1) Iloczyn pierwiastków $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

9 www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie, 19.02.1013

2) **Iloraz pierwiastków** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

3) **Potęgowanie pierwiastków** $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$

4) **Pierwiastek z pierwiastka** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

Co łączy potęgi i pierwiastki?

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi.

1) **Potęga o wykładniku równym zero dla** $a \neq 0$: $a^0 = 1$

2) **Potęga o wykładniku ujemnym dla** $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3) **Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim dla** $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4) **Potęga o wykładniku wymiernym ujemnym dla** $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

ZADANIA

1.5.1 Oblicz:

a) $\sqrt{0,25}$ b) $\sqrt{2,56}$ c) $\sqrt{0,0144}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt{\frac{100}{169}}$ f) $\sqrt{2025}$ g) $\sqrt{5929}$

Odpowiedź: a) 0,5; b) 1,6; c) 0,12; d) –2; e) $\frac{10}{13}$; f) 45; g) 77

1.5.2 Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{500}$ b) $\sqrt{3,84}$ c) $\sqrt{2x^4}$ d) $\sqrt{16x^3y}$

e) $\sqrt{24x^8}$ f) $\sqrt{30xy^6}$ g) $\sqrt[3]{\frac{10000x}{a^3}}$ h) $\sqrt[3]{64a^4}$

Odpowiedź: a) $10\sqrt{5}$; b) $0,8\sqrt{6}$; c) $x^2\sqrt{2}$; d) $4x\sqrt{xy}$; e) $2x^4\sqrt{6}$; f) $y^3\sqrt{30x}$; g) $\frac{10}{a}\sqrt[3]{10x}$; h) $4a\sqrt[3]{a}$

1.5.3 Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $3\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{13}$ c) $0,1\sqrt{37}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{23}$

e) $0,2\sqrt{21}$ f) $4\sqrt[3]{33}$ g) $3\sqrt[4]{6}$ h) $4\sqrt[5]{15}$

Odpowiedź: a) $\sqrt{63}$; b) $\sqrt{468}$; c) $\sqrt{0,37}$; d) $\sqrt[3]{\frac{184}{27}}$; e) $\sqrt{\frac{21}{100}}$; f) $\sqrt[3]{2112}$; g) $\sqrt[4]{486}$; h) $\sqrt[5]{15360}$

1.5.4 Oblicz, stosując prawa działań na pierwiastkach:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ d) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

Odpowiedź: a) 4; b) 5; c) 4; d) 5

1.5.5 Oblicz:

a) $\sqrt{0,81}$ b) $\sqrt{(12,34)^2}$ c) $\left(\sqrt{28,16}\right)^2$ d) $\sqrt{3^2+4^2}$

e) $\sqrt{3^2\cdot 4^2}$ f) $\sqrt{4^2-3^2}$ g) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$

Odpowiedź: a) 0,9; b) 12,34; c) 28,16; d) 5; e) 12; f) $\sqrt{7}$; g) $\frac{13}{9}$

1.5.6 Wykonaj działania:

a) $\frac{3\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{25}}\cdot\sqrt[3]{81}$ b) $(\sqrt[3]{0,04}:\sqrt[3]{0,01})\cdot\sqrt[3]{0,001}$

c) $(\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}):\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{32}}:\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$

Odpowiedź: a) $-\frac{27\sqrt{3}}{5}$; b) $\sqrt[3]{0,004}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

1.5.7 Ustaw następujące liczby w porządku rosnącym:

a) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{18}$ b) $\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[15]{30}$

c) $\sqrt[5]{4}, \sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}, \sqrt[10]{25}$ d) $\sqrt[16]{64}, \sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}, \sqrt[4]{2\sqrt{1,25}}$

Odpowiedź: a) $\sqrt[3]{4}<\sqrt[6]{18}<\sqrt{3}$; b) $\sqrt[5]{3}<\sqrt[15]{30}<\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}<\sqrt[5]{4}<\sqrt[10]{25}$;
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{1,25}}<\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}<\sqrt[16]{64}$

1.5.8 Zapisz liczby w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\sqrt[3]{9:\sqrt[3]{27}}$

Odpowiedź: a) $3^{-\frac{3}{5}}$; b) $2^{\frac{3}{4}}$; c) $3^{\frac{1}{3}}$; d) $2^{\frac{12}{5}}$; e) $3^{\frac{1}{6}}$; f) $2^{\frac{1}{4}}$

Ciekawostka

Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir, gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go wszystkim, czego zapragnie, zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno ziarenko złożone na pierwszym polu. Władca Indii nie był w stanie takiego honorarium uiścić. Owa zapłata to suma szeregu złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co daje: 18 446 774 073 709 551 615 ziaren. Aby osiągnąć taką ilość zboża, należałoby zasiać całą ziemię kilkakrotnie i zebrać żniwo. I tak oto okazało się, że władca nie wszystkim może obdarować wynalazcę[10].

1.6 Przybliżenia liczbowe

Teraz nauczę się:

- Obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Na co dzień często korzystamy z przybliżeń liczbowych, np. uczeń obliczając średnią swoich ocen z przedmiotów, stosuje zaokrąglenie do części setnych, podatnik rozliczając się z urzędem skarbowym również przybliża liczbę do dwóch miejsc po przecinku (do groszy).

Podczas zaokrąglania liczb, gdy otrzymujemy wartość przybliżoną, **liczba ulega zmniejszeniu lub zwiększeniu.** Zależy to od tego, czy nie zmieniamy ostatniej pozostawionej cyfry, czy zwiększamy ją o jeden. W związku z tym wyróżniamy przybliżenia:

z nadmiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o jeden.

Przykład 1[11]

Zaokrąglamy liczbę 12,399367 do pierwszego miejsca po przecinku.

$12{,}399367 \approx 12{,}4$

Podczas zaokrąglania do pierwszego miejsca po przecinku, stojącą w tym miejscu cyfrę (3) musieliśmy zwiększyć o jeden, bo następna cyfra jest większa od 5 (9). W efekcie liczba uległa zwiększeniu.

z niedomiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, ostatnia pozostawiona cyfra nie zmienia się.

Przykład 2[12]

$6{,}963902 \approx 6{,}96$

Podczas zaokrąglania do drugiego miejsca po przecinku, stojąca w tym miejscu cyfra (6), nie zmienia się, bo znajdująca się po niej cyfra jest mniejsza od 5 (3). W efekcie liczba uległa zmniejszeniu o „obciętą" wartość.

Błędy przybliżenia powstają podcza obliczeń jako różnica między dokładną wartością a liczbą użytą w obliczeniach, np. $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ błąd przybliżenia to $1{,}7 - \sqrt{3}$. Pojawiają się na skutek błędów wartości pomiarowych, np. odczytując długość odcinka porównujemy go z podziałką na linijce i niedokładnie przykładamy linijkę, błędnie odczytamy wynik pomiaru lub przyrząd pomiarowy jest niedoskonały. Dokładne wyliczenie jakiejś wartości nie jest możliwe ze względów obliczeniowych. Błędów pomiarowych nie da się zupełnie wyeliminować, ale można je ograniczyć do minimum, np. stosując coraz dokładniejsze przyrządy.

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń:

x – dana liczba

Δx – przybliżenie liczby

błąd bezwzględny – obliczamy jako wartość bezwzględną z różnicy przybliżenia i danej liczby. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$B = |\Delta x - x|$$

11 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013
12 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013

- błąd względny – obliczamy jako stosunek błędu bezwzględnego do wartości zmierzonej i wyrażamy w procentach, pokazuje on jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką obniżyliśmy lub powiększyliśmy liczbę:

$$W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\%$$

Przykład 3

Zaokrąglij liczbę 12,647890 do części setnych i określ błąd względny i bezwzględny przybliżenia.

12,647890 ≈ **12,65**

- Błąd bezwzględny: $B = |\Delta x - x| = |12{,}65 - 12{,}647890| = |-0{,}00211| = 0{,}00211$
- Błąd względny: $W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\% = \frac{0{,}00211}{12{,}647890} \cdot 100\% = 0{,}0001668 \cdot 100\% = 0{,}01\%$

Ciekawostka

Liczba π (czytaj: **liczba pi**), **ludolfina** – jest to liczba niewymierna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy lub polu koła o promieniu równym 1.

Liczba π z dokładnością do 200 miejsc po przecinku:

π =3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955 0582231725359408128 48111745028410270193 852110555964462294895493038196...

Światowy potwierdzony rekord w zapamiętywaniu ciągu cyfr liczby π należy aktualnie do Japończyka Akiry Haraguchi, który podał ją z dokładnością do 100 tysięcy miejsc po przecinku bijąc własny rekord z roku 1995[13].

ZADANIA

1.6.1 Podaj przybliżenie liczby π z dokładnością do:

a) części setnych b) części tysięcznych

c) dziesięciu miejsc po przecinku d) jedności

Jak nazywamy to przybliżenie?

Odpowiedź:

a) 3,14 z niedomiarem; b) 3,142 z nadmiarem; c) 3,14159 26536 z nadmiarem; d) z niedomiarem

13 www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi, 04.03.2013

1.6.2 Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd względny i bezwzględny swojego przybliżenia:

a) $45{,}673 : 4$ b) $2{,}384 + 21{,}287$ c) $6 \cdot 3{,}563 - 2{,}12$

d) $44{,}11 - 3 \cdot 6{,}72$ e) $128{,}69 \cdot 2 + 301{,}25$ f) $268{,}9 : 26{,}6 + 243{,}2 : 5{,}1$

1.6.3 Oblicz błąd względny i bezwzględny (z dokładnością do 0,01%), który popełniono przybliżając liczbę a liczbą b.

a) a = 19,458; b = 19,46 b) a = 20,458; b = 20,5

c) a = 17,458; b = 17 d) a = 19,458; b = 20

e) a = 98,5 cm, b = 1m f) a = 4700 cm3, b = 5l

g) a = 372 min, b = 6h h) a=7806s, b=2h 10 min

Odpowiedź:

a) B = 0,002; W = 0,01%, b) B = 0,042; W = 0,21%, c) B = 0,458; W = 2,62%,

d) B = 0,542; W = 2,79%, e) B = 1m – 98,5 cm = 1,5 cm; W = 1,5:98,5×100 = 1,52%,

f) 5 litrów = 5 dm^3 – 4700 cm^3, 1dm^3 = 1000 cm^3, 5dm^3 = 5000 cm^3,

B = 5000 cm^3 – 4700 cm^3 = 300 cm^3; W = 300:4700 × 100 = 6,38%,

g) 6h = 360 minut, B = 372 – 360 = 12; W = 12:372 × 100 = 3,23%,

h) 2h 10 minut = 7200 s + 600 = 7800 s,

B = 7806 – 7800 = 6; W = 6:7806 × 100 = 0,08%

Ciekawostka

Różne komputerowe operacje arytmetyczne wykonywane na liczbach mogą powodować nieoczekiwane wyniki, gdy wynik obliczeń przekracza dopuszczalny zakres danych. Możemy tutaj wyróżnić dwie sytuacje:

Nadmiar – „przekręcenie licznika" w grach komputerowych, gdy ktoś zdobędzie zbyt dużo punktów

Niedomiar – liczba jest tak mała, że nie może zostać dokładnie zaokrąglona do zera

ZADANIE DLA CHĘTNYCH:

Napisz program, który obliczy:

a) $10^{40} \cdot 10^{40} =$….

b) $10^{-40} - 10^{-41} =$….

Jaki jest wynik działania programu? Czy jest zgodny z twoimi matematycznymi obliczeniami?

Algorytmy, które charakteryzują się kumulowaniem błędów, nazywamy niestabilnymi.

1.7. Obliczenia procentowe

Teraz nauczę się:

Wykonywać obliczenia procentowe.

Procent

Słowo **procent** pochodzi z łacińskiego od *per centum*, „przez sto" i oznacza sposób wyrażenia liczby jako ułamka o mianowniku 100 i oznaczamy symbolem %[14].

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Przykład 1

$$23\% = \frac{23}{100}$$

Procenty umożliwiają wyrażenie danej wielkości w stosunku do innej, przy czym pierwsza wielkość oznacza zwykle część lub zmianę w drugiej.

14 www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent, 06.03.2013.

Przykład 2

Obliczyć 4,5% liczby 6.

$4{,}5\% \cdot\ 6 = \frac{4{,}5}{100} \cdot\ 6 = 0{,}27$

Przykład 3

Liczbę 50 zwiększyć o 10%.

$50 + 10\% \cdot 50 = 50 + 0{,}1 \cdot 50 = 55$

Przykład 4

Cena zeszytu wynosi 3,50 zł. Oblicz jego cenę po podwyżce o 1,5%.

$3{,}50 + \frac{1{,}5}{100} \cdot 3{,}50 \approx 3{,}55$ zł

Przykład 5

Znajdź liczbę, której $33\frac{2}{3}\%$ jest równe 6.

$33\frac{1}{3}\% \cdot x = 6$

$\frac{\frac{100}{3}}{100} \cdot x = 6$

$x = 18$

Przykład 6

Oblicz, jakim procentem liczby 90 jest liczba 15.

$p\% \cdot 90 = 15$

$p\% = \frac{15}{90} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$

Przykład 7

Cena kurtki wynosi 120 zł.

a) Oblicz jej cenę po dwukrotnej obniżce o 30%.

$120 - 30\% \cdot 120 = 120 - 0{,}3 \cdot 120 = 84$

$84 - 30\% \cdot 84 = 84 - 0{,}3 \cdot 84 = 58{,}80$ zł

b) Oblicz cenę kurtki przy obniżce jednokrotnej o 60%.

$120 - 60\% \cdot 120 = 48$ zł

Punkt procentowy – to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości wyrażonymi w procentach.

Przykład 8

Frekwencja klasy Ib w I semestrze wyniosła 88%, a w drugim 92%. Mówimy, że frekwencja wzrosła o 4 punkty procentowe.

W zadaniach pomijamy podatek Belki, który został wprowadzony 01.12.2001 r.

Przykład 9

Jaś chciał w lipcu 2001 r. wpłacić do banku zaoszczędzone przez siebie pieniądze – 3000 zł, z oprocentowaniem 6% w skali roku, ale nie mógł się zdecydować na rodzaj lokaty.

Miał do wyboru lokatę:

a) roczną b) kwartalną c) półroczną d) miesięczną

Oblicz, ile odsetek po roku zostanie naliczonych Jasiowi w każdym przypadku. Którą lokatę powinien wybrać?

Odpowiedź:

a) 6% z 3000 zł = 180 zł

b) $\frac{3}{12}\cdot$ 6% z 3000 zł = 45 zł

c) $\frac{1}{2}\cdot$ 6% z 3000 zł = 90 zł

d) $\frac{1}{12}\cdot$ 6% z 3000 zł = 15 zł

Przykład 10[15]

Ania wpłaciła na lokatę 2000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 3,5% w skali 2 lat (24 miesięcy, a czas zapadalności[16] dokładnie 3 lata (36 miesięcy). Ile odsetek naliczy jej bank? Jaką kwotę będzie miała po 3 latach na swoim koncie?

Najpierw obliczamy odsetki:

$$\frac{36}{24}\cdot 3{,}5\% \cdot 2000 = \frac{36}{24}\cdot\frac{3{,}5}{100}\cdot 2000 = 105 \text{ zł}$$

Kwota końcowa to: $2000\ zł + 105\ zł = 2105\ zł$

Przykład 11

Kasia wpłaciła na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku kwotę 1000 zł. W dniu zapadalności bank naliczył jej 20 zł odsetek. Na ile miesięcy Kasia założyła tę lokatę?

Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{x}{12}\cdot\frac{5}{100}\cdot 1000 = 20{,}83$$

$x = 5$ miesięcy

ZADANIA

1.7.1 Oblicz:

a) 4% liczby 85 b) $3\frac{1}{2}\%$ liczby $30\frac{1}{4}$ c) 112% liczby 80

d) $1{,}6\%$ liczby 1000 e) $0{,}3\%$ liczby 900 f) 150% liczby 27

Odpowiedź: a) $3{,}4$; b) $\frac{847}{800}$; c) $89\frac{3}{5}$; d) 16; e) $2{,}7$; f) $40\frac{1}{2}$

15 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

16 Czas zapadalności to czas trwania lokaty.

1.7.2 Cenę wycieczki obniżono o $p\%$. Wycieczka kosztuje obecnie x $zł$. Jaka była cena wycieczki przed obniżką?

Odpowiedź: $\frac{100a}{100-p}$ $zł$, $p < 100 \wedge p > 0$

1.7.3 Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a następnie nową cenę podwyższono o 30%. Czy cena końcowa jest taka sama jak początkowa? Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Końcowa cena stanowi 91% ceny początkowej.

1.7.4 Znajdź:

a) Liczbę, której 7% wynosi 56

b) Liczbę, której $0{,}2\%$ wynosi $2\frac{3}{5}$

c) Liczbę, której 112% wynosi $5{,}6$

d) Liczbę, której $0{,}25\%$ wynosi $0{,}3$

Odpowiedź: a) 800; b) 1300; c) 5; d) 120

1.7.5 Aby zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym, wystarczy otrzymać 30% możliwych do uzyskania punktów. Jaka minimalna liczba punktów gwarantuje zdanie egzaminu, gdy maksymalnie można otrzymać 50 pkt.

Odpowiedź: 15 punktów.

1.7.6 Tomek wpłacił na lokatę oprocentowaną 7% w skali roku kwotę 2135 zł. W dniu zapadalności bank naliczył mu 12,45 zł odsetek. Na ile miesięcy Tomek założył tę lokatę?

Odpowiedź: Na 1 miesiąc.

1.7.7 Wojtek wpłacił na lokatę czteromiesięczną z naliczaniem odsetek na zakończenie kwotę 1500 zł. Po upływie tego okresu bank naliczył mu 40 zł odsetek. Ile wynosiło oprocentowanie tej lokaty w skali roku?

Odpowiedź: 8%.

1.7.8 Przypuśćmy, że zakładasz lokatę na 5 miesięcy, jej oprocentowanie w skali roku wynosi 4,5%, a odsetki naliczane na zakończenie wyniosły 100 zł. Oblicz, jaką kwotę powinieneś wpłacić na tę lokatę.

Odpowiedź: 5333 zł.

1.7.9 Kasia wraz ze swoim mężem Piotrem miesięcznie na opłaty wydają 40% tego, co razem zarobią. Z tego, co pozostanie, 60% przeznaczają na zakup żywności dla siebie oraz swoich dzieci. Ile procent ich łącznych miesięcznych zarobków pochłaniają miesięczne wydatki?

Odpowiedź: 64%.

1.7.10 Pan Czesław w pierwszych 2 tygodniach poprzedniego miesiąca sprzedał 15% sprowadzonego do swojego sklepu towaru. W następnych 2 tygodniach sprzedał jeszcze 40% tego towaru, który pozostał. Jaki procent sprowadzonego towaru pozostał panu Czesławowi na koniec poprzedniego miesiąca?

Odpowiedź: 49%.

1.7.11 W 5 kolejnych sesjach giełdowych cena akcji firmy X na zamknięciu dnia osiągała następujący wynik procentowy: –6%, +15%, –3%, +5%, +2%. Oblicz, czy cena końcowa tej akcji jest wyższa, czy niższa od ceny pierwotnej i o ile procent.

Odpowiedź:

x – cena początkowa, y – cena końcowa

$x \cdot 94\% \cdot 115\% \cdot 97\% \cdot 105\% \cdot 102\% = y$

$x \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}97 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}02 = 1{,}12$

$x \cdot 1{,}12 = y$

Cena końcowa akcji jest wyższa od ceny początkowej o 12%.

1.7.12 Pracodawca zaproponował Kasi pensję w wysokości 3000 zł brutto i obiecał, że jeśli się sprawdzi na powierzonym stanowisku, to po roku jej pensję zwiększy o 3%, a w następnych latach o 1 p.p.[17] względem pensji sprzed roku. Jaką pensję otrzyma Kasia w czwartym roku pracy w tej firmie przy założeniu, że się sprawdzi na powierzonym stanowisku i nie zostanie zwolniona lub sama się nie zwolni?

Odpowiedź: w drugim roku: 3000 · 103% = 3090 zł, w trzecim roku: 3090 · 104% = 3214 zł, w czwartym roku: 3214 · 105% = 3374 zł.

➡ Punkt bazowy to inaczej punkt procentowy. Zamiast mówić, że różnica między np. 5,63% a 5,61% wynosi 0,02 p.p., możesz powiedzieć, że ta różnica wynosi 2 p.b.

1.7.13 Oblicz, ile punktów bazowych (p.b.) wynosi różnica pomiędzy podanymi procentami?

a) 18,45% i 18,32%

b) 34,86% i 34,12%

c) 88,06% i 87,04%

d) 56,2% i 53,05%

Odpowiedź: a) 13 p.b.; b) 74 p.b.; c) 102 p.b.; d) 315 p.b.

17 Skrót p.p. oznacza „punkty procentowe”.

Ciekawostka

Punktów bazowych często używa Rada Polityki Pieniężnej, czyli grupa ludzi odpowiedzialna za system finansowy całej Polski. Decyzje podjęte przez tę radę mają wpływ na wysokość lokat bankowych, oprocentowania kredytów i pożyczek oraz na stabilność ekonomiczną Polski. Przeciętny Polak nie spotyka się bezpośrednio z punktami bazowymi, ale odczuwa zmiany finansowe wyrażone w punktach bazowych, gdy np. pójdzie do banku.

Podatek Belki to automatycznie pobierana przez bank opłata od zysków kapitałowych. Został on wprowadzony 01.12.2001 przez Marka Belkę (stąd jego nazwa) – ówczesnego ministra finansów i dotyczył wyłącznie lokat oraz depozytów bankowych. Jego stawka wynosiła 20% naliczonych odsetek. W 2004 r. obniżono go do 19%, ale kosztem tego, że dodatkowo objęto nim inne zyski kapitałowe, np. pochodzące ze sprzedaży papierów wartościowych. Podatek Belki od 01.01.2004 do 31.12.2006 wyliczano mnożąc naliczone odsetki przez 19% i zaokrąglając otrzymany wynik do 1 grosza[18].

Wprowadzenie podatku Belki w 2001 r. spowodowało, że w bankowości pojawiły się 2 nowe terminy:

zysk brutto – naliczone odsetki bez potrącania podatku Belki

zysk netto – odsetki uzyskane po odjęciu zaokrąglonego podatku Belki do 1 grosza

1.7.14 Jako pracodawca sporządź listę płac w tabeli.

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%				
2	Belka	Robert	720 zł	5%				
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%				
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%				
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%				
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%				
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%				
8	Podkowa	Robert	1057,63	1%				
9	Sowa	Zofia	1046,4	1%				
10	Zys	Julia	1280	5%				

18 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

Odpowiedź:

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%	78,75 zł	953,75 zł	181,21 zł	772,50 zł
2	Belka	Robert	720 zł	5%	36,00 zł	756,00 zł	143,64 zł	612,36 zł
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%	118,40 zł	1 105,10 zł	209,97 zł	895,13 zł
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%	80,48 zł	1 086,48 zł	206,43 zł	880,05 zł
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%	30,00 zł	630,00 zł	119,70 zł	510,30 zł
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%	60,94 zł	1 279,69 zł	243,14 zł	1 036,55 zł
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%	111,60 zł	1 351,60 zł	256,80 zł	1 094,80 zł
8	Podkowa	Robert	875 zł	1%	105,76 zł	1 163,39 zł	221,04 zł	942,35 zł
9	Sowa	Zofia	720 zł	1%	104,64 zł	1 151,04 zł	218,70 zł	932,34 zł
10	Zys	Julia	986,7 zł	5%	64,00 zł	1 344,00 zł	255,36 zł	1 088,64 zł

1.7.15 Na podstawie poniższej tabeli:

a) oblicz wynagrodzenie netto pracownika,

b) oblicz, jaki procent wynagrodzenia brutto stanowi ubezpieczenie emerytalne, chorobowe, rentowe oraz ubezpieczenie zdrowotne,

c) oblicz, jaki procent całej pensji brutto stanowi podatek.

Wynagrodzenie brutto	3 000
Składki ZUS	
Ubezpieczenie emerytalne	292,80
Chorobowe	73,50
Rentowe	45,0
Razem składki ZUS	
Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne	2588,70
Ubezpieczenie zdrowotne	232,98
Koszty uzyskania przychodu	111,25
Podstawa opodatkowania	2477,45
Kwota zwolniona od podatku	46,33
Podatek	199,00
Pensja netto	

Odpowiedź:

a) Razem składki ZUS wyniosły 411,30, wynagrodzenie netto pracownika = wynagrodzenie brutto – składki ZUS – koszty uzyskania przychodu – ubezpieczenie zdrowotne – podatek = 1985,47 zł; b) 21,48%; c) 6,63%.

1.7.16 Oblicz wysokość wszystkich podstawowych składek społecznych (emerytalnej i rentowej – 6%, chorobowej i zdrowotnej – 9%), jakie zostaną odliczone z pensji Pana Kowalskiego, która wynosi 1700 zł brutto.

Odpowiedź: 225 zł.

1.7.17 Oceń, ile czteroosobowa rodzina osiągająca dochody netto w wysokości 6000 zł może przeznaczyć na miesięczną spłatę raty kredytu hipotecznego. W ocenie uwzględnij przeciętne miesięczne wydatki rodziny na opłaty, żywność itp. Następnie oblicz, na ile lat musiałaby ona zaciągnąć taki kredyt oprocentowany 7% w skali roku, aby zakupić mieszkanie o wartości 300 000zł.

1.7.18 Firma oferuje ratalną sprzedaż samochodu. Raty rozłożone są na 4 lata, przy czym miesięczna kwota spłaty wynosi 900 zł. Cena samochodu wynosi 30000 zł. Jakie oprocentowanie oferuje sprzedawca w skali miesięcznej i w skali roku?
Uwaga: Rozwiąż zadanie w arkuszu kalkulacyjnym (skorzystaj z funkcji FV).

Odpowiedź: miesięczna 1,6%, a roczna 19,2%.

1.7.19 Oblicz wartość podatku Belki oraz zysk netto zgodnie z ordynacją podatkową obowiązującą od 01.01.2007 do 30.03.2012, jeśli odsetki z lokaty wyniosły:

a) 25,72 zł b) 63,32 zł c) 122,75 zł d) 137,20 zł

Odpowiedź: a) odsetki: 25,72 zł, podstawa opodatkowania: 26 zł, podatek Belki: 4,94 zł, zaokrąglenie podatku: 5 zł, zysk netto: 20,72 zł; b) 51,32 zł; c) 99,75 zł; d) 111,20 zł.

Uwaga: Odsetki zaokrągla się do pełnych złotych i nazywa się tę zaokrągloną liczbę podstawą opodatkowania, z której oblicza się 19% podatku Belki; otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych złotych. Aby wyliczyć zysk netto z lokaty, trzeba od odsetek odjąć otrzymany wynik.

Ciekawostka

Banki, aby uniknąć podatku Belki, wprowadziły częstą kapitalizację odsetek. Obowiązujący obecnie system podatkowy sprawia, że od zysku poniżej 2,49 zł nie trzeba płacić podatku. Wszystko za sprawą zaokrągleń podstawy opodatkowania i samego podatku. Zgodnie z zapisami w ordynacji podatkowej odsetki w kwocie 2,49 zł należy zaokrąglić „w dół" do pełnej złotówki, czyli do 2 zł. Podatek od zysku w wysokości 2 zł wynosi 38 groszy. Tu także zaokrąglamy do pełnej złotówki, czyli do zera. W ten sposób od tak niewielkiego zysku z lokaty nie trzeba płacić podatku. Z tego też względu banki proponują lokaty z dzienną kapitalizacją odsetek. Niewielkie odsetki dopisywane są do salda lokaty codziennie i w ten sposób klient nie płaci 19 proc. podatku od zysku. Jeśli we wspomnianej wyżej lokacie zastosowalibyśmy mechanizm dziennej kapitalizacji, to zysk po roku wyniósłby 513 zł już bez podatku. W rezultacie oprocentowanie efektywne wspomnianej lokaty wyniesie 5,13%[19].

19 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

1.7.20 Jaką maksymalnie kwotę trzeba wpłacić na 2-miesięczną lokatę oprocentowaną 6,2% w skali roku, aby legalnie ominąć płacenie podatku Belki wyliczanego zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012?

Odpowiedź:

$\frac{2}{12} \cdot 6{,}2\% \cdot x = 2{,}495$

$x = 242{,}23$ zł

1.7.21 W 2007 roku pani Kasia założyła lokatę jednodniową oprocentowaną 3,8% w skali roku na kwotę 1600 zł. Oblicz, ile dziennie będzie dostawać odsetek od takiej kwoty? Czy uniknie podatku Belki?

Odpowiedź:

$\frac{1}{365} \cdot 3{,}8\% \cdot 1600$ zł $= 0{,}17$ zł $< 2{,}50$ zł. W tym roku uniknie podatku Belki.

1.7.22 Ile wyniosą odsetki od lokaty jednodniowej oprocentowanej 6,84% w skali roku założonej na kwotę 15000 zł w 2012 roku? Jaki będzie zysk netto z tej lokaty po 300 dniach, jeśli w międzyczasie bank nie zmieni oprocentowania?

Odpowiedź: Dokładnie 1,80 zł dziennie; 540 zł po 300 dniach.

1.7.23 W państwie A produkt PKB wzrasta co roku o 8%, a w państwie B o 6%. Po ilu latach w każdym z państw nastąpi potrojenie PKB?

Odpowiedź:

Wskazówka: mając kapitał k przy rocznej kapitalizacji odsetek p% w skali roku, po n latach kapitał wzrasta do $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

A – po 16 latach,

B – po 19 latach.

1.8 Przedziały liczbowe

Teraz nauczę się:

- Posługiwać pojęciem przedziału liczbowego,
- Zaznaczać przedziały na osi liczbowej.

Przedział – zbiór elementów danego zbioru częściowo uporządkowanego, zawartych między dwoma ustalonymi elementami tego zbioru, nazywanymi początkiem i końcem przedziału[20].

20 www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy, 26.02.2013

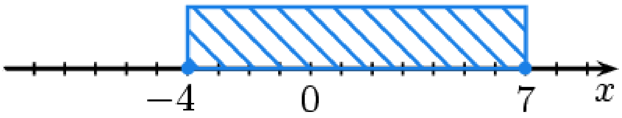
Oznaczenia przedziałów:

Przedziałem domkniętym $< a; b >$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$

$\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

Przykład 1

Przedział domknięty $< -4; 7 >$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



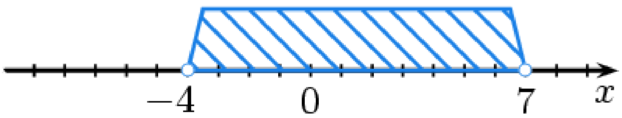
Rysunek 1-5 – Przedział domknięty

Przedziałem otwartym (a;b) o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a} < x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x < b\}$

Przykład 2

Przedział otwarty $(-4; 7)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



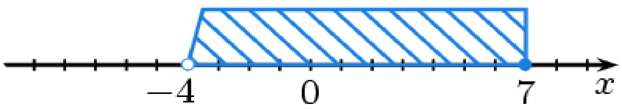
Rysunek 1-6 – Przedział otwarty

Przedziałem lewostronnie otwartym (prawostronnie domkniętym) $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x \leq b\}$

Przykład 3

Przedział lewostronnie otwarty $(-4; 7\rangle$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-7 – Przedział lewostronnie otwarty a prawostronnie domknięty

Przedziałem prawostronnie otwartym (lewostronnie domkniętym) $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ o końcach a i b (dla $\boldsymbol{a} < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} > = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < b\}$

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym $(\boldsymbol{a}; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych od a.

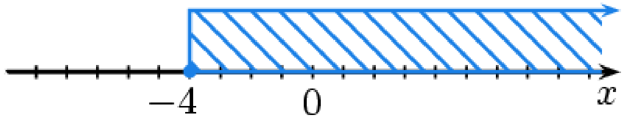
$(\boldsymbol{a}; +\infty) = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} > a\}$

Podobnie przedziałem lewostronnie domkniętym nieograniczonym $\langle \boldsymbol{a}; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych bądź równych a.

$(\boldsymbol{a}; +\infty) = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 5

Przedział $\langle 4; +\infty)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-8 – Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony

Przedziałem prawostronnie otwartym nieograniczonym $(-\infty;\ \boldsymbol{a})$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych od a.

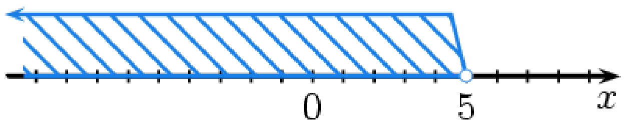
$(-\infty;\ \boldsymbol{a}) = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} < a\}$

Podobnie **przedziałem prawostronnie domkniętym nieograniczonym** $(-\infty;\ \boldsymbol{a}\rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych bądź równych a.

$(-\infty;\ \boldsymbol{a} > = \{ x \in R: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 6

Przedział $(-\infty;\ 5)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



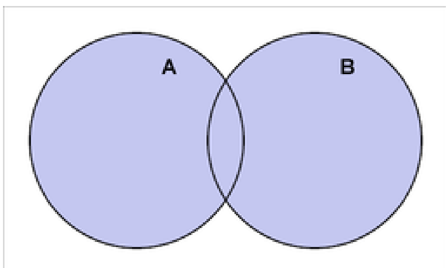
Rysunek 1-9 – Przedział prawostronnie otwarty nieograniczony

Ponieważ przedział jest zbiorem, więc możemy wyznaczać między innymi sumę, iloczyn czy też różnicę przedziałów.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Sumą zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B, matematycznie zapisujemy ją tak: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



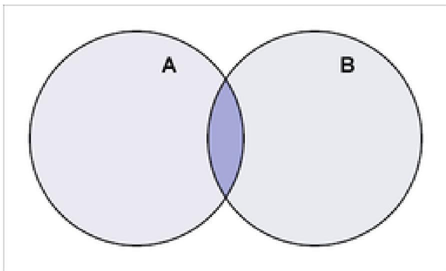
Rysunek 1-10 – Suma zbiorów

Przykład 7

Jeżeli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. Pomimo tego, że 1 występuje w obydwu zbiorach, w sumie tych zbiorów występuje tylko jeden raz.

Iloczynem, czyli częścią wspólną zbioru *A* i ***B*** nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru *A* i do zbioru *B*, formalnie zapisujemy ją tak: $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



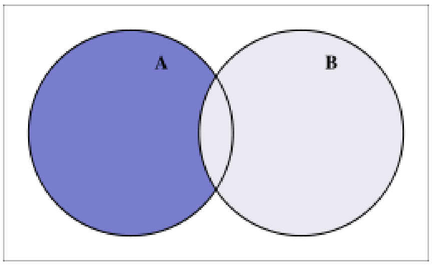
Rysunek 1-11 – Iloczyn zbiorów

Przykład 8

Jeśli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \cap B = \{1\}$. Liczba 1 jest jedynym wspólnym elementem tych zbiorów.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A*, a które nie należą do zbioru *B*, możemy ją zapisać tak: $A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$.

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-12 – Różnica zbiorów

Przykład 9

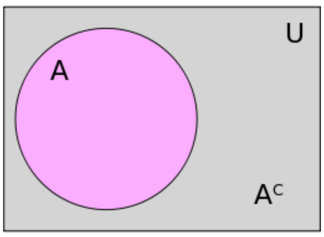
Jeśli $A = \{1,2,5\}$ i $B = \{1,3,4\}$, to $A \backslash B = \{2,5\}$. Jedynym wspólnym elementem obydwu zbiorów jest liczba 1, więc otrzymany zbiór będzie bardzo podobny do zbioru *A*, lecz nie posiadający liczby 1.

Dopełnieniem zbioru *A* z przestrzeni *U* nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni *U*, które nie należą do zbioru *A*. Dopełnienie zbioru *A* oznaczamy jako A'.

$A' = U \backslash A$

$A' = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-13 – Dopełnienie zbiorów

Przykład 10

Jeśli $A = \{1,2,3\}$, a przestrzenią *U* jest zbiór wszystkich liczby całkowitych dodatnich, to dopełnieniem zbioru *A* będzie zbiór $A' = \{4,5,6,7,8, \dots\}$.

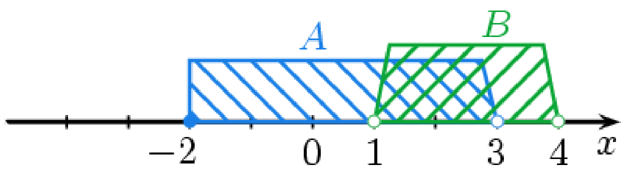
Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zauważmy, że: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}$ oraz $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}' = \emptyset$

Przykład 11`

Wyznaczmy $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, A', B'$, gdzie $A = [-2; 3), B = (1; 4)$.

Zaznaczmy najpierw oba przedziały na osi liczbowej:



Z rysunku widzimy, że:

- $A \cup B = [-2;\ 4)$
- $A \cap B = (1;\ 3)$
- $A \backslash B = [-2;\ 1]$
- $B \backslash A = [3;\ 4)$
- $A' = (-\infty;\ -2) \cup [3;\ +\infty)$
- $B' = (-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$

Własności działań na zbiorach

- Dla dowolnych zbiorów *A, B, C* zachodzą prawa:
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – I prawo De Morgana
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – II prawo De Morgana
- $A \cup B = B \cup A$ – przemienność dodawania zbiorów
- $A \cap B = B \cap A$ – przemienność mnożenia zbiorów
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – łączność dodawania zbiorów
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – łączność mnożenia zbiorów
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania

Przykład 12

Mamy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{3, 5, 9\}$. Obliczyć $D = A \cap (B \cup C)$.

$D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 9\}) =$
$= (\{1, 3\} \cup \{3\}) = \{1, 3\}$

ZADANIA

1.8.1 Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały:

a) $(-2; 5)$ b) $\langle -\infty;\ 3)$ c) $\langle 0; 6\rangle$

d) $\{2,3,4,5\}$ e) $(-\infty;\ -3)$ f) $(-5;\ 1\rangle$

g) $\langle -7; 5\rangle$ h) $\langle 0;\ 4)$ i) $\langle -2;\ +\infty)$

1.8.2 Wyznacz zbiory:

a) N∪W b) $R \cup NW$ c) N ∪ R d) $N\ \cup C$

e) C ∩ W f) $C\ \cap N$ g) $NW\ \cap C$ h) R ∩ C

i) C \ W j) R \ W k) N \ NW

Odpowiedź:

a) W; b) R; c) R; d) C; e) C; f) N; g) Ø; h) C; i) Ø; j) NW; k) N.

1.8.3 Podaj wszystkie liczby całkowite, które należą do przedziału:

a) $\left\langle -\frac{1}{2}; 6\right)$ b) $(-5;\ \pi)$ c) $\langle 0; 2\rangle$ d) $\langle -\pi;\ \pi\rangle$

Odpowiedź:

a) $\{0,1,2,3,4,5\}$, b) $\{0,1,2,3\}$, c) $\{0,1,2\}$, d) $\{0,1,2,3\}$.

1.8.4 Zaznacz na osi liczbowej zbiór A′ wiedząc, że:

a) $A = (-3; 7\rangle$ b) $A =\ (-\infty;\ 5)$ c) $A = \langle 2; 6\rangle$

d) $A = (-\infty; 4)\ \cup\ (6; 12\rangle$ e) $A = (-5; +\infty)$

Odpowiedź:

a) $(-\infty; -3\rangle \cup\ (7; +\infty)$; b) $\langle 5; +\infty)$; c) $(-\infty; 2)\ \cup\ (6; +\infty)$;

d) $\langle 4; 6\rangle \cup\ (12; +\infty)$; e) $(-\infty; 5)$

1.8.5 Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: A ∩ B, A ∪ B, A\B, B\A:

a) $A =\ (-3;\ 5),\ \ B =\ \langle -1;\ 8\rangle$ b) $A =\ \langle -4;\ 6),\ \ B =\ \langle 5;\ +\infty)$

c) $A =\ (-4;\ 1),\ \ B =\ (0;\ 2\rangle$ d) $A =\ (-\infty;\ 3),\ \ B =\ \langle 1;\ 4\rangle$

e) $A = (-\infty;\ 5\rangle\ \ B =\ (-2; 2)$

Odpowiedź:

a) $A \cap B = \langle -1;\ 5), A \cup B = (-3;\ 8\rangle, A \backslash B = (-3;\ -1), B \backslash A = \langle 5;\ 8\rangle$

b) $A \cap B = \langle 5;\ 6), A \cup B = \langle -4;\ +\infty), A \backslash B = \langle -4; 5), B \backslash A = \langle 6;\ +\infty)$

c) $A \cap B = (0;\ 1), A \cup B = (-4;\ 2\rangle, A \backslash B = (-4;\ 0\rangle, B \backslash A = \langle 2;\ 2\rangle$

d) $A \cap B = \langle 1;\ 3), A \cup B = (-\infty;\ 4\rangle, A \backslash B = (-\infty;\ 1), B \backslash A = \langle 3;\ 4\rangle$

e) $A \cap B = (-2;\ 2), A \cup B = (-\infty;\ 5\rangle, A \backslash B = (-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 2; 5\rangle, B \backslash A = \emptyset$

1.8.6 Niech $A = \langle -3; 5\rangle, B = (-6; 7), C = (-\infty;\ 4\rangle$. Wyznacz następujące zbiory i zilustruj je na osi liczbowej:

a) $A \cap B$ b) $A \backslash B$ c) C \ A d) B \ C

e) $(A \cup B) \backslash C$ f) $A' \cap C$ g) $C \cap (A \cup B)'$

Odpowiedź: a) $\langle -3; 5\rangle$; b) Ø; c) (–∞; 3); d) 4;7); e) (4;7); f) (–∞;3); g) $(-\infty;\ 4\rangle$.

1.8.7 Mając dane zbiory A i B, zaznacz na osi liczbowej zbiory: A', B', A' ∩ B' oraz A' ∪ B'.

a) $A = (-\infty;\ 3), B = (4;\ +\infty)$

b) $A = (-\infty;\ -5) \cup\ (4; 6), B = \langle 2; 7\rangle$

c) $A = (0;\ 2\rangle \cup\ (6; +\infty), B = (-5; 8\rangle$

d) $A = \langle 2; 4\rangle, B = (1; +\infty)$

e) $A = (-\infty;\ -3) \cup \langle 1; 2\rangle, B = (0; 4)$

Odpowiedź:

a) $A' = \langle 3; +\infty), B' = (-\infty; 4\rangle, A' \cap B' = \langle 3; 4\rangle, A' \cup B' = R$

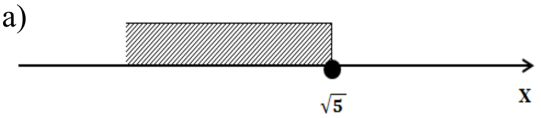
b) $A' = \langle -5; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty), B' = (-\infty; 2) \cup (7; +\infty),$
$A' \cap B' = \langle -5;\ 2) \cup (7; +\infty), A' \cup B' = (-\infty; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty)$

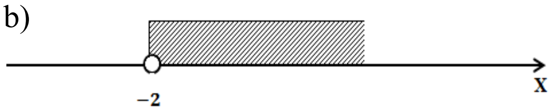
c) $A' = (-\infty; 0\rangle \cup (2; 6\rangle, B' = (-\infty; -5\rangle \cup (8; +\infty), A' \cap B' = (-\infty;\ -5\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty;\ 0\rangle \cup (2; 6\rangle \cup (8; +\infty)$

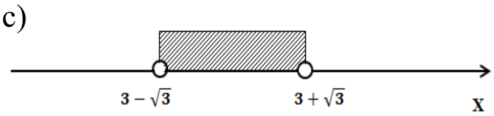
d) $A' = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), B' = (-\infty; 1\rangle, A' \cap B' = (-\infty; 1\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

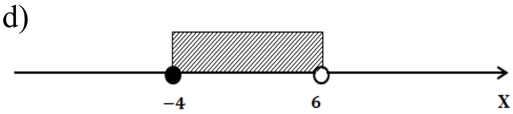
e) $A' = \langle -3; 1) \cup (2;\ +\infty), B' = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty), A' \cap B' = \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty)$
$A' \cup B' = (-\infty; 1) \cup (2, +\infty)$

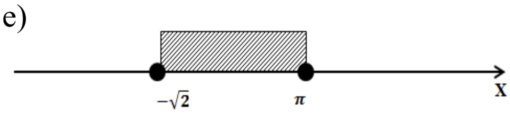
1.8.8 Zapisz w postaci nierówności i przedziału liczbowego zbiór liczb zaznaczonych na osi liczbowej:

a)


b)


c)


d)


e)


Odpowiedź:

a) $x \leq \sqrt{5},\ x \in \left(-\infty;\ \sqrt{5}\right\rangle$

b) $x > -2, \quad x \in (-2;\ +\infty)$

c) $3+\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3}, \quad x \in \left(3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3}\right)$

d) $-4 \leq x < 6, \quad x \in \langle -4;\ 6)$

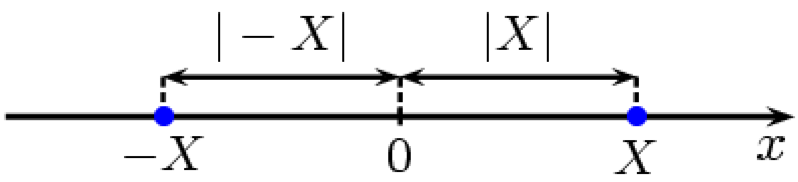
e) $-\sqrt{2} \leq x \leq \pi, \quad x \in \langle -\sqrt{2};\ \pi\rangle$

1.9 Wartość bezwzględna*

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną,
- Zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| < b$, $|x - a| = b$, $|x - a| \geq b$.

Wartość bezwzględna liczby[21] nazywana też modułem lub wartością absolutną liczby, jest to odległość na osi liczbowej od danej liczby do zera.



Rysunek 1-14 – Wartość bezwzględna

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

21 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna, 10.03.2013.

Przykład 1

Wartość bezwzględna z liczby dodatniej to ta sama liczba

$|4| = 4$

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna

$|-5| = 5$

Aby rozwiązać równanie $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \boldsymbol{b}$, należy znaleźć liczby, których odległość od liczby a jest równa b.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|2x - 3| = 5$

Rzpatrujemy dwa przypadki:

$2x - 3 = 5, \quad \vee \ 2x - 3 = -5$

Otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_1 = 4$ lub $x_2 = -1$.

Własności wartości bezwzględnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *x* i *y* zachodzą poniższe własności:

$$|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$$

$$|\boldsymbol{x}| = |-\boldsymbol{x}|$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2}$$

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right| = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{y}|}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystać następujące własności:

$$|x| < a \iff -a < x < a \iff (x > -a \wedge x < a)$$

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \iff (x \geqslant -a \wedge x \leqslant a)$$

$$|x| > a \iff (x < -a \vee x > a)$$

$$|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a \vee x \geqslant a)$$

Przykład 3

Rozwiążmy nierówność $|x + 5| \leq 10$, wykorzystując własność $|x| \leq a$ otrzymujemy:

$x \geq -a \wedge x \leq a$, gdzie zamiast x postawiamy x+5, a zamiast a liczbę 10 otrzymujemy:

$x + 5 \geq -10 \wedge x + 5 \leq 10$, stąd

$x \geq -15 \wedge x \leq 5$, co ostatecznie zapisujemy za pomocą przedziału $x \in \langle -15; 15 \rangle$.

Przykład 4

Nierówności z wartością bezwzględną możemy zapisać za pomocą przedziałów:

a) $|x| \leq b$, czyli $x \in \langle -b; b\rangle$

b) $|x| < b$, czyli $x \in (-b; b)$

c) $|x| > b$, czyli $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$

d) $|x| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; -b\rangle \cup \langle b; +\infty)$

e) $|x - a| < b$, czyli przedział o środku w punkcie a i długości b, $x \in (a - b; a + b)$

f) $|x - a| \leq b$, czyli $x \in \langle a - b; a + b\rangle$

g) $|x - a| > b$, czyli $x \in (-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)$

h) $|x - a| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; a - b\rangle \cup \langle a + b; +\infty)$

ZADANIA

1.9.1 Oblicz:

a) $|-34,5| + |34,5|$

b) $|-2 - 34| - |12 - 15|$

c) $|-\sqrt{7-2}|$

d) $|2 - \sqrt{3}|$

e) $|-x^2|$

Odpowiedź: a) 69; b) 33; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$ –2 e) x^2

1.9.2 Rozwiąż równanie:

a) $|x - 5| = 7$

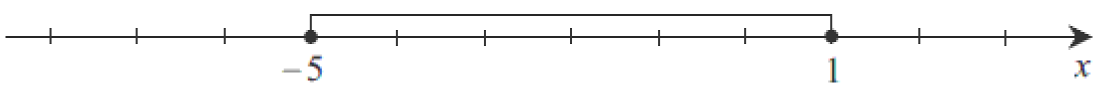
b) $|2x + 6| = 1$

c) $|3x - 3| = 1$

d) $|-x + 1| = 2$

Odpowiedź: a) 12 i –2; b) –2,5 i –3,5; c) $\frac{2}{3}$ i $1\frac{1}{3}$; d) –1 i 3.

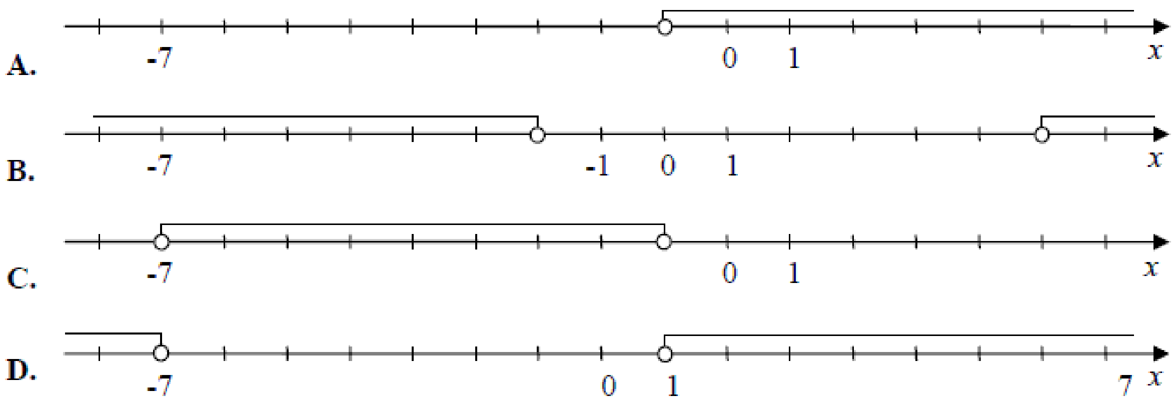
1.9.3 Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej:



A. $|x + 2| \leq 3$ B. $|x - 2| \leq 3$ C. $|x - 3| \leq 2$ D. $|x + 3| \leq 2$

Odpowiedź: D

1.9.4 Wskaż, który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 3| > 4$?



Odpowiedź: D.

1.9.5 Zapisz za pomocą przedziału liczbowego i zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $|x - 5| \geq 3$ b) $|x - 2| < 4$ c) $|x + 1| > 3$

d) $|x + 3| \geq 2$ e) $2 < |x| < 5$ f) $1 \leq |x| \leq 4$

g) $|5 + x| \leq 1$ h) $|2 + x| < 3$

Odpowiedź: a) $(-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 8; +\infty)$; b) $(-2; 6)$; c) $(-\infty;\ -4) \cup (2; +\infty)$; d) $(-\infty;\ -5\rangle \cup \langle -1; +\infty)$; e) $(-5; -2) \cup (2; 5)$; f) $\langle -4; -1) \cup (1; 4\rangle$; h) $\langle -6; -4\rangle$.

1.10 Logarytmy

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać definicję logarytmu i stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Dawniej logarytmy używane były do szybkiego mnożenia liczb za pomocą *tablic logarytmicznych*, które były podstawową pomocą do obliczeń naukowych, geodezyjnych, astronomicznych i inżynierskich. Dzisiaj zastąpiły je kalkulatory i komputery.

Logarytm zapisujemy następująco:

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a > 0$, $a \neq 0$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c = b$ (jest to potęga, do jakiej należy podnieść „a", aby otrzymać „b").

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x$$

Z definicji wynika, że dla $b > 0$ mamy $b = a^{\log_a b}$

Przykład 1

$\log_2 8 = 3 \qquad bo: 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \qquad bo: 3^4 = 81$

$\log_a a = 1$ **Jeżeli podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są takie same, to wynik logarytmowania zawsze wynosi 1.**

bo: $a^1 = a$ (niezależnie od wartości „a”)

$\log_a 1 = 0$ **Jeżeli liczba logarytmowana wynosi 1, to wynik logarytmowania wynosi 0.**

bo: $a^0 = 1$

Przykład 2

$\log_6 6 = 1 \qquad bo: 6^1 = 6$

$\log_{15} 1 = 0 \qquad bo: 15^0 = 1$

Prawa działań na logarytmach:

1) Logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_b c$$

2) Logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

3) Inne prawa:

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \qquad \log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Przykład 3

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

$$\log_{16} 0{,}25 = -\log_{16} 4 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_7 \frac{63}{5} - \log_7 \frac{9}{5} = \log_7 \frac{\frac{63}{5}}{\frac{9}{5}} = \log_7 7 = 1$$

$$\frac{\log_7 32}{\log_7 8} = \frac{\log_7 2^5}{\log_7 2^3} = \frac{5\log_7 2}{3\log_7 2} = \frac{5}{3}$$

$$\log_2 3 \cdot \log_9 2 = \log_9 2^{\log_2 3} = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

Ciekawostka

Najczęściej używa się logarytmów dziesiętnych oraz logarytmów naturalnych, tj. o podstawach równych odpowiednio 10 i *e*.

Przy odwzorowaniu wielkości w skali logarytmicznej, używane są często specyficzne jednostki miary, właściwe dla danej dziedziny, np. bele (B) i decybele (dB) w elektronice i przetwarzaniu sygnałów czy nepery w akustyce[22].

Skale logarytmiczne są szeroko stosowane w nauce i technice dla odwzorowania wielkości, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, np.:

- Skala Richtera – do określania amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych.

Skutki trzęsienia ziemi w zależności od jego wielkości w skali Richtera:

Skala Richtera	Skutki	Średnia liczba trzęsień rocznie
< 2,0	Najmniejsze wstrząsy, nieodczuwalne przez człowieka ani przez sejsmograf.	ok. 2 920 000 (8000 dziennie)
2,0-3,4	Wstrząsy nieodczuwalne dla człowieka, lecz rejestrowane przez sejsmograf.	ok. 800 000
3,5-4,2	Bardzo małe wstrząsy, odczuwane tylko przez niektórych ludzi.	ok. 30 000
4,3-4,8	Odczuwane przez większość osób, nieszkodliwe.	ok. 4 800
4,9-5,4	Odczuwane przez wszystkich, powoduje bardzo niewielkie zniszczenia.	ok. 1 400
5,5-6,1	Średnie wstrząsy, powoduje mniejsze uszkodzenia budynków.	ok. 500
6,2-6,9	Duże wstrząsy, powodują znaczne zniszczenia.	ok. 100
7,0-7,3	Poważne zniszczenia.	ok. 15
7,4-8,0	Ogromne zniszczenia.	ok. 4
8,0-8,9	Ogromne zniszczenia, katastrofalne skutki dla wielu krajów.	ok. 1
≥ 9,0	Trzęsienie, które może zburzyć wszystkie miasta na terenie większym niż kilkanaście tysięcy km^2.	ok. raz na 20 lat

Tabela 1-1 – Skala Richtera

- Skala decybelowa – do określania poziomu wielkości elektrycznych i akustycznych.
- Skala pH – do określania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych.
- Interwały w muzyce.

22 www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna, 25.02.2013

- Skala entropii w termodynamice.
- Skala Krumbeina – dla określania wielkości ziaren w geologii.
- Skala wielkości gwiazdowych.
- Skala logarytmiczna jest w pewnych zastosowaniach skalą naturalną, ze względu na to, że zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat innych skal logarytmicznych lub innego zastosowania logarytmów.

ZADANIA

1.10.1 Oblicz $\log_3 b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 27 b) $\frac{3}{9}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[5]{81}$

Odpowiedź: a) 3; b) –1; c) –1; d) $\frac{4}{5}$.

1.10.2 Oblicz $\log_{\frac{1}{3}} b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 9 b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$

Odpowiedź: a) –2; b) 1; c) $-\frac{4}{3}$; d) $-\frac{2}{5}$.

1.10.3 Oblicz b, jeżeli $\log_2 b$ wynosi:

a) $\sqrt[4]{2}$ b) 4 c) -3 d) $0{,}125$ e) 1

Odpowiedź: a) $-\frac{7}{4}$; b) 16; c) $2^{2^{\frac{1}{4}}}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 2.

1.10.4 Oblicz b, jeżeli $\log_{\frac{1}{2}} b$ wynosi:

a) $0{,}125$ b) $0{,}25$ c) 64 d) $\frac{1}{16}$

Odpowiedź: a) 3; b) 2; c) –5; d) 4.

1.10.5 Oblicz:

a) $\log_4 16$ b) $\log_3 \sqrt[3]{3}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{4}$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{8}{2})2$

e) $\log_{\frac{3}{5}}(\frac{18}{50})3$ f) $3\log_{2,5}\frac{2}{5}$ g) $\log_{\frac{1}{3}}(64)-1$ h) $\log_2(\frac{1}{64})^{-2}$

i) $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ j) $2\log_{\frac{1}{3}} 9$

Odpowiedź: a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{2}{3}$; d) –4; e) 6; f) –3; g) 2; h) 12; i) –6; j) –4.

1.10.6 Oblicz, stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_2 4 + 2\log_3 1$　　b) $(\log_5 5 - \log_5 125)^3$　　c) $2\log_3 27 - \log_3 81$

d) $\log_2 4 + 2\log_2 1$　　e) $\log_3 21 - \log_3 7$　　f) $\log_5 10 + \log_5 24{,}3$

g) $\log_4 2 + \log_4 32$　　h) $\log_4 8 + \log_4 2$

Odpowiedź: a) 2;　b) –1;　c) 9;　d) 2;　e) 1;　f) 5;　g) 3;　h) 2.

1.10.7 Oblicz podstawę logarytmu wiedząc, że:

a) $\log_a 25 = 4$　　b) $\log_a 0{,}01 = 3$　　c) $\log_a 27 = 3$

d) $\log_a \frac{1}{27} = 2$　　e) $\log_a \frac{3}{18} = 4$

Odpowiedź: a) $\sqrt[4]{25}$;　b) $\sqrt[3]{0{,}01}$;　c) 3;　d) $\sqrt{27}$;　e) $\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

1.10.8 Oblicz:

a) $\log_3 (2 - (\log_4 \sqrt{4}) \cdot \log_{\sqrt{4}} \frac{1}{4})$　　b) $\log_3 9 \cdot \log_4 16 \cdot \log_5 25 + 1$

c) – log3log2log2256　　d) –log3log4$\sqrt[5]{\sqrt[4]{4}}$

Odpowiedź: a) 1;　b) 9;　c) –1;　d) 2.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Na seans filmowy sprzedano 280 biletów. W tym 126 ulgowych. Jaki procent sprzedanych biletów stanowły bilety ulgowe?[23]

a) 22%　　b) 33%　　c) 45%　　d) 63%

2. 6% liczby x jest równe 9. Wtedy:

a) $x = 240$　　b) $x = 150$　　c) $x = 24$　　d) $x = 15$

3. Iloraz $32^{-27} \div \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy:

a) 2^{-27}　　b) 2^{-3}　　c) 2^3　　d) 2^{27}

4. O liczbie x wiadomo, że $\log_3 x = 9$. Zatem:

a) $x = 2$　　b) $x = \frac{1}{2}$　　c) $x = 3^9$　　d) $x = 9^3$

5. Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?[24]

a) 163,80　　b) 180　　c) 294　　d) 420

23 Zadania: 1, 2, 3, 4 zaczerpnięte z CKE, Próbna matura, listopad 2009.
24 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpięte z CKE, maj 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).

6. Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa:

a) 1 b) 4 c) 9 d) 36

7. Liczba jest równa $\log_4 8 + \log_4 2$:

a) 1 b) 2 c) $\log_4 6$ d) $\log_4 10$

8. Liczba $|5-7| - |-3+4|$ jest równa:[25]

a) –3 b) –5 c) 1 d) 3

9. Samochód kosztował 30000 zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Po tych obniżkach samochód kosztował:

a) 24400 zł b) 24700 zł c) 24000 zł d) 300 zł

10. Dana jest liczba $x = 63^2 \cdot (\frac{1}{3})^4$. Wtedy:

a) $x = 7^2$ b) $x = 7^{-2}$ c) $x = 3^8 \cdot 7^2$ d) $x = 3 \cdot 7$

11. Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa:

a) -2 b) -1 c) $\frac{1}{25}$ d) 4

12. Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje:[26]

a) 1701 zł b) 2100 zł c) 1890 zł d) 2091 zł

13. Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%, w wyniku obu obniżek cena nart zmiejszyła się o:[27]

a) 44% b) 50% c) 56% d) 60%

14. Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16\frac{3}{4}$ jest równa:

a) -8 b) -4 c) 2 d) 4

15. Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy:

a) –6 b) –4 c) –1 d) 1

16. Liczba $\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 \cdot 0{,}5}$ jest równa:

a) 1 b) –1 c) 2 d) 4

---

25 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpięte z CKE, listopad 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd, 20.03.2013).

26 Zadanie 20 zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20,03,2013).

27 Zadania: 13, 14, 15 zaczerpnięte z CKE, maj 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).

17. Liczba $\log_3 36 - \log_3 4$ jest równa:

a) $\log_3 32$ b) $\log_3 14$ c) 2 d) 9

18. Stół kosztował 320 zł. Ile kosztuje stół po podwyżce ceny o 20%?

a) 384 zł b) 256 zł c) 340 zł d) 400 zł

19. Liczba $27^{-2} \cdot 9^{6}$ jest równa:[28]

a) 9^5 b) 3^{16} c) 6^4 d) 3^6

20. Liczba $\log 0{,}1 + \log_2 16$ jest równa:

a) 6 b) –5 c) 3 d) 7

21. Torba kosztowała 40 zł, a po podwyżce 50 zł. O ile procent podwyższono cenę tej torby?

a) 10% b) 25% c) 75% d) 20%

22. Liczba $\dfrac{\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}}$ jest równa:[29]

a) -1 b) $\dfrac{4}{49}$ c) $-2\dfrac{1}{4}$ d) 1

23. Liczba log6 jest równa:

a) $\log 2 \cdot \log 3$ b) $\dfrac{\log 12}{\log 2}$ c) $\log 2 + \log 3$ d) $\log 2 - \log 3$

24. 20% pewnej liczby jest o 16 mniejsze od tej liczby. Tą liczbą jest:

a) 32 b) 20 c) –2 d) –20

25. Liczbę $x = 2^2 \cdot 16^{-4}$ można zapisać w postaci:[30]

a) $x = 214$ b) $x = 2–14$ c) $x = 32–2$ d) $x = 2–6$

26. Hania pokonuje drogę $S = 100\ m$ z domu do szkoły w czasie 30 min. Z jaką średnią prędkością idzie Hania?

a) $0{,}05\ \frac{km}{h}$ b) $0{,}2\ \frac{km}{h}$ c) $5\ \frac{km}{h}$ d) $3{,}3\ \frac{km}{h}$

27. Liczba $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ jest równa:

a) 6 b) –3 c) 3 d) –6

---

28 Zadania 19, 20, 21 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2009.

29 Zadania 22, 23, 24 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011 (www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 20.03.2013).

30 Zadania 25, 26, 27, 28 zaczerpnięte z OKE Poznań, styczeń, 2013 (www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc-0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 21.03.2013).

28. Odległość z Elbląga do Legnicy jest równa 468 km, natomiast po zaokrągleniu do setek kilometrów 500 km. Błąd względny tego przybliżenia jest równy:

a) 32 km b) 68 km c) około 6,8% d) 0,32%

29. Liczba $|5-2|+|1-6|$ jest równa:[31]

a) 8 b) 2 c) 3 d) –2

30. Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

31. **(2 pkt)**[32] Miesięczny koszt ogrzewania domu wynosi 200 zł. Dla zmniejszenia tych kosztów planuje się położenie dodatowej izolacji cieplnej, której wartość wynosi 4200 zł. Jeśli ta izolacja daje 30% oszczędności w wydatkach na ciepło, to po ilu latach poniesione koszty zwrócą się?

32. **(2pkt)** Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.

33. **(2 pkt)** Wiedząc, że $\sqrt{x}=16$, $\sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}$ oblicz $\sqrt[5]{xy}$.

34. **(2 pkt)** Dana jest liczba 2,363636... Podaj zaokrąglenie tej liczby z dokładnością do 0,001 i oblicz błąd względny tego przybliżenia.

35. **(5 pkt)** Siostry Zosia i Zuzia są współwłaścicielkami działki, przy czym część Zosi jest o 40% więsza od części Zuzi. Zuzia przeznaczyła na budowę altany 21% powierzchni swojej działki, to jest 210 m^2. Oblicz pole powierzchni całej działki. Jaki procent pola powierzchni całej działki stanowi działka Zuzi? Wynik zaokrągij do 1%.

36. **(2 pkt)** Aby obliczyć kwadrat liczby trzycyfrowej, można skorzystać ze wzoru: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, na przykład:

$$172 = (100+70+2)^2 = 100^2+70^2+2^2+2*100*70+2*100*2+2*70*2$$
$$= 10000+4900+4+14000+400+280 = 29584$$

37. **(2 pkt)** O ile procent zwiększy się pole powierzchni działki w kształcie prostokąta, jeśli długość każdego boku powiększymy o 30%?

38. **(2 pkt)** Liczbę 0,(4) – 0,2(1) zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

39. **(3 pkt)** Podaj liczby całowite, które należą do zbioru:

a) $\left(-\infty,2\right\rangle \cap (1;5)$ b) $\left\langle -2;3\right) \cup (3;5\rangle$ c) $(-5;7)/\langle 0;+\infty)$

40. **(4 pkt)** Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:

$A=\log_6(\log_2 64)$; B = $\log_{\frac{2}{3}}\frac{81}{16}$; C = $\log_{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{2}} 1\frac{1}{8}$; D = $\log_3 3\frac{6}{7}+\log_3 2\frac{1}{3}$

41. **(2 pkt)** Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{(0{,}75)^{-2}+(-1{,}5)^{-2}}$?

31 Zadania: 29, 30 zaczerpnięte z matury poprawkowej, sierpień, 2011 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 21.03.2013).

32 Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2 Wyrażenia algebraiczne

Algebra jest jednym z najstarszych działów matematyki. Około 300 r. n.e. starożytny myśliciel Diofantos po raz pierwszy niewiadome oznaczał literami. Za twórcę współczesnej algebry uznaje się jednak Francioisa Viete. Ten francuski matematyk pierwszy szeroko wprowadził oznaczenia literowe dla niewiadomych oraz dla współczynników.

To już potrafię:

1. Opisywać za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
2. Obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3. Redukować wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4. Dodawać i odejmować sumy algebraiczne;
5. Mnożyć jednomiany, sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnożyć sumy algebraiczne.

▶ **SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?**

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Wyrażenie $(2ab^2c^3)^3$ można zapisać jako:

a) $2ab5c^2$ b) $2ab^6c^9$ c) $8a^3b^5c^6$ d) $8a^3b^6c^9$

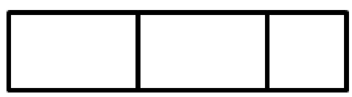
Zad.2. Wyrażenie $25 - a^2 + a$, dla $a = -3$ jest równe:

a) 13 b) 31 c) 19 d) 16

Zad.3. Wyrażenie $(n - 3m)(n + 3m)$ jest równe wyrażeniu

a) $n^2 - 6nm + 9n^2$ b) $n^2 - 6m^2$ c) $n^2 - 6nm + 6n^2$ d) $n^2 - 9m^2$

Zad.4. Na ceglanej elewacji jednego z budynków w mieście powtarza się wzór. Przez *n* oznaczmy długość dłuższej cegły, a przez *m* długość krótszej cegły. Łączną długość pięciu takich wzorów opisuje wyrażenie:



a) $5 \cdot 2n + m$ b) $2n + 5m$ c) $5(2n + m)$ d) $5(2n + 2m)$

Zad.5. Wyrażenie $9b^2 + 6ab - 3b$ jest równe:

a) $3b^2(3 + 2a - 1)$
b) $3b(b + 3a - 1)$
c) $3b(3b + 2a - 1)$
d) $3(b + 2a - 1)$

Zad.6. W sklepie było 20 kilogramów pomarańczy po 3 zł za kilogram, 35 kilogramów mandarynek po 2,50 zł za kilogram. Sprzedano owoce o wartości 130 zł. Które z wyrażeń przedstawia wartość owoców pozostawionych w sklepie?

a) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 - 130$
b) $130 - (20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50)$
c) $(20 + 35) \cdot (3 + 2{,}50) - 130$
d) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 + 130$

Zad.7. Ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$ wyznacz zmienną *v*

a) $v = \frac{2m}{E}$
b) $v = \sqrt{\frac{2m}{E}}$
c) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$
d) $v = \sqrt{2Em}$

Zad.8. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $(5x^2 + 4x) - 7y^2 - (3x^2 + 3y^2)$ otrzymamy:

a) $2x^2 - 4y^2 + 4x$
b) $2x^2 - 10y^2 - 4x$
c) $2x^2 + 10y^2 + 4x$
d) $2x^2 - 10y^2 + 4x$

Zad.9. Liczbę 4 razy mniejszą od kwadratu liczby n przedstawia wyrażenie:

a) $n^2 : 4$
b) $n^2 - 4$
c) $\frac{1}{4n^2}$
d) $4 : n^2$

Zad.10. Różnica kwadratu potrojonej liczby x i ćwierci sześcianu liczby y, to:

a) $3x^2 - 0{,}25y^3$
b) $(3x)^2 - 0{,}25y^3$
c) $3x^2 - (0{,}25y)^3$
d) $(3x)^2 - (0{,}25y)^3$

Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	C	C	A	C	D	A	A

ZADANIA OTWARTE

1. Ze szkoły liczącej n uczniów $x\%$ wyjeżdża w czasie wakacji na obozy, $y\%$ do znajomych w góry, a $z\%$ z rodzinami na wczasy. Ile osób pozostaje w miejscu zamieszkania?

2. Zapisz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych w postaci wyrażenia algebraicznego.

3. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych

$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)$

4. Sprowadź do najprostszej postaci i oblicz wartość liczbową wyrażenia dla $x=-5, y=\frac{1}{2}$

$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)$

5. Uzasadnij, że $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ dla $a,b>0$

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	n – wszyscy uczniowie $x\%\cdot n$ – ilość uczniów na obozach $y\%\cdot n$ – ilość uczniów w górach $z\%\cdot n$ – ilość uczniów na wczasach $a\%\cdot n$ – uczniowie pozostający w domu $x\%\cdot n+y\%\cdot n+z\%\cdot n+a\%\cdot n=n$ $xn+yn+zn+an=100n$ $an=100n-xn-yn-zn$ $a=\frac{n(100-x-y-z)}{n}$ uczniów
2	n– liczba naturalna $2n$ – liczba parzysta $2n+1$ – liczba nieparzysta $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=2n+1+2n+3+2n+5=6n+9=3(2n+3)$
3	$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)=2x+5+3x-2y+2x+3-4y-1$ $=7x-6y+7$
4	$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)=x^2-4y^2+x^2+2xy+y^2-4xy+4y^2$ $=2x^2+y^2-2xy=2\cdot(-5)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-5)\cdot\frac{1}{2}=50+\frac{1}{4}+5=55\frac{1}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}(2-\sqrt{b})}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2-\sqrt{b}+\sqrt{b}=2$

2.1 Wartość liczbowa wyrażeń

Teraz nauczę się:

Stosować wzory skróconego mnożenia na:

- Kwadrat sumy: $(a+b)^2$
- Kwadrat różnicy: $(a-b)^2$
- Różnicę kwadratów: a^2-b^2

Wyrażenia algebraiczne powstają przez łączenie symboli literowych oraz liczb znakami działań i nawiasów.

Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$x, 25,\ \ 2y^3, -\frac{1}{2}ab^2, 5(x-2),\ \ a+3b^2,\ \ \frac{(a+b)}{2}\cdot h,\ \ 3(2+2a)+4-6a$$

Wyrażenia algebraiczne występują w różnych wzorach, twierdzeniach czy dowodach.

Wyrażenia takie, jak $3x, \frac{1}{5}ab, -2y^2, 3ab^2c^3, -1$nazywamy **jednomianami**. Możemy wśród nich wyróżnić **jednomiany podobne,** czyli takie, które różnią się między sobą tylko współczynnikiem liczbowym.

Przykłady jednomianów podobnych:

$1;\ 4;\ \frac{3}{8};\ 15, \ldots$

$x;\ 5x;\ -0{,}75x;\ 1\frac{1}{5}x, \ldots$

$a^2bc^3;\ 4a^2bc^3;\ -2\frac{4}{5}a^2bc^3;\ 0{,}63a^2bc^3$

Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.

$$xy-2x+y-2-x+2xy+4y-5=-3x+5y+3xy-7$$

$$4a^2-3b-\frac{1}{2}a+2b^2-12+2\frac{3}{4}a-3a^2+5b=a^2+2b^2+2\frac{1}{4}a+2b-12$$

$$3a-8b^2+14ac+\frac{1}{2}a+7-10ca+5\frac{3}{4}b^2-4=-2\frac{1}{4}b^2+3\frac{1}{2}a+4ac+3$$

Taki zabieg nazywa się **redukcją wyrazów podobnych**.

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażeń algebraicznych, w miejsce liter należy wstawić liczby i wykonać określone działania.

Przykład 1

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3x^2+2x-4$ dla $x=-2$.

$$3x^2+2x-4=3(-2)^2+2\cdot(-2)-4=3\cdot 4-4-4=12-4-4=4$$

Przykład 2

Zdredukuj wyrazy podobne i oblicz wartość liczbową danego wyrażenia dla $x = -3, y = 2$.

a) $4x^2 + 2x - 8 + 3x - \frac{1}{3}x^2 + 4 - 5x = 3\frac{2}{3}x^2 - 4 = 3\frac{2}{3} \cdot (-3)^2 - 4 = \frac{11}{3} \cdot 9 - 4 = 33 - 4 = 29$

b) $12x - 8x^2 + \frac{4}{3}x - 7 + 12x^2 - 14 + 9x = 4x^2 + 21\frac{4}{3}x - 21 =$
$= 4 \cdot (-3)^2 + \frac{67}{3} \cdot (-3) - 21 = 4 \cdot 9 - 67 - 21 = 36 - 88 = -52$

c) $3x^2y + 5y - 6 + 3y^2x - 4y + 7x + 6x^2y - 4y^2x - 12x =$
$= 9x^2y - y^2x - 5x + y - 6 = 9 \cdot (-3)^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-3) + 2 - 6$
$= 9 \cdot 9 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 15 + 2 - 6 = 162 + 12 + 15 + 2 - 6 = 185$

d) $-\frac{2}{5}x + 1\frac{1}{4}x - 0,3y = -\frac{8}{20}x + 1\frac{5}{20}x - 0,3y = \frac{17}{20}x - 0,3y =$
$= \frac{17}{20} \cdot (-3) - 0,3 \cdot 2 = -\frac{51}{20} - \frac{6}{10} = -\frac{51}{20} - \frac{12}{20} = -\frac{63}{20} = -3,15$

ZADANIA

2.1.1 Znajdź wartości liczbowe wyrażenia $(2x^2 - 2xy)^2$ przy następujących wartościach:

a) $x = 3;\ y = 2$

b) $x = 0,5;\ y = 0,2$

c) $x = 3\frac{1}{2};\ y = 1\frac{1}{2}$

d) $x = 2,5;\ y = 1,75$

Odpowiedź: a) 36; b) 0,09; c) 196; d) $14\frac{1}{16}$.

2.1.2 Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $3(x^2 - 3y + 4) - 8$, dla $x = 2; y = \frac{4}{3}$

b) $10(x - 2) - 4(y + 3) + 6$, dla $x = 1\frac{1}{2}; y = 0,75$

c) $20 - 4(2x^3 - 8x + 1) + 3$, dla $x = -\frac{1}{2}$

d) $x + 5 - (x - 3) + 4y - 7$, dla $x = -5; y = 3$

Odpowiedź: a) 4; b) –14; c) 4; d) 13.

2.1.3 Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $(5x - 2)^2 - (5x - 2)(5x + 2)$, dla $x = -0,2$

b) $\frac{4x}{y(x+y)}$, dla $x = 6, y = -2$

c) $(a^2 - 16)(a + 2)$, dla $a = \sqrt{2}$

d) $\frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1}$, dla $x = 4$

Odpowiedź: a) 12; b) –3; c) $-14(\sqrt{2} + 2)$; d) $1\frac{1}{5}$.

2.2 Działania na wyrażeniach algebraicznych

Poza dodawaniem sum algebraicznych można na wyrażeniach algebraicznych wykonywać także inne działania: mnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożyć dwie sumy algebraiczne i wyłączać wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias.

Do przekształcania wyrażeń wykorzystuje się prawa działań na liczbach rzeczywistych.

Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian polega na zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Przykład 1

$-5(3x + y) = -5 \cdot 3x + (-5) \cdot y = -15x - 5y$

$2x(x^2 - 5y) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-5y) = 2x^3 - 10xy$

$3a(2x^2 + 4x - 2) = 3a \cdot 2x^2 + 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-2) = 6ax^2 + 12ax - 6a$

Mnożenie sum algebraicznych polega na pomnożeniu każdego składnika pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Przykład 2

$(x + 3)(2x - 1) = x \cdot 2x + x \cdot (-1) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-1) = 2x^2 - x + 6x - 3$

$$\begin{aligned}(3x - 2y)(-2x - 5) &= 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot (-5) + (-2y) \cdot (-2x) + (-2y) \cdot (-5)\\ &= -6x^2 - 15x + 4xy + 10y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2x + 3y - 7)(x - 2y) =\\ &\quad = 2x \cdot x + 2x \cdot (-2y) + 3y \cdot x + 3y \cdot (-2y) + (-7) \cdot x + (-7) \cdot (-2y)\\ &\quad = 2x^2 - 4xy + 3xy - 6y^2 - 7x + 14y = 2x^2 - 6y^2 - xy - 7x + 14y\end{aligned}$$

ZADANIA

2.2.1 Uprość wyrażenia, a następnie oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $x^2 - 2y^2 + xy$ dla $x = 2$ i $y = -5$

b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{4}{5}$

c) $3x^2 - 4x + 7 + x^2 - 5x - 8$ dla $x = -1$

d) $5x - 3(4 - 2x) + 2(-x + 1)$ dla $x = -2$

e) $(x - 3)(x + 2 - 4)$ dla $x = 3$

f) $4x^2 - x(x+3) - 5x$ dla $x = \frac{1}{3}$

g) $x(x-3y) + 2xy - y^2(2-y)$ dla $x = 2$ i $y = -3$

h) $3x - 4 - [2x^2 - 5x - (3 - 4x + 3x^2)]$ dla $x = -\frac{1}{2}$

i) $\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2} + \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}$ dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$

Odpowiedź: a) -56; b) 1; c) 16; d) -28; e) 0; f) $-2\frac{1}{3}$; g) $-2{,}75$

2.2.2 Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $(x-5)(x+2) =$

b) $(2x-3)(x-1) + 5x - 4(5-3x) =$

c) $2(2x-5y) - 3(4x+3y) =$

d) $(-x-2y)(-1) + 3(x+y+5) =$

e) $2x(x-5) - (x-y)(x+1) - 5x\left(\frac{2}{5}y - 2\right) =$

f) $5x(1-x^2) - (x-3)(-2x^2) =$

g) $-(3x-2y+1) + (5x-4y+4z) - (x-5y-z) =$

h) $2x - 3y + 4z - \{3x + y - 2z - [3x - 2y - 2z - (3x + 5y - 7z)]\} =$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 2x - 10$; b) $2x^2 + 12x - 17$; c) $-8x - 19y$; d) $4x + 5y + 15$;

e) $x^2 - x + y - xy$; f) $-x^3 - 6x^2 + 5x$; g) $x + 3y + 5z - 1$; h) $-x - 11y + 11z$.

2.2.3 Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia.

a) $(2x+y)(3y-5x) - 4x(x-y)$, dla $x = 1, y = -2$

b) $p(p-3k) + 2pk - k^2(2-k)$, dla $p = 2, k = -4$

c) $\frac{(2a-3b)(b-4a)-2b^2}{3a(4-b)-5b(a+3)}$, dla $a = -2, b = -4$

d) $(a+1)(b+2) + (b+3)(c+4) + (a+5)(c+6)$, dla $a = 1, b = 2, c = 3$

Odpowiedź: a) –12; b) –35; c) 0; d) 9; e) 7.

2.2.4 Wiedząc, że $x = 2 + \sqrt{5}$ i $y = 1 - 2\sqrt{5}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{xy}{2x+y}$

Odpowiedź: $\frac{-8-3\sqrt{5}}{5}$

2.2.5 Uzasadnij, że dla $a, b > 0$ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}-a}{a-b} = 1$

2.3 Wzory skróconego mnożenia

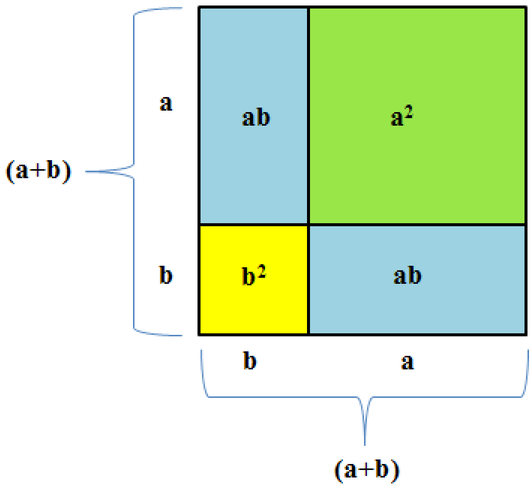
Wzory skróconego mnożenia – kwadrat sumy

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów powiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a + b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a + b)^2$ i jest sumą pól czterech figur.



$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$

Rysunek 2-1 – Kwadrat sumy

Interpretacja algebraiczna

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$

Przykład 1

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(2a + 4)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 4 + 4^2 = 4a^2 + 16a + 16$

$(2k + 5l)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 5l + (5l)^2 = 4k^2 + 20kl + 25l^2$

$\left(a\sqrt{2} + 2\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 4$

Przykład 2

$(102)^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

$(120)^2 = (100+20)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 20 + 20^2 = 10000 + 4000 + 400 = 14400$

$(27)^2 = (20+7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 400 + 280 + 49 = 729$

Przykład 3

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + x^2 = (7+x)^2 = (7+x)(7+x)$

$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = (3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$

$9 + 6x\sqrt{3} + 3x^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)\left(3 + x\sqrt{3}\right)$

Wzory skróconego mnożenia – kwadrat różnicy

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów pomniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

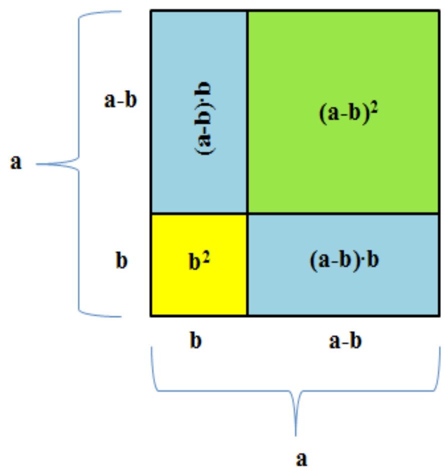
Interpretacja algebraiczna

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a-b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a-b)^2$

i jest równe sumie pól kwadratów o boku$a$ i o boku b zmniejszonej o pole dwóch prostokątów o bokach a, b.



$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Rysunek 2-2 – Kwadrat różnicy

Przykład 4

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$

$$(3a - 5b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$$

$$\left(1 - x\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2x\sqrt{3} + 3x^2$$

Przykład 5

$$(198)^2 = (200 - 2)^2 = 200^2 - 2 \cdot 200 \cdot 2 + 2^2 = 40000 - 800 + 4 = 39204$$

Przykład 6

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$$a^2 - 16a + 64 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 8 + 8^2 = (a - 8)^2 = (a - 8)(a - 8)$$

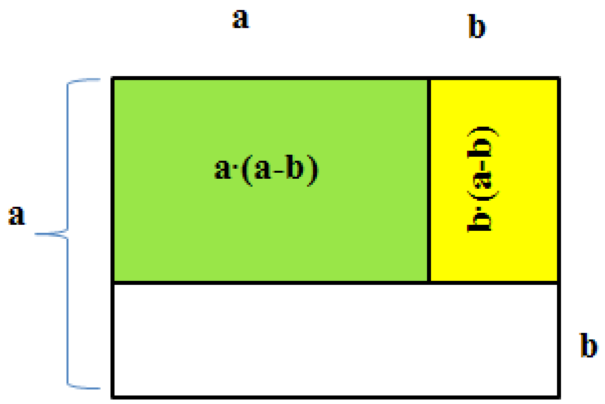
$$9 - 6y\sqrt{5} + 5y^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot y\sqrt{5} + \left(y\sqrt{5}\right)^2 = \left(3 - y\sqrt{5}\right)^2 = \left(3 - y\sqrt{5}\right)\left(3 - y\sqrt{5}\right)$$

$$36x^2 - 36xz + 9z^2 = (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot 3z + (3z)^2 = (6x - 3z)^2 = (6x - 3z)(6x - 3z)$$

Wzory skróconego mnożenia – różnica kwadratów

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń a i b przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$



Rysunek 2-2– Różnica kwadratów

Interpretacja geometryczna

Pole pokolorowanego prostokąta jest równe:

$$P = (a + b)(a - b)$$

$$P = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Zatem $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Interpretacja algebraiczna

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Przykład 7

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$

$(3z+2y)(3z-2y)=(3z)^2-(2z)^2=9z^2-4y^2$

$(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5)=(\sqrt{7})^2-5^2=7-25=-18$

Przykład 8

Zapisz różnicę w postaci iloczynu.

$16b^2-25c^2=(4b)^2-(5c)^2=(4b-5c)(4b+5c)$

$2x^2-4y^2=(x\sqrt{2})^2-(2y)^2=(x\sqrt{2}+2y)(x\sqrt{2}-2y)$

$a^4-64=(a^2)^2-8^2=(a^2-8)(a^2+8)=(a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})(a^2+8)$

Przykład 9

Oblicz $399\cdot 401$.

$399\cdot 401=(400-1)(400+1)=400^2-1^2=160000-1=159999$

ZADANIA

2.3.1 Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia.

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+6)^2$ c) $(2+5y)^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)^2$

e) $(6x+5y)^2$ f) $(y-5)^2$ g) $(2y-4x)^2$ h) $(-3-x)^2$

i) $(y-5)^2$ j) $\left(6y-\frac{1}{3}x\right)^2$

Odpowiedź:

a) x^2+6x+9; b) $4x^2+24x+36$; c) $4+20y+25y^2$; d) $\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$;
e) $36x^2+60xy+25y^2$; f) $y^2-10y+25$; g) $4y^2-16xy+16x^2$; h) $9+6x+x^2$;
i) $y^2-10y+25$; j) $36y^2-4x+\frac{1}{9}x^2$.

2.3.2 Oblicz.

a) 103^2 b) 78^2 c) 503^2 d) 99^2 e) 498^2 f) 303^2

Odpowiedź: a) 10609; b) 6084; c) 253009; d) 9801; e) 248004; f) 91809.

2.3.3 Oblicz, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

a) $(\sqrt{3}+2)^2$ b) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$

c) $(2\sqrt{2}-5)^2$ d) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

Odpowiedź: a) $4\sqrt{3}+7$; b) $2\sqrt{21}+10$; c) $33-20\sqrt{2}$; d) $18+12\sqrt{2}$.

2.3.4 Zapisz wyrażenia w postaci iloczynu.

a) $x^2 - 25$ b) $4x^2 - 9y^2$ c) $x^4 - 49y^2$

d) $64 - 0{,}36x^2$ e) $\frac{64}{81}x^2 - 121y^2$ f) $3x^2 - 7y^2$

Odpowiedź:

a) $(x-5)(x+5)$; b) $(2x-3)(2x+3y)$; c) $(x-7y)(x+7y)$;

d) $(8-0{,}6x)(8+0{,}6x)$; e) $\left(\frac{8}{9}x - 11y\right)\left(\frac{8}{9}x + 11y\right)$; f) $\left(\sqrt{3}x - \sqrt{7}y\right)\left(\sqrt{3}x + \sqrt{7}y\right)$.

2.3.4 Zapisz w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

a) $(x-2)(x+2)$ b) $(2x-3y)(2x+3y)$

c) $-\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(\frac{1}{2}x - y\right)$ d) $\left(\sqrt{2}-5\right)\left(\sqrt{2}+5\right)$

e) $\left(3\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-3\right)$ f) $(-5x-6)(5x-6)$

Odpowiedź: a) $x^2 - 4$; b) $4x^2 - 9y^2$; c) $-\frac{1}{4}x^2 + y^2$; d) -23; e) 54; f) $36 - 25x^2$.

2.4 Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Wzory skróconego mnożenia stosuje się także do **usuwania niewymierności** z mianownika ułamka. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez taki czynnik, który da w mianowniku liczbę całkowitą. Jeżeli w mianowniku mamy sumę lub różnicę, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Przykład 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+5)}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{18+15\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{18+15\sqrt{3}}{12-5} = \frac{3(6+5\sqrt{3})}{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} =$$
$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

ZADANIA

2.4.1 Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$ c) $\frac{7}{\sqrt[3]{8}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ f) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ h) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$

Odpowiedź:

a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; c) 3,5; d) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{4\sqrt{33}-4\sqrt{6}-\sqrt{22}+11}{9}$; f) $2\sqrt{2}-2$; g) $15+5\sqrt{6}$; h) $\frac{-7-2\sqrt{10}}{3}$.

2.4.3 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \frac{2}{5+\sqrt{5}}, \frac{3}{2-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}+5}{6+2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Odpowiedź:

a) $\sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-3, 0{,}5-0{,}1\sqrt{5}, -3\left(2+\sqrt{5}\right)$;

b) $\frac{6-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}, -5-2\sqrt{6}, \frac{3}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.4.4 Usuń niewymierność, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $\frac{5}{4+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Odpowiedź: a) $\frac{-30+25\sqrt{3}-15\sqrt{7}+10\sqrt{21}}{12}$; b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

2.5 Rozkład wielomianu na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias to nic innego, jak zamiana sumy algebraicznej na iloczyn wyrażeń. Umiejętność ta jest przydatna do rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Przykład

$$3x+6y-12z=3\cdot z+3\cdot 2y-3\cdot 4z=3(z+2y-4z)$$

$$\begin{aligned}-2abc+6a^2bc-10ac^2&=-2abc+(-2)\cdot 3aabc+(-2)\cdot 5acc\\&=-2ac(b+3ab+5c)\end{aligned}$$

$$x(2a+b)-y(2a+b)=(2a+b)(x-y)$$

$$x(y-z)-(y-z)=x(y-z)-1(y-z)=(y-z)(x-1)$$

ZADANIA

2.5.1 Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5x + x^2 =$ b) $6x^2 - 3x =$

c) $6x + 10xy + 8xz =$ d) $8x^2y + 4xy - 2y =$

e) $3xyz + 6xzt - 9xyt =$ f) $5x^4 - 25x^3 - 10x^2 =$

g) $2(x + y) + (x + y)z =$ h) $(2x - 3y) - a(2x - 3y) =$

i) $(5 - x)y^2 - 9(5 - x)y - (x - 5) =$

Odpowiedź:

a) $x(5 + x)$; b) $3x(2x - 1)$; c) $2x(3 + 5y + 4z)$; d) $2y(4x^2 + 2x - 1)$; e) $3x(yz + 2zt - 3yt)$;

f) $5x^2(x^2 - 5x - 2)$; g) $(x + y)(2 + z)$; h) $(2x - 3y)(1 - a)$; i) $(5 - x)(y^2 - 9y + 1)$.

2.5.3 Zapisz w postaci iloczynowej:

a) $3x^2 - 6$ b) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ c) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

d) $3x^3 - 15x^2 - 6x + 30$ e) $x^4 - x^3 - 8x + 8$

Odpowiedź:

a) $3\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$; b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$; c) $(x + 2)(x^2 + 9)$;

d) $3(x - 5)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$; e) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Równość $(a + 4\sqrt{2})^2 = a^2 + 32\sqrt{2} + 32$ zachodzi dla:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$ d) $a = 4\sqrt{2}$

2. Liczba $(2 - 3\sqrt{2})^2$ jest równa:[33]

a) -14 b) 22 c) $-14 - 12\sqrt{2}$ d) $-22 - 12\sqrt{2}$

3. Równość $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$ zachodzi dla:

a) $a = 14$ b) $a = 7\sqrt{2}$ c) $a = 7$ d) $a = 2\sqrt{2}$

33 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z „Poprawkowy egzamin maturalny z matematyki”, sierpień, 212 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 23.03.2013).

4. Liczba x stanowi 20% liczby y. Zatem prawdziwe jest następujące równanie:

a) $0{,}2x = y$ b) $y = 5x$ c) $1{,}2x = y$ d) $x = 1{,}2\,y$

5. Liczba $(3-\sqrt{2})^2 + 4(2-\sqrt{2})$ jest równa:[34]

a) $19-10\sqrt{2}$ b) $17-4\sqrt{2}$ c) $15+14\sqrt{2}$ d) $19+6\sqrt{2}$

6. Wyrażenie $8x^2 - 4xy + 6x$ jest równe iloczynowi:

a) $2x(4x - 2y + 6)$ b) $2x(4x - 2y + 3)$

c) $2x(4x^2 - 2y + 3x)$ d) $2x(4x - y + 3)$

7. Wartość wyrażenia $(\sqrt{x+1}+1)(1-\sqrt{x+1})$ dla $x = \sqrt{2} - 2$ jest równa:

a) $2-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}-2$ c) $\sqrt{2}-3$ d) $4-\sqrt{2}$

8. Liczba a stanowi 60% liczby b. Wówczas:[35]

a) $a = b - 0{,}4$ b) $b = 0{,}4\,a$ c) $b = \frac{5}{3}\,a$ d) $a = \frac{5}{3}\,b$

9. Wartość wyrażenia $\frac{2a+12}{-a^2}$ dla $a = -2\sqrt{3}$ jest równa:

a) $4\sqrt{3}-1$ b) $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$ c) $\frac{-\sqrt{3}+3}{3}$ d) $-4\sqrt{3}+1$

10. Rozwiązanie równania $x(x-1) + 36 = x(x+3)$ należy do przedziału:

a) $(3,10)$ b) $(11,+\infty)$ c) $(-5,9)$ d) $(-\infty,5)$

11. Różnica liczby x i 15% tej liczby jest równa 255. Równaniem opisującym tę zależność jest:

a) $x - 0{,}15 = 255$ b) $1{,}85 \cdot x = 255$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 255$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 255$

12. Jeżeli $x = 1 - 2\sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2}$, to xy równe jest:[36]

a) $\sqrt{2}-4$ b) $4-\sqrt{2}$ c) -3 d) $-\sqrt{2}$

13. Wyrażenie $x(x-2)(x+2)$ jest równe:

a) $(x-2)^3$ b) $x^3 - 4x$ c) $x^3 - 2$ d) $x^3 - 2x$

14. Wyrażenie $27x^3+y^3$ jest równe iloczynowi

a) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$ b) $(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)$

c) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$ d) $(3x-y)(9x^2-3xy+y^2)$

---

34 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpnięte z „Egzamin maturalny z matematyki", maj, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 23.03.2013).

35 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturaly z matematyki, CEN, Bydgoszcz.

36 Zadania: 12, 13, 14 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturalny z matematyki, OKE, Poznań.

15. Kwadrat liczby $x = 5 + 2\sqrt{3}$ jest równy:[37]

a) 37 b) $25 + 4\sqrt{3}$ c) $37 + 20\sqrt{3}$ d) 147

16. Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi:[38]

a) 5a2(1–10b+3) b) 5a (a–2b+3)

c) 5a (a–10b+15) d) 5(a–2b+3)

17. Liczba $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(2-\sqrt{2}\right)$ jest równa:[39]

a) $19 - 10\sqrt{2}$ b) $17 - 4\sqrt{2}$ c) $15 + 14\sqrt{2}$ d) $19 + 6\sqrt{2}$

18. Dla pewnych a i b zachodzą równości $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych a i b wartość wyrażenia $a - b$ wynosi:[40]

a) 25 b) 16 c) 10 d) 2

19. **(2 pkt)** Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} > \frac{a+1}{2}$.[41]

20. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

21. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

22. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a,b,c spełniają nierówność $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

23. Uprość wyrażenie: $-9(2m-3)+(m-3)^3-(m+2)(m-2)-m^3$, a następnie oblicz jego wartość dla $m = \sqrt{3}$[42].

24. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

25. Oblicz wartość wyrażenia: $(2x+3y)\cdot(2x-3y)-(2x-3y)^2$ dla $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{8}$

---

37 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z CKE, 2010 (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 20.03.2013).
38 (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
39 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).
40 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 24.03.2013).
41 (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
42 Zadania: 23, 24, 25 zaczerpnięto z Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności

To już potrafię:

- Zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
- Sprawdzić, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- Sprawdzić, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- Rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi oraz zadania osadzone w kontekście praktycznym.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 Liczba 7 jest rozwiązaniem równania:

a) $2x + 1 = 3x - 2$ b) $2(x + 1) = 3x - 2$

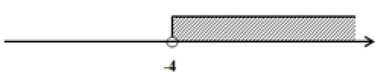
c) $2x + 1 = 3(x - 2)$ d) $2x + 1 = 3x + 2$

Zad.2 Po obniżce o 30% płaszcz kosztuje 392 zł. Jaka jest pierwotna cena płaszcza?

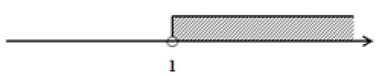
a) 500 b) 560 c) 650 d) 600

Zad.3 Wybierz rysunek, który przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $x - 3 > 1$

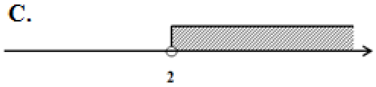
A.



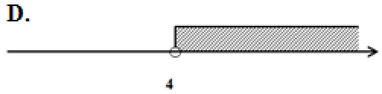
B.



C.



D.



Zad.4 Które z równań należy dopisać do równania $x - 2y = 8$, aby utworzony układ równań był sprzeczny?

a) $6x + 2y = 13$
b) $2x + 2y = 4$
c) $x - 2y = 4$
d) $2x - 4y = 16$

Zad.5 Układ równań $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

a) Ma dokładnie jedno rozwiązanie
b) Nie ma rozwiązań
c) Ma dwa rozwiązania
d) Ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zad.6 Jeżeli y jest liczbą szklanek o pojemności $0{,}2$ litra, które można napełnić sokiem z pełnego naczynia o pojemności $1{,}5$ litra, to opisuje to nierówność:

a) $0{,}2y \geq 1{,}5$
b) $0{,}2y > 1{,}5$
c) $0{,}2y \leq 1{,}5$
d) $1{,}5y < 0{,}2$

Zad.7 Ile litrów wody należy dolać do 3 litrów 10% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 6%? Załóż, że gęstość roztworu jest równa gęstości wody.

a) 1 litr
b) 4 litry
c) 3 litry
d) 2 litry

Zad.8 Nierównością równoważną nierówności $x > 1$ jest:

a) $x - 1 < 0$
b) $-x > -1$
c) $x - 2 > -1$
d) $\frac{x}{2} > 1$

Zad.9 Po wyznaczeniu y ze wzoru $2y = z - \frac{1}{3}y$, otrzymamy:

a) $y = \frac{3}{4}z$
b) $y = \frac{3}{7}z$
c) $y = \frac{4}{3}z$
d) $y = \frac{7}{3}z$

Zad.10 Pan Marek zebrał m kg jagód, pan Janek o 5 kg więcej niż pan Marek, a pani Ewa 2 razy mniej niż pan Marek i pan Janek razem. Łącznie zebrali 40 kg jagód. Wskaż odpowiednie równanie opisujące tę sytuację.

a) $m + m + 5 - \frac{1}{2}(m - 5 + m) = 40$

b) $m + m + 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$

c) $m + m - 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$

d) $m + m - 5 - \frac{1}{2}(m - 5 - m) = 40$

Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	A	C	D	C	B	B

ZADANIA OTWARTE

1. Za dwa filmy zapłacono 60,20 zł. Ile kosztuje każdy film, jeżeli jeden jest o 15% droższy od drugiego?

2. Korzystając z własności proporcji, rozwiąż równanie $\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$.

3. Za jedną książkę droższą i jedną tańszą zapłacono 19 zł, a za pięć książek droższych i sześć książek tańszych zapłacono 104 zł. Jaka była cena książki droższej, a jaka książki tańszej?

4. Kupując telewizor, Tomek wpłacił 30% jego wartości. Pozostałą część należności postanowił spłacić na raty. Płatność miała się odbyć w 9 ratach po 140 zł. Ile kosztował telewizor?

5. O godzinie 10^{00} Adam wyruszył piechotą z miejscowości A do miejscowości B. O godzinie 11^{30} z miejscowości A wyruszyła Ewa i jadąc na rowerze z prędkością 24 km/h, dogoniła Adama o godzinie 12^{15}. Z jaką średnią prędkością szedł Adam?

Odpowiedzi:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – cena I filmu $x + 15\%x$ – cena II filmu $x + x + 15\%x = 60{,}20$ $2{,}15x = 60{,}20 \Rightarrow x = 28$ Odp. Jeden film kosztuje 28 zł, a drugi 32,20 zł.
2	$\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$ $6x + 4 = 12 + 4x$ $2x = 8 \Rightarrow x = 4$
3	x – tańsza książka y – droższa książka $\begin{cases} x + y = 19 \\ 5x + 6y = 104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ Odp. Tańsza książka kosztowała 9 zł, a droższa 10 zł.
4	x – cena komputera $30\%x + 9 \cdot 140 = x$ $1260 = 0{,}7x \Rightarrow x = 1800$ Odp. Komputer kosztował 1800 zł.
5	$2\ h\ 15\ min$ – czas podróży Adama, $45\ min$ – czas podróży Ewy x – prędkość Adama $x \cdot 2\frac{15}{60}$ – droga przebyta przez Adama $24 \cdot \frac{45}{60}$ – droga przebyta przez Ewę $x \cdot 2\frac{15}{60} = 24 \cdot \frac{45}{60} \Rightarrow x = 8$ Odp. Adam szedł ze średnią prędkością 8 km/h.

3.1 Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Teraz nauczę się:

- Sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania,
- Rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Nazywać równania w zależności od liczby rozwiazań (sprzeczne, oznaczone, nieoznaczone),
- Korzystać z proporcji do rozwiązywania zadań.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy **zbiorem rozwiązań tego równania.**

Równanie o postaci $ax+b=0$, gdzie x jest niewiadomą, natomiast a i b są dowolnymi liczbami, nazywamy **równaniem liniowym.** Aby rozwiązać równanie liniowe, należy sprowadzić je w wyniku przekształceń równoważnych do równania elementarnego $ax=-b$ i obustronnie podzielić przez współczynnik występujący przy niewiadomej x.

! Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą zmieniają swój znak!

Przykład 1

$5x-10=0$

$5x=10/:5$

$x=2$

Równanie liniowe może mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Takie równanie nazywamy **oznaczonym.**

Przykład 2

a) $2x+1=-2(x+3)-1$

$2x+1=-2x-6-1$

$2x+2x=-6-1-1$

$4x=-8$

$x=-2$

b) $2x+3(3x-5)-10=5x+5$

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

Zgodnie zasadą mnożenia liczby przez nawias w wyrażeniach algebraicznych. Mnożymy przez 3 kolejne wyrażenia z nawiasu: 3x i (-5).

$$2x+9x-15-10=5x+5$$

Po lewej stronie można jeszcze zredukować wyrażenia podobne:
2x+9x=11x
-15-10=-25

$$11x-25=5x+5$$

Uwaga!!!

Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą, zmieniają swój znak!

$$11x-25=5x+5$$

Przenosimy 5x na lewo. W związku z tym zmieniamy znak i po lewej zapisujemy: -5x

Przenosimy (-25) na prawo. W związku z tym zmieniamy znak i po prawej zapisujemy: +25

$$11x-5x=5+25$$

Wykonujemy ostatnie działania po obu stronach równania.

$$6x=30$$

$$6x=30 \quad /\div 6$$

30 : 6 = 5

$$x=5$$

Sprawdzenie

Sprawdzenie warto wykonać zawsze, niezależnie od tego, czy jest wymagane w zadaniu, czy nie. Aby je wykonać, do pierwotnej formy równania podstawiamy zamiast „x" otrzymaną wartość, zgodnie z zasadami podstawiania wartości liczbowych za symbole w wyrażeniach algebraicznych. Zapisujemy zamiast „x" otrzymaną wartość, a między liczbą i podstawianą wartością zapisujemy mnożenie.

Równanie zostało dobrze wykonane, gdy po obu stronach uzyskujemy taką samą wartość i możemy zapisać: L = P.

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

$$2\cdot 5+3(3\cdot 5-5)-10=5\cdot 5+5$$
$$10+3(15-5)-10=25+5$$
$$10+3\cdot 10-10=30$$
$$10+30-10=30$$
$$30=30$$
$$L=P$$

Równanie liniowe może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Takie równanie nazywamy **nieoznaczonym (tożsamościowym).**

$$2(x-1)+4=2x+2$$
$$2x-2+4=2x+2$$
$$2x+2=2x+2$$
$$2x-2x=2-2$$
$$0=0$$

$\downarrow$

0 = 0 !
Piszemy więc:

$\downarrow$

Równanie jest tożsame

$$x \in R$$

Równanie liniowe może nie mieć rozwiązań. Takie równanie nazywamy **sprzecznym.**

Równanie sprzeczne nie ma rozwiązań. W trakcie liczenia, dochodzimy do momentu, w którym powstaje sprzeczność (np. 0 = 9), wtedy znak równości przekreślamy: ($0 \neq 9$). Następnie należy zapisać: „Równanie jest sprzeczne" oraz $x \in \emptyset$ (czyt. x należy do zbioru pustego), można też zapisać słownie: „Brak rozwiązań".

Przykład 4

$$5x-9 \neq 2x+3(x-2)$$
$$5x-9 \neq 2x+3x-6$$
$$5x-9 \neq 5x-6$$
$$5x-5x \neq -6+9$$
$$0 \neq 3$$

$\downarrow$

0 ≠ 3 !
Piszemy więc:

$\downarrow$

Równanie jest sprzeczne

$$x \in \emptyset$$

Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to **proporcję**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ możemy zastąpić równością $\boldsymbol{d} \quad = b$.

Przykład 5

$$\frac{2x-5}{x+1}=\frac{5}{3}$$

Z: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$3(2x-5)=5(x+1)$$
$$6x-15=5x+5$$
$$6x-5x=5+15$$
$$x=20$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x = 20$.

Zdarzają się równania, które zawierają pewne „utrudnienie” w formie postaci ułamkowych. Łatwo można jednak ten problem rozwiązać. Należy „pozbyć” się mianowników, mnożąc całe równanie przez wspólny mianownik.

Wspólnym mianownikiem dla 4, 8 i 2 jest 8, dlatego mnożymy całe równanie przez 8.

$$\frac{2x+3}{4}-\frac{x-3}{8}+2x=\frac{-2x+4}{2}+5 \qquad /\cdot 8$$

UWAGA: Pamiętajmy by przemnożyć każde wyrażenie.

$$\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{2x+3}{\cancel{4}_{1}}-\overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{x-3}{\cancel{8}_{1}}+8\cdot 2x=\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\frac{-2x+4}{\cancel{2}_{1}}+8\cdot 5$$

Skracamy mianowniki z 8, a następnie przepisujemy równanie, pomijając uzyskane w mianownikach 1 (bo dzielenie przez 1 nie zmienia wartości).
UWAGA: Pamiętajmy by liczniki zapisać w nawiasach.

$$2\cdot(2x+3)-(x-3)+16x=4(-2x+4)+40$$

Od tego momentu mamy do rozwiązania „normalne” równanie:

$$4x+6-x+3+16x=-8x+16+40$$
$$4x-x+16x+8x=16+40-3-6$$
$$27x=47$$
$$x=\frac{47}{27}=1\frac{20}{27}$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x=1\frac{20}{27}$.

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $6x+7+2x=8-x+1+80$

b) $-4(2x-5)=2(3x+7)$

c) $(8x-5)+(2x-3)=(x-2)-(3x+4)$

d) $x(x-3)=(x+2)^2$

e) $(3x+5)^2+(4x+6)^2=(5x+6)^2+37$

f) $\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{7}{15}(3+x)$

g) $\frac{5x-4}{6}-\frac{7-2x}{2}=0$

h) $\frac{x(3-x)}{3}-\frac{3-2x^2}{6}=2x$

i) $3-\frac{2x+3}{2}=\frac{17}{6}-\frac{3x+2}{2}$

j) $\frac{0{,}7x+5}{7}=0{,}1\left(x+\frac{2}{7}\right)$

1. Odpowiedź: a) $9\frac{1}{9}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{-4}{7}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{84}{11}$; g) $\frac{25}{11}$; h) $\frac{-1}{2}$; i) $\frac{2}{3}$; j) równanie sprzeczne.

3.1.2 Rozwiąż równania:

a) $x-2(x+5)=-3(4+x)+8$

b) $\frac{x}{2}-3(x-2)=-5x+16$

c) $\frac{x+1}{3}-2(x-1)=\frac{x}{2}-x$

d) $(x+2)^2=2x+(x-3)^2$

e) $(x-2)(x+2)=(x-1)^2$

f) $2(x-4)(x+5)=x(2x-10)-14$

Odpowiedź: a) 3; b) 4; c) 2; d) $\frac{5}{8}$; e) 2,5; f) $2\frac{1}{6}$.

3.1.3 Podaj liczbę rozwiązań równania:

a) $2(3x-2)-5=7-2x$

b) $5x-3=2(x+4)+3x$

c) $(x-2)^2=(x-1)(x+1)-4x$

d) $8-(2x-4)=-2(x-1)+10$

e) $\frac{3x-2}{3}-2x=-\frac{2}{3}-x$

f) $(x+3)^2-(x-3)(x+3)=5$

Odpowiedź:

a) $x=2$ oznaczone; b) $0=11$ sprzeczne; c) $0=-5$ sprzeczne; d) $0=0$ nieoznaczone;
e) $0=0$ nieoznaczone; f) -2 i 1/6 oznaczone.

3.1.4 Rozwiąż równanie podane w postaci proporcji (najpierw przyjmij odpowiednie założenia):

a) $\frac{5}{4x+3}=\frac{2}{x}$

b) $\frac{x}{x-1}=\frac{5x+1}{5x+3}$

c) $\frac{3+x}{x-2}=\frac{5-x}{-x+1}$

d) $\frac{x-2}{-x}=\frac{1-x}{x-2}$

e) $\frac{7}{7x-10}=\frac{5}{5x-20}$

Odpowiedź: a) -2; b) $\frac{-1}{9}$; c) $\frac{13}{9}$; d) $\frac{4}{3}$; e) sprzeczne.

3.2 Nierówności liniowe

Teraz nauczę się:

- Rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Zaznaczać zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisywać w postaci przedziału.

Rozwiązywanie nierówności nie różni się znacząco od rozwiązywania równań.

W nierównościach zamiast znaku „=" mamy znak nierówności.

W porównywaniu do równań mamy tu do czynienia z dwoma podstawowymi różnicami:

1) W trakcie obliczeń, gdy zachodzi konieczność pomnożenia lub podzielenia całego równania przez liczbę ujemną, należy obrócić znak nierówności w drugą stronę.

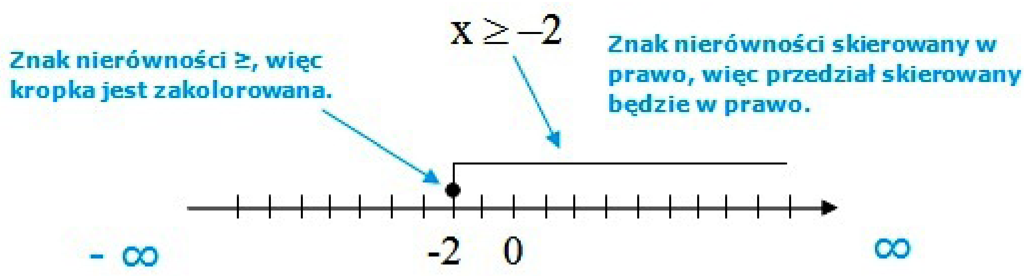
2) Po uzyskaniu rozwiązania, należy zaznaczyć je na osi oraz za pomocą przedziału liczbowego.

Przykład 1

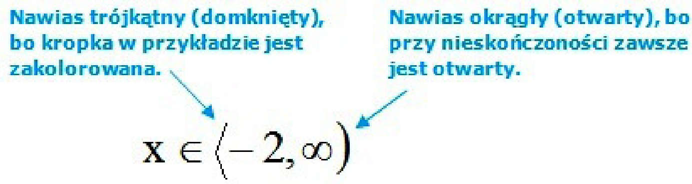
$$2(x+1)-3\le 4x+3$$
$$2x+2-3\le 4x+3$$
$$2x-1\le 4x+3$$
$$2x-4x\le 3+1$$
$$-2x\le 4\ /\div(-2)$$
$$x\ge -2$$

Dzielimy całe równanie przez (-2), w związku z czym **musimy obrócić znak nierówności.**

Teraz należy zaznaczyć wynik na osi liczbowej.



Po narysowaniu przedziału na osi, należy jeszcze go zapisać.



Przykład 2

Rozwiąż nierówność $5(x-1)-2x+3>2x$

$5(x-1)-2x+3>2x$

$5x-5-2x+3>2x$

$3x-2>2x$

$3x-2x>2$

$x>2$

$x\in(2;\ \infty)$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż nierówności:

a) $5(x-1)-2x+3>2x$

b) $-2(x+6)>4(3+2x)$

c) $3(2-x)\leq -\frac{2}{3}(6x-21)$

d) $1-\frac{2x-5}{3}<3$

e) $\frac{5x+1}{2}\geq\frac{2-5x}{-3}$

f) $2-3(3-2x)>3-\frac{19-12x}{2}$

g) $5-\frac{2x-3}{3}>4-\frac{4x+2}{6}$

Odpowiedź: a) $(2,+\infty)$; b) $(-\infty;-2,4)$; c) $(-\infty,8\rangle$; d) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; e) $\langle -\frac{7}{5},+\infty)$; f) $\varnothing$; g) R.

3.3 Przekształcanie wzorów

Teraz nauczę się:

- Przekształcać wzory matematyczne, fizyczne, chemiczne

Przekształcanie wzorów często sprawia uczniom wiele problemów, a jest to naprawdę bardzo proste. Pamiętaj, że każdy wzór możesz potraktować jako równanie. Działania wykonujesz zawsze po obu stronach równania. Aby pozbyć się jakiejś wielkości, wykonujesz działanie odwrotne do danego.

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczaniu jednej zmiennej, która we wzorze występuje jako niewiadoma.

Przykład 1

Znając wzór na siłę, wyznacz wzór na przyspieszenie ciała.

Podziel obie strony równania przez m

$$F=m\cdot a$$

$$a=\frac{F}{m}$$

Przykład 2

Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s=\frac{a\cdot t^2}{2}$ wyznacz czas.

Pomnóż obie strony równania przez $\frac{2}{a}$

$$s=\frac{a\cdot t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Wyciągnij pierwiastek z obu stron równania

ZADANIA

3.3.1 Przekształć wzory fizyczne , tak aby wyznaczyć:

a) m, v ze wzoru na pęd $p = m \cdot v$

b) T ze wzoru na częstość $f = \frac{1}{T}$

c) m, v ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$

d) l, g ze wzoru na okres wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

e) x, y z równania soczewki $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

f) l, s ze wzoru na opór $R = \rho\,\frac{l}{s}$

g) q, r z prawa Coulomba $F = k\frac{q^2}{r^2}$

Odpowiedź:

a) $m = \frac{p}{v}$, $v = \frac{p}{m}$; b) $T = \frac{1}{f}$; c) $m = \frac{2E}{v^2}$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$; d) $l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$, $g = \frac{4l\pi^2}{T^2}$;

e) $x = \frac{fy}{y-f}$, $y = \frac{fx}{x-f}$; f) $l = \frac{Rs}{\rho}$, $s = \frac{\rho l}{R}$; g) $q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}}$.

3.3.2 Ze wzoru na stężenie procentowe wyznacz:

a) masę substancji m_s

$$c_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$$

b) masę roztworu m_r

Odpowiedź: a) $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$; b) $m_r = \frac{m_s \cdot 100\%}{c_p}$.

3.3.3 Przekształć wzory matematyczne tak, aby wyznaczyć:

a) promień r, ze wzoru na objętość kuli $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) bok trójkata równobocznego, ze wzoru na pole trójkata $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) a, b, ze wzoru na pole trapezu $p = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

d) promień r, ze wzoru na pole koła $p = \pi r^2$

Odpowiedź: a) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$; b) $a = \sqrt{\frac{4p\sqrt{3}}{3}}$; c) $a = \frac{2p - bh}{h}$, $b = \frac{2p - ah}{h}$; d) $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$.

3.3.4 Wyznacz a z wyrażeń:

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{3b}=\frac{c}{d}$

b) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b-c}=\frac{1}{c}$

c) $(\frac{(a+2b)}{2}:\frac{3a}{b}):2d=e$

d) $\sqrt{\frac{2a}{a+c}}=2d$

Odpowiedź: a) $a=\frac{3db}{2d-3bc}$; b) $a=\frac{bc-c^2-b^2}{2c+b}$; c) $a=\frac{2b^2}{12ed-b}$; d) $a=\frac{4cd^2}{2-4d^2}$.

3.4 Rozwiązywanie zadań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się:

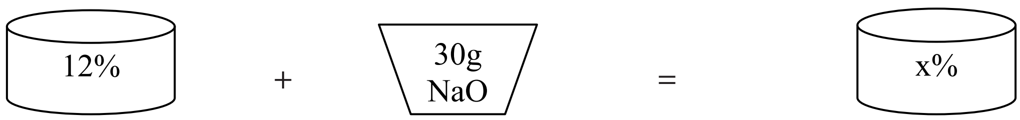
- Układać i rozwiązywać równania i nierówności liniowe do zadań z treścią.

Zadania chemiczne można rozwiązywać różnymi metodami. Często korzystamy ze wzorów chemicznych, które należy przekształcić do odpowiedniej postaci. Istnieją też inne sposoby. A oto jeden z nich:

Przykład 1

Do 130 g 12% roztworu NaOH wrzucono 40 g NaOH. Jakie jest jego stężenie procentowe

Rozwiązanie



130 g roztworu substancji rozpuszczanej 130g + 30g = 160g roztworu

Układamy równanie:

$12\% \cdot 130g + 30g = 160g \cdot x\%$

stąd $x =$ 28,5%

Przykład 2

Ile wody należy odparować z 200 gramów 25% roztworu Na_2SO_4, aby otrzymać roztwór o stężeniu 30%?

Rozwiązanie

W 200 g 25% roztworu znajduje się 0.25 · 200 = 50g czystego Na_2SO_4 i 150 g wody. Stężenie procentowe roztworu, jaki chcemy otrzymać, wynosi 30%. Jeśli masę rozpuszczalnika oznaczymy jako x, ze wzoru na stężenie procentowe otrzymamy równanie:

$$c_p = \frac{m_s . 100\%}{m_r}$$

$$30\% = \frac{50}{150 + x}$$

$$x = 18,(3)$$

Należy więc odparować 150 g – 18,(3) g = 131,7 g wody.

Rozwiązując zadania fizyczne, pamiętaj o jednostkach.

Przykład 3[43]

Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością 20 m/s, a drugą połowę ze stałą prędkością 30 m/s. Obliczycz średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi.

Rozwiązanie

Średnia prędkość samochodu wynosi $\mathbf{v}_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdzie

$\Delta s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = \mathbf{s}$ całkowita droga przebyta przez samochód,

$\Delta t = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ całkowity czas ruchu samochodu,

$t_1 = \frac{s}{2v_1}$ czas, w którym samochód przebył pierwszą połowę drogi jadąc z prędkością v_1

$t_2 = \frac{s}{2v_2}$ czas, w którym samochód przebył drugą połowę drogi z prędkością v_2

zatem średnia prędkość samochodu jest równa:

$$vśr = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 24 \ \frac{m}{s}$$

Uwaga: Średnia prędkość samochodu nie jest, w tym przypadku, średnią arytmetyczną prędkości.

Przykład 4

Adam wyjeżdża w trasę o godzinie 13.00 i jedzie motocyklem ze średnią prędkością 70 $\frac{km}{h}$. Piotr wyjeżdża godzinę póniej i ma do pokonania dwa razy krótszą trasę. Jedzie motocyklem z szybkością 50 $\frac{km}{h}$. Oblicz, jakie trasy mieli do pokonania motocykliści, jeżeli wiadomo, że skończyli jazdę o tej samej godzinie.

Rozwiązanie

Zauważ, że:

$$t_1 = t_2 + 1$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 70(t_2 + 1)$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 50\, t_2$$

$$s_1 = 2s_2$$

43 www.mif.pg.gda.pl/zz/3%20Kinematyka.pdf, 12.03.2013.

stąd otrzymujemy równanie

$$70(t_2 + 1) = 100\, t_2$$

Odpowiedź:

$$t_2 = 2\frac{1}{3}\ h, \qquad t_1 = 3\frac{1}{3}\ h, \qquad s_2 = 116{,}7\ km, \qquad s_1 = 233{,}4\ km$$

ZADANIA

3.4.1 Paweł jedzie do pracy ze średnią szybkością 50 $\frac{km}{h}$. W pogodny dzień podróż zajmuje mu 1,4 h. W deszczowy dzień jego średnia szybkość wynosi 35 $\frac{km}{h}$. Oblicz jaką drogę pokonuje Paweł do pracy i ile minut więcej zajmuje mu pokonanie tej trasy w deszczowy dzień.

Odpowiedź: $s = 70$ km, t_2-$t_1 = 36$ min

3.4.2 Oblicz średnią szybkość Ziemi w ruchu dookoła Słońca, wiedząc że w ciągu roku planeta pokonuje drogę 10^9 km.

Odpowiedź: $v = 1{,}14 \cdot 10^5 \frac{km}{h}$

3.4.3 Samolot leciał z szybkością v = 780 $\frac{km}{h}$ i pokonał drogę 1800 km, następnie 1400 km leciał z wiatrem, którego szybkość wynosiła 150$\frac{km}{h}$. Oblicz czas przelotu całej trasy i średnią szybkość samolotu.

Odpowiedź: $t = 3$ h 12 min, $v = 846 \frac{km}{h}$

3.4.4 Karuzela wykonała 4 okrążenia o promieniu $r = 15$ m wokół własnej osi w czasie $t = 100$ s. Oblicz średnią szybkość karuzeli.

Odpowiedź: $v = \frac{\mathrm{n}2\pi r}{t} = 3{,}77 \frac{m}{s}$

3.4.5 Statek wycieczkowy płynie z miejscowości A do B, tam i spowrotem. Prędkość statku względem wody to 40 $\frac{km}{h}$, a prędkość wody względem brzegu rzeki to 2 $\frac{m}{s}$. Oblicz średnią prędkość statku na całej trasie.

Odpowiedź:

(Pamiętaj o zamianie jednostek. Wykorzystaj wzór z przykładu 3, rozważ ruch w obu kierunkach).

$v_{śr} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1} = 10{,}75 \frac{m}{s}$

3.4.6 Swobodnie puszczona kulka stalowa odbija się (bez strat energii) od poziomej, doskonale sprężystej powierzchni, uderzając w nią co 1,2 s. Jak wysoko podskakuje kulka? Przyjmij $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Odpowiedź: Skorzystaj ze wzoru $h = \frac{gt^2}{2}$, za czas podstaw $\frac{t}{2}$ (pomyśl dlaczego), $h = 1{,}8$ m.

3.4.7 Z miast odległych o 150 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwa samochody. Średnia prędkość jazdy jednego z nich wynosi 80 $\frac{km}{h}$, a drugiego 60 $\frac{km}{h}$. O której godzinie i w jakiej odległości od każdego z miast nastapi ich spotkanie?

Odpowiedź: (Pamiętaj, że jadą tyle samo czasu).

$s_1 = v_1 \cdot t = 80t$

$s_2 = v_2 \cdot t = 60t$

$s = 80t + 60t = 150$

$t = 1{,}0714\, h = 1h\, 4\, min$

$s_1 = 85{,}7\, km$

$s_2 = 64{,}3\, km$

Samochody spotkają się o godzinie 9.04.

3.4.8 Ile gramów 30% roztworu LiOH należy dodać do 200 gramów 15% roztworu tego związku, aby otrzymać roztwór 20%?

Odpowiedź: $0{,}3x + 0{,}15 \cdot 200 = 0{,}2(200 + x)$

$x = 100g$

3.4.9 Odparowano 35 g 12% roztworu NaCl. Jaką masę osadu otrzymano?

Odpowiedź: $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$

$m_s = 12 \cdot 35/100 = 4{,}2$ g

3.4.10 Ile $CaCl_2$ należy dodać do 300 gramów 25% roztworu $CaCl_2$, aby otrzymać roztwór o stężeniu 40%?

Odpowiedź: $0{,}25 \cdot 300 + x = 0{,}4x + 0{,}4 \cdot 300$

$x = 75$ g

3.4.11 Zmieszano 120 g 18% roztworu KOH i 35 g 25% roztworu tego związku. Jakie jest stężenie procentowe powstałego roztworu?

Odpowiedź: $ms = 120 \cdot 18\% + 35 \cdot 25\% = 30{,}35$ g

$mr = 120 + 35 = 155$ g

$Cp = 19{,}58\%$

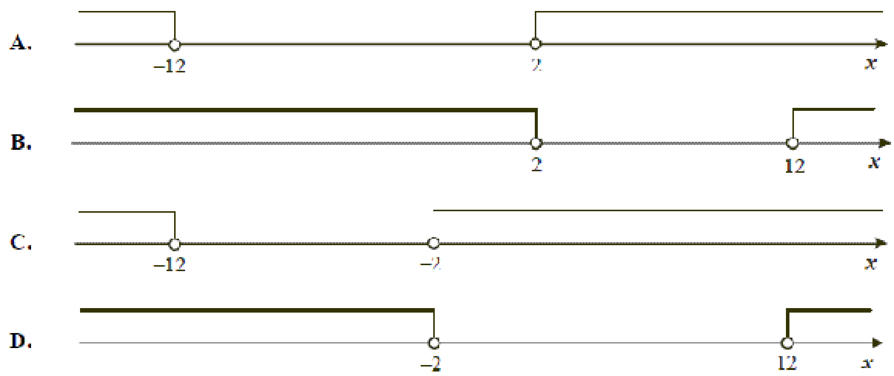
1. Wskaż nierówność, która opisuje sumę przedziałów zaznaczonych na osi liczbowej:[44]

a) $|x-2|>4$ b) $|x-2|<4$ c) $|x-4|<2$ d) $|x-4|>2$

2. Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3}=\frac{2}{3}$ jest liczba:

a) 21 b) 7 c) 17/3 d) 0

3. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$[45]



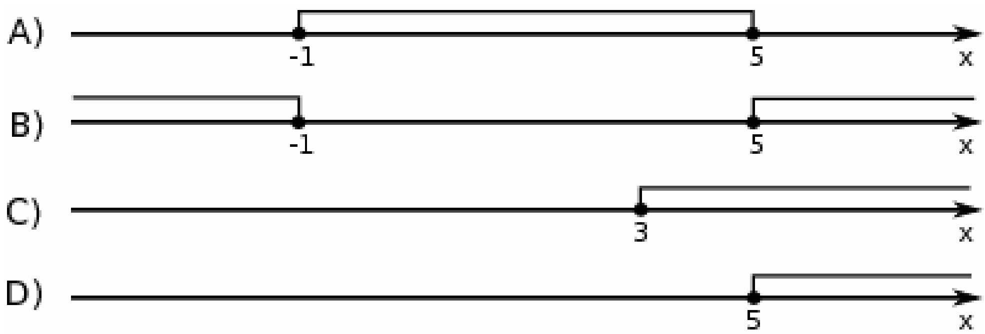
4. Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest:

a) 1 b) 7/3 c) 4/7 d) 7

5. Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3)<0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

6. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x-2|\geq 3$.[46]



7. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.[47]

a) $|x+1|>5$ b) $|x-1|<2$ c) $|x+\frac{2}{3}|\leq 3$ d) $|x-\frac{1}{3}|\geq 3$

8. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36=x(x+3)$ należy do przedziału:

a) $(3, 10)$ b) $(11, +\infty)$ c) $(-5, 9)$ d) $(-\infty, 5)$

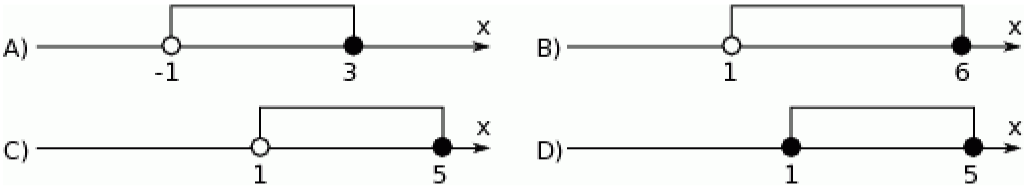
---

44 Zadania: 1, 2 zaczerpnięte z Próbna matura, CKE, listopad, 2010.
45 Zadania: 3, 4, 5 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010.
46 Arkusz maturalny, Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
47 Zadania: 7, 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011.

9. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}<\frac{5x}{12}$ jest:

a) 1 b) 2 c) –1 d) – 2

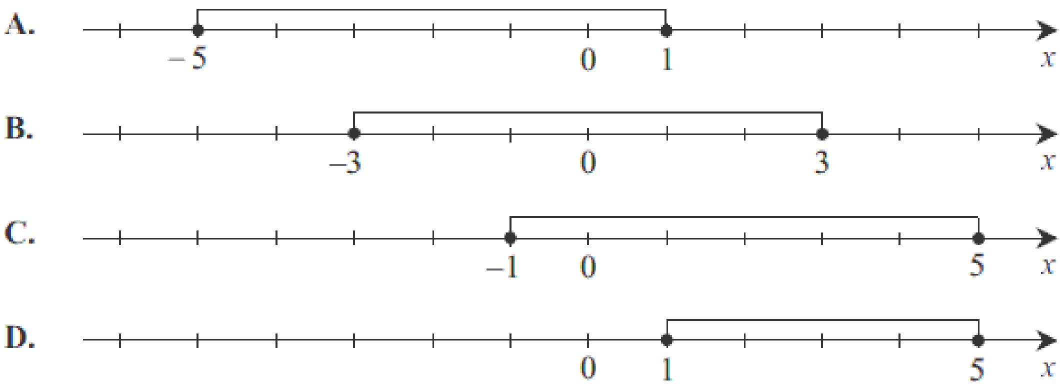
10. Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\leq 0$ i $x>1$.



11. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1|=4x$.[48]

a) $x=-1$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=-2$

12. Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\leq 3$:[49]



13. **Rozwiązaniem równania $\frac{x-6}{2x-4}=\frac{2}{3}$ jest:**

a) 8 b) 10 c) $\frac{1}{2}$ d) –10

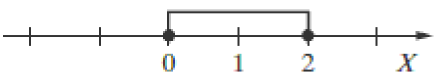
14. Największa liczba naturalna n spełniająca nierówność $n<2\pi-1$ to:[50]

a) 3 b) 5 c) 6 d) 0

15. Rozwiązaniem równania $-2=\frac{x-1}{x+2}$ jest liczba:

a) –1 b) 1 c) 0 d) $\frac{5}{3}$

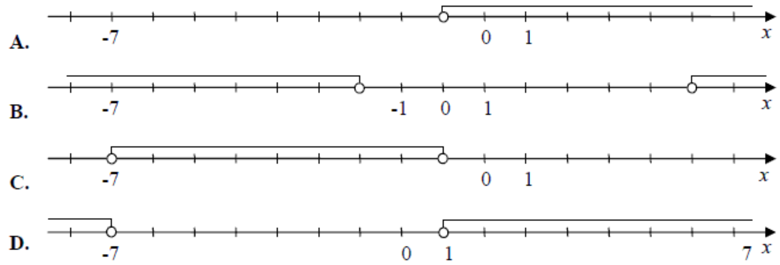
16. Przedział zaznaczony na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



a) $|x+1|\leq 1$ b) $|x+1|\geq 2$ c) $|x-1|\geq 1$ d) $|x-1|\leq 1$

48 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2012.
49 Zadania: 12, 13 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2010.
50 Zadania: 14, 15, 16 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011.

17. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+3| > 4$ jest przedstawiony na rysunku:[51]



18. Rozwiązaniem równania $3(2-3x) = x-4$ jest:[52]

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=3$ d) $x=4$

19. Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tą zależność jest:

a) $0{,}15 \cdot x = 230$ b) $0{,}85 \cdot x = 230$

c) $x + 0{,}15 \cdot x = 230$ d) $x - 0{,}15 \cdot x = 230$

20. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $2x+1 = 2-\sqrt{3}x$ i rozstrzygnij, czy rozwiązanie jest liczbą wymierną?[53]

21. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójata. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

22. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$[54]

23. **(4pkt)** Uzasadnij, że $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}^{40} \cdot (3{,}1)^{22}}{6^2} < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{22}$.

24. **(2 pkt)** Oblicz, dla jakich wartości parametru a wartość wyrażenia $|3a-1|$ nie jest większa od 3.

25. **(2 pkt)** Trzej wspólnicy postanowili podzielić zysk w wysokości 6500 zł w stosunku $1:4:8$. Jakie kwoty dostaną ci wspólnicy?

26. **(2 pkt)** Sprowadź wyrażenie $|x-1|+|x|-|-x+1|$ do najprostszej postaci, gdy $x \in (0,1)$[55].

27. **(2 pkt)** Za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu. Ile lat ma Julka?

---

51 Arkusz maturalny z matematyki, OKE, Poznań, 2013.
52 Zadania 18, 19 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, sierpień, 2011.
53 Zadania 20, 21 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
54 Zadania 22, 23, 24, 25 zaczerpnięte z informatora CKE, 2007.
55 Zadania 26, 27 zaczerpnięte z próbnej matury z Operonem, listopad, 2009.

4 Funkcja liniowa

To już potrafię:

- Zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- Odczytać współrzędne danych punktów;
- Odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- Odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- Obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

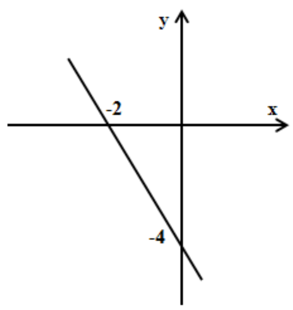
Zad.1 Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje wartości ujemne dla argumentów:

a) $x < -4$

b) $x < -2$

c) $x > -2$

d) $x < -3$



Zad.2 Na odcinku trasy długości 120 km samochód jechał z prędkością y km/h. Wzór funkcji określającej zależność czasu od prędkości to:

a) $y = 120x$ b) $y = \frac{120}{x}$ c) $\frac{x}{y} = 120,\ y \neq 0$ d) $\frac{y}{x} = 120,\ x \neq 0$

Zad.3 Które przyporządkowanie nie jest funkcją:

a) Każdemu nauczycielowi przyporządkujemy ucznia, którego uczy.

b) Każdemu wielokątowi przyporządkujemy liczbę jego boków.

c) Każdej figurze geometrycznej przyporządkowana jest jej nazwa.

d) Każdej liczbie całkowitej jest przypisana liczba do niej przeciwna.

Zad.4. Miejscem zerowym funkcji $y=-6x+3$ jest:

a) Punkt $\left(\frac{1}{2},0\right)$ b) $x=\frac{1}{2}$ c) Punkt $(0{,}3)$ d) $x=3$

Zad.5 Wartość funkcji określonej wzorem $f(x)=2x(2-x)$ dla argumentu $x=4$ wynosi:

a) -16 b) 16 c) 8 d) 0

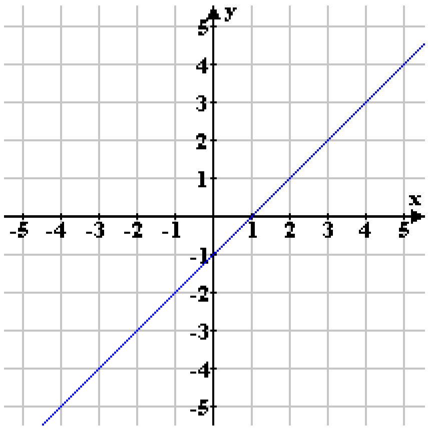
Zad.6 Które zdanie dotyczące funkcji jest $y=2x-4, x\in R$ prawdziwe:

a) Funkcja jest malejąca

b) Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(2,4)$

c) Miejscem zerowym tej funkcji jest 2

d) Funkcja jest stała



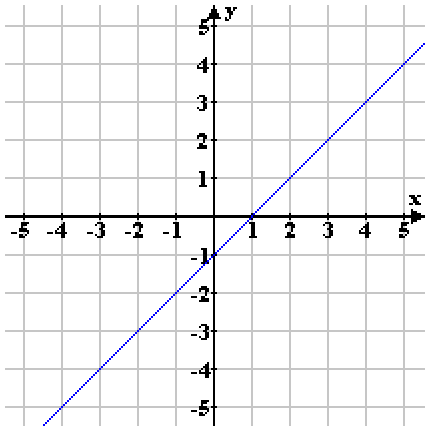
Zad.7. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej. Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?

a) 4

b) 2

c) -4

d) 2



Zad.8 $y=5$ jest to funkcja:

a) Rosnąca b) Stała c) Malejąca d) Nie jest to funkcja

Zad.9 Do wykresu funkcji $y=ax, x\in R$, należy punkt $A=(-2{,}5)$. Wzór tej funkcji to:

a) $y=5x$ b) $y=-2x$ c) $y=2\frac{1}{2}x$ d) $y=-2{,}5x$

Zad.10. Funkcja określona jest następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkujemy sumę jej cyfr. Dziedziną tej funkcji jest:

a) Zbiór wszystkich liczb naturalnych

b) Zbiór liczb naturalnych większych od 9, a mniejszych od 100

c) Zbiór liczb wymiernych większych od 9, a mniejszych od 100

d) Zbiór liczb całkowitych

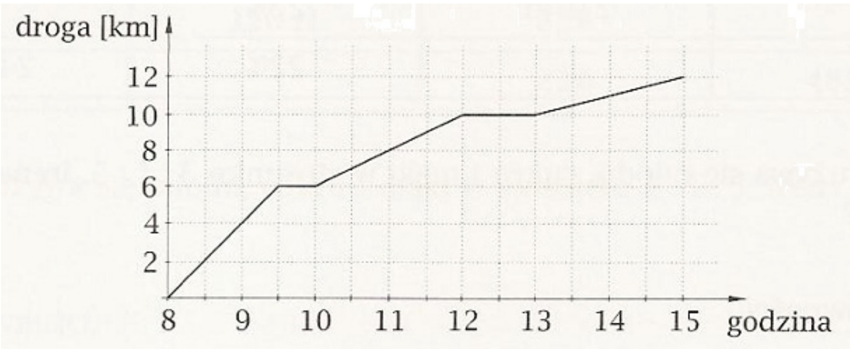
Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	A	C	B	B	D	B

ZADANIA OTWARTE

Zad.1 Trzech pracowników może oczyścić basen w ciągu 5 godzin. Napisz wzór funkcji określającej zależność liczby pracowników (y) od liczby godzin pracy (x). Podaj współczynnik proporcjonalności tej funkcji.

Zad.2 Wykres przedstawia odległość, jaką pokonała Małgosia w zależności od czasu.



Na podstawie wykresu uzupełnij poniższy tekst:

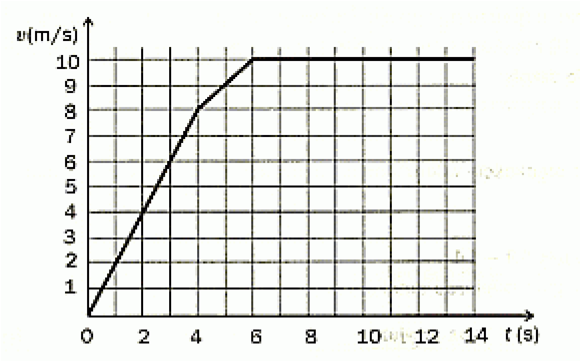
Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła ....

Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie ....

Pierwsze 8 km pokonała w czasie ....

Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością ....

Zad.3 Wykres przedstawia zależność szybkości od czasu w pewnym ruchu.



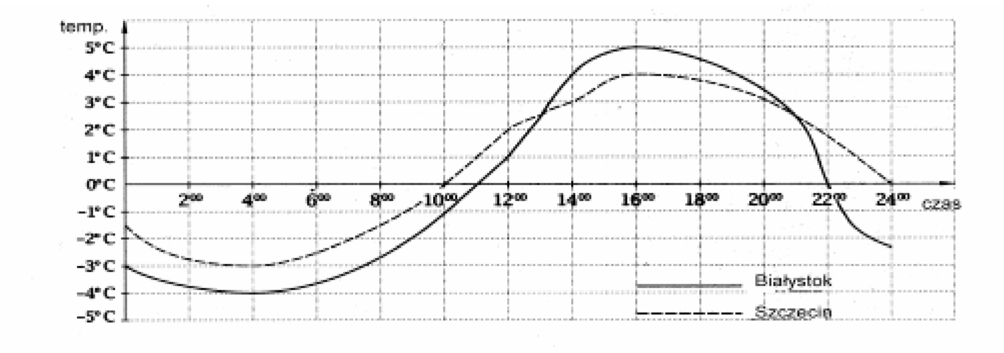
Odpowiedz na pytania:

a) Kiedy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a kiedy jednostajnym?

b) Jaką drogę przebyło ciało między 6 a 8 sekundą ruchu?

c) Jaka była maksymalna szybkość tego ciała?

Zad.4 Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Białymstoku i Szczecinie.



a) Jaką temperaturę pokazywał termometr w obu miastach o 12^{00}?

b) O której godzinie temperatura w tych miastach wynosiła 0°C?

c) W jakich godzinach temperatura w Białymstoku była ujemna?

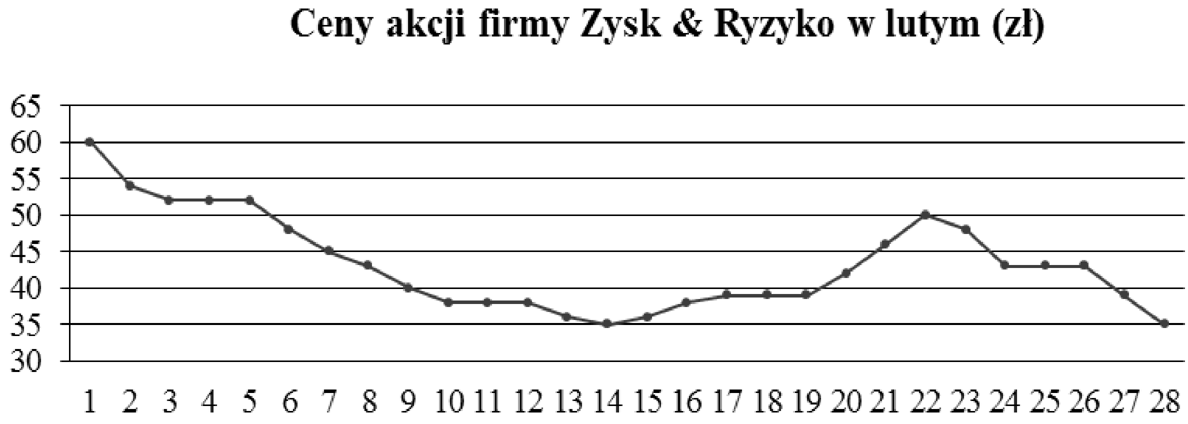
d) O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?

e) W jakich godzinach w Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie?

f) Jaka była najwyższa temperatura w Białymstoku, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?

g) Jaka temperatura była w Białymstoku, gdy w Szczecinie były 3°C?

Zad.5 Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.



a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Odpowiedzi:

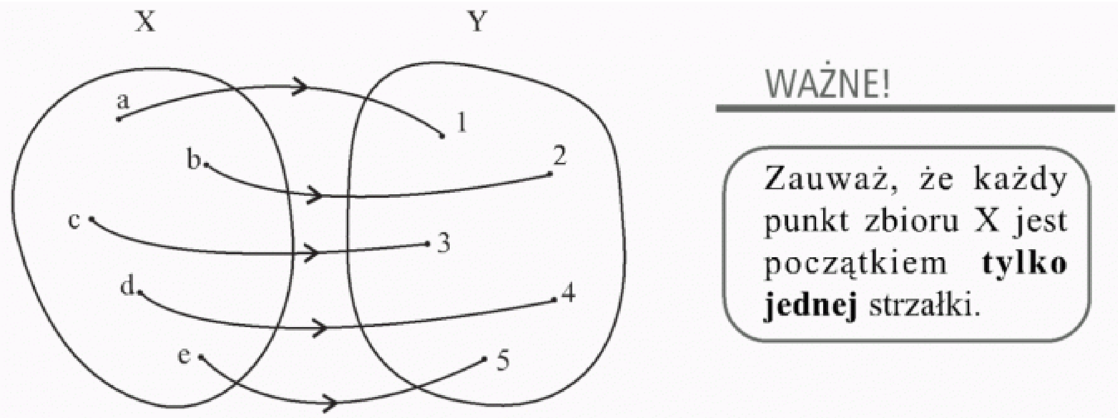
Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$y = \frac{15}{x}, x \in R_+, a = 15$
2	Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła 4 km Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie 9^{30} Pierwsze 8 km pokonała w czasie 3 godzin Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością 1 km/h.
3	a) Ciało poruszało się ruchem przyspieszonym w pierwszych czterech sekundach ruchu oraz od czwartej do szóstej sekundy ruchu – z innym przyspieszeniem. Z ruchem jednostajnym mamy do czynienia od szóstej do czternastej sekundy ruchu. b) $s = 10\frac{m}{s} \cdot 2s = 20m$ c) Maksymalna szybkość, którą osiągnęło to ciało, wynosi $10\frac{m}{s}$
4	O godzinie 12^{00} w Szczecinie były 2°C, a w Białymstoku 1°C. 0°C w Białymstoku było o godzinie 11^{00}, a w Szczecinie o 10^{00}. W Białymstoku ujemna temperatura była w godzinach 0^{00} – 11^{00}. Temperatura w obu miastach była taka sama o godzinie 13^{00} i 21^{00}. W Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie w godzinach 13^{00} – 21^{00}. Najwyższa temperatura w Białymstoku wynosiła 5°C (godz. 16^{00}), a w Szczecinie 4°C (również o godz. 16^{00}). Gdy w Szczecinie były 3°C, to w Białymstoku były 4°C.
5	Wartość akcja spadła w lutym o 25 zł. Kupując i sprzedając akcje w ciągu lutego można było na nich zarobić. Aby zysk był możliwie największy (15 zł za akcję), należało kupić akcje 14 lutego, a sprzedać 22 lutego. Poniedziałki były: 5, 12, 19, 26 lutego.

4.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji.

Teraz nauczę się:

- Rozpoznać i podać przykłady funkcji,
- Posługiwać się pojęciami: dziedzina, argumenty, wartość funkcji,
- Określać funkcję za pomocą grafu, tabeli, wykresu, opisu słownego.

Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory i pewne przyporządkowanie.



Symbolicznie zapisujemy to jako f: X → Y

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji (D_f), a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**.

Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

Zmienną *x* nazywamy też **zmienną niezależną**, a *y* **zmienną zależną**.

$\boldsymbol{X = \{a, b, c, d, e\}}$ **– zbiór argumentów (dziedzina funkcji)**

$\boldsymbol{Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ **– zbiór wartości funkcji**

Bardzo ważne!

Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość (z jednego punktu grafu może wychodzić tylko jedna strzałka).

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h,...

Nasza funkcja f jest ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$ do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

Funkcja f liczbie a przyporządkowuje liczbę 2.

Zapisujemy to tak:

$f(a) = 2$ – czytamy: f od a równa się 2

Liczbie b funkcja f przyporządkowuje liczbę 1, piszemy:

$f(b) = 1$ – czytamy: f od b równa się 1

Liczbie c funkcja f przyporządkowuje liczbę 3, piszemy:

$f(c) = 3$ – czytamy: f od c równa się 3

Liczbie d funkcja f przyporządkowuje liczbę 4, co zapisujemy:

$f(d) = 4$ – czytamy: f od d równa się 4

lub dla argumentu d wartość funkcji wynosi 4.

Liczbie e funkcja f przyporządkowuje liczbę 5, piszemy:

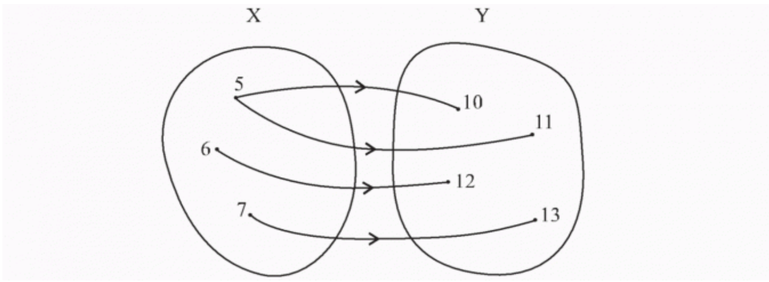
$f(e) = 5$ – czytamy: f od e równa się 5

lub: dla argumentu e wartość funkcji wynosi 5.

Uwaga!

Nie każde przyporządkowanie między dwoma zbiorami nazywa się funkcją.

Funkcją nazywamy tylko takie przyporządkowanie, według którego **każdemu elementowi z dziedziny** (ze zbioru X) przyporządkowany jest **dokładnie jeden element z przeciwdziedziny** (ze zbioru Y).



Rysunek 4-1 – Funkcja

Ten graf nie opisuje funkcji, bo liczbie 5 ze zbioru X przyporządkowane zostały dwie liczby: 10 i 11 ze zbioru Y. Zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi zbioru X ma być przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru Y.

Nie ma żadnych zastrzeżeń co do natury zbiorów X i Y. Mogą być to zupełnie dowolne zbiory.

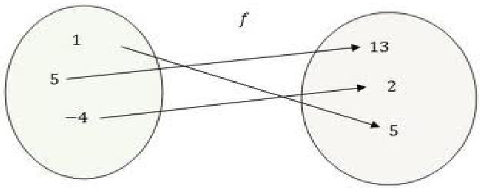
My jednak będziemy zajmować się tylko przypadkiem, gdy zbiory X i Y będą pewnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Innymi słowy, argumentami i wartościami funkcji będą... no właśnie... będą liczby.

Sposoby określania funkcji

Funkcje można określić za pomocą:

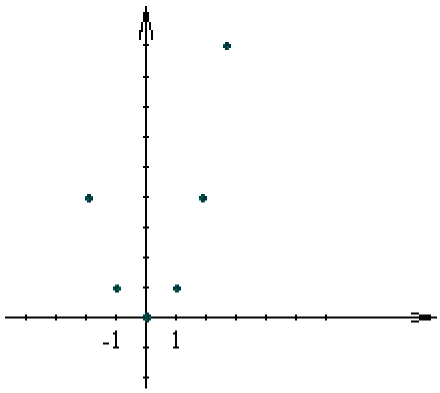
– grafu

Przykład 1



Rysunek 4-2 – Graf

– wykresu



Rysunek 4-3 – Wykres

Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

– wzoru

Przykład 2

$y = x^2$, dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Używa się również zapisu $f(x) = x^2$, lub $f: x \to x^2$.

– tabelki

Przykład 3

x	-7	-5	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	5	7	6	5	3	-2

Rysunek 4-4 – Tabelka

– opisu słownego

Przykład 4

Mamy daną funkcję, określoną opisem słownym:

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

– zbioru par uporządkowanych

Przykład 5

{(–2,4), (–1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)}

Takie określenie funkcji jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Przykład 6

Funkcję ”Każdej liczbie ze zbioru $X=\{-4,-3,-2,0,1,3\}$ przypisujemy liczbę o 2 od niej mniejszą”, przedstaw w postaci wzoru, tabeli i wykresu.

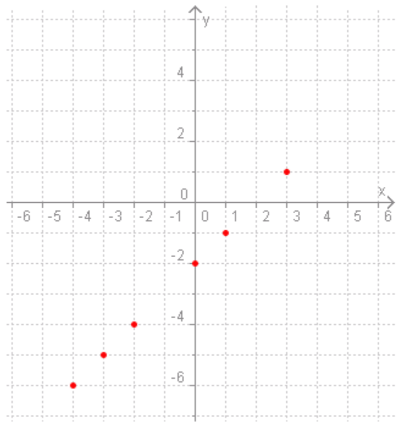
Wzór:

$y=x-2$

Tabela:

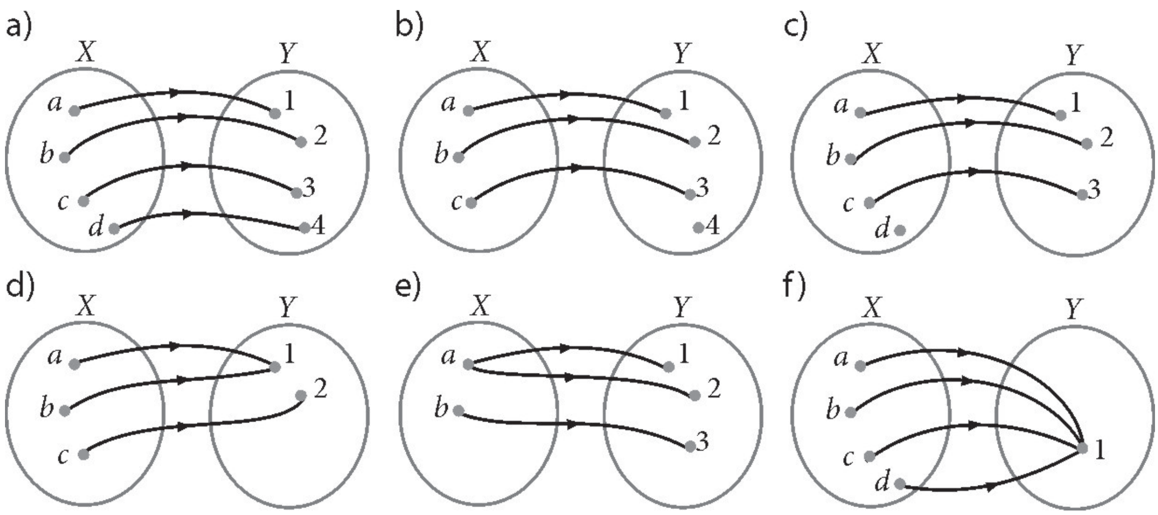
x	–4	–3	–2	0	1	3
y	–6	–5	–4	–2	–1	1

Wykres:



ZADANIA

4.1.1 Który z grafów określa funkcję:



Odpowiedź: a; b; d; f.

4.1.2 Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

b) Każdej liczbie różnej od 0 przyporządkowano odwrotność tej liczby.

c) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

f) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

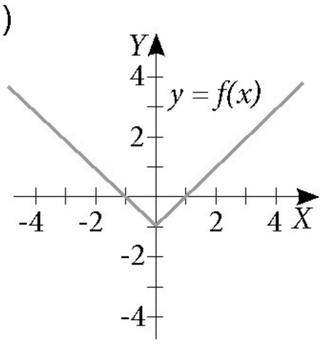
g) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

h) Każdej liczbie przyporządkowano kwadrat tej liczby.

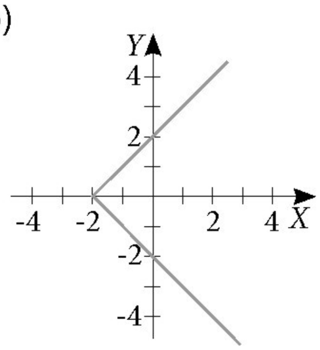
Odpowiedź: a; b; c; d; e; f; g; h – tak.

4.1.3 Podaj, które z wykresów przedstawiają funkcję. Odpowiedź uzasadnij.

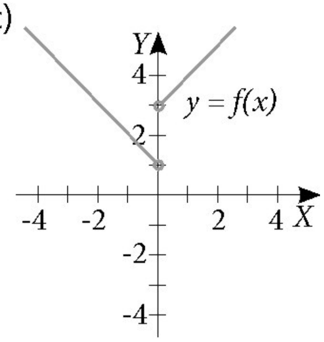
a)



b)



c)



Odpowiedź: a; c.

4.1.4 Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej dwukrotność tej liczby powiększoną o jeden. Opisane słowami przyporządkowanie opisz:

a) wzorem

b) tabelką dla argumentów –3,–2,–1,0,1,2,3

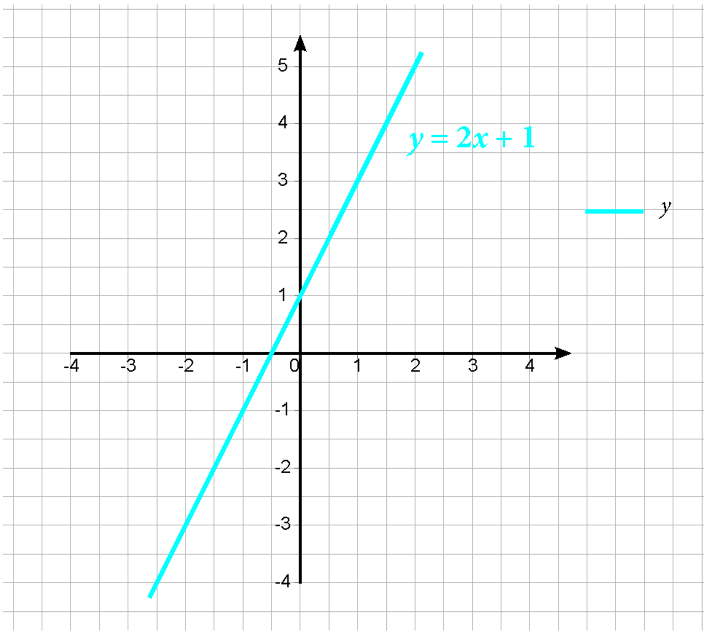
c) wykresem

Odpowiedź: a) $y = 2x + 1$.

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)



4.2 Własności funkcji

Teraz nauczę się:

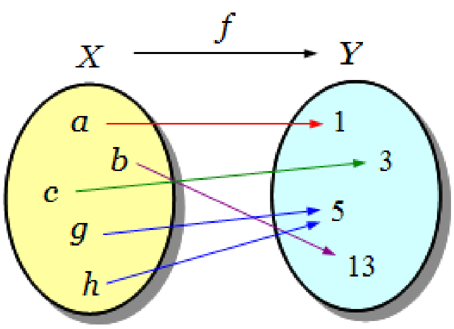
- Obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu,
- Posługiwać się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczania, dla jakiego argumentu przyjmuje daną wartość,
- Wyznaczać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą.

Przyporządkowanie, będące funkcją, możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

a) Dziedzina i wartość funkcji

Wiemy już z poprzedniego działu, że zbiór X, na którym określona jest funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji, a zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Przykład 1



Rysunek 4-5 – Dziedzina i przeciwdziedzina

$X = \{a, b, c, g\ h\}, Y = \{1, 3, 5, 13\}$

Zbiorem wartości funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$

Przykład 2

Wyznacz dziedzinę funkcji podanej wzorem:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $x = 2$ w mianowniku wyrażenia będziemy mieli 0, a więc wyrażenie nie będzie miało sensu: $X = D_f = R/\{2\}$

Możemy zapisać dziedzinę inaczej: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Wskazówka:

Dziedziną funkcji danej wzorem jest zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określona.

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

Rozwiązanie:

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$X = D_f : x \in \langle 2, +\infty)$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$

Rozwiązanie:

$x + 4 \rangle 0$

$x \rangle -4$

$X = D_f : (-4, +\infty)$

ZADANIA

4.2.1 Dana jest funkcja

a) $f(x) = 3x + 4$ b) $f(x) = 2x^2 + 1$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Oblicz:

$f(0), f(1), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(\sqrt{2}), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f(x-1), f(x^2)$

Odpowiedź:

a) $f(0) = 4$, $f(1) = 7$, $f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{x} + 4$, $f(x-1) = 3x + 1$, $f(x^2) = 3x^2 + 4$

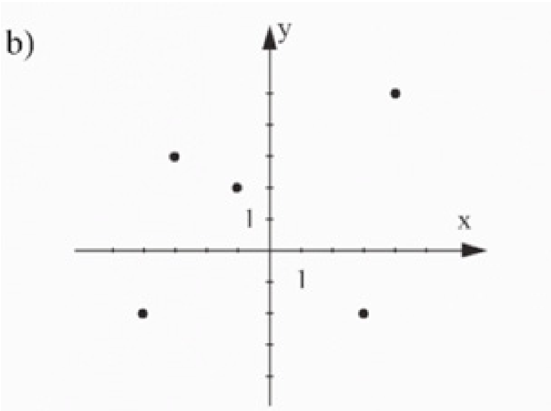
b) $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(\sqrt{2})=7$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^2}+1$, $f(x-1)=2x^2-4x+3$, $f(x^2)=2x^4+1$

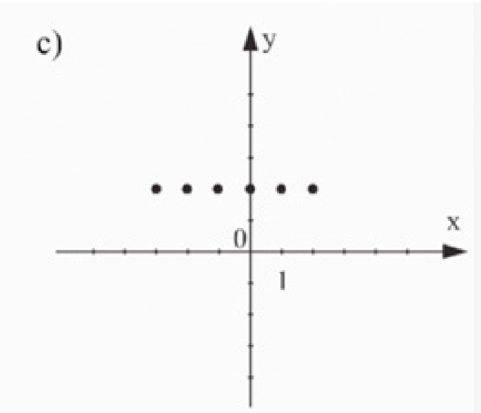
c) $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$, $f(x-1)=\frac{x-1}{x}$, $f(x^2)=\frac{x^2}{x^2+1}$

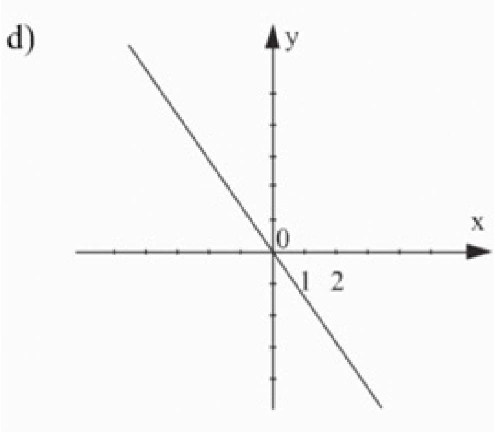
4.2.2 Dla każdej z tych funkcji odczytaj dziedzinę i zbiór wartości:

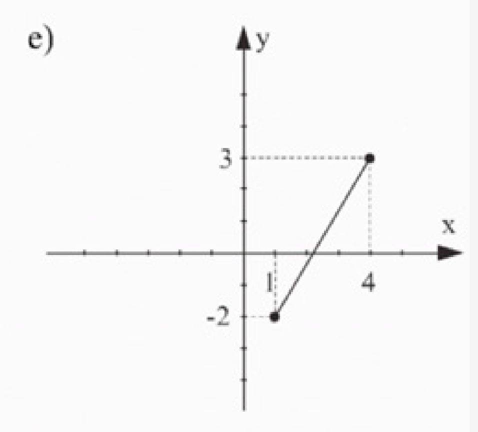
a)

x	-2	-1	0	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
y	4	3	5	0	$-2\frac{1}{2}$



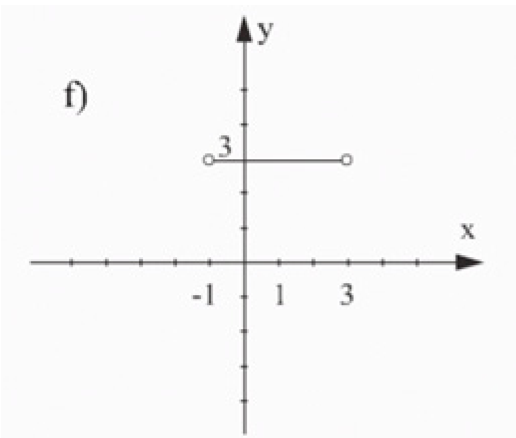






Odpowiedź:

a) $Df=\{-2,-1.0,1\frac{1}{2},5\frac{1}{3}\}$ $Y=\{-2\frac{1}{2},0,3,4,5\}$; b) $Df=\{-4,-3,-1,3,4\}$ $Y=\{-2,2,3,\%\}$;
c) $Df=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$ $Y=\{2\}$; d) $Df=R$ $Y=R$; e) $Df: x\in<1,4>$ $Y\in<-2,3>$; f) $Df: x\in(-1,3)$ $Y=\{3\}$.



4.2.3 Funkcja określona jest tabelką:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	–3	3	–1	–2	5	2

a) podaj zbiór argumentów i zbiór wartości funkcji

b) wymień wszystkie ujemne argumenty tej funkcji

c) odczytaj wartość dla argumentu $x = 0$ oraz argumentu $x = 3$

d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2

e) czy punkt (–1,–3) należy do wykresu funkcji

f) narysuj wykres tej funkcji

Odpowiedź:

a) $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $Y = \{-3,-2,-1,1,2,3,5\}$

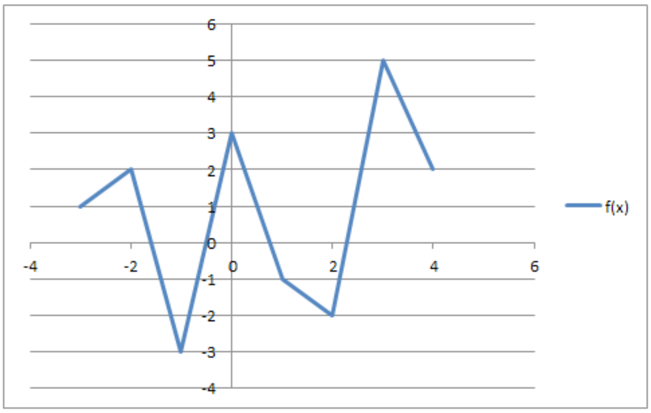
b) $-3,-2,-1$

c) $f(0) = 3, f(3) = 5$

d) $x = 4, x = -2$

e) tak

f)



4.2.4 Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-3)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+10x+25}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x+1}$

h) $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{x}{x+4} - \dfrac{1}{x-1}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+3}$

j) $f(x) = -3x^2 + 7x - 8$

k) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-4}{x+2}$

m) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9} + \dfrac{4}{x^2}$

n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2}}$

o) $f(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{2-x}} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+4}}$

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2-16}$

Odpowiedź:

a) R; b) R/ {–1, 3}; c) R/ {–3, 3}; d) R; e) R; f) $x \in (-\infty, 4)$; g) $x \in < 1, +\infty)$;
h) $x \in < -3, 1) \cup (1, +\infty)$; i) R\ {–3, 1}; j) R; k) R; l) R\ {–2,0}; m) R\ {–3,0,3};
n) $X \in (2, +\infty)$; o) $x \in (-4,2)$; p) $x \in (4,+\infty)$.

Miejsca zerowe

Argument x, dla którego $f(x) = 0$ nazywamy **miejscem zerowym** funkcji f.

Przykład 3

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{2 - x^2}{\sqrt{x - 1}}$ c) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$

Rozwiązania:

a)
$D_f = R$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$
$(x - 1)(x + 1) = 0$
$x - 1 = 0$ lub $x + 1 = 0$
zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji f to $x = 1$ oraz $x = -1$.

b)
$D_f = (1, +\infty)$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0$
$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$
$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$
$\sqrt{2} \in D_f$ $\quad -\sqrt{2} \notin D_f$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2}$.

c)
$D_f : x \in R / \{4\}$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$
$x = -2 \in D_f$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji jest $x = -2$.

Przykład 4

Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe, dziedzinę i przeciwdziedzinę.

Dziedzina:

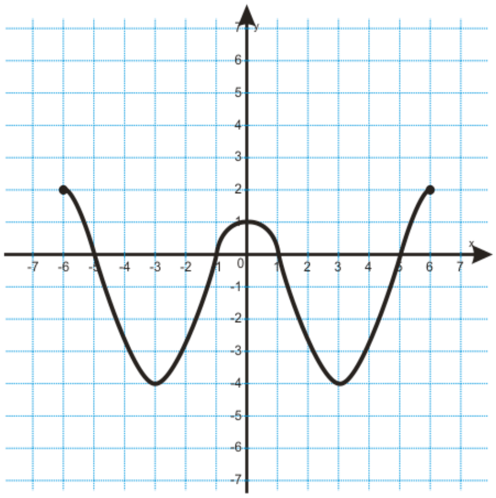
$D_f = \langle -6; 6 \rangle$

Zbiór wartości:

$Z_w = \langle -4; 2 \rangle$

Miejsca zerowe:

$x = -5, x = -1, x = 1, x = 5$



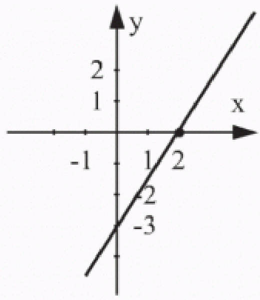
ZADANIA

4.2.5 Wypisz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

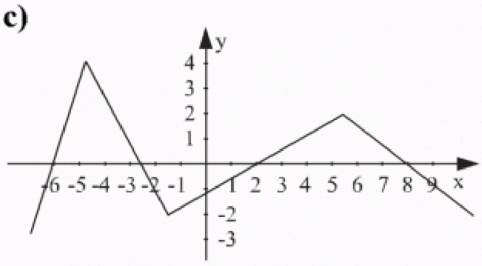
a)

x	-5	0	1	5
y	2	3	4	0

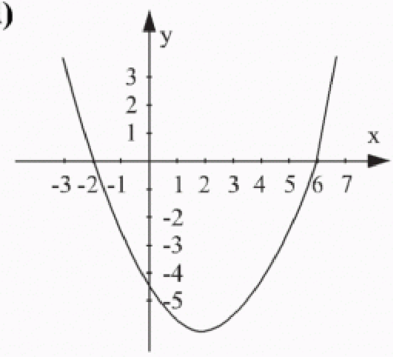
b)



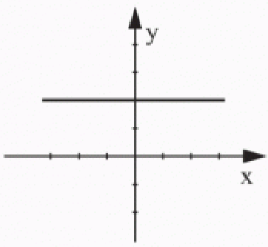
c)



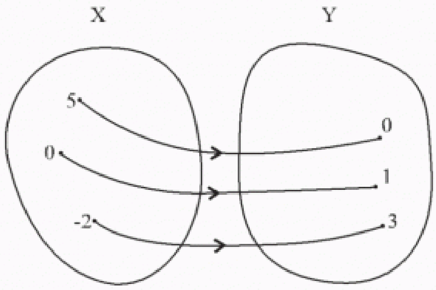
d)



e)



f)



Odpowiedź: a) $x = 5$; b) $x = 2$; c) -6; $-2{,}5$; 2; 8; d) $2{,}6$; e) brak miejsc zerowych; f) $x = 5$.

4.2.6 Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji *f*.

a) $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{x-3}{x-3}$ d) $f(x)=\frac{1+2x}{4x-2}$

e) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ f) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ g) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ h) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

i) $f(x)=\sqrt{x+9}$ j) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ k) $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x}$ l) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$

m) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+9}$

Odpowiedź:

a) df R/–2; $x=2$, b) df R/2; $x=-2$, c) df R/3; brak miejsc zerowych, d) df R oprócz 1/2; $x=-1/2$, e) df (2,+∞); brak miejsc zerowych, f) df (–2; +∞) $x=0$, g) df R/{–3,3}; brak miejsc zerowch, h) df R/{–2,2}, brak miejsc zerowych, i) df <–9,+∞) ; f(–9) = 0, j) df <0,3) suma (3,+∞); f(0) = 0, k) df <3,+∞); f(3) = 0, l) df (–3,+∞); f(0) = 0, m) df = R; f(–1) = 0.

4.3 Monotoniczność funkcji

Monotoniczność jest to pewna cecha funkcji, która mówi nam, co się dzieje z wartościami funkcji podczas zwiększania wartości liczbowych argumentów funkcji. I tak, wyróżniamy z tego względu funkcje:

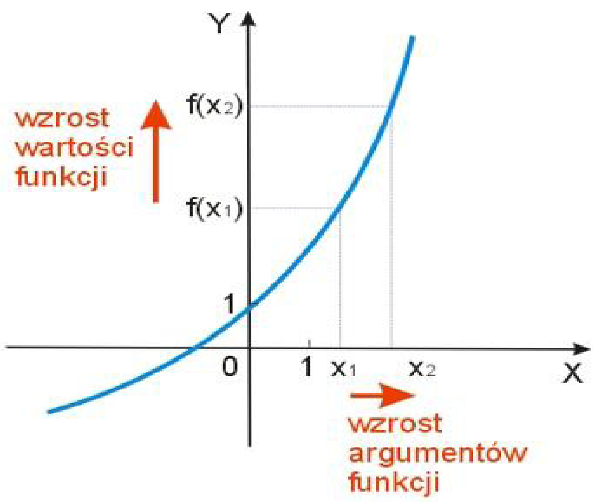
- rosnące
- malejące
- nierosnące
- niemalejące

Warto tu jeszcze wspomnieć o funkcji stałej, choć nie mówimy o niej jak o funkcji monotonicznej.

Funkcja rosnąca

Funkcja *f* jest **rosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

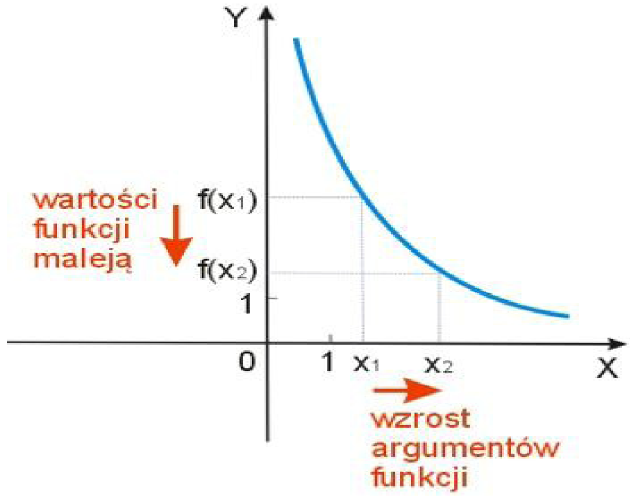


Cechą charakterystyczną wykresu funkcji rosnącej jest to, że zdaje się wznosić ku górze.

Funkcja malejąca

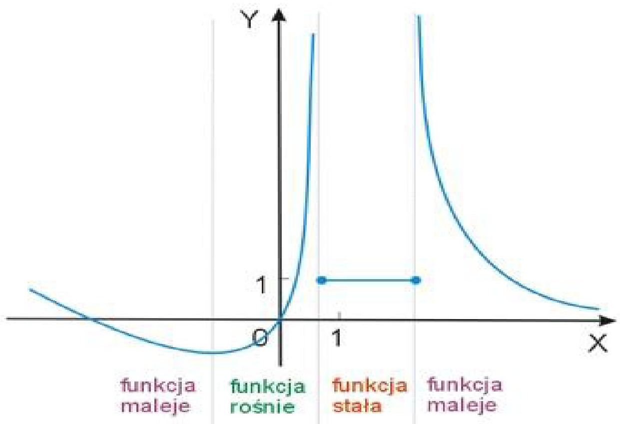
Funkcja f jest **malejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Cechą charakterystyczną wykresu funkcji malejącej jest to, że zdaje się opadać w dół.

Czy funkcja może być jednocześnie malejąca i rosnąca w różnych przedziałach liczbowych? Oczywiście, że tak. Poniżej przykład takiej funkcji wraz z określonymi przedziałami, w których funkcja rośnie i maleje oraz jest stała.



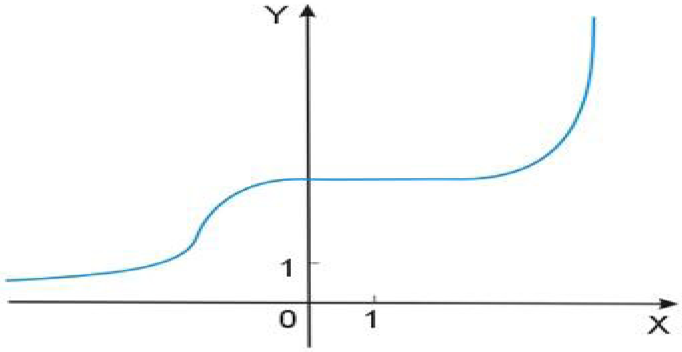
Funkcja niemalejąca

Funkcja f jest **niemalejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

Zatem definicja funkcji niemalejącej przypomina definicję funkcji rosnącej, z tym że w przypadku funkcji niemalejącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała.

Oto ilustracja funkcji niemalejącej.

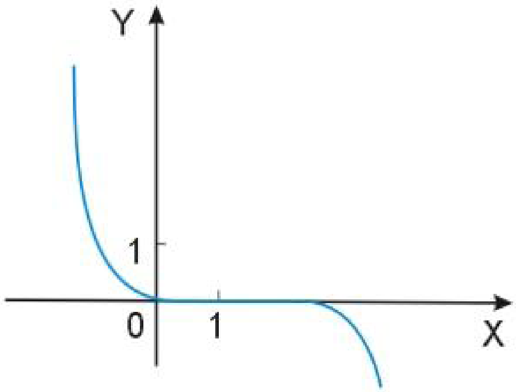


Funkcja nierosnąca

Funkcja f jest **nierosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

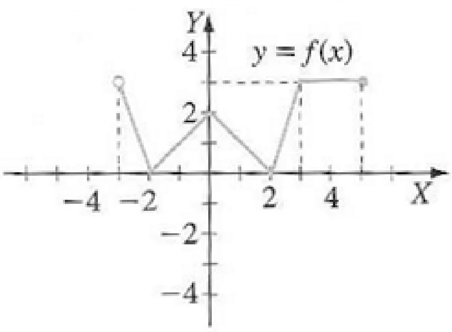
Zatem definicja funkcji nierosnącej przypomina definicję funkcji malejącej, z tym że w przypadku funkcji nierosnącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała. Oto ilustracja funkcji nierosnącej.

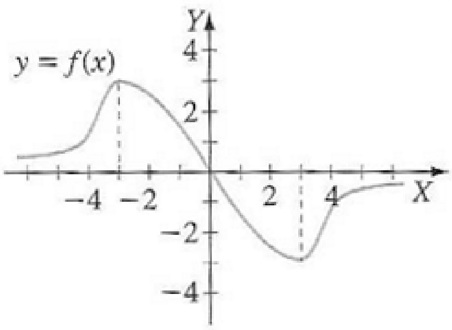


Uwaga: Symbole ⟨ , ⟩ oznaczają tak zwane **nierówności mocne** (ostre), symbole $\leq, \geq$ oznaczają tak zwane **nierówności słabe** (nieostre).

ZADANIE

4.3.1 Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca i stała.





Odpowiedź:

a) rosnąca $x \in (-2;0) \cup (2;3)$, malejąca $x \in (-3;-2) \cup (0;2)$, stała $x \in (3;4)$

b) rosnąca $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$, malejąca $x \in (-3;3)$

4.4 Sporządzanie wykresów funkcji

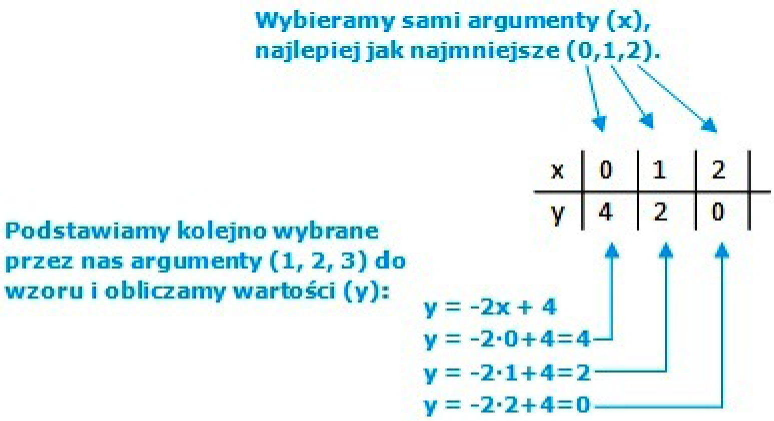
Teraz nauczę się:

- Szkicować wykres funkcji za pomocą wzoru lub tabeli,
- Odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

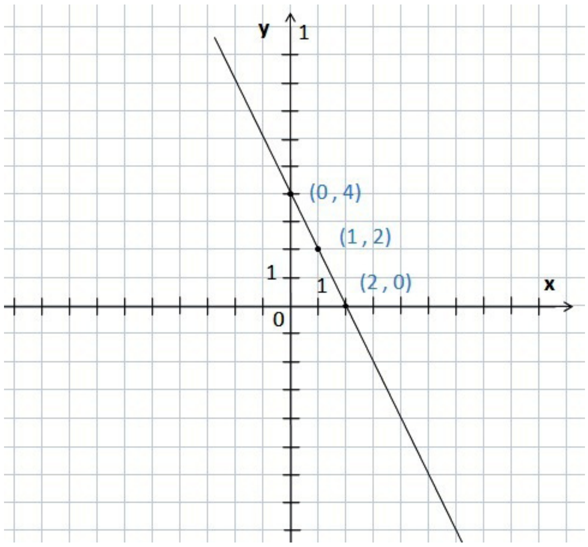
Aby narysować wykres funkcji, należy wykonać dwie następujące po sobie czynności. Powstawanie wykresu funkcji $y = -2x + 4$ przedstawimy na przykładzie:

I. Za pomocą wzoru określamy kilka punktów należących do funkcji (minimum 3). W tym celu wybieramy wartości x, podstawiamy je do wzoru i obliczamy wartości y. Wartości x i y pomocniczo możemy zapisywać w tabeli:

x			
y			



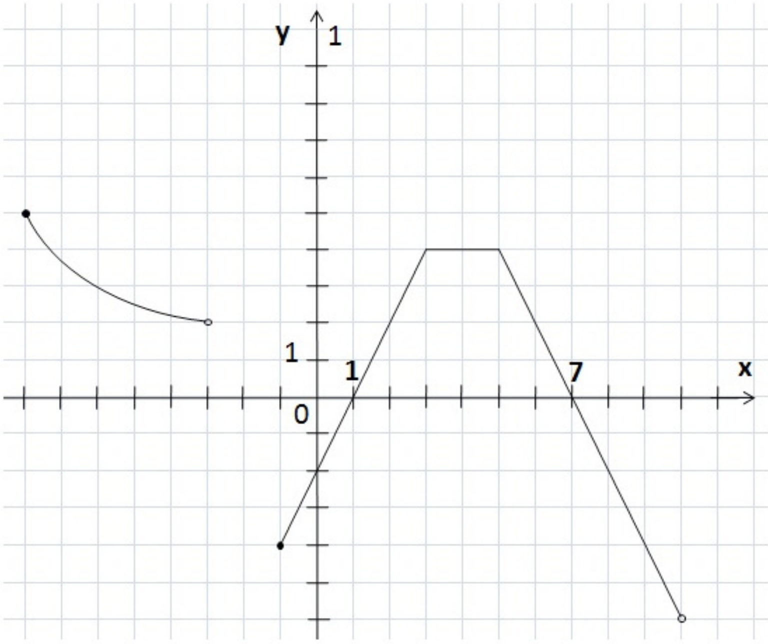
Otrzymujemy więc punkty: (0,4), (1,2), (2,0).



II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je prostą.

Przykład 1

Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:



Uwaga: *Minimalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{min}$ *lub* y_{min}*. Maksymalną wartość funkcji oznaczamy:* $f(x)_{max}$ *lub* y_{max}*. Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości, wypada podać argument (x) lub przedział argumentów dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.*

Odpowiedzi:

a) Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0X):

Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu to dwa przedziały, zgodne z zakresami liczb, widocznymi na powyższym rysunku: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$\boldsymbol{D = \langle -8;\ -3) \cup \langle -1;\ 10)}$

b) Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0Y):

Zbiór wartości to jeden przedział. Powyżej widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$\boldsymbol{Z_w = \langle -6;\ 5\rangle}$

c) Monotoniczność

Funkcja malejąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam, gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy –8), nawias jest trójkątny, tam, gdzie jest pusta (–3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam, gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$\boldsymbol{f(x)} \searrow$ w przedziałach $\boldsymbol{\langle -8;\ -3) \cup \langle 5;\ 10)}$

Funkcja rosnąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca. Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3, nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt, w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)} \nearrow$ w przedziale $\boldsymbol{\langle -1;\ 3\rangle}$

Funkcja stała

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)}_{\rightarrow}$ w przedziale $\boldsymbol{\langle 3, 5\rangle}$

d) Miejsce zerowe:

$\boldsymbol{x_1 = 1 \lor x_2 = 7}$

e) Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

Punkty przecięcia z osią $0X$: $(1,0);\ (7,0)$

Punkt przecięcia z osią $0Y$: $(0, -2)$

f) Argumnety, dla których funkcja jest dodatnia/ujemna.

Przy liczbie –8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie –3, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów, leżących na osi OX.

$\boldsymbol{f(x)} > 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\langle -8;\ -3) \cup (1; 7)}$

Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX. Przy liczbie 10, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta.

$\boldsymbol{f(x)} < 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\langle -1;\ 1) \cup (7; 10)}$

g) Argumnety, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Dla wartości –5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.

$\boldsymbol{f(x) = -5}$ dla $\boldsymbol{x = 8,5}$

Dla wartości –2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 7. Rozwiąaniem jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$\boldsymbol{f(x) = -2}$ dla $\boldsymbol{x \in \{0,7\}}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argumenty –7 i 3. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i dwuelementowego zbioru.

$\boldsymbol{f(x) = 4}$ dla $\boldsymbol{x \in \langle 3,5\rangle \cup \{-7,3\}}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$\boldsymbol{f(x) = 6}$ Brak argumentów

h) Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2,4), B = (6,2)$

Punkt A nie należy do wykresu funkcji.

Punkt B należy do wykresu funkcji.

i) Maksimum i minimum

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka.

Minimum funkcji: brak

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego –8.

Maksimum funkcji $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

ZADANIA

4.4.1 Uzupełnij tabelkę funkcji $f: R \to R$ i narysuj jej wykres. Zadanie wykonaj również w arkuszu kalkulacyjnym.

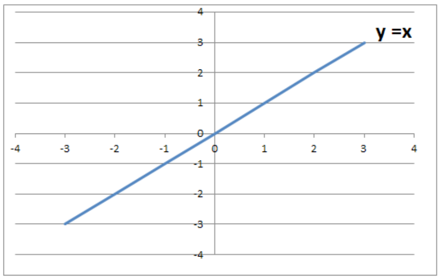
x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...								...

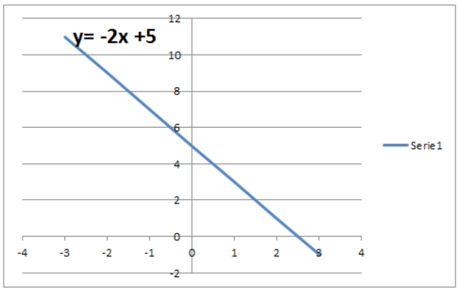
a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{2}x+1$ c) $y = -2x + 5$ d) $y = 3x+5$

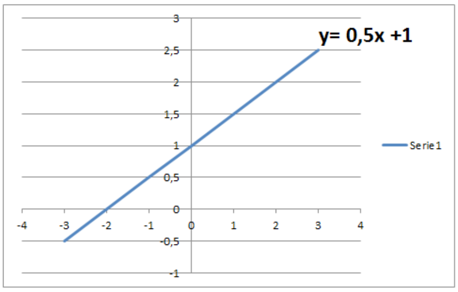
e) $y = -x + 3$ f) $y = \frac{3}{4}x - 2$ g) $y = |x|$ h) $y = |x+2|$

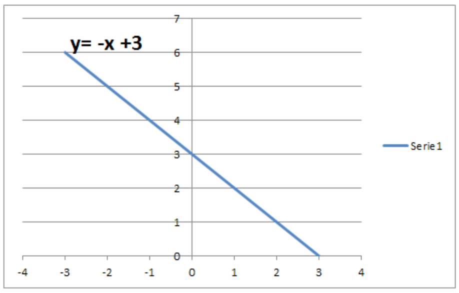
i) $y = |x| - 1$ j) $y = \frac{1}{2}|x|$ k) $y = 3|x|$

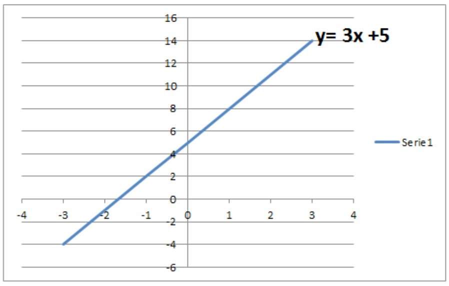
Odpowiedź:

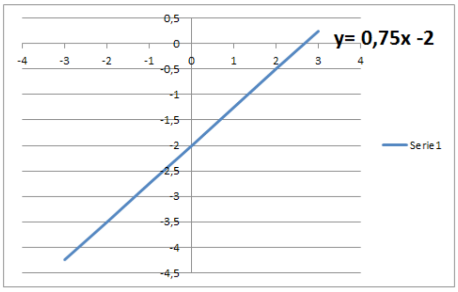

y =x

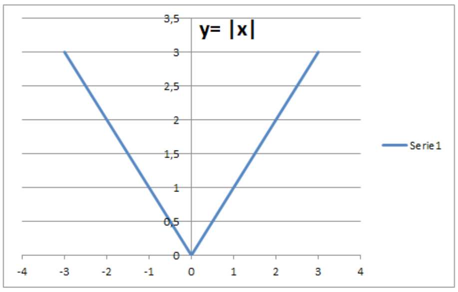

y= -2x +5
Serie1

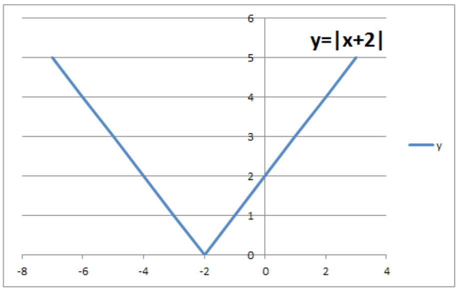

y= 0,5x +1
Serie1

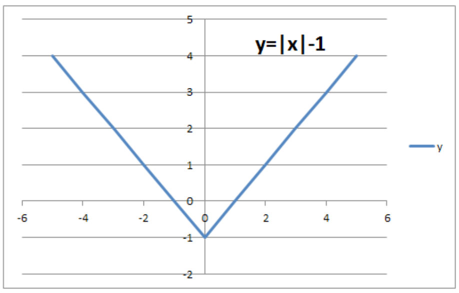

y= -x +3
Serie1

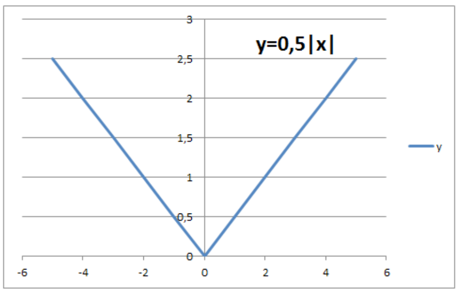

y= 3x +5
Serie1


y= 0,75x -2
Serie1


y= |x|
Serie1

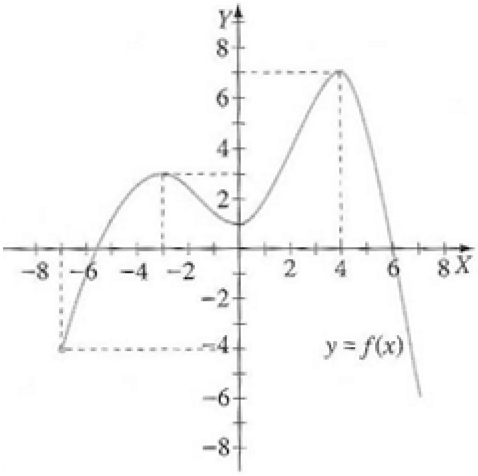

y=|x+2|
y


y=|x|-1
y

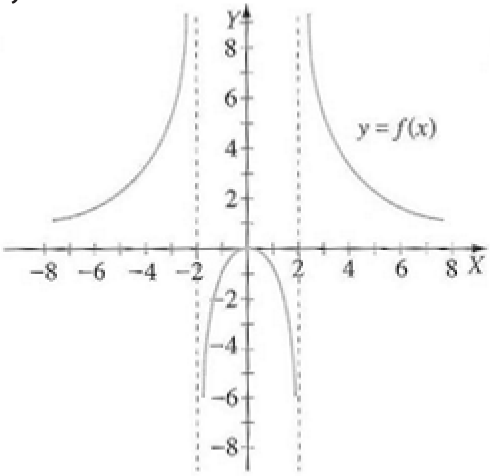

y=0,5|x|
y

4.4.2 Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$, określ:

Wykres I



Wykres II



a) dziedzinę funkcji,

b) zbiór wartości funkcji,

c) miejsca zerowe funkcji,

d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,

e) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała,

f) wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją).

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-7; +\infty)$

b) $y \in (-\infty; 7)$

c) $x = -5{,}5$; $x = 6$

d) $y > 0$ dla $x \in (-5{,}5; 6)$
$y < 0$ dla $x \in (-\infty; -5{,}5) \cup (6; +\infty)$

e) f rosnąca dla $x \in <-7; 4>$
f malejąca dla $x \in <4; +\infty)$

f) $y_{max} = 7$ dla $x = 4$
y_{min} nie istnieje

Wykres II

a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$

b) $y \in (-\infty;+\infty)$

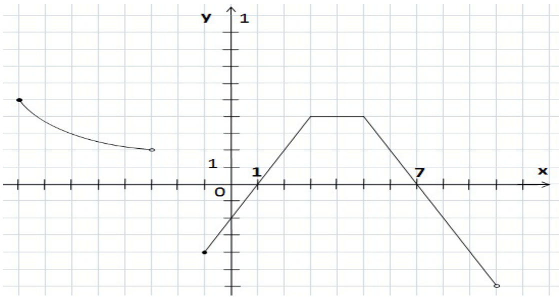
c) $x = 0$

d) $y > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (2;+\infty)$
$y < 0$ dla $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

e) f rosnąca dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;0)$
f malejąca dla $x \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$

f) y_{max} nie istnieje
y_{min} nie istnieje

4.4.3 Określ własności funkcji przedstawionej na rysunku:



a) Dziedzina funkcji.

b) Zbiór wartości.

c) Przedziały monotoniczności.

d) Miejsce zerowe.

e) Punkty przecięcia z osiami.

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$.

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$.

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość:

$f(x) = 5, f(x) = -2, f(x) = 4, f(x) = 6$.

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x) \leftarrow 2$; $f(x) \leq -2$.

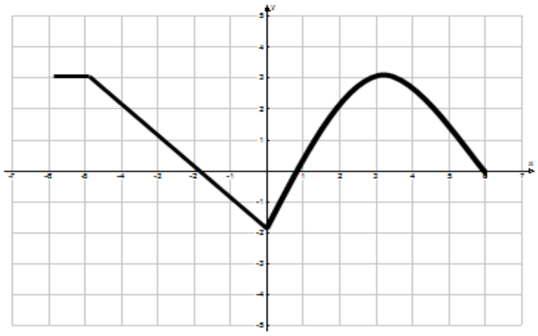
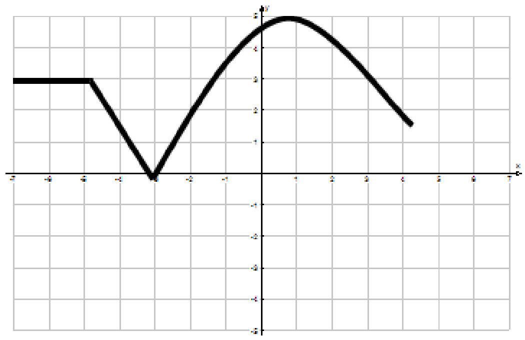
j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–2, 4), B = (6, 2) należą do wykresu funkcji f.

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji.

Odpowiedź:

a) $x \in <-8; -3) \cup <-1; 10)$, b) $y \in (-6; 5>$,
c) f rosnąca dla $x \in <-1; 3>$, f malejąca dla $x \in <-8; -3) \cup <5; 10)$, f stała dla $x \in <3; 5>$,
d) $x = 1, x = 7$, e) $x = 0$ $y = -2$; $y = 0$ $x = 1$ i $x = 7$, f) funkcja jest dodatnia dla $x \in <-8; -3) \cup (1; 7)$,
g) funkcja jest ujemna dla $x \in <-1; 1) \cup (7; 10)$,
h) $f(x) = 5$ dla $x = -8$, $f(x) = -2$ dla $x = 0$, $f(x) = 4$ dla $x \in <3;5>$, $f(x) = 6$ nie ma takich x,
i) $f(x) < -2$ dla $x \in <-1;0) \cup (8; 10)$, $f(x) \leq -2$ dla $x \in <-1;0> \cup <8; 10)$, j) A nie należy, B $\in$ f,
k) $y_{max} = 5$ dla $x = -8$, y_{min} nie istnieje

4.4.4 Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:

a) Dziedzina funkcji.

b) Zbiór wartości.

c) Przedziały monotoniczności.

d) Miejsce zerowe.

e) Punkty przecięcia z osiami.

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$.

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$.

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość: $f(x) = 3$, $f(x) = 1$.

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\langle 3$.

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–4, 2), B = (5, 1) należą do wykresu funkcji f.

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji.

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in <-6,6>$

b) $y \in <-2,3>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <3,1>$
f jest malejąca dla $x \in <-5,0> \cup <3; 6)$
f jest stała dla $x \in <-6,-5>$

d) $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$

e) $(-2,0)$; $(\frac{1}{2}, 0)$; $(6,0)$; $(0,-2)$

f) $x \in <-6,-2) \cup <\frac{1}{2}; 6)$

g) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-6,-5> \cup <\{3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3, 1\}$

i) $x \in (-5,3)$

j) tak

k) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -2$

Wykres II

a) $x \in <-7,4>$

b) $y \in <0,5>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <0,\frac{1}{2}>$
f jest malejąca dla $x \in <-5,0) \cup <\frac{1}{2}; 4>$
f jest stała dla $x \in <-7,-5>$

d) $x \in \{-3\}$

e) $(3,0); (0;4\frac{1}{2})$

f) $x \in <-7,-3) \cup (-3; 4)$

g) $x \in \{\emptyset\}$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-7,-5> \cup <\{-1\frac{1}{2}, 3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\}$

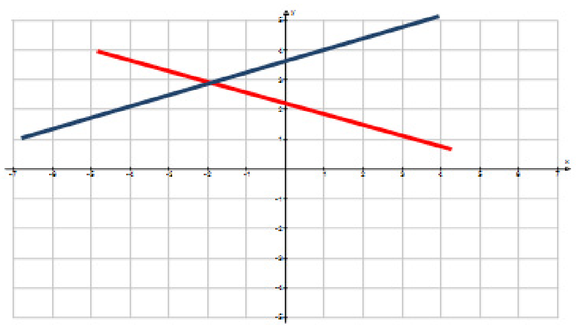
i) $x \in (-5,-1\frac{1}{2}) \cup (3;4)$

j) nie

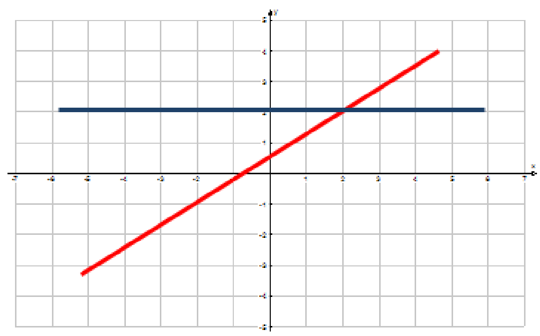
k) $y_{max} = 5, y_{min} = 0$

4.4.5 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) = g(x)$.

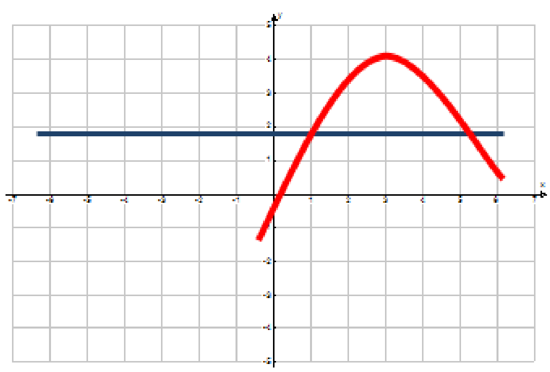
a)



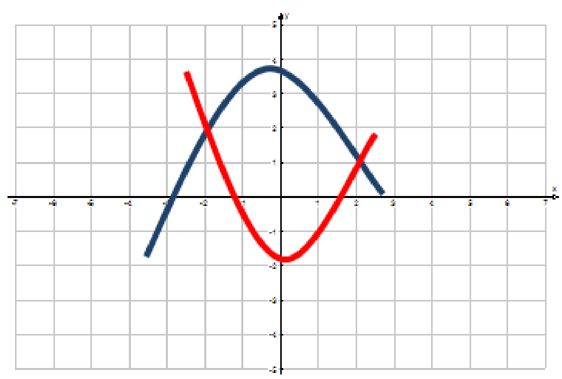
b)



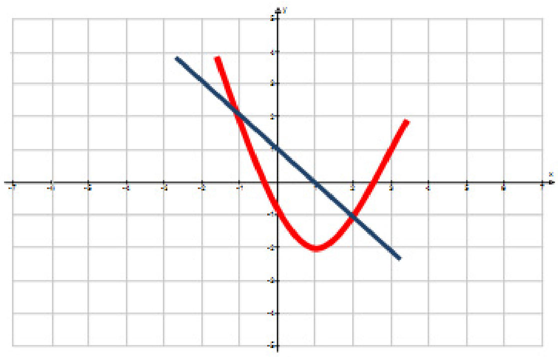
c)



d)



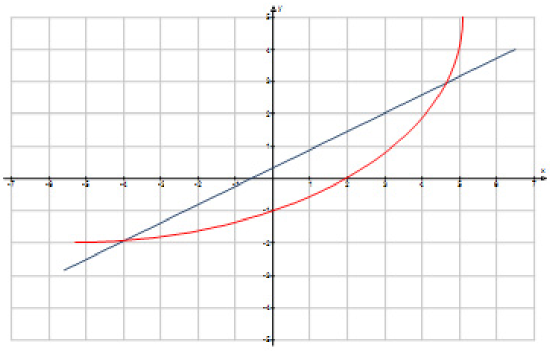
e)



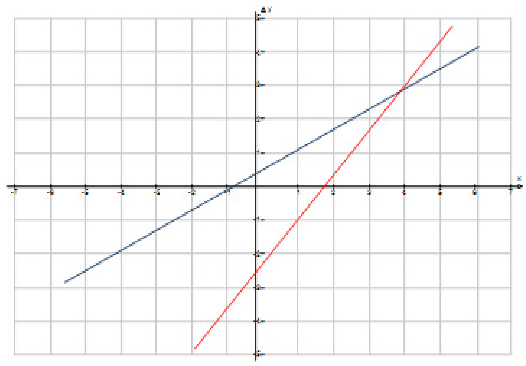
Odpowiedź: a) $(-2\frac{1}{2},1)$, b) (2,2), c) (1,2); (5,2), d) (−2,2); (2,1), e) (−1,2); (2,−1).

4.4.6 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) \geq g(x)$ oraz $f(x) \langle g(x)$

a)

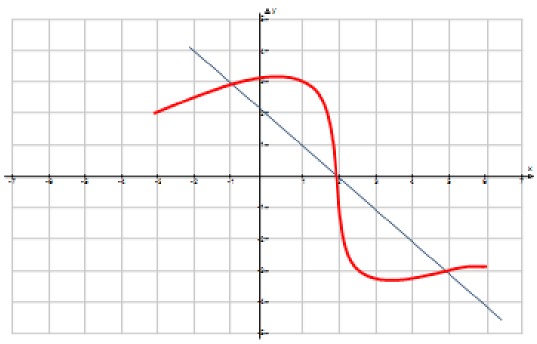


b)



a)

c)



Odpowiedź:

a) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle -4, 4\frac{1}{2} \rangle$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in \langle -\infty, -4) \cup (4\frac{1}{2}, +\infty)$

b) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle -\infty, 4 \rangle$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (4, +\infty)$

c) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-1, 2) \cup (5, +\infty)$

4.5 Przekształcanie wykresów funkcji

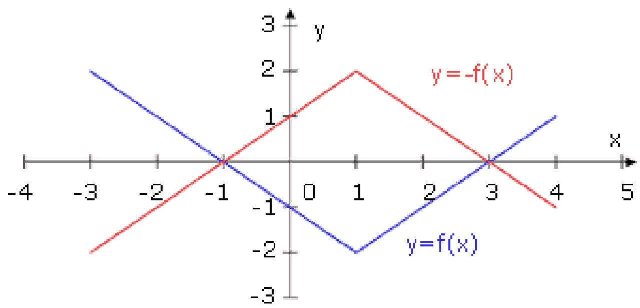
Teraz nauczę się:

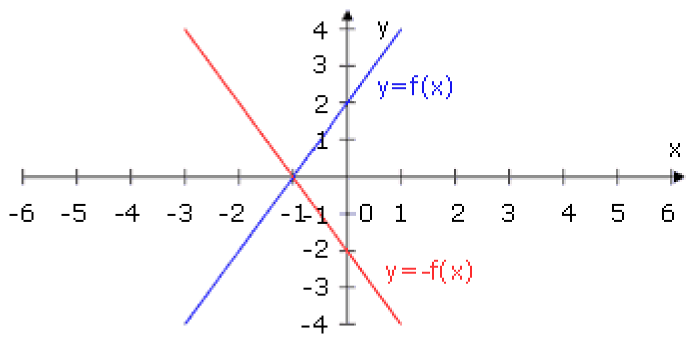
- Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$
- Narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru,
- Wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie,
- Na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y=|f(x)|$

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

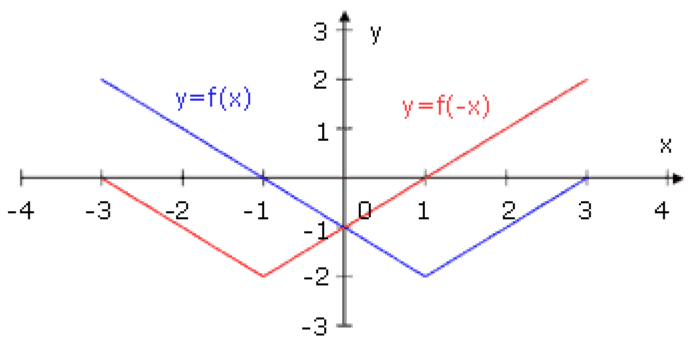
Przykład





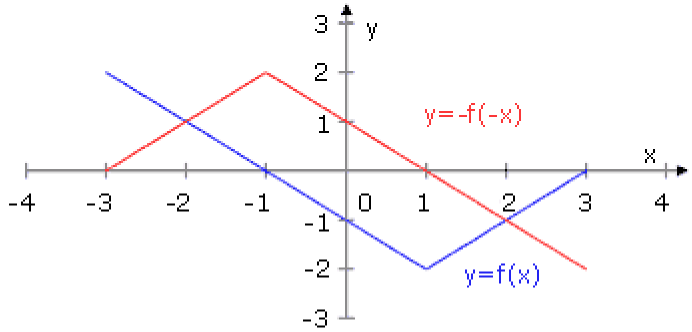
$x \to y = f(-x)$

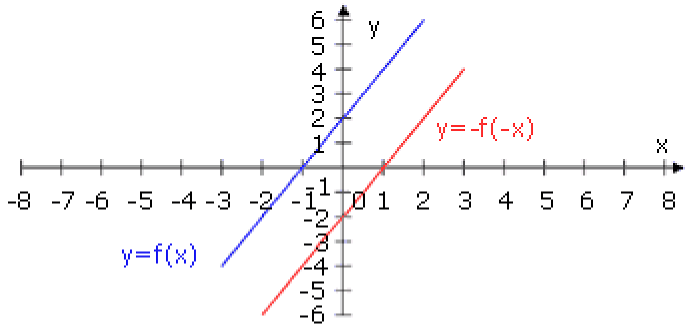
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

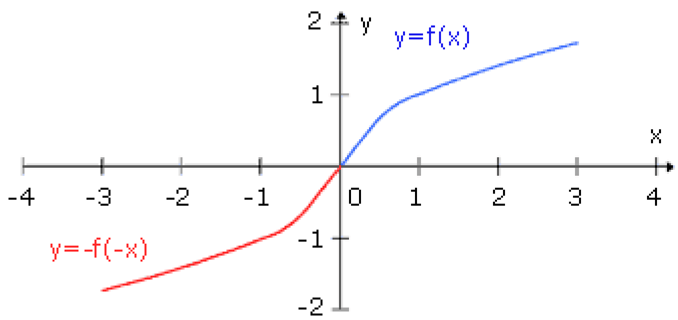


$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$.

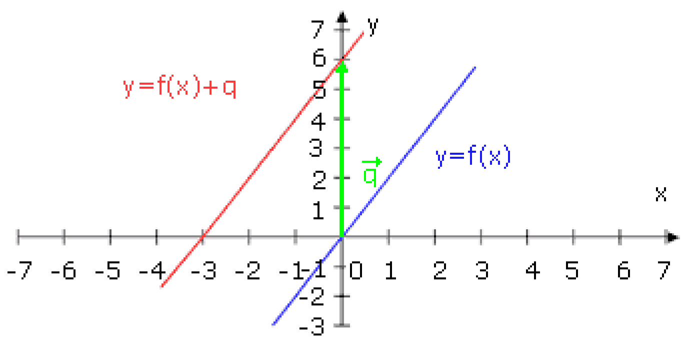






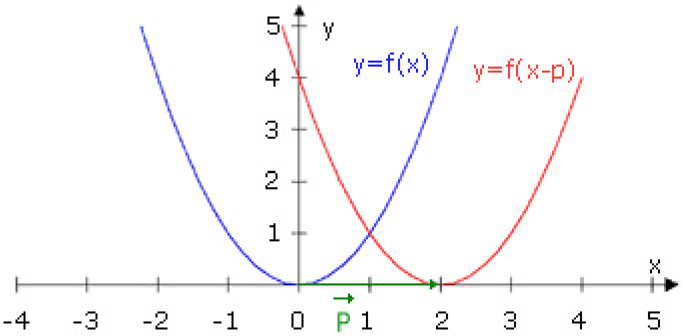
$x \to y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0, q]$).



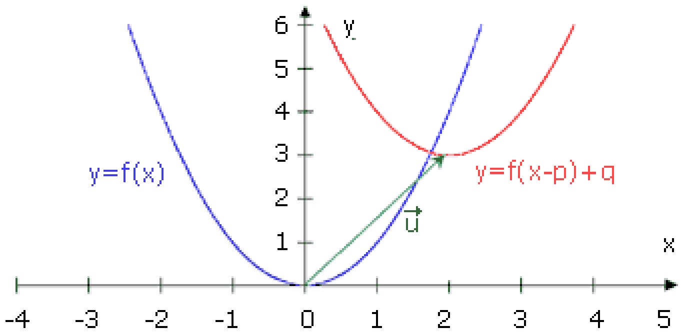
$x \to y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $[p, 0]$.



$x \to y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.



$x \to y = k \cdot f(x)$

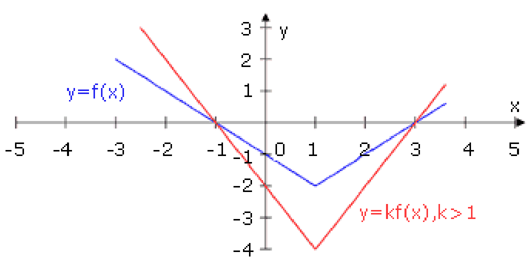
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k-krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

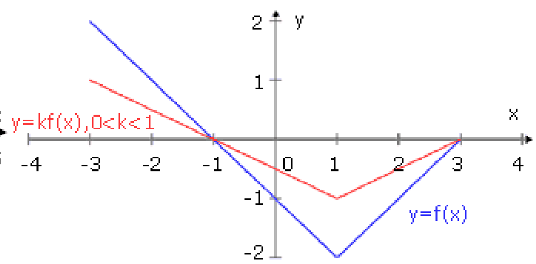
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY

(„rozciągnął się" wzdłuż osi OY).

Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY

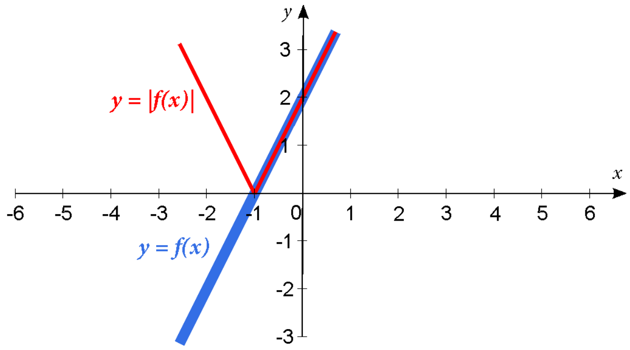
(„ściągnął się" wzdłuż osi OY).





➡ $* \; x \to y = |f(x)|$

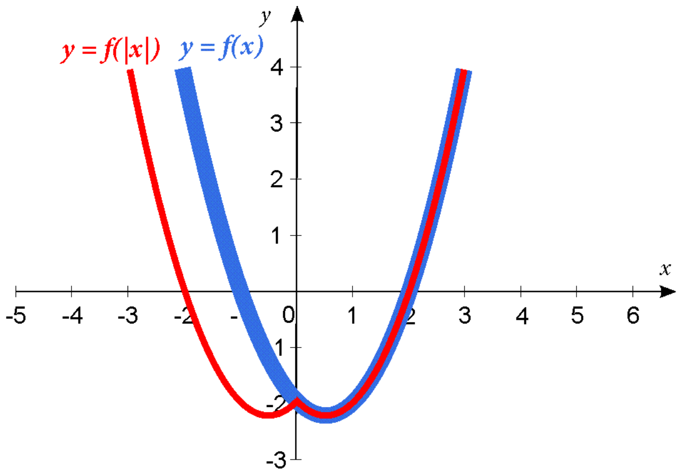
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$ leżącą nad osią OX lub na niej pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX, odbić symetrycznie względem osi OX.

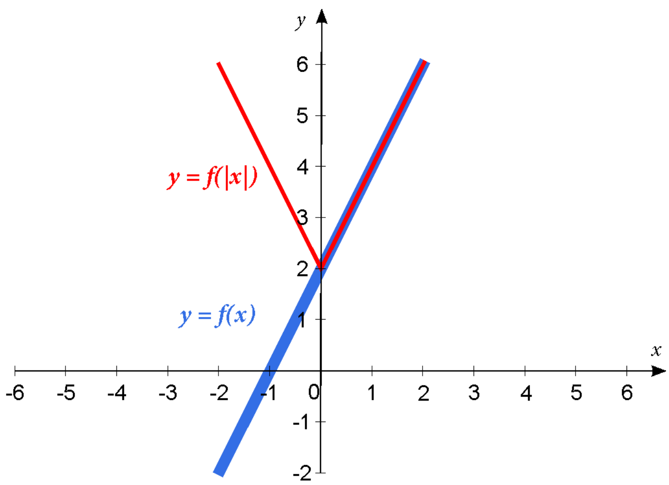


➡ $* \; x \to y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian;
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.



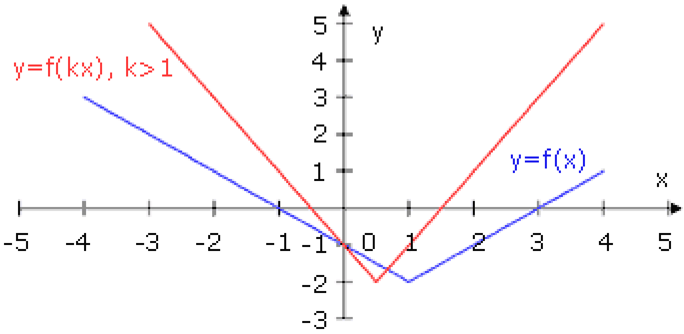


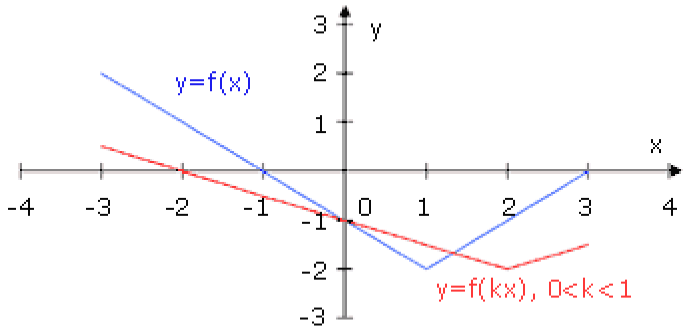
➡ $* \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{x})$

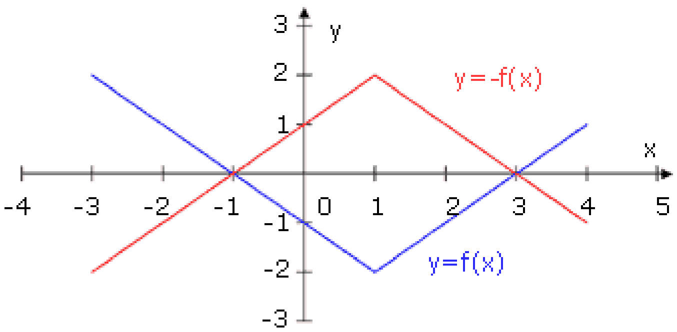
Wykres funkcji $y = f(k * x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

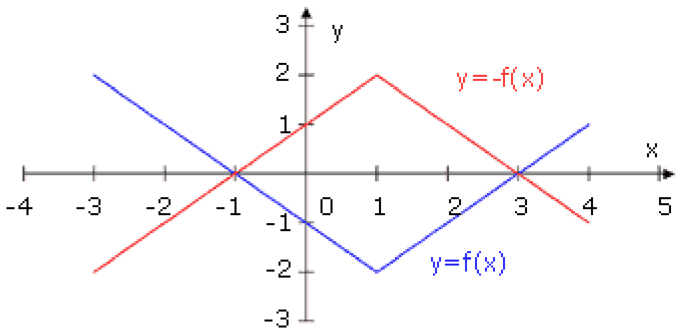
Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX.

Dla k ∈ $(0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.









ZADANIA

4.5.1 Mając dane funkcje:

$f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = -2x - 1, f(x) = -x + 4,$

zapisz wzory funkcji i naszkicuj wykresy:

a) $x \rightarrow f(x)$ b) $x \rightarrow -f(x)$ c) $x \rightarrow f(-x)$

d) $x \rightarrow f(x) - 1$ e) $x \rightarrow f(x+1)$ f) $x \rightarrow |f(x)|$

g) $x \rightarrow f(|x|)$ h) $x \rightarrow |f(x) - 1|$

Odpowiedź:

a) $y = f(x) = 2x$

b) $y = -f(x) = -2x$

c) $y = -f(x) = -2x$

d) $y = f(-x) = -2x$

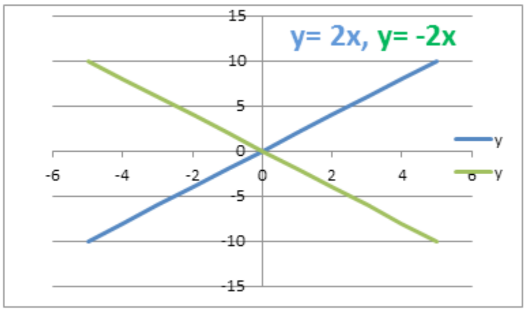
e) $y = f(x) - 1 = 2x - 1$

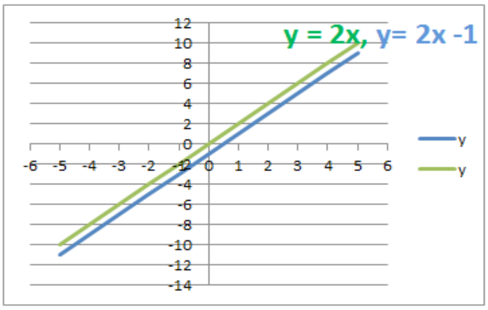
f) $y = f(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$

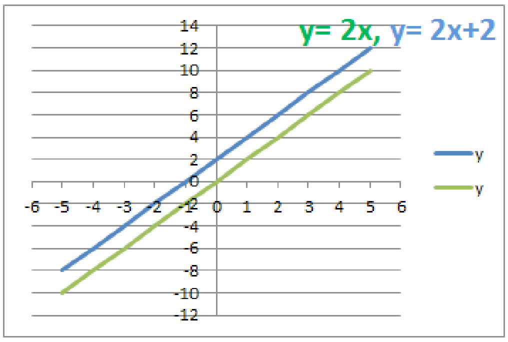
g) $y = |f(x)| = |2x|$

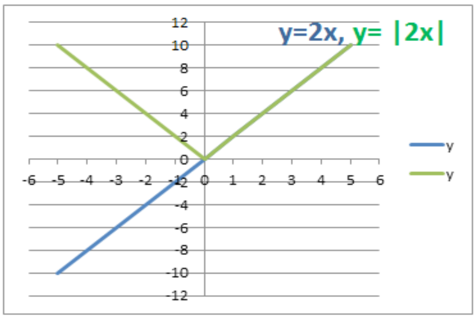
h) $y = f(|x|) = 2|x|$

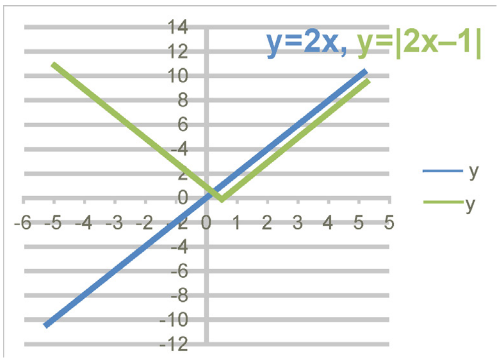
i) $y = |f(x) - 1| = |2x - 1|$

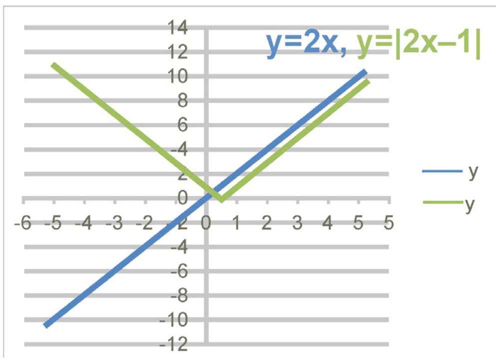












$f(x) = 3x + 1$, $y = -f(x) = -3x - 1$, $y = f(-x) = -3x + 1$, $y = f(x) - 1 = 3x$, $y = f(x+1) = 3x + 4$,

$y = |f(x)| = |3x + 1|$, $y = f(|x|) = 3|x| + 1$, $y = |f(x) - 1| = |3x|$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = -f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $y = f(-x) = \frac{1}{2}x + 2$, $y = f(x) - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$,

$y = f(x+1) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, $y = |f(x)| = |-\frac{1}{2}x + 2|$, $y = f(|x|) = -\frac{1}{2}|x| + 2$, $y = |f(x) - 1| = |-\frac{1}{2}x + 1|$

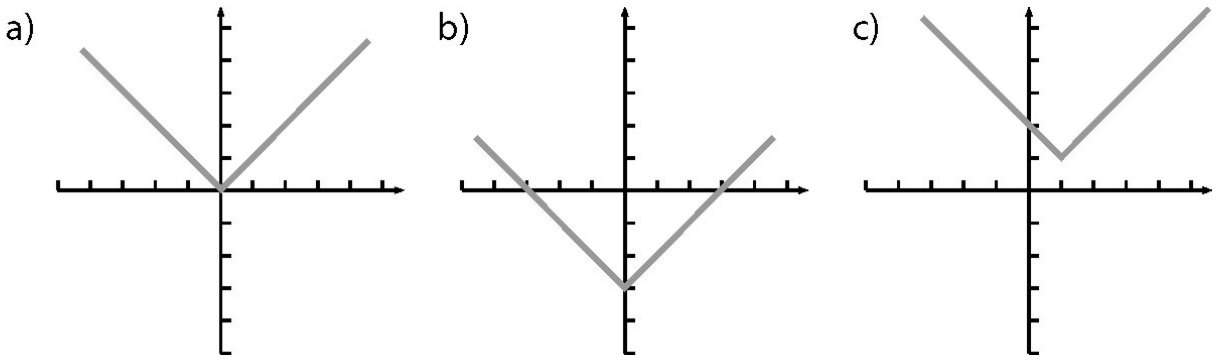
$f(x) = -2x - 1$, $y = -f(x) = 2x + 1$, $y = f(-x) = 2x - 1$, $y = f(x) - 1 = -2x - 2$,

$y = f(x+1) = -2x - 3$, $y = |f(x)| = |-2x - 1|$, $y = f(|x|) = -2|x| - 1$, $y = |f(x) - 1| = |-2x - 2|$

$f(x) = -x + 4$, $y = -f(x) = x - 4$, $y = f(-x) = x + 4$, $y = f(x) - 1 = -x + 3$, $y = f(x+1) = -x + 3$,

$y = |f(x)| = |-x + 4|$, $y = f(|x|) = -|x| + 4$, $y = |f(x) - 1| = |-x + 3|$

4.5.2 Dla każdego z poniższych wykresów funkcji opisz, jak go otrzymano, przesuwając odpowiedni wykres funkcji $y = |x|$. Podaj wzór funkcji o danym wykresie.



Odpowiedź:

a) $y = |x|$ przesunięto o wektor [1,0] $y = |x-1|$

b) $y = |x|$ przesunięto o wektor [0,–3] $y = |x| - 3$

c) $y = |x|$ przesunięto o wektor [3,1] $y = |x-3| + 1$

4.5.3 Zadanie 1 i 2 rozwiąż za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

4.6 Funkcja liniowa i jej własności

Teraz nauczę się:

- Zapisywać funkcję w postaci ogólnej i kierunkowej,
- Interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej,
- Określać monotoniczność funkcji na podstawie jej wzoru i wykresu,
- Badać monotoniczność funkcji w zależności od parametru.

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są współczynnikami liczbowymi, nazywamy **funkcją liniową**. **Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.**

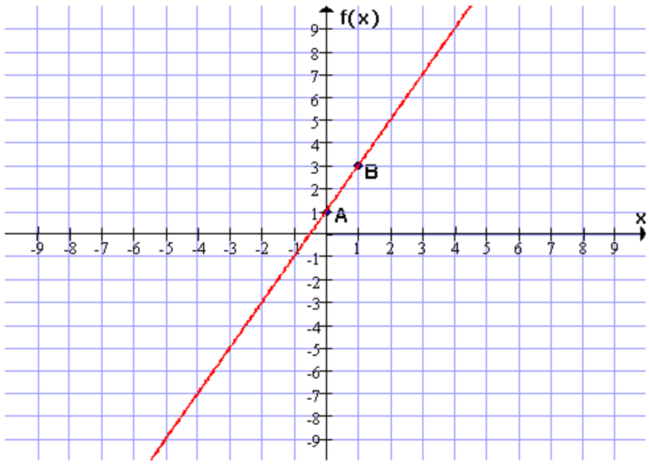
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej.**

Wykresem każdej funkcji liniowej **jest linia prosta**. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty.

Przykład 1

Narysuj prostą: $y = 2x + 1$



Jeżeli $x = 0$, to $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{A}\,(\mathbf{0},\mathbf{1})$

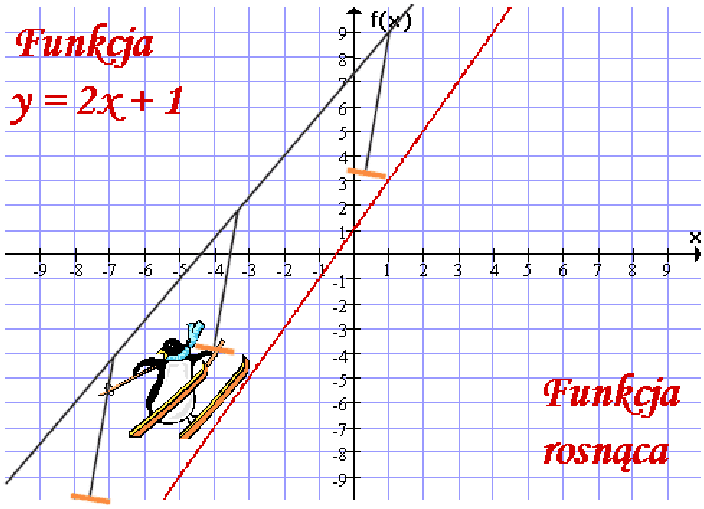
Jeżeli $x = 1$, to $y = 3 \rightarrow \boldsymbol{B}\,(\mathbf{1},\mathbf{3})$

Rysunek 4-6 Wykres funkcji y=2x+1

▶ MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ[56]

- Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz większe wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **rosnąca**.

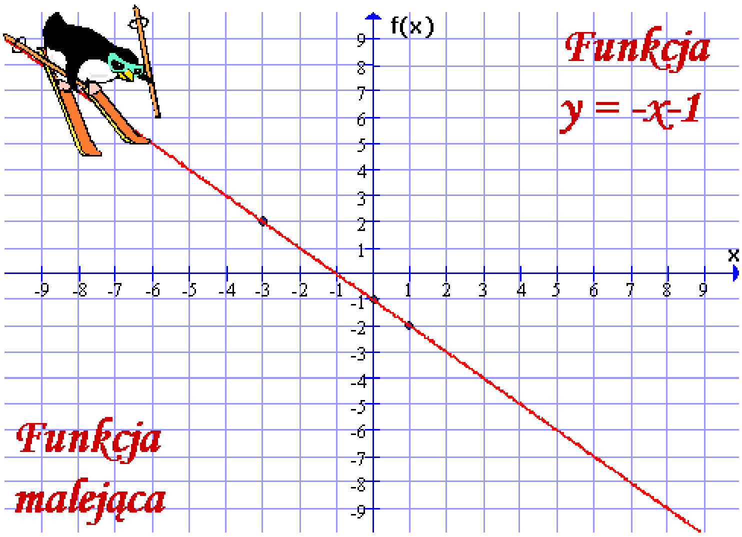
➡ Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy rosnącą, jeżeli $a > 0$



- Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz mniejsze wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **malejąca**.

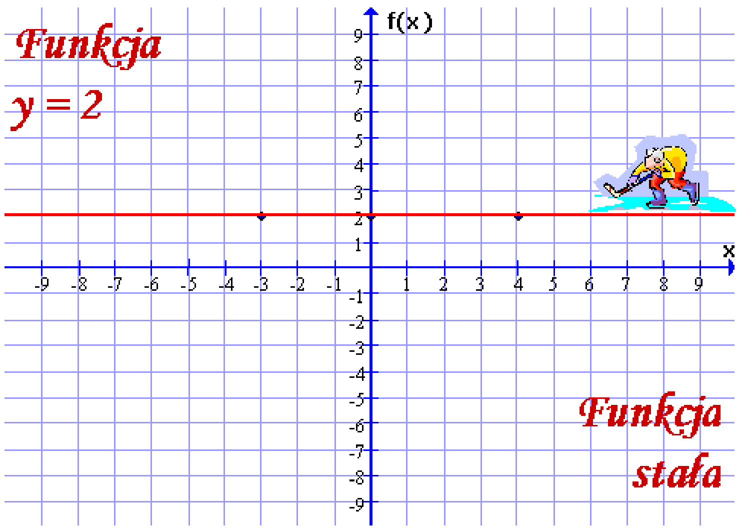
➡ Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy malejącą, jeżeli $a < 0$.

56 https://sites.google.com/site/wlasnoscfunkcji/monotoniczno%C5%9B%C4%87, 28.03.2013.



➢ Jeżeli dla wszystkich argumentów funkcja przyjmuje taką samą wartość, to o takiej funkcji mówimy, że jest **stała**.

➡ Jeżeli $a = 0$, to funkcja $y = ax + b$ jest stała. Jej wzór przyjmuje postać: $y = b$.



➡ **Współczynnik** a

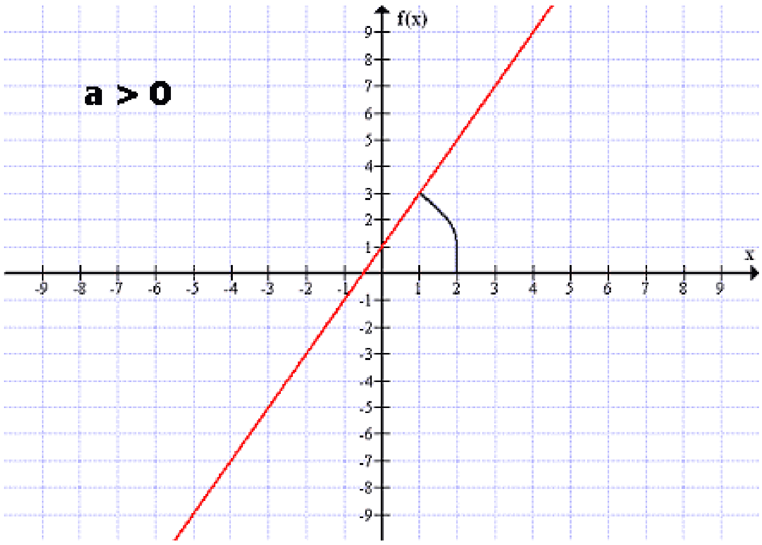
Współczynnik a mówi o kierunku prostej, która jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$.
Liczba a jest więc nazywana **współczynnikiem kierunkowym** funkcji $y = ax + b$.

➡ Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej $a = tg\alpha$. Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

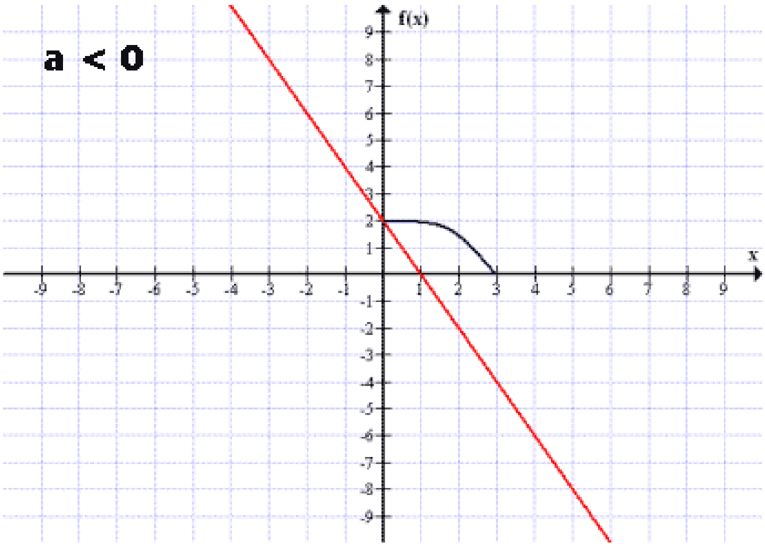
➡ Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, kąt nachylenia do osi x jest wyrażony jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Jeżeli liczba a jest dodatnia, to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem ostrym

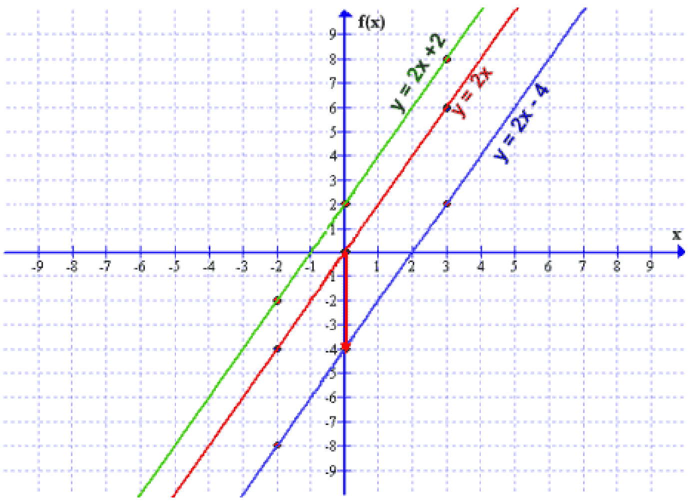
(im większa jest liczba a, tym kąt ten jest większy):



Jeżeli liczba a jest ujemna,to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem rozwartym:



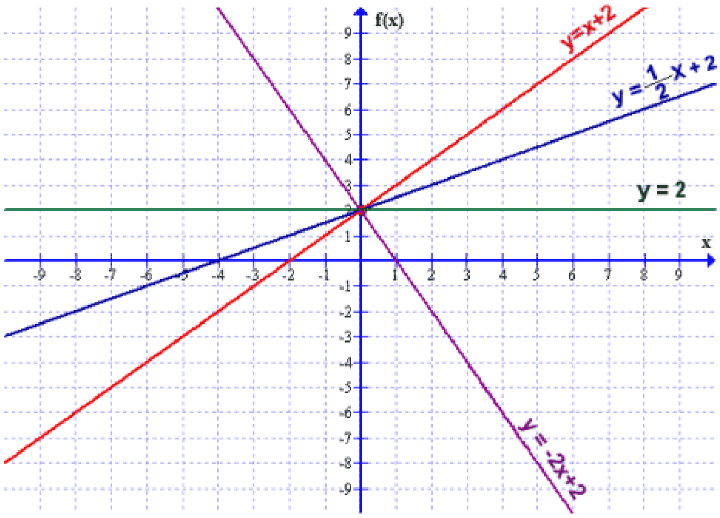
Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Współczynnik b

Współczynnik b mówi o tym, w którym punkcie wykres funkcji $y = ax + b$ przecina oś OY, czyli wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0,b)$.

Wykres



Miejsce zerowe – jest to taki argument (x), dla którego wartość (y) wynosi 0.

UWAGA!!!!

Funkcja stała nie ma miejsca zerowego z wyjątkiem funkcji $y = 0$, która ma ich nieskończenie wiele.

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy miejsca zerowego, podstawiając za y wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (czyli miejsce zerowe).

Przykład 2

$$y = 2x - 4$$

Podstawiamy za y wartość 0 i rozwiązujemy równanie.

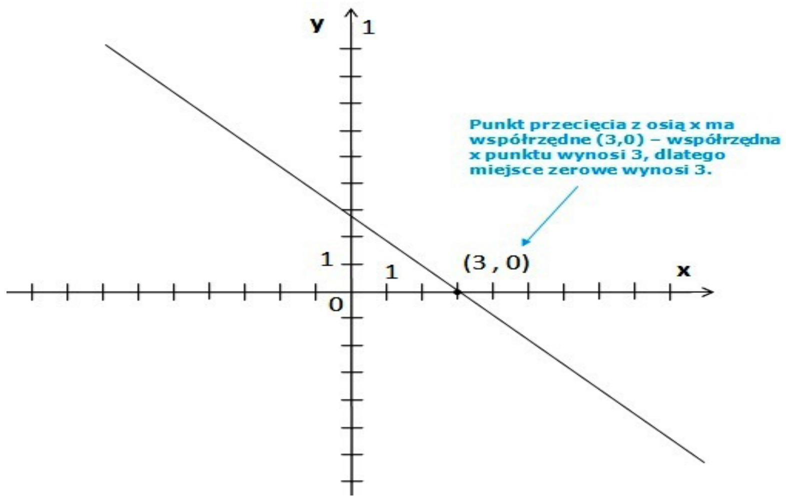
$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 \qquad / \div (-2)$$

$$x = 2$$

Piszemy: Miejsce zerowe funkcji wynosi: $x = 2$.

Mając do dyspozycji wykres, szukamy punktu przecięcia wykresu z osią odciętych (x) i odczytujemy wartość argumentu (x), który jest miejscem zerowym.



Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y - ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$

Przykład 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 4$

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$$

Funkcja ma miejsce zerowe równe: $x_0 = 2$

Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

– **punktu przecięcia z osią** x, podstawiając za y wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe znajduje się w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład 4

$y = 4x + 12$

$0 = 4x + 12$

$-4x = 12 \ / \div (-4)$

$x = -3$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: (–3,0)

– **punktu przecięcia z osią** y, podstawiając za x wartość 0 i obliczając y.

Przykład 5

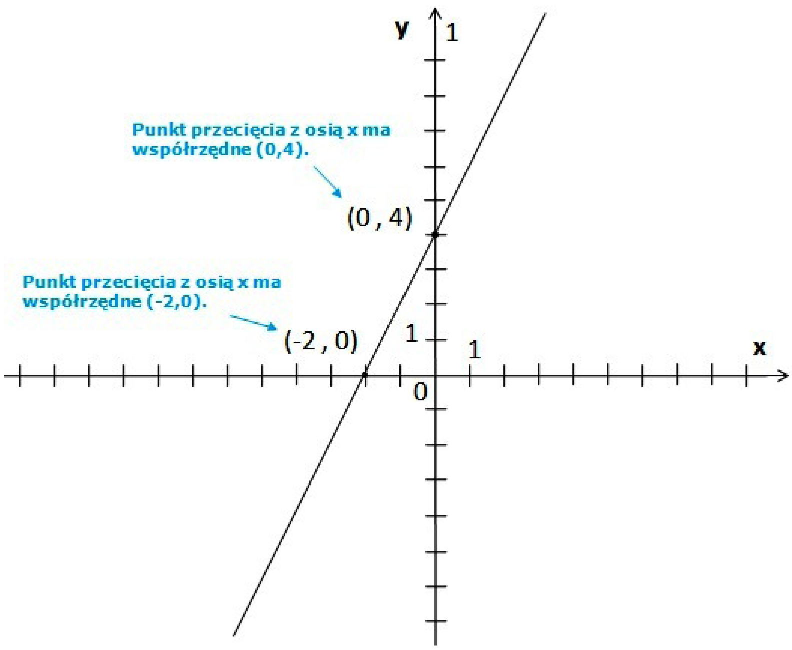
$y = 4x + 12$

$y = 4 \cdot 0 + 12$

$y = 12$

Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: (0,12)

Mając do dyspozycji wykres, odczytujemy współrzędne obu punktów z wykresu.



Punkt przecięcia z osią x: $(-2,0)$

Punkt przecięcia z osią y: $(0,4)$

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji i wykonać obliczenia po obu stronach powstałego równania, patrząc, czy lewa strona będzie równała się prawej. Jeżeli tak jest, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie – znaczy to, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

Przykład 6

Sprawdź, czy punkty: A = (1,2); B = (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x–1$.

Sprawdzamy osobno oba punkty:

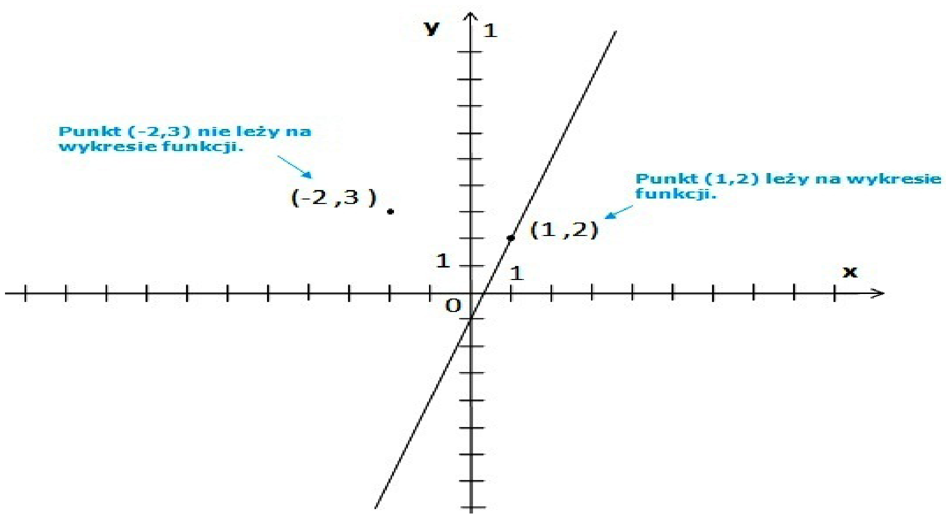
$$y = 3x - 1$$

Podstawiamy punkt (1,2)	Podstawiamy punkt (-2,3)
$2 = 3 \cdot 1 - 1$	$3 = 3 \cdot (-2) - 1$
$2 = 2$	$3 \neq -7$
$L = P$	$L \neq P$

Punkt (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt (–2,3) nie należy.

Mając do dyspozycji wykres funkcji, wystarczy znaleźć dany punkt w układzie współrzędnych – jeżeli leży on na prostej, która jest wykresem funkcji, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, to znaczy, że nie należy.

Przykład: Sprawdź, czy punkty: (1,2); (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x–1$



Punkt A = (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt B = (–2,3) nie należy.

ZADANIA

4.6.1 Podane równanie sprowadź do postaci kierunkowej:

a) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$ b) $x + y - 4 = 0$ c) $2x + 2y + 3 = 0$

d) $x + 2y = 12$ e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ f) $\frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2$

Odpowiedź:

a) $y = 3x + 0{,}5$; b) $y = -x + 4$; c) $y = -x - 1\frac{1}{2}$; d) $y = -\frac{1}{2}x - 6$; e) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$;

4.6.2 Które spośród punktów A, B, C, D należą do wykresu funkcji: $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,

$f_2(x) = \frac{x+1}{2}$,

a) $A = (2,1)$ $B = (\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ $C = (-2,1)$, $D = (0, 2)$;

b) $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (-3,-1)$, $D = (2, \frac{3}{2})$.

Odpowiedź: $A \in f_1$, $D \in f_1$, $A \in f_2(x)$, $C \in f_2(x)$, $D \in f_2(x)$.

4.6.3 Narysuj wykresy funkcji, a następnie:

- określ monotoniczność,
- oblicz miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- sprawdź, czy punkt A = (1,3) należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x - 1$ b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ c) $f(x) = -9x - 3$

d) $f(x) = 0{,}4x + 0{,}1$ e) $f(x) = \frac{-x+2}{2}$ f) $f(x) = \frac{2-2x}{-4}$

g) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$ h) $f(x) = \frac{1-6x}{3} + 2x$

Odpowiedź:

a) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y (0, –1); nie należy

b) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{2})$; nie należy

c) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{3}$; z osią x $(-\frac{1}{3},0)$; z osią y (0,–3); nie należy

d) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{10})$; nie należy

e) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = 2$; z osią x (2,0); z osią y (0,1); nie należy

f) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y $(0, -\frac{1}{2})$; nie należy

g) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -4$; z osią x (– 4,0); z osią y (0,–2); nie należy

h) funkcja stała; miejsce zerowe brak; brak; brak; nie należy

4.6.4 Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-1)x+1$ b) $f(x) = (-m+2)x-4$ c) $f(x) = (m-\frac{\sqrt{3}}{2})x-\sqrt{3}$

Odpowiedź: a) $m > \frac{1}{2}$; b) $m < 2$; c) $m > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

4.6.5 Przez które ćwiartki przechodzą proste $y_1 = 2x + 1$ i $y_2 = \frac{1}{2}x - 5$? Która z prostych tworzy z osią OX większy kąt? W której ćwiartce przecinają się proste?

Odpowiedź: y_1 przez I, II, III; y_2 przez I, III, IV.

4.7 Zastosowanie funkcji do opisywania zjawisk z życia codziennego

Teraz nauczę się:

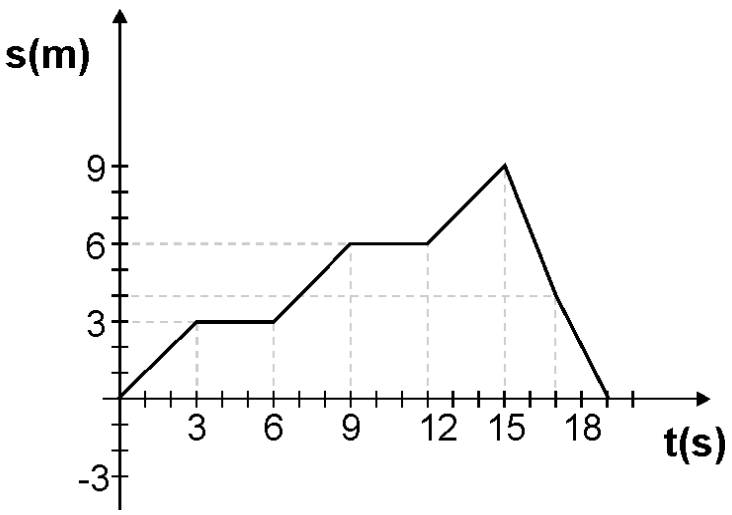
Wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Funkcje wykorzystywane są w wielu dziedzinach życia, np.:

- W badaniach statystycznych – kurs walut,
- W balistyce – zapisywanie toru lotu pocisku,
- Do bliczania maksymalnej prędkości samochodu, z jaką bezpiecznie może pokonać dany zakręt, oraz wiele innych.

W fizyce często do opisywania zajwisk z życia codziennego korzystamy z wykresów funkcji. Analizując dane przedstawione na wykresie najpierw sprawdzamy, jakie wielkości fizyczne i ich jednostki zostały na nim zaznaczone.

Przykład 1



Jak zinterpretować dane na poniższym wykresie? Zauważ, że mamy do czynienia z dwiema wielkościami: szybkością i czasem. Co się dzieje z szybkością ciała w poszczególnych przedziałach czasu?

Na początku ciało spoczywało, następnie przez 2 sekundy jego szybkość wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu (ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym), przez kolejne 2 sekundy ciało poruszało się ze stałą prędkością, od 4 do 6 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 6 do 8 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne dwie sekundy jego szybkość wzrastała, następnie ciało zmieniło zwrot prędkości (zawraca) i przez pierwszą sekundę porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 11 do 12 sekundy jest to również ruch jednostajnie przyspieszony. Obliczmy przyspieszenie ciała w poszczególnych przedziałach czasu. Wiedząc, że przyspieszenie jest równe ilorazowi zmiany szybkości ciała do zmiany czasu $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Z wykresu odczytujemy:

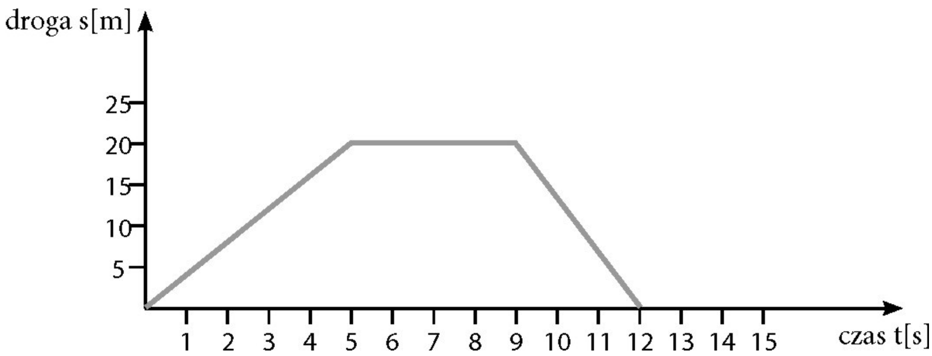
$v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 4, v_5 = 4, v_6 = 6,$

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11, t_7 = 12$, stąd

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{2m/s}{2s} = 1\frac{m}{s^2}$ i analogicznie

$a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, \qquad a_4 = -3\frac{m}{s^2}, a_5 = -1{,}5\frac{m}{s^2}.$

Przykład 2



Przeanalizujmy podobny wykres. Zauważmy, jakie wielkości fizyczne mamy teraz zaznaczone na wykresie? Przez pięć pierwszych sekund droga rosła proporcjonalnie do czasu, to znaczy, że ciało poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne 4 sekundy ciało spoczywa, a przez następne 3 sekundy zawraca, poruszając się ze stałą prędkością. Obliczmy $v_1,\ v_2\ i\ v_3$.

Z lekcji fizyki pamiętasz, że:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, stąd\ v_1 = 4\frac{m}{s}, v_2 = 0\frac{m}{s}, v_3 = -6\frac{2}{3}\frac{m}{s}.$$

Przykład 3

Zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita a wyrażoną w stopniach Celsjusza jest zależnością liniową:

a) Znajdź tę zależność, wiedząc że $32°F = 0°C$, a $5°F = -15°C$.

b) 22 lipca w San Diego temperatura o godzinie 12^{00} była o $12{,}5°C$ wyższa niż temperatura o godzinie 6^{00}. Wyraź wzrost temperatury w stopniach Fahrenheita.

Jeżeli F jest temperaturą w Fahrenheitach, a C w Celsjuszach, to wiemy, że $F = aC + b$. Stałe a i b wyznaczymy z podanych informacji.

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a(-15) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 32 \\ 15a = b - 5 = 27 \Rightarrow a = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$

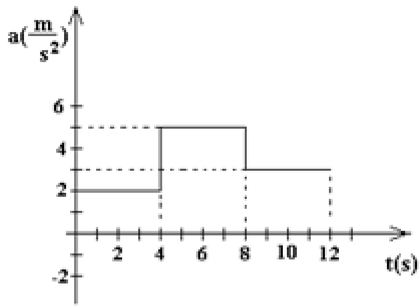
Skorzystamy ze wzoru z podpunktu a).

$$F_2 - F_1 = T_F = \frac{9}{5}C_2 + 32 - \frac{9}{5}C_2 - 32 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$$

Odpowiedź: $22{,}5°F$

ZADANIA

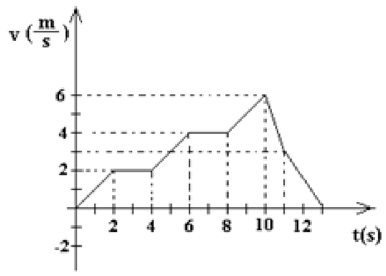
4.7.1 Na podstawie poniższego wykresu dokonaj analizy ruchu ciała i sporządź wykres zależności $v(t)$, $s(t)$.



Odpowiedź:

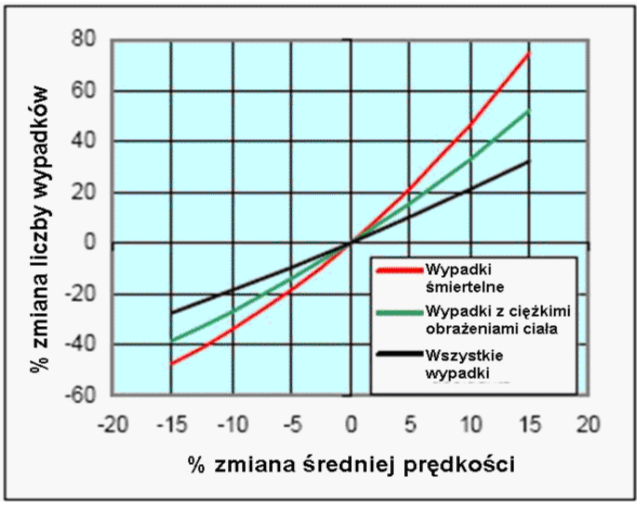
Przez pierwsze dwie sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym $a = 2\,\frac{m}{s^2}$, przez kolejne z przyspieszeniem a = 5 $\frac{m}{s^2}$, od 8 do 12s z przyspieszeniem a = 3 $\frac{m}{s^2}$.
Podstawiamy do wzoru $v = at$ kolejne sekundy czasu i obliczamy odpowiadające jej szybkości.

4.7.2 Opisz zachowanie ciała na podstawie wykresu.



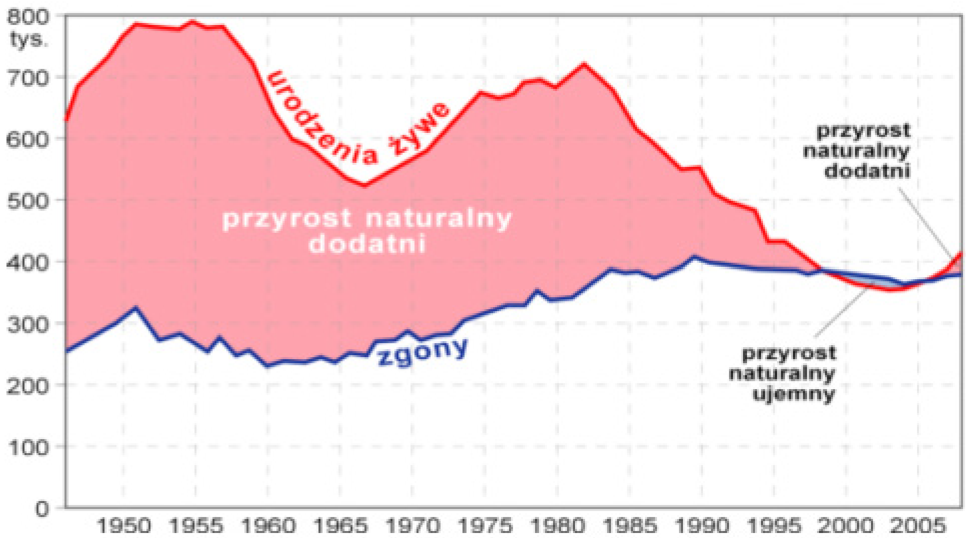
Odpowiedź: Przez pierwsze 3s ciało porusza się ruchem jednostajnym, następnie spoczywa i tak na zmianę, w 15s zawraca, dalej poruszając się ruchem jednostajnym, ale z inną szybkością 3.

4.7.3 Jakie informacje można odczytać z poniższego wykresu? Wyciągnij odpowiednie wnioski.



Zależność między zmianami średniej prędkości jazdy a liczbą wypadków

4.7.4 Wykres przedstawia, jak zmianiał się przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1950 – 2005.[57]



Przyrost naturalny w Polsce w latach 1946 – 2008

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak zmieniała się liczba urodzeń w latach 1950 – 2005?
2. W którym roku liczba urodzeń była największa, a w którym najmniejsza?
3. Jak w tym czasie kształtowała się liczba zgonów?
4. W którym roku przyrost naturalny ludności był najwyższy, a w którym najniższy?

Informacja do zadania:

Prędkość rzeki zależy od takich czynników, jak: głębokość rzeki, nachylenie terenu, rodzaj podłoża tworzącego dno i brzegi rzeki.

Większość rzek zwalnia pod koniec swojego biegu, ponieważ nachylenie terenu, czyli spadek wody, znacznie się zmniejsza. Gdyby przeanalizować przekrój rzeki, można by zauważyć, że pręd-

57 (www.wiking.edu.pl/article.php?id=269, 25.03.2013)

kość różni się w różnych obszarach – najmniejsza jest na dnie rzeki, a największa na jej powierzchni. Powodem tego jest tarcie pomiędzy przepływającą wodą a powierzchnią dna rzeki.

Przy brzegach rzeki, szczególnie na zakrętach, przepływ wody jest najszybszy z powodu siły odśrodkowej.

Zwykle prędkość V wyrażamy w metrach na sekundę $\left[\frac{m}{s}\right]$, natomiast współczynnik rodzaju podłoża oznaczamy k i wyrażamy w $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$. Poziom wody oznaczamy T i wyrażamy w metrach, do wyznaczenia prędkości używamy również współczynnika nachylenia, spadku terenu S.

Prędkość przepływu wody obliczamy ze wzoru: $V = k \cdot \sqrt[3]{T^2} \cdot \sqrt{S}$

Wskazówka: współczynnik nachylenia S = (różnica poziomów)/(długość rzeki)

4.7.5 Dwie stacje pomiarowe Berthelsdorf i Nossen znajdują się na rzece Mulde. Pomiędzy tymi stacjami średni poziom wody wynosi 35 cm. Wysokość nad poziomem morza w Berthelsdorf wynosi 376,61m, a w Nossen 203,76 m. Długość rzeki na tym odcinku wynosi 42,3 km. Dno rzeki jest wyboiste i wartość współczynnika rodzaju podłoża wynosi 30$\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$.

1. Oblicz prędkość rzeki na tym odcinku.

2. Raz na 20 lat poziom wody rzeki Mulde osiaga 2,5 m. Oblicz, jaką wówczas prędkość osiąga rzeka.

3. 30 sierpnia 2008 roku po długim okresie deszczowym prędkość rzeki osiągnęła wartość 1,68 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Oszacuj, jak wysoki był wówczas poziom wody.

4. Prędkość rzeki można również wyrazić w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Tak wyrażona, daje nam informację, jak dużo wody przepływa w ciągu sekundy. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki pomiarów poziomu wody w rzece i jej przepływu.

Data	Godzina	Poziom wody w [cm]	Przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
26.10	01:00	41	2,04
	07:00	39	1,81
	13:00	40	1,92
	19:00	40	1,92
27.10	01:00	40	1,92
	07:00	40	1,92
	13:00	41	2,04
	19:00	44	2,42
28.10	01:00	45	2,55
	07:00	45	2,55
	13:00	41	2,04
	19:00	41	2,04
29.10	01:00	41	2,04
	07:00	41	2,04
	13:00	53	3,78
	19:00	56	4,31
30.10	01:00	73	8,07
	07:00	83	10,9
	13:00	103	19,3
	19:00	106	20,7
31.10	01:00	93	14,8
	07:00	81	10,3
	13:00	75	8,6
	19:00	71	7,56
01.11	01:00	70	7,31
	07:00	66	6,36

a) Przedstaw na wykresie zależność prędkości przepływu od poziomu wody w dniach od 30 października od godziny 01:00 do 31 października do godziny 01:00.

b) Za pomocą jakiej funkcji można opisać tą zależność?

c) Za pomocą programu Exel lub kalkulatora graficznego znajdź wzór funkcji, która w przybliżeniu opisuje tę zależność.

d) Wykorzystując otrzymaną funkcję oszacuj, ile będzie wynosić prędkość przepływu w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$, jeśli poziom wody osiągnie 2,5 m.

e) Przedstaw chronologicznie na wykresie prędkość przepływu wody w dniach od 30 października od godziny 01:00 do 31 października do godziny 01:00. Wyraź przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$.

f) Jaką wartość wyraża obszar zawarty pomiędzy wykresem funkcji a osią x?

g) Oblicz pole powierzchni tego obszaru (wyznacz pole powierzchni tego obszaru na różne sposoby).

6. Wywnioskuj, jak będzie się zmieniać wartość współczynnika $\boldsymbol{k}$, jeżeli dno rzeki będzie bardziej gładkie.

7. Wyjaśnij, dlaczego prędkość przepływu nie jest liniowo zależna od poziomu wody.

8. Wykorzystanie rzek jako drogi wodnej dla statków powoduje czasem pogłębienie koryta rzeki. Jakie może to mieć konsekwencje dla środowiska?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

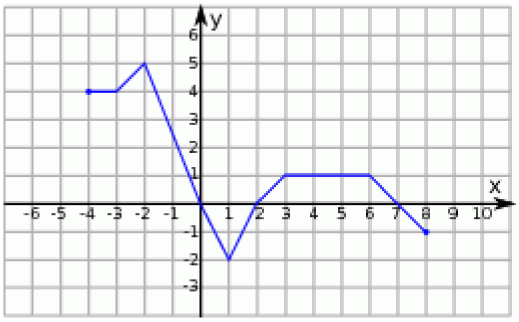
1. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:[58]

a) $-1/3$ b) -3 c) $1/3$ d) 3

2. Zbiorem wartości funkcji f jest:[59]

a) $< -2,5 >$ b) $< -4,8 >$ c) $< -1,4 >$ d) $< 5,8 >$

3. Korzystając z wykresu funkcji f, wskaż nierówność prawdziwą:



a) $f(-1) < f(1)$ b) $f(1) < f(3)$ c) $f(-1) < f(3)$ d) $f(3) < f(0)$

4. Wskaż m, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała.

a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = -1$

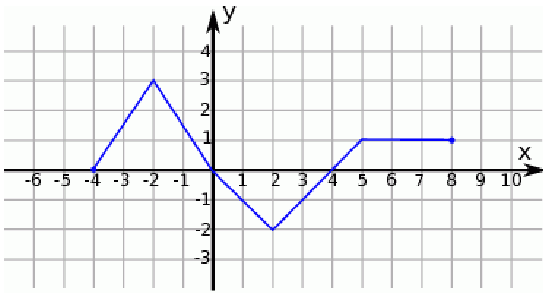
5. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:[60]

a) $-2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.
Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

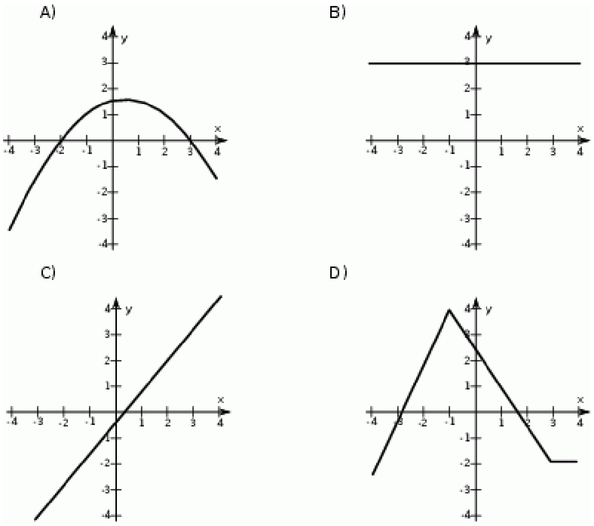


58 Arkusz próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.
59 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2010.
60 Zadania: 5, 6 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2010.

7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Wówczas spełniony jest warunek:[61]

a) $f(x) > 1$ b) $f(2) = 2$ c) $f(3) < 3$ d) $f(4) = 4$

8. Wskaż wykres funkcji, która w przedziale <–4,4> ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



9. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:[62]

a) $m = 6$ b) $m = 1,5$ c) $m = 1$ d) $m = 5$

10. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

a) 4 b) –2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

11. Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt $A = (2,-4)$, gdy:[63]

a) $m = 5$ b) $m = -5$ c) $m = 1$ d) $m = -4$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

a) $x < 6$ b) $x > 6$ c) $x > -6$ d) $x < -6$

13. Dziedziną funkcji $F(x) = \begin{cases} -2x + 1, & gdy\ x \leq 3 \\ -x, & gdy\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ jest zbiór:[64]

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle 1,4\rangle$ c) $\langle 0,4\rangle$ d) $(-\infty, 1)$

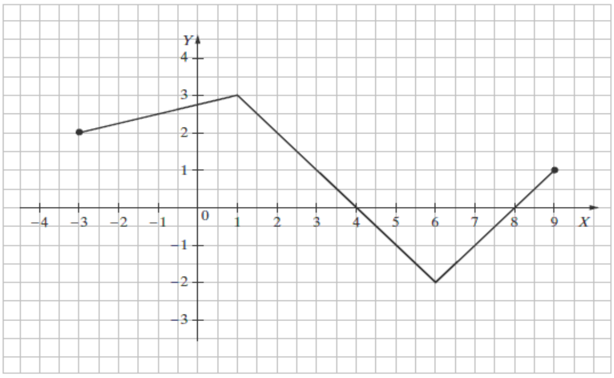
14. Funkcja liniowa $f(x) = (m + 2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

a) $m < -2$ b) $m < 2$ c) $m > -2$ d) $m > -4$

---

61 Zadania: 7, 7 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
62 Zadania: 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2010.
63 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2009.
64 Zadania: 13, 14, 15, 16, 17 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011.

15. Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

a) $\langle 0,4\rangle$ b) $\langle 1,6\rangle$ c) $\langle 0,6\rangle$ d) $\langle -2,4\rangle$

16. Punkt $P = (a+1,2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

a) 0 b) –1 c) 2 d) 1

17. Funkcja liniowa $f(x) = (m-2)x - 11$ jest rosnąca dla:

a) $m > 2$ b) $m > 0$ c) $m < 13$ d) $m < 11$

18. (**5 pkt**) Funkcja liniowa $f(x) = 3ax - b$ jest malejąca, natomiast funkcja liniowa $g(x) = bx - 3a$ jest rosnąca. Wykresy funkcji f i g przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Oblicz odciętą punktu A oraz wyznacz wzory funkcji f i g wiedząc, że ich wykresy są prostopadłe[65].

19. (**2 pkt**) Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru:

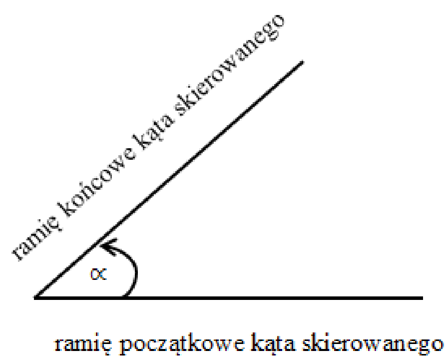
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & dla\ x \in (0,3\rangle \\ \sqrt{3}-3 & dla\ x \in (3,10 \end{cases}$$

65 Zadania: 18,19 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

5 Trygonometria

5.1 Miara łukowa i stopniowa kąta

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy parę prostych o wspólnym początku (wierzchołek kąta).



Rysunek 5-1 – Kąt skierowany

Miarą kąta skierowanego jest **stopień**.

$$1° = \frac{1}{360} \text{kąta pełnego}$$

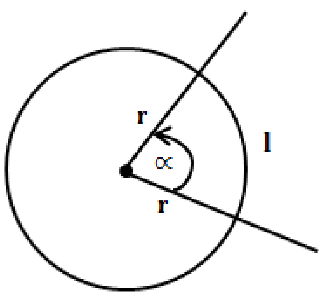
Jednostki mniejsze niż stopień to **minuta kątowa 1′** (uwaga: to nie jest jednostka czasu)

$$1^{\circ} = 60' \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} 1'$$

oraz **sekunda kątowa (1″)**

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' \quad 1''.$$

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu.



Rysunek 5-2 – Radian

Jednostką miary łukowej jest radian.

$$1\,radian = \frac{180°}{\pi} \sim 57°17'44''$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Zamiana miary stopniowej (α°) na miarę łukową (α):

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}\ radiana}$$

Przykład 1

$$180^\circ = \pi\, rad$$
$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\, rad$$
$$30^\circ = \frac{\pi}{6}\, rad$$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową (α°):

$$\boldsymbol{\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}}$$

Przykład 2

$$\frac{3}{2}\pi\, rad = 270^\circ$$
$$\frac{\pi}{3}\, rad = 60^\circ$$
$$\frac{\pi}{2}\, rad = 90^\circ$$

Ciekawostka

W niektórych krajach, obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. gradusy. **Gradus** – jest to jedna setna część kąta prostego.

ZADANIA

5.1.1 Znajdź:

a) miarę łukową kątów: $90^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 360^\circ$,

b) miarę stopniową kątów: $3\pi\ rad$; $6{,}5\pi\ rad$; $\frac{6}{5}\pi\ rad$; $\frac{5}{3}\pi\ rad$.

Odpowiedź: a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$; b) 540°, 117°, 216°, 300°.

5.1.2 Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta. Wynik podaj w stopniach.

Odpowiedź: 114°.

5.1.3 Pole wycinka koła o promieniu $r = 3\ cm$, jest równe $2cm^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

Odpowiedź: $\alpha = \frac{4}{9}$.

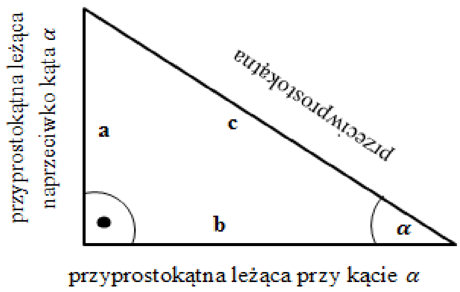
5.2 Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać definicje i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus, tanens i cotangens kątów o miarach od 0° do 180°,
- Obliczać miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).

Termin **trygonometria** pochodzi od dwóch greckich słów: trigonom (trójkąt) i metron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

Rozważmy trójkąt prostokątny o kącie ostrym $\boldsymbol{\alpha}$.



Rysunek 5-3 Trójkąt prostokątny

Tangensem kąta ostrego $\boldsymbol{\alpha}$ nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta $\boldsymbol{\alpha}$ do długości przyprostokątnej (leżącej przy tym kącie) i oznaczamy $\boldsymbol{tg\ \alpha}$.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $sin\ \alpha$.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta α (czytaj: kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta α do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $cos\ \alpha$.

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangensem kąta α (czytaj: kotangensem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przylegającej do kąta α do długości drugiej przyprostokątnej i oznaczamy $ctg\ \alpha$.

$$ctg\alpha = \frac{a}{b}$$

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, zatem ilorazy określające sinus i cosinus są liczbami mniejszymi od 1.

Przykład 1

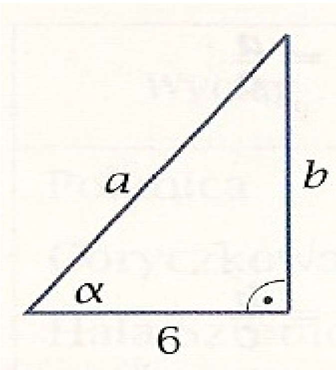
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi 3/4. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$cos\alpha = \frac{6}{a}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{a}$$

$$a = 8$$



Ciekawostka

Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim zapisywali oni hinduską nazwę sinusa bez samogłosek, jako *jb*. Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie zatoka to sinus, tak przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa sinus znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla różnych miar kątów, można odczytać z tablic.

Z tablic możemy korzystać w dwóch celach:

1. Możemy odczytać wartość danej funkcji dla danego kąta.

2. Możemy odczytać, z jakim kątem mamy do czynienia, mając podaną wartość danej funkcji.

Funkcje trygonometryczne i ich wartości odczytywane z tabeli wykorzystujemy do obliczania długości poszczególnych boków lub miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2

Podaj wartość tangensa kąta o mierze $15°$.

Dla podanego kąta i funkcji odczytujemy wartość:

	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	-
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046
13°	0.225	0.9744	0.2309	4.3315
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874

Możemy więc zapisać, że tangens 15° wynosi 0,2679:

tg 15° = 0,2679

Przykład 3

Podaj miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,6023. Dla podanego kąta i funkcji odczytujemy wartość. Szukamy w kolumnie funkcji cosinus podanej wartości (0,6023), a jeżeli nie ma jej w tabeli, szukamy wartości najbliższej do danej (dla naszego przykładu będzie to wartość 0,6018):

	sin	cos	tg	ctg
46°	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
47°	0.7314	0.682	1.0724	0.9325
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
49°	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
50°	0.766	0.6428	1.1918	0.8391
51°	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
52°	0.788	0.6157	1.2799	0.7813
53°	0.7986	0.6018	1.327	0.7536
54°	0.809	0.5878	1.3764	0.7265
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
56°	0.829	0.5592	1.4826	0.6745
57°	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494

Kąt ma więc w przybliżeniu miarę 53°.

5.3 Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

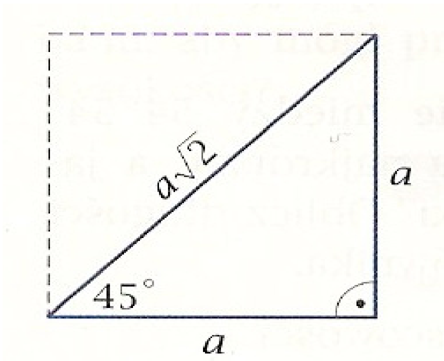
Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°, korzystamy z tego, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° jest połową kwadratu.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°.

$$sin45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{a}{a} = 1$$



Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60°, korzystamy z tego, że trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° to połowa trójkąta równobocznego.

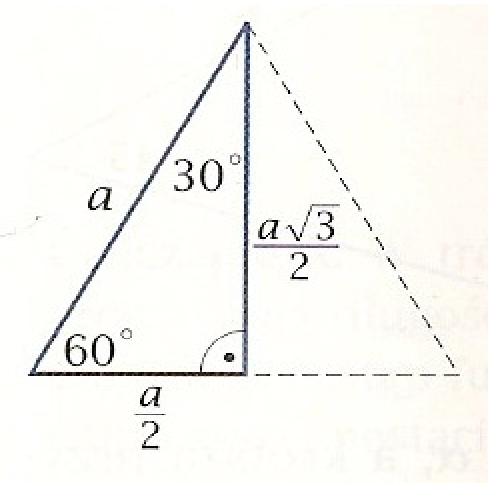
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°.

$$sin30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



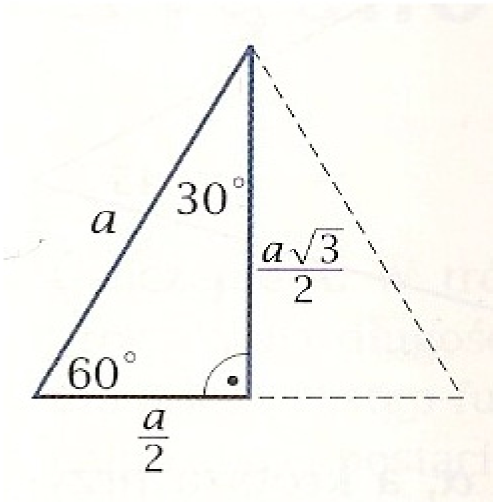
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°.

$$sin60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



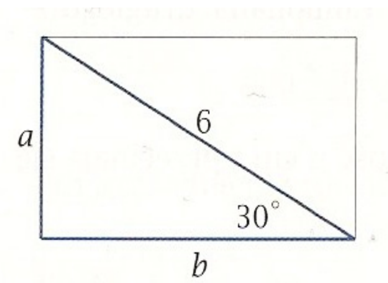
Wartości funkcji trygonometrycznych

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 5-1 – Wartości funkcji trygonometrycznych

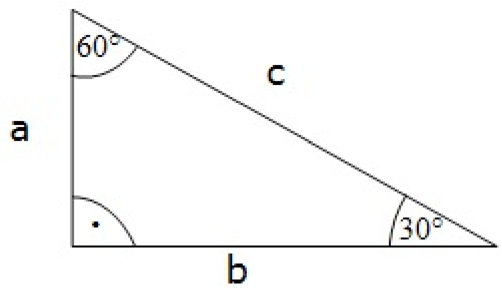
Przykład 1

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



Przykład 2

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.



$$\sqrt{3}c = 12 /: \sqrt{3}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

ZADANIA

5.3.1 Oblicz:

a) $sin30° \cdot cos60° + 2sin45°$

b) $tg45° + sin60° + 2cos30°$

c) $tg30° \cdot ctg60° - sin30° \cdot cos30°$

d) $(tg30° - ctg30°): cos30°$

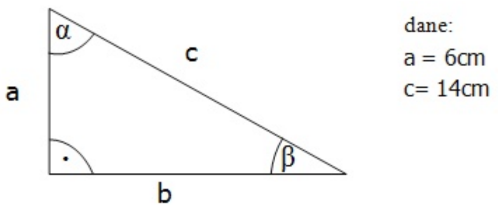
e) $\sqrt{2tg^2 60° - 4cos^2 45°} - ctg45°$

Odpowiedź: a) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$; b) $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{12-9\sqrt{3}}{36}$; d) $-1\frac{1}{3}$; e) 6.

5.3.2 Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.

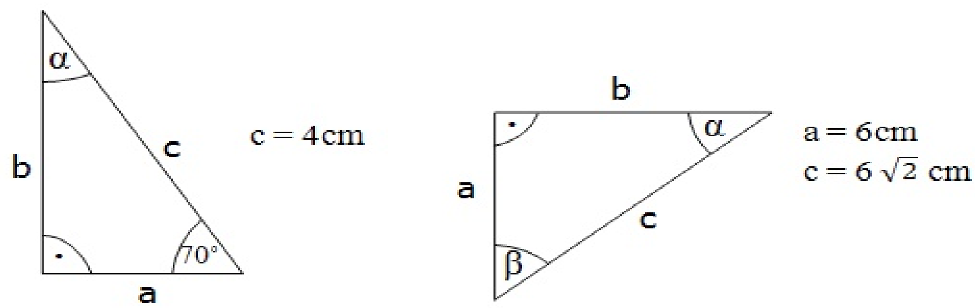
Odpowiedź: $P = 9\sqrt{3}cm^2$.

5.3.3 Oblicz miary kątów trójkąta.



Odpowiedź: $\alpha = 65°, \beta = 25°$.

5.3.4 Rozwiąż podane trójkąty prostokątne



Odpowiedź: a) $\alpha = 20°, a = 1{,}368\ cm, b = 3{,}7588\ cm$; b) $\alpha = 45°, \beta = 45°, b = 6\ cm$.

5.3.5 Linę podtrzymującą maszt przymocowano na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy naprężona lina z poziomem?
Odpowiedź: Lina nachylona jest do poziomu pod kątem około 64°.

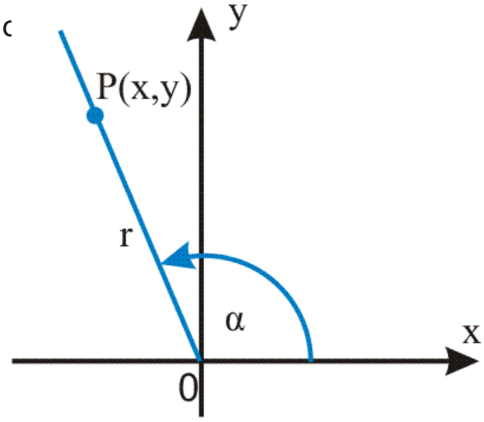
5.3.6 Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 45°. Oblicz jego pole, jeżeli jego podstawy mają długość 12 cm i 6 cm.

Odpowiedź: $P = 27\sqrt{3}cm^2$.

5.4 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych kątów, umieszczamy te kąty w układzie współrzędnych.

Dowolny kąt w układzie współrzędnych to kąt skierowany, którego ramieniem początkowym jest



α – kąt skierowany

dodatnia półoś x – ramię początkowe kąta α

półprosta $\overrightarrow{OP}$ – ramię końcowe kąta α

$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – promień wodzący punktu $P \neq 0$, gdzie $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta α.

Rysunek 5-4 – Promień wodzący

DEFINICJE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DOWOLNEGO KĄTA

Sinusem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem dowolnego kąta C w układzie współrzędnych nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do odciętej tego punktu.

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Cotangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do rzędnej tego punktu.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych katów o mierze $0°, 90°$ i $180°$.

Dla ułatwienia obliczeń, na końcowym ramieniu każdego kąta obieramy punkt, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1.

Dla kąta $0°$, $P = (1, 0)$

$x = 1, y = 0, r = 1$

$sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$tg0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

Dla kąta $90°$, $P = (0, 1)$

$x = 0, y = 1, r = 1$

$sin90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$cos90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$tg90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

$ctg90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

Dla kąta $180°$, $P = (-1, 0)$

$x = -1, y = 0, r = 1$

$sin180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$

$tg180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} - nie\ istnieje$

Wyniki umieścimy w tabeli:

α	0°	90°	180°
$sin\ \alpha$	**0**	**1**	**0**
$cos\ \alpha$	**1**	**0**	**−1**
$tg\ \alpha$	**0**	–	**0**
$ctg\ \alpha$	–	**0**	–

Tabela 5-2 – Wartości funkcji trygonometrycznych

ZADANIE

5.4.1 Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany α, w którym punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta, a następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta:

a) $P = (1,7)$ b) $P = (-2,5)$ c) $P = \left(-\sqrt{3}, -4\right)$ d) $P = (6, -3)$

Odpowiedź:

a) $r = 5\sqrt{2}, sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}, cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, tg\alpha = 7, ctg\alpha = \frac{1}{7};$

b) $r = 29, sin\alpha = \frac{5}{29}, cos\alpha = \frac{-2}{29}, tg\alpha = -\frac{5}{2}, ctg\alpha = -\frac{2}{5};$

c) $r = 19, sin\alpha = -\frac{4}{19}, cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{19}, tg\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{2}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4};$

d) $r = 3\sqrt{5}, sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}, cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, tg\alpha = -\frac{1}{2}, ctg\alpha = -2.$

5.5 Wzory redukcyjne

Teraz nauczę się:

Korzystać ze wzorów typu: $sin(90° - \alpha) = cos\alpha$.

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

Jeśli argument zmienia się w nieparzystą wielokrotność kąta $\frac{\pi}{2}$, to funkcja przechodzi w kofunkcję (sinus w cosinus, cosinus w sinus, tangens w cotangens, cotangens w tangens). Ponieważ wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, więc należy je poprzedzić odpowiednim znakiem, pisząc prawą stronę wzoru. Znak piszemy taki, jaki odpowiada funkcji trygonometrycznej kąta α występującej z lewej strony wzoru.

Tabela wzorów redukcyjnych

	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
$\varphi =$	$\frac{\pi}{2} - a$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\pi - a$	$\pi + a$	$\frac{3}{2}\pi - a$	$\frac{3}{2}\pi + a$	$2\pi - a$
$sin\ \varphi$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\ \varphi$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
$tg\ \varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\ \varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tabela 5-3 – Wzory redukcyjne

Przykład 1

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos\alpha$$

Funkcja przeszła w kofunkcję, bo kąt zmienił się o $\frac{\pi}{2}$. Znak z prawej strony jest dodatni (+), bo kąt $\frac{\pi}{2} + \alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam sinus jest dodatni.

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

Funkcja nie zmieniła się, bo kąt zmienił się o π. Znak z prawej strony jest ujemny (–), bo kąt $\pi - \alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam cosinus jest ujemny.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
$sin\ \alpha$	+	+	–	–
$cos\ \alpha$	+	–	–	+
$tg\ \alpha$	+	–	+	–
$ctg\ \alpha$	+	–	+	–

Zapamiętaj wierszyk!

W pierwszej wszystkie są dodatnie,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus.

Tabela 5-4 – Znaki funkcji trygonometrycznych

Przykład 2

$$sin150° = sin(180° - 30°) = sin30° = \frac{1}{2}$$

$$cos420° = cos(4 \cdot 90° + 60°) = cos60° = \frac{1}{2}$$

$$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$$

$$cos\frac{3}{4}\pi = cos135° = cos(180° - 45°) = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ZADANIA

5.5.1 Oblicz:

a) $sin120°$ b) $cos315°$ c) $tg(-840°)$

d) $sin\frac{\pi}{3}$ e) $ctg(-2\pi)$ f) $2sin^2 225° - ctg330° \cdot tg450°$

Odpowiedź: a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) Nie ma rozwiązania; f) $1 + \sqrt{3}$.

5.5.2 Korzystając z wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $\frac{cos135° + tg330°}{ctg225° \cdot sin840°}$ b) $sin\frac{5\pi}{4} \cdot tg\frac{4\pi}{3} + cos2\frac{1}{2}\pi$

Odpowiedź: a) $\frac{-\sqrt{6}-2}{3}$; b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

5.5.3 Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

5,6 Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Teraz nauczę się:

Stosować proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1, tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznaczyć wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Jedynka trygonometryczna

$$\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Uzasadnimy wzór dla sinusa i cosinusa kąta ostrego.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}sin\alpha = \frac{a}{c},\ cos\alpha = \frac{b}{c}cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

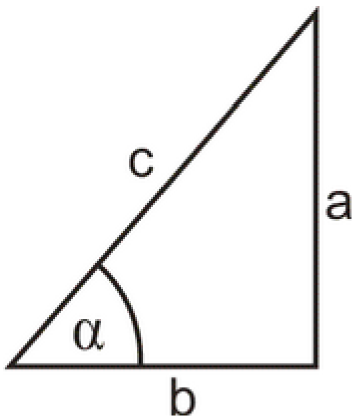
$$a^2 + b^2 = c^2 /: c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$



Rysunek 5-5 – Twierdzenie Pitagorasa

Wniosek:

Jeżeli $\alpha \epsilon (0°; 90°)$, to:

$$\boldsymbol{sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha}$$

$$\boldsymbol{\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = ctg\alpha}$$

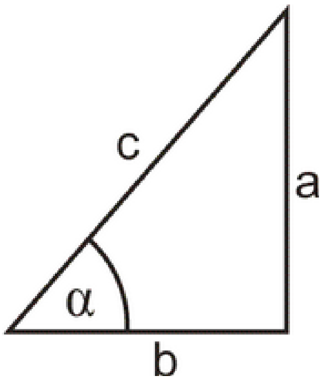
Przykład 1

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha,$

b) $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$.

Niech będzie dany trójkąt prostokątny:



a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha : cos\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha,$

b) $\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha : sin\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = ctg\alpha.$

Ponieważ wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta ostrego są liczbami odwrotnymi, to:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

Z tego wynika, że $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$

Przykład 2

Wiedząc, że $cos\alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2}$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

Przykład 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną: $sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - \left(\frac{sinx}{tgx}\right)^2$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie:

$$\frac{sinx}{tgx} = sinx : tgx = sinx : \frac{sinx}{cosx} = sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} = cosx$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - (cosx)^2$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx(1 - cos^2x) - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx \cdot sin^2x - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sin^3x - cos^2x$$

$$L = P$$

ZADANIA

5.6.1 Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych:

a) $cos\alpha = \frac{1}{4}$,

b) $tg\alpha = 2\sqrt{2}$.

Odpowiedź: a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, tg\alpha = \sqrt{15}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, cos\alpha = \frac{1}{3}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.6.2 Oblicz $a + b$, gdy $a = 1 - cos^2\alpha, b = tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 45°$.

Odpowiedź: 1.

5.6.3 Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Odpowiedź: $sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{1}{2}$.

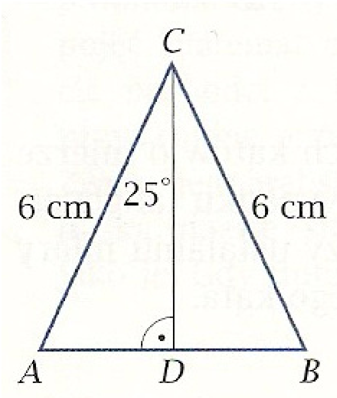
5.7 Zastosowanie trygonometrii

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać wiadomości i umiejętności w zadaniach oraz problemach życia codziennego

Przykład 1

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta? Jaką długość ma wysokość opuszczona na tę podstawę?



Wartość sin 25° odczytujemy z tablic.

$\sin 25° \approx 0{,}4226$

$|AB| = 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5{,}1$

$cos25° = \frac{|CD|}{6}$

$|CD| = 6 \cdot cos25°$

Wartość cos 25° odczytujemy z tablic.

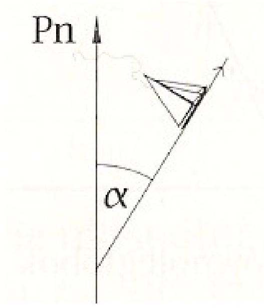
$cos25° \approx 0{,}906$

$|CD| = 6 \cdot 0{,}906 \approx 5{,}4$

Odpowiedź: Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości, a wysokość około 5,4 cm.

Przykład 2

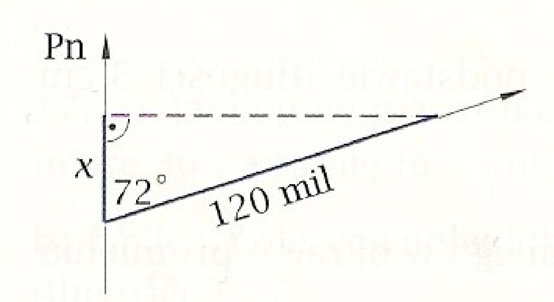
Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°.
O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).



Rysunek pomocniczy do zadania

$$\frac{x}{120} = cos72°$$

$$x = 120 \cdot cos72°$$



Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tablic.

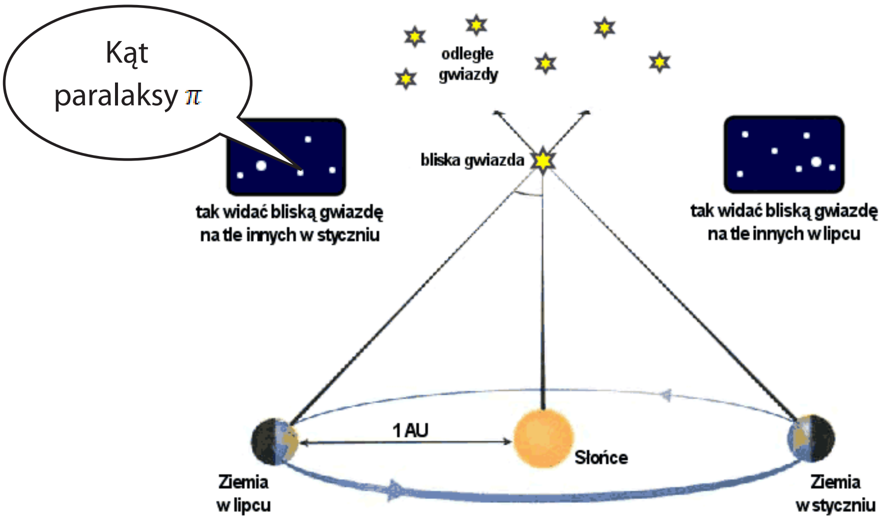
$$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$$

Odpowiedź: Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

Ciekawostka

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się przy pomiarze odległości do trudno dostępnych obiektów, np. do wyznaczania odległości obiektów astronomicznych przy pomocy zjawiska paralaksy.
Paralaksa to zjawisko pozornej zmiany położenia obiektu oglądanego z dwóch kierunków.

W praktyce najłatwiej zobaczyć zmianę położenia na tle innych odległych obiektów. Paralaksę geocentryczną stosuje się do pomiarów odległości w Układzie Słonecznym, wówczas za bazę przyjmuje się promień Ziemi. Do wyznaczenia odległości do innych gwiazd, za bazę obiera się jedną jednostkę astronomiczną, czyli średnią odległość Ziemia – Słońce (149,6 mln km). Można zmierzyć położenie danej gwiazdy na tle odległych gwiazd w dwóch momentach czasu, gdy Ziemia jest na przeciwnych miejscach na swojej orbicie. Otrzymujemy wtedy podwojony kąt paralaksy (2π).



Rysunek 5-6 – Kąt paralaksy

Kąt ten jest na tyle mały, że wyrażamy go w sekundach łuku i oznaczamy symbolem π. **Jedna sekundy łuku,** czyli odległość, z jakiej obiekt o średnicy równej średniej odległości Ziemi od Słońca miałby rozmiary jednej sekundy łuku na niebie[66].

Ciekawostka

Parsek – jednostka odległości używana w astronomii. Jest to odległość, dla której paralaksa roczna położenia Ziemi, widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity, wynosi 1 sekundę łuku. Parsek można równoważnie opisać jako odległość, z jakiej połowa wielkiej osi orbity ziemskiej (czyli 1 j.a.) jest widoczna jako łuk o długości 1 sekundy kątowej.

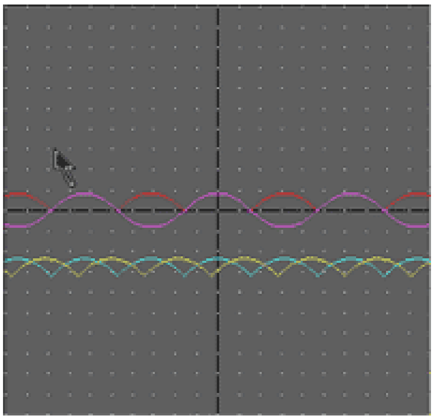
Słowo parsek zostało wprowadzone przez Herberta Turnera w XIX wieku. Utworzył on je jako zbitkę pierwszych sylab słów **par**alaksa i **sek**unda. Parsek oznaczany jest skrótem **pc** lub **ps**. Używanie drugiego ze skrótów nie jest wskazane, gdyż jest on identyczny ze skrótem dla pikosekundy (1 ps = 10^{-12} s) [67].

1 pc ≈ 3,2616 roku świetlnego ≈ **206265 jednostek astronomicznych ≈ 3,086·10^{16}** m

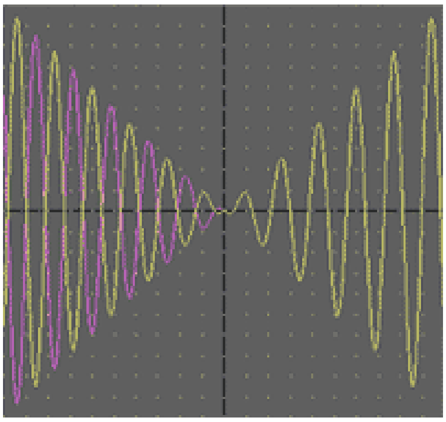
66 74 www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk, 19.04.2013.
67 www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek, 20.04.2013.

Ciekawostka

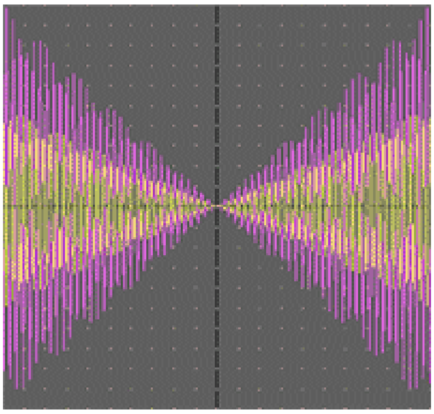
$y = sin(cos(x))$



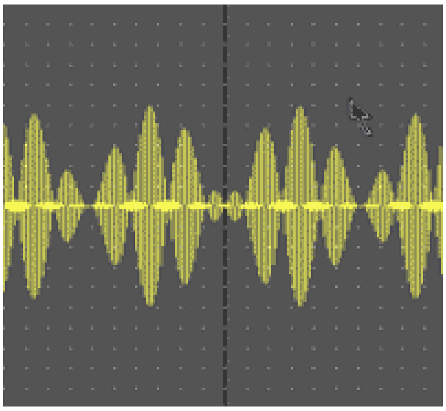
$y = -x \cdot cos(100x)$



$y = x \cdot sin(20x)$



$y = 5sin(0,5x) \cdot cos(50x)$



Zadania

5.7.1 Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Ramię tego trapezu ma długość $10\ cm$, a obwód wynosi $40\ cm$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

Odpowiedź: $2\ cm$, $18\ cm$.

5.7.2 Oblicz wysokość drzewa, które daje cień o długości 17 m przy wysokości słońca 54°. *Wysokość słońca – kąt między kierunkiem promieni słonecznych a płaszczyzną horyzontu.*

Odpowiedź: 23,4 m.

5.7.3 Najbardziej „stroma" kolej na świecie znajduje się w Gwatemali. Tory biegną pod kątem 52°. Na jaką wysokość wjedziesz po przejechaniu 1000 m?

5.7.4 Pod jakim kątem nachylona jest do podłoża drabina o długości 10 m, jeżeli sięga ona na wysokość 8 m? Jak wysoko sięgnie ta drabina, jeżeli kąt między nią a ziemią będzie wynosił 60°? ($\sqrt{3} \approx 1,73205$)

5.7.5 Obserwator stoi na stromym brzegu na wysokości 35 m nad wodą. Widzi żaglówkę pod kątem 12° do poziomu wody. Jak daleko jest ta żaglówka od brzegu?

5.7.6 Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi znajduje się Księżyc, jeżeli kąt paralaksy wynosi $\pi = 57'$. Przyjmij promień Ziemi R = 6378 km.

Odpowiedź: $d = \frac{R}{tg\pi} = 384000$ km.

5.7.7 Oblicz kąt paralaksy najbliższej nam gwiazdy Proxima Centauri, znajdującej się w odległości 4,3 lat świetlnych od Ziemi. Podpowiedź: Rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu jednego roku. (Jaką drogę pokona światło? $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$)

Odpowiedź: $d = 4{,}3$ lat świetlnych $= 4{,}3 \cdot 365{,}35 \cdot 24 \cdot 3600\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 4{,}1 \cdot 10^{16}$ m

R = 149 600 000 km = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

$tg\alpha = \frac{r}{d} \approx 6{,}36 \cdot 10^8$

$\alpha = (3{,}6 \cdot 10^{-6})°$

5.7.8 Po upływie 6 miesięcy pozycja obserwowanej gwiazdy zmieniła się, tak że jej kąt paralaksy wyniósł 0,00013°. Oblicz odległość gwiazdy od Ziemi, wiedząc, że promień orbity Ziemi wynosi $1{,}496 \cdot 10^8$ km. Odległość wyraź w kilometrach i parsekach.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{r}{l}$, $l = \frac{r}{tg\alpha} = 6{,}6 \cdot 10^{13}$ km = 2,14 pc.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Kąt α jest ostry i $sin\,\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy $cos\,\alpha$ jest równy:[68]

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{65}}{9}$

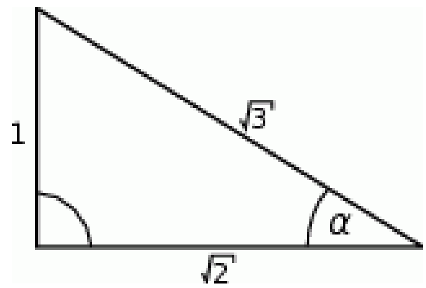
2. Dany trójkąt jest prostokątny (patrz rysunek). Wtedy $tg\,\alpha$ jest równy:

a) $\sqrt{2}$,

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



3. Kąt α jest ostry i $tg\,\alpha = 4/3$. Oblicz $sin\,\alpha + cos\,\alpha$.

68 Zadania: 1, 2, 3 zaczerpnięto z próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

4. Kąt α jest ostry i $sin\ \alpha = 3/4$. Wartość wyrażenia $2 - cos^2\alpha$ równa się:[69]

a) $\frac{25}{16}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{17}{16}$ d) $\frac{31}{16}$

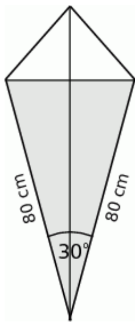
5. Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa:

a) 3200 cm^2

b) 6400 cm^2

c) 1600 cm^2

d) 800 cm^2



6. Kąt α jest ostry i $tg\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $cos\ \alpha$.

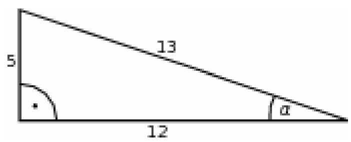
7. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy:[70]

a) $cos\alpha = \frac{5}{13}$

b) $tg\alpha = \frac{13}{12}$

c) $cos\alpha = \frac{12}{13}$

d) $tg\alpha = \frac{12}{5}$



8. Kąt $\boldsymbol{\alpha}$ jest ostry i $cos\alpha = \frac{5}{13}$, wtedy:[71]

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $tg\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin^{\alpha} = \frac{12}{5}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $tg\alpha = \frac{12}{13}$

9. Wartość wyrażenia $\frac{sin^2 38^\circ + cos^2 38^\circ - 1}{sin^2 52^\circ + cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ d) 1

10. **(2 pkt)** Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

11. Liczba $tg\ 30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa:[72]

a) $\sqrt{3} - 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i |AB| = 13 oraz |BC| = 13. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

a) $\frac{12}{13}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{13}{12}$

69 Zadania: 4, 5, 6 zaczerpnięto z matury z matematyki, CKE, maj, 2010.
70 Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
71 Zadania: 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2011.
72 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.

13. Kąt α jest ostry i $cos\,\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ jest:[73]

a) mniejsza od –1 b) równa 1 c) większa od 1 d) równa 0

14. Kąt α jest ostry i $sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy $cos\alpha$ jest równy:[74]

a) $\frac{45}{49}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

15. Kąt α jest ostry i $sin\,\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas:[75]

a) $\cos\alpha = \sin\alpha$ b) $\cos\alpha > \sin\alpha$

c) $\cos\alpha < \sin\alpha$ d) $\cos\alpha = 1 - \sin\alpha$

16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy:[76]

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{4}{3}$

17. Wyrażenie $\frac{1-sin^2\alpha}{\frac{1}{tg^2\alpha}}$, gdzie α jest kątem ostrym, można zapisać w postaci:

a) $sin2\ \alpha$ b) $\frac{cos^4\alpha}{sin\alpha}$ c) $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$ d) $\frac{1}{sin\alpha}$

18. **(2 pkt.)**Wykaż, że jeżeli kąt α jest kątem ostrym i $tg\,\alpha = 2$, to $cos\,\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. **(2 pkt)** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

20. Oblicz wartość wyrażenia $tg^2\alpha - 3cos^2\alpha$, jeżeli $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem ostrym.

21. **(4 pkt)** Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$. Oblicz wartość $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$ i $tg\,\alpha$[77].

22. **(2 pkt)** Drabina o długości 2,5 m oparta o mur styka się z nim na wysokości 2 m. Na jakiej wysokości zetknie się z murem drabina o długości 3,5 m, jeśli obie drabiny nachylone są pod takim samym kątem do podłoża?

23. **(2 pkt)** Posługując się wzorem: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, oblicz $sin75^\circ$.

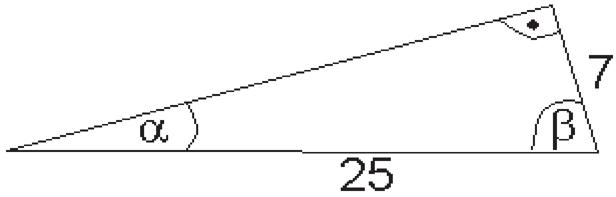
24. **(2 pkt)** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$[78].

25. **(2 pkt)** Oblicz $a–b$, gdy $a = sin^4\alpha - cos^4\alpha$, $b = 1 - 4sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.

---

73 Zadania: 13, 14 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2010.
74 Próbna matura z Operonem, listopad, 2009.
75 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2011.
76 Zadania:18, 19, 20 zaczerpnięto z arkusza maturalnego, OKE Poznań, styczeń, 2013.
77 Zadania: 21, 22, 23 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
78 Zadania: 24, 25, 26, 27 zaczerpnięte z informatora maturalnego, CKE, 2007.

26. (**4 pkt**) Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia $(tg\beta - \frac{1}{sin\beta})^2 \cdot cos\,\alpha$.



27. (**4 pkt**) Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{ctg\alpha - tg\,\alpha}{ctg\alpha + tg\,\alpha}$.

28. (**5 pkt)** Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α [79].

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $sin\,\alpha - tg\,\alpha < 0$,

b) Dla $sin\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

79 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2009.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka, Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty*, Matura 2009 – Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb
2. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png
3. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png
4. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png
5. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
7. www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza
8. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
9. www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie
10. www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html
11. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
12. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
13. www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi
14. www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent
15. www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf
16. www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy
17. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna
18. www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna
19. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd
21. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
22. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
24. www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
25. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
28. www.wiking.edu.pl/article.php?id=269
29. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf

Matematyka

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości"

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Układy równań pierwszego stopnia

1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony;
- nieoznaczony;
- sprzeczny.

Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie.**

Przykład 1

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość $x = 2$ do pierwszego równania:

$$2 + y = 3$$
$$y = 1$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania.**

Przykład 3

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \,/\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-2 \end{cases}$$

$$0=-1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax+by=A \\ cx+dy=B \end{cases}$$

Przykład 4[1]

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2}=\dfrac{2-y}{4}+6 \quad /\cdot 4 \\ 6(x-1)-2x+4=y-8 \end{cases}$$

Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{3x}{2}=4\cdot\dfrac{2-y}{4}+4\cdot 6 \\ 6x-6-2x+4=y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3x=2-y+24 \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 6x=26-y \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" i z „y" na lewo, a liczby na prawo.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-8+2 \end{cases}$$

Wykonujemy końcowe obliczenia.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-6 \end{cases}$$

1 http://www.matematykam.pl/upraszczanie_ukladu.html, 17.02.2013r

KRÓTKIE PRZYPOMNIENIE Z GIMNAZJUM.

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODA PODSTAWIANIA

Przykład 5[2]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} \boxed{2x + 4y = 10} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} \boxed{2x = 10 - 4y} \quad /\div 2 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} \boxed{x = 5 - 2y} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać: x = 5 - 2y. Uzyskane wyrażenie (5 – 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x = \boxed{5 - 2y} \\ -3(5 - 2y) - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + 6y - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + y = -13 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = -13 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

2 http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej y=2,
do wcześniej wyprowadzonej postaci:
x = 5 - 2y
Po podstawieniu obliczamy drugą
niewiadomą (x).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu
niewiadomych.

METODA PRZECIWNYCH WPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 6[3]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą x (bo ma najmniejszą wartość w obu
równaniach).

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 4y = 10 & / \cdot 3 \\ \boxed{3x} - 5y = -7 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest
6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy
pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 – w ten sposób
w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam
znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy
mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „–"
(tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaliśmy mnożenie
równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia,
przez liczby określone w poprzednim kroku.

3 http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases} \quad +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x - 6x} + 12y + 10y = 30 + 14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x" skracają się do „0"

$$12y + 10y = 30 + 14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y = 44$$

$$y = 2$$

$$2x + 4y = 10$$

$$2x + 4 \cdot 2 = 10$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik y=2).

$$2x + 8 = 10$$

$$2x = 10 - 8$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

1.2 Graficzna interpretacja układów równań

Teraz nauczę się wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1[4]

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

4 http://www.matematykam.pl/metoda_graficzna.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x” na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 & / \div 2 \\ -y = -3x + 8 & / \div (-1) \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y” (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu (x , y), to nasze rozwiązanie.

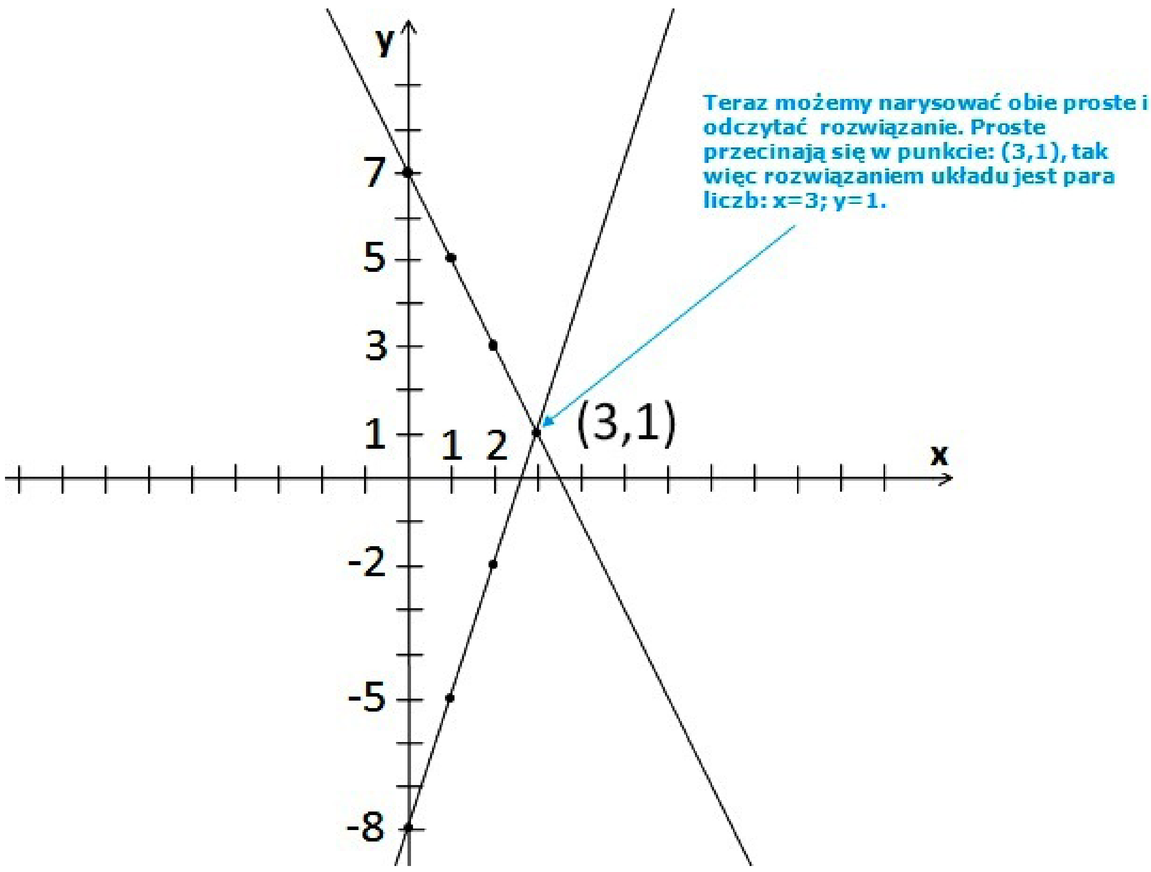
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	7	5	3

x	0	1	2
y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ZADANIA

1.1.1 Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 5x + 2\frac{1}{2}y = 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}3 \\ 2x + 5y = 8{,}6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 0{,}2y = 35 \\ 2{,}5x - 5y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \frac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1 - 0{,}3(y - 2) = \frac{x+1}{5} \\ \frac{y-3}{4} = \frac{4x+9}{20} - 1{,}5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - 2y) = -7x - 2 \\ 5(x + 1) - 2(3 - y) = -4(x + 2) \end{cases}$

n) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x + 1 \\ \frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

a) Układ równań nieoznaczony

b) Układ równań sprzeczny

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, układ równań oznaczony

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, układ równań oznaczony

e) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

f) $\begin{cases} x = 1{,}3 \\ y = 1{,}2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

g) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 40 \end{cases}$, układ równań oznaczony

h) $\begin{cases} x = 3\frac{3}{23} \\ y = -1\frac{5}{23} \end{cases}$, układ równań oznaczony

i) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

j) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

k) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$, układ równań oznaczony

l) $\begin{cases} x = 5\frac{3}{11} \\ y = -1\frac{9}{11} \end{cases}$, układ równań oznaczony

m) $\begin{cases} x = -\frac{13}{15} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$, układ równań oznaczony

n) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

Wnioski:

- Dla układu **oznaczonego** proste przecinają się w 1 punkcie.
- Dla układu **nieoznaczonego** proste pokrywają się.
- Dla układu **sprzecznego** proste są równoległe i nie pokrywają się.

1.1.3. Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$

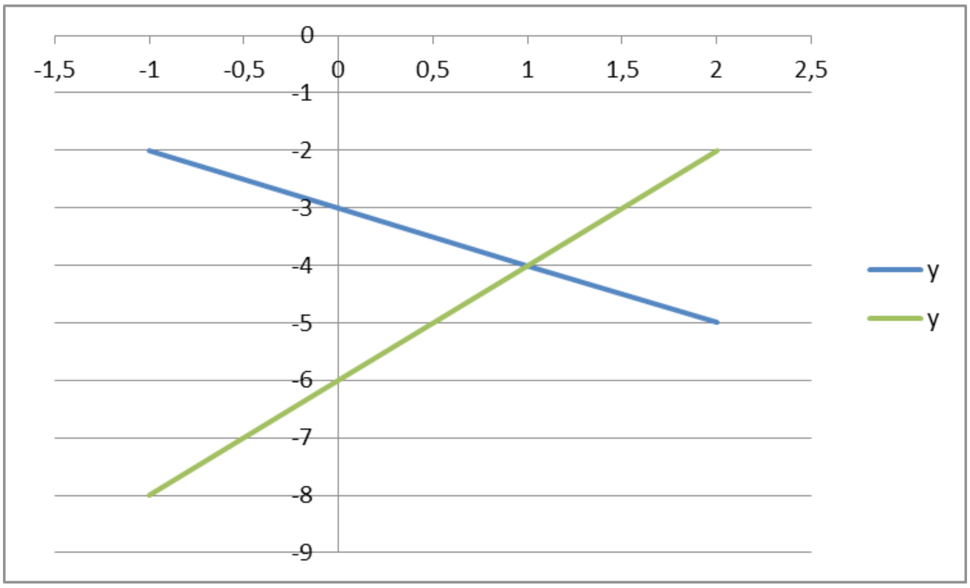
b) $\begin{cases} 3x + y = -(x-8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$

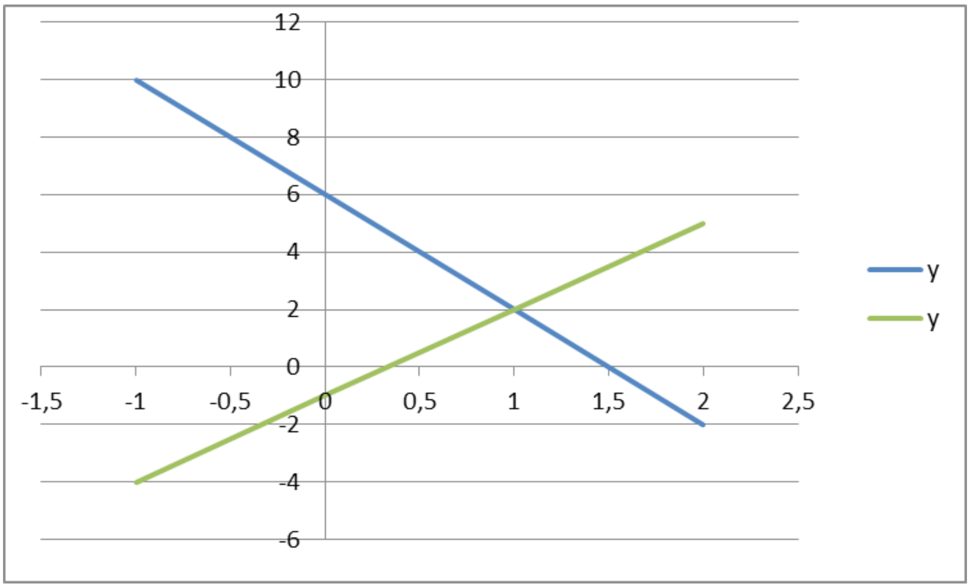
d) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

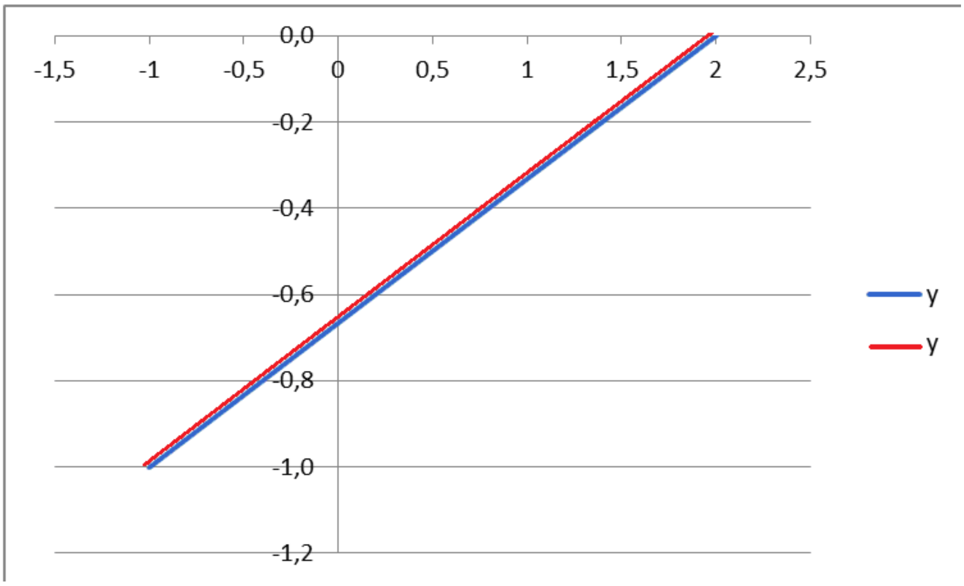
a) $x = 1$ $y = -4$



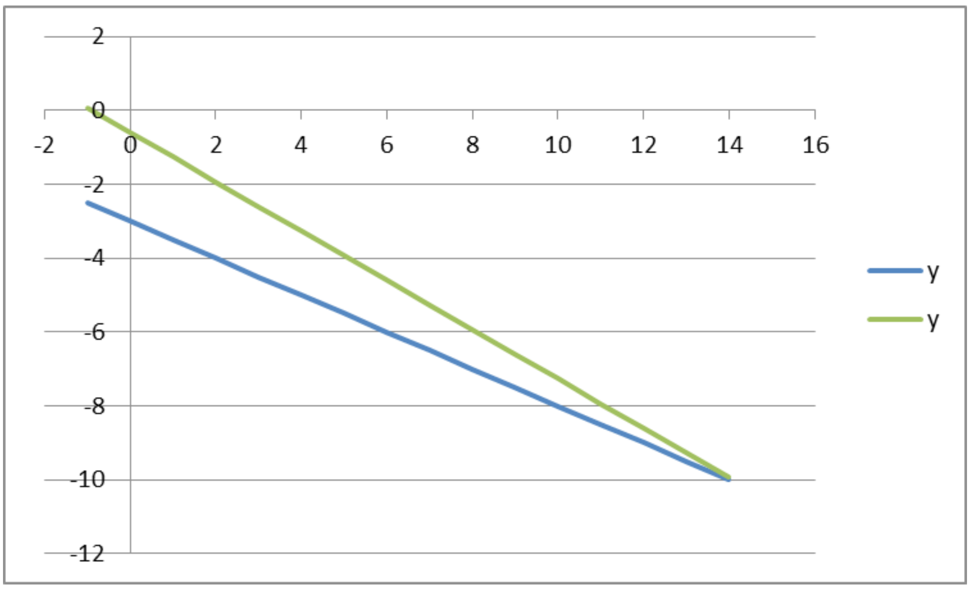
b) $x = 1$ $y = 2$



c) rozwiązaniem jest R



d)



$x = 13$, $y = -9{,}3$

1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową 10 $\frac{m}{s}$ i poruszał się z przyspieszeniem 1 $\frac{m}{s^2}$. Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość 20 $\frac{m}{s}$ i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 10\frac{m}{s}, v = 20\frac{m}{s}, a = 1\ \frac{m}{s^2}, s_0 = 100$ m

Szukamy: t, s

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

Odpowiedź: $t = 10$ s, $s = 250$ m

Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się 120 m^3 wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

Odpowiedź:

v_1 – objętość pierwszej rury

v_2 – objętość drugiej rury

p_1 – przepustowość pierwszej rury

p_2 – przepustowość drugiej rury

t_1 – czas napełniania przez pierwszą rurę

t_2 – czas napełniania przez drugą rurę

$v = p \cdot t$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$p_1 . 2 + p_2 = 120$

$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$

Odpowiedź: Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi 40 m^3

ZADANIA

1.1.3 W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością 20 $\frac{m}{s}$ przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem 2 $\frac{m}{s^2}$ w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_1 = 20\frac{m}{s}$, $a = 2\frac{m}{s^2}$

Szukamy: s, t, v_2

Układamy równania ruchu pojazdów. Zauważ, że drogi pojazdów są jednakowe.

$$\begin{cases} s = v_1 t \\ s = \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie:

$v_1 t = \frac{at^2}{2}$ stąd $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

Odpowiedź: $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

1.1.4 Z balkonu znajdującego się na wysokości 50 m spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?

Rozwiązanie

Mamy dane: $h = 50$ m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$

Szukamy: t, v

Doniczka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ziemskim g.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} \mathrm{h} = \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{cases}$$

Odpowiedź:

$t = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ s

$v = 31{,}6\,\frac{m}{s}$

1.1.5 Samolot podczas lądowania z szybkością 200 $\frac{m}{s}$, wyhamował na drodze 1000 m.

Z jakim opóźnieniem lądował samolot?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 200 \frac{mm}{s\ s}$, $s = 1500$ m, $v_k = 0$

Szukamy: a

Samolot poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Układamy równania ruchu:

$$\begin{cases} s = v_0 - \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

$t = \frac{v_0}{a}$, podstawiamy do pierwszego równania

$s = \frac{v_0^2}{2a}$, stąd $a = \frac{v_0^2}{2s} = 20 \frac{m}{s^2}$

Odpowiedź: $a = 20 \frac{m}{s^2}$

1.1.6 Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?

Odpowiedź: 2:5

1.1.7 Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty". Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Odpowiedź: Stefan miał 10 zł, a Jan 8 zł.

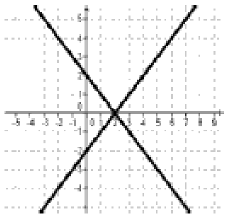
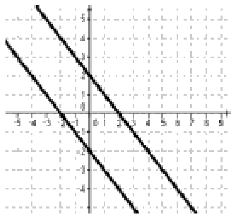
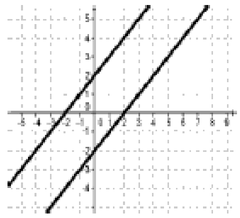
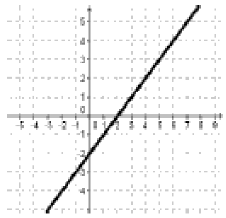
1.1.8 Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?

Odpowiedź: 2 długopisy i 9 ołówków

1.1.9 Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł . W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje 1 m^3 wody zimnej, a ile ciepłej?

Odpowiedź: 1 m^3 ciepłej wody kosztuje 6 zł, a zimnej 2 zł

1.[5] Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Odpowiedź: c

2.[6] Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

Odpowiedź: d

3.[7] Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$y = -2x - \frac{1}{4}$ i $4x - 4y + 5 = 0$

Odpowiedź: (–1/2,3/4)

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

a) $x = 1, y = -1$ b) $x = -1, y = 1$ c) $x = -1, y = -1$ d) $x = 1, y = 1$

Odpowiedź: d

5.[8] Aby układ $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ był układem nieoznaczonym ,należy w miejsce a wstawić:

a) 10 b) –5 c) 5 d) –6

Odpowiedź: c

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia x – liczba uczniów klasy I, y – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

a) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}08x + 0{,}075y = 51 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}80 + 0{,}75y = 51 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0{,}8x + 0{,}75y = 66 \end{cases}$

Odpowiedź: c

5 Zadanie 1: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 18.02.2013.
6 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.
7 Zadanie 3, 4: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.
8 Zadanie 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

Odpowiedź: a

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

Odpowiedź: 15 kg wafli po12 zł i 5 kg wafli po 8 zł

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odpowiedź: $a = 6$, $b = 7$ lub $a = 7$, $b = 6$

2 Równania i nierówności kwadratowe

2.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowmi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$, bo można przekształcić do postaci: $3x^2 - 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$, gdzie $a = 5$,$b = 3$, $c = 7$
- $8x = 3x^2 + 1$, bo można przekształcić do postaci $3x^2 - 8x + 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = -8$, $c = 1$
- $x^2 + 5x = 0$, gdzie $a = 1$, $b = 5$, $c = 0$

Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + c = 0$, gdy $a \neq 0$, $b = 0$ i $c \neq 0$

- $x^2 - 16 = 0$
  $x^2 = 16$
  $x = 4$ lub $x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$
  $-3x^2 = 6 / \div (-3)$
  $x^2 = -2$ sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x-2)^2 = 4(1-x)$
  $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$
  $x^2 = 0$
  $x = 0$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx = 0$, gdy $a \neq 0, b \neq 0$ i $c = 0$

- $5x^2 - 3x = 0$

  $x(5x-3) = 0$

  $x = 0 \text{ lub } 5x - 3 = 0$

  $x = 0$ lub $x = \frac{5}{3}$

- $-5x - 4x^2 = 0$

  $-x(5+4x) = 0$

  $-x = 0 \text{ lub } 5 + 4x = 0$

  $x = 0 \text{ lub } 4x = -5$

  $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{4}$

ZADANIA

2.4.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2 + 16 = 0$	b) $-\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$	c) $2x^2 + 8 = 0$
d) $2x^2 - 5x = 0$	e) $-3x^2 + 6x = 0$	f) $-x^2 - 2 = 0$
g) $x(x-3) = 0$	h) $(x+2)(x-4) = 0$	i) $\frac{1}{2}x^2 = 0$
j) $5x^2 - 7x = 0$	k) $-3x^2 + 1 = 0$	l) $5x^2 = 1$
m) $-x^2 - 3 = 0$	n) $9x^2 + \frac{x}{3} = 0$	o) $x^2 = (1-x)(1+x)$

Odpowiedź:

a) $x = -4$ lub $x = 4$	b) $x = -3$ lub $x = 3$	c) brak rozwiązań
d) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$	e) $x = 0$ lub $x = 2$	f) brak rozwiązań
g) $x = 0$ lub $x = 3$	h) $x = -2$ lub $x = 4$	i) $x = 0$
j) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{5}$	k) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	l) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
m) brak rozwiązania	n) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$	o) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

Teraz nauczę się:

- obliczać wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne

Rozwiążmy równanie typu $ax^2+bx+c=0$, gdzie a $\neq 0$.

Aby rozwiązać równanie $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, najpierw obliczamy wartość wyrażenia $\Delta=b^2-4ac$

- jeśli $\Delta\rangle 0$, to równanie ma dwa rozwiązania : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- jeśli $\Delta=0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x=\frac{-b}{2a}$;
- jeśli $\Delta\langle 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole Δ i δ to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga – mała litera delta. Z symbolem δ spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

Przykład 1

- $6x^2-13x+5=0$

$$\Delta=(-13)^2-4\cdot 6\cdot 5=49$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$$
$$x_1=\frac{-(-13)-7}{2\cdot 6}=\frac{13-7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{-(-13)+7}{2\cdot 6}=\frac{13+7}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$
$$x_1=\frac{1}{2}\text{ lub } x_2=\frac{5}{3}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

- $6x^2-5x+2=0$

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 2=-23$$

Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3

- $$6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$$

  $$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

  $$x = -\frac{b}{2a}$$

  $$x = -\frac{4}{2 \cdot 6} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

  Równanie ma jedno rozwiązanie.

Rozwiązywanie równań, prowadzące do równań kwadratowych.

Równanie typu $ax^4 + bx^2 + c = 0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym.**

Przykład 4

$x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

$(x^2)^2 + 6x^2 + 5 = 0$

podstawiam $x^2 = t$ w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać

$t^2 + 6t + 5 = 0$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$\Delta > 0$ – wyznaczamy dwa miejsca zerowe

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Wracamy do podstawienia $x^2 = t$

$x^2 = -5 \;\vee\; x^2 = -1$

$x \in \emptyset$ $\qquad$ $x \in \emptyset$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań = $\emptyset$)

Przykład 5

Rozwiąż równania:

a) $5x - \frac{15}{x} = 10$

Rozwiązanie

Założenie: $x \neq 0$

$Df : x \in R / \{0\}$

$5x - \frac{15}{x} = 10 / \cdot x$

$5x^2 - 15 = 10x$

$5x^2 - 10x - 15 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)$

$\Delta = 400$

$\sqrt{\Delta} = 20$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 20}{10} = -1$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 20}{10} = 3$

b) $\frac{8}{4 - x} = \frac{x}{x - 4}$

Założenie:

$4 - x \neq 0$ i $x - 4 \neq 0$

$x \neq 4$ i $x \neq 4$

$Df : x \in R / \{4\}$

$8 \cdot (x - 4) = (4 - x) \cdot x$

$8x - 32 = 4x - x^2$

$x^2 + 4x - 32 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$

$\sqrt{\Delta} = 12$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 12}{2} = -8$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$

$x_2 \notin Df$, stąd rozwiązaniem jest $x_1 = -8$

ZADANIA

2.2.1. Rozwiąż równania:

a) $-x^2 - 2 = 0$ b) $x\sqrt{3} - \sqrt{2}x^2 = 0$ c) $x(x-3) = 0$

d) $(x-4)(x+2) = 0$ e) $(x-2)^2 - 9 = 0$ f) $16 - (x+3)^2 = 0$

g) $(3x+2)^2 = 25$ h) $x^2 + 6x + 5 = 0$ i) $x^2 - 10x + 25 = 0$

j) $x^2 + 2x - 120 = 0$ k) $12x^2 + 7x - 12 = 0$ l) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

m) $9x^2 - 24x - 20 = 0$ n) $-3x^2 + 1{,}5x + 54 = 0$

Odpowiedź:

a) Brak rozwiązania b) $x = 0$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $x = 0$ lub $x = 3$

d) $x = -2$ lub $x = 4$ e) $x = -1$ lub $x = 5$ f) $x = -7$ lub $x = 1$

g) $x = -\frac{7}{3}$ lub $x = 1$ h) $x = -5$ lub $x = -1$ i) $x = 5$

j) $x = -12$ lub $x = 10$ k) $x = -\frac{4}{3}$ lub $x = \frac{3}{4}$ l) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 2$

m) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{10}{3}$ n) $x = -4$ lub $x = \frac{9}{2}$

2.2.2 Rozwiąż równania:

a) $(3x-2)^2 + 2 = 6$ b) $3(4x-1)^2 + 1 = 28$

c) $2(5x-2)^2 + 5 = 13$ d) $x(3x-5) = 12$

e) $(2x-5)^2 + (x+4)^2 = 41$ f) $\frac{x(x-2)}{5} - 3x = 2x^2 + \frac{x(x+1)}{3}$

g) $(x-2)(x+5) - (x-7)(x+1) = (x+2)(x-3)$ h) $3x^2 - 6x - 24 = 0$

i) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ j) $x^2 - 2x + 4 = 0$

k) $4x^2 - 4x - 1 = 0$ l) $3x^2 + 2x + 2 = 3x + 4x^2 - 3$

Odpowiedź:

a) 0 lub $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ lub 1 c) 0 lub $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{3}$ lub 3

e) 0 lub $\frac{12}{5}$ f) $-\frac{7}{4}$ lub 0 g) $5 - 2\sqrt{7}$ lub $5 + 2\sqrt{7}$ h) -2 lub 4

i) $\frac{5}{2}$ j) Brak rozwiązań k) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ l) Brak rozwiązań

2.2.3 Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+3}{x-1}=0$ b) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$ c) $\frac{x+1}{4x}=\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x-3}{6x}=\frac{2}{2x+3}$ e) $\frac{5-x}{5x}=\frac{2}{5x}$ f) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{-3}{3x-1}$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$ b) $x=-1$ lub $x=3$

c) $x=2-\sqrt{5}, x=2+\sqrt{5}$ d) $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}, x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=-5-5\sqrt{2}, x=-5+5\sqrt{2}$ f) równanie sprzeczne

2.2.4 Rozwiąż równania:

a) $x^4-4=0$ b) $x^4-4x^2=0$ c) $x^4-x^2-2=0$

d) $x^4-5x^2+4=0$ e) $x^4-4x^2+4=0$ f) $x^4+2x^2-3=0$

g) $x^4-x^2+1=0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą $x^2=t$, dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe)

Odpowiedź:

a) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ b) 0, –2,2 c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

d) –1,1, –2,2 e) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ f) –1, 1

g) brak pierwiastków rzeczywistych

2.3 *Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

TWIERDZENIE[9]

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$ ma rozwiązania x_1, x_2, to:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

9 http://pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a, 18.02.2013.

Dowód

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4a\right)}{4a^2} = \frac{4a}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

UWAGA!

Wzory Viete'a mają szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

Jeżeli...

- $\Delta < 0$ – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta = 0$ – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta \geq 0$ – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta > 0$ – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

- $x_1 \cdot x_2 < 0$ – to są one różnych znaków,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$ – to mają one takie same znaki,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$ – to są one dodatnie,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$ – to są one ujemne.

Przykład 1

Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 5x + 6$

Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości a, b, c do wzorów:

$$x_1 + x_2 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_2 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba –5, a iloczynem liczba 6?". Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb –2 i –3.

Rozwiązaniami są więc: $x_1 = -2$ i $x_2 = -3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

2.3.1 Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a oraz zastosuj je, aby uzyskać:

a) kwadrat sumy pierwiastków

b) sumę kwadratów pierwiastków

c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków

d) kwadrat różnicy pierwiastków

e) sumę sześcianów pierwiastków

Odpowiedź:

a) $$(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$$

b) $$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right)$$

b) $$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

d) $$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}$$

e) $$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$$
$$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right)$$

2.3.2 Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2 - 300x - 200 = 0$

c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2 - x + 21 = 0$

Odpowiedź:

a) $-\frac{115}{203}$ b) 90400 c) $\frac{43}{441}$

Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m = 0$ ma:

a) dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$

Z założenia $m^2 + 4m > 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$

b) jeden pierwiastek

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$

Z założenia $m^2 + 4m = 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m = -4$, $m = 0$

c) nie ma pierwiastków

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$

Z założenia $m^2 + 4m < 0$

otrzymujemy rozwiązanie: $m \in (-4;0)$

ZADANIA

2.3.3 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a) $-2x^2 + 3mx - 1 = 0$ b) $mx^2 + 2x + m = 0$

Odpowiedź:

a) $m = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $m = -1$

2.3.4 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 1 = 0$ ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: $m \in (-\infty;2\sqrt{2})$

2.3.5 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania o różnych znakach.

Odpowiedź: $m \in (-1;2)$

2.3.6 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 + (m + 2)x + m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Odpowiedź: brak rozwiązań

2.3.7 Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$ jest najmniejsza.

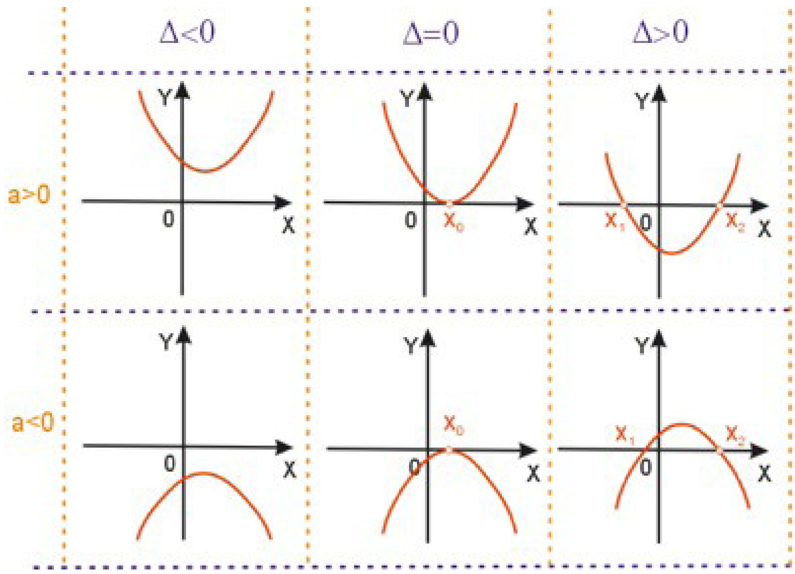
Odpowiedź: $m = 4$

2.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego.** Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika a oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

<u>**Przykład 1**</u>[10]

$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Krok 1. Wyznaczamy miejsca zerowe, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

10 http://www.matematykam.pl/ , 19.02.2013.

Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia.
Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

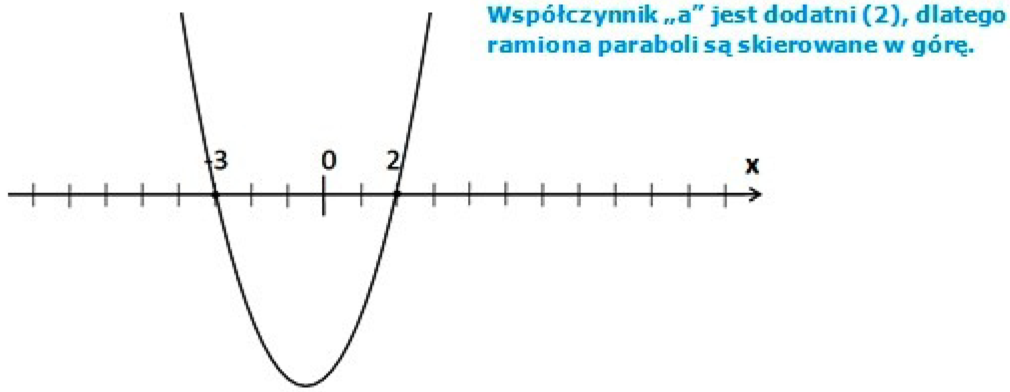
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2+10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2-10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Krok 2. Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

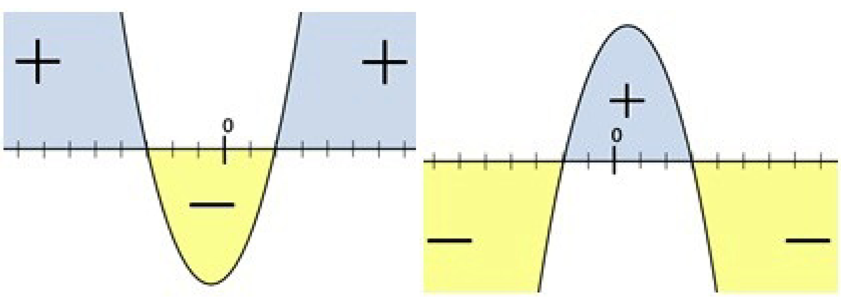
- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istotny jest jedynie kierunek ramion paraboli.



Krok 3. Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zacznijmy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę).

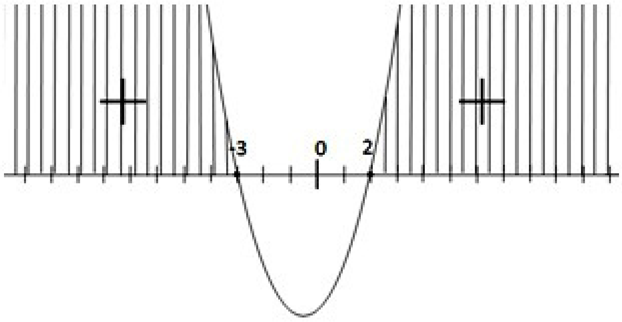
Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy" (<) lub „mniejszy lub równy" (≤), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy" (>) lub „większy lub równy" (≥), zakreślamy obszar dodatni.

W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem: ≥, dlatego zakreślimy obszar dodatni.

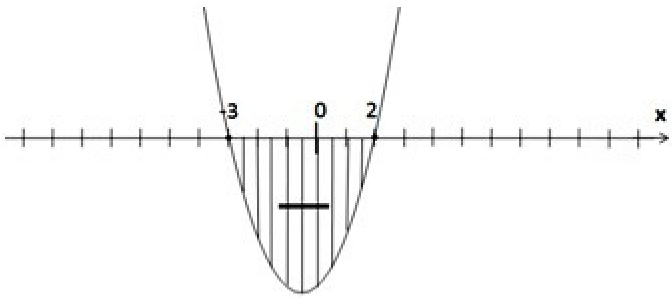


Krok 4. Odczytujemy rozwiązanie. Są nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in (-\infty, \ -3\rangle \cup \langle 2, \ \infty)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę (≤), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



$$x \in \langle -3, \ 2\rangle$$

INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI....

Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie mieć go wcale.

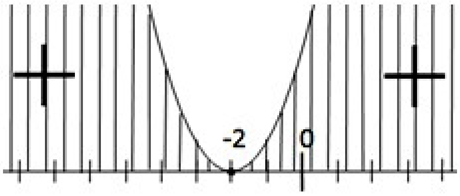
Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

- Z jednym miejscem zerowym

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady

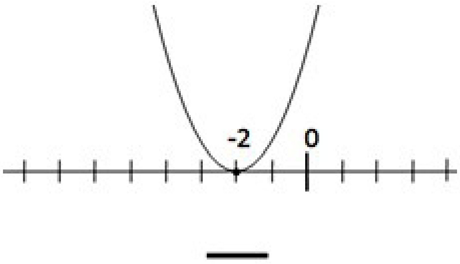
Znak nierówności $\geq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$x \in R$

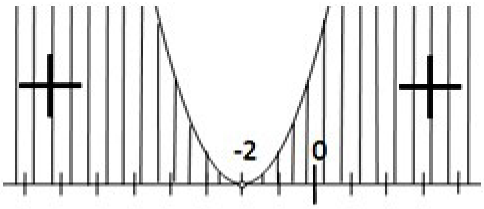
Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

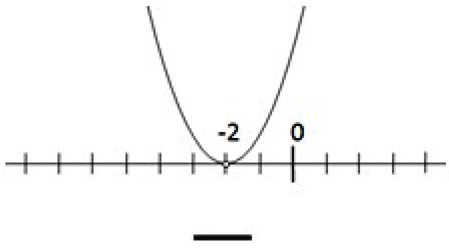
Znak nierówności $>$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

Znak nierówności $<$



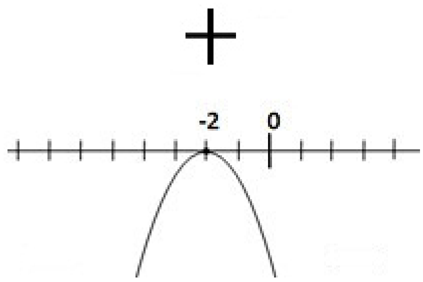
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W DÓŁ

Przykłady:

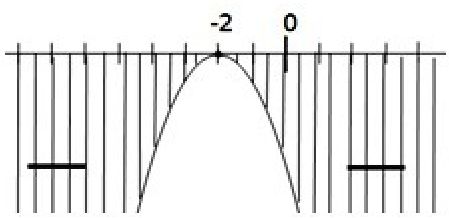
Znak nierówności $\geq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$x = -2$

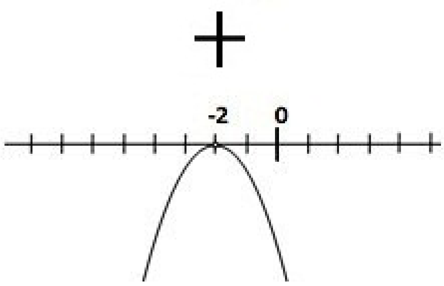
Znak nierówności $\leq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero (–2), także należy do rozwiązania.

$x \in R$

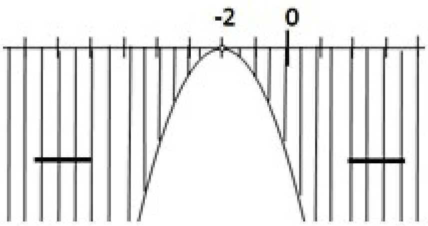
Znak nierówności $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pust. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$x \in \varnothing$

Znak nierówności $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba –2 do niego nie należy.

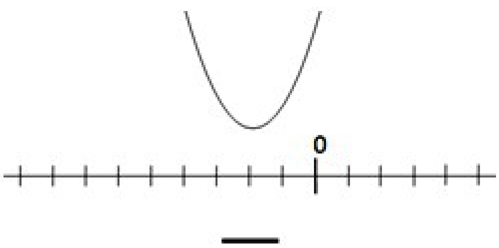
$x \in R \setminus \{-2\}$

- Bez miejsc zerowych

– GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady:

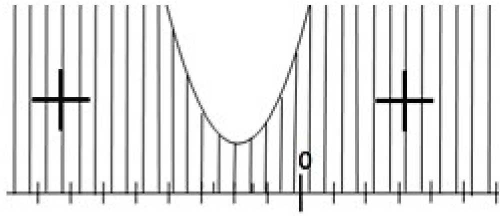
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in \varnothing$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



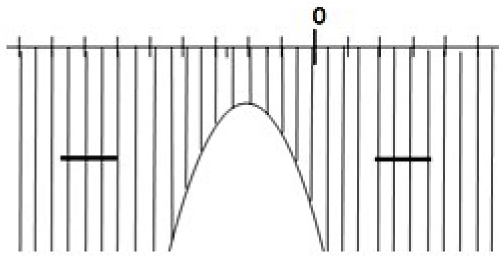
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in R$

– gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

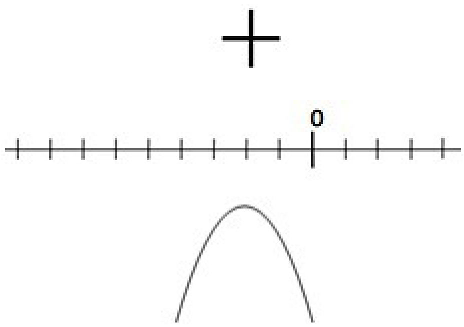
Znak nierówności $\leq$ lub $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in R$

Znak nierówności $\geq$ lub $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in \varnothing$

ZADANIA

2.4.1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)\rangle 0$

b) $x(x+4)\langle 0$

c) $(x-7)(x+6)\geq 0$

d) $2x^2-8x\leq 0$

e) $x^2-16\rangle 0$

f) $x^2\leq 4$

g) $8x^2\geq 24$

h) $48\langle x^2$

i) $x^2-2x-8\geq 0$

j) $x^2+12x+24\rangle 0$

k) $x^2+12x+24\langle 0$

l) $x^2\langle -4(x+1)$

m) $(2x-6)^2\leq 4x-13$

n) $(2x-6)x\geq 0$

o) $(x-1)(x+3)>0$

p) $(2-x)(2x-3)\leq 0$

q) $-3x^2-8x>0$

r) $6x-2x^2\leq 0$

s) $3x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\leq 0$

t) $(x-3)\,(3x-4)-(x-3)\,(x+2)>0$

u) $(x+5)^2+(x+5)\,(x-3)\leq 0$

v) $(3x-4)\,(x+2)>(x+2)\,(x-1)$

w) $(4x-5)\,(x+4)>(x+4)^2$

x) $9x^2+6x+4<3$

y) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

z) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

Odpowiedź:

a) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

b) $(-4,0)$

c) $(-\infty,-6\rangle\cup\langle 7,+\infty)$

d) $\langle 0,4\rangle$

e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

f) $\langle -2,2\rangle$

g) $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3},+\infty)$

h) $(-\infty,-4\sqrt{3})\cup(4\sqrt{3},+\infty)$

i) $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 4,+\infty)$

j) $(-\infty,-6-\sqrt{3})\cup(-6+2\sqrt{3},+\infty)$

k) $(-6-2\sqrt{3},-6+2\sqrt{3})$

l) $\varnothing$

m) $\frac{7}{2}$

n) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

o) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

p) $(-\infty,\frac{3}{2}>\cup<2,\infty)$

q) $(0,4)$

r) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

s) $\left\langle -\frac{1}{6},1\right\rangle$

t) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

u) $\langle -5,-1\rangle$

v) $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},\infty)$

w) $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

x) brak rozwiązania

y) $x\in R$

z) $x\in R$

2.4.2 Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność:

a) $(x-1{,}2)(x-3{,}4)\langle 0$

b) $-x^2+3{,}6x\geq 0$

c) $x^2-6{,}25\langle 0$

d) $2x^2-0{,}6x-16{,}2\langle 0$

Odpowiedź:

a) $\{2,3\}$

b) $\{0,1,2,3\}$

c) $\{-2,-1,0,1,2\}$

d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2.4.3 Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a) $x^2-1\rangle 0,\ x^2+3x\leq 0$

b) $9x^2+9x+2\langle 0,\ x^2-9x+2\langle 0$

c) $x^2\geq 9$; $(x+7)(x-3)(5x+1)>0$

Odpowiedź:

a) $\langle -3,-1\ );\ x\in(\ -\infty,0\ \rangle\cup(1,+\infty)$

b) zbiór pusty; $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\setminus\{-7\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[11] Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa:

a) $-\frac{7}{2}$

b) $-\frac{7}{2}\frac{7}{2}$

c) $-\frac{3}{2}$

d) $-\frac{3}{4}$

Odpowiedź: c

2.[12] Rozwiąż nierówność: $-x^2+2x+8\geq 0$.

Odpowiedź: $x\in<-2,4>$

---

11 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 19.02.2013.

12 Zadanie 2, 3, 4: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php$x$ arkusze , 19.02.2013.

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 4$ jest:

a) (–2;2) b) (–∞;–2) ∪ (2;∞) c) (–∞;2) d) <–2;2>

Odpowiedź: a

4. Uzasadnij, że równanie $x^2 + (b - 2)x - 2b = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej b ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

5.[13] Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-3,3)$

6.[14] Zbiorem rozwiązań nierówności $x\,(x + 6) < 0$ jest:

a) (–6;0) b) (0;6) c) (–∞;–6) ∪ (0;∞) d) (–∞;0) ∪ (6;∞)

Odpowiedź: a

7. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,1 > \cup < 7,\infty)$

8.[15] Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-2,5)$

9.[16] Liczba wszystkich rozwiązań równania $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Odpowiedź: d

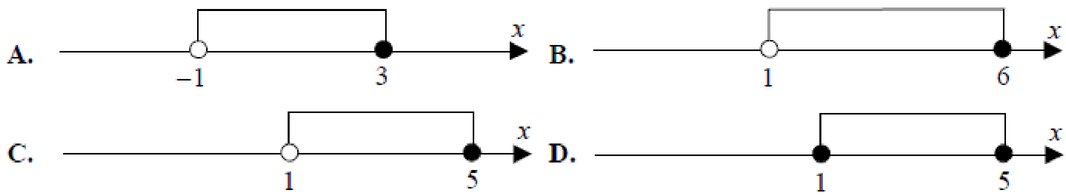
10 Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,-\frac{1}{2} > \cup < 2,\infty)$

---

13 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 19.02.2013.
14 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.
15 Zadanie 8: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 19.02.2013.
16 Zadanie 9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 19.02.2013.

11.[17] Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5) \le 0$ i $x > 1$.



Odpowiedź: d

12. Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

13.[18] Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

Odpowiedź: d

14. Rozwiąż nierówność: $x^2 - x - 2 \le 0$.

Odpowiedź: $x \in \langle -1, 2 \rangle$

15.[19] Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 4 i 1 lub –4 i –1

16. Wartość k, dla której jeden z pierwiastków równania $x^2 + 9x + k = 0$ jest równy –3 wynosi:

a) –6 b) –18 c) 18 d) 6

Odpowiedź: c

17. Równanie $2x^2 - 4x - 3 = 0$:

a) nie ma rozwiązań, b) ma jedno rozwiązanie,

c) ma dwa rozwiązania , d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: c

---

17 Zadanie 11, 12: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013

18 .Zadanie 13,14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013.

19 Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

18. Rozwiązaniem równania $2(x-2)^2 = (x-2)\,(x+3)$ jest:

a) $x = -2$ i $x = -1$ b) $x = 7$ c) $x = 2$ i $x = 7$ d) $x = 1$ i $x = 2$

Odpowiedź: c

19. Podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich spełniających nierówność $(3-x)\,(3+x) > 0$ ma:

a) dwa elementy,
b) skończoną liczbę elementów,
c) co najmniej 4 elementy,
d) nieskończenie wiele elementów.

Odpowiedź: a

20. Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x-1)^2 \geq 5(x-1)$ jest:

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle -4, 1\rangle$ c) $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty)$ d) $\langle 1, \infty)$

Odpowiedź: b

21. Rozwiązaniem równania $x^2 + x = (x+1)^2 - 7(x+2)$ jest liczba:

a) $\frac{15}{8}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $-\frac{13}{6}$

Odpowiedź: d

22. Ile liczb pierwszych zawiera zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej $(x + 1)\,(x - 10) < 0$?

a) 5 b) 4 c) więcej niż 10 d) 6

Odpowiedź: b

23. Kwadrat piątej części stada małp pomniejszonej o 3 schował się w jaskini. Jedna małpa pozostała na drzewie. Ile małp liczy stado?

Odpowiedź: 50 małp

24. Liczby $2a - 2$, $2a + 2$, $a + 1$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

Odpowiedź: $a \in (3, \infty)$

25. Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

Odpowiedź: $x \in \{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$

25. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: –9, –7, –5 lub 5, 7, 9

2.5 *Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego

Teraz nauczę się rozwiązywać układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań metodą algebraiczną:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podstawiamy wyznaczone y z pierwszego równania do drugiego równania i otrzymujemy:

$$2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 / \div 2$$
$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy $\Delta = 9$, a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego: $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone x_1 i x_2 do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 11 = -1$$
$$y_2 = 2x_2 + 11 = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji: $y = 2x^2 + 20x + 47$ i $y = 2x + 1$ w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

ZADANIA

2.5.1 Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną:

a) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7{,}25 \end{cases}$

Odpowiedzi:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Brak rozwiązania

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -6\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -7\frac{1}{2} \end{cases}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[20] Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

2[21] Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: 28 km

3.[22] W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Odpowiedź: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m $\times$ 8 m, a w drugim hotelu 35 m $\times$ 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m $\times$ 12 m, a w drugim 25 m $\times$ 14 m.

20 Zadanie 1: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.02.2013.
21 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
22 Zadanie 3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.

4.[23] Turysta pokonał pieszo trasę o długości 30 km z miejscowości A do miejscowości B ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $v = 6$ km/h, $t = 5$h

5.[24] Z miast A i B, odległych o 330 km, wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km, licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Odpowiedź: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

6.[25] Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa o długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąg pospieszny pokona tę trasę.

Odpowiedź: Pociąg pospieszny pokonał tę trasę w 2,5 godziny.

7.[26] Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440 zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż planowano. Co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Oblicz:

a) ilu uczniów pojechało na wycieczkę,

b) jaki był całkowity koszt wycieczki dla jednego uczestnika.

Odpowiedź: 45 osób, koszt dla uczestnika to 32 zł

8. Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań) i w sumie rozwiązała ich 448. Jeśli rozwiązywałaby codziennie o 4 zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o 2 dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

Odpowiedź: 16 dni, 28 zadań

23 Zadanie 4: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 20.02.2013.
24 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 20.02.2013.
25 Zadanie 6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
26 Zadanie 7, 8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu

3.1 Jednomian kwadratowy

Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

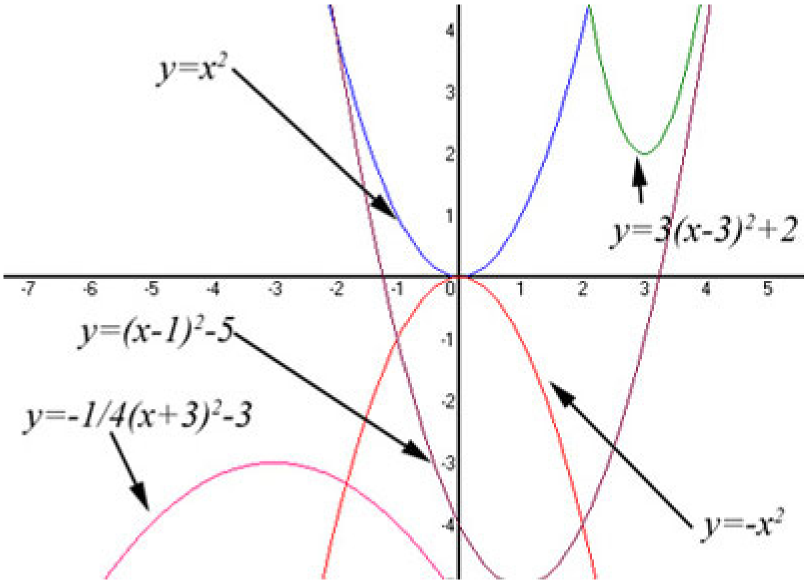
Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**[27].

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Gdy współczynnik a jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry.

Gdy współczynnik a jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

27 http://www.moskat.pl/szkola/matematyka/b_f_kwadratowa.php.



Przykłady funkcji kwadratowych:

$y = 5x^2 + 9x - 4$

$y = -x^2 - x$

$y = 2x^2 - 7$

$y = x^2$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy).

Jest to funkcja w postaci $y = ax^2$. Jest to więc przypadek, w którym $a \neq 0$ i $b = c = 0$.

Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$y = x^2$

$y = -x^2$

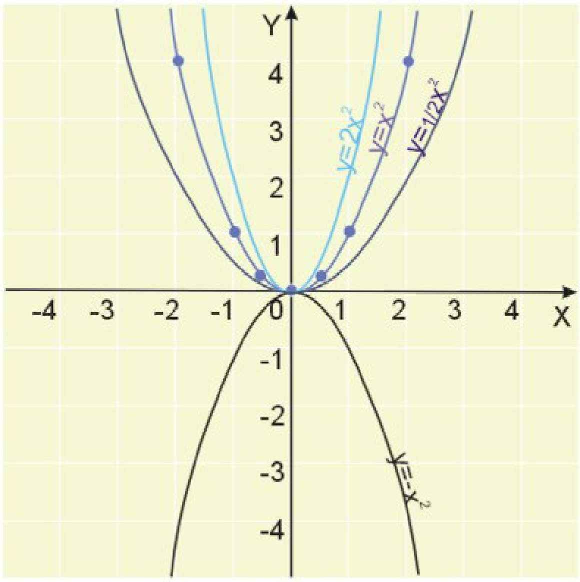
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie a jest dowolną liczbą.

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

x	–2	–1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	–4	–1	0	–1/4	–1	–4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2

Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji.



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**.
  Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik $a > 0$, oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik $a < 0$.

- Im większy jest współczynnik a, tym parabola jest „węższa".

- Parabola posiada jeden wierzchołek w punkcie (0,0).

- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.

- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór $(-\infty;0)$, gdy $a > 0$, oraz $(-\infty;0\rangle$, gdy $a < 0$.

- Oś OY jest osią symetrii paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.

- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale $(-\infty;0)$ i rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz rośnie w przedziale $(-\infty;0)$ i maleje w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a < 0$.

- Gdy $a < 0$, funkcja osiąga wartość największą (maksimum) w punkcie $x = 0$, natomiast dla $a > 0$ funkcja osiąga wartość najmniejszą (minimum) w punkcie $x = 0$.

- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 0$.

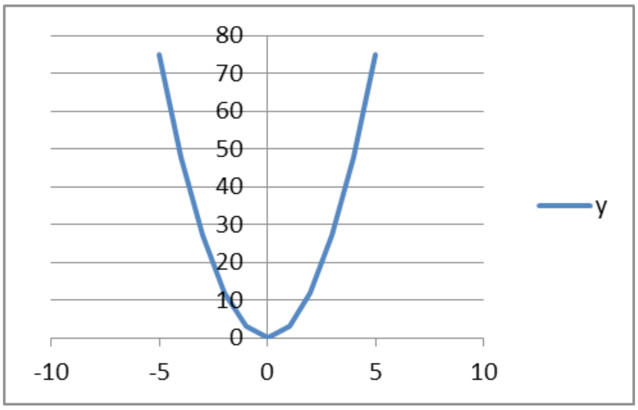
ZADANIA

3.1.1 Sporządź tabelkę wartości funkcji i naszkicuj wykres funkcji f.

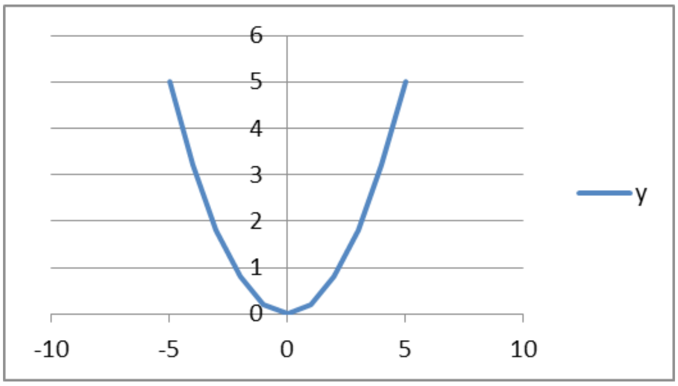
a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ c) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

Odpowiedź:

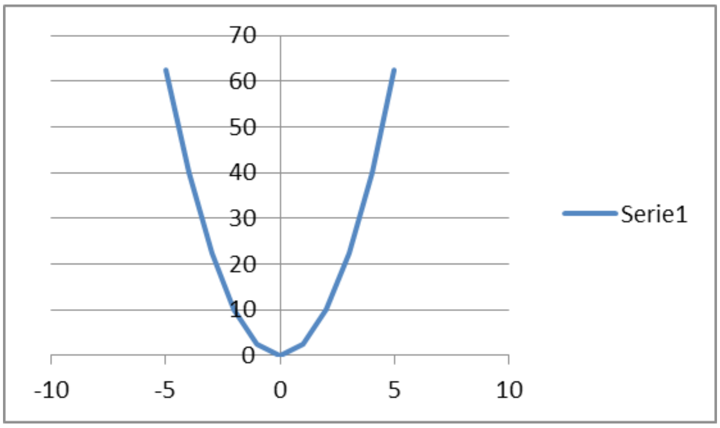
a)



b)



c)



3.1.2 prawdź, czy punkt K należy do paraboli $y = 4x^2$.

a) K = (4,32) b) K = (–2,16) c) $K = \left(-\frac{1}{4},1\right)$ d) $K = \left(\frac{1}{2},1\right)$

Odpowiedź:

a) nie należy b) należy c) nie należy d) należy

3.1.3 Omów następujące własności:

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x)=-x^2$ c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$

Odpowiedź:

a) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

b) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale . funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

c) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

d) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

3.2 Parabola w układzie współrzędnych

Teraz nauczę się interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

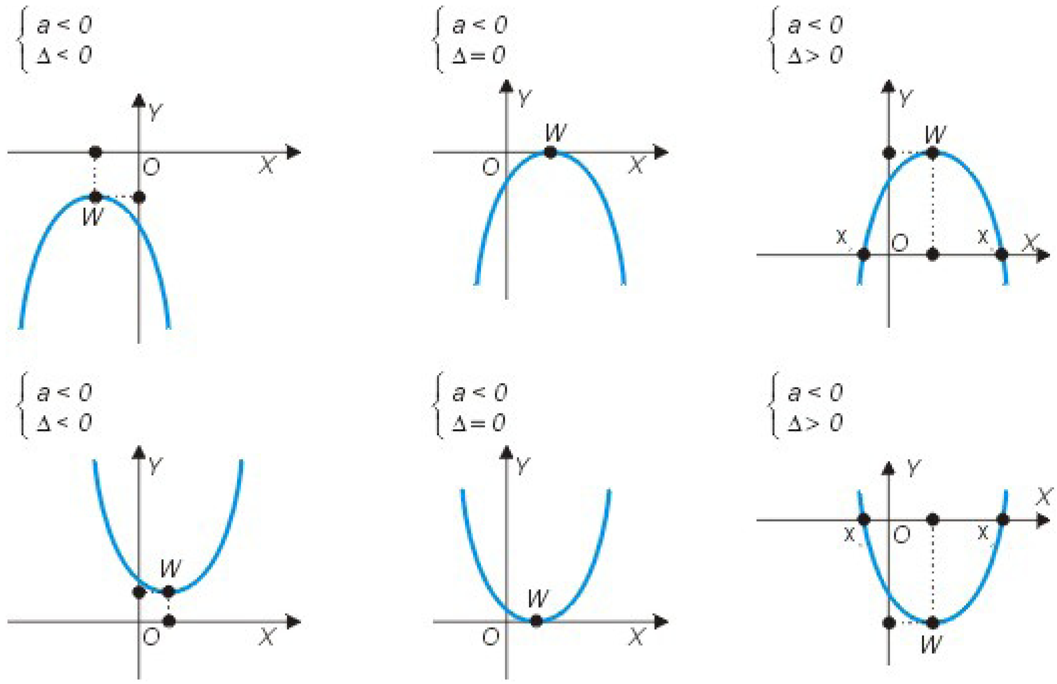
Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

1. znaku współczynnika $\boldsymbol{a}$, który warunkuje skierowanie ramion paraboli,

2. wartości wyróżnika **Δ**, która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią OX :

- ¾ dla $\boldsymbol{\Delta<0}$ parabola leży pod ($\boldsymbol{a<0}$) lub nad ($\boldsymbol{a>0}$) osią OX , nie ma z osią OX punktów wspólnych,
- ¾ dla $\boldsymbol{\Delta=0}$ parabola jest styczna do osi OX ,
- ¾ dla $\boldsymbol{\Delta>0}$ parabola przecina oś OX w dwóch punktach.

Różne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



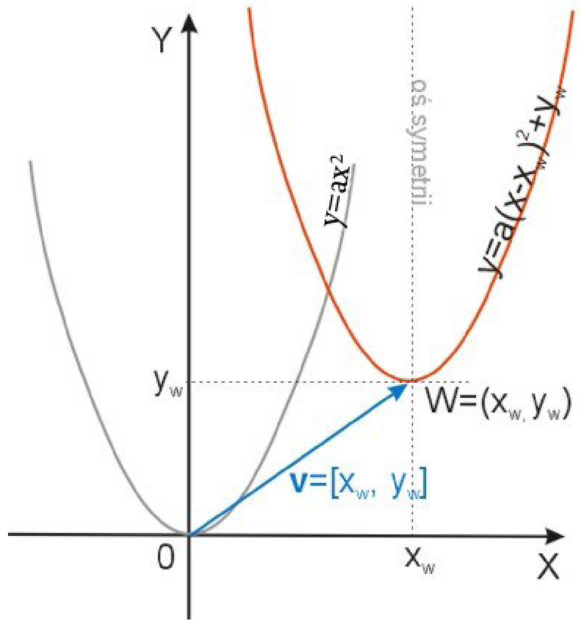
Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$ jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [x_w, y_w]$, przy czym

$x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w -$$

W przypadku dodatniego współczynnika a, mamy:

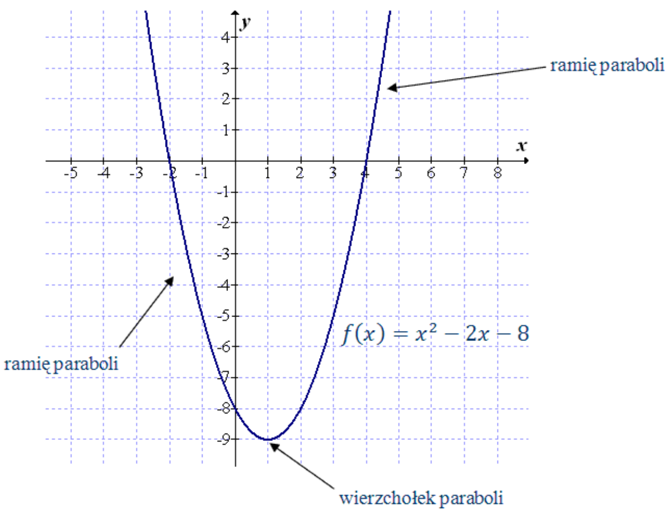


Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

➢ Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli $a > 0$, w dół w przypadku gdy $a < 0$.
- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli $\Delta > 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta = 0$.
- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$.
- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.
- Funkcja przyjmuje minimum dla $a > 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Funkcja przyjmuje maksimum dla $a < 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Gdy $a > 0$, funkcja maleje w przedziale $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$ i rośnie w przedziale $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Gdy $a < 0$, funkcja rośnie w przedziale $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$ i maleje w przedziale $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

ZADANIA



3.2.1 Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (wykres funkcji powyżej).

a) Dziedzina:…
b) Zbiór wartości: ZW =…
c) Miejsca zerowe:…
d) Współrzędne wierzchołka: W =…
e) Oś symetrii, to:…
f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in$…
g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in$…

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne:…

i) Monotoniczność:

– funkcja jest rosnąca w przedziale…

– funkcja jest malejąca w przedziale…

Odpowiedź:

a) Dziedzina: D = R.

b) Zbiór wartości: ZW = ⟨–9; +∞).

c) Miejsca zerowe: funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 4$.

- W = (1,–9)
- Oś symetrii: $x = 1$

d) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (4 +\infty)$.

e) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in (-2; 4)$.

f) Punkt przecięcia z osią y–ów ma współrzędne: (0, –8).

g) Monotoniczność: funkcja jest niemonotoniczna (jest jedynie monotoniczna przedziałami)

– funkcja jest rosnąca w przedziale $x \in (1,\infty)$

– funkcja jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty,1)$

3.2.2 Naszkicuj wykres jednomianu funkcji $f(x)$, a następnie przesuń równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile: jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a) $y = x^2$, $\vec{u} = [0,3]$ b) $y = -x^2$, $\vec{u} = [-1,0]$ c) $y = 2x^2$, $\vec{u} = [-3,2]$

Odpowiedź:

a) $y = x^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 3,\infty)$, brak miejsc zerowych; W = (0,3); funkcja rośnie $(0,\infty)$; funkcja maleje $(-\infty,0)$

b) $y = -(x+1)^2$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $(\infty \;\; ,0 >$, jedno miejsce zerowe $x = -1$; W = (–1,0); funkcja rośnie $(\infty,-1)$, funkcja maleje $(-1,\infty)$

c) $y = 2(x+3)^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 2,\infty)$, brak miejsc zerowych; W = (–3,2); funkcja rośnie $(-3,\infty)$, funkcja maleje $(-\infty,-3)$

3.3 Postacie trójmianu kwadratowego

Teraz nauczę się:

- zapisywać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej

Postać iloczynowa trójmianu kwadratowego

TWIERDZENIE[28]

Dany jest trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie x_1 i x_2 są rozwiązaniami trójmianu:

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_0)^2$

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania: $(x - 3)(x + 2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod x 3, to pierwszy nawias się „wyzeruje". Iloczyn jakiejkolwiek liczby przez 0 daje nam 0.

Jeśli podstawimy pod drugi x liczbę 2, to ten nawias także nam się wyzeruje. Rozwiązaniami są więc wartości: $x = 3$ i $x = -2$.

Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Postępujemy analogicznie jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

28 http://pl.wikibooks.org.

$\Delta > 0$, więc korzystamy ze wzoru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Widzimy, że $a = 1$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$, stąd $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$, stąd otrzymujemy rozwiązanie $x = 1$, a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej korzystając ze wzoru

$y = a(x - x_0)^2$

Odpowiedź: $2(x-1)^2 = 0$

Sposób II

Policzymy deltę.

$\Delta = (-4)\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$x_0 = 1$

$\Delta = 0$ – korzystamy więc ze wzoru: $y = a(x - x_0)^2$

a jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy: $2(x - 1)^2 = 0$

Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7.

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy, że podstawimy te wartości do wzoru.

$(x - (-3))(x - 7) = 0$

$(x + 3)(x - 7) = 0$

Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:

$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7. Można to sprawdzić poprzez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

ZADANIA

3.3.1 Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a) $12x^2+11x+2=0$ b) $3x^2-7x+2=0$ c) $2x^2-3x+4=0$

d) $-7x^2+10x-4=0$ e) $5x^2-3x=0$ f) $9x^2-8=0$

g) $2x^2-3x-2=0$ h) $-x^2+x+6=0$ i) $3x^2-5x+4=0$

j) $-4x^2+2x-1=0$ k) $10-2x^2=0$ l) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x=0$

Odpowiedź:

a) $12\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$

b) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=0$

c) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

d) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

e) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)=0$

f) $9\left(x^2-\frac{8}{9}\right)=9\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

g) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$

h) $-(x-3)(x+2)=0$

i) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

j) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

k) $-2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$ l) $\frac{1}{3}x\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

3.3.2 Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego

a) $(x-3)(x-30)=0$ b) $2(x-2)(x+5)=0$

c) $\frac{11}{3}(x+15)(x+27)=0$ d) $4x(x+6)=0$

e) $-2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=0$ f) $-2(x+1)\left(x+1-\sqrt{2}\right)=0$

g) $\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right)=0$ h) $(2x-3)(2x-3)=0$

Odpowiedź:

a) $x_1=3, x_2=30$ b) $x_1=2, x_2=-5$ c) $x_1=-15, x_2=-27$

d) $x_1=0, x_2=-6$ e) $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$ f) $x_1=-1, x_2=\sqrt{2}-1$

g) $x_1=\sqrt{3}-2, x_2=3-\sqrt{2}$ h) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$

3.3.3 Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, mając dane pierwiastki:

a) 3 i 5 b) 4 i –9 c) $\frac{1}{3}$ i 7

d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$ e) $\sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{7}$ i $1-\sqrt{7}$

Odpowiedź:

a) $b = -8,\ c = 15$ b) $b = 5,\ c = -36$ c) $b = 7\frac{1}{3},\ c = 2\frac{1}{3}$

d) $b = \frac{1}{3},\ c = -\frac{6}{3}$ e) $b = -\left(1+2\sqrt{2}\right),\ c = 2+\sqrt{2}$ f) $b = -2,\ c = -6$

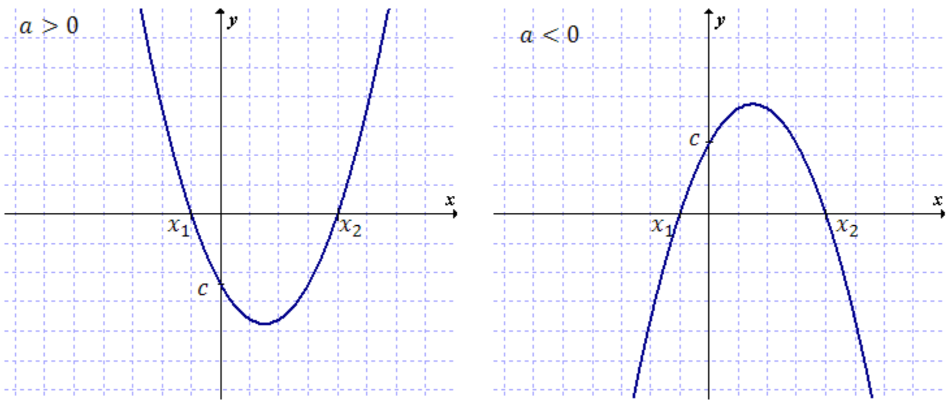
Postać ogólna funkcji kwadratowej

$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są współczynnikami liczbowymi i a ≠ 0, nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY (0, c).

Przykład



Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami x_1 oraz x_2). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2. Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka W funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a, p, q są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną funkcji kwadratowej**.

Współczynniki p i q to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez W = (p, q). Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne p i q ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zaletą postaci kanonicznej jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli.

Dodatkowo po współczynniku a możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry (a > 0), czy do dołu ($a < 0$).

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (gdy $\Delta > 0$) i $f(x) = a(x-x_0)^2$ $(\Delta = 0)$ nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym, takim że $a \neq 0$. Literki x_0, x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$.

Uwaga!

Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje.

Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ($\Delta > 0$), to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli $\Delta = 0$, to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Zaletą postaci iloczynowej jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Reasumując

Dla $\boldsymbol{a \neq 0}$ trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

<table>
<tr><td>Postać ogólna</td><td colspan="3">$y = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Postać kanoniczna</td><td colspan="3">$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x-p)^2 + q$ gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Postać iloczynowa</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>Brak postaci iloczynowej</td><td>$y=a(x-x_0)^2$</td><td>$y = a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
</table>

ZADANIA

3.3.4 Wyznacz te wartości parametrów a, b i c, dla których $f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = ax^2 - 7x + c$ i $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$ i $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

a) $a = -2, b = 7, c = -5$

b) $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{7}{4}, c = -\frac{3}{8}$

3.3.5 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników a, b i c:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}$

c) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x-2)(x-3)$

e) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

f) $f(x) = (1-x)(3-x) + 6 - 2x$

g) $f(x) = -2(x-3)^2 + 18$

h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 6$

i) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$

j) $f(x) = 2\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right)$

Odpowiedź:

a) $f(x) = x^2 - x + 16\frac{1}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{8}$

c) $f(x) = -3x^2 - 24x - 49$

d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

e) $f(x) = -9x^2 + 6x + 5$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

g) $f(x) = -2x^2 + 12x$

h) $f(x) = 3x^2 + 6x + 6$

i) $f(x) = 2x^2 + 18x - 20$

j) $f(x) = 2x^2 + 4\sqrt{2} - 6$

3.3.6 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2 + 20x + 50 = 2(x+p)^2$

b) $3x^2 - 18x + 20 = 3(x+p)^2 + q$

c) $3x^2 - 15x + 25 = a(x+p)^2 + q$

d) $5x^2 + 12x - 6 = a(x+p)^2 + q$

Odpowiedź:

a) $p = -5,$

b) $p = 3, q = -7$

c) $a = 3, p = \frac{15}{6}, q = -\frac{75}{12}$

d) $a = 5, p = -1{,}2, q = -13{,}2$

3.3.7 Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a) $f(x) = 4x^2 + 6x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

e) $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2$

g) $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$

h) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$

i) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

j) $f(x) = 4(x+5)x$

Odpowiedź:

a) $p = -\frac{3}{4}, q = \frac{3}{2}, f(x) = 4(x + \frac{3}{4}) + \frac{3}{2}$

b) $p = 1, q = 3, f(x) = -2(x - 1) + 3$

c) $p = 1, q = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}$

d) $p = -2, q = 7, f(x) = -(x + 2) + 7$

e) $p = \frac{1}{8}, q = \frac{47}{64}, f(x) = (x - \frac{1}{8}) + \frac{47}{64}$

f) $p = -3, q = -8, f(x) = \frac{2}{3}(x + 3) - 8$

g) $p = 4, q = 10, f(x) = -2(x - 4) + 10$

h) $p = -4{,}5; q = -50{,}5; f(x) = 2(x + 4\frac{1}{2}) - 50\frac{1}{2}$

i) $p = \frac{1}{3}, q = 6, f(x) = -9(x - \frac{1}{3}) - 6$

j) $p = -2{,}5; q = -25, f(x) = 4(x + 2\frac{1}{2}) - 25$

3.3.8 Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $f(x)=3x^2+x+5$ b) $f(x)=16x^2+8x+1$

c) $f(x)=-2x^2+3x+7$ d) $f(x)=-2x^2+6x+5$

Odpowiedź:

a) Brak miejsc zerowych b) Jedno miejsce zerowe

c) Dwa miejsca zerowe d) Dwa miejsca zerowe

3.3.9 Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a) $f(x)=2(x-1)(x+10)$ b) $f(x)=-3(x-2)(x+5)$

c) $f(x)=4(x+5)x$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-6)$

Odpowiedź:

a) $x_1=-10, x_2=1$ b) $x_1=-5, x_2=2$ c) $x_1=-5, x_2=0$ d) $x_1=-1, x_2=6$

3.3.10 Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a) $a=\sqrt{2}, x_1=-4, x_2=\frac{1}{2}$ b) $a=-3, x_1=-2, x_2=0$

c) $a=7, x_0=9$ d) $a=\frac{1}{2}, x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{5}$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\sqrt{2}(x+4)(x-\frac{1}{2})$ b) $f(x)=-3(x+2)x$

c) $f(x)=7(x-9)^2$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$

3.3.11 Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a) $f(x)=(x-1)(x+5)$ b) $f(x)=-(x-6)(x+4)$

c) $f(x)=2(x+1)(x+5)$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

Odpowiedź:

a) $f(x)=(x+2)^2-9$ b) $f(x)=-(x-1)^2+25$

c) $f(x)=2(x+3)^2-8$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+128$

3.3.12 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
c) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$
d) $f(x) = 9x^2 + 6x - 1$
e) $f(x) = -3x^2 + 5$
f) $f(x) = -2x^2 + x + 1$
g) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$
h) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$
b) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$
c) $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$
d) $x_1 = -\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right), x_2 = -\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{2}\right)$
e) $f(x) = -3(x - \frac{1}{3}\sqrt{15})\ (x + \frac{1}{3}\sqrt{15})$
f) $f(x) = -2(x - 1)(x + \frac{1}{2})$
g) $f(x) = -2(x - 5)(x + \frac{1}{2})$
h) $x_1 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}, x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$

3.4 Rysowanie wykresów funkcji[29]

Teraz nauczę się

- szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.

Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

Poniżej przedstawimy dwa sposoby rysowania wykresów.

Sposób I:

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

1) wierzchołek paraboli,
2) punkty przecięcia z osią $0X$ (punkty dla miejsc zerowych),
3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

29 http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html, 21.02.2013.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

$$y = -x^2 - 2x + 8$$ **a = -1, b = -2, c = 8**

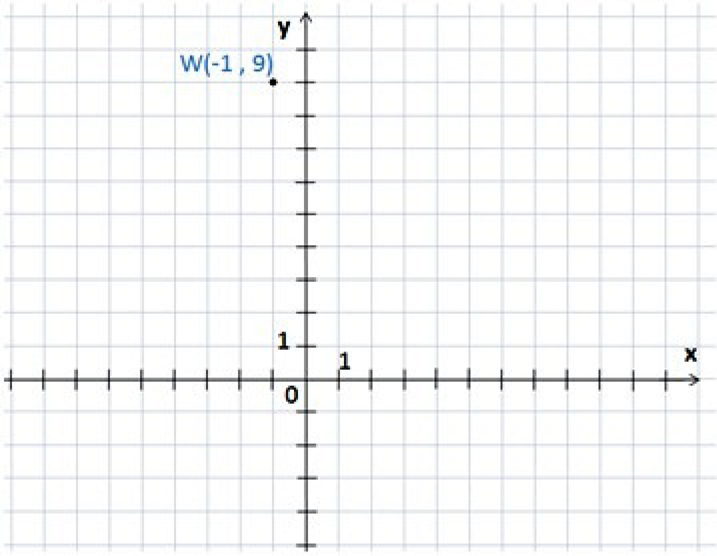
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8 = 4 + 32 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4\cdot(-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1,\ 9)$$



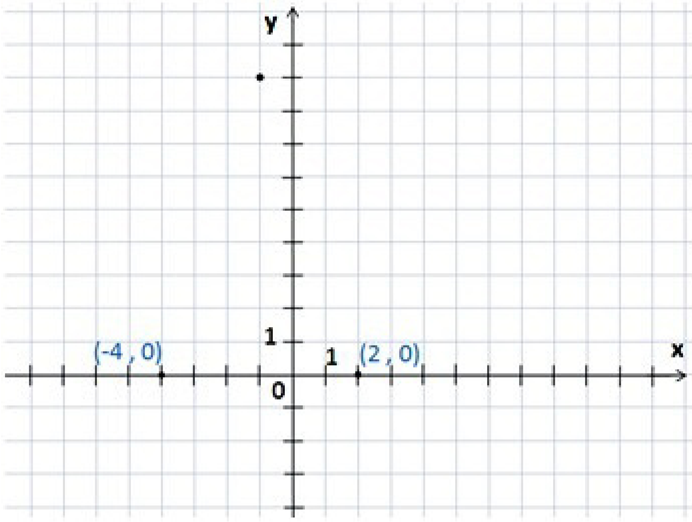
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

UWAGA: Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punktu, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\cdot(-1)} = \frac{2+6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\cdot(-1)} = \frac{2-6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$(-4, 0);\ (2, 0)$$



3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych:

Wybraliśmy argument –5.

Podstawiamy argument -5 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(-5)^2 - 2 \cdot (-5) + 8 = -25 + 10 + 8 = -7$$

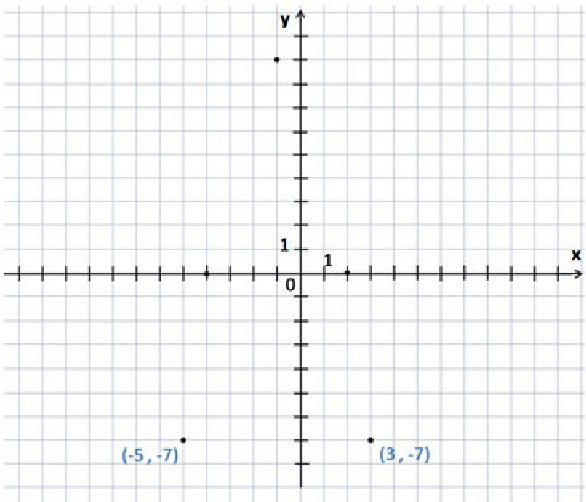
Współrzędne punktu: (–5, –7)

Punkt na prawo od miejsc zerowych:

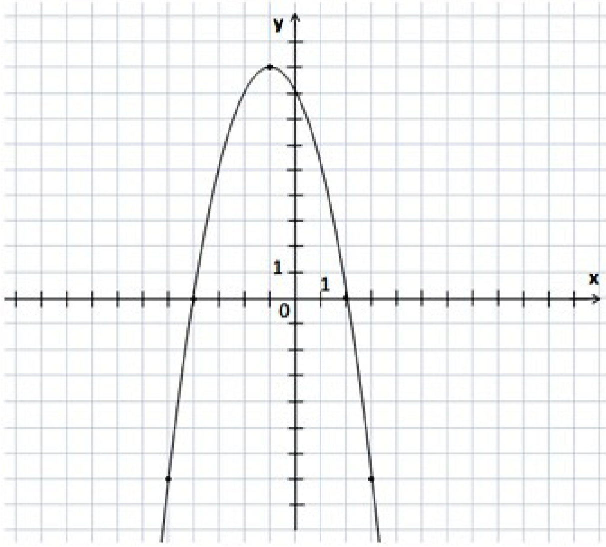
Podstawiamy argument 3 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = -9 - 6 + 8 = -7$$

Współrzędne punktu: (3, –7)



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.

Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze zmienionym znakiem!

$X_1 = 1$

$X_2 = -3$

$$(1, 0); (-3, 0)$$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

RÓŻNICE:

1) wierzchołek paraboli

Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru.

Przykład1

$$y = 2(x+5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p" będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q" się nie zmienia:
X = -5
y = 2

$$W=(-5, 2)$$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Sposób II:

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

Przykład 2

$y = -2(x + 1)^2 - 3$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków).

W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszy przypadek funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W=(0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych:

Wybraliśmy:

$\mathbf{x = -2}$

$y = -2 \cdot (-2)^2 = -2 \cdot 4 = -8$

(-2, -8)

$\mathbf{x = -1}$

$y = -2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2$

(-1, -2)

$\mathbf{x = 1}$

$y = -2 \cdot 1^2 = -2 \cdot 1 = -2$

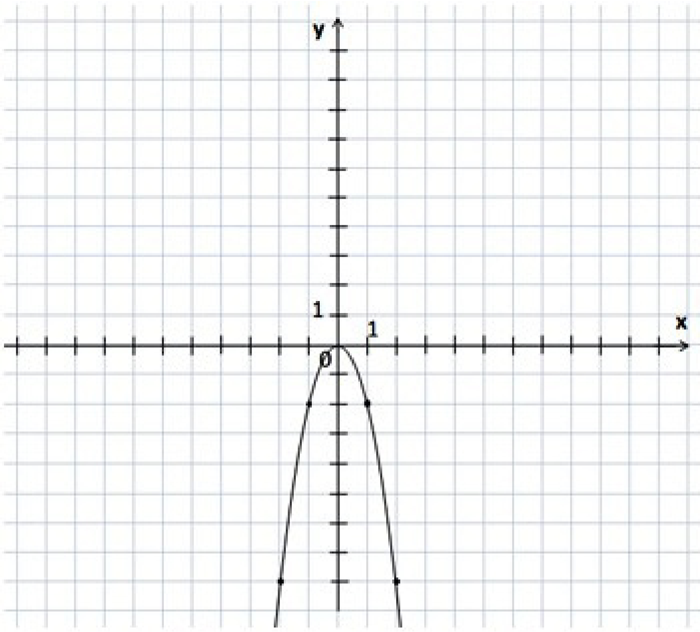
(1, -2)

$\mathbf{x = 2}$

$y = -2 \cdot 2^2 = -2 \cdot 4 = -8$

(2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

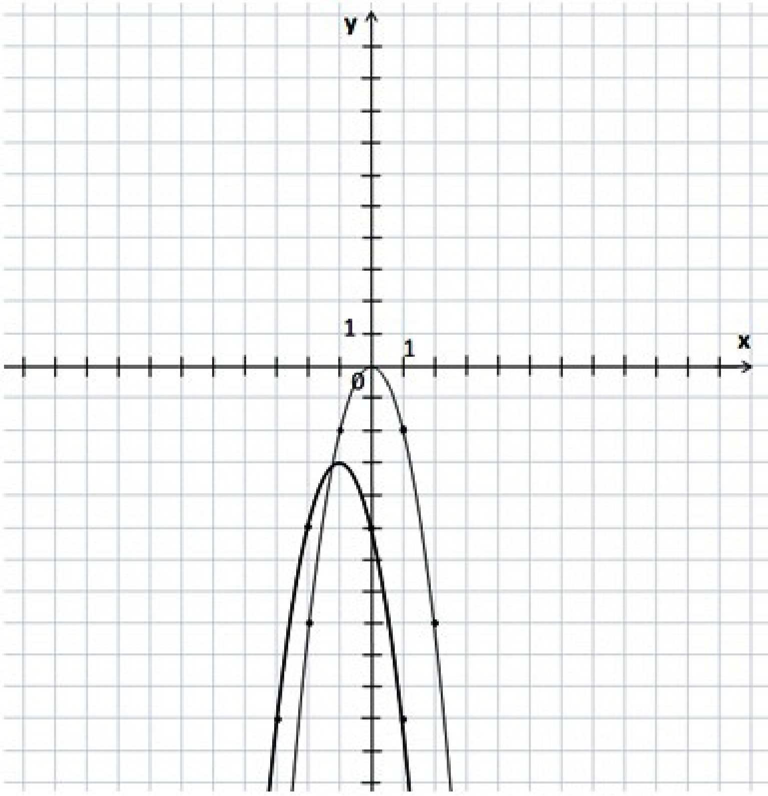


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.



ZADANIA

3.4.1 Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej f z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 + 8$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Odpowiedź:

a) z osią OX : 1, –1; z osią OY: –3

b) z osią OX : nie istnieje; z osią OY: 8

c) z osią OX : 2; z osią OY: 4

d) z osią OX : 8, –2; z osią OY: –16

3.4.2 Oblicz:

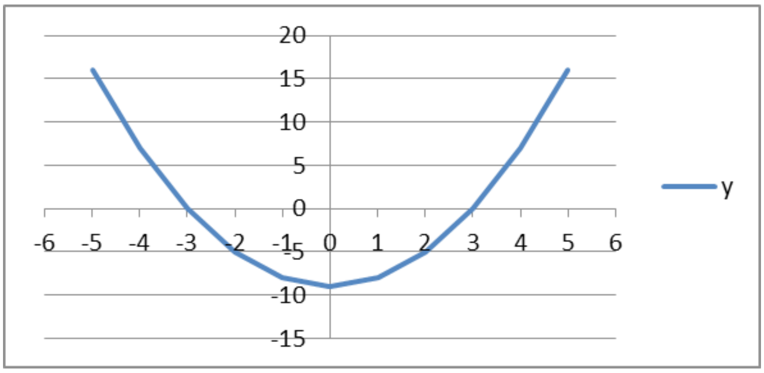
- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych
- współrzędne wierzchołka paraboli
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

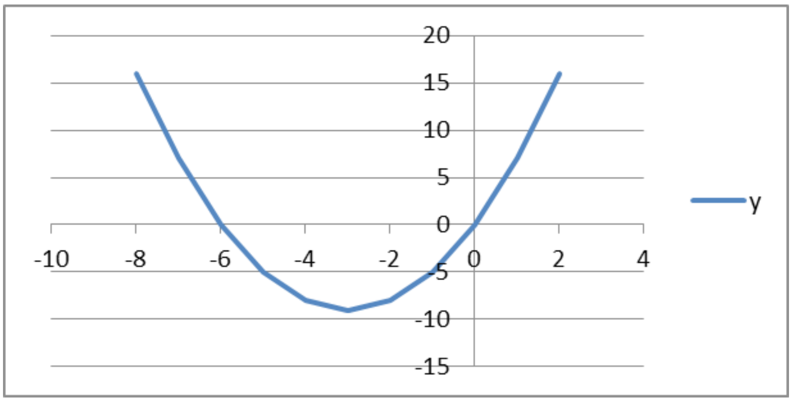
a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 + 6x$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Odpowiedź:

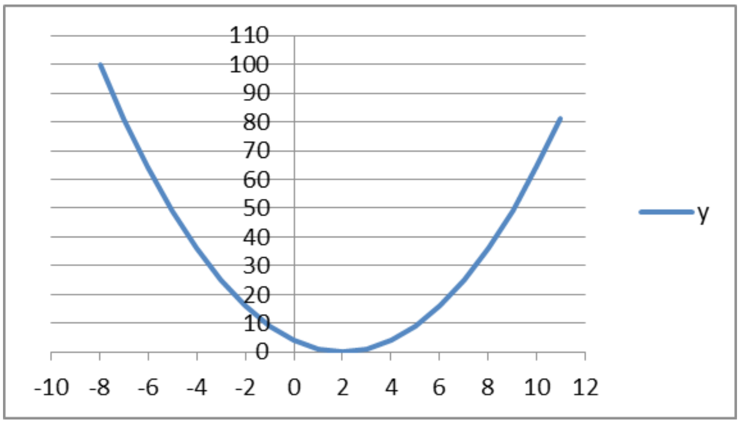
a) z osią OX : –3, 3; z osią OY: –9; $p = 0$; $q = –9$; $x_1 = –3$, $x_2 = 3$



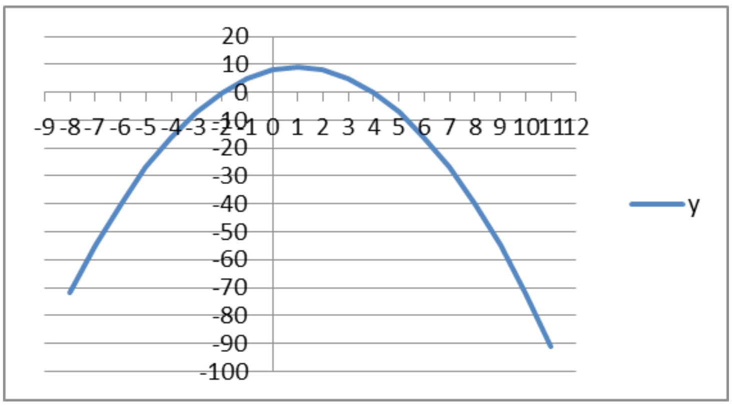
b) z osią OX : 0, –6; z osią OY: 0; $p = –3$; $q = –9$; $x_1 = 0$, $x_2 = –6$



c) z osią OX : 2; z osią OY: 4; $p = 2$; $q = 0$; $x_1 = x_2 = 2$



d) z osią OX : –2, 4; z osią OY: 8; $p = 1$; $q = 9$; $x_1 = –2$, $x_2 = 4$



3.5 Własności funkcji kwadratowej

Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum.

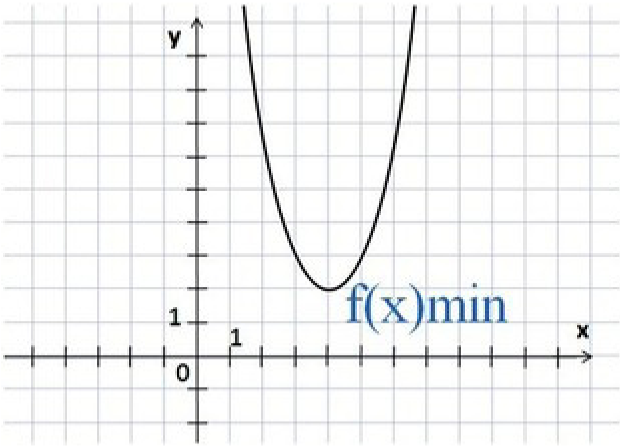
Przypominamy:

Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{\text{min}}$ lub y_{min}. Maksymalną wartość oznaczamy:

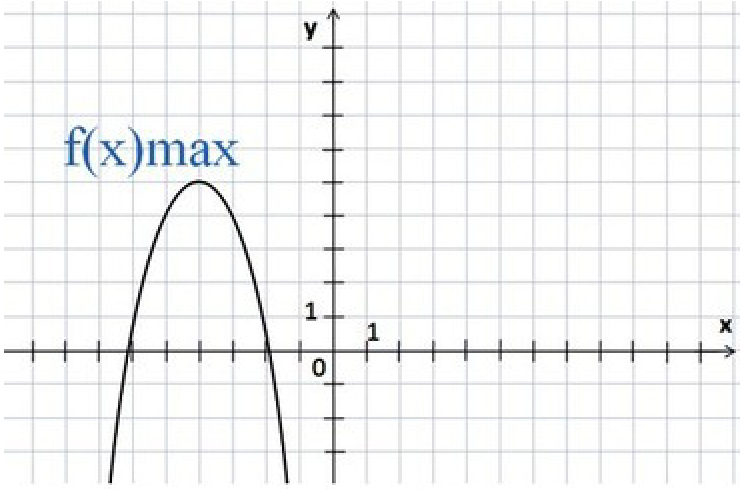
$f(x)_{\text{max}}$ lub y_{max}.

W celu wyznaczenia minimum lub maksimum funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „a" funkcji kwadratowej.

Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy $a > 0$, w dół,

gdy $a < 0$.

Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „a" funkcji ma wartość –3 ($a < 0$). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli mamy do czynienia z maksimum.

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

➢ **Dziedzina**

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc:

D = R.

➢ **Zbiór wartości**

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka (q) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka (q):

$$ZW = (-\infty,\ q\rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka (q) a nieskończonością:

$$ZW = \langle q,\ \infty)$$

Przykład 2

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

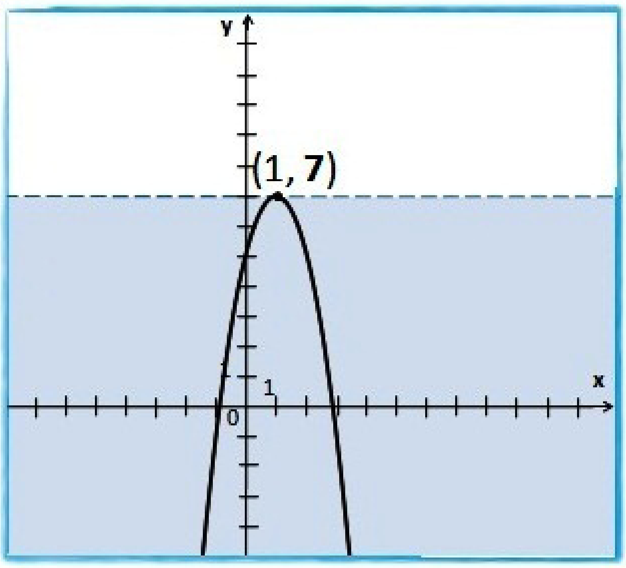
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-56}{4\cdot(-2)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Ponieważ współczynnik „a" jest ujemny (-2), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością q.

$$ZW = (-\infty,\ 7\rangle$$



Przykład 3

$$y = 2x^2 + 4x - 2$$

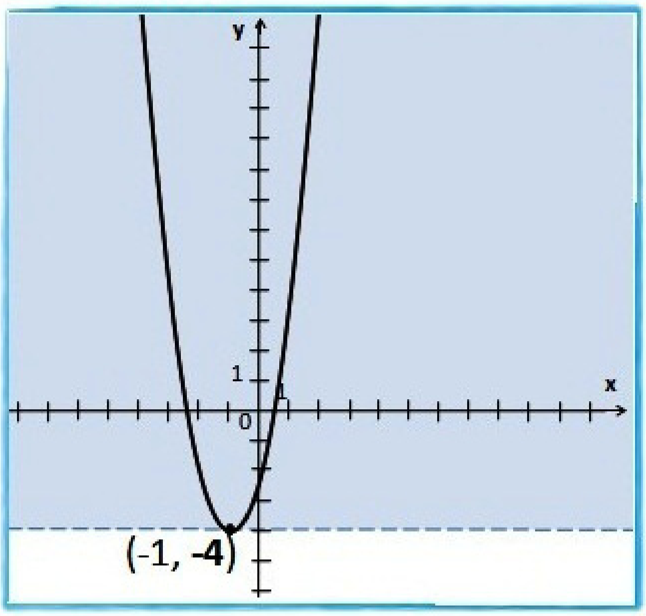
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 16 + 16 = 32$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-32}{4\cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4$$

Ponieważ współczynnik „a" jest dodatni (2), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością q a nieskończonością.

$ZW = \langle -4, \infty)$



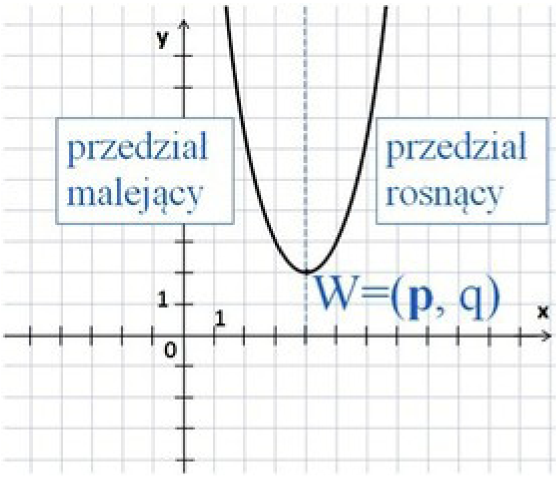
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś 0X), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka (p).

Drugą potrzebną informacją, jest kierunek ramion paraboli:

Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.



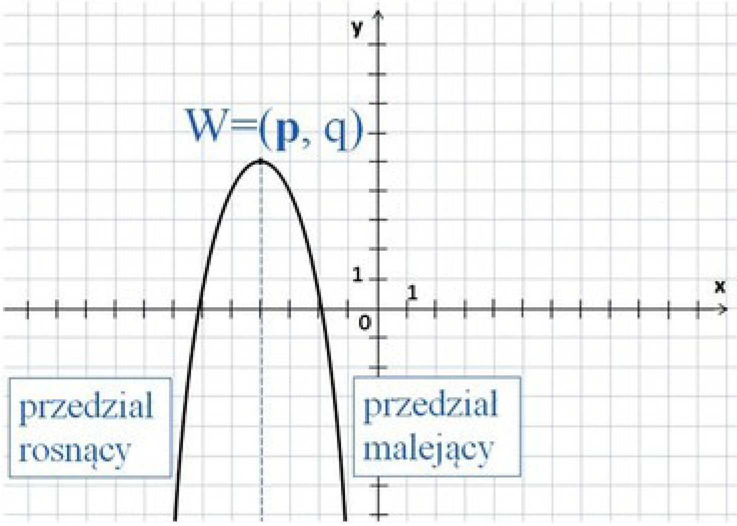
Funkcja jest rosnąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle p, \infty)$

Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\searrow$ w przedziale $(-\infty, p\rangle$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$$f(x)\nearrow \text{ w przedziale } \left(-\infty,\ p\right\rangle$$

Funkcja jest malejąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$$f(x)\searrow \text{ w przedziale } \left\langle p,\ \infty\right)$$

$$y = 3x^2 - 12x + 8$$

Obliczamy współrzędną „p" wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a" funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę.
W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$$f(x)\nearrow \text{ w przedziale } \left\langle 2,\ \infty\right)$$

$$f(x)\searrow \text{ w przedziale } \left(-\infty,\ 2\right\rangle$$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$f(x)\uparrow : (-\infty, 2\rangle$$

$$f(x)\downarrow : \langle 2, \infty)$$

Reasumując

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y = \left\langle -\frac{\Delta}{4a}, \infty \right)$	$Y = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right\rangle$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$, rosnąca dla $x \in \left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	rosnąca dla $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$ malejąca dla $x \in \left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 = -\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowne do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x = -\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$	

ZADANIA

3.5.1 Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a) $y = x^2 - 4$ b) $y = x^2 - 6x$ c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = -2x^2 + 6x + 7$

3.5.2 Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

- zbiór wartości

- miejsca zerowe
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

a) $f(x)=x^2-4$ b) $f(x)=-x^2+6x$ c) $f(x)=(x-3)^2-4$

d) $f(x)=-(x-1)(x+5)$ e) $f(x)=x^2-6x+9$ f) $f(x)=-2x^2-7x+4$

	Zbiór wartości	Miejsca zerowe	Wartości dodatnie	Wartości ujemne	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Wartość największa	Wartość najmniejsza
a)	$\langle -4,\infty)$	–2,2	$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$	$(-2,2)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	–	Dla $x=0$ $y=-4$
b)	$(-\infty,9\rangle$	0,6	$(0,6)$	$(-\infty,0)\cup(6,\infty)$	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$	Dla $x=3$ $y=9$	–
c)	$\langle -4,\infty)$	1,5	$(-\infty,1)\cup(5,\infty)$	$(1,5)$	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla $x=3$ $y=-4$
d)	$(-\infty,9\rangle$	5,1	$(-5,1)$	$(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$	Dla $x=2$ $y=9$	–
e)	$\langle 0,\infty)$	3	$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$	ϕ	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla $x=3$ $y=0$
f)	$\left(-\infty,10\frac{1}{8}\right\rangle$	–4, $\frac{1}{2}$	$\left(-5,\frac{1}{2}\right)$	$(-\infty,-4)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$	$\left(-\infty,-1\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1\frac{3}{4},\infty\right)$	Dla $x=-1\frac{1}{3}$ $y=10\frac{1}{8}$	–

3.5.3 Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

a) $y=x^2-4x+3$ b) $y=-2x^2-8x-5$ c) $y=x^2-6x+10$

Odpowiedź:

a) Dziedzina: $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości: $ZW = \langle -1, \infty)$

Miejsce zerowe: $x_1 = 1$ lub $x_2 = 3$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$

rosnąca w przedziale $\langle 2, \infty)$

Wierzchołek: W = (2,–1)

Najmniejsza wartość: $y_{min} = -1$ dla $x = 2$

Największa wartość: nie istnieje

b) Dziedzina $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości $ZW = (-\infty, 3 >$

Miejsce zerowe $x_0 \approx -3,2$ lub $x_0 \approx -0,8$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca w przedziale $(-\infty, -2 >$

malejąca w przedziale $< -2, \infty)$

Wierzchołek W = (–2, 3)

Największa wartość $y_{max} = 3$ dla $x = -2$

Najmniejsza wartość: nie istnieje

c) Dziedzina: $D = \mathbf{R}$

Zbiór wartości: $ZW = < 1, \infty)$

Miejsce zerowe: nie istnieją

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 3 >$

rosnąca w przedziale $< 3, \infty)$

Wierzchołek: W = (3, 1)

Najmniejsza wartość $y_{min} = 1$ dla $x = 3$

Największa wartość: nie istnieje

3.5.4 Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 4x - 1$ z prostymi:

a) $y = -5$ b) $y = -3$ c) $y = -1$ d) $y = 2$

Odpowiedź:

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 4x - 1$ ma:

– 0 punktów wspólnych z prostą $y = -5$

– 1 punkt wspólny z prostą $y = -3$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = -1$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = 2$

3.5.5 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli, określonej równaniem: $y = -x^2 + 6x - 7$.

Odpowiedź: $x = 3$

3.5.6 Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

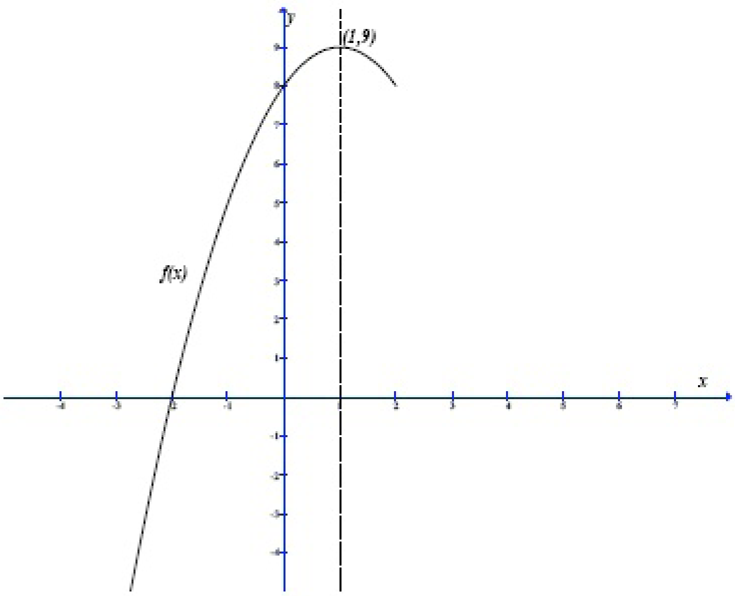
b) Podaj rozwiązanie nierówności: $f(x) \geq 0$.

Odpowiedź:

a) $(-\infty, 4>$

b) $x \in \langle 1,5 \rangle$

3.5.7 Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe:



a) miejscami zerowymi funkcji są liczby: –2 oraz 4

b) funkcja jest rosnąca w przedziale (–2, 4)

c) funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$

d) zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-1, 9)$

Odpowiedź: a

3.5.8 Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $f(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f(x) = -3x(x-2)$

d) $f(x) = 2(x-2)(x+4) - 5$

Odpowiedź:

a) $m = 0$ b) $m = -11\frac{5}{4}$ c) $m = 3$ d) $m = -23$

3.5.9 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$, $x \in \langle -1,2 \rangle$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $x \in \langle -2,5 \rangle$

c) $f(x) = -2x^2 + x - 1$, $x \in \langle 0,2 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = 12$, $m = 0$ b) $m = 46$, $m = 7/8$ c) $m = -7/8$, $m = -7$

3.5.10 Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^2 - 9$, $x \in \langle -2,2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 5x$, $x \in \langle 3,7 \rangle$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $x \in \langle -4,1 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $x \in \langle -4,1 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = -9$ b) $m = -14$ c) $m = -10$ d) $m = 1$

3.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

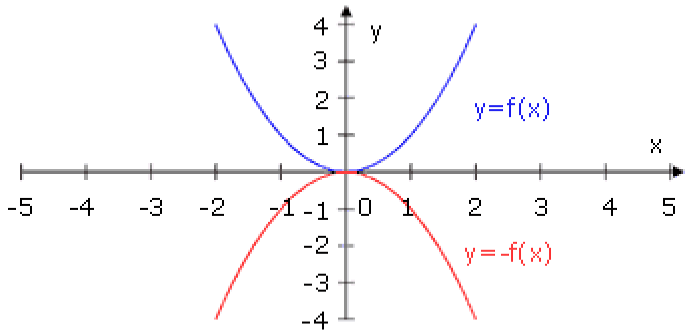
Teraz nauczę się:

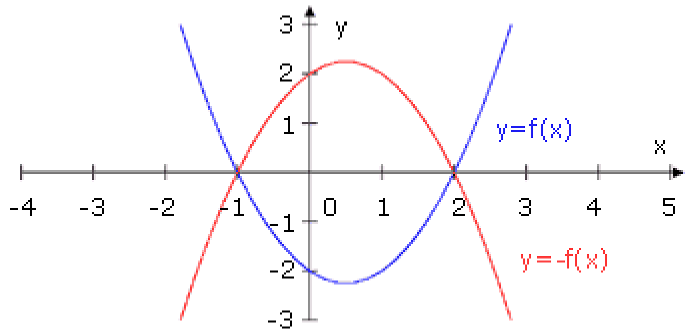
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

$x \rightarrow y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .

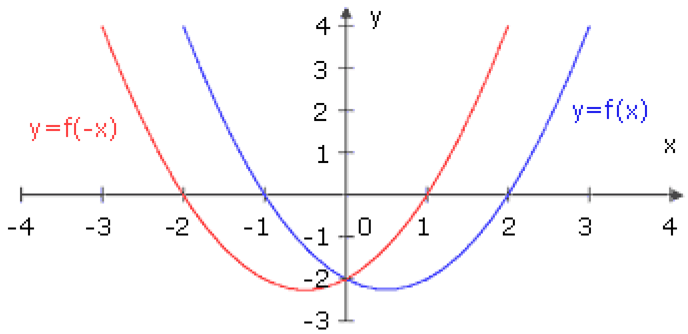
Przykłady





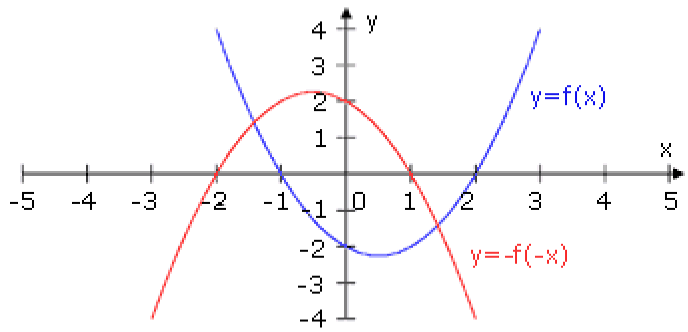
$x \to y = f(-x)$

Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.



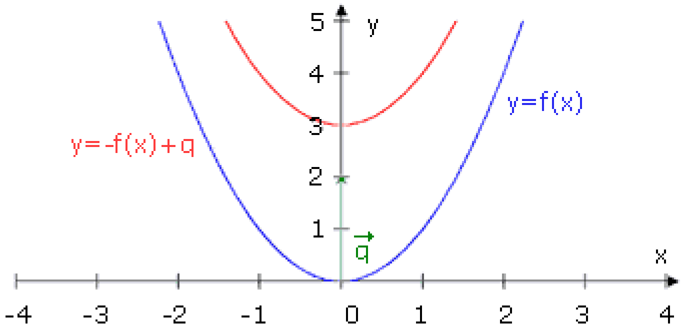
$x \to y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).



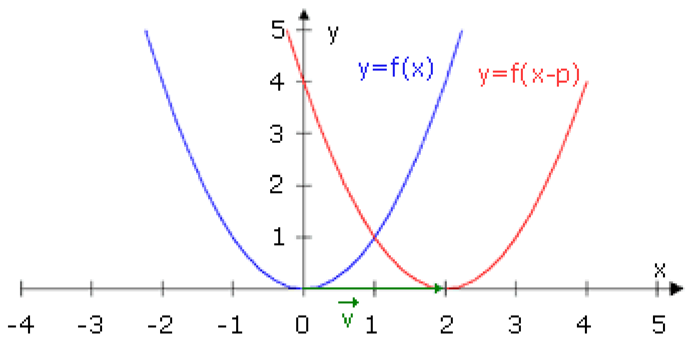
$x \to y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o |q| jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0,q]$).



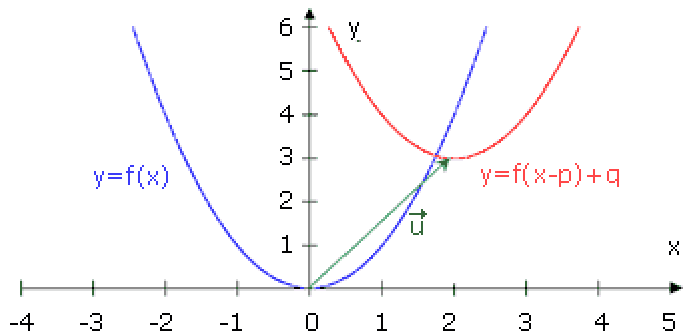
$x \rightarrow y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $\vec{v} = [p,0]$



$x \rightarrow y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p,q]$

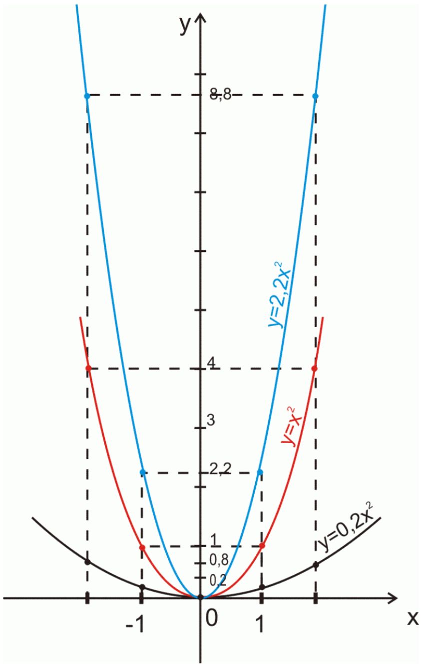


- $x \rightarrow y = k \cdot f(x)$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k–krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

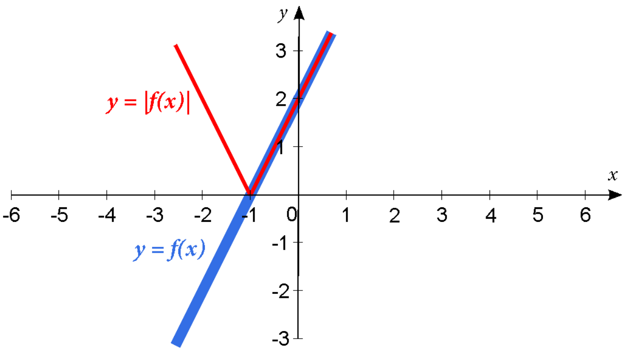
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY).

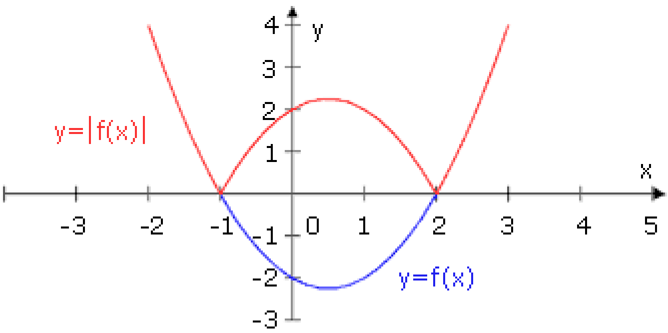
Dla $k \in (0,1)$wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).



***$x \to y = |f(x)|$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$ – leżącą nad osią OX lub na niej – pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX .

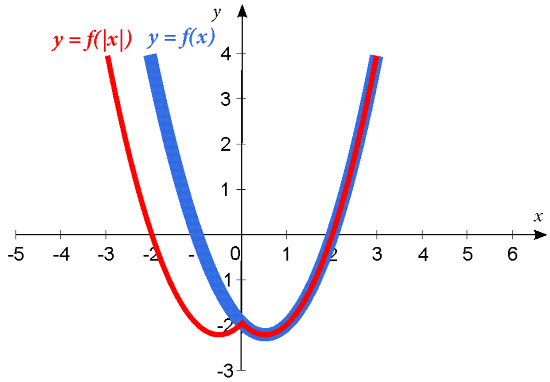




*** $x \to y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

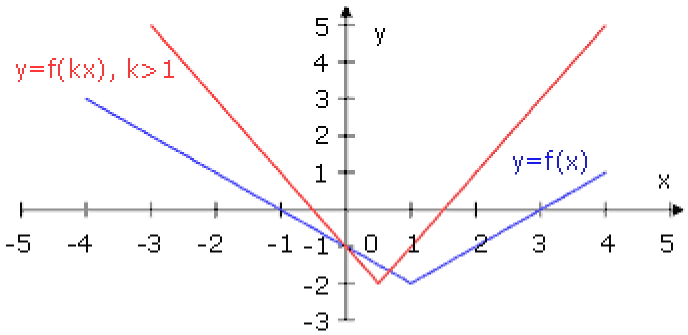


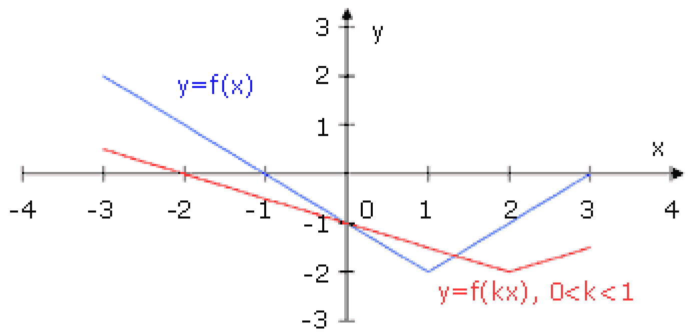
***$x \rightarrow y = f(k*x)$

Wykres funkcji $y = f(k*x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX .

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX .

Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX .





3.6.1 Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$ o p jednostek wzdłuż osi OX i q jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji f. Uzupełnij tabelkę według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji g	Przesunięcie wzdłuż osi OX p	Przesuniecie wzdłuż osi OY q	Postać kanoniczna wzoru funkcji f	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x + 4)^2 - 5$	W = (–4,–5)
			$f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				W = (3,0)
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x - 2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		W = (0,–1)

3.6.2 Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = (x - 3)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 3$ e) $y = (x + 1)^2 - 1{,}6$ f) $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) przesuwamy o 3 jednostki w prawo

b) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo

c) przesuwamy o 4 jednostki w górę

d) przesuwamy o 3 jednostki w dół

e) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 1,6 jednostki w dół

f) rysujemy $y = x^2$, odbijamy symetrycznie względem osi OX i przesuwamy w dół o $3\frac{1}{3}$ jednostki w dół

3.6.3 Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi OY o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Odpowiedź:

a) Zbiór wartości $(-\infty, 8\rangle$

b) $b = 12$, $c = -10$

3.6.4 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -0{,}3x^2 + 12$ c) $y = 1{,}4(x-48)^2$

d) $y = -35(x+1{,}2)^2$ e) $y = 15(x+\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) W = (0,–5); funkcja maleje $x \in (-\infty, 0)$, funkcja rośnie $x \in (0, \infty)$

b) W = (0,12); funkcja rośnie $x \in (-\infty, 0)$, funkcja maleje $x \in (0, \infty)$

c) W = (48,0); funkcja maleje $x \in (-\infty, 48)$, funkcja rośnie $x \in (48, \infty)$

d) W = (–1,2;0); funkcja rośnie $x \in (-\infty; -1{,}2)$, funkcja maleje $x \in (-1{,}2; \infty)$

e) W = $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; funkcja maleje $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, funkcja rośnie $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$

3.6.5 Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta.

a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$ b) $y = 0{,}6x^2 - 5$ i $y = 10$

c) $y = -0{,}1(x-3)^2$ i $y = -4$ d) $y = 15(x+2)^2 + 4$ i $y = -1$

e) $y = -3{,}2(x-5)^2 - 1$ i $y = -11$ f) $y = 33(x+7)^2 + 21$ i $y = 20$

Odpowiedź:

a) ma dwa punkty wspólne b) nie ma punktów wspólnych

c) ma dwa punkty wspólne d) nie ma punktów wspólnych

e) ma jeden punkt wspólny f) nie ma punktów wspólnych

3.6.6 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W, przechodząca przez punkt P:

a) W = (–1,–1), p = (3,3) b) W = (–8,7), p = (1,6) c) W = (3,2), p = (–5,10)

Odpowiedź:

a) $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$ b) $y = -\frac{1}{81}(x+8)^2 + 7$ c) $y = \frac{1}{8}(x-3)^2 + 2$

3.6.7 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Odpowiedź:

a) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$ b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ c) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$

3.6.8 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ b) $f(x) = (x-1)(x+3)$ c) $f(x) = -(x-1)(x+3)$

3.6.9 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$ b) $f(x) = x^2 + x - 6$ c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

3.6.10 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3, \infty)$, wykres przechodzi przez punkt P = (–1,5) i ma oś symetrii o równaniu $x = 1$,

b) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4, \infty)$, jednym z miejsc zerowych jest $x = 1$ i wykres ma oś symetrii o równaniu $x = -1$,

c) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 4, \infty)$, wykres ma oś symetrii o równaniu $x = 2$ i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3\frac{1}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

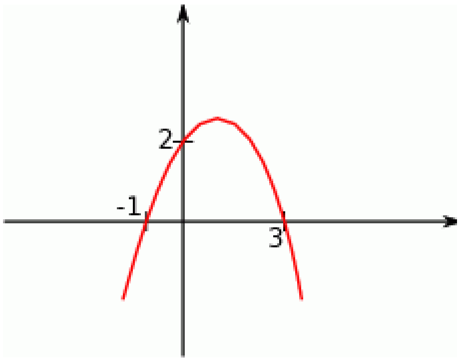
3.6.11 Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 6, 7, 8.

3.6.12 Rozwiąż równanie $f(x-1)=4$, jeżeli $f(x)=x^2+x-2$

Odpowiedź: $x=-2$, $x=3$

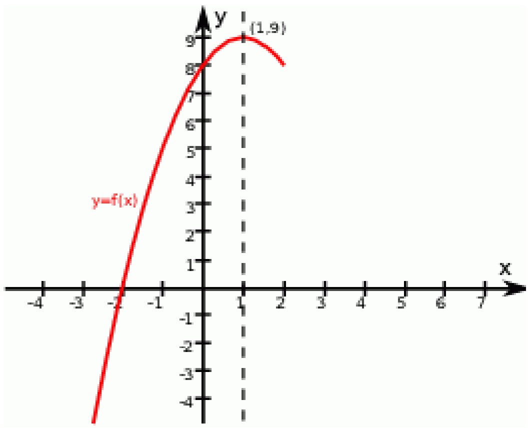
3.6.13 Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór.



Odpowiedź:

$$y=-\frac{2}{3}(x+1)(x-3)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$$

3.6.14 Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



Odpowiedź:

$$y=-(x-1)^2+9$$
$$y=-(x+2)(x-4)$$
$$y=-x^2+2x+8$$

3.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

ZADANIA

3.7.1 Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Odpowiedź: Prędkość turysty z miasta A to 4 km/h, a turysty z miasta B 3 km/h.

3.6.2 Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Odpowiedź: Wymiary pierwszego boiska to 56 m $\times$ 33m, a drugiego boiska 60 m $\times$ 25 m.

3.6.3 Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: Turysta dziennie przechodził 28 km.

3.6.4 Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm, a od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Trójkąt ma boki 41cm, 40 cm i 9 cm.

3.6.5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej trójkąta to 17 cm.

3.6.6 Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

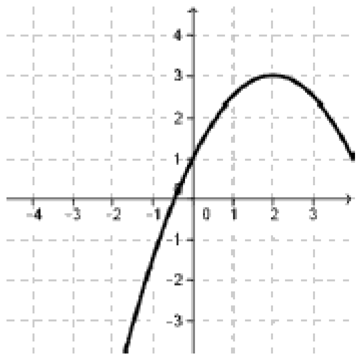
Odpowiedź: Czas napełniania zbiornika przez obie rury jednocześnie wyniesie $23\frac{1}{3}$ godziny.

1.[30] Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x - 7)(x + 2)$ są

a) $x = 7, x = -2$ b) $x = -7, x = -2$ c) $x = 7, x = 2$ d) $x = -7, x = 2$

Odpowiedź: a

2.[31] Wzorem funkcji kwadratowej f, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku, jest:



a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Odpowiedź: b

3. Największa wartość funkcji: $y = -2x^2 + x + 1$, w przedziale $\langle -1; 0{,}5\rangle$, jest równa:

a) $1\frac{1}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) -4

4.[32] Gdy przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki

w górę, to otrzymamy wykres funkcji opisanej wzorem:

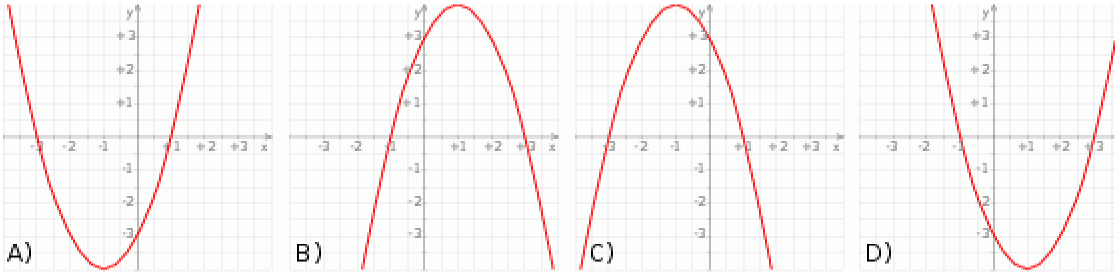
a) $y = 2(x - 2) + 4$; b) $y = 2(x - 2) - 4$; c) $y = 2(x - 2) + 1$; d) $y = 2(x + 2) + 4$

5. Funkcja kwadratowa $y = x^2 + bx + c$ jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2\rangle$, a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$. Postać kanoniczna tej funkcji opisana jest wzorem:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ b) $f(x) = (x + 2)^2 + 4$ c) $f(x) = (x + 4)^2 + 2$ d) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$

30 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 22.02.2013.
31 Zadanie 2, 3: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 22.02.2013.
32 Zadanie 4, 5, 6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 22.02.2013.

6. Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



Odpowiedź: a

7.[33] Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{dla } x\in(-\infty,-4\rangle \\ 5x+10 & \text{dla } x\in(-4,2) \\ x+4 & \text{dla } x\in\langle 2,+\infty) \end{cases}$$ jest:

a) -4 b) -2 c) -1 d) 1

8. Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

a) $(-\infty, \frac{3}{2})$ b) $(-\infty, -1)\cup(4,+\infty)$ c) $(-1,4)$ d) $(-4,1)$

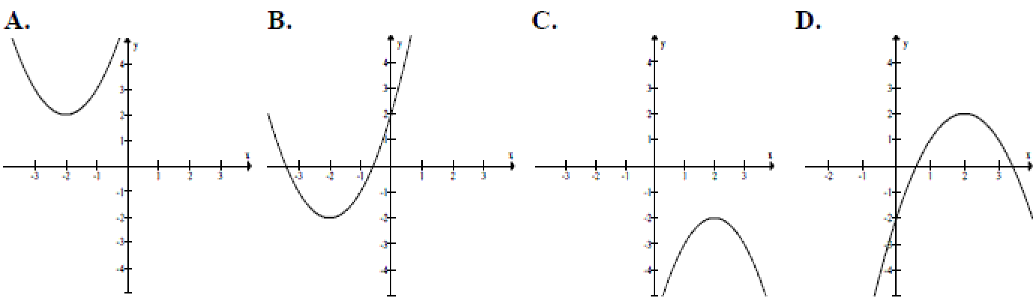
9. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:

a) $(2,\infty)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(1,+\infty)$

10.[34] Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:

a) $x = -8$ b) $x = -4$ c) $x = 4$ d) $x = 8$

11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

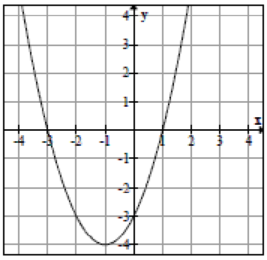


12. Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

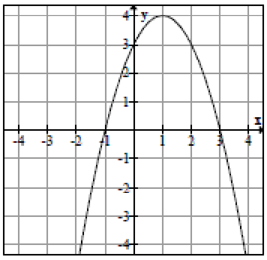
---

33 Zadanie 7: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 22.02.2013.
34 Zadanie 10, 11, 12: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 22.02.2013.

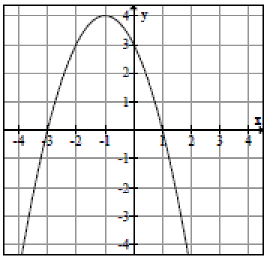
13.[35] Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



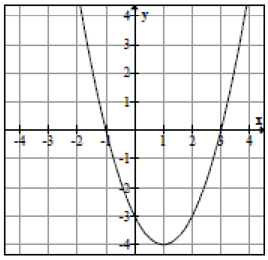
A.



B.



C.



D.

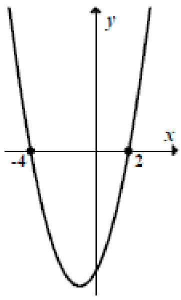
14. Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$, jest punkt o współrzędnych:

a) (0,2) b) (0,–2) c) (–2,0) d) (2,0)

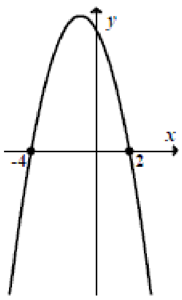
15.[36] Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale <–2, 3>.

16.[37] Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:

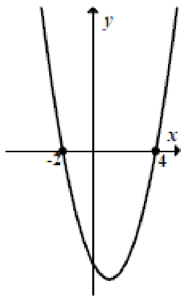
A.



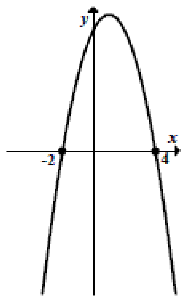
B.



C.



D.

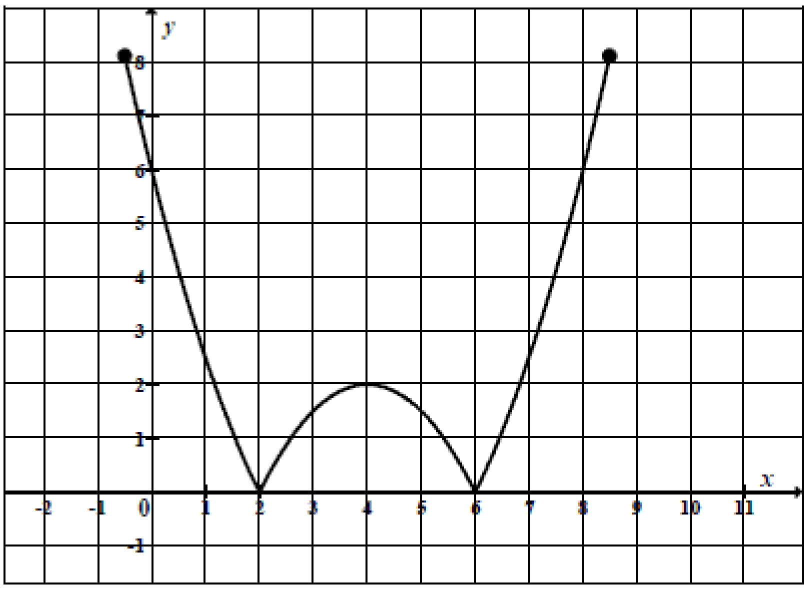


17.[38] Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:

a) (3,0) b) (0,3) c) (–3,0) d) (0,–3)

35 Zadanie 13, 14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 22.02.2013.
36 Zadanie 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 22.02.2013.
37 Zadanie 16: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.
38 Zadanie 17, 18: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = 3$

19.[39] Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 10x + 9$ w przedziale <3,7>.

Odpowiedź: $y_{\mathbf{max}} = -12$, $y_{\min} = -16$

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ i $x + y = 10$

Odpowiedź: $p = (3,7)$, R = (5,5)

21. Wyznacz wartość liczby m tak, aby funkcja $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$ miała dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -1$

Odpowiedź: $m = 12$

22. Wzór w postaci funkcji kanonicznej $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, to:

a) $y = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ b) $y = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

c) $y = (x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$ d) $y = (x + \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{8}$

---

39 Zadania 19- 35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Odpowiedź: a

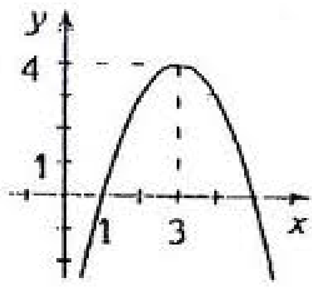
23. Funkcję kwadratową, przedstawioną na rysunku, opisuje wzór:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



Odpowiedź: a

24. Zbiorem wartości funkcji $y = x^2 - 6x + 11$, jest:

a) $(-\infty, 2\rangle$ b) $(-\infty, 3\rangle$ c) $\langle 3, \infty)$ d) $\langle 2, \infty)$

Odpowiedź: d

25. Funkcja $f(x) = x^2 + \mathrm{b}x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla $x = 2$, jeśli:

a) $b = -4$, $c = 8$ b) $b = 4$, $c = -8$ c) $b = -4$, $c = -8$ d) $b = 4$, $c = 8$

Odpowiedź: a

26. Wykresy funkcji $f(x) = 9 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 9$:

a) są symetryczne względem osi OX b) są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY d) nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ dla } x \ge 0 \\ x^2 + 4 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja f ma wzór:

a) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ b) $f(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ d) $f(x) = -(x+2)^2$

Odpowiedź: a

28. Liczba punktów wspólnych prostej $y = -x$ z wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, wynosi:

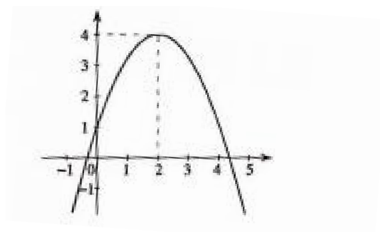
a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

Odpowiedź: c

29. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby –6 oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$.

Odpowiedź: 62

30. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określ jej wzór:



Odpowiedź: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

31. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

Odpowiedź: $y = -x^2 + 6x$

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem $y = x + 4$

Odpowiedź: $x \in (1{,}4)$

32. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$, jeśli $x + y = 4$.

Odpowiedź: 8

33. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami: $y = x^2 + 2x - 8$ oraz $y = x^2 + 6x - 4$ mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

Odpowiedź: (–1,–9)

34. Wartością największą funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x - 3$, określonej w przedziale <–3,2>, jest liczba:

a) –4 b) 5 c) 0 d) 6

35. Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 9$ przyjmuje wartości nieujemne dla:

a) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

b) $x \in (-3{,}3)$

c) $x \in \langle -3{,}3 \rangle$

d) $x \in (-\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, \infty)$

4 Planimetria

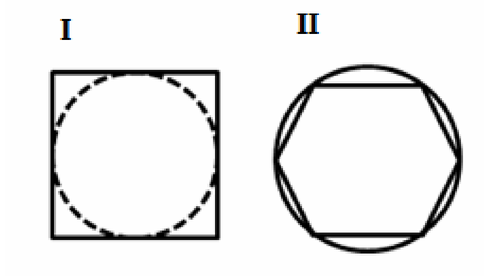
To już potrafię:

- korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
- rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznawać styczną do okręgu;
- korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
- rozpoznawać kąty środkowe;
- obliczać długość okręgu i łuku okręgu;
- obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
- stosować twierdzenie Pitagorasa;
- korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
- obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów;
- zamieniać jednostki pola;
- obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
- obliczać stosunek pól wielokątów podobnych;
- rozpoznawać wielokąty przystające i podobne;
- stosować cechy przystawania trójkątów;
- korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych;
- rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu;
- narysować pary figur symetrycznych;
- rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii;
- wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury;
- rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
- konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach 60°, 30°, 45°, okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
- rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Informacja do zadań 1 i 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.



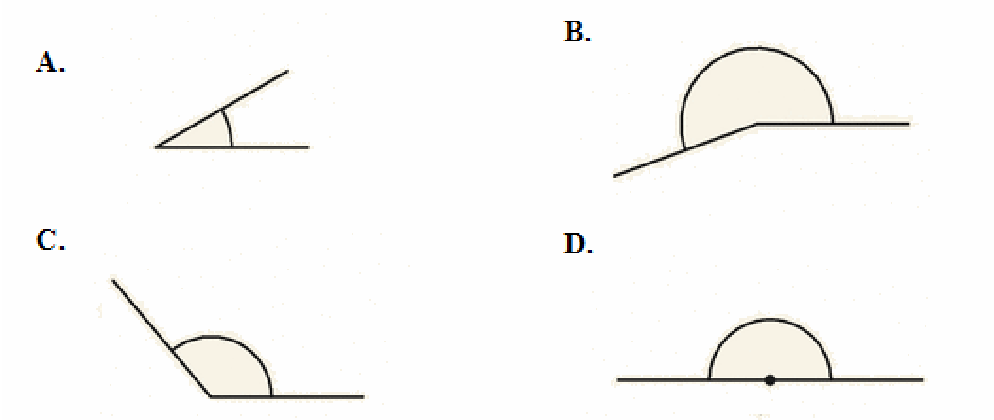
Zad. 1 Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości $4\sqrt{2}$ m?

a) 4 m b) 2 m c) 5,6 m d) 2,8 m

Zad. 2 Jaki jest obwód sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

a) 16 m b) 24 m c) $12\sqrt{3}$ m d) $6\sqrt{3}$ m

Zad. 3 Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły:



Zad. 4 Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

a) BARDZO ATRAKCYJNE CENY b) OBNIŻKA CEN

c) CENY PROMOCYJNE d) PRZECENA TOWARÓW

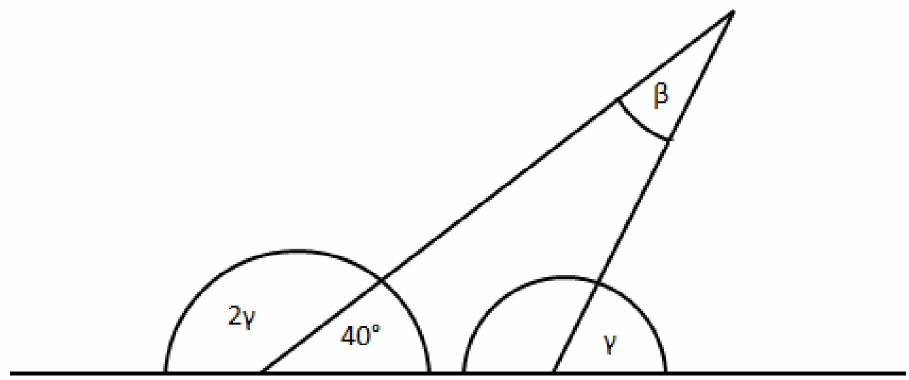
Zad. 5 Jaka miarę ma kąt β

a) 50°:

b) 35°

c) 30°

d) 40°



Zad. 6 Miara kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{3}$ okręgu wynosi:

a) $90°$ b) $60°$ c) $120°$ d) $80°$

Zad. 7 Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

a) 6π b) 18π c) 9π d) 12π

Zad. 8 W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

a) przystające b) równoboczne c) podobne d) rozwartokątne

Zad. 9 Pole kwadratu o przekątnej długości $5\sqrt{6}$, to:

a) 25 b) 50 c) 75 d) 15

Zad. 10. Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm, wynosi:

a) $24\ \text{cm}^2$ b) 24 cm c) 10 cm d) $12\ \text{cm}^2$

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	C	B	A	D	C	B

ZADANIA OTWARTE

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi …………

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi ………

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na ……………

Proste prostopadłe oznaczamy symbolem ……

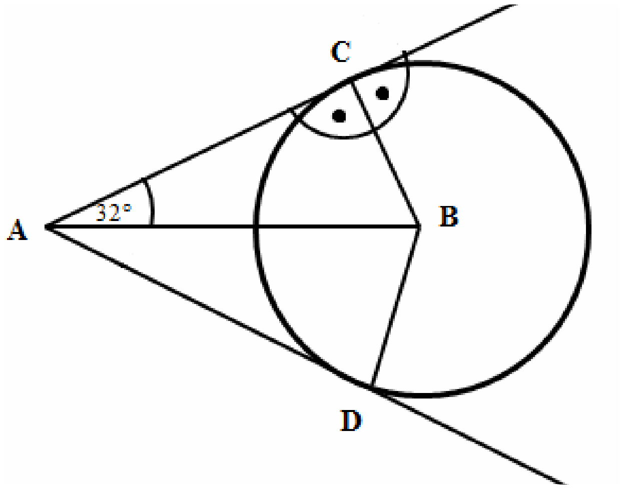
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach ………

Przez jeden punkt można poprowadzić ……… prostych.

Miejsce przecięcia się dwóch prostych, to………

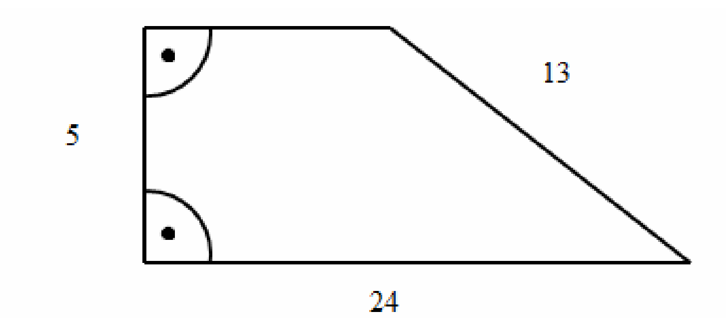
Kąt o mierze 180° nazywamy kątem ……

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$.



3. Oblicz x i y wiedząc, że punkty $A = (3x - 1; 2y)$ i $B = (x + 2; 4y - 1)$ są symetryczne względem osi OX .

4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



5. Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

Rozwiązania

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi 135° Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na równoramienne, równoboczne, różnoboczne. Proste prostopadłe oznaczamy symbolem ⊥ Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: romb, deltoid Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych Miejsce przecięcia się dwóch prostych to punkt Kąt o mierze 180° nazywamy kątem półpełnym.
2	$\sphericalangle A = 64°, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°, \sphericalangle B = 116°$
3	$3x - 1 = x + 2$ $-2y = 4y - 1$ $x = 1{,}5$ $y = \frac{1}{6}$
4	b $-b$ $-$ górna podstawa $b = 12$ $P = \frac{(24 + 12) \cdot 5}{2} = 65$ $L = 54$
5	Konstrukcja

„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków".

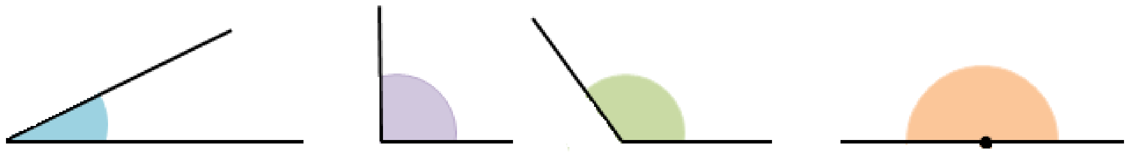
Planimetria jest działem geometrii (słowo „geometria" pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

4.1 Kąt środkowy i wpisany

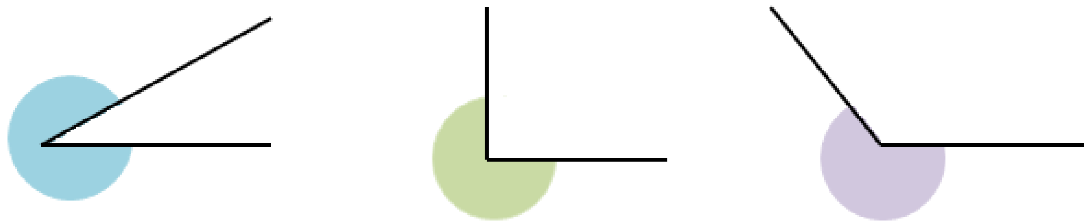
Teraz nauczę się stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na: **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe 180°) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od 180°, ale mniejsze od 360°).

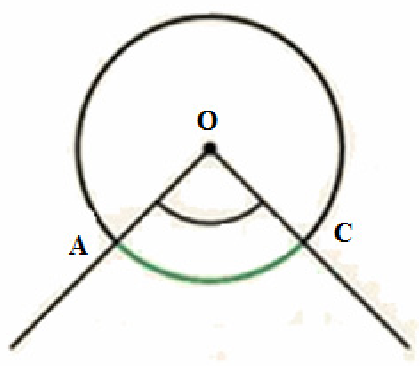
Kąty wypukłe:



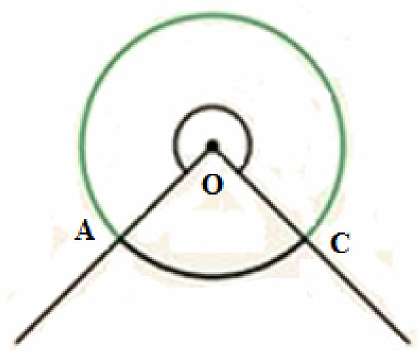
Kąty wklęsłe:



Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.

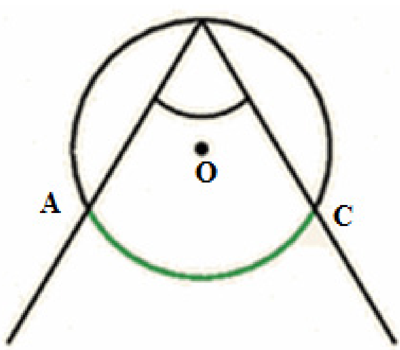


Kąt środkowy wypukły



Kąt środkowy wklęsły

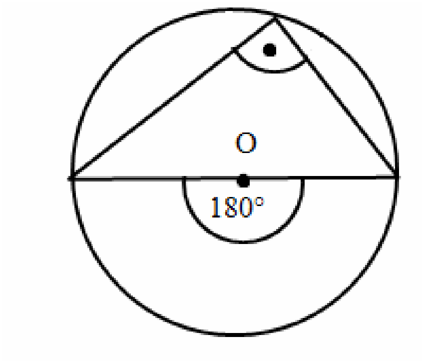
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.



Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.

Własności kątów środkowych i wpisanych

- Jeżeli kąt wpisany i środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.
- Kąt wpisany opary na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

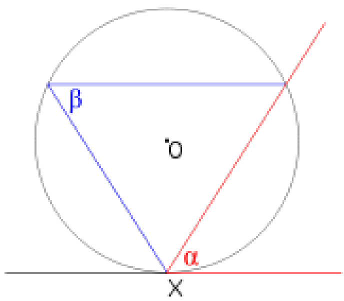


- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

Kąt dopisany do okręgu

Kąt dopisany do okręgu w punkcie X należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie X oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie X.

Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.



α – *kąt dopisany*

β – *kąt wpisany*

$\alpha = \beta$

Przykład 1

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A, jak na rysunku obok. Kąt dopisany $\alpha = 50°$. Oblicz miarę kąta ACB.

Dorysujmy promienie $OAOA$ i OB. Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$\sphericalangle OAB = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\sphericalangle OAB = 180° - 80° = 100°$

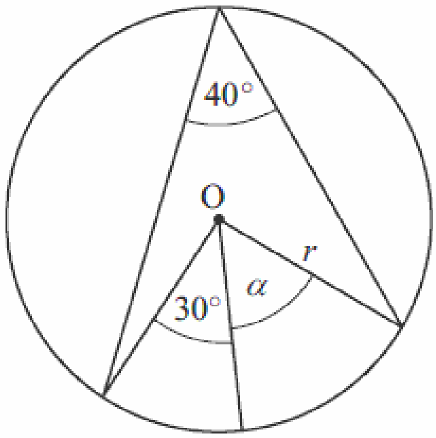
W takim razie z twierdzenie o kątach, wpisanym i środkowym, mamy:

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$$

$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180° - 50° - 75° = 55°$

ZADANIA

4.1.1 Oblicz miarę kąta α.

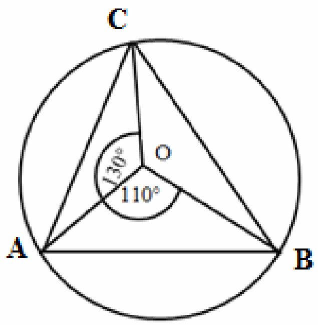


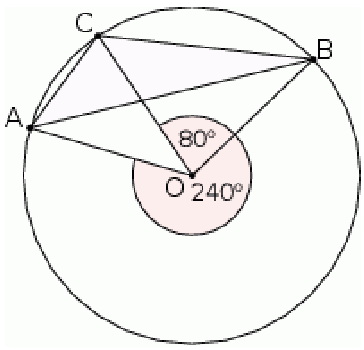
Odpowiedź: 50°

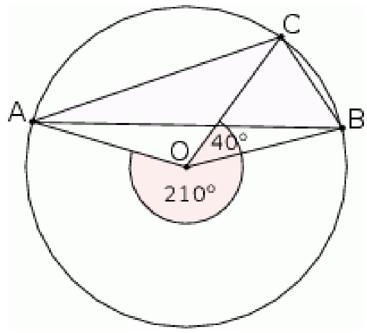
4.1.2 Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta środkowego ABS.

Odpowiedź: 120°

4.1.3 Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

a) 

b) 

c) 

a) 60°, 65°, 55°

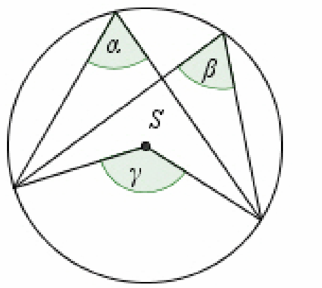
b) 40°, 20°, 120°

c) 20°, 55°, 105°

4.1.4 Okrąg podzielono na trzy części w stosunku $2 : 3 : 3$. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $45°,\ 45°,\ 90°$

4.1.5 Dany jest okrąg o środku w punkcie S. Miara kąta α jest równa $70°$. Ile wynosi suma miar kątów $\alpha + \beta$?



Odpowiedź: $210°$

4.1.6 Wierzchołki trójkąta $\mathbf{ABC}$ leżą na okręgu, a środek $\mathbf{O}$ okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąta $\mathbf{ABO}$ ma miarę $\mathbf{20^\circ}$, to jaką miarę ma kąt $\mathbf{ACB}$?

Odpowiedź: 70°

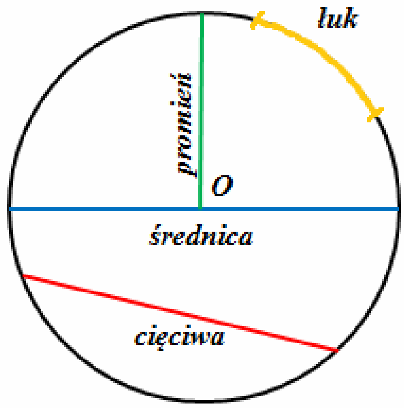
4.1.7 Ostrokątny trójkąt równoramienny $\mathbf{ABC}$ o podstawie $\mathbf{AB}$ jest wpisany w okrąg o środku $\mathbf{S}$, przy czym kąt $\mathbf{SAB}$ ma miarę $\mathbf{40^\circ}$. Oblicz miarę kąta $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: 65°

4.2 Wzajemne położenie prostej i okręgu

Teraz nauczę się korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od środka O. Okrąg oznaczamy $o(O, r)$.



Promieniem okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą r. Okrąg o promieniu r ma długość $2\pi r$.

Cięciwą okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i **okręgu:**

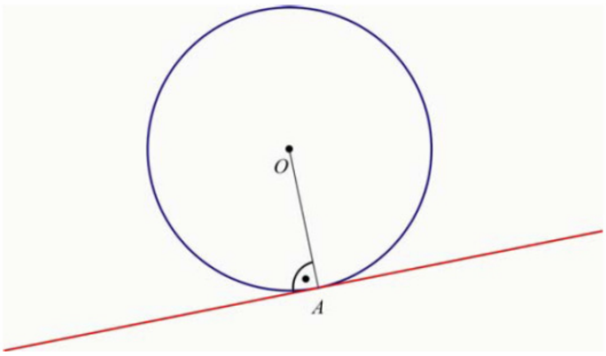
1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.

Definicja

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

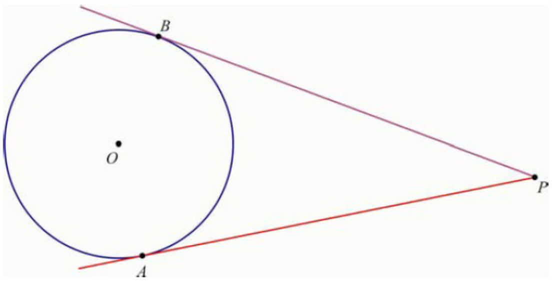
Twierdzenie 1.

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

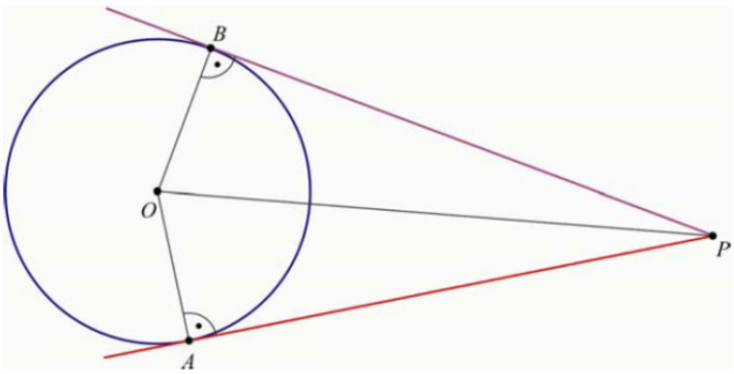


Twierdzenie 2.

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.



Dowód

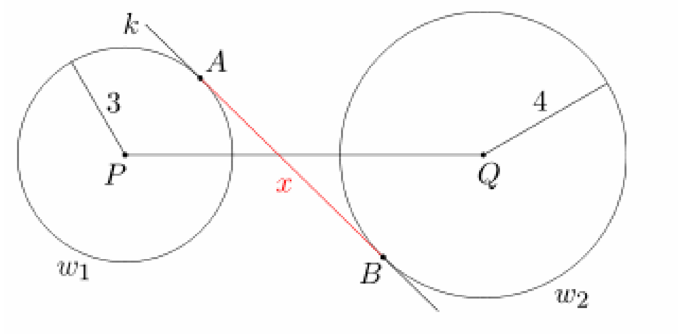


Trójkąty POA i POB są prostokątne. Półprosta PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$ (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$. Oznacza to (suma kątów w trójkącie),

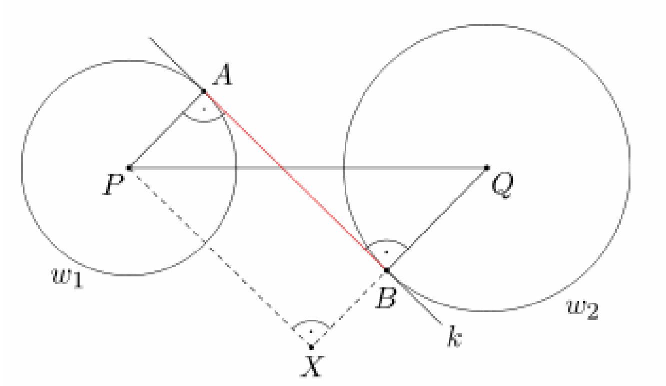
że również $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$. Ponadto $AO = BO = r$. Z cechy kbk wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że $PA = PB$.

Przykład

Dany jest odcinek $|PQ| = 10$ oraz okręgi: jeden o środku P i promieniu 3, a drugi o środku Q i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej k, która jest do nich styczna odpowiednio w punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB.



Zaznaczamy na prostej BQ, lecz poza odcinkiem BQ, taki punkt X, aby długość odcinka BX była równa 3. Następnie uzasadnimy, że czworokąt $ABXP$ jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PQX



Niech X będzie takim punktem leżącym na prostej BQ, poza odcinkiem BQ, że $|BX| = 3$. Proste AP i BX są prostopadłe do wspólnej prostej AB, więc $AP \parallel BX$ są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt $APXB$ jest równoległobokiem. A ponieważ w równoległoboku tym kąt $\sphericalangle PAB = 90^\circ$, więc równoległobok $ABXP$ jest prostokątem.

Zatem trójkąt PXQ jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |Ab|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4 + 3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

$$|AB| = \sqrt{51}$$

4.2.1 Obwód okręgu jest równy 8π cm. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

a) nie mniejsza niż 4 cm

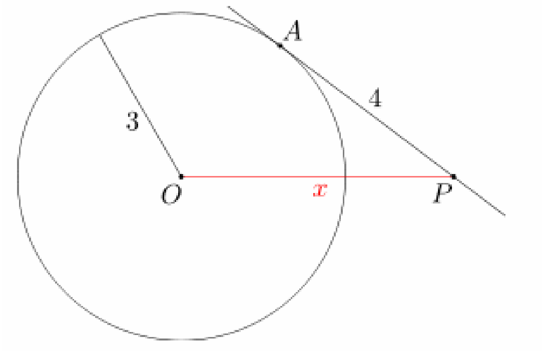
b) nie większa niż 3 cm?

Odpowiedź:

a) jeden lub wcale

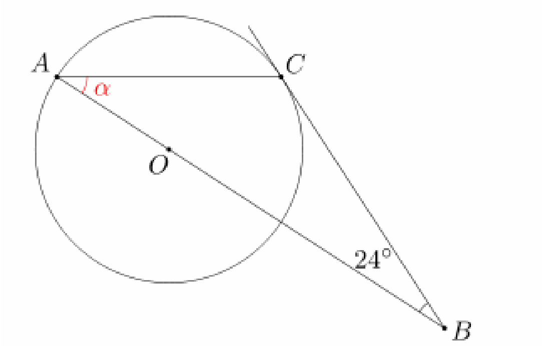
b) dwa punkty

4.2.2 Dany jest okrąg o środku O i promieniu 3. Przez punkt p leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiedząc, że długość odcinka AP wynosi 4, oblicz długość odcinka OP.



Odpowiedź: $|OP| = 5$

4.2.3 Dany jest okrąg o środku $\mathbf{O}$ oraz punkty $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie $\mathbf{C}$ przecina prostą $\mathbf{AO}$ w punkcie $\mathbf{B}$. Wiedząc, że miara kąta $\mathbf{ABC}$ wynosi $\mathbf{24^\circ}$, oblicz miarę kąta $\mathbf{CAB}$.



Odpowiedź: 33°

4.3 Wzajemne położenie dwóch okręgów

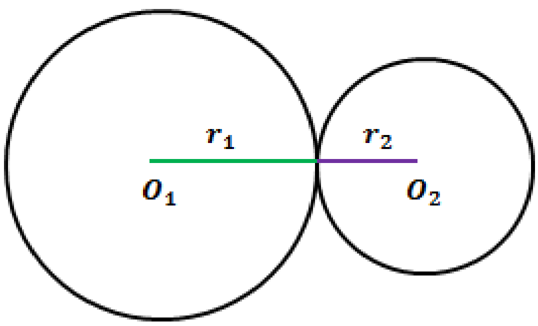
Teraz nauczę się korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)

Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

Okręgi styczne zewnętrznie

Okręgi styczne zewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.

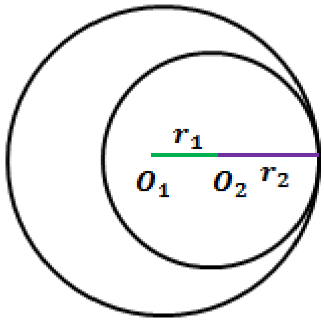
$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$



Okręgi styczne wewnętrznie

Okręgi styczne wewnętrznie mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.

$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

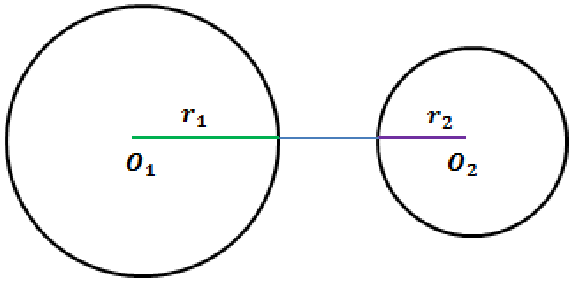


Okręgi rozłączne

Okręgi rozłączne nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:

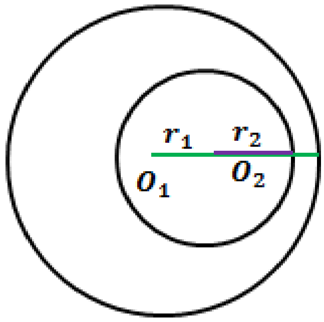
- Większa od sumy ich promieni

$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$



- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni

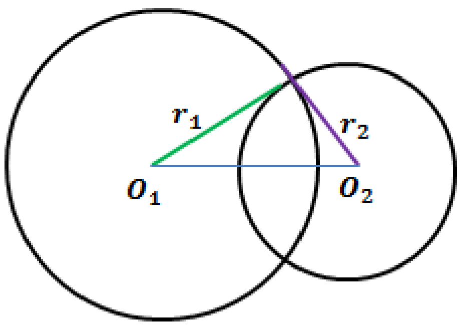
$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$



Okręgi przecinające się

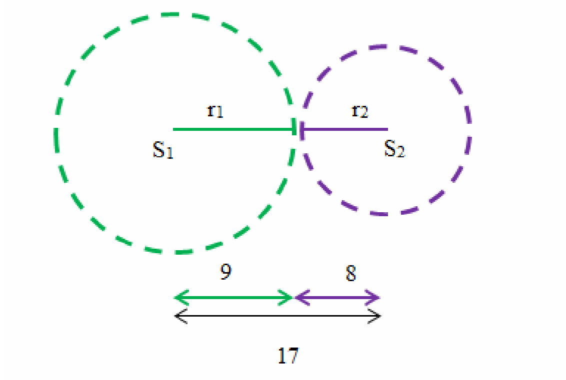
Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.

$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$



Przykład

Dane są dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio równych r_1 i r_2. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli $|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8$.



Robimy rysunek poglądowy. Jeden okrąg ma promień $r_1 = 9$, a drugi $r_2 = 8$.

Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.

ZADANIA

4.3.1 Określ wzajemne położenie okręgów $\mathbf{o(O_1, r_1)}$ i $\mathbf{o(O_2, r_2}$, jeśli $\mathbf{|O_1O_2| = 12\ cm}$ oraz:

a) $r_1 = 3\ cm,\ r_2 = 8\ cm$

b) $r_1 = 5\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

c) $r_1 = 9\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

d) $r_1 = 22\ cm,\ r_2 = 10\ cm$

Odpowiedź:

a) rozłączne zewnętrznie

b) styczne zewnętrznie

c) przecinające się

d) styczne wewnętrznie

4.3.2 Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach $\mathbf{10\ cm}$ i $\mathbf{6\ cm}$, gdy:

a) okręgi te są styczne zewnętrznie

b) okręgi są styczne wewnętrznie

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego

d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

Odpowiedź:

a) $|S_1S_2| = 16\ cm|S_1S_2| = 16\ cm$

b) $|S_1S_2| = 4\ cm|S_1S_2| = 4\ cm$

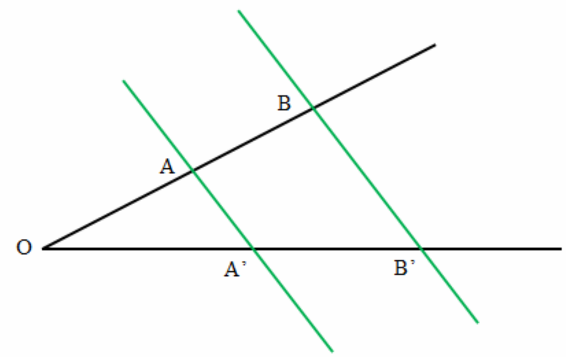
c) $|S_1S_2| = 6\ cm|S_1S_2| = 6\ cm$

d) $|S_1S_2| = 10\ cm|S_1S_2| = 10\ cm$

4.4 Twierdzenie Talesa

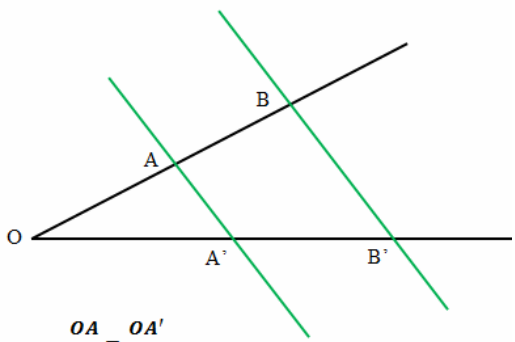
Teraz nauczę się stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.



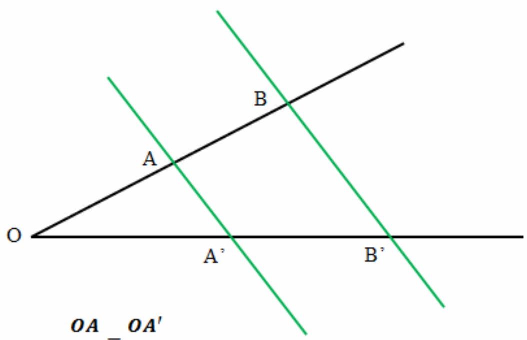
Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

Przypadek 1



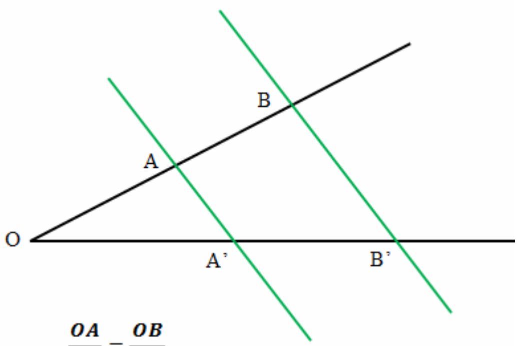
$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

Przypadek 2



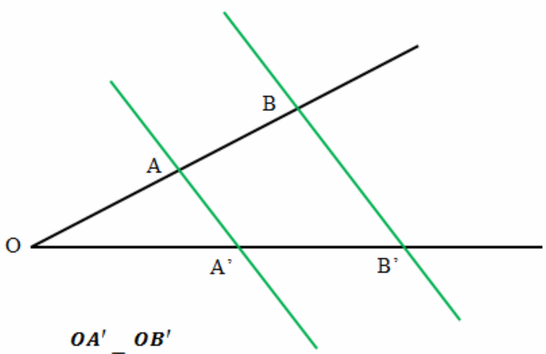
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

Przypadek 3



$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$

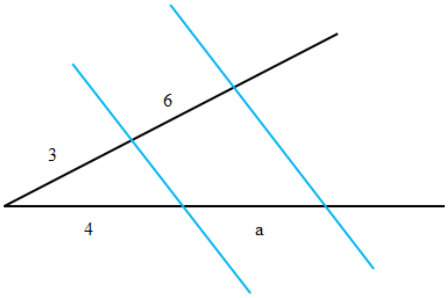
lub



$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$$

Przykład1

Oblicz długość odcinka a.



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

Układamy proporcję: $\frac{3}{6} = \frac{4}{a}$

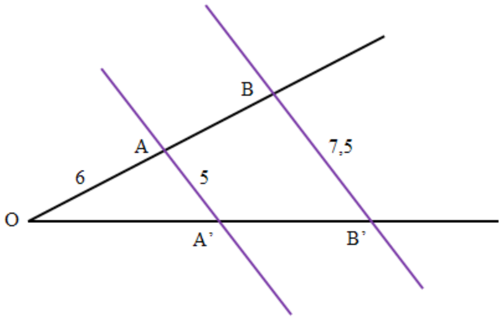
$3a = 6 \cdot 4$

$3a = 24/:3$

$a = 8$

Przykład 2

Oblicz długość odcinka AB.



Obliczając długość odcinka AB, skorzystamy z przypadku 3.

Układamy proporcję: $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

$\frac{6}{5} = \frac{6+|AB|}{7{,}5}$

$5(6+|AB|) = 6 \cdot 7{,}5$

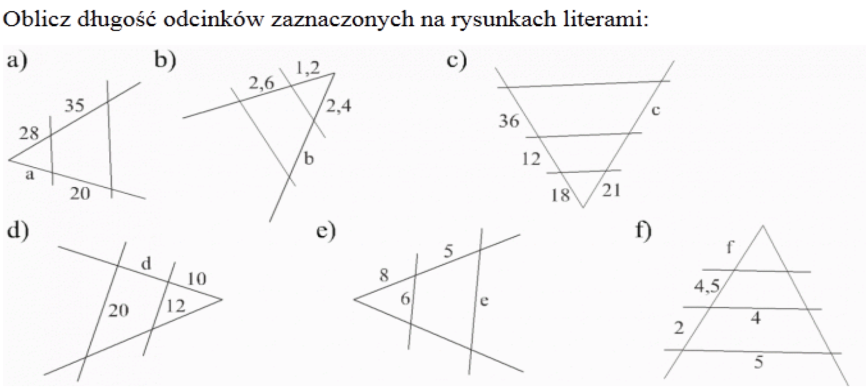
$30 + 5|AB| = 45/-30$

$5|AB| = 15/:5$

$|AB| = 3$

ZADANIA

4.4.1 Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



Odpowiedź:

a) 16 b) 5,2 c) 42

d) $6\frac{2}{3}$ e) $9\frac{3}{4}$ f) 3,52

4.4.2 W trapezie $\mathbf{ABCD}$, gdzie $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{CD}$, przedłużono boki $\mathbf{AD}$ i $\mathbf{BC}$ do przecięcia w punkcie $\mathbf{S}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DS}$ wiedząc, że jest on krótszy od odcinka $\mathbf{CS}$ o $\mathbf{3\ cm}$ i $|\mathbf{AD}| = \mathbf{16\ cm}$, a $|\mathbf{BC}| = \mathbf{24\ cm}$.

Odpowiedź: $6\ \mathrm{cm}$

4.4.3 W trapezie krótsza podstawa wynosi 6, zaś ramiona mają długość 4 i 5. Ramiona trapezu przedłużono tak, że powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości 4 zostało przedłużone o odcinek długości 3.

Odpowiedź: 30

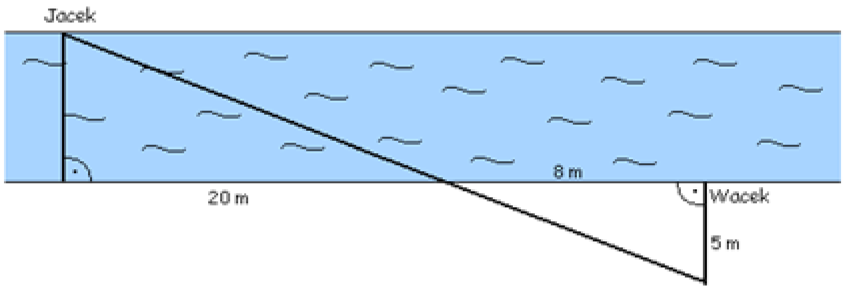
4.4.4 W trójkąt równoramienny o podstawie $\mathbf{8\ cm}$ wpisano kwadrat o boku równym $\mathbf{6\ cm}$, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

Odpowiedź: 24 cm

4.4.5 Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

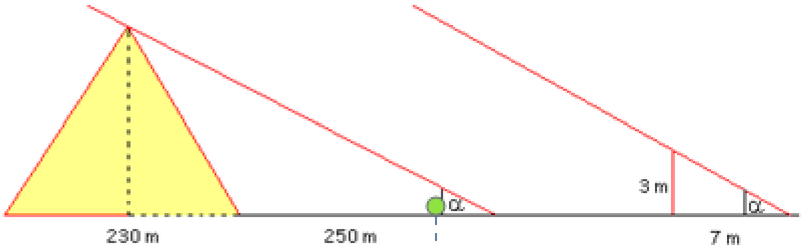
Odpowiedź: 3,4 cm

4.4.6 Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



Odpowiedź: 12,5 cm

4.4.7 Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



Odpowiedź: 156,43 m

4.4.8 Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

Odpowiedź: 12 m

4.4.9 W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: AC = 2,4 i CB = 7,2 m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec A podniesie się na wysokość 4 metrów.

Odpowiedź: O 12 m.

4.4.10 Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm , a średnicę 2 cm?

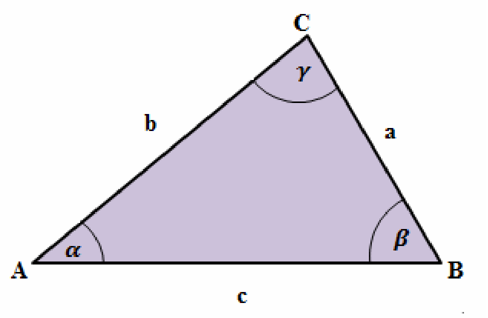
Odpowiedź: Wielkość przedmiotów z odległości 100 m wynosi 10 m.

4.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne

Teraz nauczę się:

- sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt;
- sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny;
- obliczać miary kątów i długości boków trójkąta;
- obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona;
- korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

Trójkąt – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Podział trójkątów

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

- **Podział trójkątów ze względu na kąty:**

1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.

2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną.**

3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

- **Podział trójkątów ze względu na boki:**

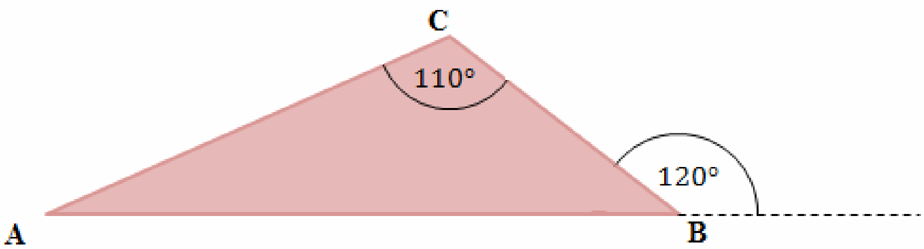
1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę 60°.

2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.

3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 110°, a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę 120°. Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



$\sphericalangle B = 180° - 120° = 60°$

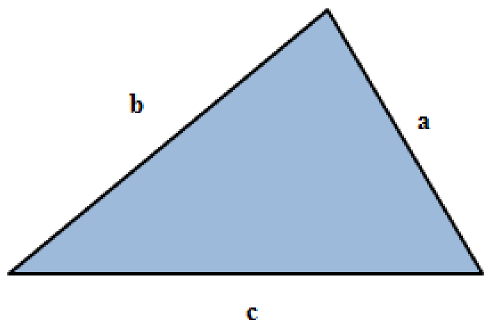
$110° + 60° + \sphericalangle A = 180°$

$170° + \sphericalangle A = 180°$

$\sphericalangle A = 180° - 170°$

$\sphericalangle A = 10°$

Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > c$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > b$

$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > a$

Przykład 2

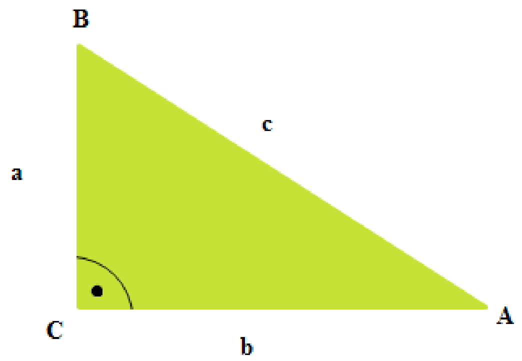
Sprawdź, czy odcinki o długościach $5, 6, 3\sqrt{2}$ mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości. Należy sprawdzić, czy suma długosci dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4{,}25 \approx 9{,}25 > 6$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

Twierdzenie Pitagorasa

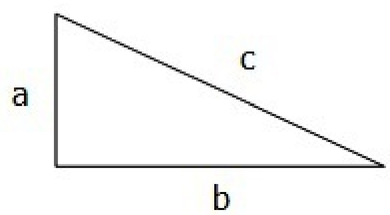


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$

Przykład 3

<u>Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: </u>$3:4$, a przeciwprostokątna ma długość 15 cm.



$a = ?$
$b = ?$
$c = 10\ cm$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3 : 4$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2 a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15\ cm^{\ 2})$$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225\ cm^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225\ cm^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144\ cm^2$$

$$b = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \ \Rightarrow \ a = \frac{3}{4} \cdot 12\ cm = 9\ cm$$

Odpowiedź: Przyprostokątne mają długości 9 cm i 12 cm.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a) $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$ b) $2, \sqrt{10}, 4$

a) $\left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$24 = 3 + 21$

$24 = 24$

$L = P$

Trójkąt jest prostokątny

b) $4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2 4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2$

$16 = 10 + 4$

$16 \neq 14$

$L \neq P$

Trójkąt nie jest prostokątny

Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską.**

Przykłady takich trójek:

3, 4, 5;

5, 12, 13;

40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q takie, że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$a = p^2 - q^2,\ b = 2pq,\ c = p^2 + q^2$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$a^2 + b^2 = c^2$

Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

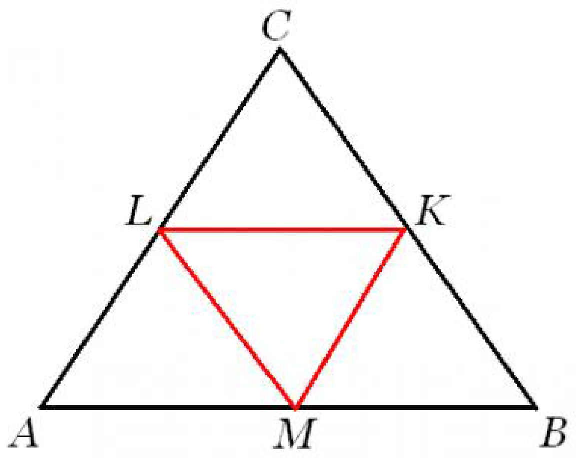
Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$AB \parallel LK \qquad |LK| = \frac{1}{2}|AB|$

$AC \parallel KM \qquad |KM| = \frac{1}{2}|AC|$

$BC \parallel LM \qquad |LM| = \frac{1}{2}|BC|$



ZADANIA

4.5.1 Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.

Odpowiedź: 30°, 40°, 110°

4.5.2 Jeden kąt trójkąta ma miarę 26°, a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi 12°. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Odpowiedź: 26°, 71°, 83°

4.5.3 Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3:5:4.

Odpowiedź: $a = 12 \text{ cm}, b = 20 \text{ cm}, c = 16 \text{ cm}$

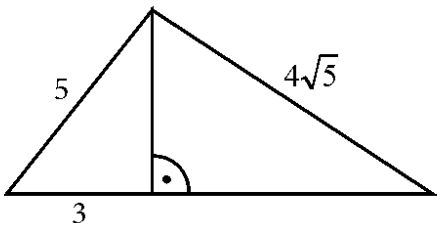
4.5.4 W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.

Odpowiedź: 8 cm

4.5.5 W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

Odpowiedź: $6\sqrt{2} \text{ cm}$

4.5.6 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:



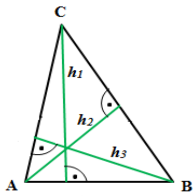
Odpowiedź: $P = 22$

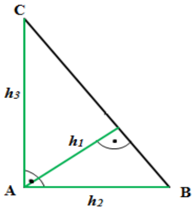
4.5.7 Dany jest trójkąt $\mathbf{ABCABC}$ o bokach długości: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{6}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AC}| = \mathbf{5}$. Punkt $\mathbf{M}$ jest środkiem boku $\mathbf{AC}$, punkt $\mathbf{N}$ – środkiem boku $\mathbf{BC}$. Obliczyć obwód trapezu $\mathbf{ABNM}$.

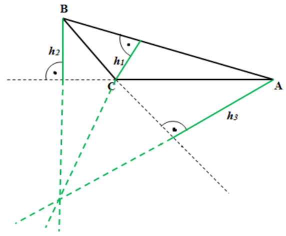
Odpowiedź: 13,5

Wysokości i środkowe w trójkącie

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

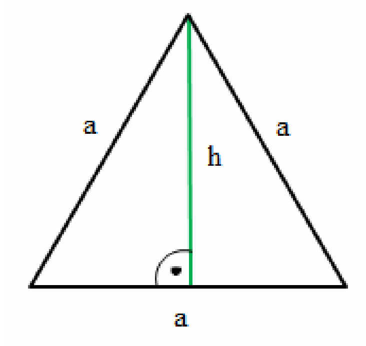






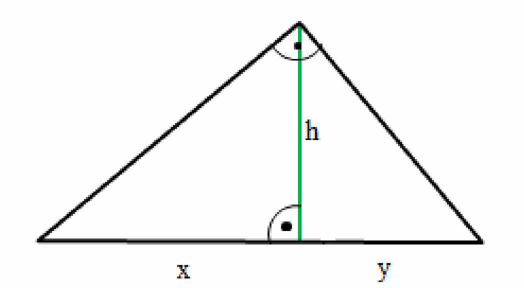
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



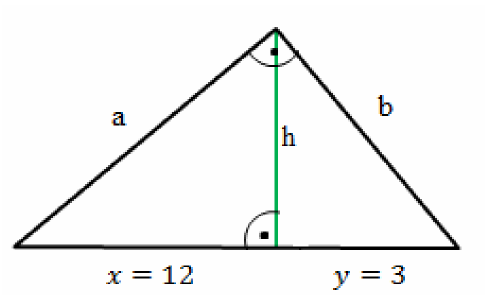
Wysokość trójkąta o boku a jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

W **trójkącie prostokątnym** wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki x, y, dla których $h = \sqrt{x \cdot y}$



Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 3 cm i 12 cm. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.



a, b – szukane długości przyprostokątnych

h – wysokość

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej a

$$a^2 = x^2 + h^2$$

$$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

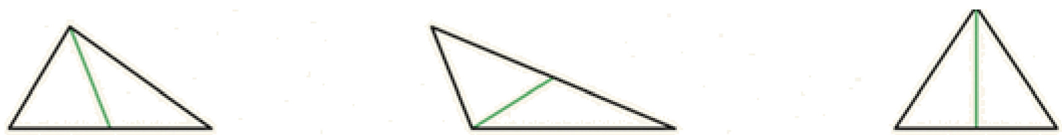
Podobnie liczymy długość przyprostokątnej b

$$b^2 = y^2 + h^2$$

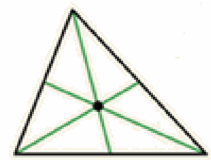
$$b^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$$

Wysokość trójkąta ma długość $6\ \mathrm{cm}$, a przyprostokątne $6\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$ i $3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$.

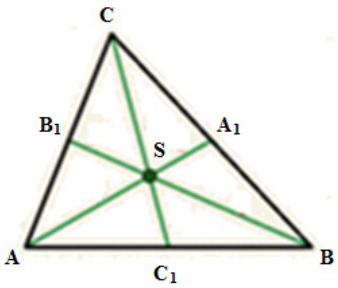
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

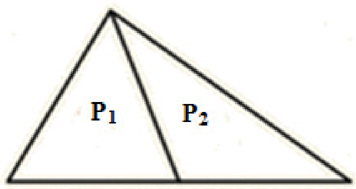


Środek ciężkości S dzieli każdą środkową w stosunku $2 : 1$.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości $3, 5, 6$.

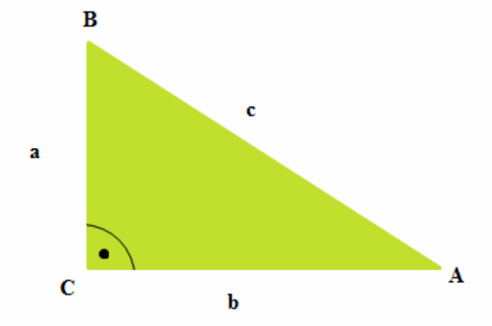
Liczymy najpierw ile wynosi połowa obwodu trójkąta $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

Odpowiedź: Pole trójkąta o bokach $3, 5$,6 wynosi $2\sqrt{14}$.

Twierdzenie

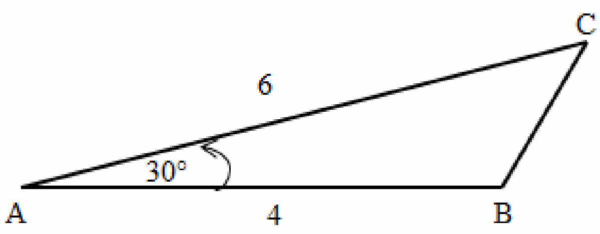
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin|\sphericalangle BCA|$$

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 30°$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6j^2$.

ZADANIA

4.5.8 W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: 16 cm, $2\sqrt{97}$ cm, $2\sqrt{97}$ cm

4.5.9 W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Odpowiedź: $64, 16+16\sqrt{2}64, 16+16\sqrt{2}$

4.5.10 Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|\mathbf{AB}| = \mathbf{4}$ i $|\mathbf{BC}| = \mathbf{2\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $\sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90°$

4.5.11 Oblicz pole trójkąta ABC jeśli $|\mathbf{AC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AB}| = \mathbf{7}, \sphericalangle\mathbf{BAC} = \mathbf{60°}$.

Odpowiedź: $7\sqrt{3}$

4.5.12 Oblicz pole trójkąta o bokach $\mathbf{12}$ i $\mathbf{9\sqrt{2}}$ oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze 30°.

Odpowiedź: $27\sqrt{2}$

4.5.13 W trójkącie ostrokątnym $\mathbf{ABC}$ poprowadzono prostą prostopadłą do boku $\mathbf{AB}$, przecinającą bok $\mathbf{AC}$ w punkcie $\mathbf{E}$ i bok $\mathbf{AB}$ w punkcie $\mathbf{F}$. Punkt $\mathbf{D}$ jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu $\mathbf{C}$. Wiedząc, że $|\mathbf{EC}| = \mathbf{3}|\mathbf{FD}| = \mathbf{1}$, oblicz sinus kąta $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

4.6 Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*

Teraz nauczę się stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu

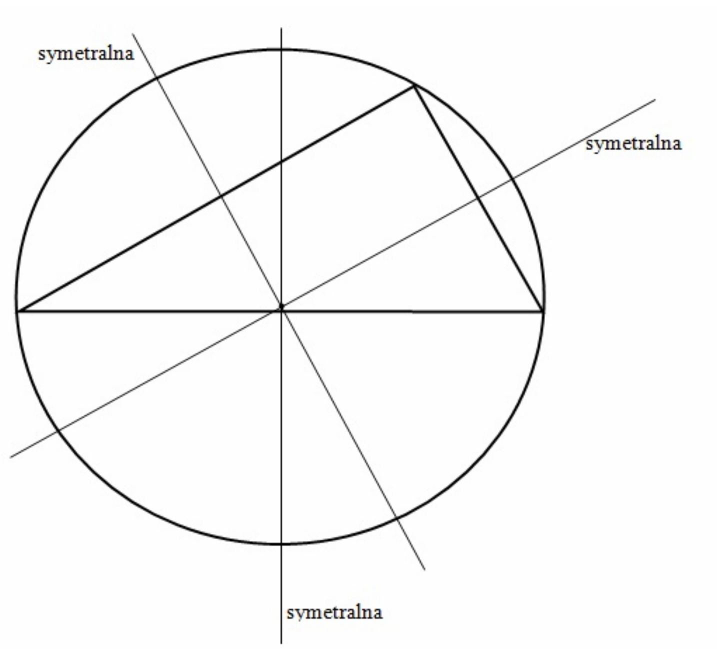
Okrąg opisany na trójkącie

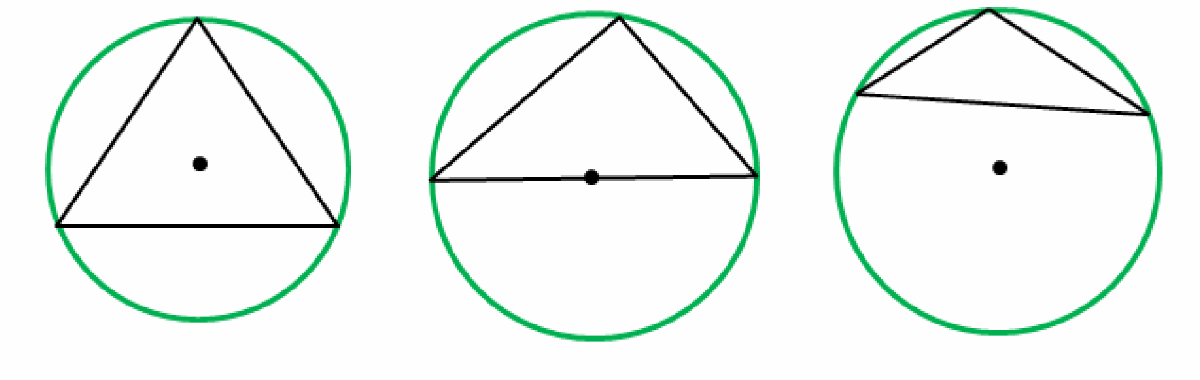
Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

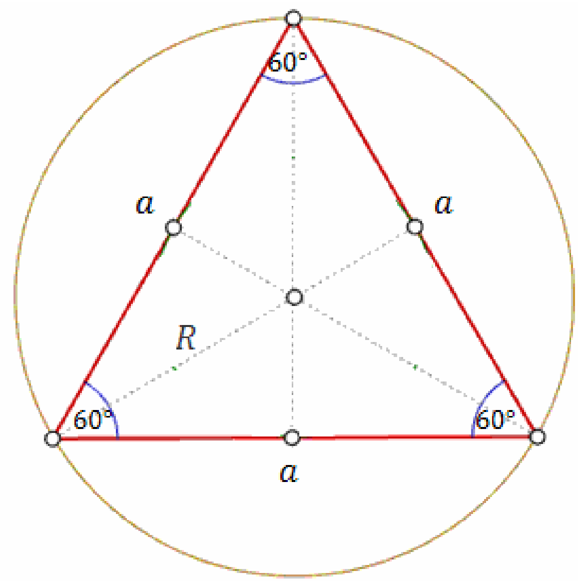




- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

OKRĘGI OPISANE NA WYBRANYCH TRÓJKĄTACH

Trójkąt równoboczny



R – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

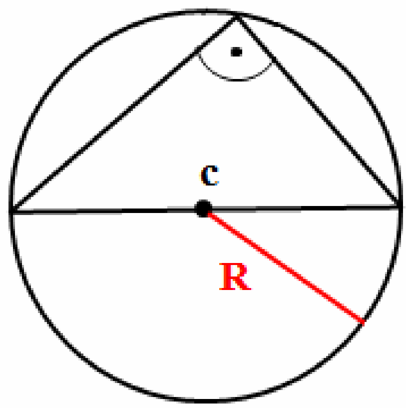
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



c – przeciwprostokątna

h – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$R = \frac{1}{2}c$$

Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku $a = 12$ cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru $R = \frac{2}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 12 \text{ cm}$, to:

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

więc $R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi $2R$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$$

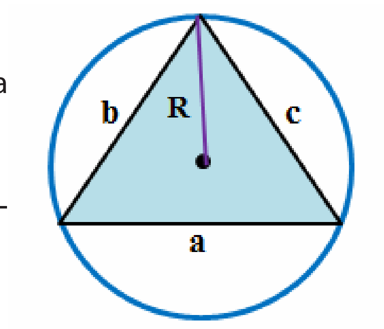
$$(2R)^2 = 16 + 100$$

$$4R^2 = 116 /: 4$$

$$R^2 = 29 \Rightarrow R = \sqrt{29}$$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = \sqrt{29}$.

Pole trójkąta wpisanego w **okrąg**



Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wynosi $\boldsymbol{P = \frac{abc}{4R}}$

ZADANIA

4.6.1 Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: 8π.

4.6.2 Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $25\pi\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

4.6.3 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

a) równobocznym, o boku o długości $8\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

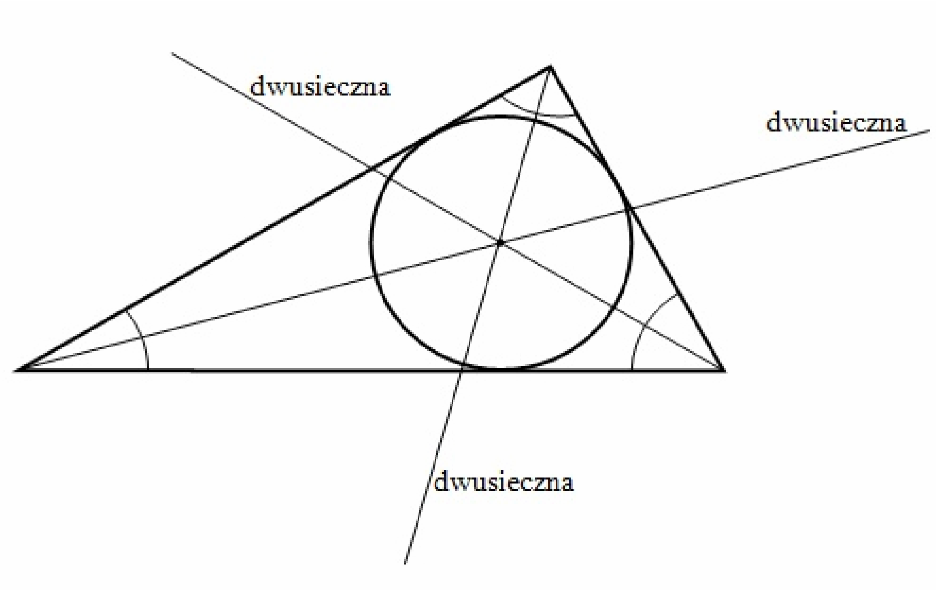
b) prostokątnym, o przyprostokątnych $12\ \mathrm{cm}$ i $18\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $R = 3\sqrt{13}$.

4.6.4 Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy $13\frac{13}{24}$. Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

Odpowiedź: 17.

Okrąg wpisany w **trójkąt**



Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta.

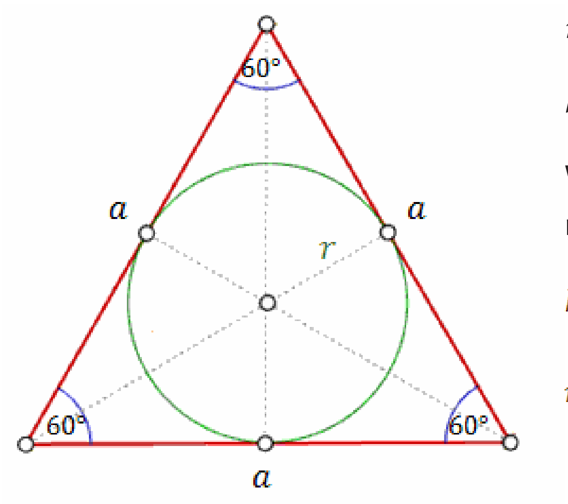
Dwusieczna kąta to półprosta, która ma początek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa kąty o równych miarach.

Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

Trójkąt równoboczny



r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

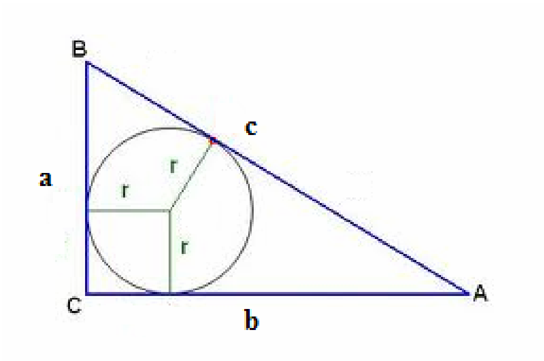
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ \mathrm{cm}$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 8\ \mathrm{cm}$, to:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

więc $r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ \mathrm{cm}$ wynosi $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$.

Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3\ \mathrm{cm}$ i przeciwprostokątnej $5\ \mathrm{cm}$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$5^2 = 3^2 + a^2$

$25 = 9 + a^2$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\ cm$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru $r = \frac{a+b+c}{2}$, więc

$$r = \frac{4+3-5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 1 cm.

Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c opisanego na okręgu o promieniu r jest równe

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

ZADANIA

4.6.5 Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

4.6.6 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:

a) Pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: $25\pi \text{ cm}^2$

b) Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $4\pi \text{ cm}^2$

c) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Odpowiedź: $h = \frac{24}{5} \text{ cm}$

4.6.7 Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

4.6.8 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $\mathbf{12 \text{ cm}}$. Kąty przy tej podstawie mają po $\mathbf{30}°$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $r = \left(12 - 6\sqrt{3}\right)$

4.6.9 Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $\mathbf{a}$ i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:

a) $a = 4$ b) $a = 3\sqrt{6}$ c) $a = 6\sqrt{2}$ d) $a = 12$

Odpowiedź:

a) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $r = \sqrt{3},\ R = 3\sqrt{2}r = \sqrt{3},\ R = 3\sqrt{2}$

c) $r = \sqrt{6},\ R = 2\sqrt{6}r = \sqrt{6},\ R = 2\sqrt{6}$

d) $r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}$

4.6.10 W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{5}{12}, tg\beta = \frac{12}{5}$

4.7 Przystawanie i podobieństwo trójkątów

Teraz nauczę się:

- rozpoznawać trójkąty przystające i podobne;
- wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów

Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.

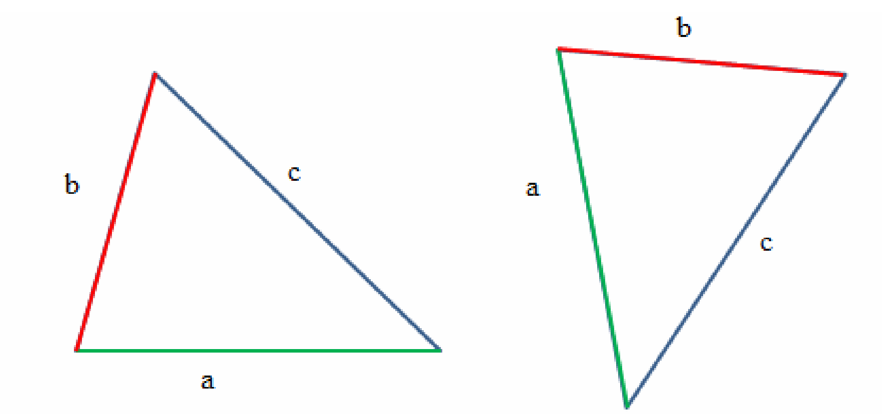
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem ≡.

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

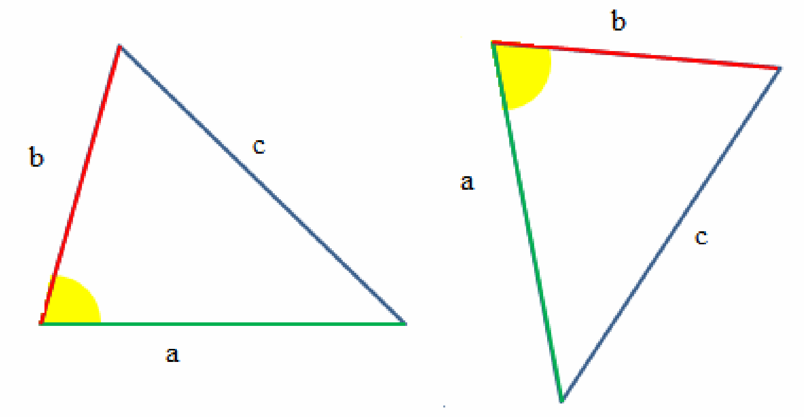
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



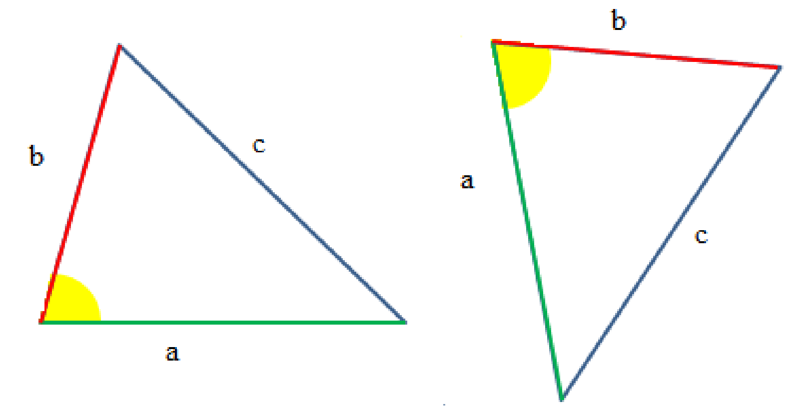
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



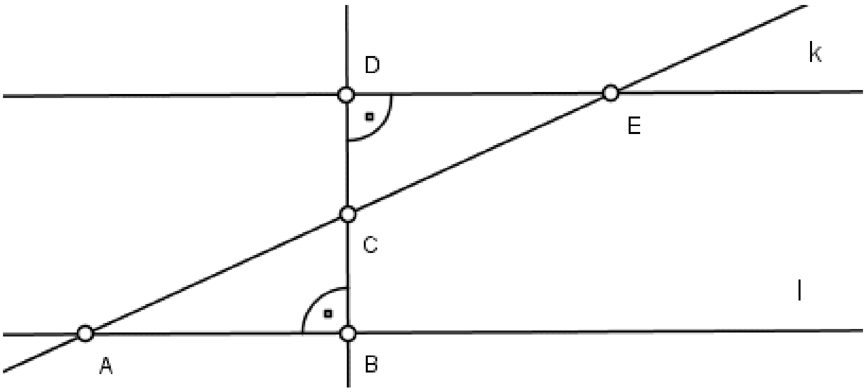
III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Przykład 1

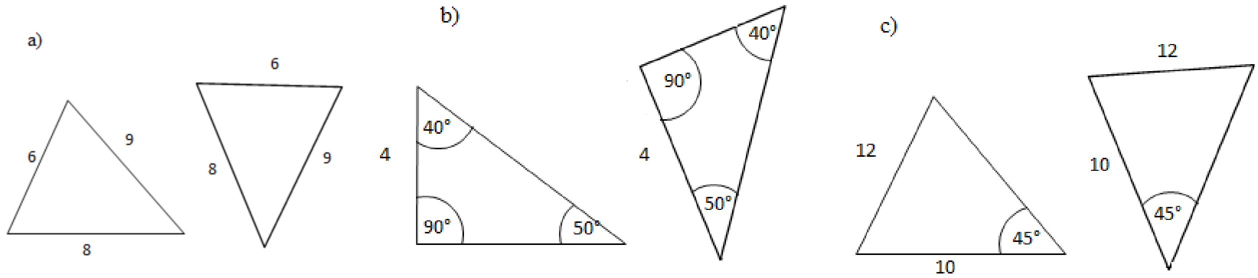
Proste k i l są równoległe. Punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.



Kąty BCA oraz DCE jako kąty wierzchołkowe mają równe miary. $|DC| = |CB|$ ponieważ punkt C jest środkiem odcinka BD. Wobec powyższych faktów, trójkąty ABC oraz DCE na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

ZADANIE

4.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

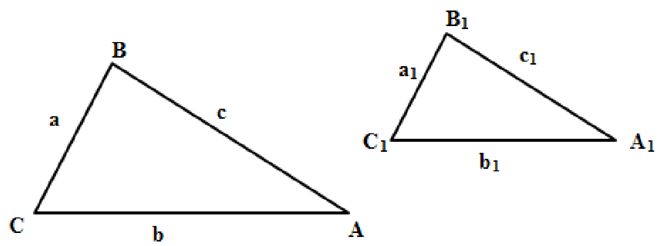
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem ~.

I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



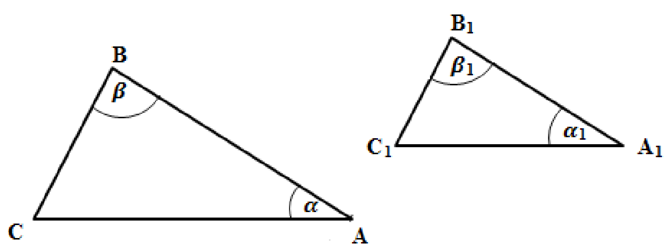
$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} = k$$

k – skala podobieństwa

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \beta_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

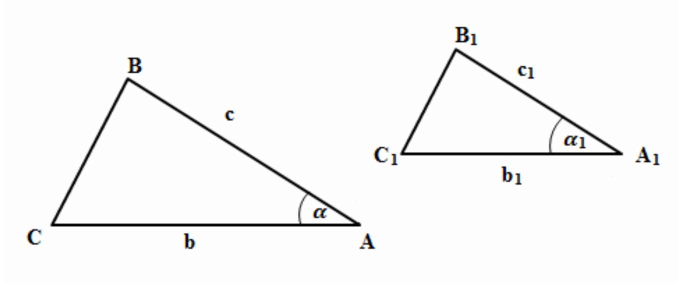
III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.

$\alpha = \alpha_1$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

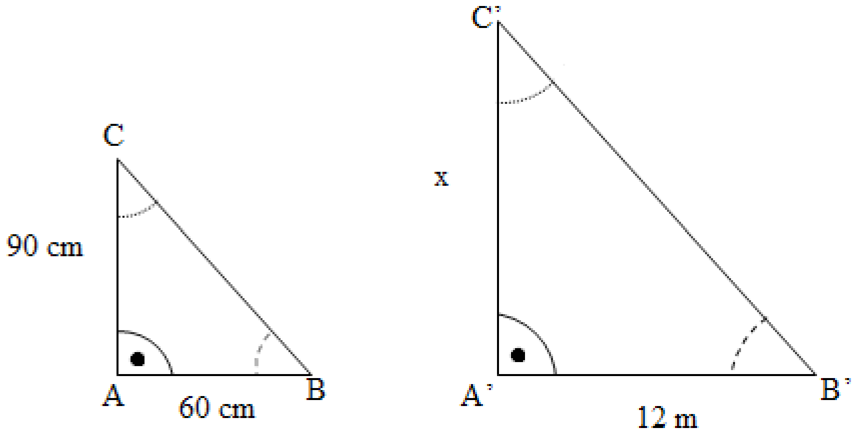
$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$



Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.

W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{x}{12}$$

$$6x = 9 \cdot 12$$

$$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$$

Odpowiedź: Wieża ma wysokość 18 m.

ZADANIA

4.7.2 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ w skali $\mathbf{k = 2}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$, jeśli: $\mathbf{|AB| = 5}$, $\mathbf{|BC| = 7}$, $\mathbf{|CA| = 4}$.

Odpowiedź: $|A'B'| = 10, |B'C'| = 14, |C'A'| = 8$.

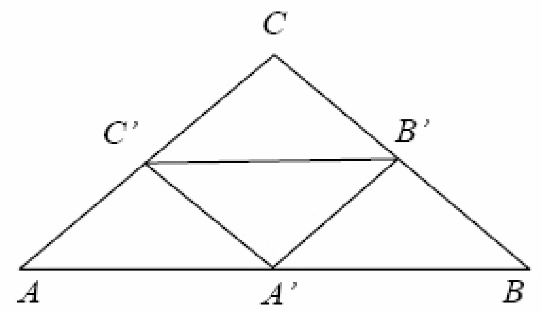
4.7.3 Ramiona trapezu $\mathbf{ABCD}$ przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie $\mathbf{E}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DE}$.

Odpowiedź: 12.

4.7.4 Punkty $\mathbf{A', B', C'}$ są środkami boków trójkąta $\mathbf{ABC}$. Pole trójkąta $\mathbf{A', B', C'}$ jest równe $\mathbf{4}$. Oblicz pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Odpowiedź: 16.

4.7.5 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$. Oblicz długość boku $|\mathbf{A'C'}|$, jeżeli



Odpowiedź: $|A'C'| = 7{,}5\ \mathrm{cm}$.

4.7.6 Trójkąty $\mathbf{ABC}$ i $\mathbf{A'B'C'}$ są podobne. Trójkąt $\mathbf{ABC}$ ma boki o długości $\mathbf{4\ cm}$, $\mathbf{6\ cm}$ i $\mathbf{8\ cm}$. Obwód trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ wynosi $\mathbf{135\ cm}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$.

Odpowiedź: $30\ \mathrm{cm}, 45\ \mathrm{cm}, 60\ \mathrm{cm}$.

4.7.7 Drzewo o wysokości $\mathbf{4\ m}$ rzuca cień o długości $\mathbf{8\ m}$. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości $\mathbf{3\ m}$. Oblicz wysokość znaku drogowego.

Odpowiedź: $1{,}5\ \mathrm{m}$.

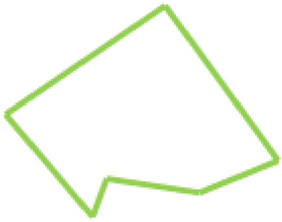
4.8 Wielokąty

Teraz nauczę się:

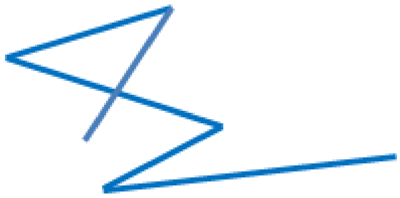
- obliczać liczbę przekątnych wielokąta;
- obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta

Łamaną nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.

Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej.**

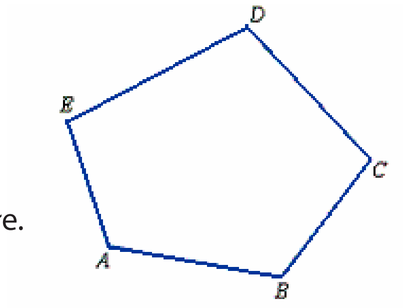


Łamana zwyczajna zamknięta



Łamana zwyczajna otwarta

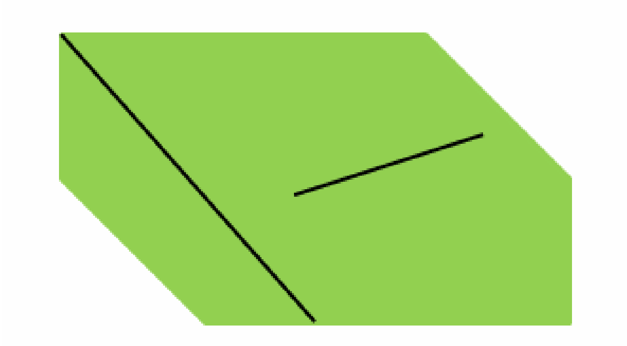
Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.



Wielokąt o n bokach nazywamy również n–kątem.

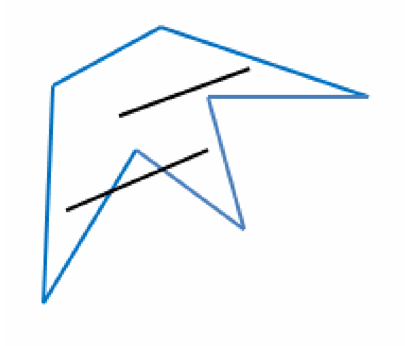
Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.



Wielokąt wypukły

Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie



Wielokąt wklęsły

Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

Przykład 1

Oblicz liczbę przekątnych 17–kąta.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:

$$(n-2)\cdot 180^\circ$$

Przykład 2

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

$n = 17$

$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14 \cdot 17}{2} = 119$

$(n-2)\cdot 180° = (17-2)\cdot 180° = 15 \cdot 180° = 2700°$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę". To znaczy mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n". Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \ /\cdot 2$

Obliczamy powstałe równanie:

$(n-3)n = 108$

$n^2 - 3n - 108 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 441$

$\sqrt{\Delta} = 21$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ – nie spełnia warunków zadania – liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+21}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1080°$. Jaki to wielokąt?

Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$(n-2)\cdot 180° = 1080° \ /: 180°$

$n - 2 = 6$

$n = 8$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

ZADANIA

4.8.1 Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: dziesięciokąt.

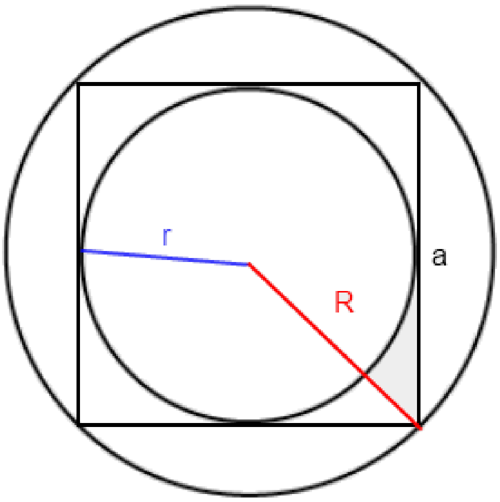
4.8.2 Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1620°$. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: jedenastokąt.

Czworokąty

Na początek przypomnimy podstawowe wzory na pola czworokątów.

Kwadrat



$P = a^2$

$P = 2R^2$

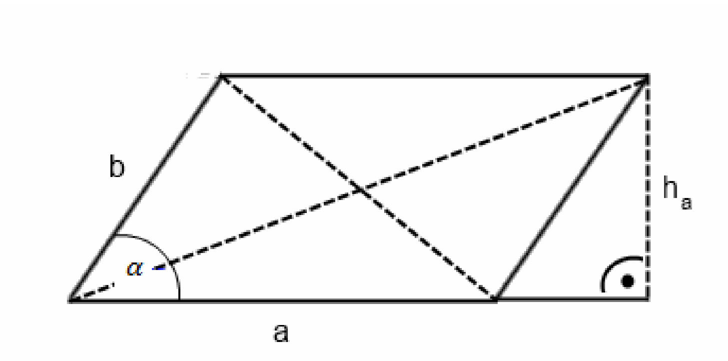
$P = 4r^2$

d – przekątna

$d = a\sqrt{2}$

$P = \frac{1}{2}d^2$

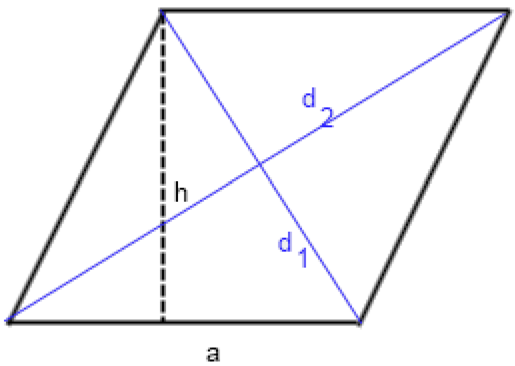
Równoległobok



$P = a \cdot h_a$

$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Romb

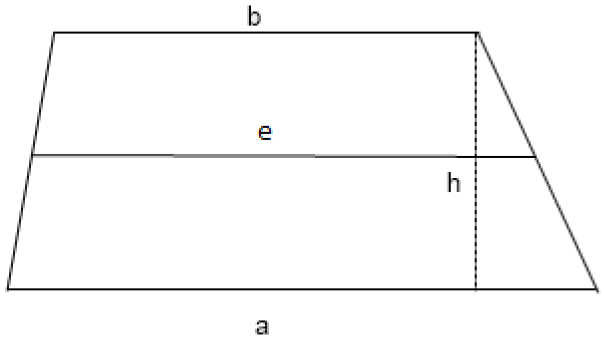


$P = a \cdot h_a$

$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$

$P = a^2 sin\alpha$

Trapez

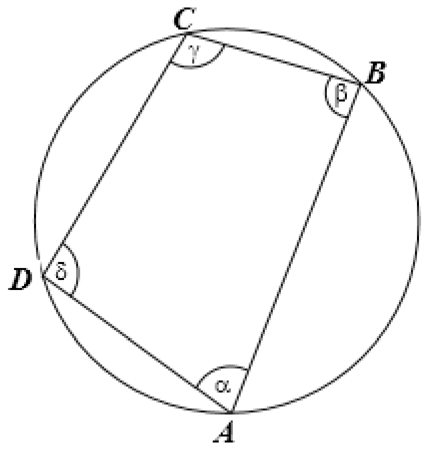


$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

e – odcinek łączący środki ramion trapezu

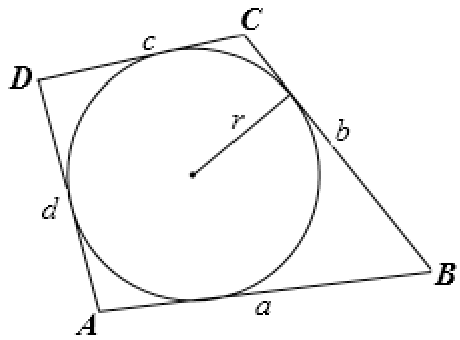
$$e = \frac{a+b}{2}$$

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.



W **czworokąt wypukły można wpisać okrąg** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$a + c = b + d$



ZADANIA

4.8.3 Oblicz pole równoległoboku o bokach $\mathbf{7\,cm}$ i $\mathbf{12\,cm}$, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o 60°.

Odpowiedź: $42\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$**.**

4.8.4 W rombie $\mathbf{ABCD}$ bok AB ma długość $\mathbf{20\ cm}$, a przekątna $\mathbf{BD}$ ma długość $\mathbf{24\ cm}$. Punkty $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ są kolejno środkami boków rombu.

a) wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest prostokątem

b) oblicz pole tego prostokąta

Odpowiedź:

b) $P = 192\ \mathrm{cm}^2$.

4.8.5 W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą $\mathbf{45°}$ i . Oblicz pole trapezu.

Odpowiedź: $P = 21\left(\sqrt{3} - 1\right)\ \mathrm{cm}^2$**.**

4.8.6 Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedź: $P = 45\ \mathrm{cm}^2$

4.8.7 W trójkącie prostokątnym ABC dane są $|\mathbf{AC}| = \mathbf{12}, \sphericalangle\mathbf{CAB} = \mathbf{60°}$. Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1:5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.

Odpowiedź: $P = 70\sqrt{3}$.

4.8.8 W czworokącie $\mathbf{ABCD}$ przekątne $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BD}$ przecinają się w punkcie $\mathbf{E}$. Dane są pola trzech trójkątów : $\mathbf{P_{BCE} = 15, P_{ECD} = 5, P_{AED} = 10}$. Oblicz pole czworokąta $\mathbf{ABCD}$.

Odpowiedź: 60.

4.9 Wielokąty foremne

Teraz nauczę się obliczać:

- miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego;
- sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego;
- pola wielokątów foremnych

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.

Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.

Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

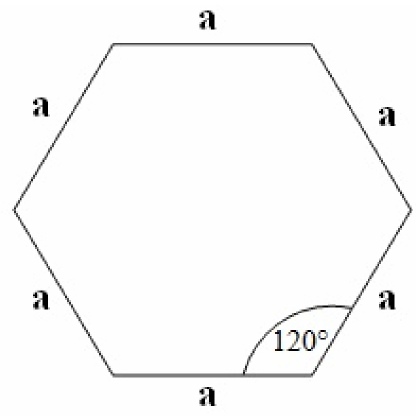
Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

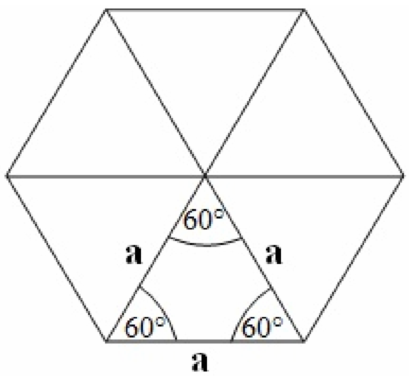
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny.**



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi 720°.

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę 120°.



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	**Pole**	**Promień okręgu opisanego na wielokącie**	**Promień okręgu wpisanego w wielokąt**
Trójkąt równoboczny	$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=\frac{2}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r=\frac{1}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P=a^2$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r=\frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R=a$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ZADANIA

4.9.1 Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $\mathbf{4,5\ cm}$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $R = 3$ cm, $r = 1{,}5$ cm.

4.9.2 W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

4.9.3 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód długości $\mathbf{10\ cm}$. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

Odpowiedź: pole trójkąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{9}$, pole kwadratu $P = 6\frac{1}{4}$, pole sześciokąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{6}$.

4.9.4 Pole kwadratu jest równe $\mathbf{8\ cm^2}$. Oblicz promień koła:

a) opisanego na kwadracie

b) wpisanego w kwadrat

Odpowiedź: $R = 2$ cm, $r = \sqrt{2}$ cm.

4.9.5 W koło o polu $\mathbf{6,25\pi\ cm^2}$ wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

Odpowiedź: $P = 12{,}5$ cm.

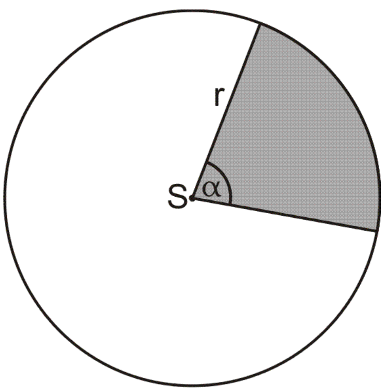
4.10 Pole koła i długość okręgu

Teraz nauczę się obliczać: pole koła i wycinka koła oraz długość okręgu

Dla danego koła o promieniu r możemy policzyć:

pole: $\boldsymbol{P = \pi r^2}$

oraz obwód: $\boldsymbol{L = 2\pi r}$



Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu r.

Kąt pełny ma 360°. Podzielmy całe koło na wycinki o kącie 1°. Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$P = \frac{\pi r^2}{360°}$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie α stopni będzie miał postać:

$$\boldsymbol{P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole wycinka koła o promieniu $r = 10$ i kącie równym 60°.

Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:

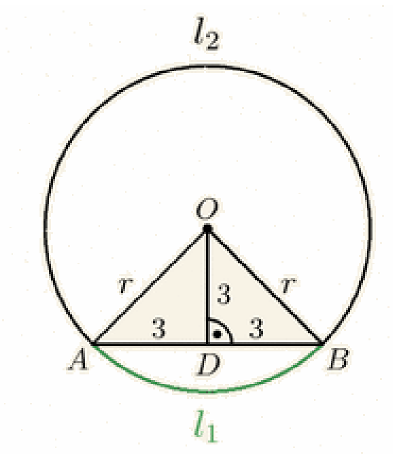
$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$$

Długość l łuku okręgu o promieniu r, odpowiadającego kątowi środkowemu o mierze α, wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r}$$

Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 6 cm odległą o 3 cm od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt AOB jest równoramienny. Odcinek OD jest jego wysokością i dzieli cięciwę AB o długości 6 cm na dwie równe części po 3 cm. Promień r liczymy z twierdzenia Pitagorasa.

$$3^2 + 3^2 = r^2 \;\Rightarrow\; 18 = r^2 \;\Rightarrow r = 3\sqrt{2}\, cm$$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180°. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych ADO i DBO są równe $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

$$\sphericalangle AOB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Długość łuku l_1 wynosi:

$$l_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku l_1.

$$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, \pi \text{ cm.}$$

Odpowiedź: okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$ i $4\frac{1}{2}\sqrt{2}\, \pi \text{ cm}$.

ZADANIA

4.10.1 Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $\mathbf{60^\circ}$ ma długość $\mathbf{2}$. Oblicz pole tego wycinka.

Odpowiedź: 6π.

4.10.2 Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\boldsymbol{\pi}$ odpowiada kąt $\mathbf{135^\circ}$.

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

4.10.3 Promień koła jest równy $\mathbf{2\ cm}$. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze $\mathbf{30^\circ}$?

Odpowiedź: $\frac{1}{3}\pi$.

4.10.4 Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie $\mathbf{60^\circ}$, jeżeli promień koła ma długość $\mathbf{6\ cm}$.

Odpowiedź: $P = 6\pi\ \mathrm{cm}^2,\ l = 2\pi\ \mathrm{cm}$.

4.10.5 Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu $\mathbf{9\ cm}$ i kącie $\mathbf{60^\circ}$.

Odpowiedź: $l = 3\pi\ \mathrm{cm}, P = 13{,}5\pi\ \mathrm{cm}^2$.

4.10.6 Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie $\mathbf{120^\circ}$, wynosi $\boldsymbol{l = 8\pi\ cm}$.

Odpowiedź: $r = 12\ \mathrm{cm}$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[40] W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość:

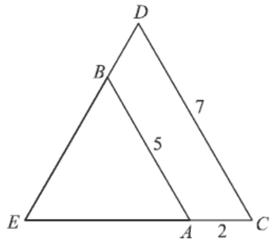
a) 6 b) $2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{29}$ d) 14

2. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) $16\sqrt{6}$ b) $14\sqrt{6}$ c) $12 + 4\sqrt{6}$ d) $12 + 2\sqrt{6}$

40 Zadania 1-6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 01.03.2013.

3. *Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:

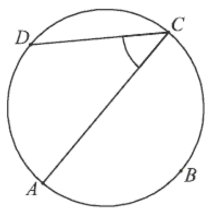


a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{14}{5}$ c) 3 d) 5

4. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

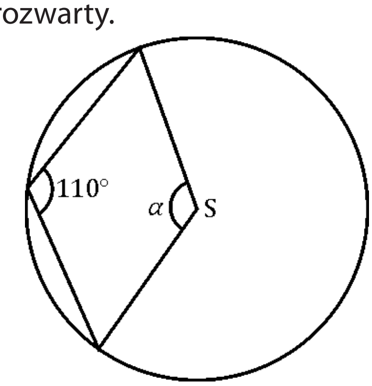
a) 25 b) 50 c) 75 d) 100

5. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa:



a) 90° b) 60° c) 45° d) 30°

6. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.



7.[41] Punkt S jest środkiem koła. Zatem miara kąta α jest równa (patrz na rysunek):

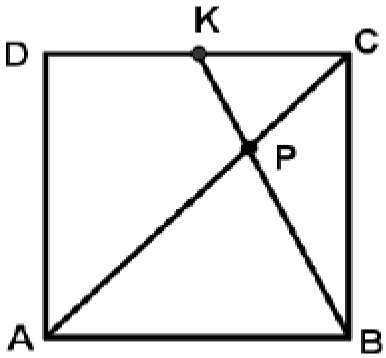
a) 70° b) 220° c) 140° d) 250°

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe 30° i 60°. Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

41 Zadanie 7, 8, 9: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze, 01.03.2013.

9. Na boku DC kwadratu $ABCD$ obrano punkt K tak, że $|DK| = |KC|$ (zobacz rysunek). Przekątna AC kwadratu przecina odcinek BK w punkcie P. Uzasadnij, że pole trójkąta ABP jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta KCP.



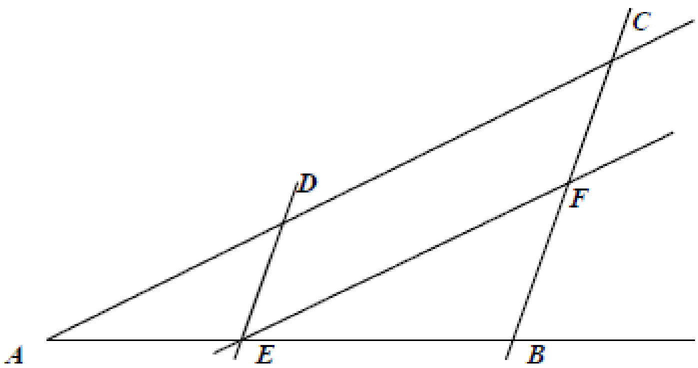
10.[42] Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

a) 36π b) 9π c) $18\sqrt{3}\pi$ d) 12π

11. Odcinek o długości 2,4 m podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

a) 120 cm b) 0,72 m c) 480 mm d) 14 dm

12. *Proste DE i CB oraz EF i AC są równoległe. Oblicz długość odcinka EB, jeżeli $AE = 2{,}5$, $DE = 3$ oraz $FB = 4$.



13. Wykaż, że wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki AD i DB, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio AC i BC tego trójkąta.

14.[43] W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

a) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ d) $\frac{1}{17}$

42 Zadania 10-13: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 01.03.2013.
43 Zadanie 14, 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 01.03.2013.

15. Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{5}$

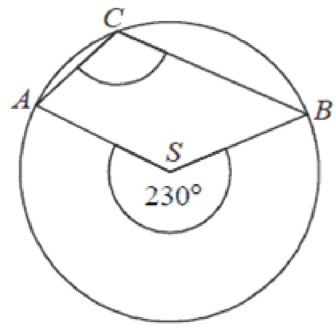
16.[44] Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1:

a) o 10% b) o 110% c) o 21% d) o 121%

17. Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 14. Bok AB tego prostokąta ma długość 6. Długość boku BC jest równa:

a) 8 b) $4\sqrt{10}$ c) $2\sqrt{58}$ d) 10

18. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego ACB jest równa:

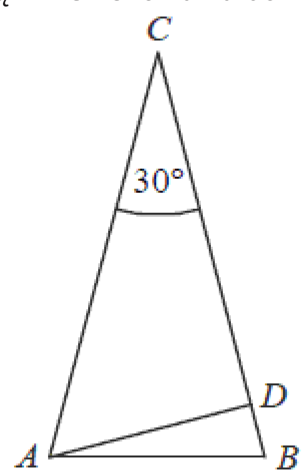


a) 65° b) 100° c) 115° d) 130°

19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

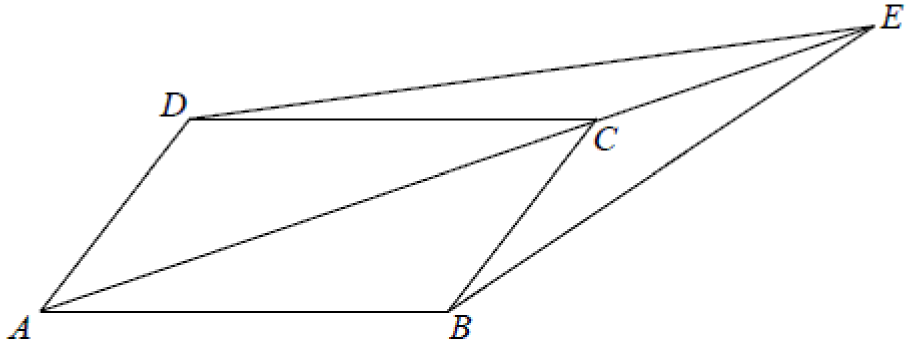
a) 36 b) 18 c) 12 d) 6

20. W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok BC.



44 Zadania 16-21: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 01.03.2013.

21. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.



22.[45] Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

a) 21° i 105   b) 11° i 66°   c) 18° i 108°   d) 16° i 96°

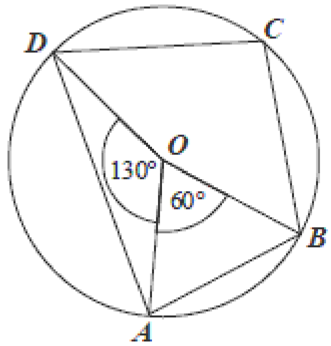
23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta a dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

a) 3 cm   b) 4 cm   c) 5 cm   d) 8 cm

25. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany BAD ma miarę:



a) 150°   b) 120°   c) 115°   d) 85°

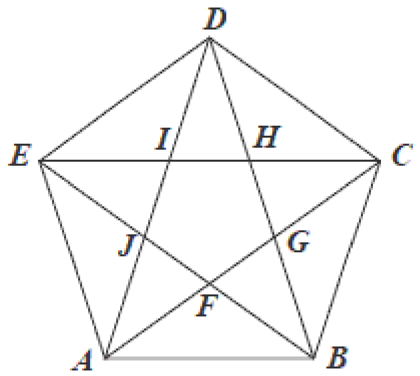
26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

27.[46] W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość:

a) 6   b) $2\sqrt{21}$ c) $2\sqrt{29}$ d) 14

45 Zadania 22-26: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 02.03.2013.
46 Zadania 27-31: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf,0 2.03.2013.

28. Pięciokąt $ABCDE$ jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ECD:



A. ΔABF

B. ΔCAB

C. ΔIHD

D. ΔABD

29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) $16\sqrt{6}$ b) $14\sqrt{6}$ c)$12+4\sqrt{6}$ d) $12+2\sqrt{6}$

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

a) 25 b) 50 c) 75 d) 100

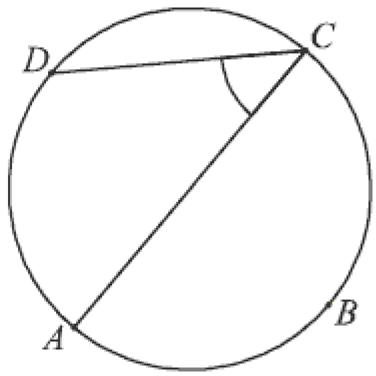
31. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa:

A. 90°

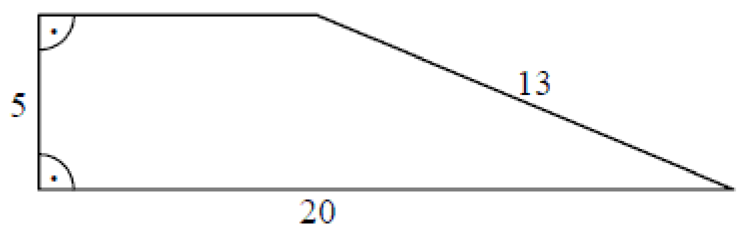
B. 60°

C. 45°

D. 30°



32.[47] Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.

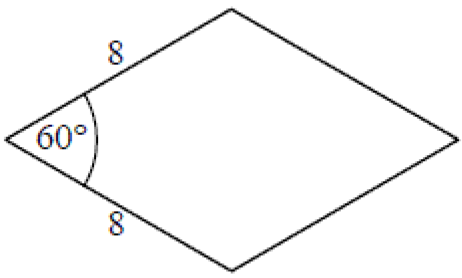


Obwód tego trapezu jest równy:

a) 43 b) 46 c) 48 d) 50

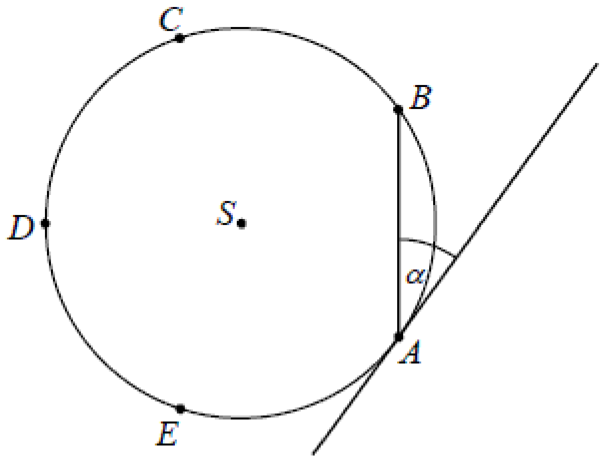
47 Zadania 32-35: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 03.03.2013.

33. Bok rombu ma długość 8, a kąt ostry ma miarę 60°. Wysokość tego rombu jest więc równa:



a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$

34. Punkty A, B, C, D i E leżą na okręgu o środku S i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek).

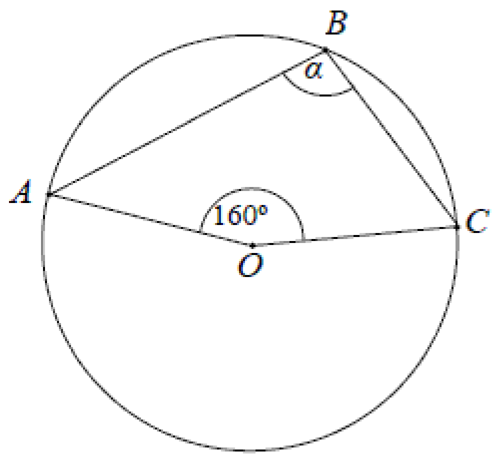


Wówczas miara kąta ostrego α między cięciwą AB i styczną do tego okręgu w punkcie A jest równa:

a) 18° b) 30° c) 36° d) 54°

35. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

36.[48] Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę:



a) 80° b) 100° c) 110° d) 120°

48 Zadanie 36, 37, 38: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 04.03.2013.

37. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa:

a) $3\sqrt{3}$ b) 3 c) $6\sqrt{3}$ d) 6

38. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

39.[49] Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:

a) 7 b) 14 c) 21 d) 28

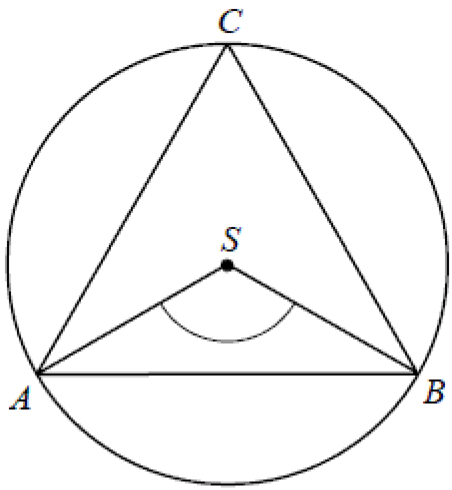
40. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:

a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 8 d) 4

41. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{61}$

42. Punkty A, B, C, leżące na okręgu o środku S, są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

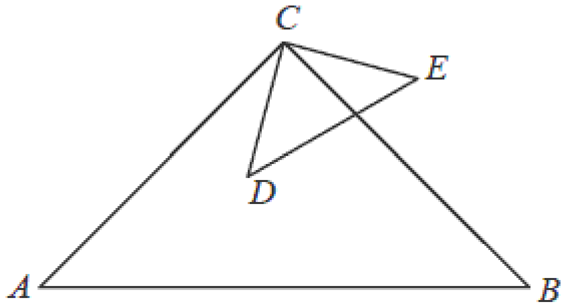


Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa:

a) 120° b) 90° c) 60° d) 30°

49 Zadania 39-44: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

43. Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $AD = BE$.



44. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

45.[50] Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E takie, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Wykaż, że kąt $|\sphericalangle DCE| = 45°$.

46. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.

Odpowiedź: $2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

47. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

a) 120° b) 135° c) 144° d) 150°

Odpowiedź: c.

48. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{3}$

49. Długościami boków trójkąta mogą być:

a) $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$ b) 6 mm; 0,1 dm; 12 cm

c) $4{,}2-\sqrt{3{,}2}+\sqrt{3}$ d) 2 dm; 4 cm; 0,07 m

Odpowiedź: a.

50. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:

a) 50° b) 80° c) 40° d) 70°

Odpowiedź: b.

---

50 Zadania 45-53: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

51. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o 38° większy od drugiego. Kąty te mają miary:

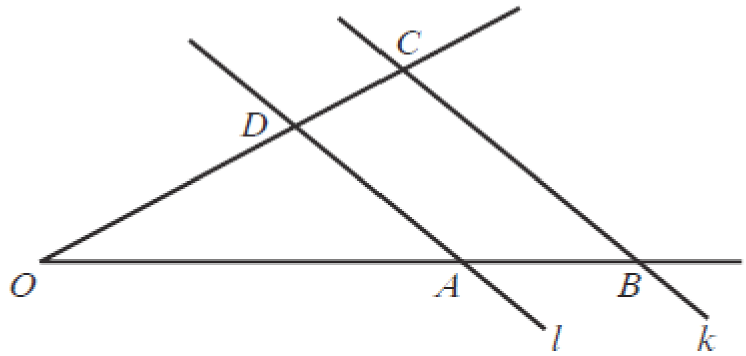
a) 71° i 109° b) 38° i 142° c) 26° i 64° d) 38° i 76°

52. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:

a) 360° b) 540° c) 720° d) 1080°

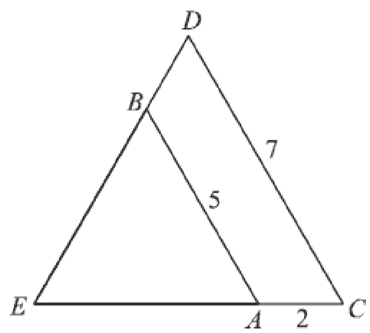
Odpowiedź: c.

53. *Proste l i k są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek OD ma długość:



a) 12 b) 18 c) $\frac{18}{5}$ d) $\frac{144}{5}$

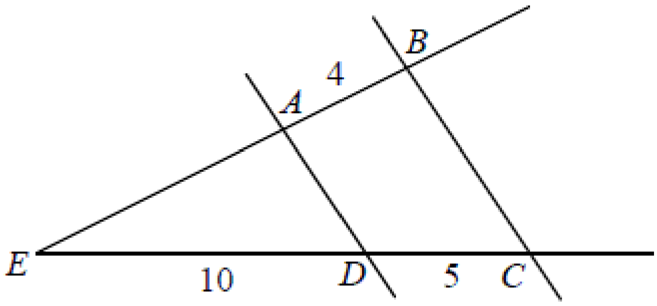
54.[51] *Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:



a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{14}{5}$ c) 3 d) 5

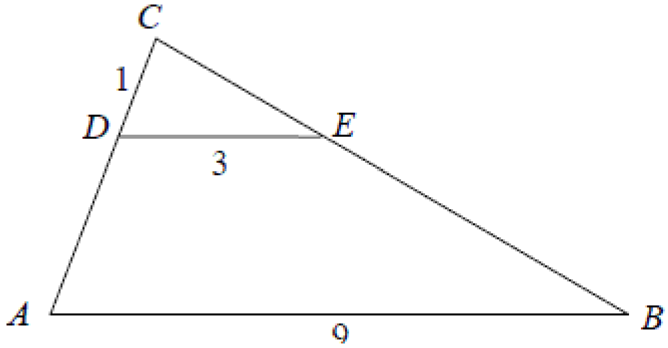
51 Zadanie 54: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf,0 4.03.2013

55.[52] *Proste AD i BC są równoległe. Długości odcinków ED, DC oraz AB podane są na rysunku. Długość odcinka EA jest równa:



a) 4 b) 8 c) 9 d) 10

56.[53] *Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka AD jest równa:



a) 2 b) 3 c) 5 d) 6

52 Zadanie 55: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf,
53 Zadanie 56: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

5 Ciągi

W liceum uczeń nauczy się:

- 1. Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.
- 2. Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.
- 3. Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu
- 4. arytmetycznego i geometrycznego.

5.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

Teraz nauczę się wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby naturalne.

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ...)$.

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, ..., n\}$ i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.

a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a liczby $(1, 2, 3, ..., n)$ nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności**.**

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia, wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Przykłady:

$a_n = n + 3$: 2, 5, 8, 11, 14, ... – ciąg rosnący

$a_n = n^2$: 1, 4, 9, 16, 25, ... – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n$: 3, 2, 1, 0, –1, ... – ciąg malejący

$a_n = -5n$: –5, –10, –15, –20, –25, ... – ciąg malejący

5.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny;
- stosować wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$\boldsymbol{r = a_{n+1} - a_n}$ nazywamy różnicą ciągu

$\boldsymbol{a_{n+1}a_{n+1} = a_n a_n + r}$

Przykłady ciągów arytmetycznych:

$a_1 = 5, r = 3$; 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

$a_1 = 6, r = -2$; 6, 4, 2, 0, –2, –4, ...

Zależność między pierwszym a **dowolnym wyrazem ciągu :**

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

Suma n–początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\boldsymbol{s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}\frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{2a_1+(n-1)\cdot r}{2}\frac{2a_1+(n-1)\cdot r}{2} \cdot n}$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} zachodzi równość:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}}$$

Ciąg arytmetyczny jest:

– **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia: $a_{n+1} - a_n > 0$,

– **malejący**, gdy różnica ciągu jest ujemna: $a_{n+1} - a_n < 0$,

– **stały**, gdy różnica ciągu jest równa 0: $a_{n+1} - a_n = 0$.

Ciekawostka [54]

W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych nazwany następnie jego imieniem:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

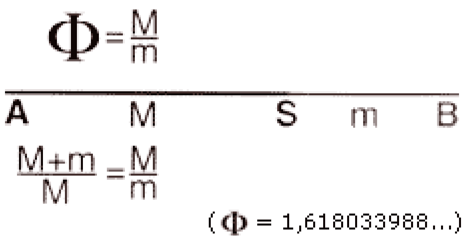
$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie n – należy do naturalnych oraz $k_0 = 1$ i $k_1 = 1$

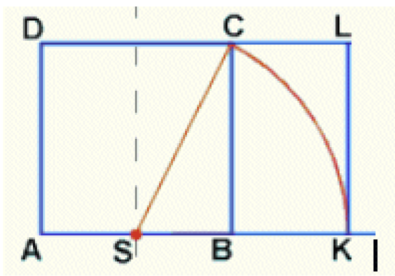
Można pokazać, że $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1{,}61803399887 \ldots = \Phi$ gdzie Φ jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym. Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba Φ, jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd w opracowaniach często podaje się, że Φ = 1,618.

Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:

1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.

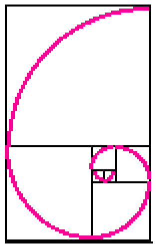


2. Złoty podział prostokąta .



54 Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym", J. Nowakowski i K. Borowski, Wydawnictwo Difin., www.bossa.pl, 6.03.2013.

3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

ZADANIA

5.2.1 Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

a) 1, 2, 3, 4, 5, ... b) 2, 4, 8, 16, 32, ... c) −2, −4, −6, −8, ... d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

Odpowiedź: Ciągi arytmetyczne: a, c, d

5.2.2 Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n):

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 3n-1$ c) $a_n = 2n+1$

d) $a_n = 1-n$ e) $a_n = n^n$ f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Odpowiedź:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12 b) 2, 5, 8, 11, 14, 17 c) 3, 5, 7, 9, 11, 13

d) 0, −1, −2, −3, −4, −5 e) 1,4, 27, 256, 3125, 46656 f) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

5.2.3 Dany jest ciąg (a_n) o podanym wzorze:

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_3 i a_4.

Odpowiedź: $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$

5.2.4 Sprawdź, czy dany ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 3 + n$ b) $a_n = 2n - 1$ c) $a_n = n^2 + 1$

d) $a_n = \frac{2}{3}n + 2$ e) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Odpowiedź: Tak: a, b, c

5.2.5 Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_2 = 5, a_6 = 15$

b) $a_3 = 6, a_{11} = 21$

c) $a_7 = 4, a_9 = 18$

d) $a_1 = 3, a_4 = 9$

e) $a_2 = 1, a_4 = 3–2\sqrt{3}$

Odpowiedź:

a) $a_n = –35+ (n – 1) \cdot 10 = –45 + 10n$

b) $a_n = 2 + (n – 1) \cdot 2 = 2n$

c) $a_n = –38 + (n – 1) \cdot 7 = –45 + 7n$

d) $a_n = 3 + (n – 1) \cdot 2 = 2n + 1$

e) $a_n = 5 + 2\sqrt{3} – n(2 + \sqrt{3})$

5.2.6 Znając trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, wyznacz 60 wyraz tego ciągu: $a_1 = 12, a_2 = 24, a_3 = 36$

Odpowiedź: 720

5.2.7 Mając dany ciąg arytmetyczny (a_n), w którym: $a_1 = 2, r = 4, a_n = 122$, oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg i ile wynosi suma jego wyrazów.

Odpowiedź: $n = 31, S_n = 1922$

5.2.8 Wyznacz a_3, a_7, a_{12} w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 8, r = 11$.

Odpowiedź: $a_3 = 30, a_7 = 74, a_{12} = 129$

5.2.9 Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów ciągu: 1, 4, 7, 10, 13, ….

Odpowiedź: $S_{20} = 590$

5.2.10 Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym $a_n = 2n – 5$.

Odpowiedź: $S_{15} = 165$

5.2.11 Oblicz x, wiedząc, że liczby:

a) $8, x, 22$

b) $x - 4, 5, x + 12$

w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Podaj różnicę ciągu.

Odpowiedź: a) $x = 15, r = 7$ b) $x = 1, r = 8$

5.2.12 Oblicz x, wiedząc, że: $2 + 6 + 10 + \ldots + x = 648$.

Odpowiedź: 70

5.2.13 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n):

a) $a_n = 3n$

b) $a_n = 2n - 4$

c) $a_n = n^2 - 1$

d) $a_n = -n + 2$

e) $a_n = \frac{-2n}{n+3}$

Odpowiedź:

a) $r = 3$ ciąg rosnący

b) $r = 2$ ciąg rosnący

c) $r = 2n + 1$ dla $n \geq 1$ r > 0 ciąg rosnący

d) $r = -1$ ciąg malejący

e) $r = \frac{-6}{n^2 + 7n + 12} < 0$ ciąg malejący

Ciekawostka

Ciąg liczb Fibonacciego na giełdzie

Istnieją trzy sposoby wykorzystania ciągu liczb Fibonacciego do analizy papierów wartościowych:

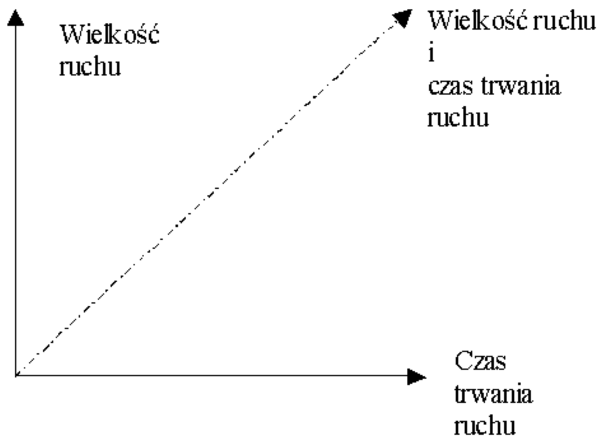
1. metody czasowe – w odniesieniu do upływu czasu (rozdział 3.2.1)
2. metody cenowe – w odniesieniu do zmiany ceny (rozdział 3.2.2)
3. metody cenowo–czasowe – w odniesieniu do upływu czasu i zmiany ceny (rozdział 3.2.3).

Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.

Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.

Rysunek 27. Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.



5.3 Ciąg geometryczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest geometryczny;
- stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą q, zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą q, a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

Suma n–początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$Sn = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ dla } q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad \text{dla } q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, $a_{n,}$ a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy:

$q > 0$ i $a_1 > 0$ lub $q \in (0, 1)$ i $a_1 < 0$

Ciąg jest malejący wtedy gdy:

$q > 0$ i $a_1 < 0$ lub $q \in (0, 1)$ i $a_1 > 0$

Ciąg jest stały wtedy, gdy:

$q = 1$ lub $a_1 = 0$

Jeśli iloraz q jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny.

Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału (–1, 1).

Ciekawostka

Metody cenowe

Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotne jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi Φ i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby Φ z przedziału <–3, 3>.

Tabela 3. Współczynniki złotego podziału[55]

Potęga n	F^n – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	Ciąg zewnętrzny
2	2,618	
3	4,236	

55 Źródło: Fischer R., "Liczby Fibonacciego na giełdzie", WIG - Press, Warszawa 1996.

–1	0,618	Ciąg wewnętrzny
–2	0,382	
–3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrotu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego, wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół) ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomu poziomów odwrotu Fibonacciego rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).

ZADANIA

5.3.1 Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a) 3, 6, 12, … b) 2, –6, 18, … c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \dots$ d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$

Odpowiedź:

a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ c) $a_n = \frac{2}{5} \cdot (5)^{n-1}$ d) $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

5.3.2 Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $q = -2, a_3 = 0{,}5$ b) $q = -\frac{1}{3}, a_4 = -27$ c) $q = -0{,}2, a_5 = -151{,}2$ d) $q =- 6, a_4 = 0{,}5$

Odpowiedź:

a) $a_1 = \frac{1}{8}$ b) $a_1 = 729$ c) $a_1 = -94500$ d) $a_1 = -\frac{1}{432}$

5.3.3 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na n-ty wyraz wiedząc, że:

a) $a_1 = 1, a_5 = 12{,}5$ b) $a_1 = 16, a_7 = 256$ c) $a_1 = -3, a_{10} = -81$ d) $a_1 = 5, a_3 = 2{,}5$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt[4]{\frac{25}{2}}, a_n = (\sqrt[4]{\frac{25}{2}})^{n-1}$ b) $q = \sqrt[6]{16}, a_n = 16^{\frac{n+4}{5}}$

c) $q = 3, a_n = -3^n$ d) $q = \sqrt{\frac{1}{2}}, a_n = 5 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^{n-1}$

5.3.4 Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a) $a_1 = 3, q = -2, a_n = 1536$ b) $a_1 = -1, q = -20, a_n = -64000000$

c) $a_1 = 7, q = 0{,}5, a_n = \frac{7}{128}$ d) $a_1 = 0{,}5, q = -4, a_n = 128$

Odpowiedź:

a) 10, b) 7, c) 8, d) 5

5.3.5 Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = 96, a_5 = 48$ b) $a_3 = 12, a_6 = 24$ c) $a_2 = 6, a_5 = -3$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt{2}, a_1 = 7{,}5$ b) $q = \sqrt[3]{2}, a_1 = 6\sqrt[3]{4}$ c) $q = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, a_1 = 6\sqrt[3]{-2}$

5.3.6 W ciągu geometrycznym (a_n) mamy dane $a_2 = -1$, $q = -2$. Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: $S_n = \frac{3}{16}$

5.3.7 Wyznacz x, wiedząc że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$a_1 = 9$, $a_2 = x$, $a_3 = 1$

Odpowiedź: $x = 3$

5.3.8 Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest geometryczny? Wyznacz q.

a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$ c) $a_n = 2n^2$

Odpowiedź:

a) $q = 2$ b) $q = 9$ c) nie

5.3.9 Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), jeśli:

a) $a_1 = 8$, $2a_5 = 3a_4$, $n = 6$ b) $a_1 = 2$, $a_7 = 128$, $n = 8$

Odpowiedź:

a) 166,25 b) –510

5.3.10 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), określonego wzorem:

a) $a_n = \frac{3-2n}{4n-50}$ b) $a_n = \frac{5n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{1}{3n^2-12n-3}$ d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+7}$

Odpowiedź: a, b, d – rosnące, c – nie jest monotoniczny

5.3.11 Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 10^{n+2} - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $b_n = 10^{n+1}$, $q = 10$

5.3.12 Znajdź sumę:

a) $1 + 6 + 21 + \ldots + n(2^n - 1)$ b) $3 + 27 + 135 + \ldots + (2n-1) \cdot 3^n$

Odpowiedź:

$(n-1) \cdot 2^{n+1} - 0{,}5 \cdot (n^2 + n - 4)$ $(n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$

5.3.13 Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

5.4 Praktyczne zastosowanie ciągów (procent prosty, składany)

Teraz nauczę się obliczać podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)

Kapitalizacja odsetek[56]

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk. W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej – na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia 19-procentowego podatku od zysków kapitałowych, zwanego potocznie podatkiem Belki.

Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota. Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001 — 31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

56 www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc, 06.03.2013.

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004 — 31.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1+\frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 — brak wzoru na procent składany.

Ciekawostka

Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

ZADANIA

5.4.1 Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

5.4.2 Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym z kapitalizacją odsetek:

co miesiąc	co kwartał	co pół roku	co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.

Odpowiedź:

2253,65 zł	2251,02 zł	2247,20 zł	2240 zł

5.4.3 Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

Odpowiedź: 10982,29 zł

5.4.4 Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000 zł.

a) Bank I oferuje 14% w stosunku rocznym z roczną kapitalizacją odsetek.

b) Bank II oferuje 10% w stosunku rocznym z kwartalną kapitalizacją odsetek.

c) Bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji . Zdecydujesz się na rok czy na dwa lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

Odpowiedź:

a) po roku 68400 zł, po dwóch latach 77976 zł

b) po roku 66228,77 zł, po dwóch latach 73104,17 zł

c) po roku 60906,21 zł, po 2 latach 61826,11 zł

5.4.5 Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

a) Oblicz, jaką kwotą (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.

b) O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Odpowiedź:

a) 33043,06 zł b) o 713,80 zł

5.4.6 Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95 zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).

5.4.7 Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

5.4.8 W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?

5.4.9[57]. Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku. Bank zaproponował mu następujące oferty:

a) oprocentowanie 6% w sali rocznej z odsetkami doliczanymi po roku,

b) oprocentowanie 3,8% w skali rocznej z odsetkami doliczanymi co kwartał.

57 http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/.

c) Dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?

Odpowiedź:

a) 1049 zł b) 1031 zł c) Pierwsza o 18 zł

5.4.10 Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować w banku, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400$.

Odpowiedź: Skorzystaj z funkcji finansowej PV

=PV(6%;20;0;400) w wyniku otrzymujemy: 125 $

Z matematycznego punktu widzenia obliczyliśmy sumę ciągu geometrycznego. Ten sam wynik uzyskamy wprowadzając własną formułę: = 400/(1 + 6%) ^ 20 = 125

5.4.5 Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyłeś w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5% w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.

Odpowiedź:

Możesz skorzystać z kalkulatora kredytowego, p.: http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/kredytowy.html

prowizja: 450 zł

kwota kredytowana: 15450 zł

kwota do wypłaty: 15000 zł

suma spłat: 22007,32 zł

rata: 183,39 zł

5.4.5 Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł, oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:

a) na koniec okresu rozliczeniowego

b) na początek okresu rozliczeniowego

c) Jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

Odpowiedź:

169,35zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0))

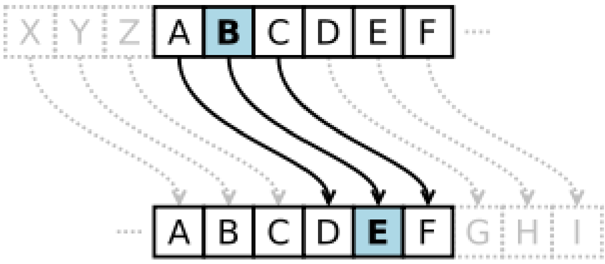
168,58 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0;0;1))

252,87 zł

Możesz skorzystać z funkcji finansowej PMT.

Ciekawostka

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻ

Szyfr: CĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻAĄB

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŻ DĆFĄ, EKTRP ŚZŃM YŹSŁ L UAGWĘ INCJ

PRACA DLA CHĘTNYCH

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza).Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

1[58] Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

a) 40° b) 50° c) 60° d) 70°

2 Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy:

a) $-\frac{3}{25}$ b) $\frac{3}{25}$ c) $-\frac{7}{25}$ d) $\frac{7}{25}$

3 Ciąg (9, x, 19) jest arytmetyczny, a ciąg (x, 42, y, z) jest geometryczny. Oblicz: x, y, z.

4[59] Który wyraz ciągu $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$ jest równy zero?

a) a_9 b) a_{18} c) a_{21} d) a_{49}

5 Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n równym:

a) $a_n = 3 \cdot 2^n$ b) $a_n = \frac{4n^2 - 9}{3 + 2n}$ c) $a_n = \frac{n+3}{2n+2}$ d) $a_n = \frac{n^2+1}{3}$

6 Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

7[60] Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_2 = 64$ b) $a_2 = 0$ c) $a_2 = -64$ d) $a_2 = 128$

8 Liczby 2; $2x$–1; 0,5 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:

a) $x = 0$ b) $x = 0$ lub $x = 1$ c) $x = 1$ d) $x = -1$

9 O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

58 Zadania 1-3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.
59 Zadania 4-6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 08.03.2013.
60 Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 08.03.2013.

10[61] Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

11 Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

a) $10000 \cdot (1{,}0075)^4$ b) $10000 \cdot (1{,}03)^4$ c) $10000 \cdot (1{,}03)^{16}$ d) $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

12 Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{12}{\sqrt{5}-1}+1$, $z = 3\sqrt{5}+2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

a) z, y, x b) y, x, z c) x, y, z d) z, x, y

13 Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

a) $S_{2n} = 8n^2 + 4n$ b) $S_{2n} = 4n^2 + 2n$ c) $S_{2n} = 4n^2 + n$ d) $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

14 Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

a) $q = 2$ b) $q = 7$ c) $q = 9$ d) $q = 28$

15 W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16[62] Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_3 = \frac{1}{2}$ b) $a_3 = -\frac{1}{2}$ c) $a_3 = \frac{3}{8}$ d) $a_3 = -\frac{3}{8}$

17 W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy:

a) $a_4 = -18$ b) $a_4 = 0$ c) $a_4 = 4{,}5$ d) $a_4 = 144$

18 Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

19[63] Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n} + 4$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

a) $a_8 = 2\sqrt{5}$ b) $a_8 = 8$ c) $a_8 = 5\sqrt{2}$ d) $a_8 = \sqrt{12}$

---

61 10-15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
62 Zadania 16-18: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 09.03.2013.
63 Zadania 19-21: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013..

20 Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4\sqrt{2}$ c) $a = 8 - 2\sqrt{2}$ d) $a = 8 + 2\sqrt{2}$

21 Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$. Wyznacz wzór na n–ty wyraz tego ciągu.

22[64] Liczby 12, 18, $2x + 1$ są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

a) $x = 11\frac{1}{2}$ b) $x = 12$ c) $x = 12\frac{1}{2}$ d) $x = 13$

23 W ciągu arytmetycznym a_n dane są $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 30 b) 110 c) 220 d) 2046

24 Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$.

25[65] Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy:

a) $a_1 = \frac{2}{3}$ b) $a_1 = \frac{4}{9}$ c) $a_1 = \frac{3}{2}$ d) $a_1 = \frac{9}{4}$

26 Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy:

a) $a_4 + a_1 = a_{10}$ b) $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ c) $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ d) $a_5 + a_7 = 2a_8$

27 Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz: x i y.

28[66] W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

a) 13 b) 0 c) –13 d) –26

29 W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy:

a) 8 b) 2 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{2}$

64 Zadania 22-24: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
65 Zadania 25-27: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
66 Zadanie 28, 29: http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 10.03.2013.

30[67] Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności 102 dm^3 wypływa w pierwszej minucie 5 dm^3 cieczy, a w każdej następnej o 0,25 dm^3 mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?

Odpowiedź: W 17 minucie.

31 Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:

a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w poprzednim miesiącu.

b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.

Odpowiedź: a) $S_{12} = 8190$ zł, b) $S_{12} = 7958{,}56$zł; powinien wybrać propozycję a).

32 Wyznacz liczbę składników w sumie 1 + 4 + 7 + 10 +…+ 151 i wyznacz tę sumę.

Odpowiedź: 51 składników, 3876.

33 Oblicz, dla jakiej wartości k liczby 5, $(k+1)^2$, $2k + 9$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?

Odpowiedź: = –3.

34 Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.

a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?

b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?

Odpowiedź: rozbicie namiotu kosztuje 234,5 zł; 350 zł wystarczy na 25 dni.

35 Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby x, y, z, t, aby liczby 4, x, y, z, t, 8 tworzyły ciąg geometryczny.

Odpowiedź: $x = 4\sqrt[5]{2}, y = 4\sqrt[5]{4}, z = 4\sqrt[5]{8}, t = 4\sqrt[5]{16}$.

67 Zadania 30-37: Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

36 Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnicę tworzącą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 10, 7, 4 lub 2, 7, 12.

37 Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: $(31, 31, 31)$ lub $(3, 15, 75)$.

Bibliografia

1 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.

2 Testy maturalne. Matematyka 2010, Wydawnictwo Aksjomat.

3 Kalina R., Szymański T., Zbiór zadań z matematyki, Wydawnictwo Sens.

4 Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.

5 Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., Arkusze egzaminacyjne, Wydawnictwo Szkolne Omega.

6 Cewe A., Nahorska H., Matura z matematyki od 2010 roku, Wydawnictwo Podkowa.

7 Gwizdak D., Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.

8 Antek M., Belka K., Grabowski P., Prosto do matury, Wydawnictwo Nowa Era.

9 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era.

10 Jenike M., Fizyka, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

11 Wojciechowska M., Unieszowska J., Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009, Operon.

12 Jaworski R., Fizyka. Matura 2012, Operon.

13 Fischer R. Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.

14 Nowakowski J., Borowski K., Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym, Wydawnictwo Difin.

Źródła internetowe:

1. www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html
2. www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html
3. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
4. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
5. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
6. pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
11. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
12. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
15. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
16. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
21. www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

27. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
28. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
29. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
31. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
32. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
34. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
35. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
37. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
38. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
39. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
40. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
43. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
44. www.bossa.pl
45. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
46. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
47. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
48. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
49. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
50. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
51. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
52. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
53. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
54. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf

Matematyka

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

1.1 Równanie prostej na płaszczyźnie

Teraz nauczę się:
Wyznaczać równanie prostej w postaci kierunkowej przechodzącej przez dany punkt.

Linia prosta lub prosta – to jedno z podstawowych pojęć geometrii[1].

Równaniem prostej k nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu, który do tej proste należy, ale nie jest spełnione przez współrzędne punktów leżących poza prostą k.

Możemy wyznaczać równanie prostej:

- przechodzącej przez dany punkt,
- przechodzącej przez dany punkt i nachylonej do osi OX pod danym kątem,
- przechodzącej przez dwa dane różne punkty.

Równanie prostej można zapisać w postaci:

Postać ogólna

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$

A, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej.

Np. $3x - 5y + 7 = 0$, $-\frac{1}{2}x + 12y + 2 = 0$, $0{,}25x - \frac{1}{3}y - 4 = 0$

Postać kierunkowa

$\boldsymbol{y = ax + b}$

a – współczynnik kierunkowy (kątowy) prostej, b – wyraz wolny.

Współczynnik a można obliczyć jako tangens kąta zawartego pomiędzy wykresem prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych a osią OX: $\boldsymbol{a = tg\alpha}$.

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29, 15.03.2013.

W równaniu prostej x i y oznaczają współrzędne dowolnego punktu P należącego do płaszczyzny. Od ich wartości zależy położenie prostej w układzie współrzędnych.

Punkt P należy do prostej tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Przykład 1

Przekształć równanie zapisane:

a) z postaci kierunkowej na postać ogólną

b) z postaci ogólnej na postać kierunkową

Rozwiązanie:

a) Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = 3x - 5$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę: $y - 3x + 5 = 0$

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną: $-3x + y + 5 = 0$

b) Aby przekształcić równanie z postaci ogólnej na kierunkową, wystarczy z zapisu ogólnego wyznaczyć y.

Dane mamy równanie w postaci ogólnej: $2x - 3y + 6 = 0$

Wyznaczamy y: $-3y = -2x - 6 \, /:(-3)$

$y = -\dfrac{2}{3}x + 2$

Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Jeżeli w równaniu ogólnym nie występuje zmienna y, to wyznaczamy x i otrzymujemy równanie prostej prostopadłej do osi OX.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt $A = (x_1, y_1)$ można zapisać w postaci $y = a(x - x_1) + y_1$

Przykład 2

Wiedząc, że współczynnik kierunkowy prostej wynosi 5, napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-2{,}6)$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

$y = 5\big(x - (-2)\big) + 6$

$y = 5(x + 2) + 6$

$y = 5x + 10 + 6$

$y = 5x + 11$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (-1,4)$ i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\alpha = 60°$, to $tg60° = \sqrt{3}$.

Równanie prostej ma więc postać: $y = \sqrt{3}x + b$.

Wiemy, że do prostej należy punkt B, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$4 = \sqrt{3} \cdot (-1) + b$

$b = 4 - \sqrt{3}$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$.

ZADANIA

1.1.1 Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym i przechodzącej przez punkt C. Otrzymane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej.

a) $C = (-3,-2), a = -\frac{1}{3}$

b) $C = (0,3), a = -1$

c) $C = (2,5), a = 3$

d) $C = (-2,-2), a = -4$

Odpowiedź:

a) $\frac{1}{3}x + y + 1 = 0$

b) $x + y - 3 = 0$

c) $-3x + y + 1 = 0$

d) $4x + y + 6 = 0$

1.1.2 Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:

a) $P = (-3,4), \alpha = 45°$

b) $P = (6,15), \alpha = 120°$

c) $P = (-1,5), \alpha = 135°$

d) $P = (2,-3), \alpha = 60°$

Odpowiedź:

a) $y = x + 7y = x + 7$

b) $y = -\sqrt{3}x + 15 + 6\sqrt{3}$

c) $y = -x + 4y = -x + 4$

d) $y = \sqrt{3}x - 3 - 2\sqrt{3}$

1.1.3 Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = -2x + 3$. Wyznacz liczbę a, jeśli:

a) $f(2a - 4) = 3a + 8$ b) $f(4a + 1) = f(5a - 3)$ c) $f(8 - 4a) = \frac{22a-23}{3}$

Odpowiedź:

a) $a = \frac{3}{7}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$

1.2 Równoległość i prostopadłość prostych, a ich współczynnik kierunkowy

Teraz nauczę się:

- Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
- wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt.

Dwie proste są równoległe, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste k i l dane wzorami:

$$(\boldsymbol{k}) \quad \boldsymbol{y = a_1x + b_1}$$
$$(\boldsymbol{l}) \quad \boldsymbol{y = a_2x + b_2}$$

są **równoległe,** jeżeli:

$$\boldsymbol{a_1 = a_2}$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$\boldsymbol{a_1 \cdot a_2 = -1}$$

Przykład 1

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2,4)$ i równoległej do prostej o równaniu: $3x - 2y + 4 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$$3x - 2y + 4 = 0$$
$$-2y = -3x - 4 \,/ : (-2)$$
$$y = \frac{3}{2}x + 2$$
$$a_1 = \frac{3}{2}$$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Z warunku równoległości wiadomo, że $a = a_1 = \frac{3}{2}$.

Punkt P leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4$, więc
$y = \frac{3}{2}(x + 2) + 4 = \frac{3}{2}x + 3 + 4 = \frac{3}{2}x + 7$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{3}{2}x + 7$.

Przykład 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (3, -2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu: $3x + 4y - 7 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$$3x + 4y - 7 = 0$$

$$4y = -3x + 7 \;/:4$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

$$a_1 = -\frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Z warunku prostopadłości wiadomo, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, stąd

$$-\frac{3}{4} \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \; a_2 = \frac{4}{3}$$

Punkt B leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{4}{3}(x - 3) + (-2)y = \frac{4}{3}(x - 3) + (-2)$, więc

$$y = \frac{4}{3}x - 4 - 2 = \frac{4}{3}x - 6$$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{4}{3}x - 6$.

ZADANIA

1.2.1 Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej:

a) $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$

b) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (2,2)$

e) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

f) $y = -3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (3,3)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $x + y - 6 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (1, -2)$

i) $2x + 2y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-4, -3)$

j) $x - y + 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-2, -5)$

k) $x + y - 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-6,8)$

Odpowiedź:

a) $y = -\frac{1}{3}x + 5$

b) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

c) $y = \frac{3}{2}x - 4$

d) $y = -3x + 8$

e) $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

f) $y = \frac{1}{3}x + 2$

g) $x + 2y + 2 = 0$

h) $x - y - 3 = 0$

i) $x - y - 3 = 0$

j) $x + y + 7 = 0$

1.2.2 Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej:

a) $y = 2x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (2, 3)$

b) $y = -5x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (2,1)$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{2}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6,1)$

e) $y = 4x + 6$ i przechodzi przez punkt $A = \left(\frac{1}{4}, 5\right)$

f) $y = -x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (-5,2)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $y-0{,}5=0{,}3x$ i przechodzi przez punkt $A=\left(10,-\frac{1}{2}\right)$

i) $x+y+3=0$ i przechodzi przez punkt $A=(6{,}1)$

j) $3x-y=-9$ i przechodzi przez punkt $A=(-2{,}6)$

Odpowiedź:

a) $y=2x-1$ b) $y=-5x+11$ c) $y=-\frac{1}{2}x+4$

d) $y=\frac{2}{3}x-3$ e) $y=4x+4$ f) $y=-x-3$

g) $y=2x-11$ h) $y=0{,}3x-3{,}5$ i) $x+y+7=0$

j) $3x-y+12=0$

1.2.3 Dana jest prosta l o równaniu $y=\frac{3}{2}x-\sqrt{2}$ oraz punkt $A=(-3,-2)$. Wyznacz wzór funkcji liniowej f wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do prostej l, punkt A należy do wykresu funkcji f.

Odpowiedź: $y=-\frac{2}{3}x-4$.

1.2.4 Określ wzajemne położenie prostych:

a) $18x+3y-1=0$ $y=\frac{1}{3}-6x$ b) $y=\frac{7}{8}x+2$ i $7x-8y+24=0$

c) $6x+2y=4$ i $y=\frac{1}{3}x+2$ d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ i $y=3x+4$

e) $x-2y+3=0$ i $2x+y-5=0$ f) $3x-6y+7=0$ i $y=\frac{1}{2}x$

g) $3x-6y+7=0$ i $y=-2x+4$

Odpowiedź:

a) proste równoległe b) proste równoległe

c) proste prostopadłe d) proste przecinające się

e) proste prostopadłe f) proste równoległe

g) proste prostopadłe

1.2.5 Proste k i l są prostopadłe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l:2x-9y+6=0, k:y=ax+6$

b) $l:y=-\frac{1}{3}x+2, k:y-ax=4$

c) $l:2ax-y+1=0,\ k:x+2y-6=0$

Odpowiedź:

a) $a=-\frac{9}{2}$ b) $a=3$ c) $a=-1$

1.2.6 Proste l i m są równoległe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: y = 2x - 5 = 0, m: y = (3-a)x + 4$ b) $l: y = 3x + 6$, $k: y - ax = 4$

c) $l: y = (a+4)x + 5$, $m: y = 4 + 10x$ d) $l: y = ax + 6$, $m: y = 6 + 19x$

Odpowiedź:

a) $a = 1$ b) $a = 3$ c) $a = 6$ d) $a = 19$

1.3 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Teraz nauczę się:

- Obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- Wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- Sprawdzać, czy punkty są współliniowe.

Punkt przecięcia dwóch prostych

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P. Punkt przecięcia P leży na prostej k i na prostej l, zatem jego współrzędne muszą spełniać jednocześnie równania obu prostych. Współrzędne punktu P otrzymujemy, rozwiązując układ równań.

Przykład 1

Wyznacz punkt przecięcia się prostych danych równaniami: $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$.

Z podanych wzorów funkcji tworzymy układ dwóch równań:

$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -5x + 9 \end{cases}$ wyznaczamy z niego x oraz y.

$3x - 7 = -5x + 9$

$3x + 5x = 9 + 7$

$8x = 16 \ /:8$

$x = 2$, więc

$y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Odpowiedź:

Proste określone równaniami $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$ przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Jeśli mamy dane dwa różne punkty na płaszczyźnie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, możemy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Możemy napisać równanie takiej prostej, rozwiązując układ równań lub skorzystać z gotowego wzoru.

Poniższe przykłady przedstawiają obie metody.

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}6)$.

Szukamy równania prostej $y = ax + b$

Prosta przechodzi przez punkty $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}9)$, a to oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają równanie prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = -3a + b \\ 9 = a + b \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania i otrzymujemy:

$$6 - 9 = -3a - a + b - b$$

$$-3 = -4a \ /: (-3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Skoro $9 = a + b,$ to $b = 9 - \frac{4}{3} = 7\frac{2}{3}$

Szukane równanie prostej, to $y = \frac{4}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

Określenie wzoru funkcji przechodzącej przez dwa dane punkty za pomocą wzorów

Mając dane dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, możemy obliczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Gdy mamy współczynnik kierunkowy prostej i punkt, który do tej prostej należy, to możemy już napisać jej wzór, korzystając z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$.

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, opisuje wzór:

$$\boldsymbol{(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0}$$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-2{,}3)$ i $B = (4{,}2)$.

Rozwiązanie:

I sposób :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$(y-3)(4-(-2)) - (2-3)(x-(-2)) = 0$$
$$(y-3)\ (4+2) - (-1)\ (x+2) = 0$$
$$(y-3)\cdot(6) + 1\cdot(x+2) = 0$$
$$6y - 18 + x + 2 = 0$$
$$6y = -x + 16$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{16}{6}$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$$

II sposób:

1. Zapisujemy równanie szukanej prostej w postaci kierunkowej, czyli: $y = ax + b$.
2. W kolejnych krokach będziemy wyznaczać współczynniki a i b.
3. Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do równania prostej:

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

4. Podstawiamy współrzędne drugiego punktu do równania prostej: $y_B = a \cdot x_B + b$
5. Rozwiązujemy układ równań

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

$$y_B = a \cdot x_B + b$$

otrzymując szukane parametry a i b.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \ /\cdot(-1) \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 = 2a - b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$-1 = 6a \ /:6$$
$$a = -\frac{1}{6}$$

Podstawiamy do pierwszego równania z układu równań za $a = -\frac{1}{6}$, dzięki temu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b, którą obliczamy:

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + b$$

$$3 = \frac{1}{3} + b$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Otrzymane równanie ma postać: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$.

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2{,}4)$ i $B = (-3{,}5)$. Znajdź prostą przechodzącą przez te punkty.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-4}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Korzystamy z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$ i piszemy równanie prostej:

$$y = -\frac{1}{5}(x - (-3)) + (-3) = -\frac{1}{5}(x+3) - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3$$

Ostatecznie prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{3}{5}$.

ZADANIA

1.3.1 Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty:

a) A = (–2,–10), B = (1,–1) b) A = (–3,9), B = (2,–1) c) A = (0,6), B = (6,0)

d) A = (–2,–1), B = (3,0) e) A = (–12,4), B = (3,1) f) A = (8,4), B = (1,–1)

Odpowiedź:

a) $a = 3$ b) $a = -\frac{8}{5}$ c) $a = -1$

d) $a = \frac{1}{5}$ e) $a = -\frac{1}{5}$ f) $a = \frac{5}{7}$

1.3.2 Oblicz brakujące współrzędne punktów, jeśli wiadomo, że należą do danej prostej:

a) $y = \frac{3}{2}x + 2$, $P = (-2, y)$ b) $2x - 3y = 2$, $P = (\frac{1}{2}, y)$

c) $y = 9x - 3$, $P = (x, -6)$ d) $\frac{x}{-7} + \frac{2y}{7} = 1$, $P = (x, -\frac{2}{3})$

Odpowiedź:

a) $y = -1$ b) $y = -\frac{1}{3}$ c) $x = -1$ d) $x = -8\frac{1}{3}$

1.3.3 Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a wiedząc, że do tej prostej należy punkt M:

a) $a=0,\ M=(-2,-3)$

b) $a=3,\ M=(6,-2)$

c) $a=-\frac{3}{4},\ M=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

d) $a=-5,\ M=(2,3)$

Odpowiedź:

a) $y=-3$

b) $y=3x-20$

c) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

d) $y=-3x+13$

1.3.4 Napisz równanie prostej, do której należą punkty:

a) $A=(-1,7),\ B=(3,-5)$

b) $A=(-4,4),\ B=(2,7)$

c) $A=(-5,0),\ B=(5,-6)$

d) $A=\left(1,\frac{1}{12}\right),\ B=\left(3,-\frac{17}{12}\right)$

e) $A=(-2,6), B=\left(\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$

f) $A=(2,1),\ B=(-4,2)$

g) $A=(2,6),\ B=(-1,-7)$

h) $A=(2,4),\ B=(5,-5)$

Odpowiedź:

a) $y=-3x+4$

b) $y=\frac{1}{2}x+6$

c) $y=-\frac{3}{5}x-3$

d) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}$

e) $y=-3x$

f) $y=-\frac{1}{6}x+1\frac{1}{3}$

g) $y=4\frac{1}{3}x-2\frac{2}{3}$

h) $y=-3x+10$

1.3.5 Sprawdź, czy punkty są współliniowe:

a) $A=(2,1), B=(4,5), C=(-3,-9)$

b) $A=(-1,-6), B=(0,-6), C=(12,0)$

c) $A=(-5,3), B=(2,3), C=(4,3)$

d) $A=(2,0), B=(2,-4), C=(2,8)$

Odpowiedź:

a) tak

b) nie

c) tak

d) tak

1.4 Odległość punktów

Teraz nauczę się:

- Obliczać odległość dwóch punktów;
- Odległość punktu od prostej.

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Odległość punktu A od B liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Przykład 1

Oblicz odległość punktów A i B od siebie, gdy $A = (7,\ 6)$, $B = (-5, 4)$.

Podstawiamy do wzoru:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{144 + 4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Odpowiedź: Odległość punktu A od punktu$B$ wynosi $2\sqrt{37}$.

Odległość punktu od prostej to w istocie długość odcinka, którego początkiem jest dany punkt i opuszczonego na prostą pod katem prostym.

Dana jest prosta k o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ i punkt $P = (x_1, x_2)$, który leży poza prostą k.

Odległość punktu P od prostej k wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Obliczając odległość punktu od prostej, możemy korzystać z powyższego wzoru lub wykonać następujące kroki:

1. Napisać wzór prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.
2. Obliczyć punkt przecięcia danej prostej i prostej do niej prostopadłej.
3. Obliczyć długość odcinka, którego końce to dany w zadaniu punkt i punkt obliczony w punkcie drugim. Długość tego odcinka jest szukaną przez nas odległością punktu A od prostej k.

Przykład 2

Dane są: prosta $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2{,}3)$. Obliczmy odległość punktu A od prostej k.

Rozwiązanie:

1. Napiszmy wzór prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.
   Jeśli prosta l jest prostopadła do prostej k, to współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $-\frac{1}{2}$.

Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (1,3)$, więc:

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Równanie prostej $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Obliczamy punkt przecięcia prostej k i prostej do niej prostopadłej.
Rozwiązujemy układ równań złożony ze wzorów obu funkcji

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x = 0{,}4$$

$$y = 2 \cdot 0{,}4 + 3 = 3{,}8$$

Punkt przecięcia prostych k i l ma współrzędne $B = (0{,}4; 3{,}8)$

3. Obliczamy długość odcinka AB, czyli odległość punktu A od prostej k.

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}4 - 2)^2 + (3{,}8 - 3)^2} = \sqrt{2{,}56 + 9}$$
$$= \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$$

Odpowiedź: Odległość punktu A od prostej k wynosi $3{,}4$.

Przykład 3

Korzystając z danych z przykładu 2, obliczymy odległość punktu A od prostej k, korzystając ze wzoru $d(P, k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

A, B i C to współczynniki prostej z jej postaci ogólnej, natomiast x_1, y_1 to współrzędne danego punktu.

Mamy dane: prostą $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$$y = 2x + 3$$

$$2x - y + 3 = 0$$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców:

a) $A = (1,1), B = (4,7)$

b) $A = (-5,2), B = (3,2)$

c) $A = (2,-5), B = (-3,4)$

d) $A = (-1,-4), B = (8,4)$

e) $A = (2,-2), B = (4,5)$

f) $A = (3,-5), B = (4,4)$

g) $A = (6,8), B = (10,0)$

h) $A = (8,0), B = (-2,5)$

Odpowiedź:

a) $3\sqrt{5}$

b) 8

c) $\sqrt{117}$

d) $\sqrt{165}$

e) $\sqrt{53}$

f) $5\sqrt{2}$

g) $4\sqrt{5}$

h) $5\sqrt{5}$

1.4.2 Oblicz odległość punktu A od prostej k:

a) $A = (1,4), k: 4x - 2y - 16 = 0$

b) $A = (-5,4), k: y = -2x + 1$

c) $(-2,3), k: 3x - 4y + 2 = 0$

Odpowiedź:

a) $2\sqrt{5}$

b) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{16}{5}$

1.4.3 W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-4,2)$, $B = (5,4)$.

a) Oblicz odległość punktu $C = (-1,4)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B.

b) Uzasadnij, że jeśli $m \neq 0$, to punkty A, B oraz punkt $D = (-1, m)$ są wierzchołkami trójkąta.

Odpowiedź:

a) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

b) 3 punkty są wierzchołkami trójkąta, jeżeli nie leżą na jednej prostej. Musimy zatem sprawdzić, czy punkt $D = (-1, m)$ nie leży na prostej AB. Ponieważ wyliczyliśmy już równanie tej prostej, nie ma z tym problemu (wstawiamy współrzędne tego punktu do równania prostej i patrzymy, czy nie wyjdzie 0): $2 \cdot (-1) - 3m + 2 = 3m \neq 0$.

1.5 Współrzędne środka odcinka

Teraz nauczę się:

- Wyznaczać współrzędne środka odcinka.

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Środek odcinka, mając dane współrzędne jego końców A i B. liczymy ze wzoru:

$$\boldsymbol{S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

Przykład 1

Podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach: A = (3, –5), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3 + 6}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) = (4{,}5;\ -1)$$

Przykład 2

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S = (-3, 6)$. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B = (4, -2)$.

Zajmijmy się osobno współrzędną x i osobno współrzędną y.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -3$$

$$\frac{x_1 + 4}{2} = -3$$

$$x_1 + 4 = -6$$

$$x_1 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 6$$

$$\frac{y_1 + (-2)}{2} = 6$$

$$y_1 - 2 = 12$$

$$y_1 = 14$$

Odpowiedź: Współrzędne punktu A wynoszą $(10{,}14)$.

ZADANIA

1.5.1 Podaj środki odcinków, których końce mają współrzędne:

a) $A = (-8,5), B = (0,11)$
b) $A = (3,-5), B = (-13,7)$
c) $A = (-2,3), B = (4,-9)$
d) $A = (1,7), B = (-5,-2)$
e) $A = (5,3), B = (1,3)$
f) $A = (-6,1), B = (4,3)$
g) $A = (-4,-8), B = (2,1)$
h) $A = (-4,5), B = (8,7)$
i) $A = (-4,-7), B = (10,-3)$
j) $A = (0,6), B = (-12,16)$

Odpowiedź:

a) $S = (-4,8)$
b) $S = (-5,1)$
c) $S = (1,-3)$
d) $S = \left(-2, \frac{5}{2}\right)$
e) $S = (3,3)$
f) $S = (-1,2)$
g) $S = \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$
h) $S = (2,6)$
i) $S = (3,-5)$
j) $S = (-6,11)$.

1.5.2 Dany jest odcinek o końcach w punktach $A = (-2,4)$ i $B = (6,-2)$.

a) Wyznacz współrzędne środka odcinka.
b) Oblicz długość tego odcinka.
c) Wyznacz równanie prostej równoległej do odcinka przechodzącej przez punkt $C = (0,3)$.

Odpowiedź:

a) $S = (2,1)$
b) $|AB| = 10$
c) $y = \frac{4}{3}x + 3$.

1.5.3 Dany jest odcinek $|AB|$, w którym dany jest środek S i koniec B. Wyznacz współrzędne punktu A.

a) $S = (2,-5), B = (9,-3)$
b) $S = (-3,6), B = (2,5)$
c) $S = (2,4), B = (5,8)$
d) $S = (2,7), B = (-3,5)$
e) $S = (2,1), B = (-5,6)$

Odpowiedź:

a) $A = (-5,-7)$
b) $A = (-8,7)$
c) $A = (-1,0)$
d) $A = (7,9)$
e) $A = (9,-4)$.

1.5.4 Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, jeżeli środki jego boków mają współrzędne: $P = (1,3), Q = (-5,4), R = (-6,7)$.

Odpowiedź: $A = (0,6);\ B = (2,0);\ C = (-12,8)$.

1.5.5 Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek o końcach $A = (29, -15)$ i $B = (45,13)$ w stosunku $|AP|:|PB| = 1:3$.

Odpowiedź: $P = (33, -8)$.

1.5.6 W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

Odpowiedź: $y = -2x + 14$.

1.5.7 Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A = (4,6), B = (3,5)$ b) $A = (3,1), B = (-4, -8)$ c) $A = (3,1), B = (-1,7)$

d) $A = (-1,3), B = (1,1)$ e) $A = (1,1), B = (5,5)$ f) $A = (-2,4), B = (6,8)$

Odpowiedź:

a) $y = -x + 9$ b) $y = -\frac{7}{9}x - 5\frac{2}{9}$ c) $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$

d) $y = x + 2$ e) $y = -x + 6$ f) $y = -2x + 10$

1.6 Równanie okręgu*

Teraz nauczę się:

- Posługiwać równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisywać koła za pomocą nierówności;
- Wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu.

Równanie okręgu

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r.

Niech punkt $P = (a, b)$ leży w dowolnym miejscu na okręgu. Zapiszmy teraz zależność dowolnego punktu P leżącego na okręgu i jego odległości od środka okręgu.

$|OP| = r$, i na mocy definicji odległości dwóch punktów, otrzymujemy:

$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$

$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$ $/\cdot^2$

$r^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$, ma postać:

$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ **(postać kanoniczna)**

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ **(postać ogólna), gdzie $r^2 = a^2 + b^2 - c$**

Przykład 1

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 6)$ i promieniu: 4

$(x - (-2)) + (y - 6) = 4^2$

$(x + 2) + (y - 6) = 16$

Przykład 2

Podaj wzór okręgu o środku w punkcie $S = (-2, -7)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A = (-6, -4)$.

Mamy dane współrzędne środka okręgu, które możemy podstawić do wzoru:

$(x + 2)^2 + (x + 7)^2 = r^2$

Musimy obliczyć promień okręgu. Możemy to zrobić, podstawiając współrzędne punktu $A = (-6, -4)$ do wzoru:

$(-6 + 2)^2 + (-4 + 7)^2 = r^2$

$(-4)^2 + 3^2 = r^2$

$16 + 9 = r^2$

$25 = r^2$

$r = 5$

Równanie okręgu ma wtedy postać: $(x + 2)^2 + (x + 7)^2 = 25$.

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli a, b oraz r.

Przykład 3

Przekształć równanie okręgu, które dane jest w postaci ogólnej, na postać kanoniczną.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

Szukamy najpierw współrzędnych środka okręgu.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

$$-2a = 4 \qquad\qquad -2b = -6$$

$$a = -2 \qquad\qquad b = 3$$

Obliczamy długość promienia wiedząc, że $r^2 = a^2 + b^2 - c$

$r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - 4 = 4 + 9 - 4 = 9$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:

$(x+2)^2+(y-3)^2=9$

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ w punkcie $P=(-2{,}3)$.

$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ – okrąg o środku w punkcie $S=(3{,}4)$ i promieniu $r=1$.

Prosta styczna do okręgu w punkcie P jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty: $S=(3{,}4)$ i $P=(-2{,}3)$.

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty:

$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$

$\big(y-(-2)\big)(-2-3)-(3-4)(x-3)=0$

$(y+2)\cdot(-5)-(-1)(x-3)=0$

$-5y-10+x-3=0$

$x-5y-13=0$

$y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$

Prosta styczna do okręgu w punkcie A jest prostopadła do prostej $y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$, więc jej równanie to: $y=-5x+b$.

Skoro punkt P należy do prostej $y=-5x+b$, to:

$3=-5\cdot(-2)+b \ \Rightarrow b=-7$

Równanie stycznej do okręgu ma postać: $y=-6x-7$.

Koło – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu na tej płaszczyźnie (środka koła) nie przekracza pewnej wartości (promienia koła).

Koło w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisane wzorem:

$\boldsymbol{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq r^2}$

gdzie $r>0$ – promień koła, (x_0,y_0) – współrzędne środka koła[2]

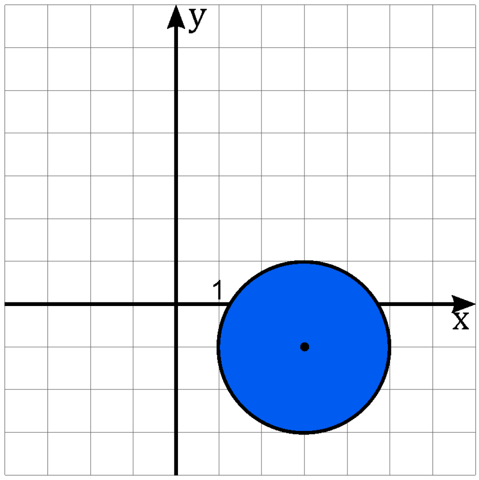
Przykład 5

Narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$(x-3)^2+(y+1)^2\leq 4$

Nierówność opisuje koło o środku w punkcie $S=(3,-1)$ i promieniu $r=2$.

2 www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o, 19.02.2013.



ZADANIA

1.6.1 Wyznacz środek i długość promienia okręgu:

a) $(x-4)^2+y^2=4$ b) $x^2+(y+3)^2=9$ c) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

d) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ e) $(x+6)^2+(y+10)^2=64$ f) $(x-3)^2+(y+5)^2=8$

Odpowiedź:

a) $S=(4{,}0)$, $r=2$ b) $S=(0,-3)$, $r=3$ c) $S=(2,-4)$, $r=5$

d) $S=(2{,}0-1)$, $r=2$ e) $S=(-6,-10)$, $r=8$ f) $S=(3,-5)$, $r=2\sqrt{2}$

1.6.2 Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

a) $S=(-4{,}6), r=5$ b) $S=(1{,}2), r=3$ c) $S=(0{,}0), r=\sqrt{2}$

d) $S=(-4{,}1), r=\sqrt{7}$ e) $S=(6,-2), r=1$ f) $S=(0{,}1), r=2$

Odpowiedź:

a) $(x+4)^2+(y-6)^2=25$ b) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ c) $x^2+y^{2^2}=2$

d) $(x+4)^2+(y-1)^2=7$ e) $(x-6)^2+(y+2)^2=1$ f) $x^2+(y-1)^2=4$

1.6.3 Podaj równanie okręgu o ośrodku w punkcie $S=(6,-11)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A=(6,-1)$.

Odpowiedź: $(x-6)^2+(y+11)^2=100$

1.6.4 Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt przecięcia prostych $7x-y-3=0$ i $4y-3x-13=0$ i do którego należy punkt $P=(5{,}6)$.

Odpowiedź: $(x-1)^2+(y-4)^2=20$.

1.6.5 Zapisz wzór okręgu za pomocą postaci kanonicznej:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 27 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Odpowiedź:

a) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 7$

b) $x^2 + y^2 = 3$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$

d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

1.6.6 Punkt $K = (-1,9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $L = (2,0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Odpowiedź: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

1.6.7 Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $S = (0,3)$ i promieniu $r = \sqrt{6}$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$.

Odpowiedź: Okrąg z prostą nie ma punktów wspólnych.

1.6.8 Napisz nierówność, która opisuje koło o promieniu r i środku w punkcie S:

a) $S = (-1,5), r = 4$

b) $S = (-3,0), r = \sqrt{3}$

c) $S = (-1,-2), r = \sqrt{2}$

d) $S = \left(4,\frac{1}{2}\right), r = 3$

Odpowiedź:

a) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 \leq 16$

b) $(x + 3)^2 + y^2 \leq 3$

c) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 2$

d) $(x - 4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 9$

1.6.9 Określ położenie punktów $A = (1,0), B = (3,3), C = (4,-1)$ względem koła o środku w punkcie $S = (-1,3)$ i promieniu $r = 4$.

Odpowiedź: Punkty A i B należą do koła, punkt C leży poza kołem.

1.6.10 Oblicz odległość punktu A od środka koła $(x - 3)^2 + y^2 \leq 9$ oraz określ położenie punktu A względem tego koła, jeżeli:

a) $A = (3,-3)$

b) $A = (4,2)$

c) $A = (-2,-3)$

Odpowiedź:

a) $d = 3$, punkt należy do koła

b) $d = \sqrt{5}$, punkt należy do koła

c) $d = 6$, punkt nie należy do koła

1.6.11 Przedstaw w prostokątnym układzie współrzędnych figurę

a) $F = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x - 2y + 2 < 0\}$

b) $F = \left\{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge (x-7)^2 + (y+2)^2 \leq 36 \wedge (x-5)^2 + y^2 \geq 4\right\}$

c) $F = \left\{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge (x-2)^2 + y^2 > 16 \wedge (x-6)^2 + y^2 < 4\right\}$

Odpowiedź:

1.7 Symetria osiowa i środkowa

Teraz nauczę się:

- Znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Symetria – słowo greckie, oznaczające regularny układ, harmonię między częściami całości.

Świat jest pełen symetrii, obcujemy z nią na co dzień: w świecie roślinnym, w budowie organizmów żywych, w sztuce, w budownictwie, w technice i w geometrii.

Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A', leżący:

- na prostej prostopadłej do tej prostej k i przechodzącej przez punkt A;
- w tej samej odległości od prostej k, co punkt A;
- po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A[3].

Symetrię osiową względem prostej k oznaczamy S_k.

Twierdzenie

Symetria osiowa jest izometrią. Symetria osiowa, jak każda izometria, zachowuje kształt figury i jej wymiary.

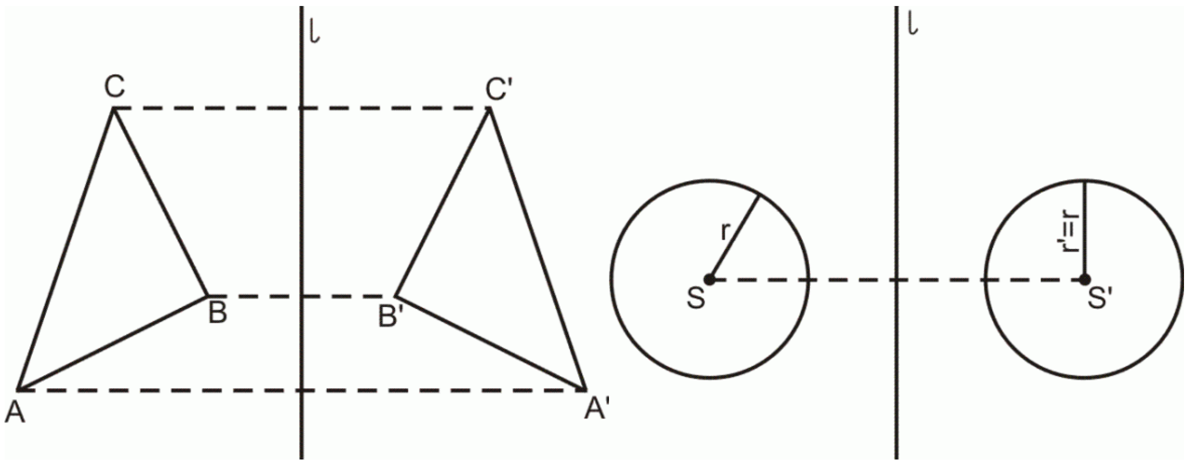
Izometria – przekształcenie geometryczne (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje odległość punktów, czyli odległość między dwoma dowolnymi punktami A i B jest równa odległości między ich obrazami A' i B'.

W symetrii osiowej:

- Obrazem trójkąta względem dowolnej prostej jest trójkąt do niego przystający.

3 www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.

- Obrazem okręgu względem dowolnej prostej jest okrąg o tym samym promieniu.
- Obrazem odcinka jest odcinek takiej samej długości.
- Obrazem prostej jest prosta.



Rysunek 1-1. Przykłady figur symetrycznych

Prostą, względem której figura jest sama do siebie symetryczna, nazywamy **osią symetrii** tej figury. Natomiast figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną.**

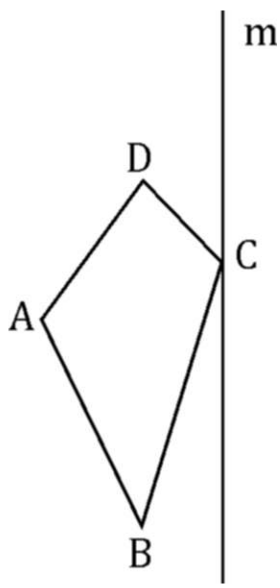
Przykład 1

Figury osiowosymetryczne to, np.:

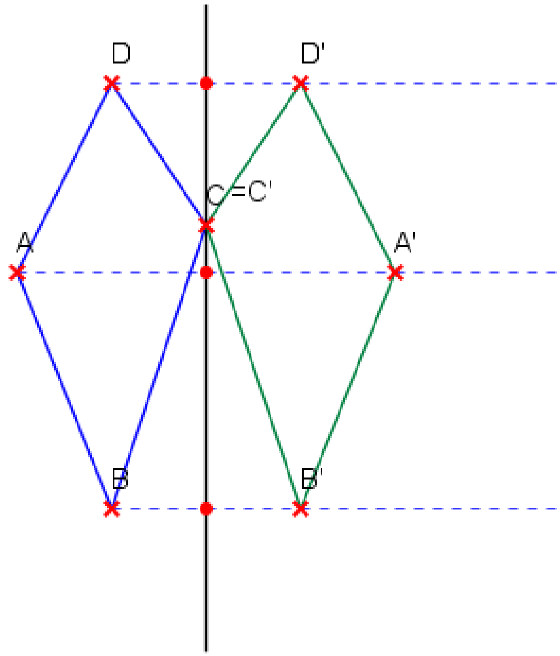
- Odcinek – 2 osie symetrii.
- Kwadrat – 4 osie symetrii.
- Okrąg (koło) – nieskończenie wiele osi symetrii.
- Kąt – 1 oś symetrii (prosta zawierająca dwusieczną kąta).
- Trójkąt równoboczny – 3 osie symetrii.

Przykład 2

Wyznacz konstrukcyjnie obraz figury w symetrii względem danej prostej.



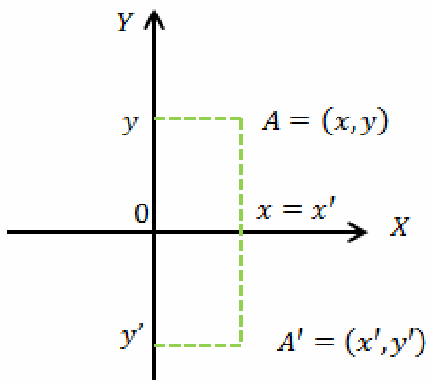
1. Prowadzimy proste prostopadłe do prostej m, przechodzące przez punkty A, B, C, D.
2. Za pomocą cyrkla mierzymy odległość punktu A od prostej m i odkładamy taki sam odcinek po przeciwnej stronie prostej, i otrzymujemy punkt A' symetryczny do punktu A.
3. Analogicznie postępujemy z pozostałymi punktami.
4. Łączymy punkty $A', B', C' D'$ i otrzymujemy figurę symetryczną do danej względem prostej m.



Rysunek 1-2. Figury symetryczne

Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi OX.

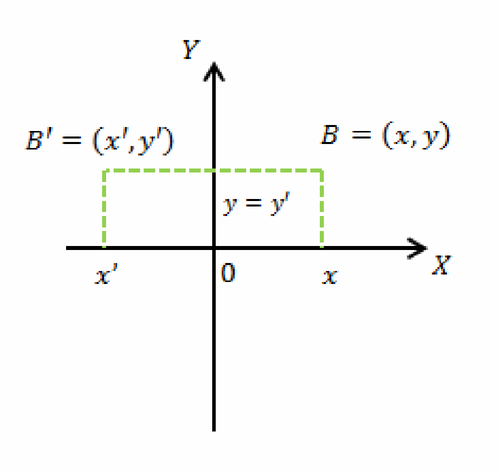


Rysunek 1-3. Symetria względem osi OX

Jak widać na rysunku 3, pierwsze współrzędne obydwu punktów są takie same, natomiast drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Symetria względem osi



Rysunek 1-4. Symetria względem osi OY

Jak widać na rysunku 4, pierwsze współrzędne punktów B i B' są liczbami przeciwnymi, natomiast drugie są równe.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A' = (x, -y)$

Obrazem punktu $B = (x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $B' = (-x, y)$

Symetria środkowa

Symetrią środkową względem punktu O, zwanego środkiem symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O jest stały, a każdemu innemu punktowi A przyporządkowuje się punkt A' taki, że punkt O jest środkiem odcinka AA'.

Symetrię względem punktu O będziemy oznaczać symbolem S_o.

Twierdzenie

Symetria środkowa względem punktu O jest izometrią.

Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest punkt O.

Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej S_o jest ta sama figura. Figurę F nazywamy środkowosymetryczną.

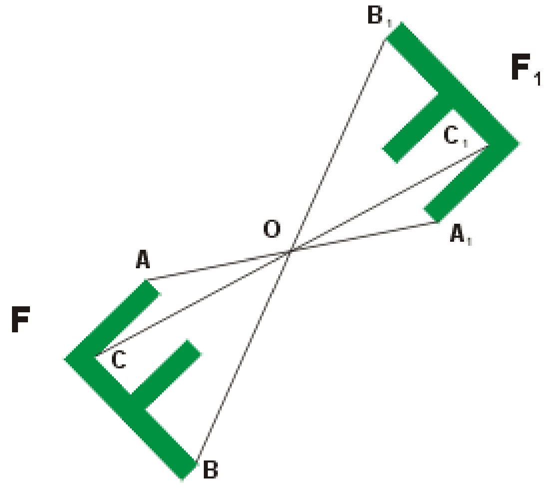
Przykład 3

Figury środkowosymetryczne to, np.:

- Koło (okrąg) – środek koła.
- Odcinek – środek odcinka.
- Prostokąt – punkt przecięcia jego przekątnych.

Przykład 4

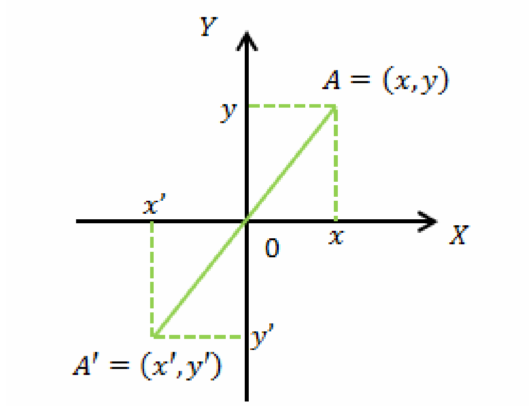
Przykład figury środkowosymetrycznej.



Rysunek 1-5. Przykład figury środkowosymetrycznej[4]

Trójkąt to figura, która **nie ma** środka symetrii.

Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych



Rysunek 1-6. Symetria względem punktu (0,0)

Jak widać na rysunku 5, pierwsze współrzędne punktów A i A', jak i drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$

4 www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa, 06.03.2013.

ZADANIA

1.7.1 Podaj współrzędne obrazu punktu M w symetrii względem osi OX, OY, o początku układu współrzędnych:

a) $M=(5,-9)$ b) $M=\left(3,-2+\sqrt{3}\right)$ c) $M=\left(\frac{4}{7},-2\frac{3}{4}\right)$

d) $M=(2,3)$ e) $M=(-5,-7)$

Odpowiedź:

$a)\ OX: M'=(5{,}9),$

$OY: M'=(-5{,}9),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M'=(-5,-9)$

$b)\ OX: M'=\left(3{,}2-\sqrt{3}\right),$

$OY: M'=\left(-3,-2+\sqrt{3}\right),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M'=(-3{,}2-\sqrt{3})$

$c)\ OX: M'=\left(\frac{4}{7},2\frac{2}{3}\right),$

$OY: M'=\left(-\frac{4}{7},-2\frac{2}{3}\right),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M'=(-\frac{4}{7},2\frac{2}{3})$

$d)\ OX: M'=(2,-3)d)\ OX: M'=(2,-3),$

$OY: M'=(-2{,}3),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M'=(-2,-3)$

$e)\ OX: M'=(-5{,}7),$

$OY: M'=(-5,-7),$

$względem\ poczatku\ układu\ współrzędnych: M'=(5{,}7)$

1.7.2 Trójkąt ABC, w którym $A=(-5{,}2)$, $B=(6,-3)$, $C=(1{,}4)$, przekształcono symetrycznie względem:

a) osi x,

b) osi y,

c) początku układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkątów otrzymanych po przekształceniu.

Odpowiedź:

a) A' = (–5,–2), B' = (6,3), C' = (1,–4)

b) A' = (5,2), B' = (–6,–3), C' = (–1,4)

c) A' = (5,–2), B' = (–6,3), C' = (–1,–4)

1.7.3 Podaj przykłady liter, liczb lub wyrazów, które są figurami osiowosymetrycznymi.

1.7.4 Oblicz, dla jakich wartości parametru m i n punkty A i B są symetryczne względem osi z, gdy: $A = (3, -n)$ i $B = (m + 2{,}1)$.

Odpowiedź: $m = 1, n = -1$.

1.7.5 Jakim zbiorem: pustym, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór osi symetrii kwadratu?

Odpowiedź: Zbiór skończony.

1.7.6 Wyznacz równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu:

$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 19 = 0$ względem prostej: $y = 2x + 1$.

Odpowiedź: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 7$.

1.7.7 Znajdź obraz okręgu: $x^2 + y^2 = 4$ w symetrii względem prostej: $y = 2x + 4$.

Odpowiedź: $(x + 3{,}2)^2 + (y - 1{,}6)^2 = 4$.

1.7.8 Trójkąt o wierzchołkach $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktów będących obrazami wierzchołków trójkąta ABC w tym przekształceniu.

Odpowiedź: $A' = (2, -3), B' = (4, -1), C' = (-2, -6)$.

Ciekawostka

Ambigram – grafika utworzona kaligraficznie lub obrazowo w taki sposób, że po obróceniu całości można odczytać ten sam tekst[5].
Inaczej mówiąc, ambigramy to grafiki środkowosymetryczne.

Przykłady ambigramów

Rysunek 1-7. Przykłady ambigramów[6]

Palindrom (gr. *palindromeo* – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej. Przykładem palindromu jest: *Kobyła ma mały bok*. Współcześnie palindromy pełnią funkcję gry słownej[7].

Najdłuższy polski palindrom, autorstwa Tadeusza Morawskiego, ma ponad 33 tysiące liter.

Przykłady palindromów:

„Gór ech chce róg"

„Żartem dano nadmetraż"

„Może jeż łże jeżom"

„Zagwiżdż i w gaz"[8]

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[9] Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu:

a) $y = -\frac{1}{3}x - 1$ b) $y = \frac{1}{3}x + 1$ c) $y = 3x + 1$ d) $y = 3x - 1$

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram, 09.03.2013.
6 www. violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd, 07.03.2013.
7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom, 09.03.2013.
8 pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski, 21.02.2013.
9 Zadania 1, 2: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Próbna matura z matematyki, listopad 2009, 05.03.2013.

2. Prosta o równaniu $y = -4x + (2m - 7)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Wtedy:

a) $m = 7$ b) $m = 2\frac{1}{2}$ c) $m = -\frac{1}{2}$ d) $m = -17$

3.[10] Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy:

a) $m = -\frac{2}{3}$ b) $m = -\frac{1}{3}$ c) $m = \frac{1}{3}$ d) $m = \frac{5}{3}$

4.[11] Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$.

a) $y = -2x + 1$ b) $y = 0{,}5x - 1$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $y = 2x - 1$

5.[12] Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(2, 1)$.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = -x + 1$

6.[13] Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

a) są równoległe i różne

b) są prostopadłe

c) przecinają się pod kątem innym niż prosty

d) pokrywają się

7.[14] Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$:

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -\frac{1}{2}x$ c) $y = 2x$ d) $y = -2$

8. Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

a) $(-5, -2012)$ b) $(-2012, -5)$ c) $(2, -7)$ d) $(-2012, 5)$

9. Na okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$ leży punkt:

a) $A = (-2, 5)$ b) $B = (2, -5)$ c) $C = (2, -7)$ d) $D = (7, -2)$

10.[15] Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (4, -3)$ i $B = (-1, -13)$. Funkcja f opisana jest wzorem:

a) $f(x) = 2x - 11$ b) $f(x) = 2x + 11$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

---

10 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010, 05.03.2013.
11 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011, 05.03.2013.
12 Zadanie zaczerpnięte z: Arkusz maturalny CKE, maj, 2011, 05.03.2013.
13 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Matura próbna, listopad, 2010, 05.03.2013.
14 Zadania 7, 8, 9: zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 05.03.2013.
15 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte z CKE (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.phparkusze), 05.03.2013.

11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Środkiem S tego okręgu jest punkt:

a) $S=(-3,-4)$ b) $S=(3,4)$ c) $S=(3,-4)$ d) $S=(-3,4)$

12. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x-6y+7=0$.

a) $y=\frac{1}{2}x$ b) $y=-\frac{1}{2}x$ c) $y=2x$ d) $y=-2x$

13.[16] Prostą przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A}=(\mathbf{1},\mathbf{1})$ i równoległą do prostej $\boldsymbol{y}=\mathbf{0{,}5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}$ opisuje równanie:

a) $y=-2x-1$ b) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ c) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ d) $y=2x-1$

14. Proste: $y=-3x+4$ i $y=\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{4}{3}\right)x$ są prostopadłe, jeżeli:

a) $a=-2$ b) $a=2$

c) $a=\sqrt{5}$ d) $a=-\sqrt{5}$ lub $a=\sqrt{5}$

15.[17] Proste l i k są prostopadłe i l: $2x-9y+6=0$, k: $y=ax+b$. Wówczas:

a) $a=-\frac{2}{9}$ b) $a=\frac{2}{9}$ c) $a=-\frac{9}{2}$ d) $a=\frac{9}{2}$

16. Równanie $(x+6)^2+y^2=4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

a) $S=(-6,4), r=4$ b) $S=(6,0), r=4$ c) $S=(6,0), r=2$ d) $S=(-6,0), r=2$

17. (**5 pkt**) Prosta $y=x+4$ przecina okrąg o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

18. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y=-\frac{1}{3}x+2$:

a) $y=3x$ b) $y=-3x$ c) $y=3x+2$ d) $y=\frac{1}{3}x+2$

19. Punkty $B=(-2,4)$ i $C=(5,1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

a) 74 b) 58 c) 40 d) 29

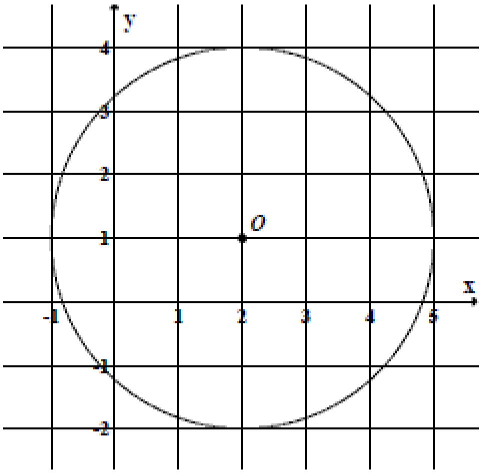
20. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y-6)^2=100$. Środek tego okręgu ma współrzędne:

a) $(-4,-6)$ b) $(4,6)$ c) $(4,-6)$ d) $(-4,6)$

16 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, styczeń. 2013 (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 05.03.2013.

17 Zadania 15, 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad 2012 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf), 05.03.2013.

21.[18] Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Równanie tego okręgu ma postać



A. $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=3$

C. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

D. $(x+2)^2+(y+1)^2=3$

22. Punkt $S = (2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

a) $B = (5,11)$ b) $B = \left(\frac{1}{2},2\right)$ c) $B = \left(-\frac{3}{2},-5\right)$ d) $B = (3,11)$

23. Proste o równaniach $y = 2x - 5$ *i* $y = (3 - m)x + 4$ są równoległe. Wynika stąd, że::

a) $m = 1$ b) $m = \frac{5}{2}$ c) $m = \frac{7}{2}$ d) $m = 5$

24. Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x + 5$ d) $y = -x + 1$

25. Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu:

a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $y = 0$ d) $y = 4$

26. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:

a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) $\frac{1}{3}$ d) 3

27. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6:

a) $x^2 + y^2 = 3$ b) $x^2 + y^2 = 6$ c) $x^2 + y^2 = 12$ d) $x^2 + y^2 = 36$

28. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) 30 b) $4\sqrt{5}$ c) $12\sqrt{5}$ d) 36

---

18 Zadania21, 22: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, czerwiec, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf), 05.03.2013.

29. **(5 pkt)** Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2, -1), B = (4,2), C = (5,1)$. Wyznacz:

a) Pole trójkąta ABC.

Odpowiedź: $P = 2{,}5$.

b) Równanie zawierające wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

Odpowiedź: $y = x - 3p$.

30. **(4 pkt**) W rombie $ABCD$ dane są $A = (-3, -1)$ i punkt przecięcia przekątnych $M = (9,3)$. Wiadomo, że punt B leży na prostej $2x - y - 25 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

Odpowiedź: $B = (11, -3), C = (21,7), D = (7,9)$.

31. (2 pkt) Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-1, -1), B = (5,2)$, $C = (3,3), D = (1,2)$ jest trapezem?

Odpowiedź: Tak.

32. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$ i jest prostopadły do prostej $y = 2x - 4$.

Odpowiedź: $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

33. **(2 pkt)** Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$.

34. **(2 pkt)** W trójkącie równoramiennym $\boldsymbol{ABC}$ o podstawie $\boldsymbol{AB}$ poprowadzono wysokość z wierzchołka $\boldsymbol{C}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli $\boldsymbol{A = (2, 8)}, \boldsymbol{B = (-2, 4)}$.

35. **(4 pkt)** Oblicz pole i obwód rombu $\boldsymbol{ABCD}$ wiedząc, że przekątna $\boldsymbol{AC}$ jest zawarta w prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 2}$ oraz $\boldsymbol{A = (-1, -4)}$ i $\boldsymbol{D = (-6, 6)}$.

36.[19] **(6 pkt)** Wyznacz współrzędne punktu $\boldsymbol{BB}$, który jest symetryczny do punktu $\boldsymbol{A = (3, 2)}$ względem prostej $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x - 6}$.

37. **(4 pkt)** Dany jest trójkąt równoramienny $\boldsymbol{ABC}$, w którym $\boldsymbol{|AC| = |BC|}$ oraz $\boldsymbol{A = (2, 1)}$ i $\boldsymbol{C = (1, 9)}$. Podstawa $\boldsymbol{AB}$ tego trójkąta jest zawarta w prostej $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$. Oblicz współrzędne wierzchołka $\boldsymbol{B}$.

19 (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 06.03.2013.

38.[20] **(4 pkt)** Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu przechodzącej przez jeden z tych punktów.

39.[21] **(4 pkt)** Okrąg o środku w punkcie $\boldsymbol{S = (3, 7)}$ jest styczny do prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 3}$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

20 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf), 06.03.2013.
21 (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013), 06.03.2013.

2 Wielomiany*

2.1 Pojęcie wielomianu

Wielomian – w matematyce wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i podnoszenia do potęgi o stałym wykładniku naturalnym[22].

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Stopień wielomianu jest to najwyższy ze stopni jego składników (jednomianów) o niezerowych współczynnikach. Dla wielomianu jednej zmiennej jest to największa potęga zmiennej, która występuje w wielomianie.[23]

Przykład 1

Przykłady wielomianów oraz ich stopień:

$W(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7$ – wielomian stopnia 4

$G(x) = 5x^6 + 9x^3 - 7$ – wielomian stopnia 6

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ – wielomian stopnia 2

$Q(x) = 8$ – wielomian stopnia 0

Wielomiany zapisujemy zazwyczaj w postaci uporządkowanej.

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x

Przykład 2

Wyznacz wartości parametrów a i b, tak aby wielomiany $P(x) = x^3 + x^2 + 12x - 8$ oraz $W(x) = x^3 + (2a - b)x^2 + (3b - 2a)x - 8$ były równe.

22 pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian, 27.02.2013.
23 pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.

Wielomiany $P(x)$ i $W(x)$ są tego samego stopnia. Musimy sprawdzić, dla jakich wartości a i b współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3b - 2a = 12 \end{cases}$$

$2b = 13 \quad \Rightarrow b = 6{,}5$

$2a = 1 + 6{,}5 \ \Rightarrow a = 3{,}75$

$W(x) = P(x) \ \Leftrightarrow a = 3{,}75 \ \wedge b = 6{,}5$

ZADANIA

2.1.1 Dany jest wielomian $W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 7$, oblicz:

a) $W(2)$ b) $W(-1)$ c) $W(\sqrt{3})$ d) $W\left(-\frac{1}{2}\right)$

Odpowiedź:

a) 33 b) -6 c) $11\sqrt{3} - 1$ d) $-5\frac{1}{8}$

2.1.2 Podane wielomiany uporządkuj malejąco i podaj ich stopień.

a) $P(x) = 6x^5 - 2 + 4x^2 + 9x$

b) $P(x) = 7x^3 + 12 - 9x^6 + 14x + 3x^2$

c) $P(x) = -8x^{19} + 3x^9 - 7x^{15} + 6x$

d) $P(x) = -2 + x^6 + x^{11} - 6x^3$

Odpowiedź:

a) $P(x) = 6x^5 + 4x^2 + 9x - 2$

b) $P(x) = -9x^6 + 7x^3 + 3x^2 + 14x + 12$

c) $P(x) = -8x^{19} - 7x^{15} + 3x^9 + 6x$

d) $P(x) = x^{11} + x^6 - 6x^3 - 2$

2.1.3 a) Dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax - b$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 4$.

b) Dany jest wielomian

$W(x) = 3x^4 + ax^3 - bx^2 - 3$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(-1) = 2, W(-1) = 5$.

c) Dany jest wielomian

$W(x) = x^3 + 3ax^3 - 2bx^2 + 6$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 5, W(2) = 8$.

d) Dany jest wielomian $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx^2 + c$. Oblicz a, b i c wiedząc, że $W(-1) = 3, W(2) = 9$.

e) Dany jest wielomian

$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$. Oblicz a, b, c wiedząc, że: $W(-1) = 1,\ W(0) = 1,$
$W(1) = -1$.

Odpowiedź:

a) $a = 2, b = 1$ b) $a = -6\frac{1}{2}, b = -3\frac{1}{2}$ c) $a = -\frac{1}{3}; b = \frac{1}{2}$

d) $a = 3, b = 2, c = 1$ e) $a = -1, b = -2, c = 1$

2.1.4 Wyznacz wartości parametrów a i b (lub a, b i c), tak aby wielomiany $W(x)$ i $P(X)$ były równe.

a) $W(x) = (3a-1)x^3 + (2b-a)x^2 + (a+b)x - 4,\ P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 4$

b) $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4,\ \ P(x) = cx^3 + 2ax^2 + ax + b$

c) $W(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + c,\ \ P(x) = (b-1)x^3 + (a+1)x^2 + 3bx - 2a$

d) $W(x) = ax^3 + 7x^2 - bx - 3c,\ \ P(x) = (4b+c)x^2 + (c+2)x + 15 - a$

e) $W(x) = (a+1)x^3 + 3x^2 - 5cx - 2,\ \ P(x) = 2x^3 + bx^2 - 12x - 2$

Odpowiedź:

a) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = -1 \wedge b = -2$

b) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = 4 \wedge c = 2$

c) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = -4 \wedge b = -3 \wedge c = -8$

d) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = -2 \wedge c = 15$

e) $W(x) = P(x) \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = 2\frac{2}{5}$

2.2 Działania na wielomianach

Teraz nauczę się:

- Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
- Rozszerzać i skracać wyrażenia wymierne;
- Dzielić wielomiany przez dwumian

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dodawanie i mnożenie wielomianów jest łączne i przemienne, zachodzi również rozdzielność mnożenia wielomianów względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na redukcji wyrazów podobnych.

Dodawanie wielomianów

Aby dodać dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, dodajemy do siebie wszystkie wyrazy podobne tych wielomianów i porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 1

Dodaj wielomiany:

a) $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3$ oraz $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4 \\ &= (-3x^4 + 3x^4) + (4x^3 + 5x^3) + (7x^2 + 4x^2) + (-9x + 6x) + (3 - 4) \\ &= 9x^3 + 11x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

b) $W(x) = 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3$ oraz $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3 + 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2 \\ &= 6x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

c) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ oraz $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

$$W(x) + P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 + (-3x^3 + 5x^2 - 7x + 3) = (3x^3 - 3x^3) + (-5x^2 + 5x^2) + (7x - 7x) + (-3 + 3) = 0$$

Wniosek

Suma dwóch wielomianów może mieć stopień mniejszy lub równy większemu stopniowi wielomianów, może także być wielomianem zerowym.

Odejmowanie wielomianów

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, należy do wielomianu $W(x)$ dodać wielomian $-P(x)$. Następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie wielomianów:

a) $W(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ oraz $P(x) = -8x^2 + 5x^2 + 6x - 8$

$$W(x) - P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 - (-8x^3 + 5x^2 + 6x - 8)$$
$$= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 + 8x^3 - 5x^2 - 6x + 8 =$$

$$= (4x^3 + 8x^3) + (-7x^2 - 5x^2) + (5x - 6x) + (-3 + 8) = 12x^3 - 12x^2 - x + 5$$

b) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ oraz $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$$W(x) - P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - (6x^3 + 4x^2 - 3x + 2)$$
$$= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 =$$

$$= (6x^3 - 6x^3) + (-7x^2 - 4x^2) + (5x + 3x) + (-2 - 2) = -11x^2 + 8x - 4$$

Stopień otrzymanego wielomianu zależy od wielomianów składowych, analogicznie jak w przypadku dodawania.

Mnożenie wielomianów

Aby pomnożyć dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, trzeba pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Następnie zredukować wszystkie wyrazy podobne i uporządkować otrzymany wielomian.

Przykład 3

Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $W(x) = 3x^2 - 4x + 1$ oraz $P(x) = x + 3$

$$W(x) \cdot P(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3x + 3$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 9x + 3$$

b) $W(x) = 4x^3 + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - 3x$

$$W(x) \cdot P(x) = (4x^3 + 1) \cdot (4x^2 - 3x) = 16x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 3x$$

Wniosek

Stopień iloczynu niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Dzielenie wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielnym przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $\mathrm{W}(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia sposobem pisemnym liczb rzeczywistych.

Wykonaj dzielenie wielomianów:

$W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3)$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dzielimy $2x^3$ przez x i otrzymujemy $2x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ mnożymy $2x^2$ przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy

$-2x^3 - 6x^2$ z przeciwnymi znakami

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dodajemy stronami i przepisujemy $4x + 7$

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dzielimy $-9x^2$ przez x

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ mnożymy $-9x$ przez $(x + 3)$ i wynik

$-2x^3 - 6x^2$ zapisujemy z przeciwnymi znakami

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$9x^2 + 27x$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dodajemy stronami i przepisujemy -7

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dzielimy $31x$ przez x

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ mnożymy 31 przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy z przeciwnym znakiem

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$-31x - 93$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dodajemy stronami

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$\underline{\qquad -31x - 93}$

$= \quad -100$

W dzieleniu wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$ otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 - 9x + 31$ i resztę $R(x) = -100$

Przykład 5

Wielomiany można dzielić przez dwumian, stosując **schemat Hornera**

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 2)$

$r = 2$

Wielomian jest stopnia trzeciego, więc tabelka wygląda następująco:

III	II	I	0
1	–4	3	–5
1			

W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy wszystkie stopnie wielomianu, w drugim wierszu natomiast wszystkie współczynniki tego wielomianu. Pierwszy współczynnik zawsze przepisujemy na dole.

Przystępujemy do obliczeń.

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2		

$r = 2$

$1 \cdot 2 - 4 = -2$ (-2 wpisujemy do dolnego wiersz)

Dalej analogicznie:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	

$r = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ (-1 wpisujemy do dolnego wiersz)

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	-7

$r = 2$

$-1 \cdot 2 - 5 = -7$ (-7 wpisujemy do dolnego wiersz)

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia drugiego.

W dolnym wierszu tabelki otrzymaliśmy współczynniki tego wielomianu.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian

$(x - 2)$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = x^2 - x - 1$ reszty (-7).

Więc wielomian: $W(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2) - 7$.

ZADANIA

2.2.1 Dane są wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ **i** $F(x) = x^4 - 6x^2 + 7$**.**

Oblicz: $P(0), P(-2), P(\sqrt{2}), F(\sqrt{3}), F(\sqrt{2})$

Odpowiedź: $P(0) = -3, P(-2) = -1, P(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 7,\ F(\sqrt{3}) = -5, F(\sqrt{2}) = -1$

2.2.2 Oblicz sumę i różnice wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 4,\ P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 7x + 10$

b) $W(x) = -7x^4 - 6x^2 - 5x + 8,\ P(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 8$

c) $W(x) = -10x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,\ P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 3x^4$

d) $W(x) = -3x^9 + 6x^7 - 5,\ P(x) = 8x^4 - 6x$

Odpowiedź:

a) $W(x) + P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x + 6,\ W(x) - P(x) = 10x^3 - 12x^2 - 2x - 14$

b) $W(x) + P(x) = -4x^3 - 11x,\ W(x) - P(x) = -14x^4 + 4x^3 - 12x^2 + x + 16$

c) $W(x) + P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 13x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,$

$W(x) + P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 13x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,$

$W(x) - P(x) = -2x^8 - 4x^6 - 7x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5$

d) $W(x) + P(x) = -3x^9 6x^7 + 8x^4 - 6x - 5,$ $W(x) + P(x) = -3x^9 6x^7 + 8x^4 - 6x - 5,$

$W(x) - P(x) = -3x^9 + 6x^7 - 8x^4 + 6x - 5$

2.2.3 Oblicz iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = -3x^2 + 6,\ P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

b) $W(x) = 2x^7 + 6x^3,\ P(x) = -4x + 2$

c) $W(x) = -3x^6 + 4x^2 + 2,\ P(x) = 2x + 1$

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 6x,\ P(x) = x^2 - 3$

Odpowiedź:

a) $-6x^5 + 18x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 24$

b) $-14x^8 + 4x^7 - 24x^4 + 12x^3$

c) $-6x^7 - 3x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

d) $2x^7 - 6x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 18x$

2.2.4 Wykonaj dzielenie wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$, gdy:

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40,\ P(x) = x - 5$

b) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,\ P(x) = 2x - 1$

c) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 13x - 2,\ P(x) = 3x - 2$

d) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9,\ P(x) = x - 3$

e) $W(x) = 2x^3 - 19x^2 + 13x - 2, P(x) = 3x - 2$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 6x + 8$ b) $x^2 - 2x + 3$ c) $2x^2 - 5x + 1$

d) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ e) $2x - 102x - 10$

2.2.5 Dane są wielomiany $A(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $B(x) = x^3 - 8$, $C(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

a) $A(x) + B(x)$ b) $A(x) + 2B(x)$ c) $2A(x) - 4B(x)$

d) $5B(x) - 10C(x)$ e) $A(x) \cdot C(x)$ f) $(x - 2) \cdot C(x) - B(x)$

g) $A(x) - (3x + 5) \uparrow\cdot B(x)$ h) $(C(x))^2$ i) $(A(x))^2 - (P(x))^2$

Odpowiedzi:

a) $3x^3 - 7x - 4$

b) $4x^3 - 7x - 12$

c) $-14x + 40$

d) $5x^3 - 10x^2 - 20x - 80$

e) $2x^6 - 7x^4 - 12x^3 x + 56x - 32$

f) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$

g) 0

h) $-3x^4 - 3x^3 + 17x + 44$

i) $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$

j) $3x^6 - 28x^4 + 32x^3 + 49x^2 - 56x - 48$

2.3 Rozkład wielomianu na czynniki

Teraz nauczę się:

- Stosować wzory skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$;
- Rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias..

Warto na początku przypomnieć sobie wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.

Kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory stopnia trzeciego:

Sześcian sumy

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sześcian różnicy

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

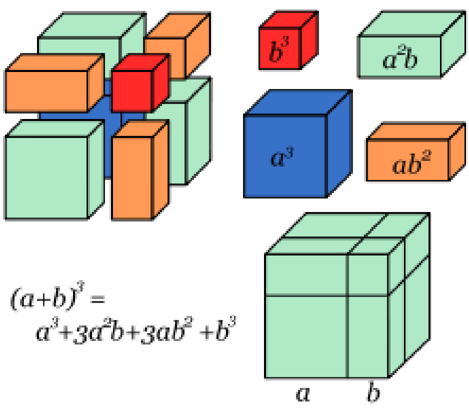
Suma sześcianów

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Różnica sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Każdy z tych wzorów możemy udowodnić w sposób algebraiczny lub – podobnie jak w przypadku wzorów stopnia drugiego – poprzez interpretację geometryczną. Trzeba jednak przejść do przestrzeni trójwymiarowej.



Rysunek 2-1. Graficzne uzasadnienie wzoru na sześcian sumy[24]

24 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia, 07.03.2013.

Przykład 1

$$(x+5)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 5 + 3\cdot x\cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

$$(3x-4)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot 4 + 3\cdot 3x\cdot 4^2 - 4^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$$

$$\sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{7}+21+7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{7} + 3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^3}$$

$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{7}\right)^3} = 1+\sqrt{7}$$

Zadania

2.3.1 Uprość:

a) $(x+5)^3$ b) $(2x+1)^3$ c) $(x+3y5)^3$

d) $(x-2)^3$ e) $(3x-4)^3$ f) $(2x-y)^3$

Odpowiedź:

a) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ b) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

c) $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$ d) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

e) $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$ f) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

2.3.2 Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, uprość wyrażenia:

a) $x^3 - 8$ b) $x^3 - 125$ c) $64x^3 + 27$

d) $8x^3 + 216$ e) $(x+2)^3$ f) $(x-5)^3$

Odpowiedź:

a) $(x-2)(x^2+2x+4)$ b) $(x-5)(x^2+5x+25)$

c) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$ d) $(2x+6)(4x^2-12x+36)$

e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ f) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy zapisać go w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeśli taki rozkład nie istnieje, to mówimy, że wielomian jest **nierozkładalny.**

Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod:

1) wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,

2) wzory skróconego mnożenia,

3) zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej,

4) grupowanie wyrazów.

Przykład 2

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z wspólnego dzielnika współczynników liczbowych oraz najniższej potęgi x.

a) $W(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

b) $W(x) = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2 + 2x - 3)$

Przykład 3

Rozłóż wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $W(x) = x^4 - 64 = (x^2 - 8)(x^2 + 8) = \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right)(x^2 + 8)$

W poniższym przykładzie liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania wzoru na różnicę sześcianów.

b) $W(x) = 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9)$

c) $W(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$

$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 4

Rozłóż wielomian na czynniki, zamieniając na postać iloczynową funkcji kwadratowej.

W tym przypadki wielomian musi mieć postać funkcji kwadratowej.

$W(x) = 4x^2 - 8x - 12$

Obliczamy deltę i pierwiastki tej funkcji.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$\Delta > 0$, więc są dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 16}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 16}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

Zapisujemy postać iloczynową:

$W(x) = 4(x + 1)(x - 3)$

Przykład 5

Rozłóż wielomian na czynniki metodą przez grupowanie wyrazów.

Z tej metody można skorzystać, gdy mamy parzystą ilość czynników w wielomianie.

Łączymy wyrażenia w pary, każdą parę traktujemy jako osobne wyrażenie i każde z nich przekształcamy, wyłączając czynnik przed nawias. Ostatecznie zapisujemy iloczyn, wyłączając wspólny nawias przed nawias.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 3)$

b) $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = (4x^3 - 8x^2) - (3x - 6) = 4x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(4x^2 - 3)$

c) $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^3 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ZADANIA

2.3.3 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = 3x^4 - 5x^3$

b) $W(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$

c) $W(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2$

d) $W(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^4$

e) $W(x) = 4x^2(x^2 - 2) + 2(x^2 - 2)$

Odpowiedź:

a) $W(x) = x^3(3x - 5)$

b) $W(x) = 2x(2x^2 - 3x + 6)$

c) $W(x) = x^2(x + 2)(x - 2)(x - 4)$

d) $W(x) = 4x^4(x^6 + 2x + 1)$

e) $W(x) = 2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2x^2 + 1)$

2.3.4 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$

b) $W(x) = (9x^2 - 6x + 1)(9x^2 - 1)$

c) $W(x) = (x^3 - 27)(x^2 - 9)$

d) $W(x) = (x^4 - 25)(x^3 + 8)$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $W(x) = (3x - 1)^3(3x + 1)$

c) $W(x) = (x - 3)^2(x + 3)(x^2 + 3x + 9)$

d) $W(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

2.3.5 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$

b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

c) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x - 14$

d) $W(x) = x^4 + x^3 + 27x + 27$

e) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

f) $W(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

g) $W(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

h) $W(x) = 15x^6 - 10x^5 + 45x^4 - 30x^3$

i) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

j) $W(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$

k) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$

l) $W(x) = x^4 + 5x^2 - x^3 - 5x$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

b) $W(x) = (x+2)(x^2+9)$

c) $W(x) = (x+2)(x\sqrt{3}-\sqrt{7})(x\sqrt{3}+\sqrt{7})$

d) $W(x) = (x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$

e) $W(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(3x-1)$

f) $W(x) = (x+2)^3$

g) $W(x) = (x-1)^3(x+1)^2$

h) $W(x) = 5x^3(x^2+3)(3x-2)$

i) $W(x) = (x-2)(x-3)(x+3)$

j) $W(x) = (x+7)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

k) $W(x) = (x-4)(x+4)(x-2)$

l) $W(x) = x(x-1)(x^2+5)$

2.3.6 Rozłóż wielomiany na czynniki poznanymi metodami:

a) $5x^6 + 10x^5 - 15x^2$

b) $8x^3 - 27$

c) $2x^2 - 6x - 8$

d) $4x^3 - 8x^2 - 3x + 6$

e) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$

f) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$

g) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3$

h) $(x^4 - 16x^2)(x^5 + 5x^4 + 6x^3)$

i) $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2$

j) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

k) $x^4 + x^3 - 8x - 8$

l) $x^5 + 10x^4 + 25x^3$

Odpowiedź:

a) $5x^4(x^2+2x-3)$

b) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$

c) $2(x-4)(x+1)$

d) $4x(x+5)(-3x-2)^2(5x-1)$

e) $x^2(2x-3)^2$

f) $(x+2)(x-2)(2x+3)$

g) $2x^3(x-3)(x-1)$

h) $x^5(x+4)(x-4)(x+2)(x+3)$

i) $-2x^2(x-2)(x+5)$

j) $(x-2)(x+2)(x+3)$

k) $(x^3-8)(x+1)$

l) $x^3(x+5)^2$

2.3.7 Wykorzystując poznane metody, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej:

a) $8x^3-12x^2+6x-1$

b) $3x^4-5x^3+5x^2-5x+2$

c) $x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x$

d) $x^4+2x^3-4x^2-8x$

e) x^3+3x^2-2x

Odpowiedź:

a) $(2x-1)^3$

b) $(x-1)(3x-2)(x^2+1)$

c) $(x^2+3x+1)x(x^2+1)$

d) $x(x-2)(x+2)^2$

e) $x\left(x-1+\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$

Ciekawostka

Wzory skróconego mnożenia można szybko wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala.**

Blaise Pascal (1623-166) – francuski filozof, matematyk i fizyk. Badał prawdopodobieństwo, próżnię i ciśnienie atmosferyczne. Wynalazł m.in. pierwszą maszynę liczącą „Pascalinę" oraz TRÓJKĄT PASCALA. Od jego nazwiska wywodzi się nazwa jednostki ciśnienia (Pa) i język programowania Pascal[25].

Trójkąt Pascala pozwala wyprowadzić wzory skróconego mnożenia.

Przyjrzyjmy się postaci wzorów:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

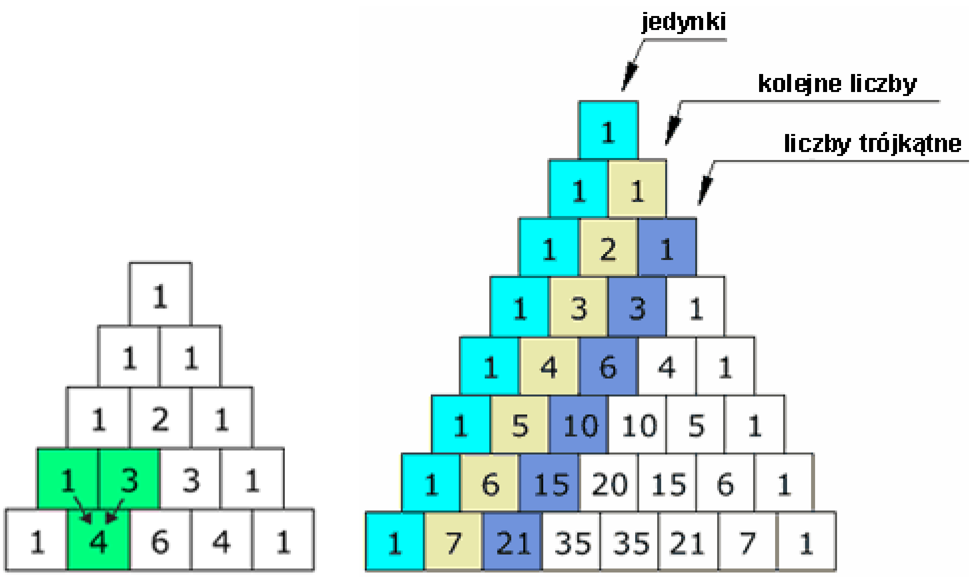
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Zapiszmy same współczynniki liczbowe składników. Postać kolejnych czynników liczbowych jest widoczna. Współczynniki liczbowe utworzyły trójkąt, który nazywa się trójkątem Pascala.

Zasady budowy trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to tablica liczb, w której każdy element powstaje poprzez sumowanie elementów stojących nad nim. Elementy skrajne to jedynki.



Rysunek 2-2. Zasada tworzenie trójkąta Pascala

25 www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal, 19.02.2013.

Wyznaczymy teraz współczynniki piątej potęgi dwumianu.

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Dwumian Newtona, czyli wzór na $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 6

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)!\cdot 0!} = \frac{7!}{7!\cdot 1!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!} = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)!\cdot 7!} = \frac{7!}{0!\cdot 7!} = 1$$

Więc:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

ZADANIE

2.3.8 Wyznacz, korzystając z trójkąta Pascala:

a) $(a-b)^4$ b) $(a-b)^5$ c) $(a+b)^6$

Odpowiedź:

a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

c) $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

2.4 Równania wielomianowe

Teraz nauczę się:

- Wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;
- Rozwiązywać równania wielomianowe.

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań wielomianowych, przybliżymy pojęcie pierwiastka wielomianu.

Pierwiastek wielomianu lub równania wielomianowego to rozwiązanie tego równania.

W przypadku wielomianów mamy zazwyczaj do czynienia z kilkoma pierwiastkami.

Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nazywamy jego miejsce zerowe. Powiemy zatem, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_+$

Przykład 1

Sprawdź, czy liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu: $W(x) = x^3 - 2x^2 - 19x - 20$.

$W(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 19(-2) - 20 = -8 - 8 + 38 - 20 = 2$

Otrzymany wynik jest różny od 0, więc liczba (-2) nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 2

Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu:

$W(x) = 2x^5 - 4x^2 - 24x$

Więc: $W(2) = 2 \cdot (2)^5 - 4 \cdot (2)^2 - 24 \cdot 2 = 64 - 16 - 48 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Równanie $W(x) = 0$, $W(x) = 0$, gdzie $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a \;\; x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ nazywamy równaniem wielomianowym stopnia n

Rozwiązywanie równań wielomianowych sprowadza się do znalezienia pierwiastków danych wielomianów.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania rozłożyć na czynniki.

Przykład 3

Rozwiąż równanie: $x^4 - 9 = 0$

$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3) = 0$

Wyrażenie będzie równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$(x - \sqrt{3}) = 0 \ \vee \ (x + \sqrt{3}) = 0 \ \vee \ (x^2 + 3) = 0$

$x - \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$x + \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 3 > 0$, więc $x = \sqrt{3} \ \vee x = -\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = \sqrt{3} \ \vee x = -\sqrt{3}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie: $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$

Skorzystamy z metody grupowania wyrazów.

$x^3(x + 1) - 8(x + 1)$

$(x + 1)(x^3 - 8) = 0$

$(x + 1) = 0 \ \vee \ (x^3 - 8) = 0$

$x = -1 \ \vee \ x^3 = 8 \ \Rightarrow x = 2$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = -1 \vee \ x = 2$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie: $x^5 - 2x^4 + 5x^3 = 0$.

Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias:

$x^3(x^2 - 2x + 5) = 0$, to wyrażenie jest równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy:

$x^3 = 0 \ \vee \ x^2 - 2x + 5 = 0$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, skoro $\Delta < 0$, to trójmian nie ma pierwiastków.

Więc rozwiązaniem jest: $x = 0$.

Przykład 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt[4]{2 - 4x^2 - 3x}$

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, więc:

$2 - 4x^2 - 3x \geq 0 \, / \cdot (-1)$

$4x^2 + 3x - 2 \leq 0$

$\Delta = 9 + 32 = 41$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Odpowiedź: $x \in \langle \frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \rangle$.

ZADANIA

2.4.1 Zapisz podane wyrażenia w prostszej postaci. Przyjmij, że każdy mianownik w podanych ułamkach jest różny od zera.

a) $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$ b) $\frac{30x^4-6x^3+45x^2-9x}{8x^3+12x}$ c) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^3-2x^2-12x+8}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 1$ b) $\frac{3(5x-1)}{4}$ c) $\frac{x-1}{x^2-4}$ d) $\frac{x+3}{x-3}$ e) $\frac{x-2}{x+1}$

2.4.2 Rozwiąż równania:

a) $3x^4 - 12 = 0$ b) $x^3 + 4x = 0$

c) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ d) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

e) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$ f) $x^3 + 8x^2 - 2x - 16 = 0$

Odpowiedź:

a) $x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2}$

b) $x = 0$

c) $x = 1 \lor x = -1$

d) $x = 5 \lor x = 1 \lor x = -1$

e) $x = 1 \lor x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2} \; x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$

f) $x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2} \lor x = -8$

2.4.3 Rozwiąż, rozkładając na czynniki:

a) $3x^3+6x^2+4x+8=0$

b) $x^6+2x^5+x^4+x^2+2x+1=0$

c) $1+x^2=x^3+x$

d) $3x^2-4x=-x^3+12$

e) $-9x-5x^2=-x^3-45$

f) $x^4+3x^3-6x-4=0$

g) $x^3-7x^2+6=0$

h) $5x^3+9x^2-26x-24=0$

i) $x^3-7x^2+2x-14=0$

j) $x^3+2x^2-5x-10=0$

k) $x^3-7x^2-4x+28=0$

l) $x^3-3x^2-4x+12=0$

m) $6x^3+6x^2-3x-3=0$

n) $x^3+x^2-5x-5=0$

o) $2x^3-4x^2-6x+12=0$

p) $x^3+x^2-5x-5=0$

q) $x^5-2x^4-9x^3+18x^2=0$

r) $-2x^4-\sqrt{3}x^3+2x+\sqrt{3}=0$

s) $2x^3-3x^2-8x+12=0$

t) $2x^5-18x^3+2x^2-18=0$

u) $x^3+3x^2-5x-15=0$

v) $x^3+x^2-9x-9=0$

w) $x^8+x^6-x^4-x^2=0$

x) $20x^4-20x^3+5x^2=0$

Odpowiedź:

a) $x=-2$

b) $x=-1$

c) $x=1$

d) $x=2 \vee x=-2 \vee x=-3$

e) $x=5 \vee x=3 \vee x=-3$

f) $x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \vee x=-2 \vee x=-1$

g) $x=3-\sqrt{15} \vee x=3+\sqrt{15} \vee x=1$

h) $x=-3 \vee x=-\frac{4}{5} \vee x=2$

i) $x=7$

j) $x=-2 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

k) $x=2 \vee x=-2 \vee x=7$

l) $x=3 \vee x=\sqrt[3]{4}$

m) $x=-1 \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

n) $x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

o) $x=2 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

p) $x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

q) $x=2 \vee x=0 \vee x=3 \vee x=-3$

r) $x=1 \vee x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

s) $x=-2 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$

t) $x=3 \vee x=-3 \vee x=-1$

u) $x=-3 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

v) $x=-1 \vee x=3 \vee x=-3$

w) $x=0 \vee x=1 \vee x=-1$

2.4.4 $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

2.4.5 Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^3+5x^2+6x}$

b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(4-x^2)}$

c) $f(x) = \sqrt{x(2+x)(x-3)^2} - \sqrt{(x+2)^2(4-x)}$

d) $f(x) = \frac{8x^3-125}{4x^3-4x^2-25x+25}$

e) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3-16x}$

f) $f(x) = \frac{6x-2}{x^2-x-2}$

g) $f(x) = -3x^2 + 7x - 8$

h) $f(x) = x + \frac{1-\sqrt{x+1}}{3\sqrt{1-2x}}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x+2|}}{x(x+3)}$

j) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x+6}}$

l) $f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

Odpowiedź:

a) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,-2,0\}$

b) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle -2,3\rangle$

c) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 0,4\rangle$

d) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

e) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4,0,4\}$

f) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x \in \left\langle\frac{1}{2},+\infty\right)$

i) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-3\}$

j) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$

k) $x \in (-\infty,6)$

l) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[26] Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$ b) $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$ c) $2x^5 + 3x + 1$ d)) $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

2. Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (x-2)^{53} + 53x + 2^{53}$ jest równy:

a) 2^{54} b) 0 c) 2^{53} d) 53

3. Wielomian $W(x) = x^2(x-2) - (x-2)$ można zapisać w postaci:

a) $x^2(x+2)$

b) $(x^2+1)(x-2)$

c) $x(x-2)^2$

d) $(x-1)(x+1)(x-2)$

26 Zadania 1-22: zaczerpnięte z www.zadania.info, 21.03.2013.

4. Wielomiany $W(x) = (x-2)(x+1)(x+2)$ i $P(x) = (a-b)x^3 + x^2 + (a+b)x - 4$ są równe. Z tego wynika, że:

a) $a = 1, b = 2$ b) $a = -1, b = -2$ c) $a = -1, b = 2$ d) $a = 2, b = -1$

5. Stopień wielomianu $W(x) = (x-1)(3x+5)^2(2x+1)^3$ jest równy:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8

6. Wielomian W określony jest wzorem $W(x) = -x^9 + x^8 - 6$. Zatem $W(-5)$ jest liczbą:

a) ujemną b) dodatnią c) niewymierną d) pierwszą

7. Po rozłożeniu wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$, otrzymujemy:

a) $W(x) = (x+5)(x-3)(x+3)$ b) $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

c) $W(x) = (x-5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ d) $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

8. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - 2x, V(x) = 2x^2 + 3x$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

9. Wartość wielomianu $W(x) = 3x - x^2 - x^3$ dla $x = -3$ jest równa:

a) 12 b) -9 c) 9 d) -24

10. Wielomian $P(x) = W(x) - K(x)$ jest siódmego stopnia oraz
$W(x) = mx^7 + 8x^5 + 5, K(x) = 3x^3 + 8x^5 + (3m+2)x^7$.
Wynika stąd, że liczba m jest różna od:

a) 3 b) -1 c) 1 d) 0

11. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$:

a) jest iloczynem wielomianów $(x-2)$ i (x^4+1)

b) ma trzy miejsca zerowe

c) ma dwa miejsca zerowe

d) jest różnicą wielomianów $(x^5 - 2)$ i $x + 2$

12. Funkcja $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$ ma:

a) 1 miejsce zerowe b) 2 miejsca zerowe

c) 3 miejsca zerowe d) nie ma miejsc zerowych

13. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ w punkcie m jest równa 15 dla:

a) $m = 3$

b) $m = 3 \vee m = -3$

c) $m = 2 \vee m = -2 \vee m = 3$

d) $m = 2$

14. Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $W(x) = 5x^2 - 2x^3 + 3$, aby otrzymać wielomian $P(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$?

a) $6 - 7x^2 - 6x^3$

b) $2x^3 + 17x^2$

c) $6x^3 + 7x^2$

d) $6x^3 + 7x^2 - 6$

15. Wiadomo, że $W(-1) = -1$, gdy $W(x) = 2x^3 + px - 3$. Zatem wartość współczynnika p wynosi:

a) $\frac{1}{4}$

b) -4

c) 4

d) -1

16. Wielomiany P i Q określone są wzorami $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = -x^5 + 1$.

Wielomian R

$(x) = 2P(x) + Q(x)$ jest stopnia:

a) 0

b) 10

c) 1

d) 5

17. Wielomiany $P(x) = (a+1)x^3 + x^2 - b$ i $P(x) = (b-1)x^3 + x^2 + 2a + 1$ są równe. Zatem liczba $a + b$:

a) należy do zbioru $\langle 2,\ 3)$

b) jest większa od 3

c) należy do zbioru $(-2, 0\rangle$

d) jest mniejsza od -2

18. Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi:

a) $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$

b) $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$

c) $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$

d) $(x^4 - 2)(x + 1)$

19. Wielomian $x^3 - 3x^2 - 3$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

a) $(x-3)(x-1)(x+1)$

b) $(x-3)x^2$

c) $(x-3)(x^2+1)$

d) $(x-3)^2(x^2+1)$

20. Dane są wielomiany $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + 2$ oraz $P(x) = 2x^4 + 5X^3 + 3x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

a) $5x^4 + 3x + 2$

b) $3x + 2$

c) $-x^4 + 3x + 2$

d) $-x^4 + 3x - 2$

21. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

22. Dane są wielomiany $W(x)=x^3-3x+1$ oraz $V(x)=2x^3$. Wielomian $W(x)\cdot V(x)$ jest równy:

a) $2x^5-6x^4+2x^3$ b) $2x^6-6x^4+2x^3$ c) $2x^5+3x+1$ d) $2x^5+6x^4+2x^3$

23.[27] Dane są wielomiany $W(x)=-2x^3+5x^2-3$ oraz $P(x)=2x^3+12x$. Wielomian $W(x)+P(x)$ jest równy:

a) $5x^2+12x-3$ b) $4x^3+5x^2+12x-3$

c) $4x^6+5x^2+12x-3$ d) $4x^3+12x^2-3$

24.[28] Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+6x-4$. Współczynnik a jest równy

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

25.[29] Dane są wielomiany $W(x)=2x^2-5x$ i $P(x)=x^3-5x^2+2x-1$.
Wielomian $G(x)=2W(x)-P(x)$ jest równy:

a) x^3-3x^2-3x+2 b) $-x^3+7x^2-7x+4$

c) $-x^3+9x^2-12x+7$ d) x^3-x^2-8x+5

26.[30] Dane są wielomiany $\boldsymbol{W(x)=3x^3-2x^2+4}$ oraz $\boldsymbol{M(x)=x^3-2x^2+5}$. Wielomian $\boldsymbol{W(x)-M(x)}$ jest równy:

a) $\boldsymbol{4x^3+9}$ **b)** $\boldsymbol{3x^3+1}$ **c)** $\boldsymbol{2x^3-1}$ **d)** $\boldsymbol{4x^3-4x^2+9}$

27.[31] Dane są wielomiany $W(x)=x-4$ i $M(x)=x^2-2x$. Wielomian $W(x)\cdot P(x)$ jest równy:

a) x^3-2x^2-8x b) x^3-6x^2+8x c) x^3-4x^2-10x d) x^3-4x^2+6x

28.[32] Suma odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x)=4x^3-x^2-4x+1$ jest równa:

a) 4 b) $-0{,}25$ c) 6 d) -4

29. Liczba $x=3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^2-2a$, gdy a jest równe:

a) 18 b) -18 c) 9 d) $18\sqrt{2}$

---

27 Zadanie 23: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.
28 Zadanie 24: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 05.03.2013.
29 Zadanie 25: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 05.03.2013.
30 Zadanie 38: zaczerpnięte z www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf, 05.03.2013.
31 Zadanie 27: zaczerpnięte z www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 05.03.2013.
32 Zadania 28, 29: zaczerpnięte ze strony (www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf), 05.03.2013.

30.[33] Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

31.[34] Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-4)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = 0$ są liczby:

a) $-3, -2, 2, 3$ b) $2, 3$ c) $-3, 2$ d) $-2, 3$

32. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{36-x^2}{(6-x)(x^3-1)}$ jest zbiór:

a) $R\setminus\{1,6\}$ b) $R\setminus\{-6,-1,6\}$ c) $R\setminus\{-6,6\}$ d) $R\setminus\{-6,1,6\}$

33.[35] Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0$ ma:

a) dokładnie jedno rozwiązanie b) dokładnie dwa rozwiązania

c) dokładnie trzy rozwiązania d) dokładnie cztery rozwiązania

34.[36] Liczba 5 nie należy do dziedziny wyrażenia:

a) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$ b) $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$ c) $\frac{x^2-25}{x^2+25}$ d) $\frac{x^2-25}{x+5}$

35. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{2}{x} : \frac{x^2-16}{x+1}$ jest zbiór:

a) $R\setminus\{-1,0\}$ b) $R\setminus\{-4,-1,0,4\}$ c) $R\setminus\{-4,4\}$ d) R

36. Do dziedziny funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{5x}{x(x+1)(x-\sqrt{7})(x^2+7)}$:

a) nie należą 2 liczby b) nie należą 3 liczby c) nie należą 4 liczby d) nie należy 5 liczb

37. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{x^2-2x+3}$ jest największa, gdy liczba x jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) 2

38. Dla której z liczb wyrażenie $\frac{2+x}{x-5}$ nie ma sensu liczbowego?

a) -2 b) -5 c) 0 d) 5

39. Dziedziną wyrażenia $W = \frac{x^2-36}{(x+4)(x^2+4x+4)}$ jest zbiór:

a) $R\setminus\{-6,-4,-2,6\}$ b) $R\setminus\{-6,-4,2,6\}$ c) $R\setminus\{-4,2\}$ d) $R\setminus\{-4,-2\}$

---

33 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf), 05.03.2013.

34 Zadania 31, 32: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 06.03.2013.

35 Zadanie 33: zaczerpnięte z arkusza CKE, sierpień 2012 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 20.03.2013.

36 Zadania 34–47: zaczerpnięte z www.zadania.info, 20.03.2012.

40. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{3x}{x^2-5x+6}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{2\}$ b) R c) $R\backslash\{2,3\}$ d) $R\backslash\{3\}$

41. Zbiór $R\backslash\{-3,0,2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

a) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x^2-x-2}{x^3+5x^2+6x}$ c) $\frac{3x+2}{x(x-2)(x-3)}$ d) $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$

42. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-4x}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-5,5\}$ b) $R\backslash\{0,4\}$ c) $R\backslash\{-2,2\}$ d) $R\backslash\{-5,0,4,5\}$

43. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{-x-3}$ jest zbiór:

a) $\langle -3,+\infty)$ b) $(-3,\ +\infty)$ c) $(-\infty,-3\rangle$ d) $(-\infty,-3)$

44. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2-8x-\frac{59}{4}}$ jest:

a) -2 b) -3 c) -4 d) -5

45. Największą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{30-6x}$, jest:

a) -5 b) -4 c) 5 d) 6

46. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}$ jest:

a) $(-\infty,1\rangle$ b) $(1,+\infty)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(-1,+\infty)$

47. Wyrażenie $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+3}$ jest równe:

a) $\frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$ b) $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$ d) $\frac{x+2}{-5}$

48.[37] Wyrażenie $\frac{x-1}{3x-6} - \frac{2}{x-2}$ jest równe:

a) $\frac{x+1}{3x-6}$ b) $\frac{x+5}{3x-6}$ c) $\frac{x-7}{3x-6}$ d) $\frac{x-3}{3x-6}$

49. **(6 pkt)** Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - mx^3 + nx^2 - 8$. Wartość tego wielomianu dla $x = 2$ jest taka sama, jak dla $x = -2$, a wartość wielomianu dla $x = 3$ wynosi 82. Wyznacz wartości liczb m i n oraz rozwiąż nierówność $W(x) > x^4 + 2$.

37 http: //www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 21.03.2013.

50. **(2 pkt)** Sprawdź, czy wielomiany $W(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ i $H(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$ są równe.

51. **(2 pkt)** Określ dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+3}{x^2-4} + \frac{4}{x-2}$ i wykonaj działania.

52. **(2pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

53. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Odpowiedź: $2, -2, 7$.

54.[38] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

Odpowiedź: $-\sqrt{5}; -2; \sqrt{5}$.

55. Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

56. **(2pkt)** Rozwiąż równanie $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 6x - 12x^3 + 2x^2 - 6x - 12}$.

Odpowiedź: $-2; \sqrt{6}; -\sqrt{6}$.

57.[39] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

58.[40] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{x-2}{3x-1} = \frac{x+5}{3x+2}$.

59. **(2 pkt)** Wykonaj działania: $\frac{x-5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-10x+25}$

60. **(3 pkt)** Pewną liczbę wymierną można przedstawić w postaci $\frac{n}{3-n}$, gdzie $n \in \{1,2,3,....,32\}$. Gdy powiększymy licznik tego ułamka o 39, a mianownik o 20, to podwoimy wartość tego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

---

38 Zadania 54, 55, 56: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 17.03.2013.
39 www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 17.03.2013.
40 Zadania 58, 59, 60: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 17.03.2013.

3 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

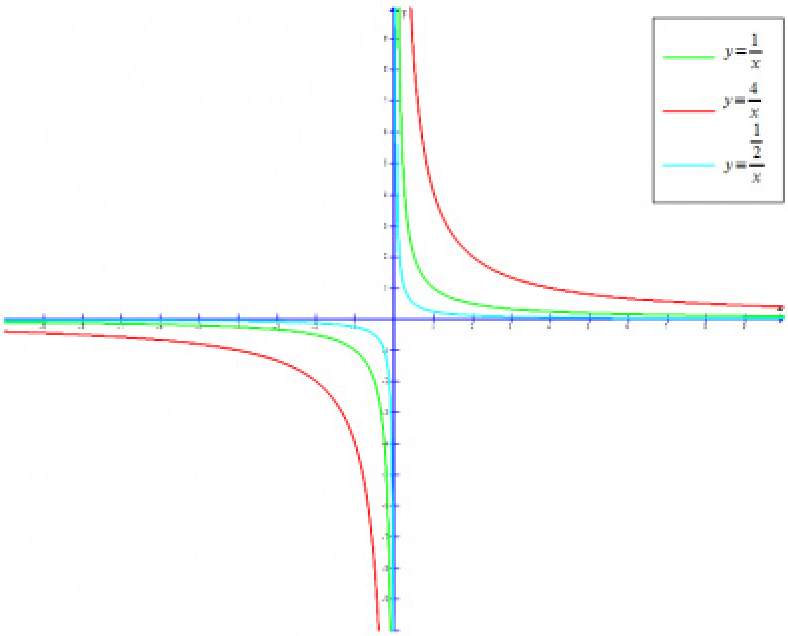
3.1 Funkcja wykładnicza i jej własności

Teraz nauczę się:

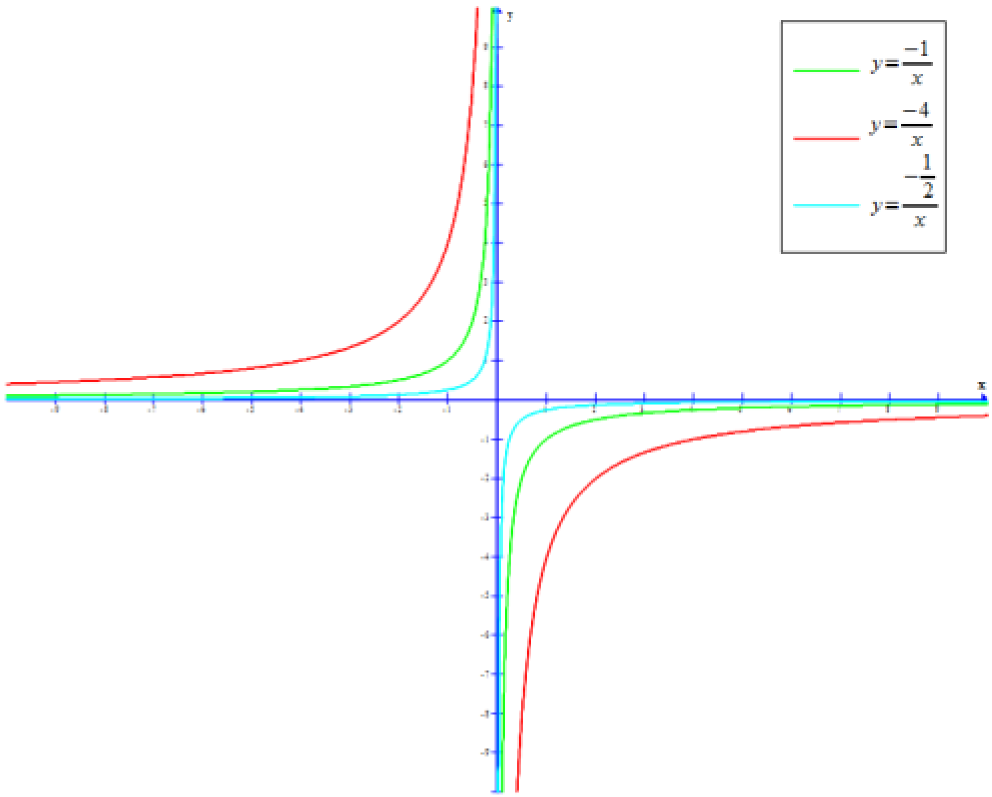
- Szkicować wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla danego a;
- Korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Pojęcie hiperboli.

Poniżej narysowano kilka różnych funkcji typu $f(x)=\frac{a}{x}$.



Rysunek 3-1. Wykres funkcji hiperbolicznej, a > 0



Rysunek 3-2. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a < 0$

Krzywą, która jest wykresem funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy hiperbolą. Wykres składa się z dwóch rozłącznych części, zwanych gałęziami hiperboli.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Gdy $a > 0$, gałęzie hiperboli $y=\frac{a}{x}$ leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

Gdy $a < 0$, gałęzie hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Zatem, aby narysować wykres funkcji, wystarczy znać wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x>0$, a następnie odbić go symetrycznie względem punktu $(0,0)$, czyli początku układu współrzędnych.

Wykres funkcji typu $y=\frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) zbliża się do obu osi układu współrzędnych (punkty tego wykresu mogą leżeć dowolnie blisko tych osi). Prostą $x=0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, a **prostą $y = 0$ nazywamy asymptotą poziomą tego wykresu.**

Zmniejszanie wartości „a" powoduje zbliżenie się hiperboli do osi układu.

Zwiększanie wartości „a" powoduje oddalenie się hiperboli od osi układu.

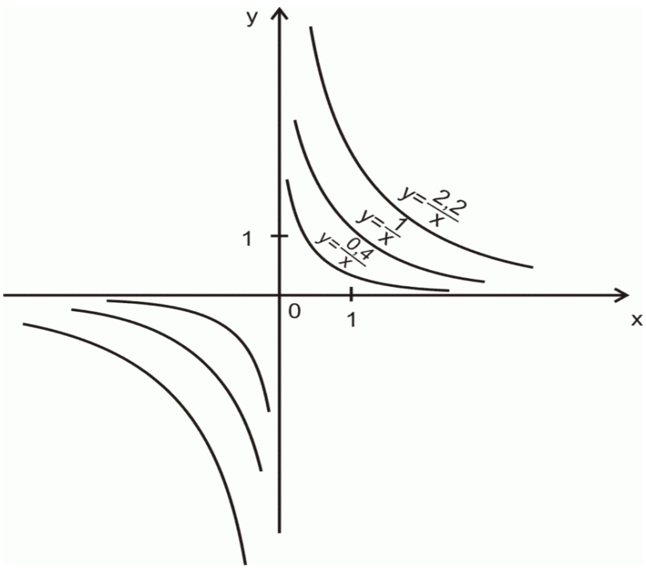
Przykład 1

W jednym układzie współrzędnych należy narysować wykresy funkcji:

$f(x)=\frac{0,4}{x}, f(x)=\frac{1}{x}, f(x)=\frac{2,2}{x} f(x)=\frac{0,4}{x}, f(x)=\frac{1}{x}, f(x)=\frac{2,2}{x}.$

Budujemy częściową tabelę zmienności funkcji:

x	0,25	0,5	1	2
$f(x)=\frac{0,4}{x}$	1,6	0,8	0,4	0,2
$f(x)=\frac{1}{x}$	4	2	1	0,5
$f(x)=\frac{2,2}{x}$	8,8	4,4	2,2	1,1



Rysunek 3-3. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, $a>0$

UWAGA!!!

- Jeśli , $a>0$ to gałęzie hiperboli są położone w I i III ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ **(** $a \neq 0$ **) jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli** $R/\{0\}$**.**
- Widzimy, że funkcja jest **malejąca** w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

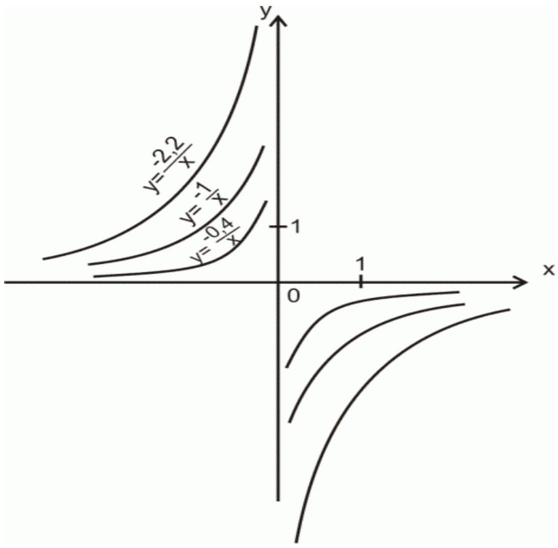
Przykład 2

W jednym układzie współrzędnych należy narysować wykresy funkcji:

$f(x)=-\frac{0,4}{x}, f(x)=-\frac{1}{x}, f(x)=-\frac{2,2}{x}$.

Wykres funkcji $y=-f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y=f(x)$ przez odbicie symetryczne względem osi OX.

Wykorzystując tę własność oraz wykresy funkcji z **Przykładu 1**, widzimy, że wykresy podanych funkcji są następujące:



Rysunek 3-4. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, $a<0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a<0$, to ramiona hiperboli są położone w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ **(** $a\neq 0$ **) jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli** $R/\{0\}$**.**
- Widzimy, że funkcja jest **rosnąca** w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

Poniżej przypominamy reguły dotyczące przesuwania wykresów funkcji:

Niech $a>0$ i $b>0$.

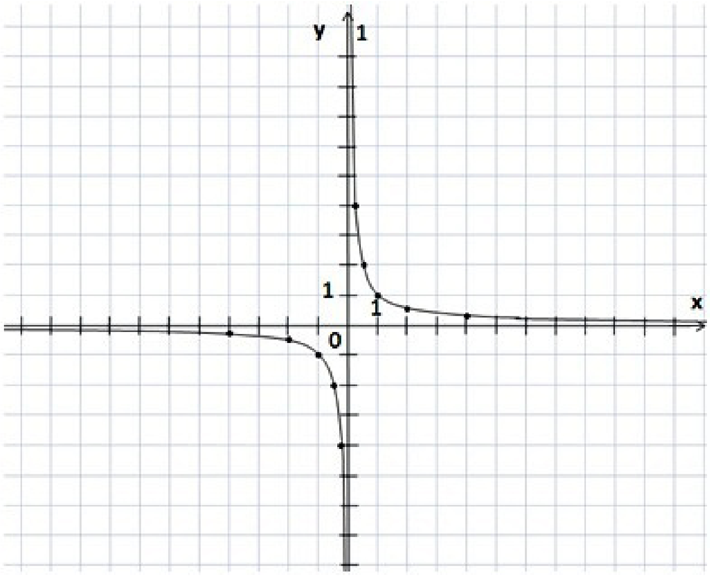
- Jeśli wykres funkcji $y=f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x-a)+b$.
- Jeśli wykres funkcji $y=f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x-a)-b$.
- Jeśli wykres funkcji $y=f$(x) przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x+a)+b$.
- Jeśli wykres funkcji $y=f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y=f(x+a)-b$.

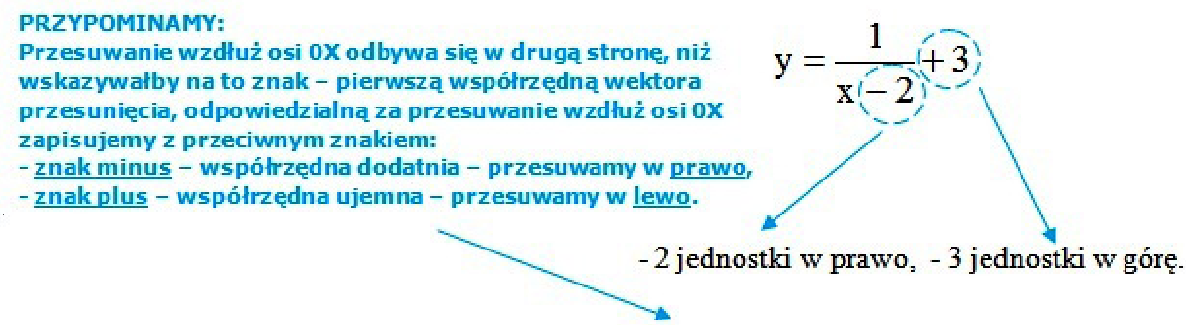
Powyższą regułę wykorzystajmy w przykładzie.

Przykład 3[41]

Narysuj wykres funkcji: $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

W pierwszej kolejności rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{1}{x}$



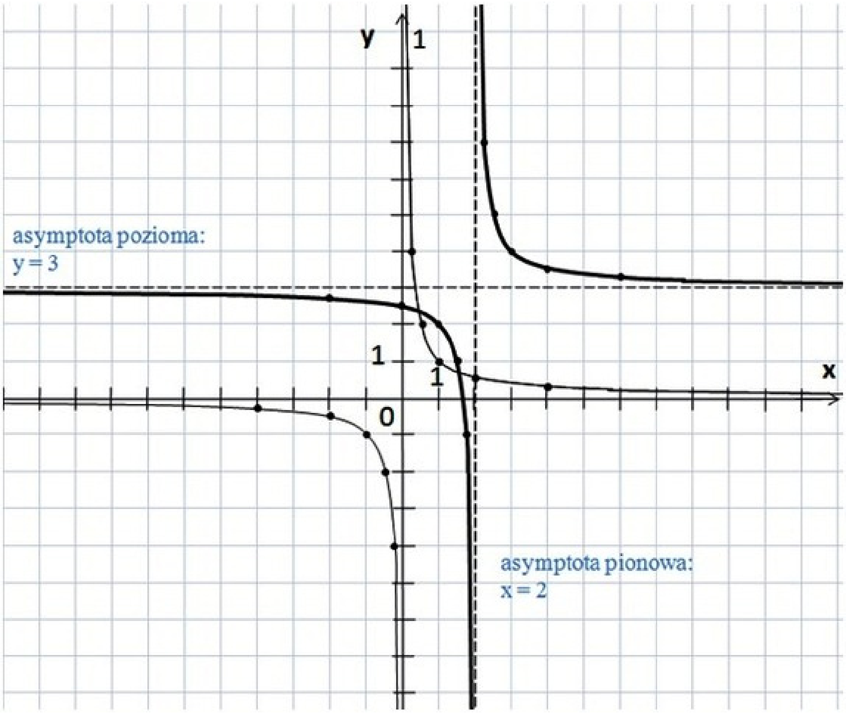


ASYMPTOTY pionową i poziomą przesuwamy wraz z wykresem funkcji.

Dla rozpatrywanego przykładu:

- asymptota pozioma będzie znajdowała się na wysokości 3: $y = 3$,
- asymptota pionowa będzie znajdować się w miejscu argumentu 2: $x = 2$.

41 www.matematykam.pl, 03.03.2013.



ZADANIA

3.1.1 Sporządź wykresy funkcji:

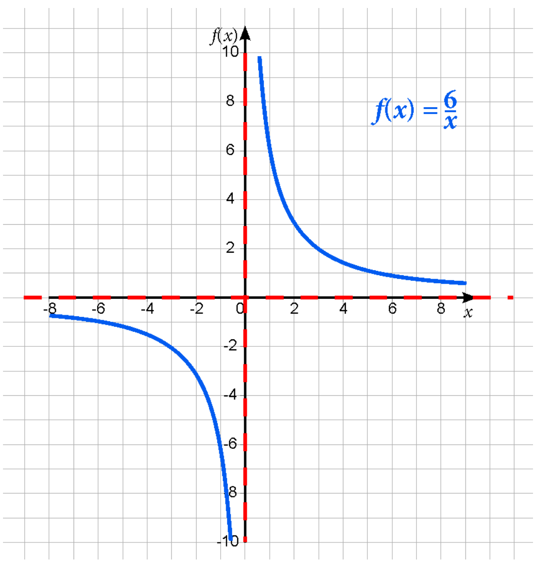
a) $f(x)=\dfrac{6}{x}$ b) $f(x)=-\dfrac{8}{x}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{x}+3$ d) $f(x)=-\dfrac{4}{x}+2$

e) $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ f) $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$ g) $f(x)=\dfrac{5}{x+3}$ h) $f(x)=\dfrac{-3}{x-1}$

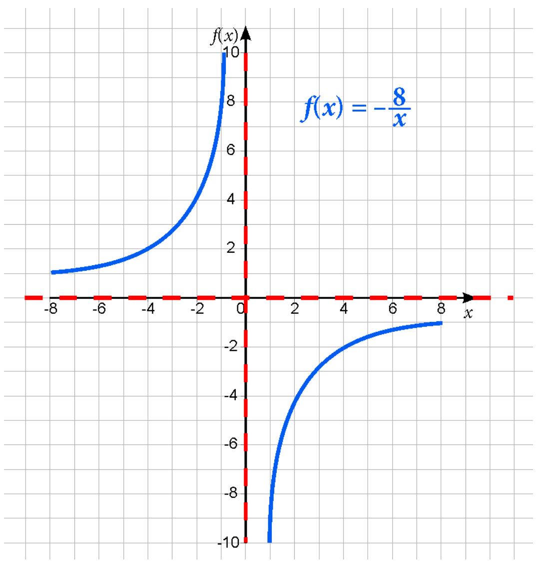
i) $f(x)=\dfrac{4}{x-3}-2$ j) $f(x)=\dfrac{-4}{x-4}+1$

Odpowiedzi:

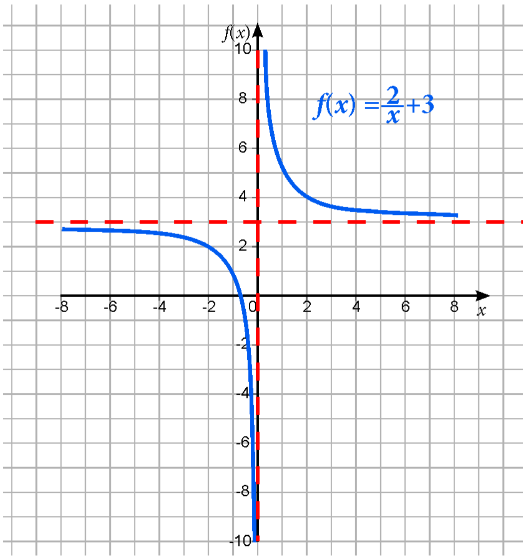
a)



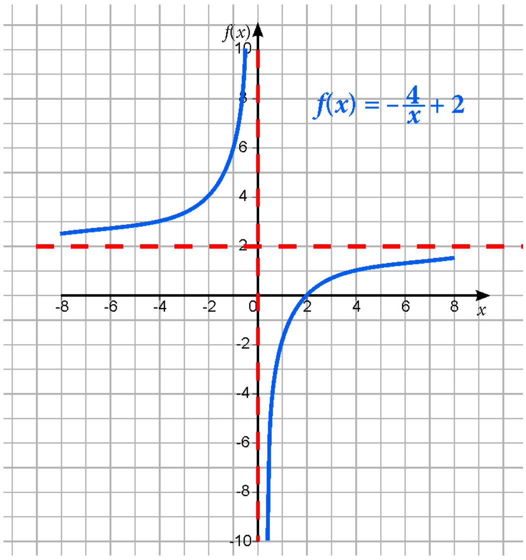
b)



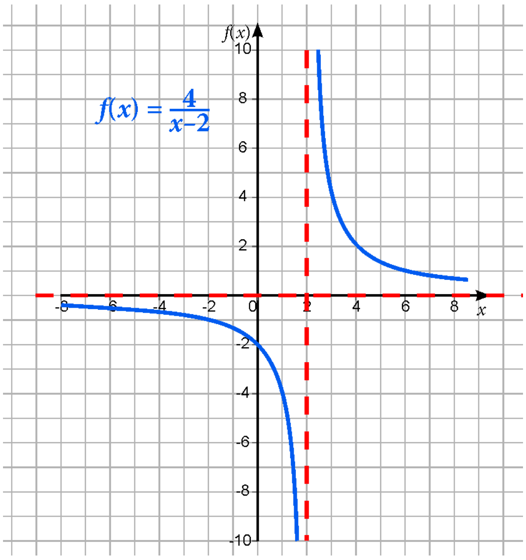
c)


$f(x) = \frac{2}{x} + 3$

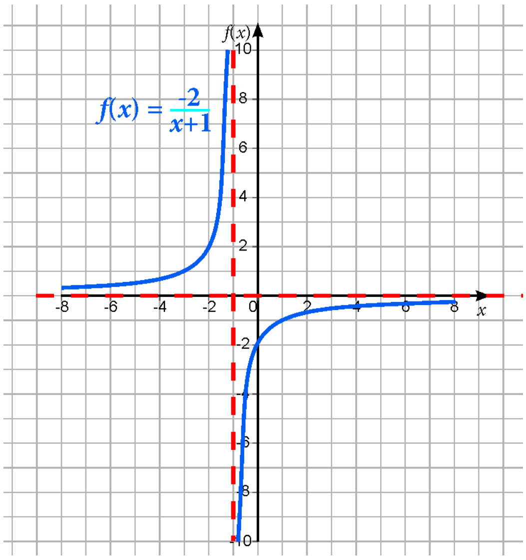
d)


$f(x) = -\frac{4}{x} + 2$

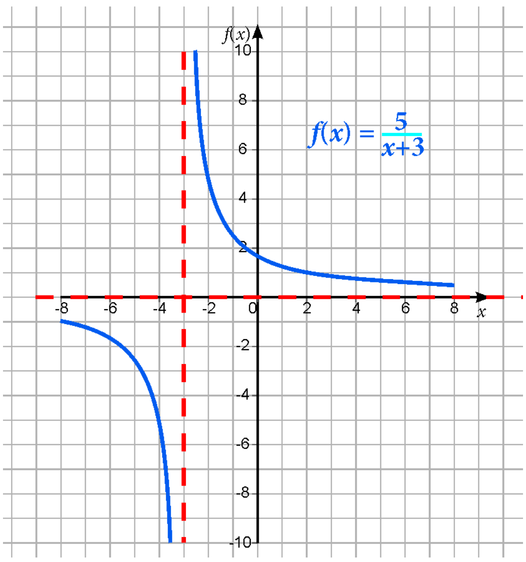
e)


$f(x) = \frac{4}{x-2}$

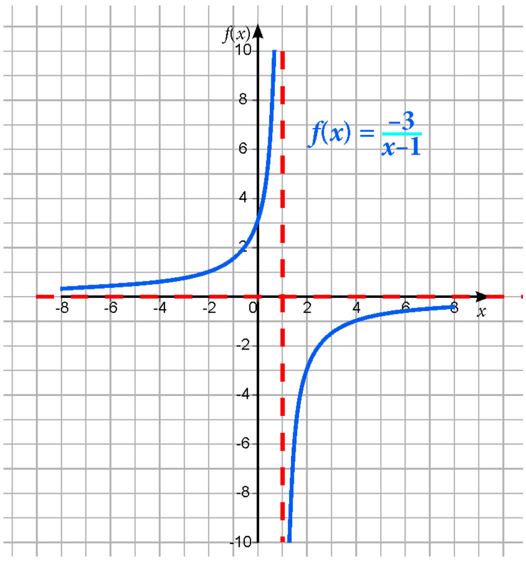
f)


$f(x) = \frac{-2}{x+1}$

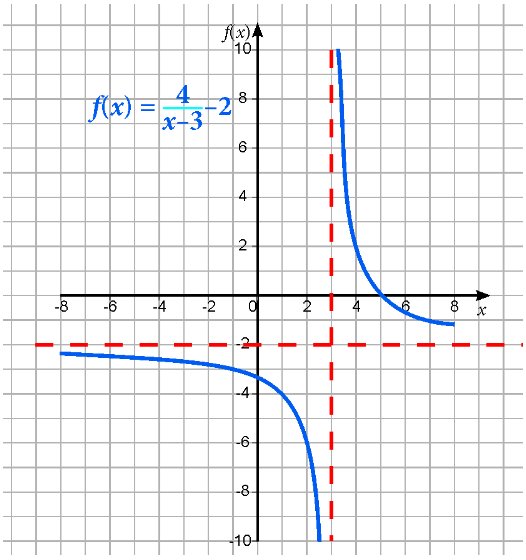
g)


$f(x) = \frac{5}{x+3}$

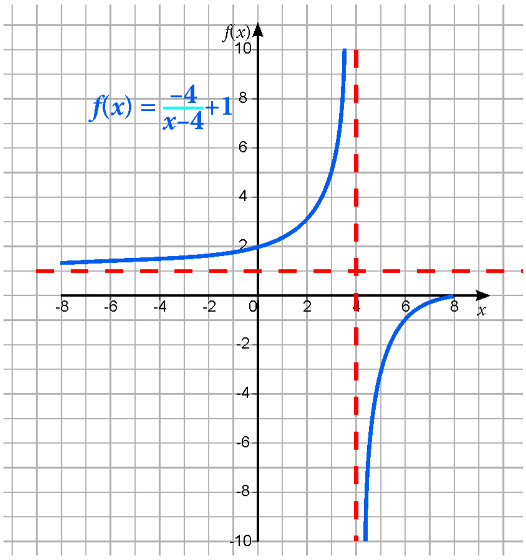
h)


$f(x) = \frac{-3}{x-1}$

i)



j)



3.1.2 Wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g, jeżeli wykres funkcji f przesunięto:

a) o 5 jednostek do dołu

b) o 3 jednostki w prawo

c) o 2 jednostki do góry i 4 jednostki w lewo

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{4}{x} - 5$ b) $f(x) = \frac{4}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4} + 2$

3.1.3 Zapisz równania asymptot wykresu funkcji:

a) $y = \frac{3}{x-1} + 2$ b) $y = \frac{-0{,}7}{x+12} - \frac{1}{3}$ c) $y = \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}} - \sqrt{5}$ d) $y = \frac{7}{3(x-\frac{1}{2})} + \frac{4}{5}$

Odpowiedź:

a) $\boldsymbol{x = 1;\ y = 2}$ b) $\boldsymbol{x = -12;\ y = -\frac{1}{3}}$ c) $x = -\sqrt{3};\quad y = -\sqrt{5}$ d) $x = \frac{1}{2};\quad y = \frac{4}{5}$

3.1.4 Punkt $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} = \left(3\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{6}\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{a}{x}$ b) $f(x) = \frac{a}{x+4}$ c) $f(x) = \frac{a}{x} - 2$ d) $f(x) = \frac{a}{x-2} + 2$

Dla każdej z tych funkcji wyznacz wartość współczynnika $\boldsymbol{a}$.

Odpowiedź:

a) $21\sqrt{2}$ b) $21\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

c) $21\sqrt{2} + 8\sqrt{6}$ d) $21\sqrt{2} - 4\sqrt{6} - 7\sqrt{3} + 4$

3.1.5 Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x-5}+3$ b) $f(x)=\frac{3}{x+2}-3$ c) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x+6}$ d) $f(x)=\frac{-3}{x}+1$

Odpowiedź:

a) Zbiór wartości: $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$.

b) Zbiór wartości: $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$.

c) Zbiór wartości: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-6)\cup(-6,\infty)$.

d) Zbiór wartości: $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$; funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

3.1.6 Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x = -5;\ y = 3$ b) $x = 0{,}6;\ y = 0$ c) $x = -15;\ y = -6$

d) $x = 0;\ y = -2$ e) $x = 0;\ y = 0$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{3}{x+5}+3$, $f(x)=\frac{-9}{x-5}+3$ b) $f(x)=\frac{1}{x-0{,}6}$, $f(x)=\frac{5}{x-0{,}6}$

c) $f(x)=\frac{1}{x+15}-6$, $f(x)=\frac{20}{x+15}-6$ d) $f(x)=\frac{1}{x}-2$, $f(x)=\frac{-17}{x}+3$

e) $f(x)=\frac{16}{x}$, $f(x)=\frac{-0{,}1}{x}$

3.1.7 a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y=-\frac{10}{x+7}-9$.

b) Podaj współrzędne wszystkich punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y=\frac{-6}{x-12}+8$ oraz $y=\frac{6}{x+7}-15$.

Odpowiedź:

a) $\mathbf{(-7,-9)}$

b) $\mathbf{(12,8),(-7,8),(-7,-15),(12,-15)}$

Proporcjonalność odwrotna

Definicja: Proporcjonalność odwrotna[42]

Proporcjonalność odwrotna to taka zależność między dwiema zmiennymi wielkościami x i y, w której iloczyn tych wielkości jest stały. Czyli:

$x\cdot y=a$, gdzie $a,x,y\in R\ /\{0\}$.

42 www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homograficzna, 15.03.2013.

Wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**.

Z powyższego wzoru możemy obliczyć x w zależności od y, wtedy: $x = \frac{a}{y}$

oraz y w zależności od x, wtedy: $y = \frac{a}{x}$

Zauważ, że ostatni wzór to wzór funkcji omawianej w poprzednim podrozdziale tego tematu.

Przykład 4

Pan Nowak ma przeczytać książkę, która liczy 520 stron. Postanowił, że codziennie będzie czytał taką samą liczbę stron. Liczba x przeczytanych dziennie stron oraz liczba y dni w czasie, w którym Pan Nowak przeczytał książkę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, ponieważ:

$x \cdot y = 520$

Jeśli Pan Nowak czyta więcej stron dziennie, to czas czytania książki jest krótszy. Czytając 20 stron dziennie, Pan Nowak przeczyta książkę w ciągu 26 dni, zaś przy czytaniu 65 stron dziennie, przeczyta ją w ciągu 8 dni.

Mamy stałą wartość iloczynu $20 \cdot 26 = 65 \cdot 8 = 520$.

Liczba dni czytania y zależy od liczby przeczytanych stron x w sposób $y = \frac{520}{x}$.

Przykład 5

Weźmy podstawowy wzór fizyczny:

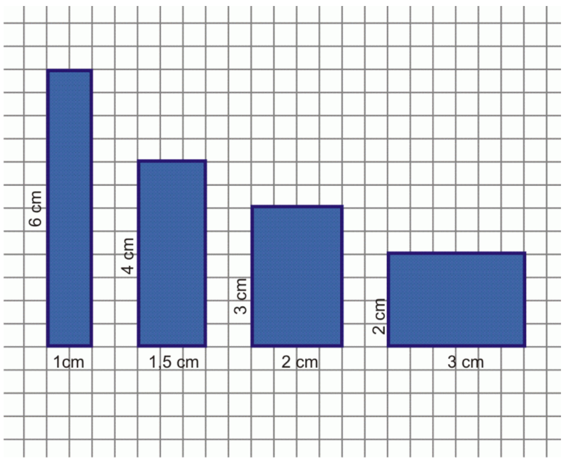
$v = \frac{s}{t}$

Zakładamy, że droga (s) jest stała, a prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do czasu.

Np. jedzie samochód z miasta A do miasta B. Im szybciej jedzie, tym mniej czasu mu to zajmie. Odległość między tymi miastami się nie zmienia, czyli droga (s) jest wielkością stałą.

Przykład 6

Na rysunku poniżej przedstawiono prostokąty o polu 6 cm^2



Rysunek 3-5. Prostokąty o równym polu

Przy stałym polu prostokąta im większa jest długość jednego jego boku, tym mniejsza jest długość drugiego.

Jeśli długość jednego boku prostokąta **zwiększymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 2,5 razy;
- 5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 5 razy;
- 6 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 6 razy.

I odwrotnie, jeśli długość jednego boku prostokąta **zmniejszymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 2,5 razy;
- 5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 5 razy;
- 6 razy, to jego drugi bok zwiększy się 6 razy.

Zauważ, że pole prostokąta jest stałe i równe iloczynowi długości jego boków.

Przykład 7[43]

Samochód jadąc ze stałą prędkością, pokonuje pewną drogę w ciągu 6 godzin. Z jaką prędkością powinien jechać motocyklista, aby tę samą trasę przejechać w ciągu 3 godzin?

Zauważ, że stała jest długość trasy, czyli droga, jaką pokonują samochód i motocyklista. Droga jest równa iloczynowi prędkości przez czas jazdy.

Odpowiedź: Motocyklista ma pokonać tę samą trasę w ciągu 3 godzin, czyli w czasie 2 razy krótszym niż samochód. Zatem jego prędkość powinna być 2 razy większa niż prędkość samochodu.

Wniosek:

- Jeśli jedna z wielkości rośnie (maleje), a równocześnie druga wielkość maleje (rośnie) tyle samo razy, to te wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi.**
- **Iloczyn** wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

43 www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne, 15.03.2103

ZADANIA

3.1.8 Sprawdź, czy wielkości podane w tabelce są odwrotnie proporcjonalne? Jeżeli tak, to podaj wartość współczynnika proporcjonalności.

x	0,3	1	3	2	0,2
y	4	1,2	0,4	0,6	6

Odpowiedź:

Aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne, ich iloczyn musi być stały, liczymy więc $x \cdot y$:

$0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$

$1 \cdot 1{,}2 = 1{,}2$

$3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$

$2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2$

Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości to $a = 1{,}2$.

3.1.9 Uzupełnij tabelkę tak, aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne.

x	3,6		0,1	144
y		0,6	36	

Odpowiedź:

x	3,6	6	0,1	144
y	1	0,6	36	0,025

3.1.10 Koło zębate o 120 zębach napędza koło zębate o 48 zębach. Ile razy obróciło się małe koło, gdy duże koło w tym czasie obróciło się 40 razy?

Odpowiedź: Małe koło obróciło się 100 razy.

3.1.11 Kierowca pokonał pewną trasę, jadąc ze średnią szybkością 90 km/h. O ile kilometrów na godzinę powinien zwiększyć szybkość, aby pokonać tę samą trasę w czasie krótszym o 25%?

Odpowiedź: Kierowca powinien zwiększyć szybkość o 30 km/h.

3.2 Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczej

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = a^x$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Jej nazwa pochodzi od tego, że x znajduje się w wykładniku.

Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza,** która przecina oś OY w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Kształt wykresu zależy od podstawy a.

Przypadek I[44]

Funkcja rosnąca w podstawie mająca liczbę większą od 1.

Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = 2^x$

Aby narysować wykres funkcji, w pierwszej kolejności tworzymy tabelę, zawierającą punkt (0, 1) oraz parę punktów położonych na lewo od tego punktu, oraz parę położonych na prawo.

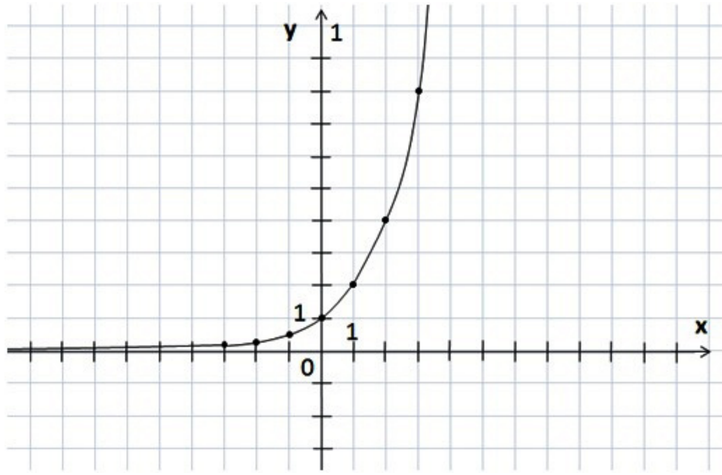
Trzy liczby na lewo od 0. Trzy liczby na prawo od 0.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Następnie zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią.

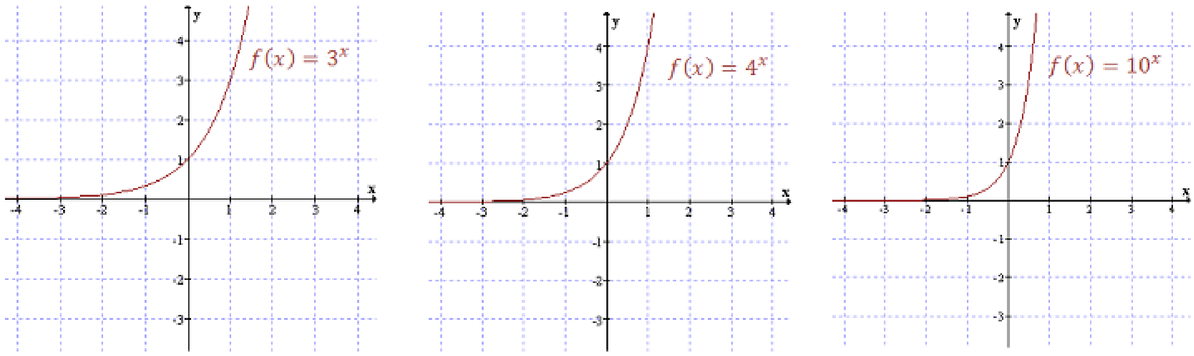
44 www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html, 12.03.2013.

UWAGA!!!! Linia wykresu nie może przeciąć osi OX.



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $\boldsymbol{a} > 1$.

Przykładowo:



Rysunek 3-6. Wykresy funkcji wykładniczych, a > 0

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a > 1}$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = \boldsymbol{R_+}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $\boldsymbol{rosnąca}$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x)} > 0$, gdy $\boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

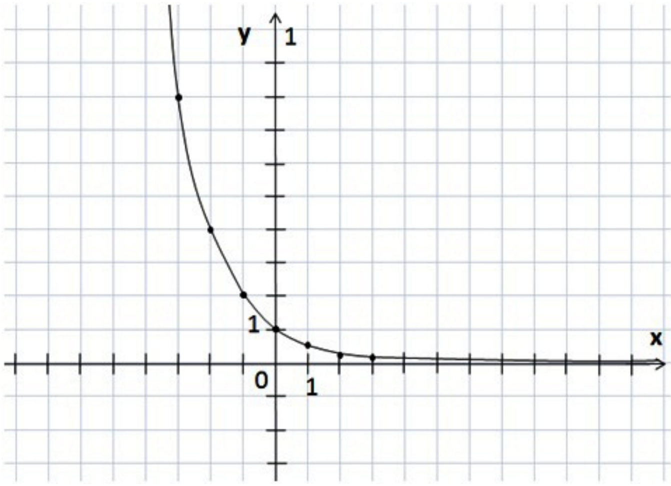
Przypadek II

Funkcje mające w podstawie ułamek.

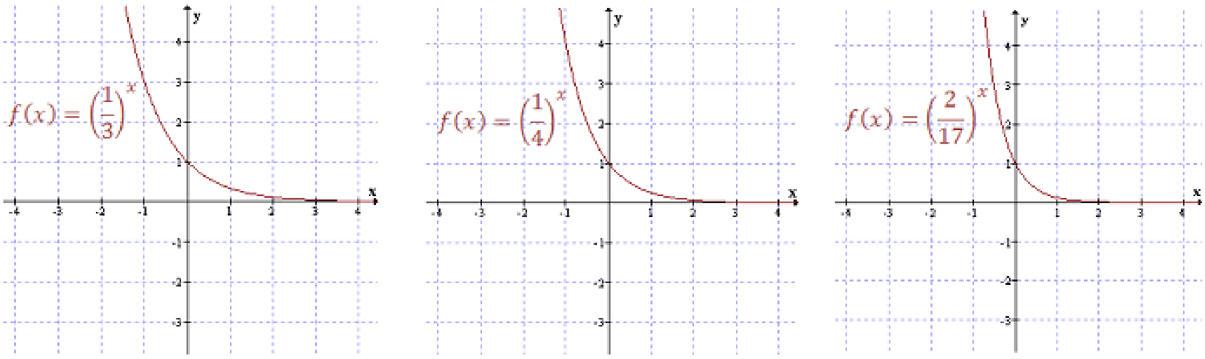
Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Postępujemy dokładnie w ten sam sposób, jak dla funkcji mającej w podstawie liczbę większą od 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $\boldsymbol{a} < 1$. Przykładowo:



Rysunek 3-7. Wykresy funkcji wykładniczych, a < 0

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{\boldsymbol{a} < 1}$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.

2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = \boldsymbol{R}_+$.

3. Monotoniczność: funkcja jest $\boldsymbol{malejąca}$.

4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x)} > 0$, gdy $\boldsymbol{x} \in (-\infty;\ +\infty)$.

5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.

6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Funkcje wykładnicze – przesunięcie

Funkcje wymagające przesuwania prostszych przypadków wzdłuż osi układu.

Przykład:

$f(x) = 2^{x-1} - 4$

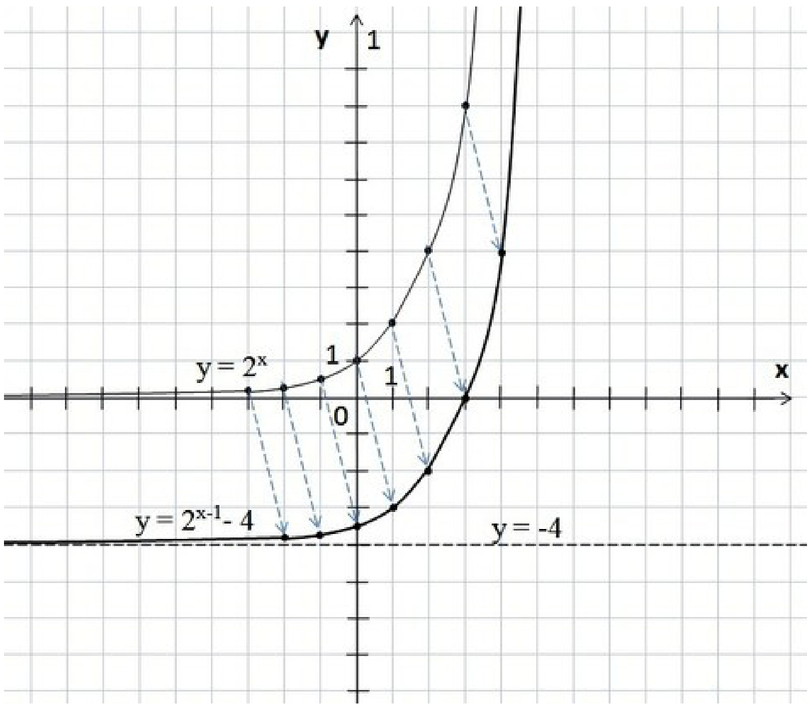
W celu narysowania powyższej funkcji, w pierwszej kolejności rysujemy prostszą funkcję:

$f(x) = 2^x$

W tym przypadku będziemy wykres funkcji $y = 2^x$ przesuwać o wektor $[1, -4]$ (przesuwamy wykres o 1 jednostkę w prawo i 4 jednostki w dół).

UWAGA:

W przypadku tej funkcji asymptota pozioma również przesunie się o 4 jednostki w dół, czyli będzie miała wzór $y = -4$.



Dla przypadków, gdy wykres otrzymujemy poprzez przesunięcie o wektor, asymptota znajduje się na wysokości, która wynika z przesunięcia wykresu funkcji o określoną liczbę jednostek w górę lub w dół.

UWAGA!!!!

Gdy funkcja ma miejsce zerowe, należy je obliczyć, przyrównując wzór funkcji do zera. Otrzymujemy wówczas równanie wykładnicze.

Określenie, czy funkcja ma miejsce zerowe, nie wymaga rysowania wykresu. Wystarczy stwierdzić, czy podczas rysowania będziemy przesuwać wzór funkcji w dół, czy nie. Tylko funkcje wymagające przesuwania w dół podczas rysowania mają miejsce zerowe.

Przykład:

Obliczymy miejsce zerowe funkcji:

$f(x) = 2^{x+7} - 16$

Rysując tę funkcję, wykres funkcji $f(x) = 2^x$ musielibyśmy przesunąć o 7 jednostek w lewo i 16 w dół. Wynika stąd, że ta funkcja ma miejsca zerowe.

Aby je obliczyć, wystarczy wzór funkcji przyrównać do zera.
$2^{x+7} - 16 = 0$

$2^{x+7} = 16$

$2^{x+7} = 2^4$ teraz możemy pominąć podstawy i przyrównać wykładniki.
$x + 7 = 4 \Rightarrow x = -3$

Odpowiedź: Funkcja ma miejsce zerowe dla $x = -3$.

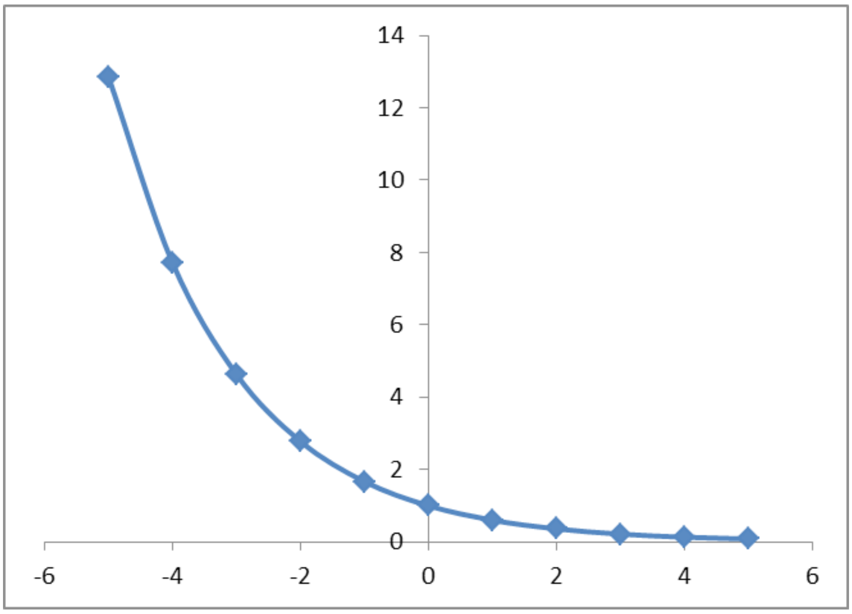
ZADANIA

3.2.1 Narysuj wykresy następujących funkcji:

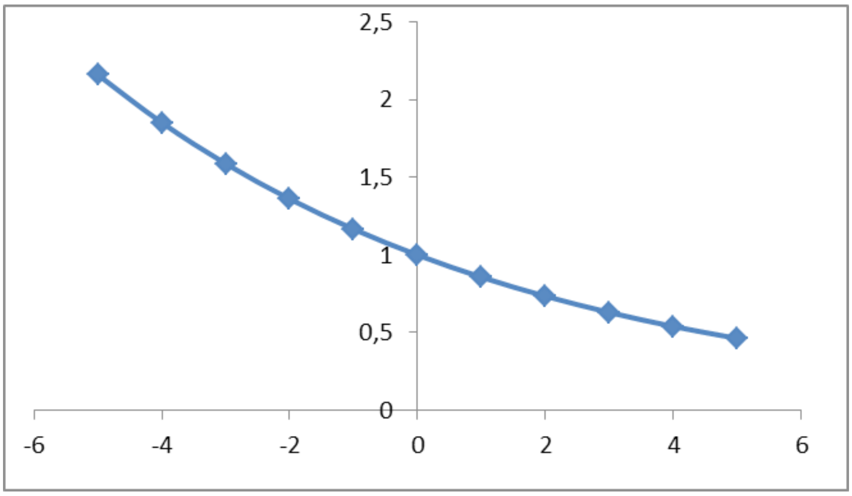
a) $f(x) = (0{,}6)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$ c) $f(x) = 10^x$

Odpowiedzi:

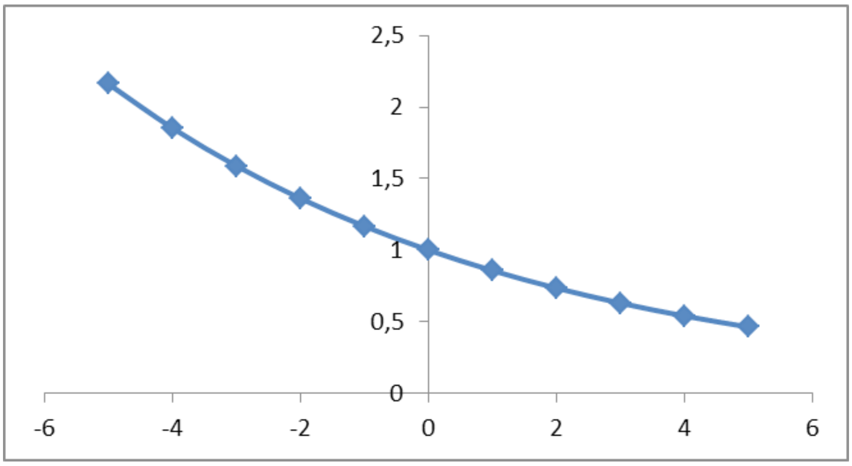
a)



b)



c)

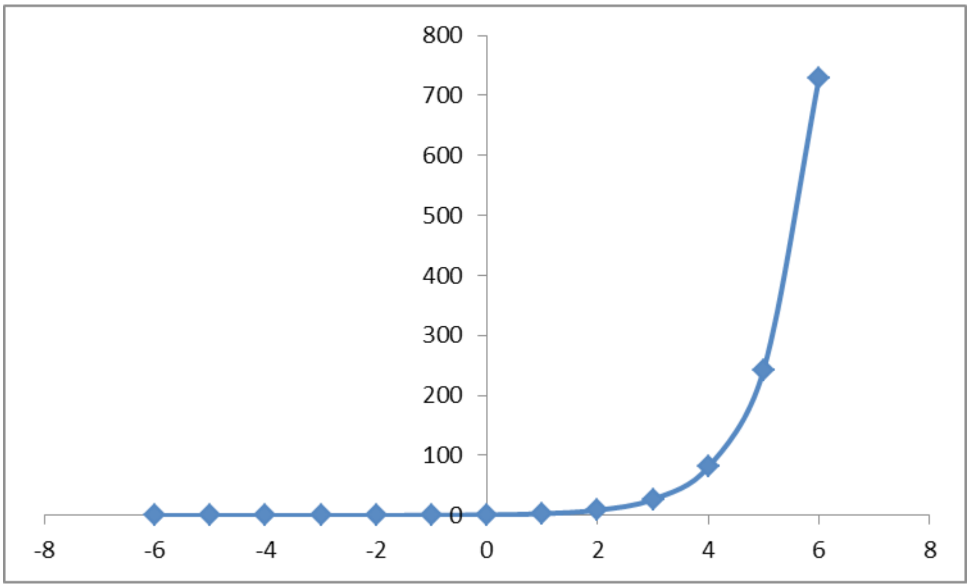


3.2.2 Narysuj wykres funkcji $f(x) = 3^x$, a następnie wykresy funkcji:

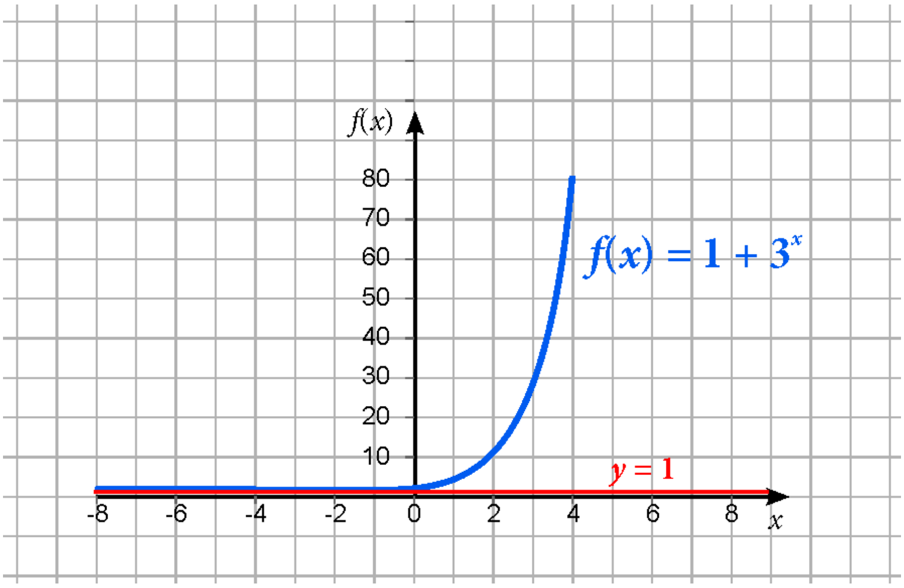
a) $f(x) = 1 + 3^x$ b) $f(x) = -4 + 3^x$ c) $f(x) = 3^{x+2}$ d) $f(x) = 3^{x-3}$

e) $f(x) = -3^x$ f) $f(x) = 4 - 3^x$ g) $f(x) = 9 \cdot 3^x$

Odpowiedź: wykres $y = 3^x$

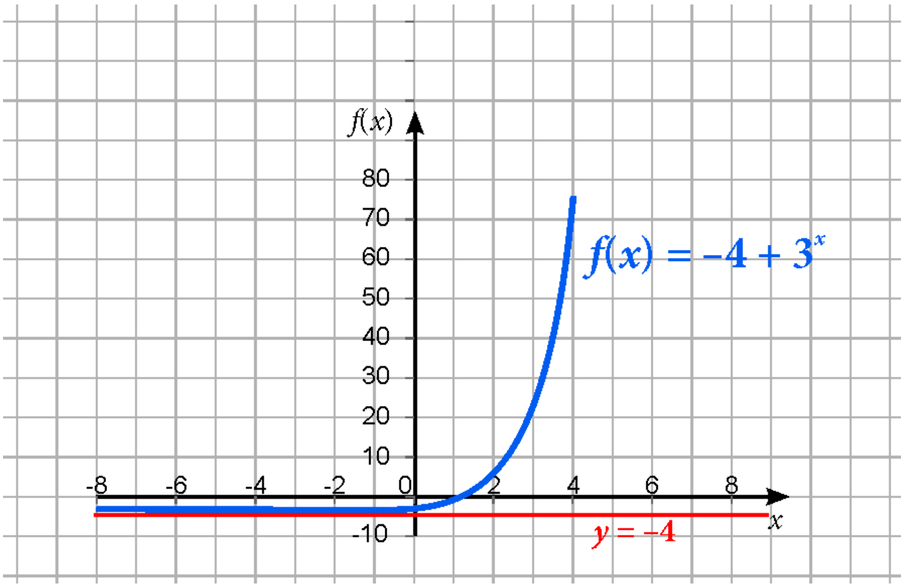


a)



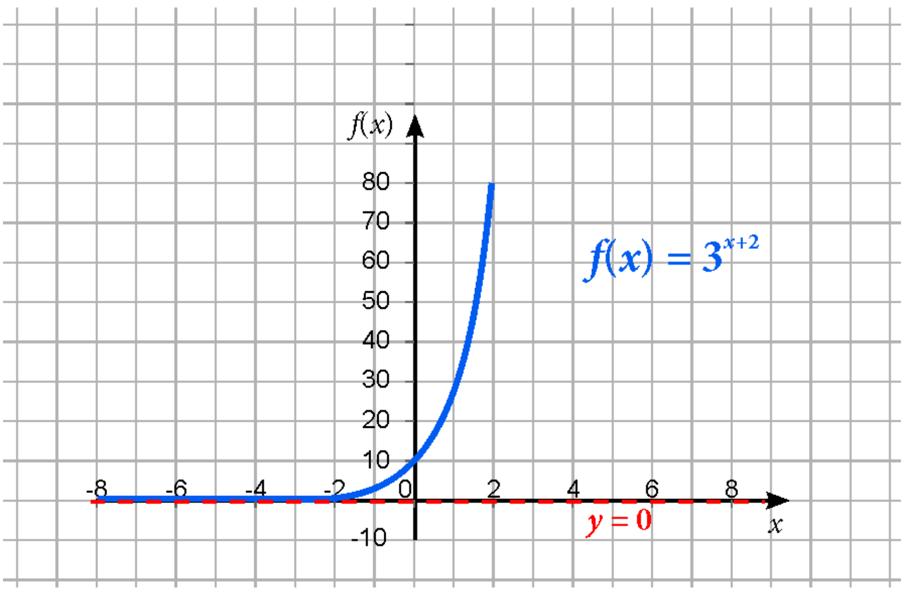
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
f(x) = 1 + 3^x
y = 1

b)



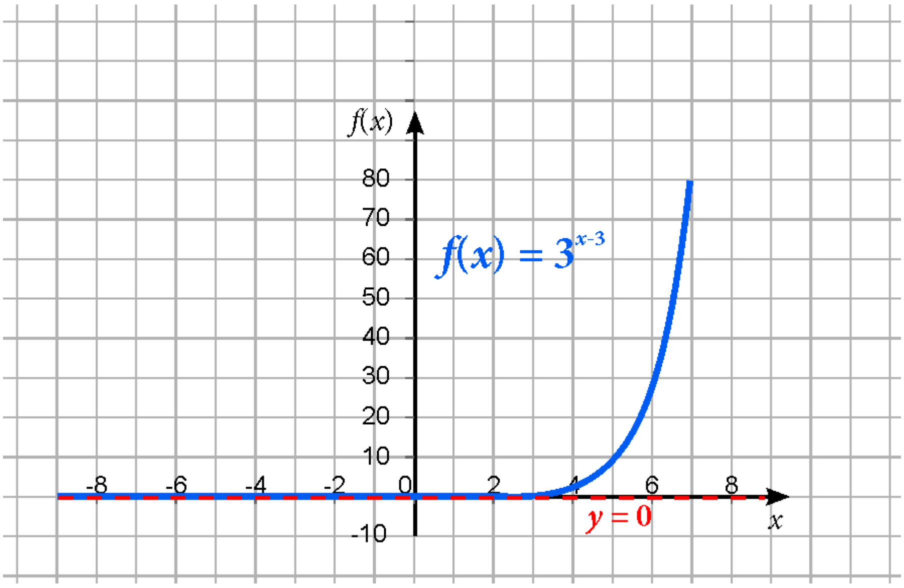
f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
f(x) = −4 + 3^x
y = −4

c)

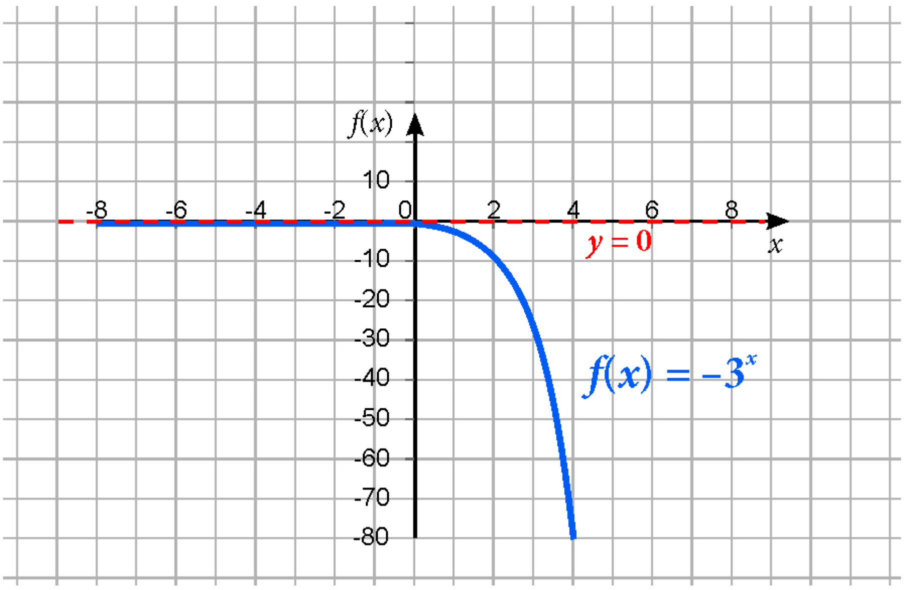


f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
f(x) = 3^(x+2)
y = 0

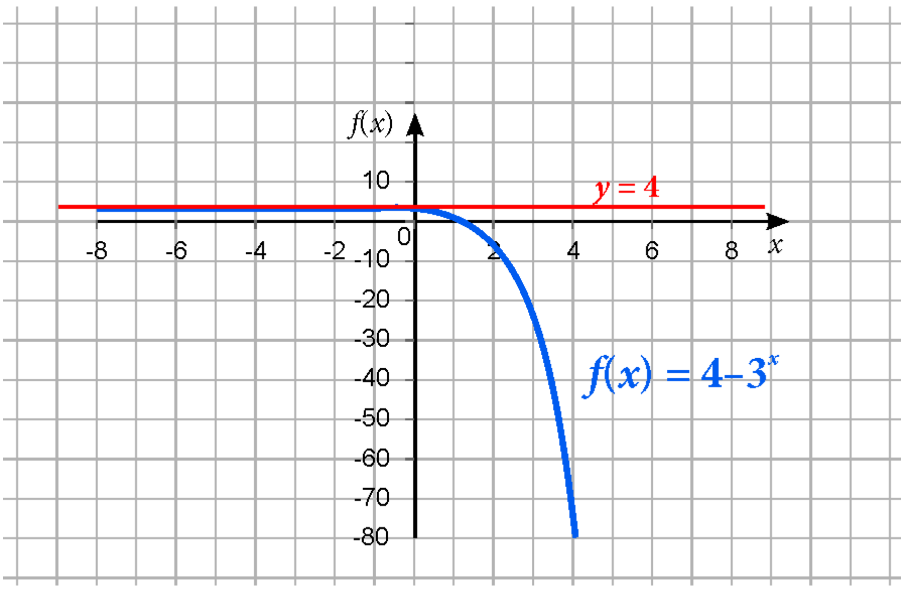
d)


f(x)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
f(x) = 3^(x-3)
y = 0

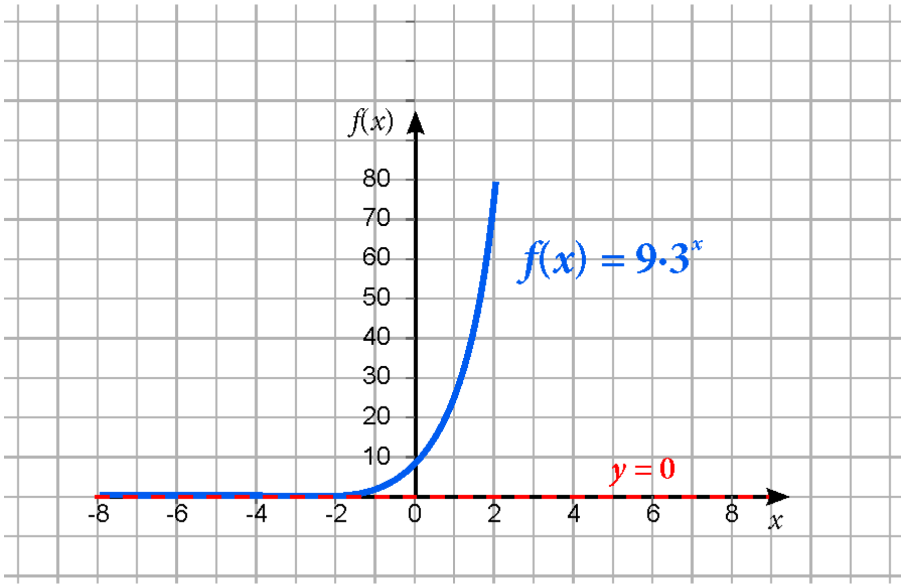
e)


f(x)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
y = 0
f(x) = −3^x

f)


f(x)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
y = 4
f(x) = 4−3^x

g)



3.2.3 Dane są funkcje:

$$j:(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^{x}-5 \quad k:(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \quad l:(x)=6^{x+4}$$

Które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) przyjmują tylko wartości dodatnie,

c) mają asymptotę $y=0$,

d) mają miejsca zerowe,

e) przecinają oś. y

Odpowiedź:

a) l b) k, l c) k, l

d) j e) j, k, l

3.2.4 Podaj równanie asymptoty funkcji $f(x)$, określonej wzorem:

a) $f(x)=5^{x-2}$ b) $f(x)=0{,}3^{x+3}-4$ c) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-1$

d) $f(x)=5^{x}+5$ e) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}-4$

Odpowiedź:

a) $y=0$ b) $y=-4$ c) $y=-1$

d) $y=5$ e) $y=-4$

3.2.5 Napisz wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A = (3, \frac{1}{8})$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 2) - 1$.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x)$.

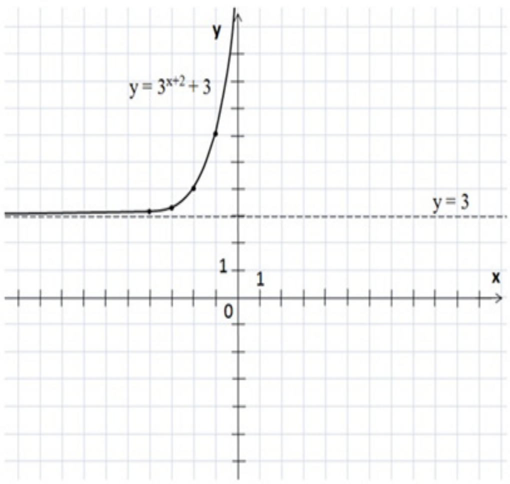
c) Dla jakich argumentów funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

Odpowiedź:

a) $a = \frac{1}{2}$,   b) $x = -2$;   c) $x > -2$

3.2.6 Narysuj wykres funkcji i określ jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność, miejsce zerowe oraz asymptotę):

$f(x) = 3^{x+2} + 3$



Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.

Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = (3, +\infty)$.

Funkcja rosnąca.

Miejsce zerowe: brak.

Asymptota: $y = 3$.

3.3 Funkcja logarytmiczna i jej własności*

W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje o postaci $y = \log_a x$. Takie funkcje nazywamy **funkcjami logarytmicznymi**.

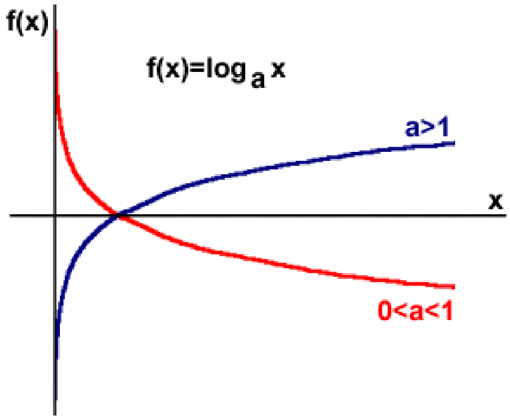
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = \log_a x$ gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

Dziedziną każdej funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

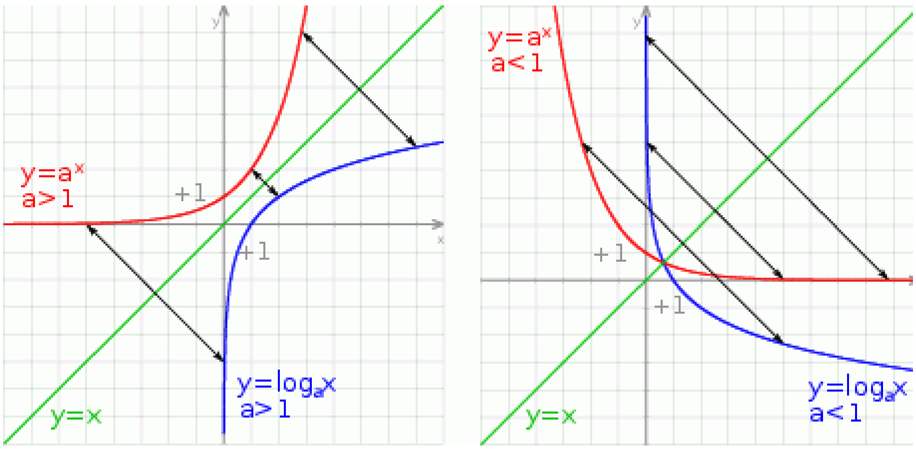
Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się **krzywą logarytmiczną**.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją malejącą dla $a \in (0, 1)$, natomiast dla $a \in (1, +\infty)$ jest funkcją rosnącą.



Rysunek 3-8. Wykresy funkcji logarytmicznych

Funkcja logarytmiczna $\boldsymbol{f(x) = log_a\, x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = ax$. Wykresy tych funkcji są symetryczne względem prostej $\boldsymbol{f}(x) = x$.

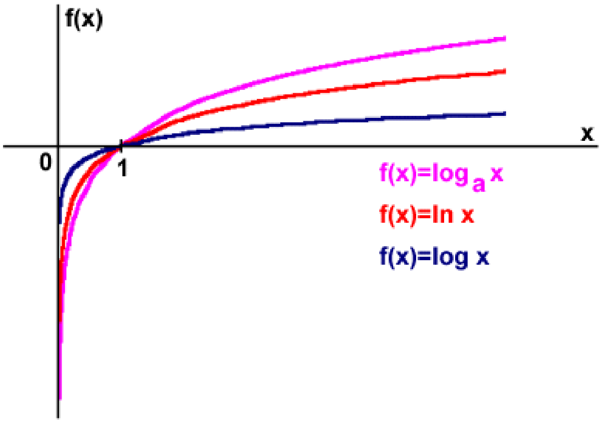


Rysunek 3-9. Funkcja wykładnicza a logarytmiczna

Ciekawostka

Wiadomo, że w zależności od podstawy, istnieją trzy grupy logarytmów:

- logarytm przy dowolnej podstawie – $\boldsymbol{\log_a x}$
- logarytm przy podstawie dziesiętnej (***dziesiętne***) – $\boldsymbol{\log_{10} x = log\ x = lg\ x}$
- logarytm przy podstawie z ***e (liczby Nepera e*** = ***2,718281828...)*** – $\boldsymbol{\log_e x = ln\ x}$



Rysunek 3-10. Wykres funkcji logarytmicznej przy podstawie z e

Symbol $ln\,x$ jest symbolem logarytmu naturalnego i oznacza logarytm o podstawie $a = e (e \approx 2{,}7)$.

$ln x = \log_e x$

$ln 1 = 0,$ bo $e^0 = 1$

$ln e = 1$, bo $e^1 = e$

$ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$, bo $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

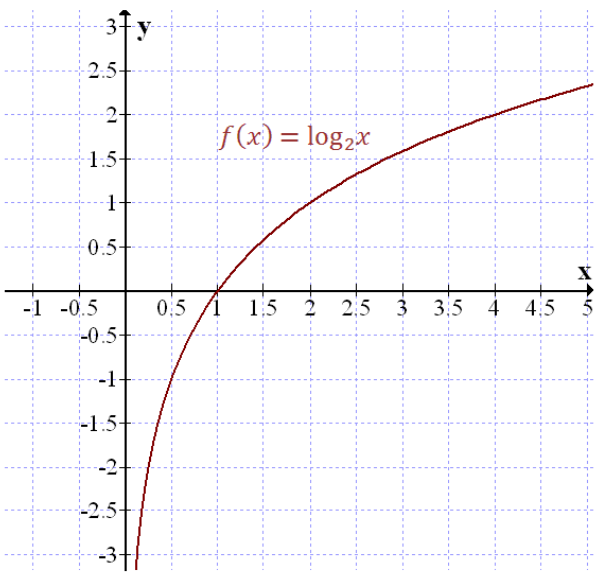
Funkcja logarytmiczna i jej własności*

Przypadek I [45] – dla $a > 1$

Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_2 x$. Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x. Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y=log^2x	-2	-1	0	1	2

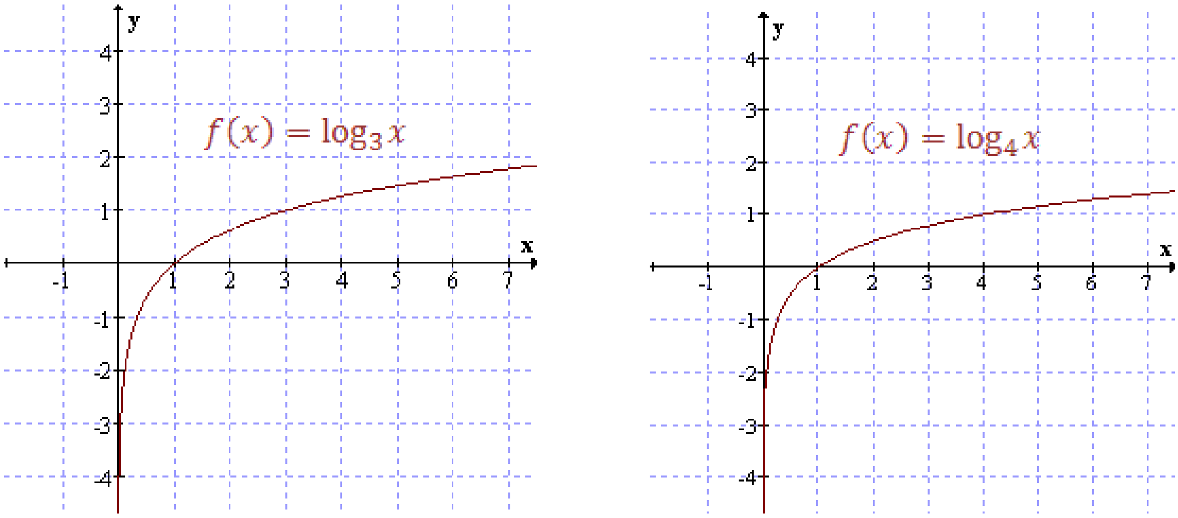
Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



45 Przypadek I i II: www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php, 17.03.2013.

Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a > 1$.

Przykłady:



Rysunek 3-11. Wykres funkcji logarytmicznych, $a > 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $\underline{a > 1}$:

1. Dziedzina: $D = R_+$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R$.
3. Monotoniczność: funkcja jest ***rosnąca***.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (1;\ +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: $x = 1$.
6. Oś OY jest asymptotą pionową, czyli prosta $y = 0$.

Przypadek II – dla $\underline{a < 1}$

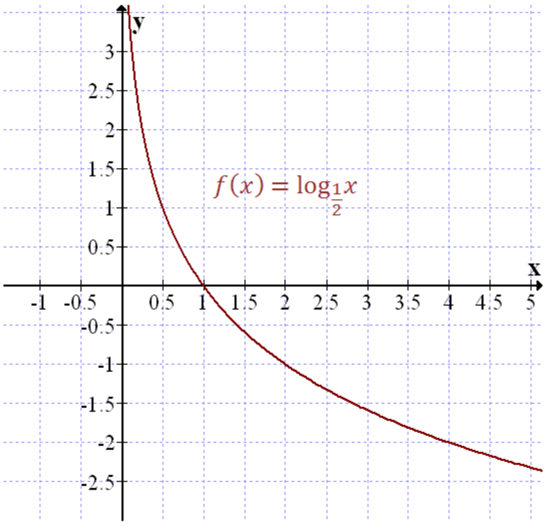
Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x.

Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

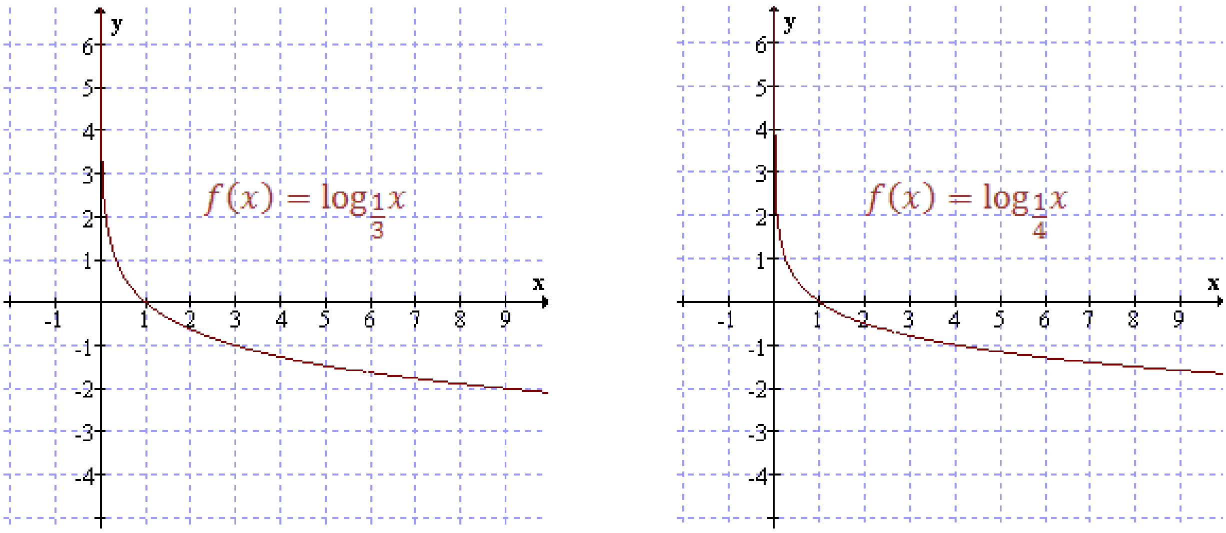
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log^2 x$	2	1	0	-1	-2

Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $\boldsymbol{a} < 1$.

Przykłady:



Rysunek 3-12. Wykresy funkcji logarytmicznych, $0 < a < 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a < 1$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}_{+}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = \boldsymbol{R}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest ***malejąca***.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x)} > 0$, gdy $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{0};\ \boldsymbol{1})$.
5. Miejsca zerowe: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$.
6. Oś OY jest asymptotą pionową, czyli prosta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

ZADANIE

3.3.1 Podaj współrzędne punktów symetrycznych względem prostej $y = x$ do punktów:

a) $A = (1,5), B = (4,-2), C = (-5,-1), D = (0,-3), E = (10,0)$

3.4 Szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznej*

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw.

ZADANIA

3.4.1. Narysuj wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \log_2(x-3)$

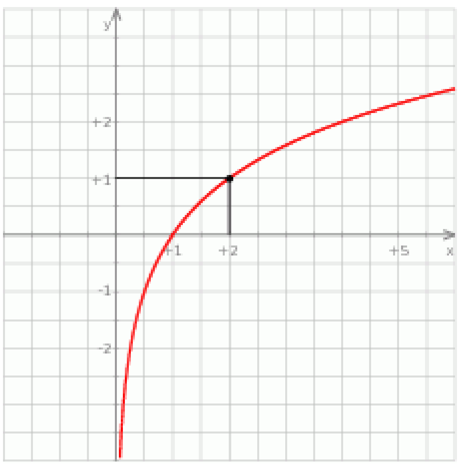
b) $y = \log_2(5+x)$

c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = -4 + \log_2 x$

e) $y = \log_2(x+1)$

3.4.2. Dany jest wykres funkcji logarytmicznej f.



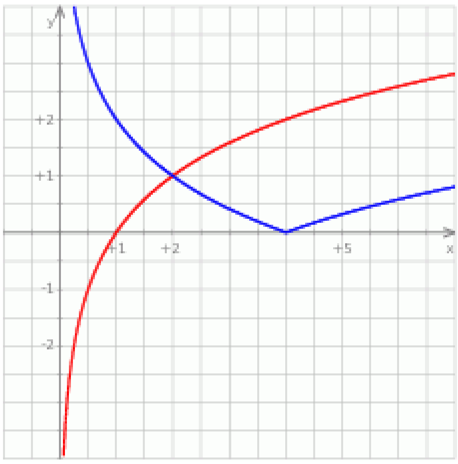
a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.

c) Odczytaj z rysunku zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są nie mniejsze od wartości funkcji f.

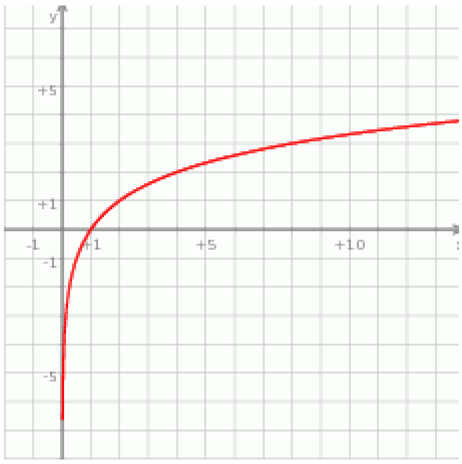
Odpowiedź:

a) $f(x) = \log_2 x$



b) że $g(x) \geq f(x)$ dla $x \in (0, 2\rangle$.

3.4.3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.



a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p.
b) Oblicz $f(0{,}125)$.

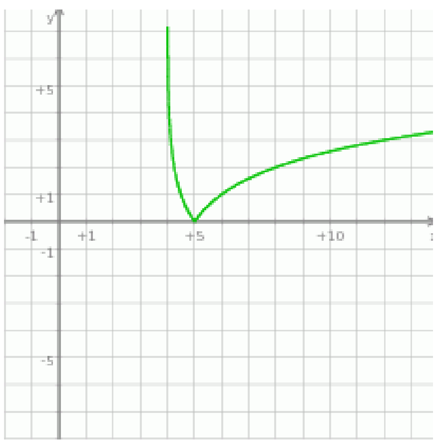
c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x-4)|$.
d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.

Odpowiedź:

a) $p = 2$

b) $\log_2(0{,}125) = -3$

c) Wykres rys.



d) $x = 5$

3.5 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne w zjawiskach fizycznych i chemicznych

Teraz nauczę się:

- Posługiwać funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- Posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Zastosowanie funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym

Przykład 1

Model wykładniczy

Niech funkcja $f(t), t \geq 0$ opisuje pewną wielkość zmieniającą się w czasie. Wielkość ta zmienia się zgodnie z **modelem wykładniczym**, jeśli:

$f(t) = b \cdot a^t$, gdzie $a > 0, a \neq 1$ i $t \geq 0$.

UWAGA!!!

Liczby a i b są na ogół wyznaczane doświadczalnie.

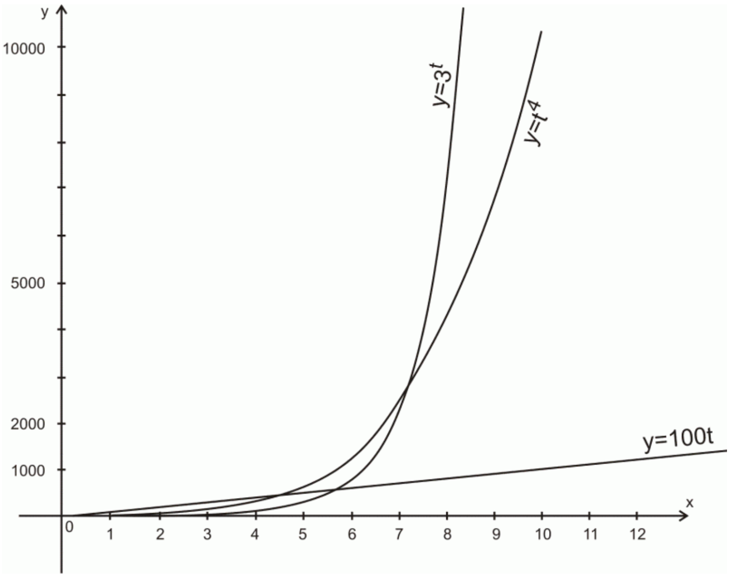
Jeśli $a > 0$, to mamy do czynienia ze wzrostem wykładniczym.

Wzrost wykładniczy jest wzrostem bardzo szybkim. Często nazywa się go wzrostem gwałtownym. Jest on znacznie szybszy nie tylko od wzrostu liniowego opisanego przez funkcję $g(t) = at, a > 0$, ale także od wzrostów opisanych przez funkcje potęgowe $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

Dla małych wartości czasu wzrost wykładniczy może być nawet wolniejszy niż wzrost liniowy, ale począwszy od pewnego momentu (różnego dla różnych zjawisk) tempo wzrostu krzywej z modelu wykładniczego jest już znacznie większe niż w przypadku modeli opisywanych przez funkcje $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

UWAGA!!!

Funkcja rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, której wykres jest w tym przedziale „podobny” do wykresu funkcji wykładniczej, jest funkcją rosnącą coraz szybciej, czyli tempo wzrostu funkcji jest szybkie.



Rysunek 3-13. Wzrost wykładniczy

Z przedstawionego wykresu odczytujemy, że dla $t > 8$ wartości funkcji $f(t) = 3^t$ zaczynają przewyższać wartości funkcji $g(t) = 100t$ i $h(t) = t^4$ i im większy jest czas, tym różnice pomiędzy wartościami tych funkcji są większe.

Dla $a \in (0;1)$mamy do czynienia ze spadkiem wykładniczym, czyli funkcja $f(t) = b{\cdot}a^t$ maleje coraz wolniej.

Dokonując pomiaru wartości wielkości opisanej ustalonym modelem wykładniczym, stwierdza się, że w stałych odstępach czasu zwiększają się one lub zmniejszają o ten sam procent.

Wiele zjawisk w przyrodzie odbywa się (przynajmniej w pewnej fazie ich trwania) według modelu wykładniczego. Są to między innymi: promieniotwórczość naturalna, wzrost lub spadek liczby populacji, stygnięcie ciał itd. Omówimy je w kolejnych przykładach i zadaniach.

Funkcję $f(t) = ba^t$ $f(t) = b{\cdot}a^t$ można przedstawić na wiele sposobów, tzn. można stosować do jej opisu różne podstawy a funkcji wykładniczej.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich i różnych od jedynki liczb a i c istnieje taka liczba $k \neq 0$, że funkcje $f(t) = ba^t$ i $g(t) = bc^{kt}$ są równe, tzn. $ba^t = bc^{kt}$, dla dowolnego $t > 0$

Uzasadnienie tego twierdzenia jest bardzo proste.

Należy znaleźć liczbę k, która dla każdej wartości $t \geq 0$, spełnia warunek $a^t = c^{kt}$.

Korzystając z własności potęg, otrzymujemy:

$a^t = (c^k)^t$ dla każdego $t \geq 0$.

Stąd $a = c^k$.

Korzystając z określenia logarytmu, obliczamy: $k = \log_c a$.

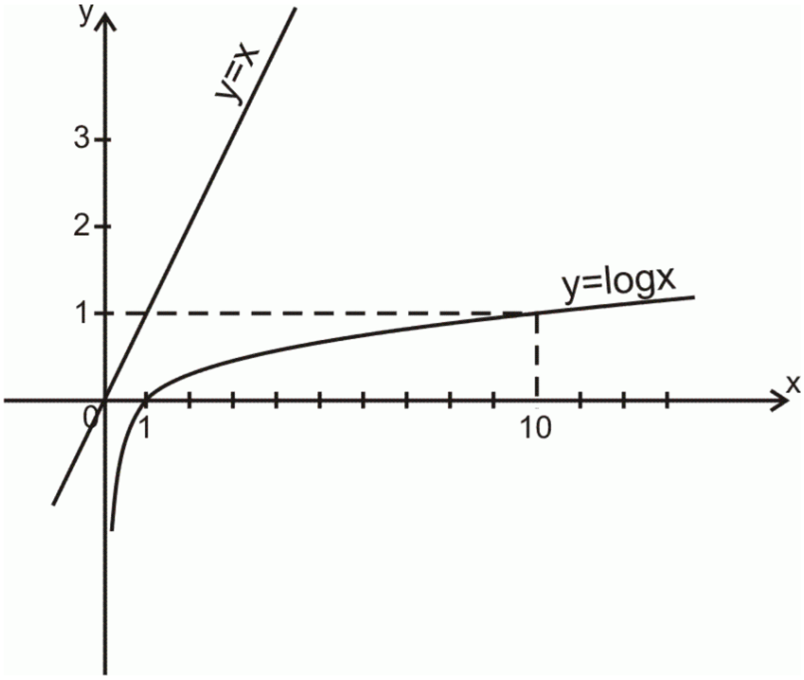
A więc istnieje liczba $k = \log_c a$ taka, że funkcję $f(t)$ można zastąpić funkcją $g(t)$.

Zastosowanie funkcji logarytmicznych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym[46]

Przykład 2

Skala logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x, a > 1, x > 0$, jest funkcją rosnącą. Jej wzrost jest jednak bardzo powolny, wolniejszy nawet od wzrostu liniowego.



Rysunek 3-14. Wykres funkcji $\log x < x$ dla $x > 0$

Jeśli zakres wartości pewnej wielkości jest dodatni i bardzo szeroki, to wygodniej jest go podawać w skali.

Podanie konkretnej wartości w o pewnej wielkości oddaje jej obraz tylko wtedy, gdy możemy ją porównać z innymi wartościami, a szczególnie z najmniejszą wartością ω_0.

Iloraz $\frac{\omega}{\omega_0}$ mówi nam, ile razy wartość ω jest większa od najmniejszej wartości ω_0 przyjmowanej przez daną wielkość. Iloraz ten jest liczbą bezwymiarową i dużą przy szerokim zakresie wartości.

Zlogarytmowanie ilorazu $\frac{\omega}{\omega_0}$ prowadzi do tzw. **skali logarytmicznej** danej wielkości. Do logarytmowania używa się na ogół logarytmu dziesiętnego lub naturalnego.

Skala logarytmiczna jest więc przedstawieniem wartości w pewnej wielkości, np. natężenia, w następującej postaci podanej z użyciem logarytmu: $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ lub $k\,ln\frac{\omega}{\omega_0}$, gdzie: k – stała charakterystyczna dla zjawiska mierzonego przez wartości ω, ω_0 – najmniejsza z wartości przyjmowanych przez ω.

Mimo, że $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ i $k\,ln\frac{\omega}{\omega_0}$ są liczbami bezwymiarowymi, to często wprowadza się dla nich specjalne jednostki, właściwe dla danej dziedziny.

46 www.megamatma.pl, 17.03.2013.

Przykładami skal logarytmicznych są: **skala decybelowa w akustyce, skala Richtera określająca wielkości wstrząsów sejsmicznych, skala pH czy skala wielkości gwiazdowych.**

Wprowadzenie skali logarytmicznej jest nie tylko pomysłem matematycznym na to, aby bardziej przejrzyście przedstawić pewne dane.

Stwierdzono doświadczalnie, że nasze zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

Prawo Webera-Frechnera mówi, że wartość reakcji na bodźce takich zmysłów, jak: wzrok, słuch czy poczucie temperatury jest proporcjonalna do logarytmu tego bodźca.

Przykład 3

Poziom głośności dźwięku

Źródła dźwięku wysyłają dźwięki o różnym natężeniu. Dźwięki rozchodzą się w postaci fal dźwiękowych. Jeśli kilka źródeł dźwięku wysyła jednocześnie dźwięki, to ich natężenia sumują się.

Natężenie dźwięku I jest ilością energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu i przechodzącej przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej.

Jednostką natężenia dźwięku jest $\frac{W}{m^2}$ (wat na metr kwadratowy).

Natężenie dźwięku odpowiadające tzw. progowi słyszalności jest równe $I_0 = 10 - 12 \frac{W}{m^2}$. Natężenia innych słyszalnych dźwięków są większe od I_0. Natężenie **szeptu** jest około 100 razy większe niż I_0, zaś natężenie dźwięku towarzyszące **wybuchowi petardy** to już wielkość rzędu $10^4 \frac{W}{m^2}$, czyli że jest ono 10^{16} razy większe niż I_0.

Przy tak szerokim zakresie wartości natężenia dźwięku wprowadzenie skali logarytmicznej jest bardzo uzasadnione. W skali tej logarytmujemy iloraz $\frac{I}{I_0}$. Wielkość obliczoną za pomocą logarytmu dziesiętnego z ilorazu $\frac{I}{I_0}$ nazywa się **poziomem natężenia dźwięku** lub **poziomem głośności dźwięku.** Oznacza się ją literą L.

I tak przyjęto:

Wzór

Poziom głośności dźwięku:

$L = 10 log \frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ – poziom słyszalności, I – natężenie dźwięku.

Jednostkami poziomu głośności są **bel i decybel**, oznaczane symbolami **B** i **dB.**

Dźwięk ma poziom głośności równy 1B, jeśli jego natężenie jest równe $10\ I_0$.

Natomiast $1\ dB = 0{,}1\ B$.

Decybele są powszechniej używanymi jednostkami poziomu natężenia dźwięku.

ZADANIA

3.5.1 Aktywność źródła promieniotwórczego określa liczbę atomów, która uległa rozpadowi w jednostce czasu **A** $= \frac{\Delta N}{\Delta t}$. Jednostką aktywności jest bekerel **(1 Bq** $= \frac{1}{s}$**)**. W poniższej tabeli zamieszczono wyniki pomiarów aktywności próbki pewnego pierwiastka promieniotwórczego.

$t(h)$	0	480	960	1200	1950
A (10^3Bq)	5	1,5	0,5	0,25	0,05

Przedstaw na wykresie zależność aktywności próbki tego pierwiastka od czasu.

3.5.2 Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu wapnia wynosi 6 miesięcy. W chwili początkowej próbka zawierała 40 mg wapnia. Oblicz, ile wapnia próbka zawierała:

a) dwa lata wcześniej,

b) po trzech latach.

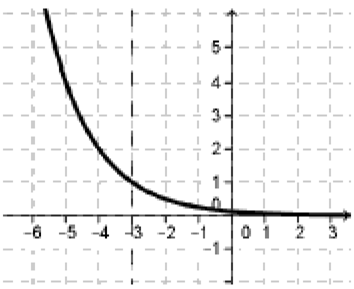
Odpowiedź:

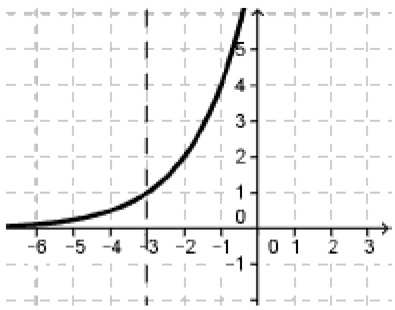
a) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{2}{0,5}} = 40\text{ mg} \cdot 2^4 = 640\text{ mg}$

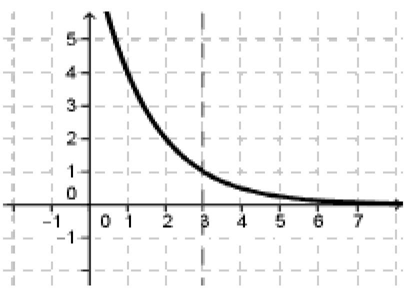
b) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{-3}{0,5}} = 40\text{ mg} \cdot 2^{-6} = 0{,}625\text{ mg}$

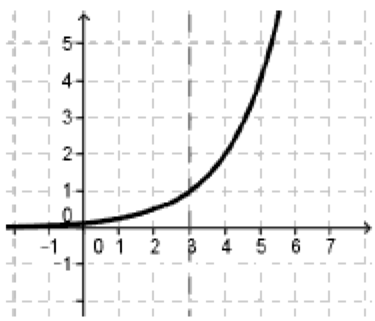
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[47]**:** Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-3}$ przedstawiony jest na rysunku

A.


C.


B.


D.


47 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 11.03.2013.

2.[48] Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3^{x+2} - 3$ jest zbiór:

a) $(-2, \infty)$ b) $(-3, -2)$ c) $(3, \infty)$ d) $(-3, \infty)$

3. Wartością funkcji $f(x) = 2^x$ jest liczba:

a) -8 b) -4 c) 0 d) 3

4. Zbiorem wartości funkcji $(x) = 2^x + 3$ jest przedział:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $\langle 0, +\infty)$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-3, +\infty)$

5. Funkcją malejącą jest funkcja:

a) $f(x) = (0{,}5)^{x-1}$ b) $f(x) = (0{,}5)^{-x}$ c) $f(x) = -(0{,}5)^x$ d) $f(x) = (0{,}5)^{2-x}$

6. Funkcja $f(x) = 9^x$ dla argumentu $x = -\frac{3}{2}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{3^3}$ b) 27 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$ d) $\frac{1}{81}$

7. Funkcja $(x) = 8^x$ dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $0{,}25$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ d) 4

8. Dla jakiego argumentu $y = 2^x$ przyjmuje wartość 64?

a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 4$

9. Populacja bakterii w próbce podczas pewnego eksperymentu zmniejsza się o 2% dziennie. Jeśli przyjmiemy, że na początku doświadczenia populacja bakterii liczyła A sztuk, to po upływie t dni liczbę bakterii $p(t)$ można opisać wzorem:

a) $p(t) = 0{,}02^t \cdot A$ b) $p(t) = 0{,}98^t \cdot A$ c) $p(t) = 2^t \cdot$

Zadania zamknięte, wydawnictwo Nowa Era[49]

10. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = x$ przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, wynosi:

a) $2\sqrt{2}a$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{8a}$ d) $a\sqrt{2}$

11. Punkt $P = (-3, 1/8)$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{-x}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

48 Zadania 2-9: zaczerpnięte http: //www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
49 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf, 11.03.2013.

12. Wskaż funkcję rosnącą:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

13. Punkt $P = \left(\log_2 \frac{1}{4};\ \log_{\frac{1}{3}} 81\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 2x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = -2x$

ZADANIA OTWARTE

1. **(5 pkt)** Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - a) + b$. Wyznacz wartości parametrów a i b, jeśli wiesz, że dziedziną funkcji jest przedział $(5, +\infty)$ i do wykresu należy punkt $A = \left(5\frac{1}{8}, 9\right)$. Podaj wzór tej funkcji.

4 Stereometria

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- Obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- Zamieniać jednostki objętości.

Zamiana jednostek objętości:

$1cm^3 \rightarrow 1\,000\,mm^3$

$1dm^3(1\,litr) \rightarrow 1000\,cm^3$

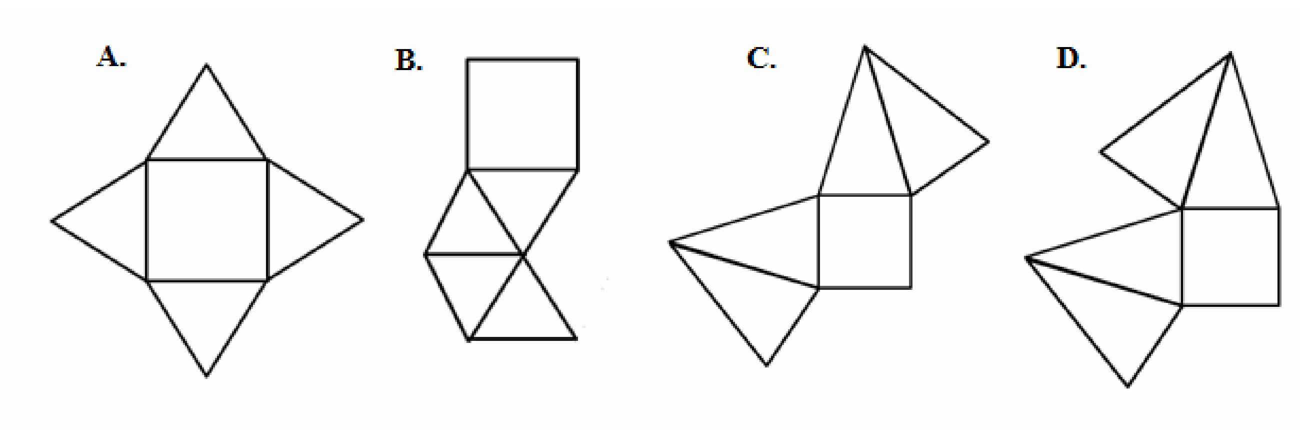
$1cm^3 \rightarrow 1000\,mm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,mm^3$

$1m^3 \rightarrow 1\,000\,dm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,cm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,000\,mm^3$

$1\,hektolitr \rightarrow 100\,litrów \rightarrow 100dm^3$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 Który rysunek nie przedstawia siatki ostrosłupa czworokątnego?



Zad.2 Podstawą graniastosłupa prawidłowego nie może być:

a) kwadrat

b) sześciokąt foremny

c) prostokąt

d) trójkąt równoboczny

Zad.3 Bok sześcianu ma długość 6 cm, więc długość jego przekątnej wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

Zad.4 Tworząca stożka ma długość 13 cm, a jego wysokość 5 cm. Wynika z tego, że promień podstawy ma długość:

a) $12\ cm$ b) $10\ cm$ c) $6\ cm$ d) $13\ cm$

Zad.5 Jeśli średnica kuli ma 8 cm, to pole powierzchni całkowitej tej kuli wynosi:

a) $16\ \pi$ b) $64\ \pi$ c) 32π d) $256\ \pi$

Zad.6 Przekrojem poprzecznym walca jest:

a) prostokąt b) kwadrat c) kula d) koło

Zad.7 Objętość kuli wynosi $36\pi\ cm^3$. Promień tej kuli ma długość:

a) $9\ cm$ b) $3\ cm$ c) $6\ cm$ d) $27\ cm$

Zad.8 Wiedząc, że wysokość walca wynosi $10\ cm$, a promień jego podstawy $0{,}4\ dm$, to pole jego podstawy jest równe:

a) $16\pi\ cm^2$ b) $1{,}6\pi\ dm^2$ c) $16\pi\ dm^2$ d) $0{,}16\pi\ cm^2$

Zad.9 Pole powierzchni sześcianu jest równe $294cm^2$. Krawędź tego sześcianu wynosi:

a) 7 b) 4 c) 8 d) 6

Zad.10 Które zdanie jest fałszywe:

a) $5\ cm^2 = 500\ mm^2$ b) $1\ ha = 10000\ m^3$

c) $3000\ mm^2 = 30cm^2$ d) $1\ a = 100\ m^2$

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	C	A	B	D	B	D	A	B

ZADANIA OTWARTE

1. Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 108 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli krawędź boczna ma długość 16 cm.

2. Ile litrów wody zmieści się w akwarium o wymiarach $3{,}5\ dm \times 0{,}6\ m \times 55\ cm$? Odpowiedź wyraź w postaci liczby naturalnej.

3. Oblicz wysokość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach 4 i 5, a pole powierzchni całkowitej wynosi 166.

4. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}cm$.

5. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jej pole powierzchni jest równe $1440\pi\ cm^2$.

Zadania otwarte – odpowiedzi

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$a -$ krawędź podstawy, $b -$ krawędź boczna $3a + 3b = 108$ $3a + 3 \cdot 16 = 108$ $3a = 60$ $a = 20$ **Odpowiedź:** Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 20.
2	$a = 3{,}5\ dm$ $b = 0{,}6\ m = 6\ dm$ $c = 55\ cm = 5{,}5\ dm$ $V = a \cdot b \cdot c = 3{,}5\ dm \cdot 6\ dm \cdot 5{,}5\ dm = 115{,}5\ dm^3 = 115{,}5\ l$ **Odpowiedź:** W akwarium zmieści się $115\ l$ wody.
3	a, b – krawędzie podstawy prostopadłościanu, x – wysokość prostopadłościanu $a = 4, b = 5\ , P_c = 166$ $2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x = 166$ $18x = 126 \quad \Rightarrow x = 7$ **Odpowiedź:** Wysokość prostopadłościanu wynosi 7.
4	$d = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow a = 5$ $V = a^3 = 5^3 = 125$ $P_c = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ **Odpowiedź:** Objętość sześcianu wynosi $125\ cm^3$, a jego pole powierzchni całkowitej $150\ cm^2$.
5	$R - R -$ promień kuli $P_c = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1440\pi\ /: 4\pi$ $r^2 = 360$ $r = 6\sqrt{10}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(6\sqrt{10}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 10\sqrt{10} = 2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$ **Odpowiedź:** Objętość kuli wynosi $2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$.

4.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni

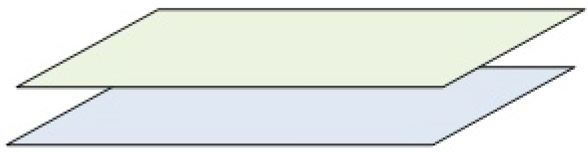
Teraz nauczę się:

- Określać wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni;
- Określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu.

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

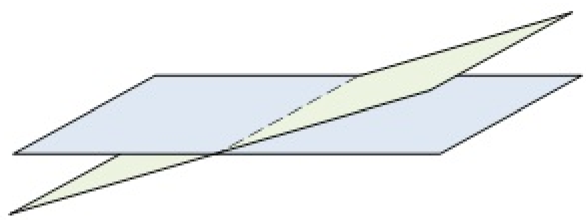
Możliwe są następujące przypadki wzajemnego położenia dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeniach.

Płaszczyzny równoległe



Rysunek 4-1. Płaszczyzny równoległe

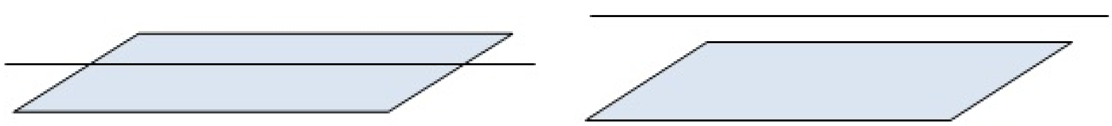
Płaszczyzny przecinające się



Rysunek 4-2. Płaszczyzny przecinające się

Prosta i płaszczyzna mogą znajdować się względem siebie w następującym położeniu:

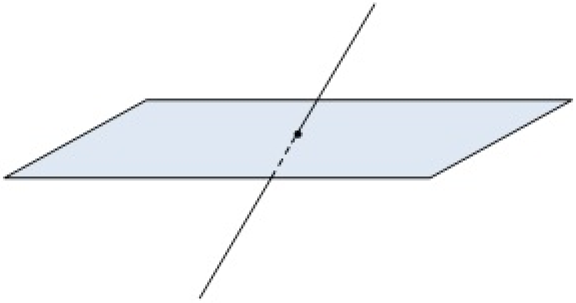
Prosta równoległa do płaszczyzny



Prosta zawiera się w płaszczyźnie *Prosta nie zawiera się w płaszczyźnie*

Rysunek 4-3. Prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta przecina płaszczyznę

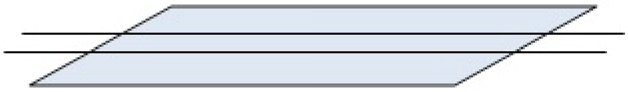


Rysunek 4-4. Prosta przecinająca płaszczyznę

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

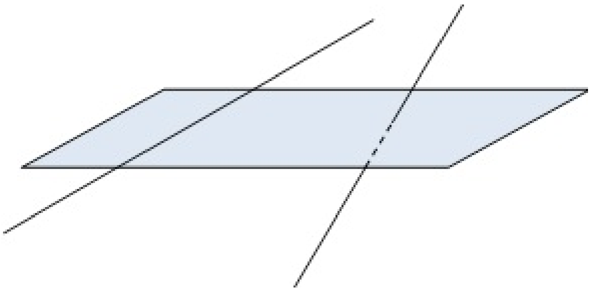
Dwie proste w przestrzeni mogą być:

- Równoległe



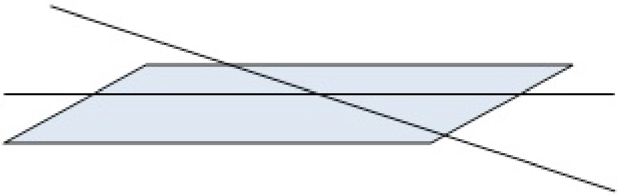
Leżą na płaszczyźnie
i nie mają punktów wspólnych

- Skośne



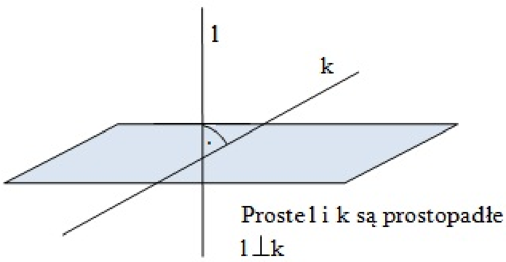
Leżą na różnych płaszczyznach i nie mają punktów wspólnych

- Przecinające się

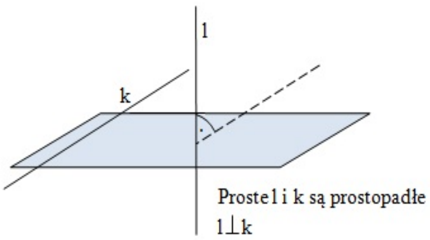


Leżą na jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny

- Prostopadłe



Proste prostopadłe przecinające się

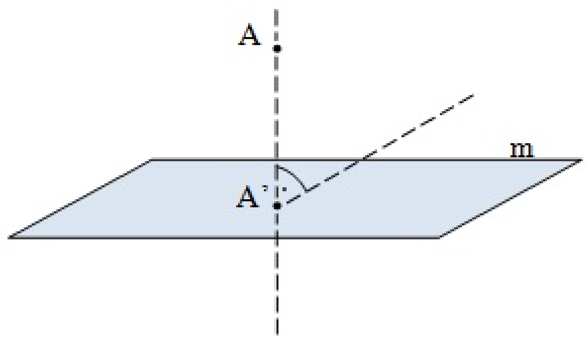


Proste prostopadłe skośne

Rysunek 4-5. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Rzut prostokątny na płaszczyznę

Rzut prostokątny danego punktu na płaszczyznę jest punktem, jaki powstanie, gdy przez dany punkt i płaszczyznę poprowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny.



Punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę m.

Rysunek 4-6. Rzut prostokątny na płaszczyznę

ZADANIA

4.1.1 Wskaż w swoim otoczeniu:

a) proste przecinające się

b) proste równoległe

c) proste skośne

4.1.2 Wskaż w klasie:

a) płaszczyznę i prostą przecinającą tę płaszczyznę

b) płaszczyzny równoległe

c) płaszczyzny przecinające się

d) płaszczyznę i prostą do niej równoległą

4.1.3 Przez dany punkt poprowadź płaszczyznę prostopadłą do danej prostej. Rozpatrz dwa przypadki.

Odpowiedź:

1. Dany punkt C leży na prostej AB. Przez daną prostą przesuńmy dwie dowolne płaszczyzny i z punktu C wystawmy dwie prostopadłe do AB: CD i CE położone na tych płaszczyznach. Wtedy płaszczyzna, wyznaczona przed CD i CE, będzie płaszczyzną szukaną.
2. Dany punkt D leży poza prostą AB. Prosta AB i punkt D, poza nią położony, wyznaczają płaszczyznę P. Poprowadźmy na niej $DC \perp AB$. Następnie przez prostą AB przesuńmy

dowolną płaszczyznę Q i poprowadźmy na niej $CE \perp AB$, wtedy szukaną płaszczyzną jest płaszczyzna R wyznaczona przez CD i CE.

4.1.4 Wykreślić odcinek prostopadły do dwóch prostych skośnych.

Odpowiedź:

Dane są dwie proste skośne AB i CD. Przez dowolny punkt K prostej CD poprowadźmy $A'B' \parallel AB$ i przez dwie przecinające się proste CD i $A'B'$ przesuńmy płaszczyznę P.

Jeżeli teraz z dowolnego punktu E prostej AB poprowadzimy $EF \perp P$, a przez punkt F na tej płaszczyźnie równoległą do $A'B'$, która przetnie CD w punkcie G, to odcinek GH równoległy do EF będzie żądanym odcinkiem.

Istotnie, odcinek HG, jako prostopadły do płaszczyzny P, jest prostopadły do prostej CD położonej na tej płaszczyźnie. Z drugiej strony odcinek $GH = FE$ jest prostopadły również do AB, a więc jest prostopadły do obu danych prostych.

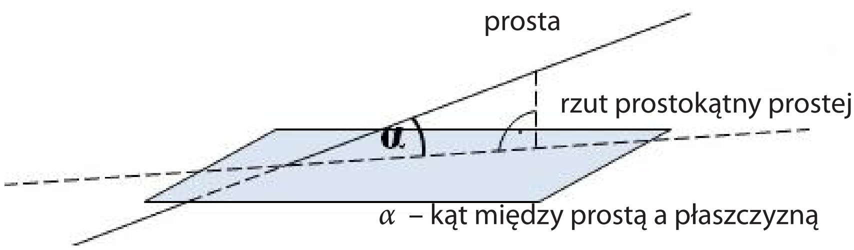
4.2 Kąty między płaszczyznami i w figurach przestrzennych

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać kąty między płaszczyznami;
- Rozpoznawać kąty między ścianami i krawędziami w graniastosłupach i ostrosłupach.

Kąt między prostą a płaszczyzną

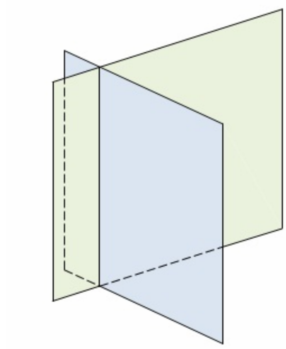
Kąt między prostą a płaszczyzną znajduje się między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



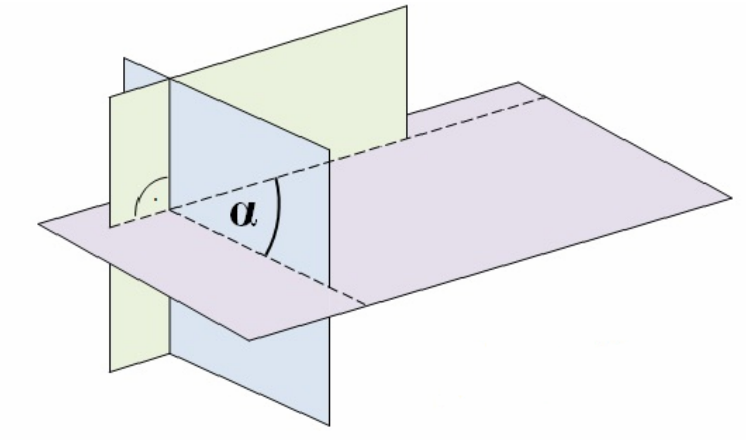
Rysunek 4-7 Kąt między płaszczyzną a prostą

Kąt dwuścienny

To kąt zawierający się pomiędzy dwoma przecinającymi się płaszczyznami:



Kąt dwuścienny wyznaczamy, przecinając obie płaszczyzny trzecią, która jest do nich prostopadła.



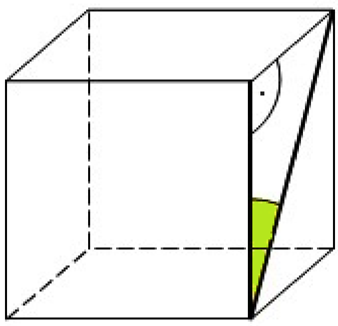
Rysunek 4-8. Kąt dwuścienny

Kąty w bryłach

Często w zadaniach związanych z bryłami pojawiają się wartości kątów między określonymi odcinkami lub ścianami. O prawidłowym rozwiązaniu decyduje wtedy, czy dobrze umiejscowiliśmy dany kąt, a niestety w tym miejscu często pojawiają się błędy. Warto więc wiedzieć, gdzie znajdują się dane kąty.

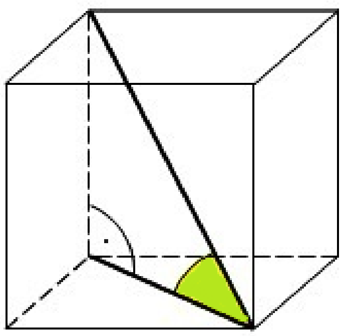
Graniastosłupy

- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną (wysokością)



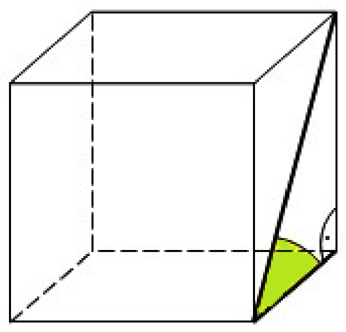
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy czworokąt)



Wysokość graniastosłupa wraz z przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa tworzą trójkąt prostokątny.

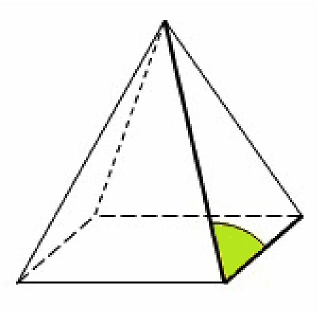
- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy



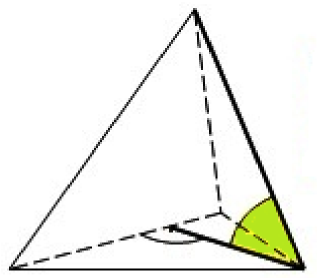
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

Ostrosłupy

- kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

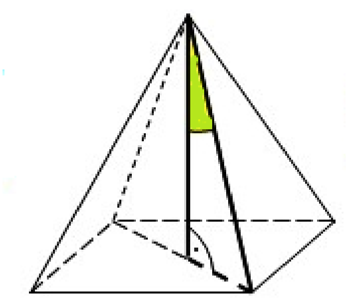


- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie mamy trójkąt równoboczny)



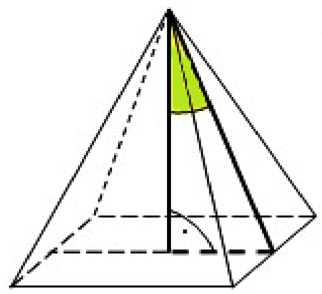
Kąt znajduje się między krawędzią boczną ostrosłupa a wysokością podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



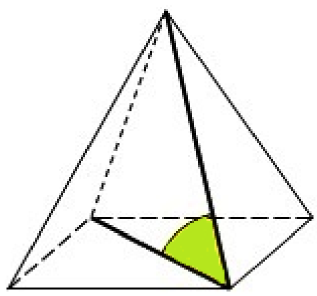
Krawędź boczna i wysokość ostrosłupa wraz z połową przekątnej podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



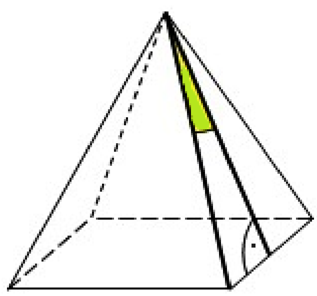
Wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej wraz z połową odcinka, którego długość stanowi połowę długości podstawy, tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



Kąt znajduje się między krawędzią boczną a przekątną podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością ściany bocznej



Krawędź boczna i wysokość ściany bocznej wraz z połową krawędzi podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

ZADANIA

4.2.1 Narysuj sześcian i zaznacz w nim kąt nachylenia:

a) przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

4.2.2 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{3}\ cm$, a wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{3}\ cm$. Oblicz miarę kąta nachylenieaściany bocznej do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

4.2.3 Wskaż w klasie kąty dwuścienne. Podaj miary tych katów.

4.2.4 Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.2.5 Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 6, a długość krawędzi bocznej jest równa $2\sqrt{15}$15. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej piramidy do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

4.2.6 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

4.2.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym zaznacz kąt liniowy kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi.

Odpowiedź: Ostrosłup oznacz literami $ABCS$. Z wierzchołka A i B zaznacz proste prostopadłe do krawędzi bocznej CS przecinające się w punkcie D. Kąt ADB jest kątem liniowym kąta dwuściennego.

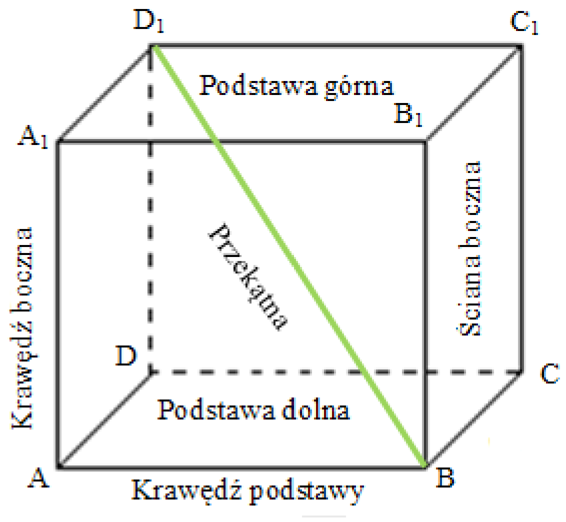
4.3 Graniastosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów;
- Rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Przypomnijmy najpierw najważniejsze pojęcia dotyczące graniastosłupów.

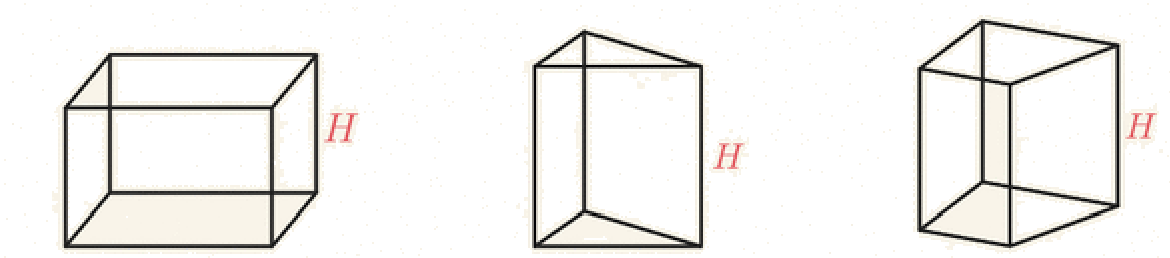
Graniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach, zwanych podstawami graniastosłupa, i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi podstawami są do siebie równoległe.



Rysunek 4-9. Graniastosłup prawidłowy

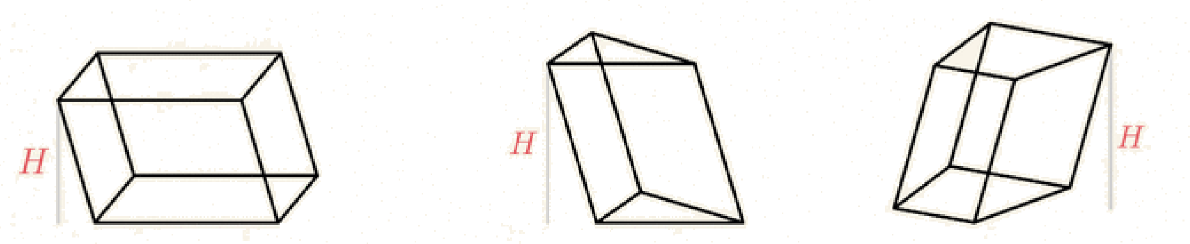
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Przykłady graniastosłupów prostych



Rysunek 4-10. Graniastosłupy proste

Przykłady graniastosłupów pochyłych



Rysunek 4-11. Graniastosłupy pochyłe

Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego dwóch podstaw i polu powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

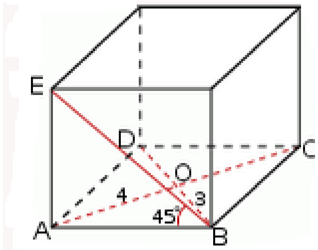
Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości.

$$V = P_p \cdot H$$

Przykład 1

Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych długości $6\ cm$ i $8\ cm$, którego przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze $45°$.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:



Z tego wynika, że $|AE| = |AB| = 5cm$.

Możemy już obliczyć objętość graniastosłupa.

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ cm^2$

$V = P_p \cdot H = 24\ cm^2 \cdot 5\ cm = 120\ cm^3$

Policzymy jeszcze pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

$P_b = 4 \cdot |AB| \cdot |AE| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100\ cm^2$

$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 24\ cm^2 + 100\ cm^2 = 148\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $120\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $148\ cm^2$.

ZADANIA

4.3.1 W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem o polu $P = 400\ cm^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Odpowiedź: $V = 500\ cm^3$, $P_c = 450\ cm^2$.

4.3.2 Oblicz objętość prostopadłościanu, jeżeli kąt między jego przekątną o długość $10\ cm$ a podstawą ma miarę $60°$, a jedna z krawędzi podstawy ma długość $4\ cm$.

Odpowiedź: $V = 60\sqrt{3}\ cm^3$.

4.3.3 Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $a = 4\ cm$. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Odpowiedź: $16\sqrt{3}\ cm^2$.

4.3.4 Kąt zawarty między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą ma miarę $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli jej wysokość ma długość $10\ cm$, a szerokość podstawy wynosi $6\ cm$.

Odpowiedź: $P_c = 376\ cm^2$.

4.3.5 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$.

4.3.6 Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Wyznacz sinus kąta nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.3.7 Oblicz skalę podobieństwa dwóch graniastosłupów prawidłowych czworokątnych. Pierwszy z nich ma wysokość $2\ cm$ i objętość $18\ cm^3$ oraz jest podobny do graniastosłupa, którego krawędź podstawy ma długość $1\ cm$.

Odpowiedź: $k = 3$.

4.3.8 Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $8\ cm$ i kącie między ramionami miary $120°$. Przekątna mniejszej ściany bocznej graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Wyznacz objętość graniastosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{128\sqrt{3}}{9}$.

4.3.9 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego $ABCA_1B_1C_1$, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $|AC| = 6\ cm, |BC| = 8\ cm$, a przekątna AB_1 ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α o mierze $60°$.

Odpowiedź: $P_c = 48(5\sqrt{3}+1)\ cm^2, V = 240\sqrt{3}\ cm^3$.

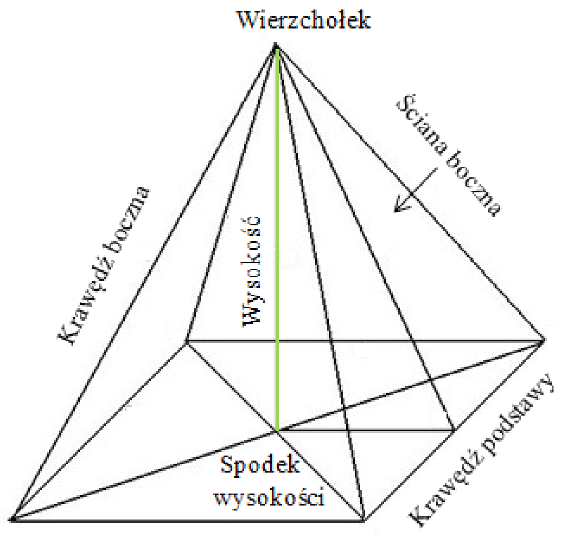
4.4 Ostrosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości ostrosłupów;
- Rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami a płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi a ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Ostrosłup – wielościan, którego wszystkie ściany prócz podstawy są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

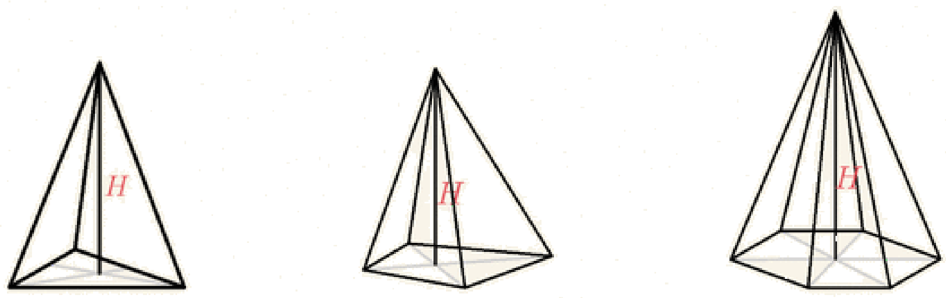
Wysokość ostrosłupa jest to odległość od wierzchołka do płaszczyzny podstawy. Punkt będący rzutem wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywa się spodkiem wysokości.



Rysunek 4-12. Ostrosłup

Ostrosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a jego wysokość pada na środek podstawy. Ściany ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi.

Przykłady ostrosłupów



Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynowi pola podstawy i wysokości.

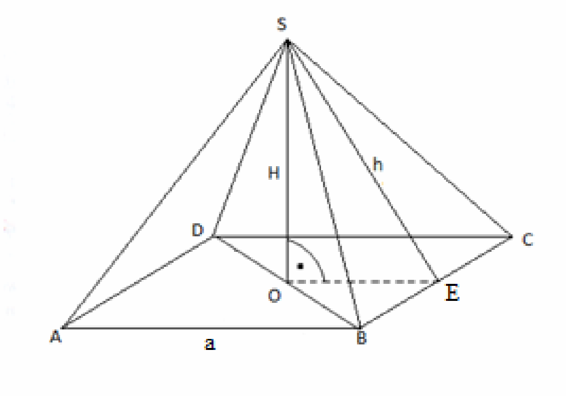
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Przykład 1

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy $a = 6\ cm$, a wysokość ściany bocznej $h = 5\ cm$. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:

Obliczamy wysokość H ostrosłupa, korzystając z trójkąta prostokątnego OES.



$|OE| = \frac{1}{2}a = 3\ cm$

$H^2 = h^2 - |OE|^2$

$H^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow H = 4\ cm$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}6^2 \cdot 4 = 48\ cm^3$

$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 96\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa wynosi $48\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $96\ cm^2$.

ZADANIA

4.4.1 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli jego wysokość ma długość $6\ cm$, a kąt między wysokością a krawędzią boczną ma miarę $30°$.

Odpowiedź: $V = 48\ cm^3$.

4.4.2 Kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę $60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość $12\ cm$.

Odpowiedź: $P_b = 96\sqrt{3}\ cm^2$.

4.4.3 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS_o$ o podstawie $ABCD$. Pole trójkąta ASC jest równe 120, a cosinus kąta ASB jest równy $\frac{144}{169}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 20\sqrt{313}\ cm^2$.

4.4.4 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.4.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy $18\ cm$, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α.

Odpowiedź: $P_b = 648\ cm^2$.

4.4.6 Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = 3$. Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $6\sqrt{3}$. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = 729$.

4.4.7 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi bocznej dwa razy dłuższej od krawędzi podstawy.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

b) Wyznacz długość krawędzi ostrosłupa tak, aby pole jego powierzchni bocznej wynosiło $36\sqrt{15}$.

Odpowiedź: a) $cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) Krawędzie muszą mieć długość 6 i 12 jednostek.

4.4.8 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości $48\ cm^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = \frac{4}{3}$. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 60\ cm^2$.

4.5 Wielościany foremne

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów foremnych.

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez ściany są równe.

Przykład 1

Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi a.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej czworościanu:

$P_c = 4 \cdot P_{\Delta\, równobocznego}$

$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Więc $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Obliczamy objętość czworościanu:

ΔOSD jest trójkątem prostokątnym, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$H^2 = h^2 - r^2$

ale $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

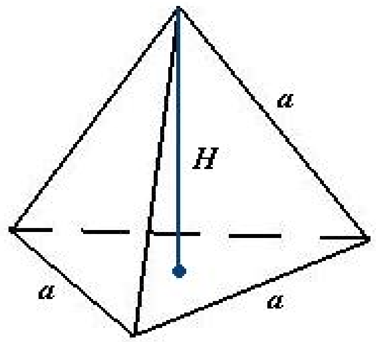
$$H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36} \Rightarrow H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36}$$

Więc $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{a^3\sqrt{2}}}{\mathbf{12}}$

Istnieją następujące wielościany foremne:

Czworościan (tetraedr)



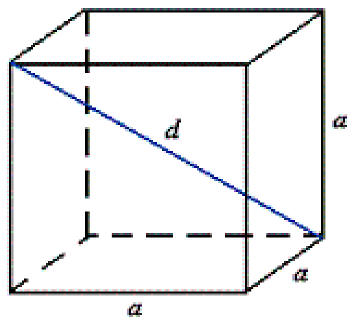
Rysunek 4-13. Czworościan

4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy czworościanem foremnym.

$\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Sześcian (heksaedr)

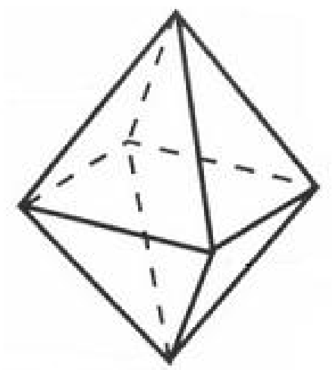


Rysunek 4-14. Sześcian

6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = a^3}$ $\boldsymbol{P_c = 6a^2}$

Ośmiościan (oktaedr)

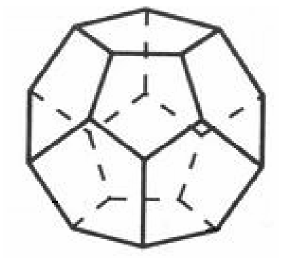


Rysunek 4-15. Ośmiościan

8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2}$ $\boldsymbol{P_c = 2\sqrt{3}a^2}$

Dwunastościan (dodekaedr)

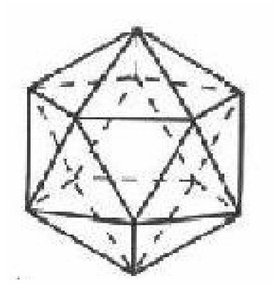


12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków, 30 krawędzi

$$V = \frac{(15+7\sqrt{5})}{4}a^3 \qquad P_c = 15(\sqrt{5}+2)a^2$$

Rysunek 4-16. Dwunastościan

Dwudziestościan (ikosaedr)



20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków, 30 krawędzi

$$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3 \qquad P_c = 5\sqrt{3}a^2$$

Rysunek 4-17. Dwudziestościan

Ciekawostka

Wielościany foremne znali już Pitagorejczycy w VI w. p.n.e. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę, a od czasów Platona uważano piąty wielościan foremny, dwunastościan, za postać wszechświata. Wielościany te noszą nazwę **brył platońskich.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Dlaczego wielościanów foremnych nie może być więcej niż pięć?

ZADANIA

4.5.1 Mając daną długość krawędzi a, wyprowadź wzór na:

a) przekątną sześcianu,

b) wysokość czworościanu foremnego.

Odpowiedź: a) $D = a\sqrt{3}$, b) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

4.5.2 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$

4.5.3 Pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni całkowitej czworościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych brył.

Odpowiedź: $2\sqrt{6}$.

4.5.4 Pole powierzchni dwudziestościanu foremnego jest równe $245\sqrt{3}\ cm^2$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego wielościanu.

Odpowiedź: $210\ cm$.

4.5.5 Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano bryłę o sześciu ścianach. Naszkicuj otrzymaną bryłę. Czy jest to wielościan foremny?

Odpowiedź: Nie.

4.5.6 Ściany wielościanu malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:

a) czworościanu foremnego,

b) sześcianu,

c) ośmiościanu foremnego?

Odpowiedź: a) 4, b) 3, c) 2.

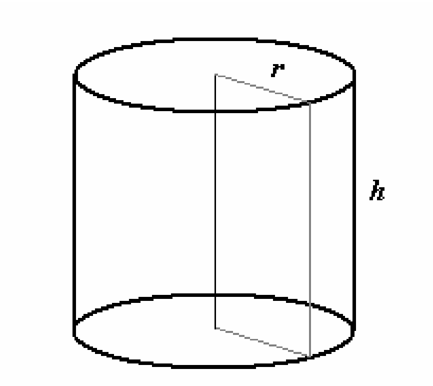
4.6 Walec – jego pole powierzchni i objętość

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości walców;
- Rozpoznawać w walcach kąty między przekątną przekroju osiowego a płaszczyzną podstawy;
- Obliczać miary kątów.

Walec– to bryła otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.

Prostą tę nazywamy **osią walca**. Podstawami walca są koła o takim samym promieniu.



Rysunek 4-18. Walec

Powierzchnią boczną walca nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu.

Tworzącą walca nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.

Przekrojem osiowym walca nazywamy część wspólną walca i płaszczyzny zawierającej oś walca.

Objętość walca wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej walca:

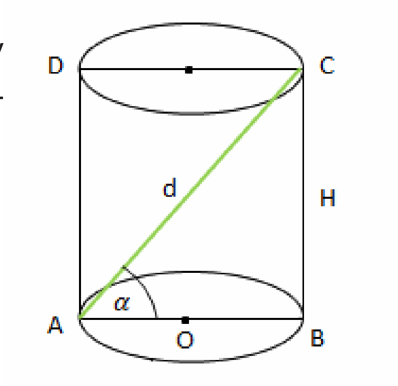
$$\boldsymbol{P_b = 2\pi r H}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 2\pi r(r + H)}$$

Przykład 1

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



ΔABC jest prostokątny, więc $sin\alpha = \frac{H}{d}$

$$H = d \cdot sin\alpha = 10 \cdot sin60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{2r}{d}$$

$$2r = d \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ cm$$

$$r = 2{,}5\ cm$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 5\sqrt{3} = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$V = 31{,}25\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 2{,}5\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 5\pi\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 12{,}5\pi + 25\sqrt{3}\pi$$

$$P_c = 12{,}5\pi\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ cm^2$$

ZADANIA

4.6.1 Oblicz objętość walca, jeśli jego przekrój osiowy jest kwadratem o obwodzie równym 24 cm.

Odpowiedź: $V = 54\pi$.

4.6.2 Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% większy od promienia podstawy drugiego walca. Oblicz stosunek objętości tych walców.

Odpowiedź: $9:4$.

4.6.3 Długość promienia walca zmniejszono dziesięciokrotnie. Ile razy trzeba zwiększyć wysokość tego walca, aby objętość się nie zmieniła?

Odpowiedź: 100–krotnie.

4.6.4 Ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości $1\ km$ i średnicy wewnętrznej równej $50\ cm$?

Odpowiedź: $62{,}5\pi\ m^3$.

4.6.5 Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy $8\ cm$ i wysokości $10\ cm$ jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki, każda o krawędzi $2\ cm$. Czy woda z kubka się wyleje?

Odpowiedź: Nie.

4.6.6 Objętość walca jest równa $108\pi\ cm^3$, a jego wysokość to $12\ cm$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Odpowiedź: $P_c = 90\pi\ cm^2$.

4.6.7 Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego jeden bok ma długość 8 cm, a przekątna jest o 2 cm dłuższa od drugiego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca wiedząc, że dłuższy bok prostokąta jest wysokością walca.

Odpowiedź: $V = 240\pi\ cm^3$, $P_c = 152\pi\ cm^2$.

4.6.8 Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{3}{5}$. Pole przekroju osiowego jest równe 27. Oblicz objętość tego walca.

Odpowiedź: $V = 40{,}5\pi$.

4.6.9 Do naczynia w kształcie walca wypełnionego wodą do wysokości 7 cm włożono metalową kulkę o promieniu 3 cm. Poziom wody podniósł się o 1 cm i zrównał się z górną podstawą walca. Oblicz objętość naczynia. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, wynik podaj z dokładnością do $1 cm^3$.

Odpowiedź: $V = 904\ cm^3$.

4.6.10 Puszka na cukier ma kształt walca.

a) Ile kilogramów cukru zmieści się w puszce, której wymiary wynoszą $d = 14\ cm$ a $h = 20\ cm$? Gęstość cukru wynosi 1,6 kg/litrów. Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

b) Jakiej wysokości musiałaby być ta puszka, by mieścił się do niej dokładnie 1 kg cukru? Wynik zaokrąglij z nadmiarem do 1 cm.

Odpowiedź: a) $1{,}89\ kg$, b) $h = 11\ cm$.

4.7 Stożek – jego pole powierzchni i objętość

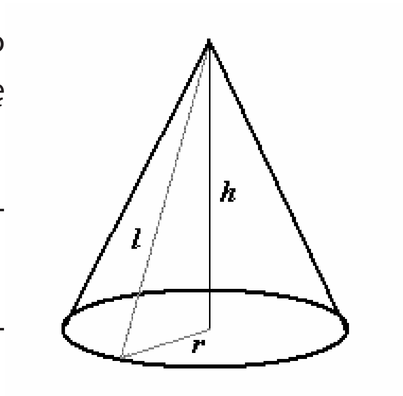
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości stożków;
- Rozpoznawać w stożkach kąty między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą);
- Obliczać miary kątów.

Stożek – to bryła otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta. Prostą tę nazywamy osią stożka.

Podstawą stożka nazywamy koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka.

Wysokością stożka (h) nazywamy przyprostokątną trójkąta zawartą w osi obrotu.



Rysunek 4-19. Stożek

Powierzchnią boczną stożka nazywamy powierzchnię wyznaczoną przez obrót przeciwprostokątnej trójkąta.

Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywam**y wierzchołkiem stożka.**

Tworzącą stożka (l) nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugi należy do podstawy stożka.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy część wspólną stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka.

Objętość stożka wyraża się wzorem:

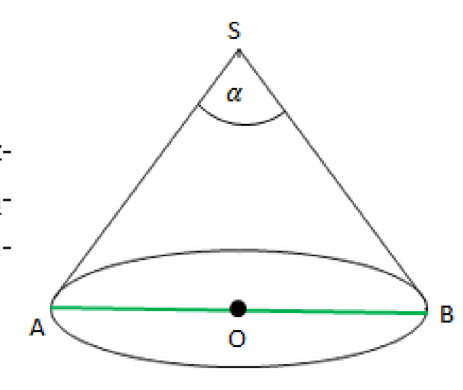
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej stożka:

$$\boldsymbol{P_b = \pi r l}$$

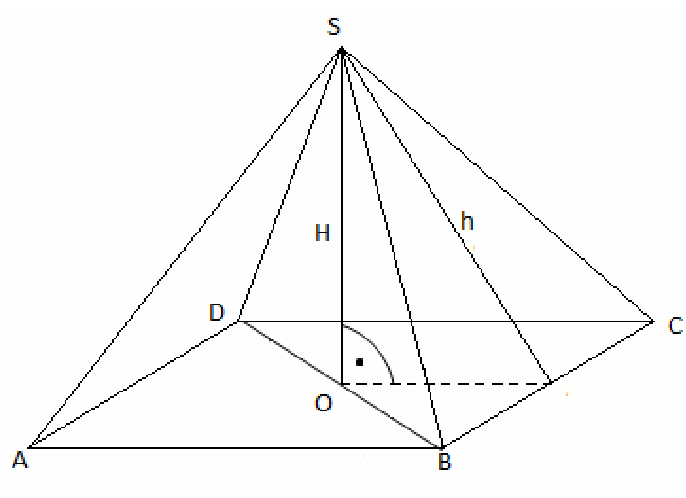
Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = \pi r(r + l)}$$



Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka** (kąt α na rysunku).

Przykład 1



Tworząca stożka ma długość $8\,cm$ i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ΔAOS jest prostokątny i $\sin\alpha = \frac{H}{l}$

$$H = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$\cos a = \frac{r}{l}$$

$$r = l \cdot \cos a = l \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ cm$$

Podstawiamy do wzoru i obliczamy objętość oraz pole powierzchni całkowitej:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\, cm^3$$

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 8) = 48\pi\ cm^2$$

ZADANIA

4.7.1 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka, jeśli:

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 180°$ c) $\alpha = 240°$ d) $\alpha = 270°$

Odpowiedź:

a) $4\pi\ cm^2$ b) $36\pi\ cm^2$ c) $64\pi\ cm^2$ d) $81\pi\ cm^2$

4.7.2 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu $15\ cm$. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku $6\ cm$. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α.

Odpowiedź: $\alpha = 72°$.

4.7.3 Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu $49\ cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $49\pi(1 + \sqrt{2})\ cm^2$.

4.7.4 Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π cm², a średnica jego podstawy ma długość $12\ cm$. Oblicz objętość tego stożka.

Odpowiedź: $96\pi\ cm^3$.

4.7.5 Pole powierzchni bocznej stożka jest cztery razy większe od pola podstawy. Obwód przekroju osiowego stożka jest równy 30. Oblicz objętość tego stożka

Odpowiedź: $V = 9\pi\sqrt{15}$.

4.7.6 Stożek ma wysokość $10\ cm$. Pole przekroju osiowego tego stożka jest równe $30\ cm^2$. Jaką długość ma tworząca tego stożka?

Odpowiedź: $\sqrt{190}\ cm$.

4.7.7 Kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$. Promień podstawy stożka ma długość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Odpowiedź: 32π.

4.7.8 Objętość stożka jest równa 4π, a pole jego podstawy jest równe 4π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $2\pi\left(2 + \sqrt{13}\right)$.

4.7.9 Do naczynia w kształcie odwróconego stożka wrzucono kulkę o promieniu $r = 3\ cm$. Oceń, czy kulka będzie wystawać nad brzeg naczynia. Uzasadnij odpowiedź, wykonując odpowiednie obliczenia, jeżeli wiadomo, że wysokość stożka wynosi $12\ cm$, a promień podstawy to $4\ cm$.

Odpowiedź: Kulka będzie wystawać ponad brzeg naczynia.

4.7.10 Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$ cm². Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $V = 9\sqrt{3}\ cm^3$, $P_c = 27\pi\ cm^2$.

4.8 Kula – jej pole powierzchni i objętość

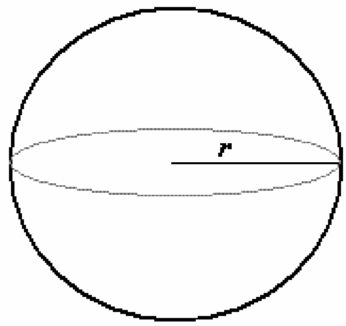
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości kuli.

Kula o środku w punkcie O i promieniu r to bryła będąca zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego – **promieniem kuli.**

Obrót okręgu ograniczonego koło tworzy powierzchnię obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli.** Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.



Rysunek 4-20. Kula

Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Objętość kuli wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 4\pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu $r = 4\ cm$.

Podstawiamy do wzoru $r = 4\ cm$ i obliczamy:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi\ cm^2$$

Przykład 2

Oblicz stosunek objętości kuli o promieniu $r_1 = 8\ cm$ do objętości kuli o promieniu $r_2 = 2\ cm$.

Ponieważ każde dwie kule są bryłami podobnymi, to $\frac{r_1}{r_2} = k$.

$$\frac{8}{2} = k \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_2}^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 4^3 = 64$$

Odpowiedź: Stosunek objętości tych kul jest równy 64.

ZADANIA

4.8.1 Oblicz objętość kuli o promieniu $r = 5\ cm$.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi cm^3$.

4.8.2 Pole powierzchni kuli jest równe $100\pi\ cm^2$. Oblicz objętość tej kuli.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$.

4.8.3 Oblicz pole powierzchni:

a) piłki do koszykówki o średnicy równej $24\ cm$,

b) piłki nożnej o średnicy równej $21{,}8\ cm$.

Odpowiedź: a) $56\pi\ cm^2$, b) $475{,}25\pi\ cm^2$.

4.8.4 Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o $20\ cm$, ich promienie są równe odpowiednio: $r_1 = 16\ cm$ i $r_2 = 12\ cm$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

Odpowiedź: Około $60{,}3\ cm$.

4.8.5 Objętość półkuli jest równa $486\pi\ cm^3$. Oblicz odległość między dwoma najbardziej oddalonymi od siebie punktami tej półkuli.

Odpowiedź: $18\ cm$.

4.8.6 Kopuła olsztyńskiego planetarium jest półkulą o promieniu $8\ m$. Ile [m^2] blachy należy zakupić, aby wymienić pokrycie tej kopuły, dodając 10 % materiału na zakłady i odpady? Wynik podaj w przybliżeniu do części setnych.

Odpowiedź: $442{,}1$ m^2.

4.8.7 Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w czworościan foremny do objętości kuli opisanej na tym czworościanie.

Odpowiedź: $\frac{1}{27}$.

4.8.8 Po zjedzeniu miąższu arbuza, pozostała skórka z niejadalną częścią o grubości 3 cm. Arbuz miał średnicę 30 cm. Jaką jego część stanowił miąższ?

Odpowiedź: $51{,}2\%$.

4.8.9 Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $8\ dm$ od środka kuli. Otrzymany przekrój ma pole $36\ \pi\ dm^2$. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli.

Odpowiedź: $P = 100\pi\ dm^2, V = \frac{1000\pi}{3}\ dm^3$.

4.8.10 W kulę wpisano walec w ten sposób, że objętość walca stanowi $\frac{9}{16}$ objętości kuli. Oblicz stosunek promienia kuli do wysokości walca.

Odpowiedź: 1 lub $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

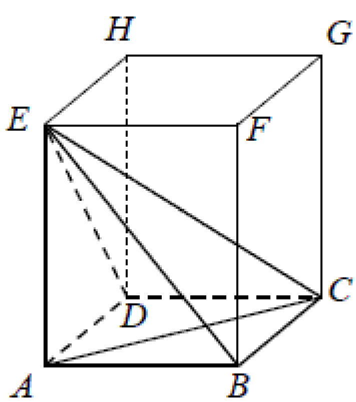
Zadania zamknięte

1.[50] Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa:

a) 6 b) 8 c) 24 d) 64

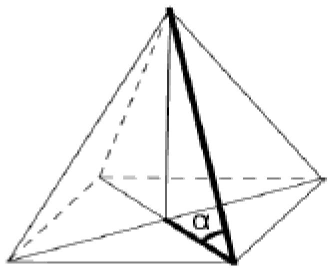
2. Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

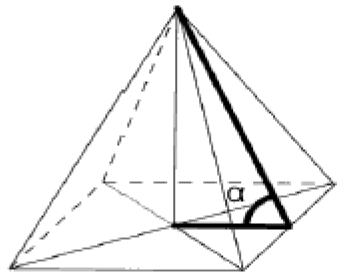
a) $2\sqrt{2}$ b) 16π c) $4\sqrt{2}$ d) 8π

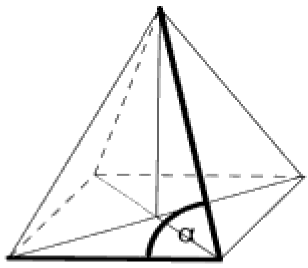


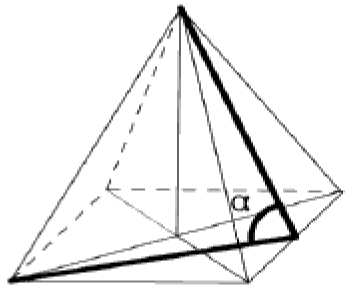
50 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 04.03.2013.

3.[51] Kąt α nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy zaznaczony jest na rysunku:

A.


C.


B.


D.


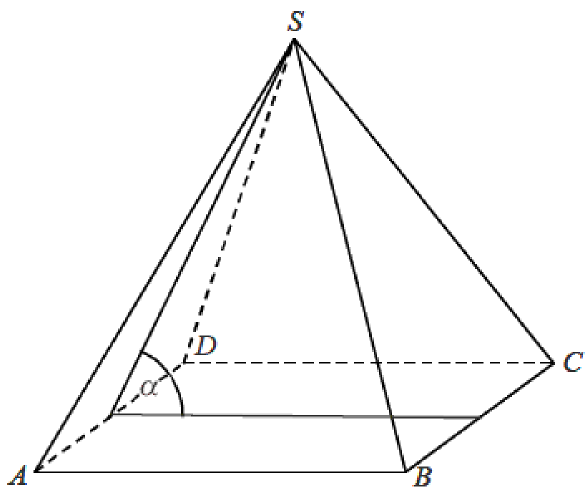
4.[52:] Objętość sześcianu, w którym przekątna ściany bocznej ma długość $\frac{\sqrt{2}}{4}$, jest równa

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 16 d) 64

5.[53] Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

a) 512 b) 384 c) 96 d) 16

6. **(4 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



51 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

52 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

53 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 04.03.2013.

7.[54] Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

a) 96π b) 48π c) 32π d) 8π

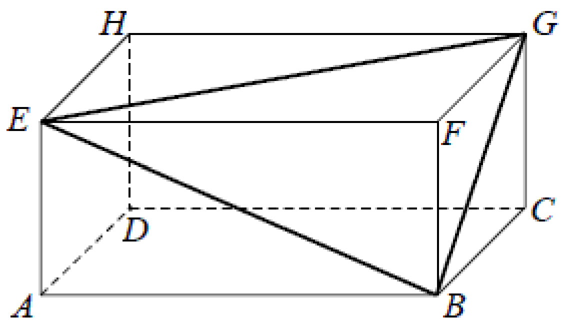
8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to:

a) $r + h = a$ b) $h - r = \frac{a}{2}$ c) $r - h = \frac{a}{2}$ d) $r^2 + h^2 = a^2$

9.[55] Objętość sześcianu jest równa 27. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

10.[56] W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



a) AB b) BG c) GE d) EB

11. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) 9 d) $3\sqrt{3}$

12. Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa:

a) 124π b) 96π c) 64π d) 32π

13.[57] Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe:

a) 94 b) 60 c) 47 d) 20

54 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 04.03.2013.
55 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.
56 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 04.03.2013.
57 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.

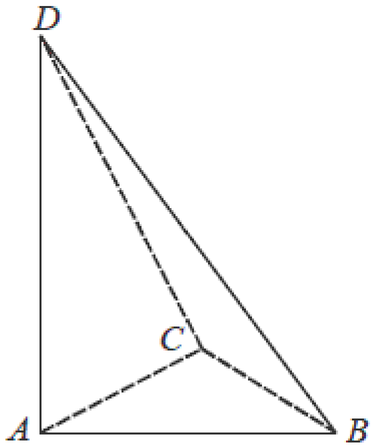
14. Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 11

b) 18

c) 27

d) 34



Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $AD = 12$, $BC = 6$, $BD = CD = 13$.

15.[58] Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są równe 2. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

a) $\sqrt{3} + 12$ b) $2\left(\sqrt{3} + 6\right)$ c) $2\sqrt{3} + 4$ d) $\sqrt{6} + 12$

16. Przekątna prostopadłościanu o długości 6 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przekątna podstawy ma długość 3. Jaka jest miara kąta α?

a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$ d) $90°$

17. Producent chce wyprodukować puszkę w kształcie walca o pojemności 3000 m^3 i wysokości 2 dm. Promień podstawy puszki w zaokrągleniu do części dziesiątych wynosi:

a) 6,8 cm b) 6,9 cm c) 7,0 cm d) 7,1 cm

18. Pewien ostrosłup ma 70 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 138 b) 140 c) 69 d) 70

19. Pole powierzchni kuli o objętości 288π wynosi:

a) 144π b) 36π c) 576π d) 452,16

20. Krople deszczu mają zwykle kształt kuli o średnicy 2 mm. Wskaz, ile kropel deszczu napełni szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 8 cm:

a) 108000 b) 432000 c) 54000 d) 162000

21. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest półkolem o promieniu $r = 10$ cm. Pole podstawy stożka wynosi:

a) 100π cm^2 b) 100 cm^2 c) 25π cm^2 d) 25 cm^2

58 Zadania 15-23: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.

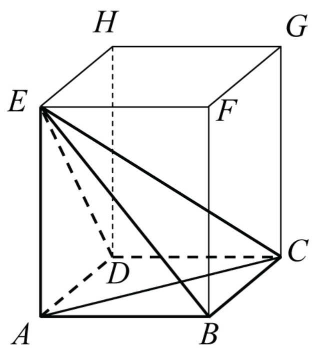
22. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 4 cm i 5 cm. Objętość walca jest równa:

a) 15π cm^3 b) 20π cm^3 c) 25π cm^3 d) 30π cm^3

23. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Objętość stożka jest równa 9 π. Tworząca l stożka ma długość:

a) $l = 3\sqrt{2}$ b) $l = 6$ c) $l = 3\sqrt{3}$ d) $l = 7$

24.[59] **(4 pkt)** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



25.[60] **(5 pkt)** Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

26.[61] **(5 pkt)** Krawędź sześcianu jest o 4 krótsza od jego przekątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

27.[62] **(2 pkt)** Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

28. **(5 pkt)** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $tg\alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

29.[63] **(2 pkt)** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

30.[64] ***(4 pkt)*** Zbiornik ma kształt walca z obu stron zakończonego półkulami. Oblicz ile litrów płynu wypełni ten zbiornik, jeśli pole powierzchni całkowitej zbiornika jest równe 3π m^2, a wysokość walca jest równa 2 metry.

---

59 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 09.03.2013.

60 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

61 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

62 Zadania 27, 28: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 09.03.2013.

63 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.

64 Zadania 30–33: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

31. **(5 pkt)** Pomarańcza ma 5 cm średnicy, a jej skórka ma 5 mm grubości. Wyciśnięty sok stanowi 75% objętości obranej pomarańczy. Ile pomarańczy należy wycisnąć, aby napełnić półlitrowe naczynie? W tym zadaniu przyjmij $\pi = 3$.

32. **(5 pkt)** Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 3 dm $\times$ 0,5 m i wysokości 40 cm, wypełnionego wodą o $^{3}/_{4}$ wysokości, wrzucono dwie sześcienne kostki o krawędzi 10 cm. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

33. **(2 pkt.)** Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 360 cm^2, a pole powierzchni bocznej wynosi 240 cm^2, wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy. Odpowiedź: $tg\alpha = \sqrt{3}$.

5 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

5.1 Średnia arytmetyczna, średnia ważona

Teraz nauczę się:

- Obliczać średnią arytmetyczną i ważoną zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Jeśli przeprowadzasz ankietę, zbierasz dane, dotyczące np. natężenia ruchu w naszym mieście, lub nauczyciele robią zestawienia z testów badających wiedzę swoich uczniów, to po zdobyciu tych informacji potrzebujesz wyciągnąć wnioski, na podstawie których można będzie odpowiedzieć sobie na pewne pytania.

Grupa badanych pewnej populacji nazywa się próbą statystyczną, którą bada się pod kątem pewnej cechy.

Statystyka opisowa – nauka zajmująca się gromadzeniem danych, porządkowaniem ich, analizą i wyciąganiem wniosków.

Dane statystyczne możemy mieć przedstawione w postaci tabel, diagramów, wykresów, ale wcześniej są przedstawiane w postaci skończonego zbioru liczb.

Ze średnią arytmetyczną najczęściej spotykamy się w szkole, kiedy liczymy sobie średnią ocen z danego przedmiotu czy średnią ocen na świadectwie.

Średnią arytmetyczną danego zbioru liczb liczymy dodając do siebie wszystkie liczby należące do zbioru, a następnie dzielimy otrzymaną sumę przez ilość liczb w zbiorze.

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Przykład 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $1, 8, 12, 6, -4, 2, 5, 5, 11, 9$.

$$\bar{x} = \frac{1+8+12+6-4+2+5+5+11+9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna dla tego zestawu liczb wynosi $5{,}5$.

Przykład 2

Średnia arytmetyczna liczb: 4, 2, 2, 6, x, 8 jest równa 5. Oblicz x.

$$\bar{x} = \frac{4+2+2+6+x+8}{6} = 5$$

$$\frac{22+x}{6} = 5$$

$$22 + x = 30 \Rightarrow x = 8$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 8.

Przykład 3[65]

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Jaka jest cena szóstej akcji?

Obliczamy najpierw łączny koszt wszystkich akcji:

$$6 \cdot 500 = 3000$$

Za 5 akcji zapłacono 2300 zł, więc jeśli od ceny wszystkich akcji odejmiemy cenę 5 akcji, to otrzymamy cenę szóstej akcji.

$$3000 - 2300 = 700\ zł$$

Odpowiedź: Cena szóstej akcji wynosi 700 zł.

Przykład 4

Tabelka przedstawia stan wypożyczania książek przez uczniów klasy I C z biblioteki szkolnej.

Liczba uczniów	10	8	5	4	3
Liczba przeczytanych książek	9	33	6	12	0

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 9 + 8 \cdot 33 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 0}{30} = \frac{90 + 264 + 30 + 48}{30} = \frac{432}{30} = 14{,}4$$

Odpowiedź: W klasie I C średnio na jednego ucznia przypada 14,4 książki.

65 Arkusz maturalny CKE, Matura z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, 26.03.2013.

Średnia ważona

Średnią ważoną stosujemy, gdy poszczególne wartości mają przyporządkowane wagi.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie), to liczba

Przykład 5

Oblicz średnią ważoną liczb $1, 2, 3, 4{,}5, 6, 7, 8, 9, 10$, jeśli liczby parzyste mają wagę 4 a nieparzyste 6.

$$\overline{x_w} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 10 \cdot 4}{6 + 4 + 6 + 4 + 6 + 4 + 6 + 4 + 6 + 4}$$

$$\overline{x_w} = \frac{6 + 8 + 18 + 16 + 30 + 24 + 42 + 32 + 54 + 40}{50} = \frac{270}{50} = 5{,}4$$

Odpowiedź: Średnia ważona jest równa 5,4.

Przykład 6

Oceny uzyskane w semestrze przez pewnego ucznia z matematyki wraz z ich wagami zostały zestawione w tabeli.Obliczmy średnią tego ucznia.

Ocena	3	1	2	5	4	6	3	4	4
Waga	1	1	1	4	3	5	1	3	3

$$.\overline{x_w} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3}{1+1+1+4+3+5+1+3+3} = \frac{3+1+2+20+12+30+3+12+12}{22} = \frac{95}{22} = 4{,}31$$

Odpowiedź: Średnia ocen wynosi 3,41.

ZADANIA

5.1.1 Oblicz średnią ważoną danych z tabeli:

Wartość	3	4	5	7
Waga	2	1	4	3

Odpowiedź: 5,1.

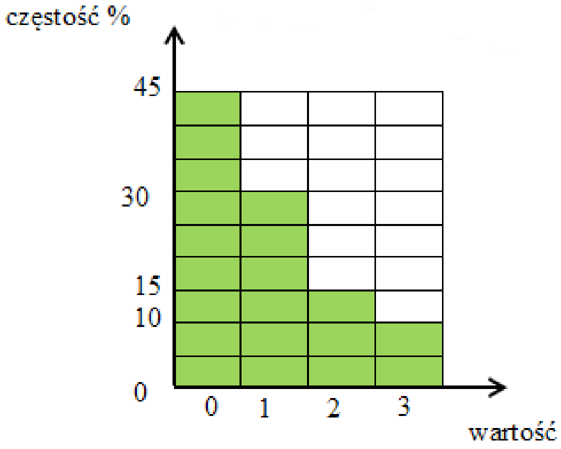
5.1.2 Dla jakiej wartości x średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3?

Odpowiedź: $x = 5$.

5.1.3 Średnia wzrostu 9 osób wynosi $170\ cm$. Jaka będzie średnia wzrostu tej grupy, jeśli dołączy do nich osoba o wzroście $190\ cm$?

Odpowiedź: $172\ cm$.

5.1.4 Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na poniższym diagramie:



Odpowiedź: $0{,}9$.

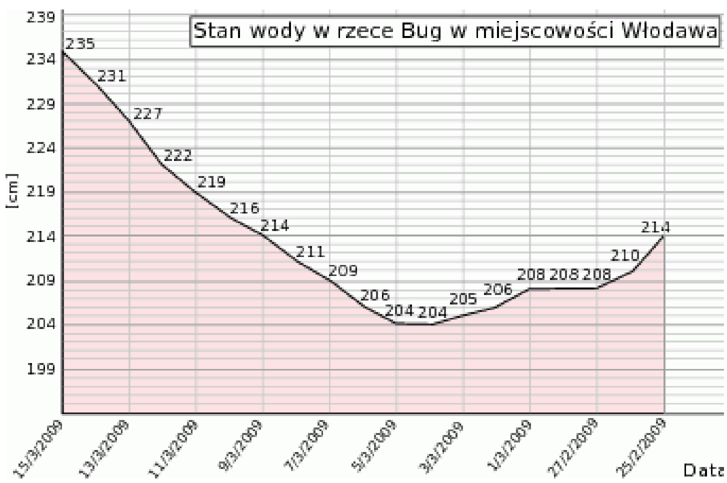
5.1.5 Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło $3200\ zł$. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie wynagrodzenie w firmie jest o 2% wyższe niż poprzednio?

Odpowiedź: $2528\ zł$.

5.1.6 Średnia arytmetyczna liczb $a, b, c, d, 22$ jest równa 14. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d?

Odpowiedź: 12.

5.1.7 Na podanym wykresie przedstawiono stan wody w rzece Bug od 25 lutego do 15 marca 2009 roku.



Rysunek 5-1. Stan wody w rzece Bug w miejscowości Włodawa

a) W których dniach stan wody w rzece nie przekraczał 207 cm?

b) Jaki był średni stan wody w rzece w dniach 1-10 marca 2009?

c) O ile procent podniósł się stan wody w rzece między 6 a 12 marca? Wynik podaj z dokładnością do jednego punktu procentowego.

Odpowiedź:

a) Między 2 a 6 marca. b) 208,3 cm. c) O 8%.

5.1.8 Na koniec semestru otrzymasz piątkę, jeśli zdobędziesz średnio co najmniej 70 punktów z pięciu sprawdzianów. Ania otrzymała średnio 68 pkt. z czterech sprawdzianów. Jaką minimalną ilość punktów musi dostać z piątego sprawdzianu, aby na semestr otrzymać piątkę?

Odpowiedź: 78 pkt.

5.1.9 Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci wynosi 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek babci, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 31 lat. Ile lat ma babcia?

Odpowiedź: 63 lata**.**

5.2 Mediana, dominanta

Teraz nauczę się:

- Obliczać medianę i dominantę zestawu danych.

Mediana zestawu liczb

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza uporządkowany rosnąco (lub malejąco) ciąg liczb.

- Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.
- Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Mediana jest to wartość środkowa występująca w uporządkowanym zestawie danych.

Przykład 1

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13.

W tym przykładzie grupa danych jest liczbą parzystą, więc nie istnieje jedna wielkość środkowa. Mamy dwie takie wartości.

$$\underbrace{2,\ 3,\ 4,}_{\text{3 wartości}}\ 6,\ 8,\ \underbrace{9,\ 11,\ 13.}_{\text{3 wartości}}$$

To, że mamy dwie wielkości środkowe, nie oznacza jednak, że mamy dwie mediany. W takim wypadku medianę otrzymujemy, obliczając średnią arytmetyczną dwóch wyznaczonych liczb.

$$M = \frac{6+8}{2} = 7$$

Odpowiedź: Mediana zestawu liczb wynosi 7.

Przykład 2

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Mamy podany uszeregowany ciąg danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Składa się z 9 wartości. Dokładnie pośrodku znajduje się wartość piąta (ponieważ mamy cztery wartości na lewo od niej i cztery na prawo):

$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8,}_{4\ \text{wartości}}\ 10,\ \underbrace{12,\ 14,\ 16,\ 18}_{4\ \text{wartości}}$$

Odpowiedź: Mediana wynosi 10.

Przykład 3

Poniżej przedstawiona jest liczba 100 ankietowanych dzieci.

Liczba osób	0	1	2	3	4	5
Liczba ankietowanych	15	34	27	15	7	2

Mamy do czynienia z parzystą liczbą wartości (100).

W szeregu 100 liczb liczbami środkowymi będą 50 i 51. Należy ustalić, jaką wartość mają te dwie liczby.

Z tabeli wynika:

- liczby od 1 do 15 mają wartość 0
- liczby od 16 do 49 $(15 + 34 = 49)$ mają wartość 1
- liczby od 50 do 76 $(49 + 27 = 76)$ mają wartość 2

Dalej nie musimy sprawdzać, bo ustaliliśmy wartość obu liczb:

- wartość liczby 50 wynosi 2
- wartość liczby 51 wynosi 2

Stąd mediana jest równa 2.

Dominanta

Dominanta (moda) jest to wartość, która w zebranych danych statystycznych pojawia się najczęściej. Oznaczamy ją symbolem D.

Gdy mamy kilka wielkości, które pojawiają się z tą samą największą liczbą razy, mamy do czynienia z kilkoma dominantami.

Przykład 4

Podaj dominantę z następujących liczb: $1, 3, 5, 0, 2, 5, 6, 1, 0, 4, 5, 4, 0, 0, 0, 7, 0$.

Liczba	0	1	2	3	4	5	6	7
Częstość	6	2	1	1	2	3	1	1

Najczęściej występuje liczba 0.

ZADANIA

5.2.1 Korzystając z danych: $3, 4, 1, 8,15, 6, 4, 3, 12, 7, 22, 4, 1, 0, 6, 5, 9,$ określ medianę.

Odpowiedź: 5,5.

5.2.2 Podaj dominantę z następujących liczb:

a) $7, -2, 4, 7, 0, 7, 4,$

b) $1, 5, 6, 1, 6, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 5, 2, 2, 1$.

Odpowiedź: a) 7, b) 1, 5 i 6.

5.2.3 W tabeli przedstawiono wyniki egzaminu dla 100 studentów. Podaj dominantę.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Liczba studentów	22	25	12	25	10	6

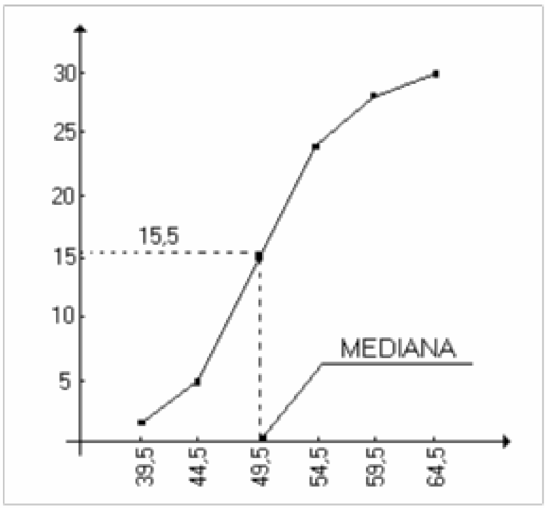
Odpowiedź: $D_1 = 3, D_2 = 4$.

5.2.4 Wyniki konkursu z matematyki podano w punktach: 94, 92, 90, 90, 86, 86, 86, 72. Oblicz medianę tego zestawu danych.

Odpowiedź: 88.

5.2.5 W tabeli przedstawiono wagi uczniów pewnej klasy. Podaj medianę dla tej klasy. Narysuj wykres ilustrujący dane zawarte w tabeli.

Odpowiedź: $M = 49{,}5$.



5.3 Wariancja, odchylenie standardowe

Teraz nauczę się:

- Obliczać wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadkach danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Odchylenie standardowe zestawu liczb $\boldsymbol{\sigma}$ (*sigma*)

Wartość odchylenia standardowego mówi nam, jak bardzo zróżnicowane są dane statystyczne. Im większa jest wartość odchylenie, tym dane są bardziej rozproszone wokół średniej.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ, którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Wariancja to kwadrat odchylenia standardowego.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Rozstęp (R) jest to różnica między największą a najmniejszą z liczb.

Przykład 1

Każdy z 6 zawodników podczas treningu oddał z pistoletu po 10 strzałów do tarczy. Po zsumowaniu punktów każdego zawodnika otrzymano następujące wyniki: 99, 96, 92, 98, 94, 97. Oblicz rozstęp wyników, średni wynik oraz odchylenie standardowe i wariancję.

Obliczmy najpierw rozstęp danych:

Wartość max – 99

Wartość min – 32

$R = 99 - 92 = 7$

Obliczmy teraz średnią wyników

$$\bar{x} = \frac{99 + 96 + 92 + 98 + 94 + 97}{6} = \frac{576}{6} = 96$$

Odchylenie standardowe liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(99-96)^2 + (96-96)^2 + (92-96)^2 + (98-96)^2 + (94-96)^2 + (97-96)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 16 + 4 + 4 + 1}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}38$$

Wariancja wynosi $\sigma^2 = 2{,}37^2 = 5{,}67$

ZADANIA

5.3.1 Oblicz wariancję danych ze zbioru $A = \{4, 5, 8, 9,\ 14\}$.

Odpowiedź: 12,4.

5.3.2 Średnia arytmetyczna trzech liczb a, b, c jest równa 2. Wariancja tych liczb wynosi 3. Oblicz sumę kwadratów liczb a, b i c.

Odpowiedź: 21.

5.3.3 Oblicz z dokładnością do 0,1 odchylenie standardowe następujących danych:

a) $-2;\ 0;\ 1;\ 4;\ 7;\ 14.$

b)

Wartość	-3	-1	0	4	6
Liczebność	10	6	4	2	4

Odpowiedź:

a) $\sigma = 5{,}3.$

b) $\sigma = 3.$

5.3.4 Trzech sędziów oceniło zawodnika, przyznając punkty: 2, 3, 7. Ile wynosi odchylenie standardowe od średniej arytmetycznej zestawu tych punktów?

Odpowiedź: $\sigma = 2{,}16.$

5.3.5 Troje przyjaciół ma wzrost równy odpowiednio 140 cm, 150 cm i 160 cm. Oblicz odchylenie standardowe od średniej wzrostu z dokładnością do części tysięcznych.

Odpowiedź: $\sigma = 8{,}165.$

5.4 Zastosowanie statystyki w praktyce

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wiedzę z zakresu statystyki w sytuacjach praktycznych.

ZADANIA

5.4.1 Czterech pracowników brygady zarobiło w lutym po 1300 zł, a ich szef 2000 zł. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$ płac i odchylenie standardowe σ od niej. Wyniki zaokrąglij do 1 grosza.

Odpowiedź: Średnia płac tych pięciu osób w lutym wynosi 1440 zł z odchyleniem standardowym 280 zł.

5.4.2 Obliczymy odchylenie standardowe i wariancję dla zestawu danych: $1, 3, 5, 5, 11.$

Odpowiedź: $\sigma^2 = 11{,}2$**.**

5.4.3 Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba osób	11	14
Średnia ocen	4,0	3,8
Odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe dla całej klasy. Wyniki podaj z zaokrągleniem do jednego miejsca po przecinku.

Odpowiedź: Średnia: 3,9; odchylenie standardowe: 1,5.

5.4.4 Wagi ośmiu klaczy urodzonych w pewnym gospodarstwie wynoszą: 38 kg, 40 kg, 42 kg, 42 kg, 45 kg, 48 kg, 50 kg, 51 kg. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

Odpowiedź: 4,47 kg.

5.4.5 Właściciel sklepu może zamówić puszki z ananasami u dwóch różnych dostawców A i B. Poniższe tabelki przedstawiają wyniki badania masy produktu bez zalewy w 10 losowo wybranych puszkach od obydwu dostawców:

	DOSTAWCA A				DOSTAWCA B			
Masa produktu bez zalewy (g)	120	130	135	140	125	135	140	145
Liczba puszek	1	4	2	3	3	2	4	1

Oblicz rozstęp i wariancję mas produktu bez zalewy od dostawcy A i B. Oceń, u którego z dostawców powinien zamawiać towar właściciel sklepu.

Odpowiedź:

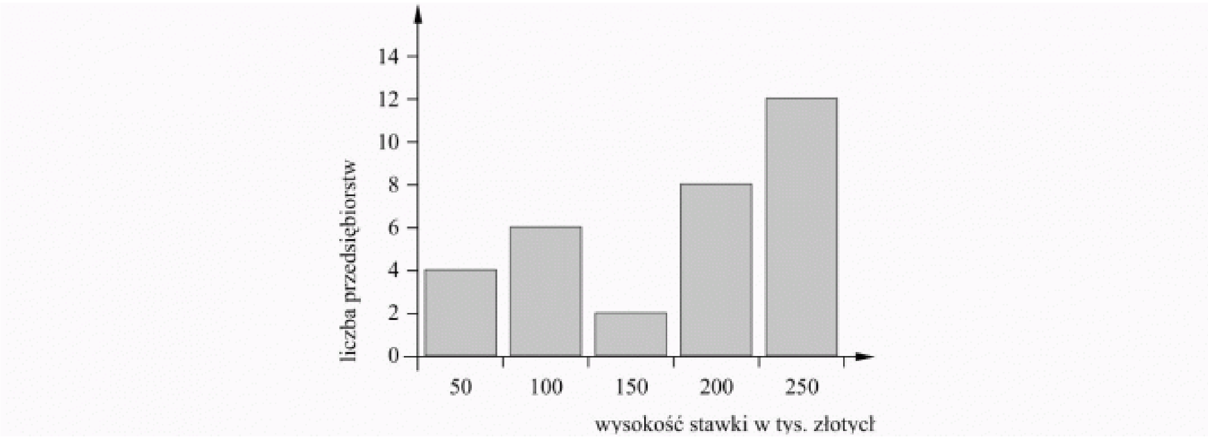
Rozstęp mas produktu bez zalewy od obu dostawców jest taki sam i wynosi 20. Wariancja mas produktu bez zalewy od dostawcy A wynosi 36, a od dostawcy B równa jest 50. Wynika z tego, że właściciel sklepu powinien wybrać dostawcę A.

5.4.6 Diagram przedstawia liczbę przedsiębiorstw w pewnej gminie, płacących podatek roczny w określonej wysokości. Oblicz:

a) średnią stawkę podatku rocznego przypadającego na przedsiębiorstwa z tego zestawienia,

b) podatek dominujący,

c) wysokość podatku, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw,



Rysunek 5-2. Liczba przedsiębiorstw w gminie płacących podatek roczny w określonej wysokości

Odpowiedź:

a) Średnia stawka podatkowa wynosiła $178\ 125\ zł$.

b) Podatek dominujący wynosi $250\ tys.\ zł$.

c) Podatek, którego nie przekroczyła połowa firmy wynosi $200\ 000\ zł$.

d) Rozstęp stawki podatkowej wynosi $200\ 000\ zł$.

5.4.7 W pewnej firmie średnia płaca pracowników produkujących wynosi 2819 zł, zaś średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 2483 zł. Średnia płaca wszystkich pracowników firmy jest równa 2723 zł. Oblicz, jaki procent pracowników produkcyjnych stanowią pozostali pracownicy tej firmy.

Odpowiedź: 40%.

5.5 Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych.

Naukę elementów rachunku prawdopodobieństwa należy rozpocząć od wprowadzenia podstawowych pojęć.

Doświadczenie losowe – w praktyce każde doświadczenie, które może być wielokrotnie powtarzane i którego wyniku nie możemy przewidzieć (np. rzut monetą).

Zdarzenie elementarne – jest to każdy wynik doświadczenia losowego (np. przy rzucie symetryczną kostką do gry może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6).

Zbiór zdarzeń elementarnych – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia (np. przy jednokrotnym rzucie kostką do gry $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać literką $\boldsymbol{\Omega}$ (czyt. *Omega*).

Zdarzenie losowe – dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek $\{2, 4, 6\}$).

Zdarzenie losowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \ldots$

Zdarzenia losowe dzielimy na:

- Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – zdarzenie elementarne, które spełnia warunki zdarzenia losowego (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek).
- Zdarzenia pewne – zdarzenie elementarne, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką do gry wypadła liczba oczek większa od 0, ale mniejsza lub równa 6).
- Zdarzenia niemożliwe – zdarzenie elementarne, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne (np. w rzucie sześcienną kostka do gry wypadła siódemka).

Bardzo istotne jest, ile elementów zawiera zbiór. Wartość ta jest nazywana mocą zbioru.

Np. moc zbioru A – $\bar{\bar{A}}$

Przykład 1

Rzucamy trzy razy monetą.

a) Wypisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.

b) Wypisz zbiór sprzyjający zdarzeniu – wypadł co najwyżej jeden orzeł.

a)

R – wypadła reszka

O – wypadł orzeł

W tym doświadczeniu losowym można otrzymać następujące wyniki:

$A=\{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ (O,O,R)\ (O,R,O)\ (R,O,O)\ (O,O,O)\}$

Wszystkich możliwych wyników jest 8, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 8$.

b)

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najwyżej jeden orzeł.

$B = \{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ \}$

Wszystkich możliwych wyników jest 4, więc $\overline{\overline{B}} = 4$.

ZADANIA

5.5.1 Losujesz dwie niepowtarzające się cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i tworzysz z nich liczbę.

a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia. Ile ich jest?

b) Wylosowałeś cyfry, które dały liczbę parzystą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?

Odpowiedź:

a) $A = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4),\ (2\ 1), (2\ 3), (2, 4), (3\ 1), (3\ 2), (3\ 4),\ (4\ 1), (4\ 2), (4\ 3)\}, \overline{\overline{A}} = 12.$

b) $B = \{(1\ 2), (1\ 4), (2, 4), (3\ 2), (3\ 4), (4\ 2)\ \}, \overline{\overline{B}} = 6.$

5.5.2 Rzucamy monetą, a następnie sześcienną kostką do gry (o ściankach z numerami: 2, 4, 6, 8, 10, 12).

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

b) Podaj przykład zdarzenia pewnego A i zdarzenia niemożliwego B.

Odpowiedź: a) zbiór zdarzeń elementarnych składa się z 12 elementów.

b) A – wypadnie orzeł lub reszka i parzysta liczba oczek, B – wypadną dwa orły.

5.5.3 Rzucono dwiema zwykłymi sześciennymi kostkami do gry. Zdarzenie A – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest mniejsza od 2, zdarzenie B – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest większa lub równa 2. Jakimi zdarzeniami są zdarzenia A i B.

Odpowiedź: A – niemożliwe, B – pewne.

5.5.4 W urnie są trzy kule: biała, zielona i niebieska. Losujemu kolejno dwie kule bez zwracania. Wybisz zbiór zdarzeń elemnetarnych tego doświadczenia losowego.

Odpowiedź: $\{(b,z),(b,n),(z,b),(z,n),(n,b),(n,z)\}$.

5.6 Własności prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Korzystać z własności prawdopodobieństwa.

Zdarzenia losowe opisywaliśmy jako pewne podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Omówimy teraz niektóre pojęcia, które związane są z własnościami tych zbiorów.

Zdarzenia przeciwne

Zdarzenie przeciwne jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych przestrzeni, które nie sprzyjają danemu zdarzeniu. Zdarzenie przeciwne oznaczamy tą samą literą, co dane zdarzenie, ale ze znakiem prim.

$\boldsymbol{A}$ – dane zdarzenie

$\boldsymbol{A'}$ – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

Przykład 1

Rzucamy jeden raz kostką do gry. Doświadczenie A – polega na wyrzuceniu 1, 3 lub 4.

$A=\{1,3,4\}$

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A będzie zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu jednej z liczb: $2,5,6$.

$A'=\{2,5,6\}$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

Twierdzenie

Jeżeli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to zachodzą równości:

$\boldsymbol{A\cap A'=\emptyset}$

$\boldsymbol{A\cup A'=1}$

$\boldsymbol{P(A')=1-P(A)}$

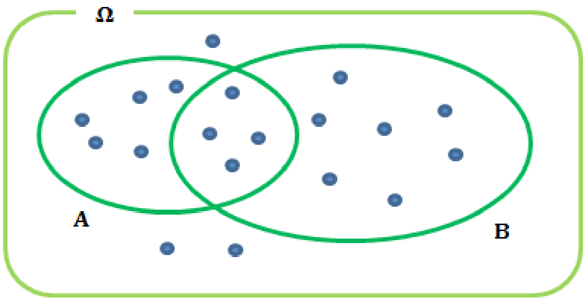
Przykład 2

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają te zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B. Aby obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$, należy ten zbiór wyznaczyć.



Rysunek 5-3. Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

$$P(A \cap B) = \frac{4}{19}$$

Przykład 3

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wypadły co najwyżej cztery oczka.

b) B – wypadła parzysta liczba oczek.

c) $P(A \cap B)$.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 6$

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{\overline{A}} = 4$

Zatem $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $B = \{2, 4, 6\}$

$\overline{\overline{B}} = 3$

Zatem $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

$\overline{A \cap B} = 2$

$P(A \cap B) = \dfrac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Zdarzenia wykluczające się

Zdarzenia wykluczające się to zdarzenia, które nie mają części wspólnej.

Przykład 4

Wybieramy losowo literę alfabetu spośród liter: a, b, c, d, e, f, g, h. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu samogłoski, a zdarzenie losowe B na wylosowaniu litery g lub h.

$A = \{a, e\}$

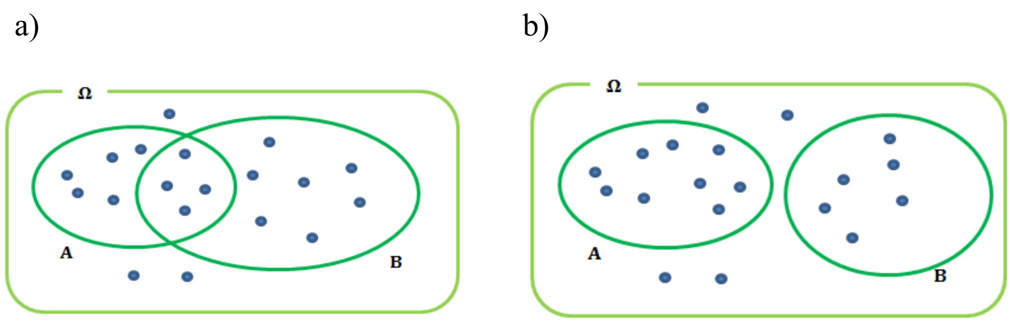
$B = \{g, h\}$

Zdarzenia nie mają żadnego wspólnego zdarzenia elementarnego, a więc wykluczają się. Prawdopodobieństwo części wspólnej dwóch wykluczających się zdarzeń wynosi 0.

$P(A \cap B) = 0$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Przykład 5



Rysunek 5-4. Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Na rysunkach powyżej przedstawiona została przestrzeń zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego.

Obliczymy teraz $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, a następnie sprawdzimy, czy $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

a) $P(A) = \dfrac{9}{19}$

$P(B) = \dfrac{11}{19}$

$P(A \cup B) = \dfrac{16}{19}$

$P(A) + P(B) = \dfrac{9}{19} + \dfrac{11}{19} = \dfrac{20}{19}$

Więc $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B) P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$

b) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{6}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{15}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{6}{19} = \frac{15}{19}$

Więc: $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

Łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Zależy to od tego, czy zdarzenia te się wykluczają, czy nie.

Twierdzenie

W doświadczeniu losowym dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

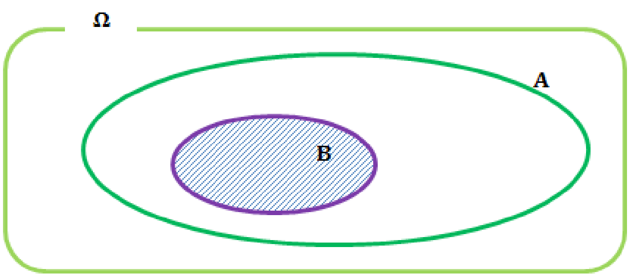
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Przykład 6

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $B \subset A$ oraz $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}3$. Oblicz $P(A \cup B)$.



Skoro $B \subset A$, to: $A \cup B = A$ i $A \cap B = B$

Z twierdzenia: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Skoro $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}3$ i $P(A \cap B) = 0{,}3$, to:

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(A \cup B) = 0{,}7$

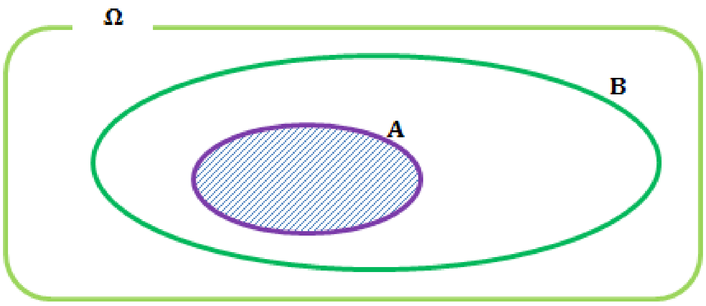
Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń

Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Przykład 7

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy $B \backslash A$.



$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

Korzystając z twierdzenia:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$$

oraz $(B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset (B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$$\begin{aligned} P(B) = P(B \backslash A) \cup (B \cap A) &= P(B \backslash A) + P(B \cap A) - P((B \backslash A) \cap (B \cap A)) \\ &= P(B \backslash A) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$$0{,}7 = P(B \backslash A) + 0{,}3$$

$$P(B \backslash A) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$$

Twierdzenie

Dla dowolnych zdarzeń $\boldsymbol{A\ i\ B \subset \Omega}$ zachodzą następujące własności:

$$\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$$

$$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$$

$$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$$

$\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$**, gdy** $\boldsymbol{A \subset B \subset \Omega}$

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

5.6.1 Losujemy kulę ze zbioru 14 ponumerowanych kul. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu kuli o numerze parzystym. Zdarzenie losowe B polega na wylosowaniu kuli o numerze większym lub równym 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego część wspólną zdarzeń A i B.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$.

5.6.2 Oblicz prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych A i B oraz prawdopodobieństwo różnicy $B \setminus A$, jeżeli: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{1}{12}, P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$.

5.6.3 Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B, wiedząc, że zdarzenia A i B się wykluczają oraz: $P(A) = \frac{1}{10}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź: $P(B) = \frac{1}{2}$.

5.6.4 Jeżeli A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i $P(A) = 5 \cdot P(A')$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{6}$.

5.6.5 A i B są takimi zdarzeniami losowanymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Odpowiedź: $P(A \cup B) = 0{,}4$.

5.6.6 O zdarzeniach losowych A i B wiemy, że: $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \setminus B)$

Odpowiedź:

a) $P(A \cap B) = \frac{11}{30}$.

b) $P(A \setminus B) = \frac{2}{15}$.

5.7 Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia oznaczamy $P(A)$. W nawiasie zapisujemy symbol zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy iloraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A spełnia warunek: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1.}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego 0.

Przykład 1

Rzucamy dwoma identycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

Wyznaczmy najpierw zbiór Ω, czyli przestrzeń, która zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$$

Wypiszmy teraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

$$A = \{(4,6)\ (5,5)\ (5,6)\ \ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 6$$

Więc prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

5.7.1 Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu w pierwszym i trzecim rzucie reszki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}$.

5.7.2 W grze losowej losowane są kulki z trzech pojemników. W pierwszym znajdują się kulki ponumerowane od 1 do 7. W drugim znajdują się dwie kulki: biała i niebieska, a w ostatnim pojemniku znajduje się sześć kulek oznaczonych literami alfabetu: A, B, C, D, E, F. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania ciągu, w którym liczba jest parzysta, a litera alfabetu jest samogłoską.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{7}$.

5.7.3 Z tali 52 kart losujemy 3 karty. Ile możliwych ciągów kart możemy uzyskać? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy w tym samym rozdaniu jako pierwszą kartę damę pik, a jako drugą jakiegokolwiek króla?

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{663}$.

5.7.4 Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 8 \leq 0$:

a) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma wynosi 8,

b) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych.

Odpowiedź: a) $P(A) = \frac{1}{9}$, b) $P(A) = \frac{1}{6}$.

5.8 Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń za pomocą drzewek

Jeżeli doświadczenie losowe składa się z więcej niż jednego etapu, takich jak serie rzutów kostką lub monetą, zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa bywa skomplikowane. Przydatną wówczas jest tak zwana metoda drzew.

Drzewem nazywamy graf ilustrujący przebieg doświadczenia losowego, na którym każdej krawędzi przyporządkowuje się prawdopodobieństwo.

Przykład 1

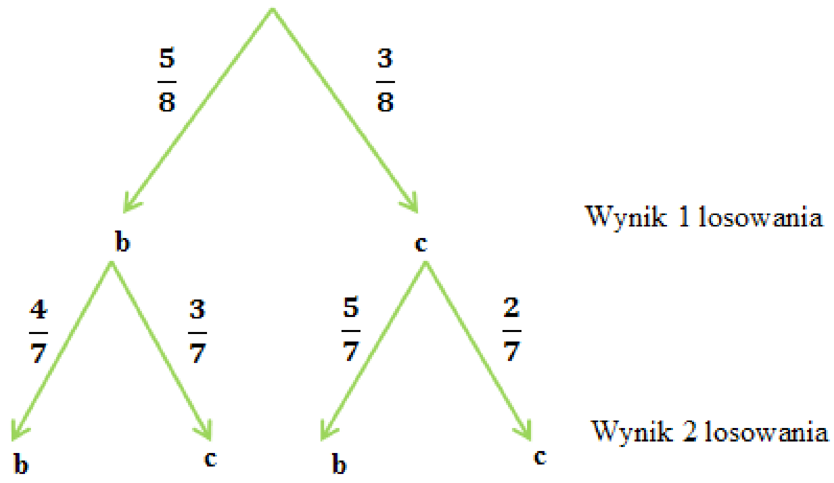
W urnie jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jedną kulę i, bez zwracania, losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wylosowano dwie kule białe.

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów.

Niech b – oznacza kulę białą, a c – kulę czarną.

Budujemy drzewo dla naszego doświadczenia losowego.



Pierwsze losowanie daje nam dwie możliwości, wypadnie kula biała lub kula czarna.

W drugim losowaniu mamy te same możliwości. Osobno rysujemy je dla obu wyników, wynikających z losowania pierwszego.

Reguła iloczynów

Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź.

Reguła sum

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych według reguły iloczynów dla tych gałęzi.

Więc:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych wynosi:

$P(\{(b,b)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej i czarnej wynosi:

$P(\{(b,c)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej i białej wynosi:

$P(\{(c,b)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosi:

$P(\{(c,c)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

a) A – wylosowano dwie kule białe

$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów

$B = \{(b,c),(c,b)\}$

Obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystamy z reguły dodawania. Jeżeli zdarzeniu sprzyjają co najmniej dwa wyniki na drzewie, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest sumą prawdopodobieństw tych wyników.

$P(B) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

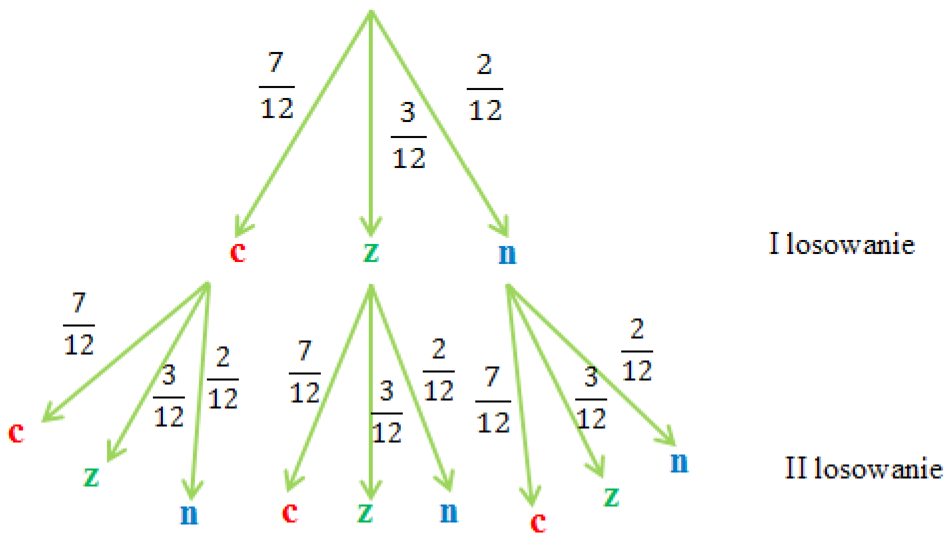
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $P(A) = \frac{5}{14}$, a prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w różnych kolorach wynosi $P(B) = \frac{15}{28}$.

Przykład 2

Mamy 12 kul: 2 niebieskie, 3 zielone, 7 czerwonych. Losujemy kolejno trzy kule (ze zwracaniem). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

A – wylosowanie za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

Budujemy drzewo naszego doświadczenia:



$$P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{14}{144} + \frac{6}{144} + \frac{4}{144} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

5.8.1 W urnie są 3 kule zielone i 1 czerwona. Losujemy kolejno trzy kule (bez zwracania). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowania wszystkich kul zielonych.

b) wylosowania za trzecim razem kuli zielonej.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$.

5.8.2 Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie dwóch czwórek.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{64}$.

5.8.3 Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na:

Zdarzenie A – polegające na tym, że co najmniej raz wypadł orzeł.

Zdarzenie B – polegające na tym, że tylko raz wypadł orzeł.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$.

5.8.4 Gra polega na rzucaniu sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 oczek, to wygrywamy 10 złotych i możemy grać dalej, a jeśli wypadnie inna liczba oczek niż 6, to odpadamy z gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że jeżeli zagramy, wygramy 30 złotych.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{1296}$.

5.8.5 Z zestawu tematów egzaminacyjnych, składającego się z 25 pytań z matematyki (10 dotyczy działań na liczbach, 9 geometrii, 6 rachunku prawdopodobieństwa), wyjęto losowo 1 zagadnienie i, nie oglądając go, odłożono na bok. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano temat z działań na liczbach.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{2}{5}$.

5.8.6 W konkursie omnibus ustalono następujące reguły: dla 1. tury rozgrywek uczestnik losuje jedną z liter wyrazu omnibus i jeśli jest to spółgłoska, to losuje pytanie z urny, w której są 3 pytania z matematyki, 2 z literatury i 3 z muzyki. W przypadku wylosowania samogłoski, uczestnik losuje pytanie z urny, w której są 2 pytania z matematyki, 3 z historii i 3 z geografii. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane pytanie dotyczy matematyki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{28}$.

5.9 Reguła mnożenia i dodawania

Teraz nauczę się:

- Stosować regułę mnożenia i dodawania.

Często mamy do czynienia ze zbiorami, dla których chcielibyśmy znać liczbę elementów. Wygodnie jest, gdy wszystkie elementy są wypisane i można je policzyć. Niekiedy jednak, mając pewien zbiór, budujemy z jego elementów nowe zbiory i chcemy poznać liczbę elementów w tych nowych zbiorach.

Zasada mnożenia

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …, n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ sposobów.

Zasada dodawania

Jeżeli wybór polega na jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …, n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ sposobów.

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób?

Jest 5 osób i pięć miejsc w kolejce. Pierwszą osobę można ustawić na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3 sposoby, czwartą na 2 sposoby, a piątą tylko na 1 sposób.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Odpowiedź: Pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

Przykład 2

Podczas egzaminu student wybiera 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?

Student pierwsze pytanie losuje spośród 6, drugie spośród 5, trzecie spośród 4 i czwarte pytanie spośród 3.

Zatem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Kolejność losowania poszczególnych pytań nie jest istotna, dlatego otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień czterech pytań: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360}{24} = 15$

Odpowiedź: Student może wybrać pytania na 15 sposobów.

Przykład 3

Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ tak, aby cyfry w nich się nie powtarzały?

W tym przypadku nie wykorzystujemy wszystkich cyfr jednocześnie. Tworzymy liczby trzycyfrowe, mając do dyspozycji pięć cyfr. Kolejność wybieranych cyfr jest ważna.

Wśród tych cyfr nie ma zera, zatem każda z nich może być pierwszą cyfrą tworzonej liczby. Mamy 5 możliwych cyfr na pierwsze miejsce, 4 możliwe cyfry na drugim miejscu i 3 na trzecim miejscu.

Zatem liczba wszystkich możliwych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z podanych cyfr jest równa:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Odpowiedź: Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

ZADANIA

5.9.1 Pewna pani dekoruje stół na przyjęcie gości. Ma do wyboru 6 obrusów, 3 wazony i 2 świeczniki. Ile różnych dekoracji może uzyskać?

Odpowiedź: 36 dekoracji.

5.9.2 Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych?

Odpowiedź: 90.

5.9.3 Z urny zwierającej 4 kule (biała, czarna, niebieska, zielona) losujemy trzy kule. Ile jest możliwych losowań, w których cyfry się nie powtarzają.

Odpowiedź: 4 możliwe losowania.

5.9.4 Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4.

Odpowiedź: Liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 jest 18.

5.9.5 Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy trzy cyfry. Ile liczb trzycyfrowych można w ten sposób utworzyć, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać,

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

Odpowiedź: a) 343 liczby, b) 210 liczb.

5.9.6 Na ile sposobów można ustawić w szeregu 3 chłopców i 2 dziewczynki, tak aby:

a) najpierw stały dziewczyny, a następnie chłopcy,

b) pierwsza stała dziewczyna,

c) pierwszy i drugi stał chłopiec,

d) żaden z dwóch chłopców nie stał obok siebie.

Odpowiedź: a) 12, b) 48, c) 36, d) 12.

5.10 *Pojęcie silni

Teraz nauczę się:

- Stosować pojęcie silni do rozwiązywania problemów.

Definicja

Silnią liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$ nazywamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż $\boldsymbol{n}$. W notacji matematycznej $\boldsymbol{n}!$ czytamy, jako *„n silnia„*.

Oznaczenie symboliczne $n!$ wprowadził w 1808 roku francuski matematyk Christian Kramp.

Symbolicznie można zapisać:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$

Definicja

$$\boldsymbol{n}! = \begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{dla\ n = 0} \\ \boldsymbol{n(n-1)!} & \boldsymbol{dla\ n \geq 1} \end{cases}$$

Przykład 1

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Przykład 2

Oblicz $5! - 2! \cdot 3!$

$5! - 2! \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 120 - 12 = 108$

Przykład 3

Oblicz $\frac{12!}{10! \cdot 5!}$

$12!$ możemy zapisać jako $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 10! \cdot 11 \cdot 12$

Przykład 4

Doprowadź wyrażenie $\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!}$ do najprostszej postaci.

Rozpiszmy najpierw $(2n+2)!$

$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$

oraz $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

Wracamy do przykładu, i otrzymujemy:

$$\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$$
$$= \frac{(2n+1) \cdot 2(n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}$$

Zadania

5.10.1 Oblicz:

a) $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ b) $\frac{12!}{11!\cdot 4!}$ c) $\frac{9!\cdot 7!}{(6!)^3}$

Odpowiedź:

a) $45.$ b) $\frac{1}{2}.$ c) $\frac{49}{10}.$

5.10.2 Uprość:

a) $\frac{(n+1)!}{n!}=$ b) $\frac{(n+2)!}{n!}=$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}=$

d) $\frac{n!}{(n-3)!}=$ e) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}=$ f) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!}=$

Odpowiedź:

a) $n+1.$ b) $(n+1)(n+2).$ c) $(n+3).$

d) $(n-2)(n-1)n.$ e) $\frac{1}{(n-2)(n-1)}.$ f) $\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n}.$

5.11 *Kombinatoryka

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: „ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",„Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 24 osobowej?" itp.

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.

Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy $k-$ elementowy podzbiór tego zbioru.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Przykład 1

Oblicz:

a) $C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$

b) $C_7^3 \cdot C_4^2 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2} 35 \cdot 6 = 210$

Przykład 2

Na ile sposobów z grupy 12 osób można wybrać trzech przedstawicieli?

Wybierając przedstawicieli tej grupy tworzymy 3-osobowy podzbiór.

Jest to 3-elementowa kombinacja ze zbioru 12-elementowego.

Więc:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{9!\cdot 2\cdot 3\cdot} = 220$$

Odpowiedź: z grupy 12 osób, trzech przedstawicieli można wybrać na 220 sposobów.

Przykład 3

Obliczmy teraz trzy przykłady:

a) C_n^0

b) C_n^n

c) C_n^1

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!} = n$$

Wniosek

Jeżeli $n \in N$, to:

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1, \qquad C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = n}$$

ZADANIA

5.11.1 Oblicz:

a) C_8^2 b) $C_{10}^3 \cdot C_6^1$ c) $\frac{C_{12}^3}{C_{14}^5}$ d) $C_{25}^{23} + C_{25}^{24}$

Odpowiedź:

a) 28 b) 720 c) $\frac{10}{91}$ d) 325

5.11.2 W klasie jest 10 dziewcząt i 14 chłopców. Na ile sposobów możesz wybrać grupę, w której są dwie dziewczyny i 4 chłopców?

Odpowiedź: na 45045 sposobów.

5.11.3 Spośród 50 losów na loterii tylko 10 jest wygrywających. Na ile sposobów można wybrać 4 losy tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający.

Odpowiedź: Wszystkich sposobów wylosowania 4 losów w tej loterii tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający, jest 138 910.

5.11.4 Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i trzy trójki.

Odpowiedź: Szukanych liczb ośmiocyfrowych jest 192080.

Wariacje

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją $\boldsymbol{k}$-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład 4

W finale konkursu matematycznego bierze udział 10 uczestników. Ile jest możliwości zajęcia przez nich trzech pierwszych miejsc, jeżeli uwzględniamy kolejność (I, II i III miejsce)?

$$V_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 720.

Przykład 5

Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:

$$V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

Odpowiedź: Istnieje 5040 czterocyfrowych kodów o różnych cyfrach.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k –wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Liczba k –wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = n^k}$$

Przykład 6

Ile słów sześcioliterowych (z sensem lub bez) można utworzyć z liter $\{A, B, C\}$? Na każde z 6 miejsc możemy wybrać jedną z 3 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$V_3^6 = 3^6 = 729$$

Odpowiedź: Można utworzyć 729 wyrazów.

Przykład 7

Wypełniając test składający się z 10 pytań, można zakreślić tylko jedną z trzech odpowiedzi. Na ile sposobów można rozwiązać ten test?

Przyjmijmy, że pierwsza odpowiedź to „A”, druga „B”, a trzecia „C”.

Będą to 10-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru 3-elementowego $\{A, B, C\}$.

$$V_3^{10} = 3^{10} = 59049$$

Odpowiedź: Test można rozwiązać na 59049 sposoby.

ZADANIA

5.11.5 Na ile sposobów można ustawić pięcioosobową kolejkę, wybierając ludzi spośród 10 osób?

Odpowiedź: Na 30240 sposobów.

5.11.6 Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5?

Odpowiedź: Wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5 jest 5712.

5.11.7 Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A, B, C, D\}$?

Odpowiedź: 16 wyrazów.

5.11.8 Budynek składa się z 4 pięter. Do windy wchodzi na parterze 6 osób. Na ile sposobów mogą oni opuścić windę na kolejnych piętrach?

Odpowiedź: Na 4096 sposobów.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

1.[66] Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa:

a) 100

b) 99

c) 90

d) 19

2. Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa:

a) 400 zł b) 500 zł c) 600 zł d) 700 zł

3.[67] W loterii liczbowej wylosowano dziesięć liczb: 4, 3, 3, 3, 4, 6, 1, 5, 1, 6. Mediana tych danych jest równa:

a) 5 b) 3,6 c) 3,5 d) 3

4. **(1 pkt)** Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfra jedności należy do zbioru A {2, 4, 5, 7}, cyfra dziesiątek do zbioru B = {6, 7, 8}, a cyfra setek do zbioru C = {2, 4, 5, 6}, jest:

a) 48 b) 36 c) 24 d) 12

66 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

67 Zadania 3, 4: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.

5.[68] Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawione są w tabeli:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	7	6	4	2

Mediana ocen ze sprawdzianu jest równa:

a) 3,5 b) 3, c) 4 d) 4,5

6. W pudełku są 4 kule białe i x kul czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{5}$, gdy:

a) $x = 6$ b) $x = 8$ c) $x = 10$ d) $x = 12$

7.[69] Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

a) $\frac{4}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

8. W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

a) 1 b) 14 c) 7 d) 8

9.[70] Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Mediana zarobków tych 6 osób jest równa:

a) 3400 zł b) 3500 zł c) 6000 zł d) 7000 zł

10. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4. Wówczas:

a) $p < \frac{1}{5}$ b) $p = \frac{1}{5}$ c) $p = \frac{1}{4}$ d) $p > \frac{1}{4}$

11.[71] W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa:

a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 5

12. Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi, B' jest zdarzeniem przeciwnym do B, $P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,12 b) 0,18 c) 0,6 d) 0,9

68 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.
69 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
70 Zadania 9, 10: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 08.03.2013.
71 Zadania 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.

13.[72] Tabela przedstawia zestawienie liczby błędów popełnionych przez zdających część teoretyczną egzaminu na prawo jazdy.

Liczba błędów	0	1	2	x
Liczba zdających	8	4	10	8

Średnia arytmetyczna liczby tych błędów popełnionych przez jednego zdającego jest równa 1,6. Wynika stąd, że:

a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ d) $x = 6$

14. O zdarzeniach A oraz B zawartych w Ω wiadomo, że $P(A) = \frac{5}{6}, P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Wtedy:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ b) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ c) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ d) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

15.[73] Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{18}$

16. Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?". Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

17.[74] Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy:

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

18.[75] Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy?

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

72 Zadania 13, 14: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
73 Zadania 15, 16: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
74 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 09.03.2013.
75 Zadanie 18: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

19.

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	15	17	19	15	19	15

Podaj medianę i dominantę rzutu kostką.

Odpowiedź: $M = 3$, $D = 3$ lub $D = 5$.

ZADANIA OTWARTE

1.[76] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

2.[77] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5} losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania, tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba jest mniejsza od 432.

3.[78] **(4 pkt)** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednej reszki czy wyrzucenie orła w co drugim rzucie?

4.[79] **(2 pkt)** Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości, średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

5.[80] **(2 pkt)** Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

6.[81] **(4pkt)** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki: (1) liczba jest podzielna przez 25, (2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste, (3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

7.[82] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1 ,2, 3,..., 7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

---

76 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 10.03.2013.

77 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

78 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

79 www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 10.03.2013.

80 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 10.03.2013

81 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 10.03.2013.

82 www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 10.03.2013.

8.[83] **(4 pkt)** Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

9.[84] **(4 pkt)** W grupie 200 osób 65% uczy się języka angielskiego, 47% uczy się języka rosyjskiego, a 30% uczy się obu tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z tej grupy osoba nie uczy się żadnego z wymienionych języków.

10. **(2 pkt)** Doświadczenie polega na rzucie dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek będzie większa od 7, ale nie przekroczy 11.

11. **(2 pkt)** Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 6.

12. **(2 pkt)** Z liczb dwucyfrowych wybrano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 5?

13. **(4 pkt)** W urnie A jest 5 kul białych i 3 czarne, w urnie B są 4 kule białe i 6 czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej z urn. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyjmiemy kule w jednym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

14. **(4 pkt)** W urnie jest 7 kul białych i 3 czarne. Losujemy z tej urny jedną kulę, a następnie z pozostałych znowu jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ten sposób wyjmiemy kule w różnych kolorach. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

15. **(5 pkt)** W urnie jest 5 kul białych, 8 zielonych i n niebieskich. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej lub niebieskiej jest równe $\frac{3}{4}$. Wyznacz liczbę n. Odpowiedź: $n = 7$.

16. **(2 pkt)** W urnie jest 16 kul białych, 14 kul zielonych, 6 niebieskich i 4 żółte. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, ęe będzie to kula zielona lub żółta.

17. **(6 pkt)** W urnie znajdują się kule białe, czerwone i zielone. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej jest trzykrotnie większe od prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej lub zielonej. Wiedząc, że co czwarta kula jest biała, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej.

83 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 10.03.2013.
84 Zadania 9–17: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*.
2. Testy maturalne. *Matematyka 2010*, Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań*.
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*. Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*. Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29
2. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o
3. www.math.edu.pl/symetria
4. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram
5. www.violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom
7. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski
8. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
11. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
12. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
13. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
14. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
15. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
16. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
20. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
21. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
22. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
23. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian
24. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu
25. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia
26. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
27. www.zadania.info
28. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf
29. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
30. www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39funkcja_fxa_x_homograficzna
31. www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne
32. www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
34. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

35. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
36. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
37. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
38. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
39. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
40. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

Matematyka

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują się pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Ja w świecie liczb

Z liczbami spotykasz się na każdym kroku, każdego dnia, dlatego musisz sprawnie wykonywać różnego rodzaju działania na liczbach rzeczywistych. Przypomnij sobie, czego nauczyłeś się w gimnazjum, i postaraj się jak najlepiej opanować nowe wiadomości i umiejętności, które w życiu na pewno ci się przydadzą.

To już potrafię:

1. Odczytać i zapisać liczby naturalne dodatnie w systemie rzymskim (w zakresie do 3000);
2. Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych;
3. Zamienić ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienić ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe;
4. Zaokrąglić rozwinięcia dziesiętne liczb;
5. Obliczyć wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne;
6. Szacować wartości wyrażeń arytmetycznych;
7. Stosować obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.);
8. Interpretować liczby wymierne na osi liczbowej;
9. Obliczyć odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej;
10. Wskazać na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$;.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. W 2005 roku Szanghaj liczył około 14 600 000 mieszkańców. W postaci wykładniczej liczbę tę zapisuje się jako:

a) $146 \cdot 10^5$ b) $14{,}6 \cdot 10^6$

c) $0{,}146 \cdot 10^8$ d) $1{,}46 \cdot 10^7$

Zad.2. Liczbę $\sqrt{72}+\sqrt{32}-\sqrt{98}$ można zapisać w postaci:

a) $2\sqrt{6}+4\sqrt{2}-7\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$
d) $17\sqrt{2}$

Zad.3. Dane są liczby zapisane w systemie rzymskim, największa z nich to:

a) MCMLX
b) MCMXCIX
c) MMVII
d) MCMLXXIV

Zad.4. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{7}{\sqrt{5}}$, należy mianownik tego ułamka pomnożyć przez:

a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{5}-1$
d) $\sqrt{5}+1$

Zad.5. Drut o długości 45 m przecięto na trzy części, których stosunek długości jest równy 1: 3: 5. Najdłuższa z tych części ma długość:

a) $15\ m$
b) $5\ m$
c) $25\ m$
d) $9\ m$

Zad.6. Przybliżona wartość $\sqrt{13}$ wynosi:

a) 3,62
b) 3,60
c) 3,61
d) 3,63

Zad.7. Ile jest liczb ujemnych wśród liczb przeciwnych do: $-\frac{1}{4}, 2, \frac{3}{5}, 5\frac{1}{2}, -0{,}75$?

a) 5
b) 3
c) 2
d) 4

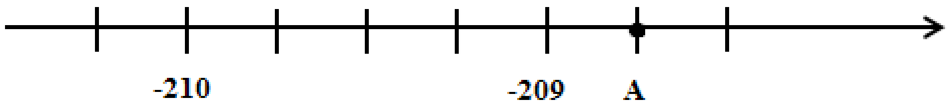
Zad.8. O godzinie 4^{00} termometr wskazywał $-12°C$, a o godzinie 10^{00} ten sam termometr wskazywał $+2°C$. Różnica temperatur w tym dniu wynosiła:

a) -10
b) 14
c) -14
d) 10

Zad.9. Jeśli jest godzina 13^{14}, to do godziny 15^{32} pozostało sekund:

a) 10 000
b) 8280
c) 7500
d) 2180

Zad.10. Punkt A na osi liczbowej ma współrzędne:



a) $-208,75$

b) $-209,25$

c) $208,75$

d) $209,75$

ZADANIA OTWARTE

1. Masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24} kg$, masa Księżyca $7 \cdot 10^{22} kg$. Ile wynosi stosunek masy Ziemi do masy Księżyca? Wynik podaj w przybliżeniu.

2. Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64}-(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+(-1,5)^{-2}}$?

3. Zapisz wyrażenie $\left[\frac{(a^7:a^5)^3\cdot a^4}{a^{13}:a^2}\right]^3$ w postaci potęgi liczby a

4. Z dwóch przystani na rzece odległych od siebie o 100 km wyruszają dwie łódki. Jedna płynie z A do B z prędkością 12 km/h, druga z B do A z prędkością 13 km/h. Po jakim czasie łódki się miną?

5. Jednego dnia cenę pewnego towaru zwiększono o 15%, zaś następnego dnia zmniejszono o 20%. Oblicz początkową cenę tego towaru, jeśli ostatecznie po tych zmianach wynosiła ona 345 zł.

Odpowiedzi

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	4	C	C	B	C	B	A

Zadania otwarte

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – Masa ziemi – $6 \cdot 10^{24} kg$ y – Masa księżyca – $7 \cdot 10^{22} kg$ $\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{7 \cdot 10^{22} kg} = \frac{6}{7} \cdot 10^2 = \frac{600}{7} \approx 85{,}714$
2	$\frac{\sqrt[3]{64} - (\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + (-1{,}5)^{-2}} = \frac{4-(7-4)}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{20}{9}} = \frac{9}{20}$ $1{,}8 - 100\%$ $\frac{9}{20} - x$ $45 = 1{,}8x \Rightarrow x = 25\%$
3	$\left[\frac{(a^7 : a^5)^3 \cdot a^4}{a^{13} : a^2}\right]^3 = \left[\frac{(a^2)^3 \cdot a^4}{a^{10}}\right]^3 = \left[\frac{a^{10}}{a^{10}}\right]^3 = a^0$
4	x – czas do spotkania $12x$ – droga I łódki $13x$ – droga II łódki $14x + 13x = 100 \Rightarrow x = 4$ Odp. Łódki miną się po 4 godzinach.
5	x – cena początkowa $x + 0{,}15x - 0{,}20 \cdot 1{,}15x = 345 \Rightarrow x = 375\ zł$ Odp. Początkowa cena wynosiła 375 zł.

1.1 Zbiory liczbowe

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości i inne wytwory dzieł ludzkich, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próbę liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano dobra, dni, czy np. ludzi w konkurencyjnej grupie. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce[1].

Zbiór liczb naturalnych (N) – nazywamy zbiór liczb 0,1,2,3,4,5,6,7,8...

Zapis matematyczny zbioru:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Zbiór ten jest zbiorem nieskończonym. Najmniejsza liczba naturalna w tym zbiorze to 0. Największa liczba naturalna nie istnieje. Podzbiorem liczb naturalnych jest zbiór liczb naturalnych dodatnich:

$\mathbb{N}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\} = \mathbb{N} \backslash \{\mathbf{0}\}$

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb, 10.02.2013

Zbiór liczb całkowitych (Z) – stanowią wszystkie liczby naturalne N i liczby do nich przeciwne ...–5,–4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,5...

Zapis matematyczny zbioru:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

Zbiór liczb całkowitych jest zbiorem nieskończonym. Nie istnieje najmniejsza i największa liczba całkowita. Zbiór ten możemy podzielić na dwa podzbiory: liczb całkowitych dodatnich oznaczanych jako $\mathbf{C}_+ = \{1,2,3,\dots\}$ oraz liczb całkowitych ujemnych oznaczanych jako $\mathbf{C}_- = \{\dots,-3,-2,-1\}$.

Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.

Zbiór liczb wymiernych (W) to zbiór wszystkich liczb, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i q jest różne od 0. Jest to zbiór nieskończony. Postać p/q liczby wymiernej nazywamy postacią ułamkową tej liczby.

Podzbiorem liczb wymiernych jest zbiór liczb naturalnych i całkowitych. Oznacza to, że każda liczba całkowita i naturalna jest jednocześnie liczbą wymierną.

Przykłady liczb wymiernych[2]:

$$-0.04=\frac{-4}{100}=\frac{-1}{25}$$
$$\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$$
$$-\sqrt[3]{27}=-3=\frac{-3}{1}$$
$$0.166(6)=\frac{1}{6}$$
$$5=\frac{5}{1}$$

Rysunek 1-1 – Liczby wymierne

Jak widać, każdą z nich da się zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Zbiór liczb niewymiernych (NW) – nazywamy zbiór liczb, które nie dadzą się przedstawić w postaci ułamka p/q, gdzie p i q należą do zbioru liczb całkowitych i dodatkowo q jest różne od 0.

Przykłady liczb niewymiernych[3]:

$$\pi$$
$$\sqrt[2]{2}$$
$$-\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[5]{7}$$
$$\sqrt[2]{\pi}$$
$$\frac{1}{\pi}$$

Rysunek 1-2 – Liczby niewymierne

2 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png, 10.02.2013
3 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png, 10.02.2013

Zbiór liczb rzeczywistych (R) – jest sumą zbiorów liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych. Jest uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych.

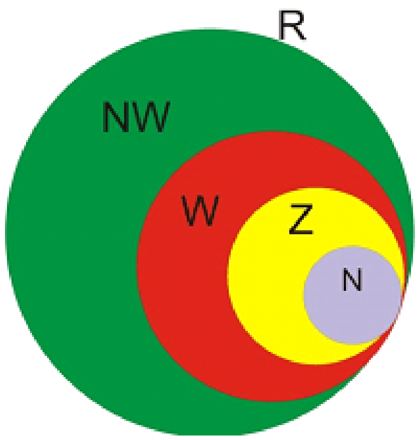
Przykłady liczb rzeczywistych[4]:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \pi \\ -0.123 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt[5]{7} \\ -3 \\ \dfrac{3}{4} \\ 1230 \end{array}$$

Rysunek 1-3 – Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych dzieli się na dwa podzbiory: zbiór liczb rzeczywistych **dodatnich** $\mathbb{R}_+$ i **ujemnych** $\mathbb{R}_-$.

Zależności między zbiorami liczbowymi:



Symbol $\subset$ czytamy „zawiera się".

- $N \subset Z$
- $N \subset W$
- $Z \subset W$
- $W \subset R$
- $NW \subset R$

Rysunek 1-4 – Zależności między zbiorami liczbowymi

ZADANIA

1.1.1 Z podanych liczb wypisz liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne.

Które z nich mają rozwinięcie nieskończone okresowe?

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{2}{13}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 44, 0, (123), $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{27}$, –3, 16, $\sqrt{2}$, 0, $\sqrt[3]{5}$, –5

4 www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png, 10.02.2013

Odpowiedź:

0, (6); 0,125; –0,(153846); 1,118…; 1,5707…; 44; 0,123123…; 1,732…; –3; –3,16; 1,4142…; 0; 1,709…; –5

N={0; 44}, Z={–5;–3; 0; 44 }, W={–5; –3,16; –3; $-\frac{2}{13}$, 0; 0,(123); ;$\frac{2}{3}$, 44}, NW={$\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$}

1.1.2 Wypisz wszystkie elementy zbioru A wiedząc, że A jest zbiorem:

a) wszystkich całkowitych, jednocyfrowych liczb nieparzystych,

b) wszystkich liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 20, podzielnych przez 3,

c) wszystkich dwucyfrowych liczb pierwszych mniejszych od 30,

d) wszystkich dodatnich dzielników liczby 12.

Odpowiedź: a) 1, 3, 5, 7, 9; b) 3, 6, 9, 12, 15,18; c) 11, 13, 17, 19, 23, 29; d) 1, 2, 3, 6, 12

1.1.3 Wypisz wszystkie elementy zbioru A, jeśli:

a) A = $\{x\colon x|20 \wedge x > 0\}$

b) A = $\{x\colon x \in N \wedge x < 20 \wedge NWD(x,18) = 1\}$

c) A = $\{x\colon x \in N \wedge x < 25 \wedge NWD(x,24) = 2\}$

d) A = $\{x\colon x \in N \wedge NWW(x,12) = 48\}$

Odpowiedź: a) A = {1,2,4,5,10, 20}; b) A = {1,5,7,11, 13, 17, 19}; c) A = {2,10, 14 }; d) A = {48}

Ciekawostka

Zbiór liczb rzeczywistych najprościej określamy mówiąc, że są to „wszystkie liczby". Jest to pewne uproszczenie, ponieważ istnieją liczby, które nie należą do zbioru liczb rzeczywistych – są nimi liczby zespolone.

Zbiór liczb zespolonych został wprowadzony ze względu na to, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie można było wykonywać pierwiastkowania liczb ujemnych. Liczby zespolone mają postać: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{i}$, gdzie $\boldsymbol{i} = \left(\sqrt{-1}\right)$ nazywa się jednostką urojoną. Liczba a jest nazywana częścią rzeczywistą, liczba b częścią urojoną.

1.2 Różne postacie liczb rzeczywistych

Teraz nauczę się:

Przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków i potęg).

Po usystematyzowaniu wiedzy na temat zbiorów liczbowych, zastanówmy się, w jaki sposób możemy przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego czy ułamka dziesiętnego okresowego).

Aby otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby zapisanej w postaci ułamka zwykłego, należy podzielić jego licznik przez mianownik, np. $\frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{25} = 0{,}04; \frac{1}{3} = 0{,}333\ \ldots$

A w jaki sposób przejdziemy z rozwinięcia dziesiętnego na postać ułamka zwykłego?

Przykład 1

Zapisz liczbę $0{,}333\ \ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$0{,}333\ \ldots = x\ / \cdot 10$

$3{,}333\ \ldots = 10x$

$3 + 0{,}333\ \ldots = 10x$

$3 + x = 10x$

$3 = 9x / : 9$

$x = \frac{3}{9}$ ostatecznie otrzymujemy:

$x = \frac{1}{3}$

Przykład 2

Zapisz liczbę $0,(125)$ w postaci ułamka zwykłego

$0,(125) = 0{,}125125\ \ldots$

$0{,}125125\ \ldots = x\ / \cdot 1000$

$125{,}125125\ \ldots = 1000x$

$125 + 0{,}125125\ \ldots = 1000x$

$125 + x = 1000x$

$125 = 999x / : 999$

szukanym ułamkiem jest:

$x = \frac{125}{999}$

Przykład 3

Zapisz liczbę $3{,}7235235235\ldots$ w postaci ułamka zwykłego

$3{,}7235235235\ldots = x\ / \cdot 10$

$37{,}235235235\ldots = 10x\ /\cdot\ 1000$

$37235{,}235235\ldots = 10000x$

Jeżeli: $37235{,}235235\ldots - 37{,}235235235\ldots = 37198$, czyli

$10000x - 10x = 37198,$

$9990x = 37198\ /: 9990$

więc $x = \dfrac{37198}{9990} = \dfrac{18599}{4995}$

Nie wszystkie liczby rzeczywiste można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego skończonego czy też rozwinięcia nieskończonego okresowego. **W takiej formie można zapisać wszystkie liczby wymierne.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Stosując algorytm podany powyżej wykaż, że $0{,}999\ldots = 1$.

Rozwiązanie:

$0{,}999\ldots = x\ /\cdot\ 10$

$9{,}999\ldots = 10x, \textit{ponieważ}\ 0{,}999\ldots = x$

Jeżeli: $9 + 0{,}999\ldots = 9{,}999\ldots$

$to{:}\ 9 + x = 10x$

$9 = 9x\ /: 9$

$x = 1$

Skoro, to: $0{,}999\ldots = x,$

to $0{,}999\ldots = 1$ c.n.d

ZADANIA

1.2.1 Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamków. Wskaż wśród nich liczby niewymierne.

$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{33}, \frac{8}{15}, \frac{9}{25}, \frac{1}{4}$

Odpowiedź: 0,1(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,4; 0,(15); 0,5(3); 0,36; 0,25

NW = {1,(6); 0,(285714); 0,(0769230); 0,(15); 0,5(3)}

1.2.2 Przedstaw poniższe liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych:

a) 0,(17) b) 0,(453) c) 0,3(8)

d) 0,25(6) e) 2,6(13) f) −2,34(5)

Odpowiedź: a) $\frac{17}{99}$; b) $\frac{453}{999}$; c) $\frac{35}{90}$; d) $\frac{231}{900}$; e) $\frac{2587}{990}$; f) $\frac{21111}{900}$

1.2.3 Znajdź rozwinięcie dziesiętne różnicy liczb:

a) 1,3(5) – 0,7(4) b) 0,8(7) – 0,3 (6)

c) 0,(67) – 0,(33) d) 0,23(5) – 0,1(1)

Odpowiedź:

a) $\frac{122}{90} - \frac{67}{90} = \frac{55}{90} =$ 0,6(1); b) $\frac{79}{90} - \frac{33}{90} = \frac{46}{90} =$ 0,5 (1); c) $\frac{67}{99} - \frac{1}{3} = \frac{102}{297} =$ 0,(34); d) $\frac{212}{900} - \frac{10}{90} = \frac{112}{900} = 0{,}12(4)$

1.2.4 Zbadaj, czy zachodzi równość:

a) $0{,}0(6) + 0{,}0(3) = \frac{2}{15}$ b) $0{,}(3) - 0{,}(2) = \frac{1}{6}$

c) $0{,}(1) \cdot 0{,}(1) = 0{,}(1)$ d) $3 \cdot 1,(4) = 4,(3)$

Odpowiedź:

a) $\frac{6}{90} + \frac{3}{90} = \frac{9}{90} =$ 0,1 NIE; b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ NIE;

c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ NIE; d) $3 \cdot \frac{13}{90} = \frac{39}{90} =$ 0,4(3) TAK

1.3 Wartości wyrażeń arytmetycznych

Teraz nauczę się:

Obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Wyrażenie wymierne[5] to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych (liter) o tej własności, że występują w nim wyłącznie takie operacje arytmetyczne, które po podstawieniu za zmienne liczb wymiernych dają w wyniku liczbę wymierną.

Aby obliczyć wartość wyrażenia wymiernego, wykonujemy we właściwej kolejności podane działania, a wynik zapisujemy w najprostszej postaci.

Ustalenie właściwej kolejności wykonywania działań podlega następującym zasadom:

1. Jeśli w wyrażeniu występują nawiasy, w pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach.
2. Jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów lub działania w nawiasach zostały już wykonane, to pozostałe działania wykonujemy w następującej kolejności:

- potęgowanie i pierwiastkowanie,
- mnożenie i dzielenie,
- dodawanie i odejmowanie.

ZADANIA

1.3.1 Wykonaj obliczenia:

a) $\dfrac{\left(2\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}\right)\cdot 7\frac{2}{8}}{\left(8-\frac{4}{6}\right): 4\frac{1}{7}} =$

b) $\left(6\frac{2}{5}-4\frac{3}{16}\right)\cdot 2\frac{2}{3} =$

c) $\dfrac{\left(6\frac{1}{8}-2\frac{3}{5}\right):\left(1\frac{2}{15}-3\frac{4}{6}\right)}{\left(16\frac{2}{5}+14\frac{1}{7}\right)\cdot 2\frac{3}{10}} : \dfrac{141}{76} =$

d) $\dfrac{371}{285} : \dfrac{6\frac{1}{5}-7\frac{1}{6}+2\frac{1}{5}\cdot 3\frac{2}{8}}{5\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}\cdot 3\frac{6}{12}} =$

Odpowiedź: a) $-11\frac{11}{90}$; b) $5\frac{27}{30}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) -1

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne, 11.02.2013

1.3.2 Oblicz:

a) $\dfrac{2{,}4:1{,}32-0{,}12:1{,}5}{2{,}3\cdot 0{,}25+1{,}18:3{,}2} =$

b) $\dfrac{3\cdot(0{,}15-1{,}57)+(23{,}58-3{,}24):2{,}3}{2{,}6\cdot(0{,}12+4{,}35):2{,}33} =$

c) $\dfrac{(6{,}25:0{,}023-1{,}22):0{,}05}{13{,}24-1{,}45\cdot 2{,}8:1{,}13} =$

d) $\dfrac{(1{,}55:0{,}23)\cdot 2{,}15+(8{,}43-2{,}11)}{5{,}3:(1{,}24+2{,}98)\cdot 0{,}008} =$

Odpowiedź: a) 1,84; b) 0,9; c) 508; d) 0,13

1.3.3 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{0{,}125\cdot 3\frac{1}{5}-(0{,}24:0{,}12)\cdot(-\frac{3}{5})}{10:3\frac{1}{3}-6\cdot\frac{2}{3}+1\frac{7}{20}:5{,}4} =$

b) $3{,}4 : \left(\dfrac{2{,}4-3\frac{3}{4}+1{,}2:\frac{1}{8}}{6:2{,}25-1{,}45\cdot 1\frac{2}{3}}\right)\cdot\dfrac{372}{34} =$

c) $\left\{4\frac{1}{9}-2{,}5 : \left(1\frac{2}{15}+3\frac{4}{3}\right) : 13{,}3\right\} : \dfrac{400147}{98154} =$

d) $-\dfrac{14985}{1969}+\dfrac{4{,}55\cdot\frac{5}{11}+(-2{,}5)\cdot 0{,}9}{[0{,}7\cdot(-0{,}34)-0{,}120]:3\frac{3}{2}} : \dfrac{1\frac{2}{3}}{5\frac{11}{20}} =$

e) $\dfrac{[\left[3{,}32:2\frac{1}{6}-\frac{7}{8}\cdot 0{,}6\right]\cdot 1{,}2+\frac{3}{6}]:\frac{975}{1012}}{\left(1{,}2+1\frac{1}{3}\cdot 0{,}21:1{,}3\right)\cdot\frac{11}{15}} : \left(-\dfrac{11107}{13000}\right) =$

Odpowiedź: a) $-2\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 0; e) -2

1.4 Potęgi

Teraz nauczę się:

- Obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych i stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- Wykorzystywać podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką).

Definicja[6]

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę mnożąc przez siebie n-razy liczbę a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ czynnikow}$$

Prawa działań na potęgach

Niech n, m będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

1) **Iloczyn potęg o tych samych podstawach:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) **Iloraz potęg o tych samych podstawach:** $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3) **Potęga iloczynu:** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4) **Potęga ilorazu:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5) **Potęga potęgi:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
6) **Potęga ilorazu o wykładniku ujemnym:** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz:

a) 2^3 b) $(-4)^2$ c) $(-\frac{2}{5})^4$ d) $(-\frac{1}{3})^3$

e) $(-1\frac{1}{4})^2$ f) $(2\frac{2}{3})^0$ g) $(0,4)^3$ h) $(0,02)^4$

i) $(-0,5)^2$ j) $(\sqrt{3})^2$ k) $(\sqrt[3]{2})^3$ l) $(-2\sqrt{3})^4$

Odpowiedź:

a) 8; b) 16; c) $\frac{16}{625}$; d) $-\frac{1}{27}$;

e) $\frac{25}{16}$; f) 1; g) 0,064; h) 0,00000016;

i) 0,25; j) 3; k) 2; l) 144

6 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 12.02.2013

1.4.2 Zastosuj prawa działań na potęgach:

a) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^1 \cdot 3^{-2}$ b) $(0,4)^1 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,4)^{-3}$ c) $(2\frac{3}{4}) \cdot (2\frac{3}{4})^0 \cdot (2\frac{3}{4})^2 \cdot (2\frac{3}{4})^3$

d) $(-4)^4 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^1 \cdot (-4)^{-5}$ e) $3^2 \cdot 22^2 \cdot (-1)^0$ f) $(\frac{1}{5})^5 \cdot (2\frac{3}{4})^5 \cdot 3^5$

g) $(4,2)^3 \cdot (\frac{2}{6})^3 \cdot (1\frac{4}{12})^3$

Odpowiedź:

a) $3^8 = 6561$; b) 0,4; c) $(2\frac{3}{4})^6$; d) $(-4)^{-2} = 16$; e) $66^2 = 4356$; f) $(\frac{33}{20})^5$; g) $(\frac{28}{15})^3$

1.4.3 Oblicz:

a) $\frac{10^3}{12^3}$. b) $\frac{(1,2)^4}{120^4}$ c) $\frac{(2,2)^2}{(0,16)^2}$

d) $(4\frac{5}{6})^3 : (1\frac{1}{5})^3$ e) $(3,4)^2 : (\frac{7}{2})^2$ f) $(\sqrt[3]{12})^3 : (-2)^3 : (-22)^0$

Odpowiedź: a) $(\frac{5}{6})^3$; b) $(0,01)^4$; c) $(13,75)^2$; d) $(\frac{145}{36})^3$; e) $(\frac{34}{35})^2$; f) 1,5

1.4.4 Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 : \left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}{0,36 : \left(\frac{2}{12}\right)^4} =$ b) $\frac{5^4 - 5^3}{5^2} : \frac{2^5}{\frac{1}{5}} =$ c) $\frac{7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7^5}{7^{10} \cdot 4 - 7^6} \cdot 7^3 =$ d) $\frac{(3 \cdot 2^8 - 2^4 \cdot 6)}{9 : 3^3 \cdot 3^3} : 2^4 =$

Odpowiedź: a) $\frac{100}{36^4}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{4949}{9603}$; d) 378

1.4.5 Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:

a) $\frac{a^5 \cdot a^3 : a^2}{a^0 \cdot (a^{10})^2 : a} =$ b) $\frac{(a^4 \cdot a^7) : a^3 \cdot a^8}{a^6 : a^0 \cdot (a^9)^4} =$

c) $\frac{(a^5)^3 \cdot (a^6)^{11} : (a^4)^7}{(a^9)^5 : (a^3)^2} \cdot a^6 =$ d) $\frac{(-a)^4 : (-a)^{-5}}{((-a)^{-2})^4 \cdot a^3} =$

Odpowiedź: a) a^{-13}; b) a^{41}; c) 2^{20}; d) $(-a)^{14}$

1.4.6 Oblicz:

a) $(0,4)^{-3} \cdot (1\frac{4}{5})^{-2} =$ b) $(1,2)^{-3} \cdot (-4,3)^{-2} =$ c) $\frac{22^{-1} + 66^0}{(0,6)^{-2} - 3^{-1}} =$

d) $\frac{(1,3)^{-3} - 2^{-4}}{(5:2^3):(3,3)^{-2} - (-6)} =$ e) $[(3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-1}) + 2^{-2}] + 2^{-2} =$ f) $[(\frac{1}{5})^{-2} + (\frac{1}{5})^{-2} \cdot (\frac{1}{5})^{-2}] : (\frac{1}{5})^{-2} =$

Odpowiedź:

a) 253,125; b) 0,03; c) $\frac{138}{781}$; d) 0,0663; e) 2,5; f) 26

1.4.7 Oblicz:

a) $\frac{27^3 \cdot 9^2 \cdot 2^4 \cdot 81}{2^3 \cdot 3^{14}} =$ b) $\frac{(-0,2)^5 \cdot (-5^2)^{-3}}{125^{-2} : (-5)^5}$

Odpowiedź: a) $\frac{2}{27}$; b) 1

Ciekawostka

Postać wykładnicza (notacja naukowa) to zapis liczby bezpośrednio w formie iloczynu postaci[7]:

$$\pm M \cdot 10^E$$

gdzie: M jest mantysą należącą do przedziału $\langle 1, 10)$, E jest wykładnikiem całkowitym.

PRACA SAMODZIELNA:

1.4.8 Przedstaw w postaci wykładniczej z zaokrągleniem do 2 cyfr po przecinku:

a) 0,000004359

b) 0,000000678

Odpowiedź: a) $4{,}36 \cdot 10^{-6}$; b) $6{,}78 \cdot 10^{-7}$

1.4.9 Wyszukaj w Internecie potrzebne informacje i zapisz podane wielkości w postaci wykładniczej:

a) prędkość światła w próżni

b) masa największej ryby świata

c) masa Ziemi

d) wiek Wszechświata

e) elementarny ładunek elektryczny

f) jednostka astronomiczna 1AU

g) masa atomu wodoru

h) liczba ludności świata według danych z 31.10.2011 r.

i) podaj inne ciekawe propozycje takich liczb

Odpowiedź: a) $3 \cdot 10^8$ m/s; b) płetwal błękitny $1{,}2 \cdot 10^5$ kg; c) $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg; d) $14 \cdot 10^9$ lat; e) $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; f) $1{,}5 \cdot 10^8$ km; g) $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; h) $7 \cdot 10^9$.

Ciekawostka

Zapis potęgowania przy użyciu indeksu górnego wprowadził Kartezjusz w XVII wieku. Naturalne potęgi liczby 2 są podstawą **arytmetyki komputerów**. Na przykład 2^n jest liczbą możliwych wartości zmiennej składającej się z n bitów (każdy bit może mieć wartość 0 lub 1, razem jest ich *n*). Z tego powodu zwykle operuje się też wielokrotnościami liczby 2 (bądź jej pewnej potęgi). Osiem bitów tworzy oktet (lub bajt). Większe wartości również są wielokrotnościami liczby 2, nie zaś 10, jak wskazywałyby ich nazwy, np. kilobajt to 1 024, a nie 1 000 bajtów[8].

7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza, 17.02.2013

8 www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie, 17.02.2013.

Za pomocą potęg wyrażone są również jednostki miar układu SI, np.:

- 10^9 to miliard (przedrostek G), GHz – gigaherc
- 10^{12} to bilion (przedrostek T), Tm – terametr
- 10^{15} to biliard (przedrostek P), Ps – petasekunda
- 10^{18} to trylion (przedrostek E), EB – eksabajt
- 10^{21} to tryliard (przedrostek Z), Zm – zettametr
- 10^{24} to kwadrylion (przedrostek Y), Yg – jottagram

Praca dla chętnych

Wyszukaj informacje na temat innych potęg układu SI. Podaj przykłady ich wykorzystania.

1.5 Pierwiastki

Teraz nauczę się:

- Posługiwać się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosować prawa działań na pierwiastkach.

Początki symbolu pierwiastka są dość niejasne. Niektóre źródła podają, że symbol został wprowadzony przez Arabów[9].

Definicja

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką,

że $\boldsymbol{b^n = a}$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość:

$|a| = \sqrt{a^2}$

$\sqrt[2]{a}^2 = a$

$\sqrt[3]{a}^3 = a$

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

9 www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie, 19.02.1013

Prawa działań na pierwiastkach

Dla $a, b \geq 0, n \in N$ zachodzą następujące prawa działań na pierwiastkach:

1) **Iloczyn pierwiastków** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2) **Iloraz pierwiastków** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
3) **Potęgowanie pierwiastków** $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$
4) **Pierwiastek z pierwiastka** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Co łączy potęgi i pierwiastki?

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi.

1) **Potęga o wykładniku równym zero dla** $a \neq 0$: $a^0 = 1$
2) **Potęga o wykładniku ujemnym dla** $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3) **Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim dla** $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
4) **Potęga o wykładniku wymiernym ujemnym dla** $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

ZADANIA

1.5.1 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}25}$ b) $\sqrt{2{,}56}$ c) $\sqrt{0{,}0144}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt{\frac{100}{169}}$ f) $\sqrt{2025}$ g) $\sqrt{5929}$

Odpowiedź: a) 0,5; b) 1,6; c) 0,12; d) −2; e) $\frac{10}{13}$; f) 45; g) 77

1.5.2 Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{500}$ b) $\sqrt{3{,}84}$ c) $\sqrt{2x^4}$ d) $\sqrt{16x^3y}$

e) $\sqrt{24x^8}$ f) $\sqrt{30xy^6}$ g) $\sqrt[3]{\frac{10000x}{a^3}}$ h) $\sqrt[3]{64a^4}$

Odpowiedź: a) $10\sqrt{5}$; b) $0{,}8\sqrt{6}$; c) $x^2\sqrt{2}$; d) $4x\sqrt{xy}$; e) $2x^4\sqrt{6}$; f) $y^3\sqrt{30x}$; g) $\frac{10}{a}\sqrt[3]{10x}$; h) $4a\sqrt[3]{a}$

1.5.3 Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $3\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{13}$ c) $0{,}1\sqrt{37}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{23}$

e) $0{,}2\sqrt{21}$ f) $4\sqrt[3]{33}$ g) $3\sqrt[4]{6}$ h) $4\sqrt[5]{15}$

Odpowiedź: a) $\sqrt{63}$; b) $\sqrt{468}$; c) $\sqrt{0{,}37}$; d) $\sqrt[3]{\frac{184}{27}}$; e) $\sqrt{\frac{21}{100}}$; f) $\sqrt[3]{2112}$; g) $\sqrt[4]{486}$; h) $\sqrt[5]{15360}$

1.5.4 Oblicz, stosując prawa działań na pierwiastkach:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ d) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$

Odpowiedź: a) 4; b) 5; c) 4; d) 5

1.5.5 Oblicz:

a) $\sqrt{0{,}81}$ b) $\sqrt{(12{,}34)^2}$ c) $\left(\sqrt{28{,}16}\right)^2$ d) $\sqrt{3^2+4^2}$

e) $\sqrt{3^2\cdot 4^2}$ f) $\sqrt{4^2-3^2}$ g) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$

Odpowiedź: a) 0,9; b) 12,34; c) 28,16; d) 5; e) 12; f) $\sqrt{7}$; g) $\frac{13}{9}$

1.5.6 Wykonaj działania:

a) $\frac{3\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{25}}\cdot\sqrt[3]{81}$ b) $(\sqrt[3]{0{,}04}:\sqrt[3]{0{,}01})\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$

c) $(\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}):\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{32}}:\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$

Odpowiedź: a) $-\frac{27\sqrt{3}}{5}$; b) $\sqrt[3]{0{,}004}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

1.5.7 Ustaw następujące liczby w porządku rosnącym:

a) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{18}$ b) $\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[15]{30}$

c) $\sqrt[5]{4}, \sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}, \sqrt[10]{25}$ d) $\sqrt[16]{64}, \sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}, \sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$

Odpowiedź: a) $\sqrt[3]{4} < \sqrt[6]{18} < \sqrt{3}$; b) $\sqrt[5]{3} < \sqrt[15]{30} < \sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[10]{25}$;
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}} < \sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}} < \sqrt[16]{64}$

1.5.8 Zapisz liczby w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\sqrt[3]{9:\sqrt[3]{27}}$

Odpowiedź: a) $3^{-\frac{3}{5}}$; b) $2^{\frac{3}{4}}$; c) $3^{\frac{1}{3}}$; d) $2^{\frac{12}{5}}$; e) $3^{\frac{1}{6}}$; f) $2^{\frac{1}{4}}$

Ciekawostka

Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir, gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go wszystkim, czego zapragnie, zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno ziarenko złożone na pierwszym polu. Władca Indii nie był w stanie takiego honorarium uiścić. Owa zapłata to suma szeregu złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co daje: 18 446 774 073 709 551 615 ziaren. Aby osiągnąć taką ilość zboża, należałoby zasiać całą ziemię kilkakrotnie i zebrać żniwo. I tak oto okazało się, że władca nie wszystkim może obdarować wynalazcę[10].

10 www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html, 1.03.2013

1.6 Przybliżenia liczbowe

Teraz nauczę się:

- Obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.

Na co dzień często korzystamy z przybliżeń liczbowych, np. uczeń obliczając średnią swoich ocen z przedmiotów, stosuje zaokrąglenie do części setnych, podatnik rozliczając się z urzędem skarbowym również przybliża liczbę do dwóch miejsc po przecinku (do groszy).

Podczas zaokrąglania liczb, gdy otrzymujemy wartość przybliżoną, **liczba ulega zmniejszeniu lub zwiększeniu.** Zależy to od tego, czy nie zmieniamy ostatniej pozostawionej cyfry, czy zwiększamy ją o jeden. W związku z tym wyróżniamy przybliżenia:

z nadmiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o jeden.

Przykład 1[11]

Zaokrąglamy liczbę 12,399367 do pierwszego miejsca po przecinku.

$12{,}399367 \approx 12{,}4$

Podczas zaokrąglania do pierwszego miejsca po przecinku, stojącą w tym miejscu cyfrę (3) musieliśmy zwiększyć o jeden, bo następna cyfra jest większa od 5 (9). W efekcie liczba uległa zwiększeniu.

z niedomiarem – gdy podczas zaokrąglania liczby, ostatnia pozostawiona cyfra nie zmienia się.

Przykład 2[12]

$6{,}963902 \approx 6{,}96$

Podczas zaokrąglania do drugiego miejsca po przecinku, stojąca w tym miejscu cyfra (6), nie zmienia się, bo znajdująca się po niej cyfra jest mniejsza od 5 (3). W efekcie liczba uległa zmniejszeniu o „obciętą" wartość.

przecinku.

Błędy przybliżenia powstają podcza obliczeń jako różnica między dokładną wartością a liczbą użytą w obliczeniach, np. $\sqrt{3} \approx$ 1,7 błąd przybliżenia to 1,7 – $\sqrt{3}$. Pojawiają się na skutek błędów wartości pomiarowych, np. odczytując długość odcinka porównujemy go z podziałką na linijce i niedokładnie przykładamy linijkę, błędnie odczytamy wynik pomiaru lub przyrząd pomiarowy jest niedoskonały. Dokładne wyliczenie jakiejś wartości nie jest możliwe ze względów obliczeniowych. Błędów pomiarowych nie da się zupełnie wyeliminować, ale można je ograniczyć do minimum, np. stosując coraz dokładniejsze przyrządy.

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń:

x – dana liczba

Δx – przybliżenie liczby

11 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013

12 www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html, 01.03.2013

błąd bezwzględny – obliczamy jako wartość bezwzględną z różnicy przybliżenia i danej liczby. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$B = |\Delta x - x|$$

błąd względny – obliczamy jako stosunek błędu bezwzględnego do wartości zmierzonej i wyrażamy w procentach, pokazuje on jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką obniżyliśmy lub powiększyliśmy liczbę: $W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\%$

Przykład 3

Zaokrąglij liczbę 12,647890 do części setnych i określ błąd względny i bezwzględny przybliżenia.

12,647890 ≈ **12,65**

Błąd bezwzględny: $B = |\Delta x - x| = |12{,}65 - 12{,}647890| = |-0{,}00211| = 0{,}00211$

Błąd względny: $W = \frac{|\Delta x - x|}{x} \cdot 100\% = \frac{0{,}00211}{12{,}647890} \cdot 100\% = 0{,}0001668 \cdot 100\% = 0{,}01\%$

Ciekawostka

Liczba π (czytaj: **liczba pi**), **ludolfina** – jest to liczba niewymierna równa stosunkowi długości obwodu koła do długości jego średnicy lub polu koła o promieniu równym 1.

Liczba π z dokładnością do 200 miejsc po przecinku:

π =3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062
862089986280348253421170679821480865132823066470938446095 5058223172535940812 8
4811174502841027019 3 852110555964462294895493038196...

Światowy potwierdzony rekord w zapamiętywaniu ciągu cyfr liczby π należy aktualnie do Japończyka Akiry Haraguchi, który podał ją z dokładnością do 100 tysięcy miejsc po przecinku bijąc własny rekord z roku 1995[13].

ZADANIA

1.6.1 Podaj przybliżenie liczby π z dokładnością do:

a) części setnych

b) części tysięcznych

c) dziesięciu miejsc po przecinku

d) jedności

Jak nazywamy to przybliżenie?

13 www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi, 04.03.2013

Odpowiedź:

a) 3,14 z niedomiarem; b) 3,142 z nadmiarem; c) 3,14159 26536 z nadmiarem; d) z niedomiarem

1.6.2 Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd względny i bezwzględny swojego przybliżenia:

a) $45{,}673 : 4$ b) $2{,}384 + 21{,}287$ c) $6 \cdot 3{,}563 - 2{,}12$

d) $44{,}11 - 3 \cdot 6{,}72$ e) $128{,}69 \cdot 2 + 301{,}25$ f) $268{,}9 : 26{,}6 + 243{,}2 : 5{,}1$

1.6.3 Oblicz błąd względny i bezwzględny (z dokładnością do 0,01%), który popełniono przybliżając liczbę a liczbą b.

a) a = 19,458; b = 19,46 b) a = 20,458; b = 20,5

c) a = 17,458; b = 17 d) a = 19,458; b = 20

e) a = 98,5 cm, b = 1m f) a = 4700 cm3, b = 5l

g) a = 372 min, b = 6h h) a=7806s, b=2h 10 min

Odpowiedź:

a) B = 0,002; W = 0,01%, b) B = 0,042; W = 0,21%, c) B = 0,458; W = 2,62%,

d) B = 0,542; W = 2,79%, e) B = 1m – 98,5 cm = 1,5 cm; W = 1,5:98,5×100 = 1,52%,

f) 5 litrów = 5 dm^3 – 4700 cm^3, 1dm^3 = 1000 cm^3, 5dm^3 = 5000 cm^3,

B = 5000 cm^3 – 4700 cm^3 = 300 cm^3; W = 300:4700 × 100 = 6,38%,

g) 6h = 360 minut, B = 372 – 360 = 12; W = 12:372 × 100 = 3,23%,

h) 2h 10 minut = 7200 s + 600 = 7800 s,

B = 7806 – 7800 = 6; W = 6:7806 × 100 = 0,08%

Ciekawostka

Różne komputerowe operacje arytmetyczne wykonywane na liczbach mogą powodować nieoczekiwane wyniki, gdy wynik obliczeń przekracza dopuszczalny zakres danych. Możemy tutaj wyróżnić dwie sytuacje:

Nadmiar – „przekręcenie licznika" w grach komputerowych, gdy ktoś zdobędzie zbyt dużo punktów

Niedomiar – liczba jest tak mała, że nie może zostać dokładnie zaokrąglona do zera

ZADANIE DLA CHĘTNYCH:

Napisz program, który obliczy:

a)$10^{40} \cdot 10^{40}$ =….

b)$10^{-40} - 10^{-41}$ =….

Jaki jest wynik działania programu? Czy jest zgodny z twoimi matematycznymi obliczeniami?

Algorytmy, które charakteryzują się kumulowaniem błędów, nazywamy niestabilnymi.

1.7. Obliczenia procentowe

Teraz nauczę się:

Wykonywać obliczenia procentowe.

Procent

Słowo **procent** pochodzi z łacińskiego od *per centum*, „przez sto" i oznacza sposób wyrażenia liczby jako ułamka o mianowniku 100 i oznaczamy symbolem %[14].

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Przykład 1

$23\% = \frac{23}{100}$

Procenty umożliwiają wyrażenie danej wielkości w stosunku do innej, przy czym pierwsza wielkość oznacza zwykle część lub zmianę w drugiej.

14 www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent, 06.03.2013.

Przykład 2

Obliczyć 4,5% liczby 6.

$4{,}5\% \cdot\ 6 = \frac{4{,}5}{100} \cdot\ 6 = 0{,}27$

Przykład 3

Liczbę 50 zwiększyć o 10%.

$50 + 10\% \cdot 50 = 50 + 0{,}1 \cdot 50 = 55$

Przykład 4

Cena zeszytu wynosi 3,50 zł. Oblicz jego cenę po podwyżce o 1,5%.

$3{,}50 + \frac{1{,}5}{100} \cdot 3{,}50 \approx 3{,}55$ zł

Przykład 5

Znajdź liczbę, której $33\frac{2}{3}\%$ jest równe 6.

$33\frac{1}{3}\% \cdot x = 6$

$\frac{\frac{100}{3}}{100} \cdot x = 6$

$x = 18$

Przykład 6

Oblicz, jakim procentem liczby 90 jest liczba 15.

$p\% \cdot 90 = 15$

$p\% = \frac{15}{90} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$

Przykład 7

Cena kurtki wynosi 120 zł.

a) Oblicz jej cenę po dwukrotnej obniżce o 30%.

$120 - 30\% \cdot 120 = 120 - 0{,}3 \cdot 120 = 84$

$84 - 30\% \cdot 84 = 84 - 0{,}3 \cdot 84 = 58{,}80$ zł

b) Oblicz cenę kurtki przy obniżce jednokrotnej o 60%.

$120 - 60\% \cdot 120 = 48$ zł

Punkt procentowy – to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości wyrażonymi w procentach.

Przykład 8

Frekwencja klasy Ib w I semestrze wyniosła 88%, a w drugim 92%. Mówimy, że frekwencja wzrosła o 4 punkty procentowe.

W zadaniach pomijamy podatek Belki, który został wprowadzony 01.12.2001 r.

Przykład 9

Jaś chciał w lipcu 2001 r. wpłacić do banku zaoszczędzone przez siebie pieniądze – 3000 zł, z oprocentowaniem 6% w skali roku, ale nie mógł się zdecydować na rodzaj lokaty.

Miał do wyboru lokatę:

a) roczną b) kwartalną c) półroczną d) miesięczną

Oblicz, ile odsetek po roku zostanie naliczonych Jasiowi w każdym przypadku. Którą lokatę powinien wybrać?

Odpowiedź:

a) 6% z 3000 zł = 180 zł

b) $\frac{3}{12}\cdot$ 6% z 3000 zł = 45 zł

c) $\frac{1}{2}\cdot$ 6% z 3000 zł = 90 zł

d) $\frac{1}{12}\cdot$ 6% z 3000 zł = 15 zł

Przykład 10[15]

Ania wpłaciła na lokatę 2000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 3,5% w skali 2 lat (24 miesięcy, a czas zapadalności[16] dokładnie 3 lata (36 miesięcy). Ile odsetek naliczy jej bank? Jaką kwotę będzie miała po 3 latach na swoim koncie?

Najpierw obliczamy odsetki:

$$\frac{36}{24}\cdot 3{,}5\% \cdot 2000 = \frac{36}{24}\cdot\frac{3{,}5}{100}\cdot 2000 = 105 \text{ zł}$$

Kwota końcowa to: $2000\ zł + 105\ zł = 2105\ zł$

Przykład 11

Kasia wpłaciła na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku kwotę 1000 zł. W dniu zapadalności bank naliczył jej 20 zł odsetek. Na ile miesięcy Kasia założyła tę lokatę?

Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{x}{12}\cdot\frac{5}{100}\cdot 1000 = 20{,}83$$

x = 5 miesięcy

15 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.
16 Czas zapadalności to czas trwania lokaty.

ZADANIA

1.7.1 Oblicz:

a) 4% liczby 85 b) $3\frac{1}{2}\%$ liczby $30\frac{1}{4}$ c) 112% liczby 80

d) $1{,}6\%$ liczby 1000 e) $0{,}3\%$ liczby 900 f) 150% liczby 27

Odpowiedź: a) $3{,}4$; b) $\frac{847}{800}$; c) $89\frac{3}{5}$; d) 16; e) $2{,}7$; f) $40\frac{1}{2}$

1.7.2 Cenę wycieczki obniżono o $p\%$. Wycieczka kosztuje obecnie x $zł$. Jaka była cena wycieczki przed obniżką?

Odpowiedź: $\frac{100a}{100-p} zł,\ \ p < 100\ \wedge p > 0$

1.7.3 Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 30%, a następnie nową cenę podwyższono o 30%. Czy cena końcowa jest taka sama jak początkowa? Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Końcowa cena stanowi 91% ceny początkowej.

1.7.4 Znajdź:

a) Liczbę, której 7% wynosi 56

b) Liczbę, której $0{,}2\%$ wynosi $2\frac{3}{5}$

c) Liczbę, której 112% wynosi $5{,}6$

d) Liczbę, której $0{,}25\%$ wynosi $0{,}3$

Odpowiedź: a) 800; b) 1300; c) 5; d) 120

1.7.5 Aby zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym, wystarczy otrzymać 30% możliwych do uzyskania punktów. Jaka minimalna liczba punktów gwarantuje zdanie egzaminu, gdy maksymalnie można otrzymać 50 pkt.

Odpowiedź: 15 punktów.

1.7.6 Tomek wpłacił na lokatę oprocentowaną 7% w skali roku kwotę 2135 zł. W dniu zapadalności bank naliczył mu 12,45 zł odsetek. Na ile miesięcy Tomek założył tę lokatę?

Odpowiedź: Na 1 miesiąc.

1.7.7 Wojtek wpłacił na lokatę czteromiesięczną z naliczaniem odsetek na zakończenie kwotę 1500 zł. Po upływie tego okresu bank naliczył mu 40 zł odsetek. Ile wynosiło oprocentowanie tej lokaty w skali roku?

Odpowiedź: 8%.

1.7.8 Przypuśćmy, że zakładasz lokatę na 5 miesięcy, jej oprocentowanie w skali roku wynosi 4,5%, a odsetki naliczane na zakończenie wyniosły 100 zł. Oblicz, jaką kwotę powinieneś wpłacić na tę lokatę.

Odpowiedź: 5333 zł.

1.7.9 Kasia wraz ze swoim mężem Piotrem miesięcznie na opłaty wydają 40% tego, co razem zarobią. Z tego, co pozostanie, 60% przeznaczają na zakup żywności dla siebie oraz swoich dzieci. Ile procent ich łącznych miesięcznych zarobków pochłaniają miesięczne wydatki?

Odpowiedź: 64%.

1.7.10 Pan Czesław w pierwszych 2 tygodniach poprzedniego miesiąca sprzedał 15% sprowadzonego do swojego sklepu towaru. W następnych 2 tygodniach sprzedał jeszcze 40% tego towaru, który pozostał. Jaki procent sprowadzonego towaru pozostał panu Czesławowi na koniec poprzedniego miesiąca?

Odpowiedź: 49%.

1.7.11 W 5 kolejnych sesjach giełdowych cena akcji firmy X na zamknięciu dnia osiągała następujący wynik procentowy: –6%, +15%, –3%, +5%, +2%. Oblicz, czy cena końcowa tej akcji jest wyższa, czy niższa od ceny pierwotnej i o ile procent.

Odpowiedź:

x – cena początkowa, y – cena końcowa

$x \cdot 94\% \cdot 115\% \cdot 97\% \cdot 105\% \cdot 102\% = y$

$x \cdot 0{,}94 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}97 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}02 = 1{,}12$

$x \cdot 1{,}12 = y$

Cena końcowa akcji jest wyższa od ceny początkowej o 12%.

1.7.12 Pracodawca zaproponował Kasi pensję w wysokości 3000 zł brutto i obiecał, że jeśli się sprawdzi na powierzonym stanowisku, to po roku jej pensję zwiększy o 3%, a w następnych latach o 1 p.p.[17] względem pensji sprzed roku. Jaką pensję otrzyma Kasia w czwartym roku pracy w tej firmie przy założeniu, że się sprawdzi na powierzonym stanowisku i nie zostanie zwolniona lub sama się nie zwolni?

Odpowiedź: w drugim roku: 3000 · 103% = 3090 zł, w trzecim roku: 3090 · 104% = 3214 zł, w czwartym roku: 3214 · 105% = 3374 zł.

Punkt bazowy to inaczej punkt procentowy. Zamiast mówić, że różnica między np. 5,63% a 5,61% wynosi 0,02 p.p., możesz powiedzieć, że ta różnica wynosi 2 p.b.

17 Skrót p.p. oznacza „punkty procentowe".

1.7.13 Oblicz, ile punktów bazowych (p.b.) wynosi różnica pomiędzy podanymi procentami?

a) 18,45% i 18,32%

b) 34,86% i 34,12%

c) 88,06% i 87,04%

d) 56,2% i 53,05%

Odpowiedź: a) 13 p.b.; b) 74 p.b.; c) 102 p.b.; d) 315 p.b.

Ciekawostka

Punktów bazowych często używa Rada Polityki Pieniężnej, czyli grupa ludzi odpowiedzialna za system finansowy całej Polski. Decyzje podjęte przez tę radę mają wpływ na wysokość lokat bankowych, oprocentowania kredytów i pożyczek oraz na stabilność ekonomiczną Polski. Przeciętny Polak nie spotyka się bezpośrednio z punktami bazowymi, ale odczuwa zmiany finansowe wyrażone w punktach bazowych, gdy np. pójdzie do banku.

Podatek Belki to automatycznie pobierana przez bank opłata od zysków kapitałowych. Został on wprowadzony 01.12.2001 przez Marka Belkę (stąd jego nazwa) – ówczesnego ministra finansów i dotyczył wyłącznie lokat oraz depozytów bankowych. Jego stawka wynosiła 20% naliczonych odsetek. W 2004 r. obniżono go do 19%, ale kosztem tego, że dodatkowo objęto nim inne zyski kapitałowe, np. pochodzące ze sprzedaży papierów wartościowych. Podatek Belki od 01.01.2004 do 31.12.2006 wyliczano mnożąc naliczone odsetki przez 19% i zaokrąglając otrzymany wynik do 1 grosza[18].

Wprowadzenie podatku Belki w 2001 r. spowodowało, że w bankowości pojawiły się 2 nowe terminy:

zysk brutto – naliczone odsetki bez potrącania podatku Belki

zysk netto – odsetki uzyskane po odjęciu zaokrąglonego podatku Belki do 1 grosza

1.7.14 Jako pracodawca sporządź listę płac w tabeli.

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%				
2	Belka	Robert	720 zł	5%				
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%				
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%				
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%				
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%				
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%				
8	Podkowa	Robert	1057,63	1%				
9	Sowa	Zofia	1046,4	1%				
10	Zys	Julia	1280	5%				

18 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

Odpowiedź:

Lp.	Nazwisko	Imię	Płaca zasadnicza	Premia – stopa	Premia – stawka	Płaca brutto	Podatek	Płaca netto
1	Aberacka	Maria	875 zł	9%	78,75 zł	953,75 zł	181,21 zł	772,50 zł
2	Belka	Robert	720 zł	5%	36,00 zł	756,00 zł	143,64 zł	612,36 zł
3	Górski	Jan	986,7 zł	12%	118,40 zł	1 105,10 zł	209,97 zł	895,13 zł
4	Malinowski	Robert	1006 zł	8%	80,48 zł	1 086,48 zł	206,43 zł	880,05 zł
5	Kowalska	Ewa	600 zł	5%	30,00 zł	630,00 zł	119,70 zł	510,30 zł
6	Kowlaski	Paweł	1218,75 zł	5%	60,94 zł	1 279,69 zł	243,14 zł	1 036,55 zł
7	Nowak	Feliks	1240 zł	9%	111,60 zł	1 351,60 zł	256,80 zł	1 094,80 zł
8	Podkowa	Robert	875 zł	1%	105,76 zł	1 163,39 zł	221,04 zł	942,35 zł
9	Sowa	Zofia	720 zł	1%	104,64 zł	1 151,04 zł	218,70 zł	932,34 zł
10	Zys	Julia	986,7 zł	5%	64,00 zł	1 344,00 zł	255,36 zł	1 088,64 zł

1.7.15 Na podstawie poniższej tabeli:

a) oblicz wynagrodzenie netto pracownika,

b) oblicz, jaki procent wynagrodzenia brutto stanowi ubezpieczenie emerytalne, chorobowe, rentowe oraz ubezpieczenie zdrowotne,

c) oblicz, jaki procent całej pensji brutto stanowi podatek.

Wynagrodzenie brutto	3 000
Składki ZUS	
Ubezpieczenie emerytalne	292,80
Chorobowe	73,50
Rentowe	45,0
Razem składki ZUS	
Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne	2588,70
Ubezpieczenie zdrowotne	232,98
Koszty uzyskania przychodu	111,25
Podstawa opodatkowania	2477,45
Kwota zwolniona od podatku	46,33
Podatek	199,00
Pensja netto	

Odpowiedź:

a) Razem składki ZUS wyniosły 411,30, wynagrodzenie netto pracownika = wynagrodzenie brutto – składki ZUS – koszty uzyskania przychodu – ubezpieczenie zdrowotne – podatek = 1985,47 zł; b) 21,48%; c) 6,63%.

1.7.16 Oblicz wysokość wszystkich podstawowych składek społecznych (emerytalnej i rentowej – 6%, chorobowej i zdrowotnej – 9%), jakie zostaną odliczone z pensji Pana Kowalskiego, która wynosi 1700 zł brutto.

Odpowiedź: 225 zł.

1.7.17 Oceń, ile czteroosobowa rodzina osiągająca dochody netto w wysokości 6000 zł może przeznaczyć na miesięczną spłatę raty kredytu hipotecznego. W ocenie uwzględnij przeciętne miesięczne wydatki rodziny na opłaty, żywność itp. Następnie oblicz, na ile lat musiałaby ona zaciągnąć taki kredyt oprocentowany 7% w skali roku, aby zakupić mieszkanie o wartości 300 000zł.

1.7.18 Firma oferuje ratalną sprzedaż samochodu. Raty rozłożone są na 4 lata, przy czym miesięczna kwota spłaty wynosi 900 zł. Cena samochodu wynosi 30000 zł. Jakie oprocentowanie oferuje sprzedawca w skali miesięcznej i w skali roku?

Uwaga: Rozwiąż zadanie w arkuszu kalkulacyjnym (skorzystaj z funkcji FV).

Odpowiedź: miesięczna 1,6%, a roczna 19,2%.

1.7.19 Oblicz wartość podatku Belki oraz zysk netto zgodnie z ordynacją podatkową obowiązującą od 01.01.2007 do 30.03.2012, jeśli odsetki z lokaty wyniosły:

a) 25,72 zł   b) 63,32 zł   c) 122,75 zł   d) 137,20 zł

Odpowiedź: a) odsetki: 25,72 zł, podstawa opodatkowania: 26 zł, podatek Belki: 4,94 zł, zaokrąglenie podatku: 5 zł, zysk netto: 20,72 zł; b) 51,32 zł; c) 99,75 zł; d) 111,20 zł.

Uwaga: Odsetki zaokrągla się do pełnych złotych i nazywa się tę zaokrągloną liczbę podstawą opodatkowania, z której oblicza się 19% podatku Belki; otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych złotych. Aby wyliczyć zysk netto z lokaty, trzeba od odsetek odjąć otrzymany wynik.

Ciekawostka

Banki, aby uniknąć podatku Belki, wprowadziły częstą kapitalizację odsetek. Obowiązujący obecnie system podatkowy sprawia, że od zysku poniżej 2,49 zł nie trzeba płacić podatku. Wszystko za sprawą zaokrągleń podstawy opodatkowania i samego podatku. Zgodnie z zapisami w ordynacji podatkowej odsetki w kwocie 2,49 zł należy zaokrąglić „w dół" do pełnej złotówki, czyli do 2 zł. Podatek od zysku w wysokości 2 zł wynosi 38 groszy. Tu także zaokrąglamy do pełnej złotówki, czyli do zera. W ten sposób od tak niewielkiego zysku z lokaty nie trzeba płacić podatku. Z tego też względu banki proponują lokaty z dzienną kapitalizacją odsetek. Niewielkie odsetki dopisywane są do salda lokaty codziennie i w ten sposób klient nie płaci 19 proc. podatku od zysku. Jeśli we wspomnianej wyżej lokacie zastosowalibyśmy mechanizm dziennej kapitalizacji, to zysk po roku wyniósłby 513 zł już bez podatku. W rezultacie oprocentowanie efektywne wspomnianej lokaty wyniesie 5,13%[19].

19 www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf, 07.03.2013.

1.7.20 Jaką maksymalnie kwotę trzeba wpłacić na 2-miesięczną lokatę oprocentowaną 6,2% w skali roku, aby legalnie ominąć płacenie podatku Belki wyliczanego zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012?

Odpowiedź:

$\frac{2}{12} \cdot 6{,}2\% \cdot x = 2{,}495$

$x = 242{,}23\ zł$

1.7.21 W 2007 roku pani Kasia założyła lokatę jednodniową oprocentowaną 3,8% w skali roku na kwotę 1600 zł. Oblicz, ile dziennie będzie dostawać odsetek od takiej kwoty? Czy uniknie podatku Belki?

Odpowiedź:

$\frac{1}{365} \cdot 3{,}8\% \cdot 1600$ zł $= 0{,}17$ zł $< 2{,}50$ zł. W tym roku uniknie podatku Belki.

1.7.22 Ile wyniosą odsetki od lokaty jednodniowej oprocentowanej 6,84% w skali roku założonej na kwotę 15000 zł w 2012 roku? Jaki będzie zysk netto z tej lokaty po 300 dniach, jeśli w międzyczasie bank nie zmieni oprocentowania?

Odpowiedź: Dokładnie 1,80 zł dziennie; 540 zł po 300 dniach.

1.7.23 W państwie A produkt PKB wzrasta co roku o 8%, a w państwie B o 6%. Po ilu latach w każdym z państw nastąpi potrojenie PKB?

Odpowiedź:

Wskazówka: mając kapitał k przy rocznej kapitalizacji odsetek p% w skali roku, po n latach kapitał wzrasta do $k \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

A – po 16 latach,

B – po 19 latach.

1.8 Przedziały liczbowe

Teraz nauczę się:

- Posługiwać pojęciem przedziału liczbowego,
- Zaznaczać przedziały na osi liczbowej.

Przedział – zbiór elementów danego zbioru częściowo uporządkowanego, zawartych między dwoma ustalonymi elementami tego zbioru, nazywanymi początkiem i końcem przedziału[20].

20 www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy, 26.02.2013

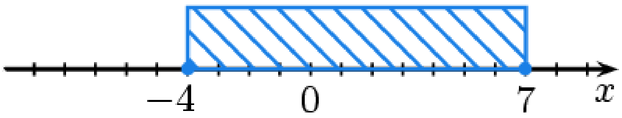
Oznaczenia przedziałów:

Przedziałem domkniętym $< a; b >$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x \leq b$

$\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

Przykład 1

Przedział domknięty $< -4; 7 >$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



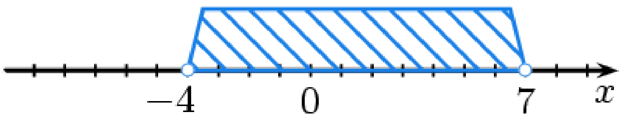
Rysunek 1-5 – Przedział domknięty

Przedziałem otwartym (a;b) o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $\boldsymbol{a} < x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x < b\}$

Przykład 2

Przedział otwarty $(-4; 7)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



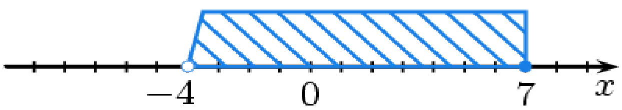
Rysunek 1-6 – Przedział otwarty

Przedziałem lewostronnie otwartym (prawostronnie domkniętym) $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} < x \leq b\}$

Przykład 3

Przedział lewostronnie otwarty $(-4; 7\rangle$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-7 – Przedział lewostronnie otwarty a prawostronnie domknięty

Przedziałem prawostronnie otwartym (lewostronnie domkniętym) $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ o końcach a i b (dla $a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} > = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < b\}$

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym $(\boldsymbol{a}; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych od a.

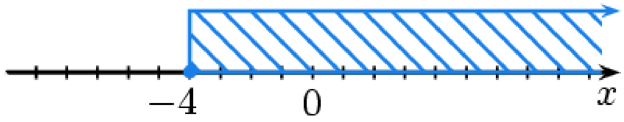
$(\boldsymbol{a}; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} > a\}$

Podobnie przedziałem lewostronnie domkniętym nieograniczonym $\langle a;+\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x większych bądź równych a.

$\langle \boldsymbol{a};+\infty) \ = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 5

Przedział $\langle 4;+\infty)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



Rysunek 1-8 – Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony

Przedziałem prawostronnie otwartym nieograniczonym $(-\infty;\ a)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych od a.

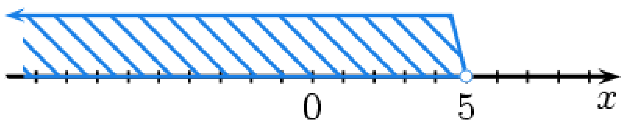
$(-\infty;\ \boldsymbol{a}) \ = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{x} < a\}$

Podobnie przedziałem prawostronnie domkniętym nieograniczonym $(-\infty;\ a\rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x mniejszych bądź równych a.

$(-\infty;\ \boldsymbol{a} > = \{x \in R: \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}\}$

Przykład 6

Przedział $(-\infty;\ 5)$ na osi liczbowej oznaczamy następująco:



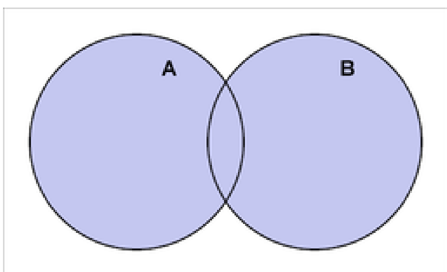
Rysunek 1-9 – Przedział prawostronnie otwarty nieograniczony

Ponieważ przedział jest zbiorem, więc możemy wyznaczać między innymi sumę, iloczyn czy też różnicę przedziałów.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B, matematycznie zapisujemy ją tak: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$**.**

Ilustracja graficzna:



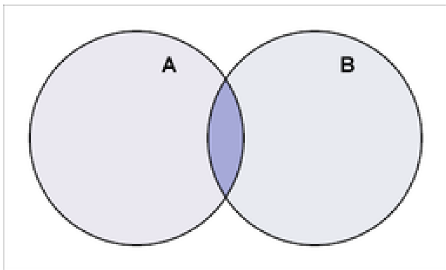
Rysunek 1-10 – Suma zbiorów

Przykład 7

Jeżeli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pomimo tego, że 1 występuje w obydwu zbiorach, w sumie tych zbiorów występuje tylko jeden raz.

Iloczynem, czyli częścią wspólną zbioru *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru *A* i do zbioru *B*, formalnie zapisujemy ją tak: $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$.

Ilustracja graficzna:



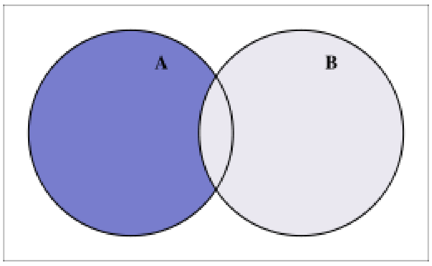
Rysunek 1-11 – Iloczyn zbiorów

Przykład 8

Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \cap B = \{1\}$. Liczba 1 jest jedynym wspólnym elementem tych zbiorów.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru *A*, a które nie należą do zbioru *B*, możemy ją zapisać tak: $A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$**.**

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-12 – Różnica zbiorów

Przykład 9

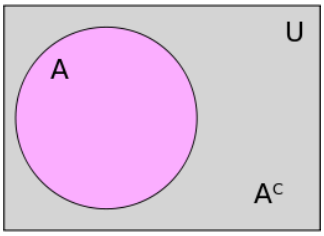
Jeśli $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{1, 3, 4\}$, to $A \backslash B = \{2, 5\}$. Jedynym wspólnym elementem obydwu zbiorów jest liczba 1, więc otrzymany zbiór będzie bardzo podobny do zbioru *A*, lecz nie posiadający liczby 1.

Dopełnieniem zbioru *A* z przestrzeni *U* nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni *U*, które nie należą do zbioru *A*. Dopełnienie zbioru *A* oznaczamy jako A'**.**

$A' = U \backslash A$

$A' = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$

Ilustracja graficzna:



Rysunek 1-13 – Dopełnienie zbiorów

Przykład 10

Jeśli $A = \{1,2,3\}$, a przestrzenią *U* jest zbiór wszystkich liczby całkowitych dodatnich, to dopełnieniem zbioru *A* będzie zbiór $A' = \{4,5,6,7,8, \dots\}$.

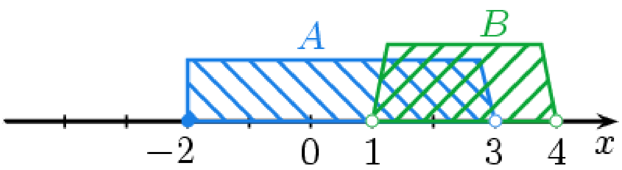
Zbiory A i B nazywamy rozłącznymi wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zauważmy, że: $\boldsymbol{A \cup A' = U}$ oraz $\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

Przykład 11`

Wyznaczmy $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, A', B'$, gdzie $A = [-2; 3), B = (1; 4)$.

Zaznaczmy najpierw oba przedziały na osi liczbowej:



Z rysunku widzimy, że:

- $A \cup B = [-2;\ 4)$
- $A \cap B = (1;\ 3)$
- $A \backslash B = [-2;\ 1]$
- $B \backslash A = [3;\ 4)$
- $A' = (-\infty;\ -2) \cup [3;\ +\infty)$
- $B' = (-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$

Własności działań na zbiorach

Dla dowolnych zbiorów *A, B, C* zachodzą prawa:

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – I prawo De Morgana
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ – II prawo De Morgana
- $A \cup B = B \cup A$ – przemienność dodawania zbiorów
- $A \cap B = B \cap A$ – przemienność mnożenia zbiorów
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – łączność dodawania zbiorów
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – łączność mnożenia zbiorów
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania

Przykład 12

Mamy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 5, 9\}$. Obliczyć $D = A \cap (B \cup C)$.

$D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 9\}) =$
$= (\{1, 3\} \cup \{3\}) = \{1, 3\}$

ZADANIA

1.8.1 Zaznacz na osi liczbowej podane przedziały:

a) $(-2; 5)$ b) $\langle -\infty;\ 3)$ c) $\langle 0; 6\rangle$

d) $\{2,3,4,5\}$ e) $(-\infty;\ -3)$ f) $(-5;\ 1\rangle$

g) $\langle -7; 5\rangle$ h) $\langle 0;\ 4)$ i) $\langle -2;\ +\infty)$

1.8.2 Wyznacz zbiory:

a) N∪W b) $R \cup NW$ c) N ∪ R d) $N\ \cup C$

e) C ∩ W f) $C\ \cap N$ g) $NW\ \cap C$ h) R ∩ C

i) C \ W j) R \ W k) N \ NW

Odpowiedź:

a) W; b) R; c) R; d) C; e) C; f) N; g) Ø; h) C; i) Ø; j) NW; k) N.

1.8.3 Podaj wszystkie liczby całkowite, które należą do przedziału:

a) $\left\langle -\frac{1}{2}; 6\right)$ b) $(-5;\ \pi)$ c) $\langle 0; 2\rangle$ d) $\langle -\pi;\ \pi\rangle$

Odpowiedź:

a) $\{0,1,2,3,4,5\}$, b) $\{0,1,2,3\}$, c) $\{0,1,2\}$, d) $\{0,1,2,3\}$.

1.8.4 Zaznacz na osi liczbowej zbiór A' wiedząc, że:

a) $A = (-3; 7\rangle$ b) $A =\ (-\infty;\ 5)$ c) $A = \langle 2; 6\rangle$

d) $A = (-\infty; 4)\ \cup\ (6; 12\rangle$ e) $A = (-5; +\infty)$

Odpowiedź:

a) $(-\infty; -3\rangle \cup\ (7; +\infty)$; b) $\langle 5; +\infty)$; c) $(-\infty; 2)\ \cup\ (6; +\infty)$;

d) $\langle 4; 6\rangle \cup\ (12; +\infty)$; e) $(-\infty; 5)$

1.8.5 Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: A ∩ B, A ∪ B, A\B, B\A:

a) $A = (-3;\ 5),\ \ B = \langle -1;\ 8\rangle$ b) $A = \langle -4;\ 6),\ \ B = \langle 5;\ +\infty)$

c) $A = (-4;\ 1),\ \ B = (0;\ 2\rangle$ d) $A = (-\infty;\ 3),\ \ B = \langle 1;\ 4\rangle$

e) $A = (-\infty;\ 5\rangle\ \ B = (-2; 2)$

Odpowiedź:

a) $A \cap B = \langle -1;\ 5), A \cup B = (-3;\ 8\rangle, A\backslash B = (-3;\ -1), B\backslash A = \langle 5;\ 8\rangle$

b) $A \cap B = \langle 5;\ 6), A \cup B = \langle -4;\ +\infty), A\backslash B = \langle -4; 5), B\backslash A = \langle 6;\ +\infty)$

c) $A \cap B = (0;\ 1), A \cup B = (-4;\ 2\rangle, A\backslash B = (-4;\ 0\rangle, B\backslash A = \langle 2;\ 2\rangle$

d) $A \cap B = \langle 1;\ 3), A \cup B = (-\infty;\ 4\rangle, A\backslash B = (-\infty;\ 1), B\backslash A = \langle 3;\ 4\rangle$

e) $A \cap B = (-2;\ 2), A \cup B = (-\infty;\ 5\rangle, A\backslash B = (-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 2; 5\rangle, B\backslash A = \emptyset$

1.8.6 Niech $A = \langle -3; 5\rangle, B = (-6; 7), C = (-\infty;\ 4\rangle$. Wyznacz następujące zbiory i zilustruj je na osi liczbowej:

a) $A\cap B$ b) $A\backslash B$ c) C \ A d) B \ C

e) $(A \cup B)\backslash C$ f) $A' \cap C$ g) $C \cap (A \cup B)'$

Odpowiedź: a) $\langle -3; 5\rangle$; b) ∅; c) (–∞; 3); d) 4;7); e) (4;7); f) (–∞;3); g) $(-\infty;\ 4\rangle$.

1.8.7 Mając dane zbiory A i B, zaznacz na osi liczbowej zbiory: A′, B′, A′ ∩ B′ oraz A′ ∪ B′.

a) $A = (-\infty;\ 3), B = (4;\ +\infty)$ b) $A = (-\infty;\ -5) \cup\ (4; 6), B = \langle 2; 7\rangle$

c) $A = (0;\ 2\rangle \cup\ (6; +\infty), B = (-5; 8\rangle$ d) $A = \langle 2; 4\rangle, B = (1; +\infty)$

e) $A = (-\infty;\ -3) \cup \langle 1; 2\rangle, B = (0; 4)$

Odpowiedź:

a) $A' = \ \langle 3; +\infty), B' = (-\infty; 4\rangle, A' \cap\ B' = \langle 3; 4\rangle, A' \cup B' = R$

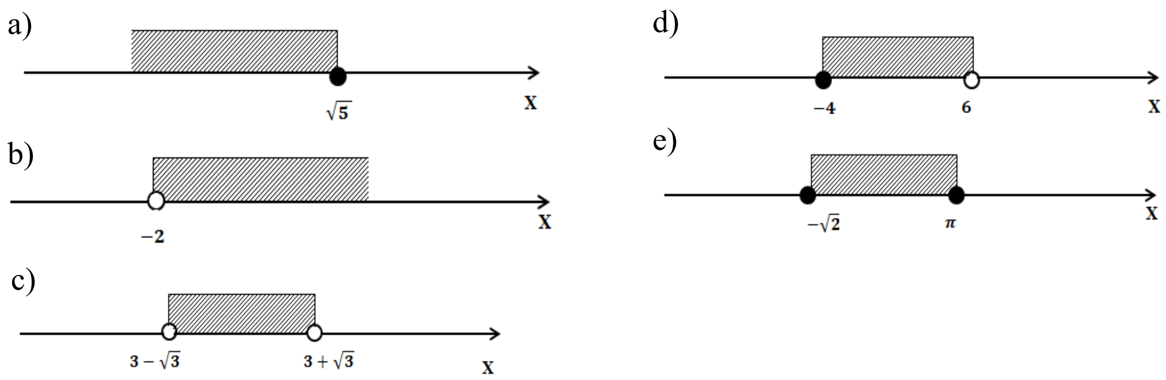
b) $A' = \langle -5; 4\rangle\ \cup\ \langle 6; +\infty), B' = (-\infty; 2)\ \cup\ (7; +\infty),$
$A' \cap\ B' = \langle -5;\ 2) \cup (7; +\infty), A' \cup B' = (-\infty; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty)$

c) $A' = (-\infty; 0\rangle \cup\ (2; 6\rangle, B' = (-\infty; -5\rangle \cup (8; +\infty), A' \cap\ B' = (-\infty;\ -5\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty;\ 0\rangle \cup\ (2; 6\rangle \cup\ (8; +\infty)$

d) $A' = (-\infty; 2)\ \cup\ (4; +\infty), B' = (-\infty; 1\rangle, A' \cap\ B' = (-\infty; 1\rangle,$
$A' \cup B' = (-\infty; 2)\ \cup (4; +\infty)$

e) $A' = \langle -3; 1)\ \cup\ (2;\ +\infty), B' = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty), A' \cap\ B' = \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 4; +\infty)$
$A' \cup B' = (-\infty; 1)\ \cup\ (2, +\infty)$

1.8.8 Zapisz w postaci nierówności i przedziału liczbowego zbiór liczb zaznaczonych na osi liczbowej:



Odpowiedź:

a) $x \le \sqrt{5},\ x \in (-\infty;\ \sqrt{5}\rangle$

b) $x > -2,\quad x \in (-2;\ +\infty)$

c) $3+\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3},\ \ x \in (3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3})$

d) $-4 \le x < 6,\ \ x \in \langle -4;\ 6)$

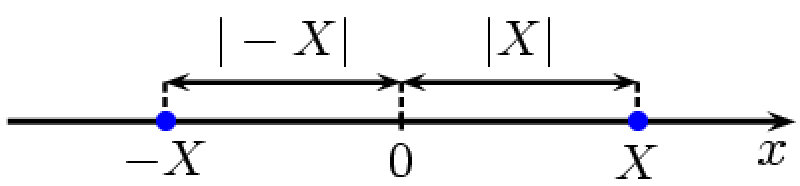
e) $-\sqrt{2} \le x \le \pi,\ \ x \in \langle -\sqrt{2};\ \pi\rangle$

1.8 Wartość bezwzględna*

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną,
- Zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| < b$, $|x - a| = b$, $|x - a| \ge b$.

Wartość bezwzględna liczby[21] nazywana też modułem lub wartością absolutną liczby, jest to odległość na osi liczbowej od danej liczby do zera.



Rysunek 1-14 – Wartość bezwzględna

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

21 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna, 10.03.2013.

Przykład 1

Wartość bezwzględna z liczby dodatniej to ta sama liczba

$|4| = 4$

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna

$|-5| = 5$

Aby rozwiązać równanie $|x - a| = b$, należy znaleźć liczby, których odległość od liczby a jest równa b.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|2x - 3| = 5$

Rzpatrujemy dwa przypadki:

$2x - 3 = 5, \quad \vee \; 2x - 3 = -5$

Otrzymujemy dwa rozwiązania: $x_1 = 4$ lub $x_2 = -1$.

Własności wartości bezwzględnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *x* i *y* zachodzą poniższe własności:

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystać następujące własności:

$$|x| < a \iff -a < x < a \iff (x > -a \wedge x < a)$$

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \iff (x \geqslant -a \wedge x \leqslant a)$$

$$|x| > a \iff (x < -a \vee x > a)$$

$$|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a \vee x \geqslant a)$$

Przykład 3

Rozwiążmy nierówność $|x + 5| \leq 10$, wykorzystując własność $|x| \leq a$ otrzymujemy:

$x \geq -a \wedge x \leq a$, gdzie zamiast x postawiamy $x+5$, a zamiast a liczbę 10 otrzymujemy:

$x + 5 \geq -10 \wedge x + 5 \leq 10$, stąd

$x \geq -15 \wedge x \leq 5$, co ostatecznie zapisujemy za pomocą przedziału $x \in \langle -15; 15 \rangle$.

Przykład 4

Nierówności z wartością bezwzględną możemy zapisać za pomocą przedziałów:

a) $|x| \leq b$, czyli $x \in \langle -b; b \rangle$

b) $|x| < b$, czyli $x \in (-b; b)$

c) $|x| > b$, czyli $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$

d) $|x| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; -b\rangle \cup \langle b; +\infty)$

e) $|x - a| < b$, czyli przedział o środku w punkcie a i długości b, $x \in (a - b; a + b)$

f) $|x - a| \leq b$, czyli $x \in \langle a - b; a + b\rangle$

g) $|x - a| > b$, czyli $x \in (-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)$

h) $|x - a| \geq b$, czyli $x \in (-\infty; a - b\rangle \cup \langle a + b; +\infty)$

ZADANIA

1.9.1 Oblicz:

a) $|-\mathbf{34,5}| + |\mathbf{34,5}|$

b) $|-2-34| - |12-15|$

c) $|-\sqrt{7}-2|$

d) $|2-\sqrt{3}|$

e) $|-x^2|$

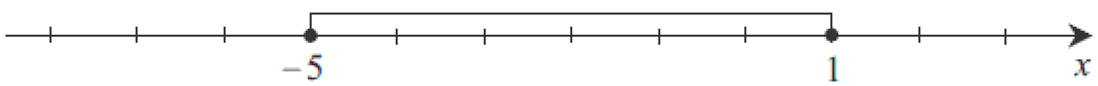
Odpowiedź: a) 69; b) 33; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$ –2 e) x^2

1.9.2 Rozwiąż równanie:

a) $|x-5| = 7$ b) $|2x+6| = 1$ c) $|3x-3| = 1$ d) $|-x+1| = 2$

Odpowiedź: a) 12 i –2; b) –2,5 i –3,5; c) $\frac{2}{3}$ i $1\frac{1}{3}$; d) –1 i 3.

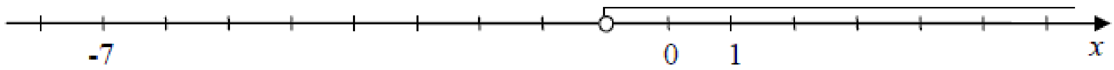
1.9.3 Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej:

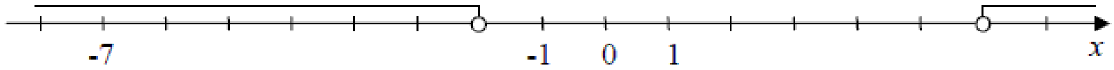


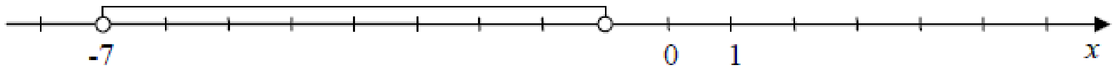
A. $|x+2| \leq 3$ B. $|x-2| \leq 3$ C. $|x-3| \leq 2$ D. $|x+3| \leq 2$

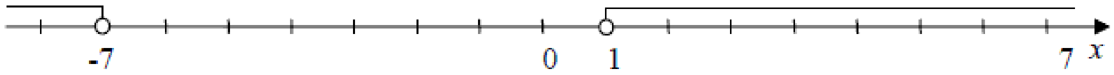
Odpowiedź: D

1.9.4 Wskaż, który z przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x+3|>4$?

A.


B.


C.


D.


Odpowiedź: D.

1.9.5 Zapisz za pomocą przedziału liczbowego i zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $|x-5| \geq 3$ b) $|x-2| < 4$ c) $|x+1| > 3$

d) $|x+3| \geq 2$ e) $2 < |x| < 5$ f) $1 \leq |x| \leq 4$

g) $|5+x| \leq 1$ h) $|2+x| < 3$

Odpowiedź: a) $(-\infty;\ 2\rangle \cup \langle 8;+\infty)$; b) $(-2;6)$; c) $(-\infty;\ -4) \cup (2;+\infty)$; d) $(-\infty;\ -5\rangle \cup \langle -1;+\infty)$; e) $(-5;-2) \cup (2;5)$; f) $\langle -4;-1) \cup (1;4\rangle$; h) $\langle -6;-4\rangle$.

1.9 Logarytmy

Teraz nauczę się:

Wykorzystywać definicję logarytmu i stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Dawniej logarytmy używane były do szybkiego mnożenia liczb za pomocą *tablic logarytmicznych*, które były podstawową pomocą do obliczeń naukowych, geodezyjnych, astronomicznych i inżynierskich. Dzisiaj zastąpiły je kalkulatory i komputery.

Logarytm zapisujemy następująco:

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a>0$, $a \neq 0$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c=b$ (jest to potęga, do jakiej należy podnieść „a", aby otrzymać „b").

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x$$

Z definicji wynika, że dla $b>0$ mamy $b=a^{\log_a b}$

Przykład 1

$\log_2 8 = 3 \qquad bo\colon 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \qquad bo\colon 3^4 = 81$

$\log_a a = 1$ **Jeżeli podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są takie same, to wynik logarytmowania zawsze wynosi 1.**

bo: $a^1 = a$ (niezależnie od wartości „a”)

$\log_a 1 = 0$ **Jeżeli liczba logarytmowana wynosi 1, to wynik logarytmowania wynosi 0.**

bo: $a^0 = 1$

Przykład 2

$\log_6 6 = 1 \qquad bo\colon 6^1 = 6$

$\log_{15} 1 = 0 \qquad bo\colon 15^0 = 1$

Prawa działań na logarytmach:

1) Logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_b c$$

2) Logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

3) Inne prawa:

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \qquad \log_a b^n = n\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Przykład 3

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

$$\log_{16} 0{,}25 = -\log_{16} 4 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_7 \frac{63}{5} - \log_7 \frac{9}{5} = \log_7 \frac{\frac{63}{5}}{\frac{9}{5}} = \log_7 7 = 1$$

$$\frac{\log_7 32}{\log_7 8} = \frac{\log_7 2^5}{\log_7 2^3} = \frac{5\log_7 2}{3\log_7 2} = \frac{5}{3}$$

$$\log_2 3 \cdot \log_9 2 = \log_9 2^{\log_2 3} = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$$

Ciekawostka

Najczęściej używa się logarytmów dziesiętnych oraz logarytmów naturalnych, tj. o podstawach równych odpowiednio 10 i e.

Przy odwzorowaniu wielkości w skali logarytmicznej, używane są często specyficzne jednostki miary, właściwe dla danej dziedziny, np. bele (B) i decybele (dB) w elektronice i przetwarzaniu sygnałów czy nepery w akustyce[22].

Skale logarytmiczne są szeroko stosowane w nauce i technice dla odwzorowania wielkości, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, np.:

- Skala Richtera – do określania amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych.

Skutki trzęsienia ziemi w zależności od jego wielkości w skali Richtera:

Skala Richtera	Skutki	Średnia liczba trzęsień rocznie
< 2,0	Najmniejsze wstrząsy, nieodczuwalne przez człowieka ani przez sejsmograf.	ok. 2 920 000 (8000 dziennie)
2,0-3,4	Wstrząsy nieodczuwalne dla człowieka, lecz rejestrowane przez sejsmograf.	ok. 800 000
3,5-4,2	Bardzo małe wstrząsy, odczuwane tylko przez niektórych ludzi.	ok. 30 000
4,3-4,8	Odczuwane przez większość osób, nieszkodliwe.	ok. 4 800
4,9-5,4	Odczuwane przez wszystkich, powoduje bardzo niewielkie zniszczenia.	ok. 1 400
5,5-6,1	Średnie wstrząsy, powoduje mniejsze uszkodzenia budynków.	ok. 500
6,2-6,9	Duże wstrząsy, powodują znaczne zniszczenia.	ok. 100
7,0-7,3	Poważne zniszczenia.	ok. 15
7,4-8,0	Ogromne zniszczenia.	ok. 4
8,0-8,9	Ogromne zniszczenia, katastrofalne skutki dla wielu krajów.	ok. 1
≥ 9,0	Trzęsienie, które może zburzyć wszystkie miasta na terenie większym niż kilkanaście tysięcy km^2.	ok. raz na 20 lat

Tabela 1-1 – Skala Richtera

- Skala decybelowa – do określania poziomu wielkości elektrycznych i akustycznych.
- Skala pH – do określania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych.

22 www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna, 25.02.2013

- Interwały w muzyce.
- Skala entropii w termodynamice.
- Skala Krumbeina – dla określania wielkości ziaren w geologii.
- Skala wielkości gwiazdowych.
- Skala logarytmiczna jest w pewnych zastosowaniach skalą naturalną, ze względu na to, że zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat innych skal logarytmicznych lub innego zastosowania logarytmów.

ZADANIA

1.10.1 Oblicz $\log_3 b$ wiedząc, że b jest równe:

a) 27 b) $\frac{3}{9}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[5]{81}$

Odpowiedź: a) 3; b) –1; c) –1; d) $\frac{4}{5}$.

1.10.2 Oblicz $9^{\log_{\frac{1}{3}} b}$ wiedząc, że b jest równe:

a) 9 b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$

Odpowiedź: a) –2; b) 1; c) $-\frac{4}{3}$; d) $-\frac{2}{5}$.

1.10.3 Oblicz b, jeżeli $\log_2 b$ wynosi:

a) $\sqrt[4]{2}$ b) 4 c) –3 d) 0,125 e) 1

Odpowiedź: a) $-\frac{7}{4}$; b) 16; c) $2\ 2^{\frac{1}{4}}$; d) $\frac{1}{8}$; e) 2.

1.10.4 Oblicz b, jeżeli $\log_{\frac{1}{2}} b$ wynosi:

a) 0,125 b) 0,25 c) 64 d) $\frac{1}{16}$

Odpowiedź: a) 3; b) 2; c) –5; d) 4.

1.10.5 Oblicz:

a) $\log_4 16$ b) $\log_3 \sqrt[3]{3}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{4}$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{8}{2})2$

e) $\log_{\frac{3}{5}}(\frac{18}{50})3$ f) $3\log_{2,5}\frac{2}{5}$ g) $\log_{\frac{1}{3}}(64)-1$ h) $\log_2(\frac{1}{64})^{-2}$

i) $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ j) $2\log_{\frac{1}{3}} 9$

Odpowiedź: a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{2}{3}$; d) –4; e) 6; f) –3; g) 2; h) 12; i) –6; j) –4.

1.10.6 Oblicz, stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_2 4 + 2\log_3 1$ b) $(\log_5 5 - \log_5 125)^3$ c) $2\log_3 27 - \log_3 81$

d) $\log_2 4 + 2\log_2 1$ e) $\log_3 21 - \log_3 7$ f) $\log_5 10 + \log_5 24{,}3$

g) $\log_4 2 + \log_4 32$ h) $\log_4 8 + \log_4 2$

Odpowiedź: a) 2; b) –1; c) 9; d) 2; e) 1; f) 5; g) 3; h) 2.

1.10.7 Oblicz podstawę logarytmu wiedząc, że:

a) $\log_a 25 = 4$ b) $\log_a 0{,}01 = 3$ c) $\log_a 27 = 3$

d) $\log_a \frac{1}{27} = 2$ e) $\log_a \frac{3}{18} = 4$

Odpowiedź: a) $\sqrt[4]{25}$; b) $\sqrt[3]{0{,}01}$; c) 3; d) $\sqrt{27}$; e) $\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

1.10.8 Oblicz:

a) $\log_3 (2 - (\log_4 \sqrt{4}) \cdot \log_{\sqrt{4}} \frac{1}{4})$ b) $\log_3 9 \cdot \log_4 16 \cdot \log_5 25 + 1$

c) – log3log2log2256 d) –log3log4$\sqrt[5]{\sqrt[4]{4}}$

Odpowiedź: a) 1; b) 9; c) –1; d) 2.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Na seans filmowy sprzedano 280 biletów. W tym 126 ulgowych. Jaki procent sprzedanych biletów stanowły bilety ulgowe?[23]

a) 22% b) 33% c) 45% d) 63%

2. 6% liczby x jest równe 9. Wtedy:

a) $x = 240$ b) $x = 150$ c) $x = 24$ d) $x = 15$

3. Iloraz $32^{-27} \div \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy:

a) 2^{-27} b) 2^{-3} c) 2^3 d) 2^{27}

4. O liczbie x wiadomo, że $\log_3 x = 9$. Zatem:

a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 3^9$ d) $x = 9^3$

5. Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?[24]

a) 163,80 b) 180 c) 294 d) 420

23 Zadania: 1, 2, 3, 4 zaczerpnięte z CKE, Próbna matura, listopad 2009.
24 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpięte z CKE, maj 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).

6. Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa:

a) 1 b) 4 c) 9 d) 36

7. Liczba jest równa $\log_4 8 + \log_4 2$:

a) 1 b) 2 c) $\log_4 6$ d) $\log_4 10$

8. Liczba $|5-7|-|-3+4|$ jest równa:[25]

a) –3 b) –5 c) 1 d) 3

9. Samochód kosztował 30000 zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Po tych obniżkach samochód kosztował:

a) 24400 zł b) 24700 zł c) 24000 zł d) 300 zł

10. Dana jest liczba $x = 63^2 \cdot (\frac{1}{3})^4$. Wtedy:

a) $x = 7^2$ b) $x = 7^{-2}$ c) $x = 3^8 \cdot 7^2$ d) $x = 3 \cdot 7$

11. Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa:

a) -2 b) -1 c) $\frac{1}{25}$ d) 4

12. Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje:[26]

a) 1701 zł b) 2100 zł c) 1890 zł d) 2091 zł

13. Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%, w wyniku obu obniżek cena nart zmiejszyła się o:[27]

a) 44% b) 50% c) 56% d) 60%

14. Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16\frac{3}{4}$ jest równa:

a) -8 b) -4 c) 2 d) 4

15. Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy:

a) –6 b) –4 c) –1 d) 1

16. Liczba $\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 \cdot 0{,}5}$ jest równa:

a) 1 b) –1 c) 2 d) 4

---

25 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpięte z CKE, listopad 2010. (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd, 20.03.2013).

26 Zadanie 20 zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20,03,2013).

27 Zadania: 13, 14, 15 zaczerpnięte z CKE, maj 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).

17. Liczba $\log_3 36 - \log_3 4$ jest równa:

a) $\log_3 32$ b) $\log_3 14$ c) 2 d) 9

18. Stół kosztował 320 zł. Ile kosztuje stół po podwyżce ceny o 20%?

a) 384 zł b) 256 zł c) 340 zł d) 400 zł

19. Liczba $27^{-2} \cdot 9^{6}$ jest równa:[28]

a) 9^5 b) 3^{16} c) 6^4 d) 3^6

20. Liczba log0,1+$\log_2$16 jest równa:

a) 6 b) –5 c) 3 d) 7

21. Torba kosztowała 40 zł, a po podwyżce 50 zł. O ile procent podwyższono cenę tej torby?

a) 10% b) 25% c) 75% d) 20%

22. Liczba $\dfrac{\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}}$ jest równa:[29]

a) -1 b) $\dfrac{4}{49}$ c) $-2\dfrac{1}{4}$ d) 1

23. Liczba log6 jest równa:

a) $\log 2 \cdot \log 3$ b) $\dfrac{\log 12}{\log 2}$ c) $\log 2 + \log 3$ d) $\log 2 - \log 3$

24. 20% pewnej liczby jest o 16 mniejsze od tej liczby. Tą liczbą jest:

a) 32 b) 20 c) –2 d) –20

25. Liczbę $x = 2^2 \cdot 16^{-4}$ można zapisać w postaci:[30]

a) x = 214 b) x = 2–14 c) x = 32–2 d) x = 2–6

26. Hania pokonuje drogę S = 100 m z domu do szkoły w czasie 30 min. Z jaką średnią prędkością idzie Hania?

a) 0,05 $\frac{km}{h}$ b) 0,2 $\frac{km}{h}$ c) 5 $\frac{km}{h}$ d) 3,3 $\frac{km}{h}$

27. Liczba $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ jest równa:

a) 6 b) –3 c) 3 d) –6

28 Zadania 19, 20, 21 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2009.

29 Zadania 22, 23, 24 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011 (www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 20.03.2013).

30 Zadania 25, 26, 27, 28 zaczerpnięte z OKE Poznań, styczeń, 2013 (www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc-0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 21.03.2013).

28. Odległość z Elbląga do Legnicy jest równa 468 km, natomiast po zaokrągleniu do setek kilometrów 500 km. Błąd względny tego przybliżenia jest równy:

a) 32 km b) 68 km c) około 6,8% d) 0,32%

29. Liczba $|5 - 2| + |1 - 6|$ jest równa:[31]

a) 8 b) 2 c) 3 d) –2

30. Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

31. **(2 pkt)**[32] Miesięczny koszt ogrzewania domu wynosi 200 zł. Dla zmniejszenia tych kosztów planuje się położenie dodatowej izolacji cieplnej, której wartość wynosi 4200 zł. Jeśli ta izolacja daje 30% oszczędności w wydatkach na ciepło, to po ilu latach poniesione koszty zwrócą się?

32. **(2pkt)** Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.

33. **(2 pkt)** Wiedząc, że $\sqrt{x} = 16$, $\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}$ oblicz $\sqrt[5]{xy}$.

34. **(2 pkt)** Dana jest liczba 2,363636... Podaj zaokrąglenie tej liczby z dokładnością do 0,001 i oblicz błąd względny tego przybliżenia.

35. **(5 pkt)** Siostry Zosia i Zuzia są współwłaścicielkami działki, przy czym część Zosi jest o 40% więsza od części Zuzi. Zuzia przeznaczyła na budowę altany 21% powierzchni swojej działki, to jest 210 m^2. Oblicz pole powierzchni całej działki. Jaki procent pola powierzchni całej działki stanowi działka Zuzi? Wynik zaokrągij do 1%.

36. **(2 pkt)** Aby obliczyć kwadrat liczby trzycyfrowej, można skorzystać ze wzoru: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, na przykład:

$$172 = (100+70+2)^2 = 100^2 + 70^2 + 2^2 + 2*100*70 + 2*100*2 + 2*70*2$$
$$= 10000 + 4900 + 4 + 14000 + 400 + 280 = 29584$$

37. **(2 pkt)** O ile procent zwiększy się pole powierzchni działki w kształcie prostokąta, jeśli długość każdego boku powiększymy o 30%?

38. **(2 pkt)** Liczbę 0,(4) – 0,2(1) zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

39. **(3 pkt)** Podaj liczby całowite, które należą do zbioru:

a) $\left(-\infty, 2\right\rangle \cap (1;5)$ b) $\left\langle -2;3\right) \cup (3;5\rangle$ c) $(-5;7)\,/\,\langle 0;+\infty)$

40. **(4 pkt)** Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:

$A = \log_6(\log_2 64)$; $B = \log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$; $C = \log_{\frac{1}{2}} 2\frac{1}{4} - \log_{\frac{1}{2}} 1\frac{1}{8}$; $D = \log_3 3\frac{6}{7} + \log_3 2\frac{1}{3}$

41. **(2 pkt)** Jakim procentem liczby 1,8 jest wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{64} - (\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{(0{,}75)^{-2} + (-1{,}5)^{-2}}$?

---

31 Zadania: 29, 30 zaczerpnięte z matury poprawkowej, sierpień, 2011 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 21.03.2013).

32 Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2 Wyrażenia algebraiczne

Algebra jest jednym z najstarszych działów matematyki. Około 300 r. n.e. starożytny myśliciel Diofantos po raz pierwszy niewiadome oznaczał literami. Za twórcę współczesnej algebry uznaje się jednak Francioisa Viete. Ten francuski matematyk pierwszy szeroko wprowadził oznaczenia literowe dla niewiadomych oraz dla współczynników.

To już potrafię:

1. Opisywać za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami;
2. Obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3. Redukować wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4. Dodawać i odejmować sumy algebraiczne;
5. Mnożyć jednomiany, sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnożyć sumy algebraiczne.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Wyrażenie $(2ab^2c^3)^3$ można zapisać jako:

a) $2ab5c^2$ b) $2ab^6c^9$ c) $8a^3b^5c^6$ d) $8a^3b^6c^9$

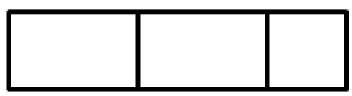
Zad.2. Wyrażenie $25 - a^2 + a$, dla $a = -3$ jest równe:

a) 13 b) 31 c) 19 d) 16

Zad.3. Wyrażenie $(n - 3m)(n + 3m)$ jest równe wyrażeniu

a) $n^2 - 6nm + 9n^2$ b) $n^2 - 6m^2$ c) $n^2 - 6nm + 6n^2$ d) $n^2 - 9m^2$

Zad.4. Na ceglanej elewacji jednego z budynków w mieście powtarza się wzór. Przez *n* oznaczmy długość dłuższej cegły, a przez *m* długość krótszej cegły. Łączną długość pięciu takich wzorów opisuje wyrażenie:



a) $5 \cdot 2n + m$ b) $2n + 5m$ c) $5(2n + m)$ d) $5(2n + 2m)$

Zad.5. Wyrażenie $9b^2 + 6ab - 3b$ jest równe:

a) $3b^2(3 + 2a - 1)$
b) $3b(b + 3a - 1)$
c) $3b(3b + 2a - 1)$
d) $3(b + 2a - 1)$

Zad.6. W sklepie było 20 kilogramów pomarańczy po 3 zł za kilogram, 35 kilogramów mandarynek po 2,50 zł za kilogram. Sprzedano owoce o wartości 130 zł. Które z wyrażeń przedstawia wartość owoców pozostawionych w sklepie?

a) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 - 130$
b) $130 - (20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50)$
c) $(20 + 35) \cdot (3 + 2{,}50) - 130$
d) $20 \cdot 3 + 35 \cdot 2{,}50 + 130$

Zad.7. Ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$ wyznacz zmienną v

a) $v = \frac{2m}{E}$
b) $v = \sqrt{\frac{2m}{E}}$
c) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$
d) $v = \sqrt{2Em}$

Zad.8. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $(5x^2 + 4x) - 7y^2 - (3x^2 + 3y^2)$ otrzymamy:

a) $2x^2 - 4y^2 + 4x$
b) $2x^2 - 10y^2 - 4x$
c) $2x^2 + 10y^2 + 4x$
d) $2x^2 - 10y^2 + 4x$

Zad.9. Liczbę 4 razy mniejszą od kwadratu liczby n przedstawia wyrażenie:

a) $n^2 : 4$
b) $n^2 - 4$
c) $\frac{1}{4n^2}$
d) $4 : n^2$

Zad.10. Różnica kwadratu potrojonej liczby x i ćwierci sześcianu liczby y, to:

a) $3x^2 - 0{,}25y^3$

b) $(3x)^2 - 0{,}25y^3$

c) $3x^2 - (0{,}25y)^3$

d) $(3x)^2 - (0{,}25y)^3$

Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	C	C	A	C	D	A	A

ZADANIA OTWARTE

1. Ze szkoły liczącej n uczniów $x\%$ wyjeżdża w czasie wakacji na obozy, $y\%$ do znajomych w góry, a $z\%$ z rodzinami na wczasy. Ile osób pozostaje w miejscu zamieszkania?

2. Zapisz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych w postaci wyrażenia algebraicznego.

3. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych

$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)$

4. Sprowadź do najprostszej postaci i oblicz wartość liczbową wyrażenia dla $x=-5, y=\frac{1}{2}$

$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)$

5. Uzasadnij, że $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ dla $a,b>0$

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	n – wszyscy uczniowie $x\%\cdot n$ – ilość uczniów na obozach $y\%\cdot n$ – ilość uczniów w górach $z\%\cdot n$ – ilość uczniów na wczasach $a\%\cdot n$ – uczniowie pozostający w domu $x\%\cdot n+y\%\cdot n+z\%\cdot n+a\%\cdot n=n$ $xn+yn+zn+an=100n$ $an=100n-xn-yn-zn$ $a=\frac{n(100-x-y-z)}{n}$ uczniów
2	n– liczba naturalna $2n$ – liczba parzysta $2n+1$ – liczba nieparzysta $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=2n+1+2n+3+2n+5=6n+9=3(2n+3)$
3	$(2x+5)+(3x-2y)-(-2x-3)-(4y+1)=2x+5+3x-2y+2x+3-4y-1$ $=7x-6y+7$
4	$(x-2y)(x+2y)+(x+y)^2-4y(x-y)=x^2-4y^2+x^2+2xy+y^2-4xy+4y^2$ $=2x^2+y^2-2xy=2\cdot(-5)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-5)\cdot\frac{1}{2}=50+\frac{1}{4}+5=55\frac{1}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2$ $\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}(2-\sqrt{b})}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}=2-\sqrt{b}+\sqrt{b}=2$

2.1 Wartość liczbowa wyrażeń

Teraz nauczę się:

Stosować wzory skróconego mnożenia na:

- Kwadrat sumy: $(a+b)^2$
- Kwadrat różnicy: $(a-b)^2$
- Różnicę kwadratów: $a^2 - b^2$

Wyrażenia algebraiczne powstają przez łączenie symboli literowych oraz liczb znakami działań i nawiasów.

Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$$x, 25,\ \ 2y^3, -\frac{1}{2}ab^2, 5(x-2),\ \ a+3b^2,\ \ \frac{(a+b)}{2}\cdot h,\ \ 3(2+2a)+4-6a$$

Wyrażenia algebraiczne występują w różnych wzorach, twierdzeniach czy dowodach.

Wyrażenia takie, jak $3x, \frac{1}{5}ab, -2y^2, 3ab^2c^3, -1$ nazywamy jednomianami. Możemy wśród nich wyróżnić jednomiany podobne, czyli takie, które różnią się między sobą tylko współczynnikiem liczbowym.

Przykłady jednomianów podobnych:

$1;\ 4;\ \frac{3}{8};\ 15, \ldots$

$x;\ 5x;\ -0{,}75x;\ 1\frac{1}{5}x, \ldots$

$a^2bc^3;\ 4a^2bc^3;\ -2\frac{4}{5}a^2bc^3;\ 0{,}63a^2bc^3$

Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.

$$xy - 2x + y - 2 - x + 2xy + 4y - 5 = -3x + 5y + 3xy - 7$$

$$4a^2 - 3b - \frac{1}{2}a + 2b^2 - 12 + 2\frac{3}{4}a - 3a^2 + 5b = a^2 + 2b^2 + 2\frac{1}{4}a + 2b - 12$$

$$3a - 8b^2 + 14ac + \frac{1}{2}a + 7 - 10ca + 5\frac{3}{4}b^2 - 4 = -2\frac{1}{4}b^2 + 3\frac{1}{2}a + 4ac + 3$$

Taki zabieg nazywa się **redukcją wyrazów podobnych**.

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażeń algebraicznych, w miejsce liter należy wstawić liczby i wykonać określone działania.

Przykład 1

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3x^2 + 2x - 4$ dla $x = -2$.

$3x^2+2x-4=3(-2)^2+2\cdot(-2)-4=3\cdot 4-4-4=12-4-4=4$

Przykład 2

Zdredukuj wyrazy podobne i oblicz wartość liczbową danego wyrażenia dla $x=-3, y=2$.

a) $4x^2+2x-8+3x-\frac{1}{3}x^2+4-5x=3\frac{2}{3}x^2-4=3\frac{2}{3}\cdot(-3)^2-4=\frac{11}{3}\cdot 9-4=$
$33-4=29$

b) $12x-8x^2+\frac{4}{3}x-7+12x^2-14+9x=4x^2+21\frac{4}{3}x-21=$
$=4\cdot(-3)^2+\frac{67}{3}\cdot(-3)-21=4\cdot 9-67-21=36-88=-52$

c) $3x^2y+5y-6+3y^2x-4y+7x+6x^2y-4y^2x-12x=$
$=9x^2y-y^2x-5x+y-6=9\cdot(-3)^2\cdot 2-2^2\cdot(-3)-5\cdot(-3)+2-6$
$=9\cdot 9\cdot 2-4\cdot(-3)+15+2-6=162+12+15+2-6=185$

d) $-\frac{2}{5}x+1\frac{1}{4}x-0,3y=-\frac{8}{20}x+1\frac{5}{20}x-0,3y=\frac{17}{20}x-0{,}3y=$
$=\frac{17}{20}\cdot(-3)-0{,}3\cdot 2=-\frac{51}{20}-\frac{6}{10}=-\frac{51}{20}-\frac{12}{20}=-\frac{63}{20}=-3{,}15$

ZADANIA

2.1.1 Znajdź wartości liczbowe wyrażenia $(2x^2-2xy)^2$ przy następujących wartościach:

a) $x=3;\ y=2$

b) $x=0{,}5;\ y=0{,}2$

c) $x=3\frac{1}{2};\ y=1\frac{1}{2}$

d) $x=2{,}5;\ y=1{,}75$

Odpowiedź: a) 36; b) 0,09; c) 196; d) $14\frac{1}{16}$.

2.1.2 Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $3(x^2-3y+4)-8$, dla $x=2; y=\frac{4}{3}$

b) $10(x-2)-4(y+3)+6$, dla $x=1\frac{1}{2}; y=0{,}75$

c) $20-4(2x^3-8x+1)+3$, dla $x=-\frac{1}{2}$

d) $x+5-(x-3)+4y-7$, dla $x=-5; y=3$

Odpowiedź: a) 4; b) –14; c) 4; d) 13.

2.1.3 Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $(5x-2)^2-(5x-2)(5x+2)$, dla $x=-0{,}2$

b) $\frac{4x}{y(x+y)}$, dla $x=6, y=-2$

c) $(a^2-16)(a+2)$, dla $a=\sqrt{2}$

d) $\frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1}$, dla $x = 4$

Odpowiedź: a) 12; b) –3; c) $-14(\sqrt{2}+2)$; d) $1\frac{1}{5}$.

2.2 Działania na wyrażeniach algebraicznych

Poza dodawaniem sum algebraicznych można na wyrażeniach algebraicznych wykonywać także inne działania: mnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożyć dwie sumy algebraiczne i wyłączać wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias.

Do przekształcania wyrażeń wykorzystuje się prawa działań na liczbach rzeczywistych.

Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian polega na zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

Przykład 1

$-5(3x+y) = -5 \cdot 3x + (-5) \cdot y = -15x - 5y$

$2x(x^2 - 5y) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-5y) = 2x^3 - 10xy$

$3a(2x^2 + 4x - 2) = 3a \cdot 2x^2 + 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-2) = 6ax^2 + 12ax - 6a$

Mnożenie sum algebraicznych polega na pomnożeniu każdego składnika pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Przykład 2

$(x+3)(2x-1) = x \cdot 2x + x \cdot (-1) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-1) = 2x^2 - x + 6x - 3$

$$(3x-2y)(-2x-5) = 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot (-5) + (-2y) \cdot (-2x) + (-2y) \cdot (-5) \\ = -6x^2 - 15x + 4xy + 10y$$

$$(2x+3y-7)(x-2y) = \\ = 2x \cdot x + 2x \cdot (-2y) + 3y \cdot x + 3y \cdot (-2y) + (-7) \cdot x + (-7) \cdot (-2y) \\ = 2x^2 - 4xy + 3xy - 6y^2 - 7x + 14y = 2x^2 - 6y^2 - xy - 7x + 14y$$

ZADANIA

2.2.1 Uprość wyrażenia, a następnie oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $x^2 - 2y^2 + xy$ dla $x = 2$ i $y = -5$

b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ dla $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{4}{5}$

c) $3x^2 - 4x + 7 + x^2 - 5x - 8$ dla $x = -1$

d) $5x - 3(4 - 2x) + 2(-x + 1)$ dla $x = -2$

e) $(x - 3)(x + 2 - 4)$ dla $x = 3$

f) $4x^2 - x(x + 3) - 5x$ dla $x = \frac{1}{3}$

g) $x(x - 3y) + 2xy - y^2(2 - y)$ dla $x = 2$ i $y = -3$

h) $3x - 4 - [2x^2 - 5x - (3 - 4x + 3x^2)]$ dla $x = -\frac{1}{2}$

i) $\frac{1+x+x^2}{1+x-x^2} + \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}$ dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$

Odpowiedź: a) -56; b) 1; c) 16; d) -28; e) 0; f) $-2\frac{1}{3}$; g) $-2{,}75$

2.2.2 Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $(x - 5)(x + 2) =$

b) $(2x - 3)(x - 1) + 5x - 4(5 - 3x) =$

c) $2(2x - 5y) - 3(4x + 3y) =$

d) $(-x - 2y)(-1) + 3(x + y + 5) =$

e) $2x(x - 5) - (x - y)(x + 1) - 5x\left(\frac{2}{5}y - 2\right) =$

f) $5x(1 - x^2) - (x - 3)(-2x^2) =$

g) $-(3x - 2y + 1) + (5x - 4y + 4z) - (x - 5y - z) =$

h) $2x - 3y + 4z - \{3x + y - 2z - [3x - 2y - 2z - (3x + 5y - 7z)]\} =$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 2x - 10$; b) $2x^2 + 12x - 17$; c) $-8x - 19y$; d) $4x + 5y + 15$;

e) $x^2 - x + y - xy$; f) $-x^3 - 6x^2 + 5x$; g) $x + 3y + 5z - 1$; h) $-x - 11y + 11z$.

2.2.3 Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia.

a) $(2x + y)(3y - 5x) - 4x(x - y)$, dla $x = 1, y = -2$

b) $p(p - 3k) + 2pk - k^2(2 - k)$, dla $p = 2, k = -4$

c) $\frac{(2a-3b)(b-4a)-2b^2}{3a(4-b)-5b(a+3)}$, dla $a = -2, b = -4$

d) $(a + 1)(b + 2) + (b + 3)(c + 4) + (a + 5)(c + 6)$, dla $a = 1, b = 2, c = 3$

Odpowiedź: a) –12; b) –35; c) 0; d) 9; e) 7.

2.2.4 Wiedząc, że $x = 2 + \sqrt{5}$ i $y = 1 - 2\sqrt{5}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{xy}{2x+y}$

Odpowiedź: $\frac{-8-3\sqrt{5}}{5}$

2.2.5 Uzasadnij, że dla $a, b > 0$ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}-a}{a-b} = 1$

2.3 Wzory skróconego mnożenia

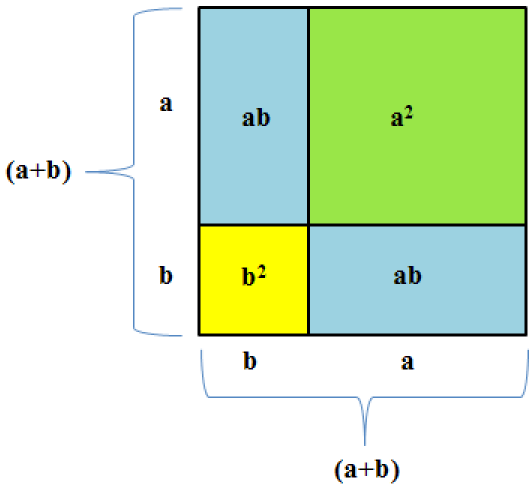
Wzory skróconego mnożenia – kwadrat sumy

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów powiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a + b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a + b)^2$ i jest sumą pól czterech figur.



$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$

Rysunek 2-1 – Kwadrat sumy

Interpretacja algebraiczna

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$

Przykład 1

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(2a + 4)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 4 + 4^2 = 4a^2 + 16a + 16$

$(2k + 5l)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 5l + (5l)^2 = 4k^2 + 20kl + 25l^2$

$\left(a\sqrt{2} + 2\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}a + 4$

Przykład 2

$$(102)^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

$$(120)^2 = (100+20)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 20 + 20^2 = 10000 + 4000 + 400 = 14400$$

$$(27)^2 = (20+7)^2 = 20^2 + 2\cdot 20\cdot 7 + 7^2 = 400 + 280 + 49 = 729$$

Przykład 3

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$$49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2\cdot 7\cdot x + x^2 = (7+x)^2 = (7+x)(7+x)$$

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2y + (2y)^2 = (3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$$

$$9 + 6x\sqrt{3} + 3x^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot x\sqrt{3} + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3 + x\sqrt{3}\right)^2 = \left(3+x\sqrt{3}\right)\left(3+x\sqrt{3}\right)$$

Wzory skróconego mnożenia – kwadrat różnicy

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b jest równy sumie ich kwadratów pomniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

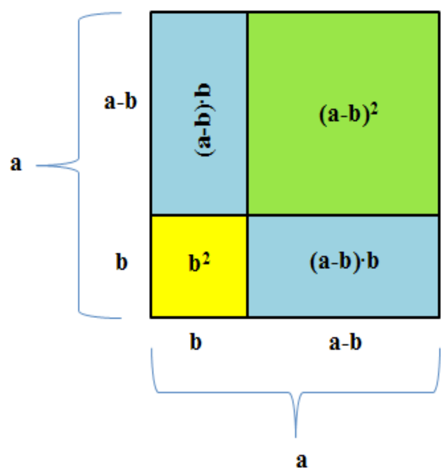
Interpretacja algebraiczna

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Interpretacja geometryczna

Rysunek przedstawia kwadrat o boku $(a-b)$. Pole tego kwadratu wynosi $(a-b)^2$

i jest równe sumie pól kwadratów o boku a i o boku b zmniejszonej o pole dwóch prostokątów o bokach a, b.



$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Rysunek 2-2 – Kwadrat różnicy

Przykład 4

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$$(4x-3)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3+3^2=16x^2-24x+9$$

$$(3a-5b)^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 5b+(5b)^2=9a^2-30ab+25b^2$$

$$\left(1-x\sqrt{3}\right)^2=1^2-2\cdot 1\cdot x\sqrt{3}+\left(x\sqrt{3}\right)^2=1-2x\sqrt{3}+3x^2$$

Przykład 5

$$(198)^2=(200-2)^2=200^2-2\cdot 200\cdot 2+2^2=40000-800+4=39204$$

Przykład 6

Zapisz podane sumy w postaci iloczynu.

$$a^2-16a+64=a^2-2\cdot a\cdot 8+8^2=(a-8)^2=(a-8)(a-8)$$

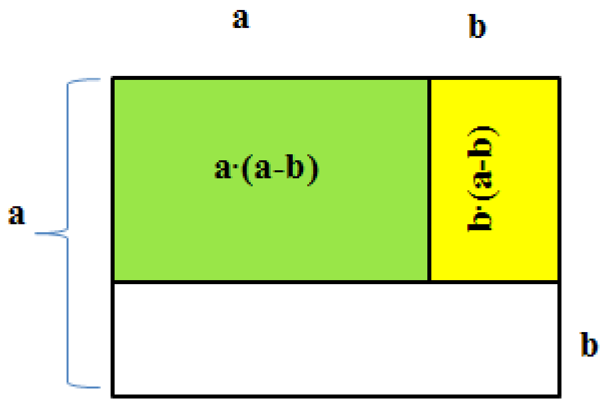
$$9-6y\sqrt{5}+5y^2=9-2\cdot 3\cdot y\sqrt{5}+\left(y\sqrt{5}\right)^2=\left(3-y\sqrt{5}\right)^2=\left(3-y\sqrt{5}\right)\left(3-y\sqrt{5}\right)$$

$$36x^2-36xz+9z^2=(6x)^2-2\cdot 6x\cdot 3z+(3z)^2=(6x-3z)^2=(6x-3z)(6x-3z)$$

Wzory skróconego mnożenia – różnica kwadratów

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń a i b przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$



Rysunek 2-2– Różnica kwadratów

Interpretacja geometryczna

Pole pokolorowanego prostokąta jest równe:

$$P=(a+b)(a-b)$$

$$P=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Zatem $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Interpretacja algebraiczna

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Przykład 7

Zapisz wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

$(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$

$(3z+2y)(3z-2y)=(3z)^2-(2z)^2=9z^2-4y^2$

$(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}+5)=(\sqrt{7})^2-5^2=7-25=-18$

Przykład 8

Zapisz różnicę w postaci iloczynu.

$16b^2-25c^2=(4b)^2-(5c)^2=(4b-5c)(4b+5c)$

$2x^2-4y^2=(x\sqrt{2})^2-(2y)^2=(x\sqrt{2}+2y)(x\sqrt{2}-2y)$

$a^4-64=(a^2)^2-8^2=(a^2-8)(a^2+8)=(a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})(a^2+8)$

Przykład 9

Oblicz $399\cdot 401$.

$399\cdot 401=(400-1)(400+1)=400^2-1^2=160000-1=159999$

ZADANIA

2.3.1 Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia.

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+6)^2$ c) $(2+5y)^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)^2$

e) $(6x+5y)^2$ f) $(y-5)^2$ g) $(2y-4x)^2$ h) $(-3-x)^2$

i) $(y-5)^2$ j) $\left(6y-\frac{1}{3}x\right)^2$

Odpowiedź:

a) x^2+6x+9; b) $4x^2+24x+36$; c) $4+20y+25y^2$;

d) $\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$; e) $36x^2+60xy+25y^2$; f) $y^2-10y+25$;

g) $4y^2-16xy+16x^2$; h) $9+6x+x^2$; i) $y^2-10y+25$;

j) $36y^2-4x+\frac{1}{9}x^2$.

2.3.2 Oblicz.

a) 103^2 b) 78^2 c) 503^2 d) 99^2 e) 498^2 f) 303^2

Odpowiedź: a) 10609; b) 6084; c) 253009; d) 9801; e) 248004; f) 91809.

2.3.3 Oblicz, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

a) $(\sqrt{3}+2)^2$ b) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$

c) $(2\sqrt{2}-5)^2$ d) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

Odpowiedź: a) $4\sqrt{3}+7$; b) $2\sqrt{21}+10$; c) $33-20\sqrt{2}$; d) $18+12\sqrt{2}$.

2.3.4 Zapisz wyrażenia w postaci iloczynu.

a) x^2-25 b) $4x^2-9y^2$ c) x^4-49y^2

d) $64-0{,}36x^2$ e) $\frac{64}{81}x^2-121y^2$ f) $3x^2-7y^2$

Odpowiedź:

a) $(x-5)(x+5)$; b) $(2x-3)(2x+3y)$; c) $(x-7y)(x+7y)$;

d) $(8-0{,}6x)(8+0{,}6x)$; e) $\left(\frac{8}{9}x-11y\right)\left(\frac{8}{9}x+11y\right)$; f) $(\sqrt{3}x-\sqrt{7}y)(\sqrt{3}x+\sqrt{7}y)$.

2.3.5 Zapisz w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

a) $(x-2)(x+2)$ b) $(2x-3y)(2x+3y)$ c) $-\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right)$

d) $(\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+5)$ e) $(3\sqrt{7}+3)(3\sqrt{7}-3)$ f) $(-5x-6)(5x-6)$

Odpowiedź: a) x^2-4; b) $4x^2-9y^2$; c) $-\frac{1}{4}x^2+y^2$; d) -23; e) 54; f) $36-25x^2$.

2.4 Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Wzory skróconego mnożenia stosuje się także do **usuwania niewymierności** z mianownika ułamka. Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez taki czynnik, który da w mianowniku liczbę całkowitą. Jeżeli w mianowniku mamy sumę lub różnicę, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Przykład 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+5)}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{18+15\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{18+15\sqrt{3}}{12-5}=\frac{3(6+5\sqrt{3})}{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=$$

$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

ZADANIA

2.4.1 Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$ c) $\frac{7}{\sqrt[3]{8}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ f) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ h) $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$

Odpowiedź:

a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; c) 3,5; d) $\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{4\sqrt{33}-4\sqrt{6}-\sqrt{22}+11}{9}$; f) $2\sqrt{2}-2$; g) $15+5\sqrt{6}$; h) $\frac{-7-2\sqrt{10}}{3}$.

2.4.3 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2}{5+\sqrt{5}}$, $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{2\sqrt{3}+5}{6+2\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Odpowiedź:

a) $\sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-3, 0{,}5-0{,}1\sqrt{5}, -3(2+\sqrt{5})$;

b) $\frac{6-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}, -5-2\sqrt{6}, \frac{3}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.4.4 Usuń niewymierność, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $\frac{5}{4+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Odpowiedź: a) $\frac{-30+25\sqrt{3}-15\sqrt{7}+10\sqrt{21}}{12}$; b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

2.5 Rozkład wielomianu na czynniki

Wyłączanie wspólnego czynnika z wyrazów sumy algebraicznej przed nawias to nic innego, jak zamiana sumy algebraicznej na iloczyn wyrażeń. Umiejętność ta jest przydatna do rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Przykład

$$3x+6y-12z = 3\cdot z + 3\cdot 2y - 3\cdot 4z = 3(z+2y-4z)$$

$$-2abc+6a^2bc-10ac^2 = -2abc + (-2)\cdot 3aabc + (-2)\cdot 5acc$$
$$= -2ac(b+3ab+5c)$$

$$x(2a+b)-y(2a+b) = (2a+b)(x-y)$$

$$x(y-z)-(y-z) = x(y-z)-1(y-z) = (y-z)(x-1)$$

ZADANIA

2.5.1 Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5x+x^2=$ b) $6x^2-3x=$

c) $6x + 10xy + 8xz =$ d) $8x^2y + 4xy - 2y =$

e) $3xyz + 6xzt - 9xyt =$ f) $5x^4 - 25x^3 - 10x^2 =$

g) $2(x + y) + (x + y)z =$ h) $(2x - 3y) - a(2x - 3y) =$

i) $(5 - x)y^2 - 9(5 - x)y - (x - 5) =$

Odpowiedź:

a) $x(5 + x)$; b) $3x(2x - 1)$; c) $2x(3 + 5y + 4z)$; d) $2y(4x^2 + 2x - 1)$; e) $3x(yz + 2zt - 3yt)$;

f) $5x^2(x^2 - 5x - 2)$; g) $(x + y)(2 + z)$; h) $(2x - 3y)(1 - a)$; i) $(5 - x)(y^2 - 9y + 1)$.

2.5.3 Zapisz w postaci iloczynowej:

a) $3x^2 - 6$ b) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ c) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

d) $3x^3 - 15x^2 - 6x + 30$ e) $x^4 - x^3 - 8x + 8$

Odpowiedź:

a) $3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$; c) $(x + 2)(x^2 + 9)$;

d) $3(x - 5)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; e) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1. Równość $(a + 4\sqrt{2})^2 = a^2 + 32\sqrt{2} + 32$ zachodzi dla:

a) $a = 8\sqrt{2}$ b) $a = 4$ c) $a = 8$ d) $a = 4\sqrt{2}$

2. Liczba $(2 - 3\sqrt{2})^2$ jest równa:[33]

a) -14 b) 22 c) $-14 - 12\sqrt{2}$ d) $-22 - 12\sqrt{2}$

3. Równość $(a + 2\sqrt{2})^2 = a^2 + 28\sqrt{2} + 8$ zachodzi dla:

a) $a = 14$ b) $a = 7\sqrt{2}$ c) $a = 7$ d) $a = 2\sqrt{2}$

4. Liczba x stanowi 20% liczby y. Zatem prawdziwe jest następujące równanie:

a) $0{,}2x = y$ b) $y = 5x$ c) $1{,}2x = y$ d) $x = 1{,}2\,y$

33 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z „Poprawkowy egzamin maturalny z matematyki", sierpień, 212 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 23.03.2013).

5. Liczba $(3-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})$ jest równa:[34]

a) $19-10\sqrt{2}$ b) $17-4\sqrt{2}$ c) $15+14\sqrt{2}$ d) $19+6\sqrt{2}$

6. Wyrażenie $8x^2-4xy+6x$ jest równe iloczynowi:

a) $2x(4x-2y+6)$ b) $2x(4x-2y+3)$

c) $2x(4x^2-2y+3x)$ d) $2x(4x-y+3)$

7. Wartość wyrażenia $(\sqrt{x+1}+1)(1-\sqrt{x+1})$ dla $x=\sqrt{2}-2$ jest równa:

a) $2-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}-2$ c) $\sqrt{2}-3$ d) $4-\sqrt{2}$

8. Liczba a stanowi 60% liczby b. Wówczas:[35]

a) $a=b-0{,}4$ b) $b=0{,}4\,a$ c) $b=\frac{5}{3}a$ d) $a=\frac{5}{3}b$

9. Wartość wyrażenia $\frac{2a+12}{-a^2}$ dla $a=-2\sqrt{3}$ jest równa:

a) $4\sqrt{3}-1$ b) $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$ c) $\frac{-\sqrt{3}+3}{3}$ d) $-4\sqrt{3}+1$

10. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36=x(x+3)$ należy do przedziału:

a) $(3,10)$ b) $(11,+\infty)$ c) $(-5,9)$ d) $(-\infty,5)$

11. Różnica liczby x i 15% tej liczby jest równa 255. Równaniem opisującym tę zależność jest:

a) $x-0{,}15=255$ b) $1{,}85\cdot x=255$

c) $x+0{,}15\cdot x=255$ d) $x-0{,}15\cdot x=255$

12. Jeżeli $x=1-2\sqrt{2}$ i $y=\sqrt{2}$, to xy równe jest:[36]

a) $\sqrt{2}-4$ b) $4-\sqrt{2}$ c) -3 d) $-\sqrt{2}$

13. Wyrażenie $x(x-2)(x+2)$ jest równe:

a) $(x-2)^3$ b) x^3-4x c) x^3-2 d) x^3-2x

34 Zadania: 5, 6, 7 zaczerpnięte z „Egzamin maturalny z matematyki", maj, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 23.03.2013).
35 Zadania: 8, 9, 10, 11 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturaly z matematyki, CEN, Bydgoszcz.
36 Zadania: 12, 13, 14 zaczerpnięte z arkusza „Próbny egzamin maturalny z matematyki, OKE, Poznań.

14. Wyrażenie $27x^3+y^3$ jest równe iloczynowi

a) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$ b) $(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)$

c) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$ d) $(3x-y)(9x^2-3xy+y^2)$

15. Kwadrat liczby $x=5+2\sqrt{3}$ jest równy:[37]

a) 37 b) $25+4\sqrt{3}$ c) $37+20\sqrt{3}$ d) 147

16. Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi:[38]

a) 5a2(1–10b+3) b) 5a (a–2b+3)

c) 5a (a–10b+15) d) 5(a–2b+3)

17. Liczba $(3-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})$ jest równa:[39]

a) $19-10\sqrt{2}$ b) $17-4\sqrt{2}$ c) $15+14\sqrt{2}$ d) $19+6\sqrt{2}$

18. Dla pewnych a i b zachodzą równości $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych a i b wartość wyrażenia $a - b$ wynosi:[40]

a) 25 b) 16 c) 10 d) 2

19. **(2 pkt)** Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} > \frac{a+1}{2}$.[41]

20. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

21. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

22. **(2 pkt)** Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a,b,c spełniają nierówność $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

23. Uprość wyrażenie: $-9(2m-3)+(m-3)^3-(m+2)(m-2)-m^3$, a następnie oblicz jego wartość dla $m=\sqrt{3}$[42].

24. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

25. Oblicz wartość wyrażenia: $(2x+3y)\cdot(2x-3y)-(2x-3y)^2$ dla $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{8}$

---

37 Zadania: 16, 17 zaczerpnięte z CKE, 2010 (www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 20.03.2013).
38 (www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
39 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 20.03.2013).
40 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 24.03.2013).
41 (www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.03.2013).
42 Zadania: 23, 24, 25 zaczerpnięto z Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności

To już potrafię:

- Zapisywać związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi;
- Sprawdzić, czy dana liczba spełnia równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Rozwiązywać równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;
- Zapisywać związki między nieznanymi wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- Sprawdzić, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- Rozwiązywać układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi oraz zadania osadzone w kontekście praktycznym.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Liczba 7 jest rozwiązaniem równania:

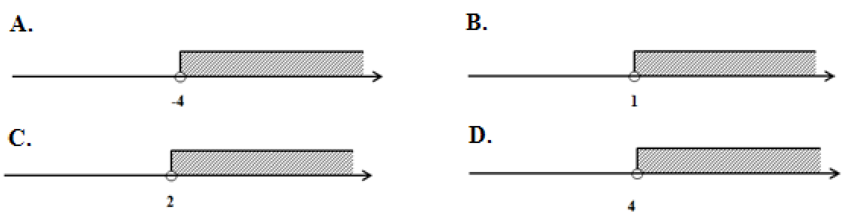
a) $2x + 1 = 3x - 2$ b) $2(x + 1) = 3x - 2$

c) $2x + 1 = 3(x - 2)$ d) $2x + 1 = 3x + 2$

Zad.2. Po obniżce o 30% płaszcz kosztuje 392 zł. Jaka jest pierwotna cena płaszcza?

a) 500 b) 560 c) 650 d) 600

Zad.3. Wybierz rysunek, który przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $x - 3 > 1$



Zad.4. Które z równań należy dopisać do równania $x - 2y = 8$, aby utworzony układ równań był sprzeczny?

a) $6x + 2y = 13$
b) $2x + 2y = 4$
c) $x - 2y = 4$
d) $2x - 4y = 16$

Zad.5. Układ równań $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

a) Ma dokładnie jedno rozwiązanie
b) Nie ma rozwiązań
c) Ma dwa rozwiązania
d) Ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zad.6. Jeżeli y jest liczbą szklanek o pojemności $0{,}2$ litra, które można napełnić sokiem z pełnego naczynia o pojemności $1{,}5$ litra, to opisuje to nierówność:

a) $0{,}2y \geq 1{,}5$
b) $0{,}2y > 1{,}5$
c) $0{,}2y \leq 1{,}5$
d) $1{,}5y < 0{,}2$

Zad.7. Ile litrów wody należy dolać do 3 litrów 10% roztworu soli, aby otrzymać roztwór 6%? Załóż, że gęstość roztworu jest równa gęstości wody.

a) 1 litr
b) 4 litry
c) 3 litry
d) 2 litry

Zad.8. Nierównością równoważną nierówności $x > 1$ jest:

a) $x - 1 < 0$
b) $-x > -1$
c) $x - 2 > -1$
d) $\frac{x}{2} > 1$

Zad.9. Po wyznaczeniu y ze wzoru $2y = z - \frac{1}{3}y$, otrzymamy:

a) $y = \frac{3}{4}z$
b) $y = \frac{3}{7}z$
c) $y = \frac{4}{3}z$
d) $y = \frac{7}{3}z$

Zad.10. Pan Marek zebrał m kg jagód, pan Janek o 5 kg więcej niż pan Marek, a pani Ewa 2 razy mniej niż pan Marek i pan Janek razem. Łącznie zebrali 40 kg jagód. Wskaż odpowiednie równanie opisujące tę sytuację.

a) $m + m + 5 - \frac{1}{2}(m - 5 + m) = 40$
b) $m + m + 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$
c) $m + m - 5 + \frac{1}{2}(m + 5 + m) = 40$
d) $m + m - 5 - \frac{1}{2}(m - 5 - m) = 40$

Odpowiedzi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	A	C	D	C	B	B

ZADANIA OTWARTE

1. Za dwa filmy zapłacono 60,20 zł. Ile kosztuje każdy film, jeżeli jeden jest o 15% droższy od drugiego?
2. Korzystając z własności proporcji, rozwiąż równanie $\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$.
3. Za jedną książkę droższą i jedną tańszą zapłacono 19 zł, a za pięć książek droższych i sześć książek tańszych zapłacono 104 zł. Jaka była cena książki droższej, a jaka książki tańszej?
4. Kupując telewizor, Tomek wpłacił 30% jego wartości. Pozostałą część należności postanowił spłacić na raty. Płatność miała się odbyć w 9 ratach po 140 zł. Ile kosztował telewizor?
5. O godzinie 10^{00} Adam wyruszył piechotą z miejscowości A do miejscowości B. O godzinie 11^{30} z miejscowości A wyruszyła Ewa i jadąc na rowerze z prędkością 24 km/h, dogoniła Adama o godzinie 12^{15}. Z jaką średnią prędkością szedł Adam?

Odpowiedzi:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	x – cena I filmu $x + 15\%x$ – cena II filmu $x + x + 15\%x = 60{,}20$ $2{,}15x = 60{,}20 \Rightarrow x = 28$ Odp. Jeden film kosztuje 28 zł, a drugi 32,20 zł.
2	$\frac{3x+2}{4} = \frac{3+x}{2}$ $6x + 4 = 12 + 4x$ $2x = 8 \Rightarrow x = 4$
3	x – tańsza książka y – droższa książka $\begin{cases} x + y = 19 \\ 5x + 6y = 104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ Odp. Tańsza książka kosztowała 9 zł, a droższa 10 zł.
4	x – cena komputera $30\%x + 9 \cdot 140 = x$ $1260 = 0{,}7x \Rightarrow x = 1800$ Odp. Komputer kosztował 1800 zł.
5	$2\ h\ 15\ min$ – czas podróży Adama, $45\ min$ – czas podróży Ewy x – prędkość Adama $x \cdot 2\frac{15}{60}$ – droga przebyta przez Adama $24 \cdot \frac{45}{60}$ – droga przebyta przez Ewę $x \cdot 2\frac{15}{60} = 24 \cdot \frac{45}{60} \Rightarrow x = 8$ Odp. Adam szedł ze średnią prędkością 8 km/h.

3.1 Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Teraz nauczę się:

- Sprawdzać, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania,
- Rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Nazywać równania w zależności od liczby rozwiazań (sprzeczne, oznaczone, nieoznaczone),
- Korzystać z proporcji do rozwiązywania zadań.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją. Zbiór wszystkich liczb spełniających równanie nazywamy zbiorem rozwiązań tego równania.

Równanie o postaci $ax+b=0$, gdzie x jest niewiadomą, natomiast a i b są dowolnymi liczbami, nazywamy **równaniem liniowym.** Aby rozwiązać równanie liniowe, należy sprowadzić je w wyniku przekształceń równoważnych do równania elementarnego $ax=-b$ i obustronnie podzielić przez współczynnik występujący przy niewiadomej x.

! Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą zmieniają swój znak!

Przykład 1

$5x - 10 = 0$

$5x = 10/:5$

$x = 2$

Równanie liniowe może mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Takie równanie nazywamy **oznaczonym.**

Przykład 2

a) $2x+1=-2(x+3)-1$

$2x+1=-2x-6-1$

$2x+2x=-6-1-1$

$4x=-8$

$x=-2$

b) $2x+3(3x-5)-10=5x+5$

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

Zgodnie zasadą mnożenia liczby przez nawias w wyrażeniach algebraicznych. Mnożymy przez 3 kolejne wyrażenia z nawiasu: 3x i (-5).

$$2x+9x-15-10=5x+5$$

Po lewej stronie można jeszcze zredukować wyrażenia podobne:
2x+9x=11x
-15-10=-25

$$11x-25=5x+5$$

Uwaga!!!

Wyrażenia, które przenosimy z jednej strony na drugą, zmieniają swój znak!

$$11x-25=5x+5$$

Przenosimy 5x na lewo. W związku z tym zmieniamy znak i po lewej zapisujemy: -5x

Przenosimy (-25) na prawo. W związku z tym zmieniamy znak i po prawej zapisujemy: +25

$$11x-5x=5+25$$

Wykonujemy ostatnie działania po obu stronach równania.

$$6x=30$$

$$6x=30 \quad /\div 6$$

30 : 6 = 5

$$x=5$$

Sprawdzenie

Sprawdzenie warto wykonać zawsze, niezależnie od tego, czy jest wymagane w zadaniu, czy nie. Aby je wykonać, do pierwotnej formy równania podstawiamy zamiast „*x*" otrzymaną wartość, zgodnie z zasadami podstawiania wartości liczbowych za symbole w wyrażeniach algebraicznych. Zapisujemy zamiast „*x*" otrzymaną wartość, a między liczbą i podstawianą wartością zapisujemy mnożenie.

Równanie zostało dobrze wykonane, gdy po obu stronach uzyskujemy taką samą wartość i możemy zapisać: L = P.

$$2x+3(3x-5)-10=5x+5$$

$$2\cdot 5+3(3\cdot 5-5)-10=5\cdot 5+5$$
$$10+3(15-5)-10=25+5$$
$$10+3\cdot 10-10=30$$
$$10+30-10=30$$
$$30=30$$
$$L=P$$

Równanie liniowe może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Takie równanie nazywamy **nieoznaczonym (tożsamościowym).**

$$2(x-1)+4=2x+2$$
$$2x-2+4=2x+2$$
$$2x+2=2x+2$$
$$2x-2x=2-2$$
$$0=0$$

0 = 0 !
Piszemy więc:

Równanie jest tożsame
$$x \in R$$

Równanie liniowe może nie mieć rozwiązań. Takie równanie nazywamy sprzecznym.

Równanie sprzeczne nie ma rozwiązań. W trakcie liczenia, dochodzimy do momentu, w którym powstaje sprzeczność (np. $0 = 9$), wtedy znak równości przekreślamy: ($0 \neq 9$). Następnie należy zapisać: „Równanie jest sprzeczne" oraz $x \in \emptyset$ (czyt. x należy do zbioru pustego), można też zapisać słownie: „Brak rozwiązań".

Przykład 4

$$5x-9 \neq 2x+3(x-2)$$
$$5x-9 \neq 2x+3x-6$$
$$5x-9 \neq 5x-6$$
$$5x-5x \neq -6+9$$
$$0 \neq 3$$

0 ≠ 3 !
Piszemy więc:

Równanie jest sprzeczne
$$x \in \emptyset$$

Jeśli $b \neq 0$ **i** $d \neq 0$**, to proporcję:** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ **możemy zastąpić równością** $\boldsymbol{d} \quad = b$ **.**

Przykład 5

$$\frac{2x-5}{x+1}=\frac{5}{3}$$

Z: $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$$3(2x-5)=5(x+1)$$
$$6x-15=5x+5$$
$$6x-5x=5+15$$
$$x=20$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x = 20$.

Zdarzają się równania, które zawierają pewne „utrudnienie" w formie postaci ułamkowych. Łatwo można jednak ten problem rozwiązać. Należy „pozbyć" się mianowników, mnożąc całe równanie przez wspólny mianownik.

Wspólnym mianownikiem dla 4, 8 i 2 jest 8, dlatego mnożymy całe równanie przez 8.

$$\frac{2x+3}{4}-\frac{x-3}{8}+2x=\frac{-2x+4}{2}+5 \quad /\cdot 8$$

UWAGA: Pamiętajmy by przemnożyć każde wyrażenie.

$$\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{2x+3}{\cancel{4}_{1}}-\overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{x-3}{\cancel{8}_{1}}+8\cdot 2x=\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\frac{-2x+4}{\cancel{2}_{1}}+8\cdot 5$$

Skracamy mianowniki z 8, a następnie przepisujemy równanie, pomijając uzyskane w mianownikach 1 (bo dzielenie przez 1 nie zmienia wartości). UWAGA: Pamiętajmy by liczniki zapisać w nawiasach.

$$2\cdot(2x+3)-(x-3)+16x=4(-2x+4)+40$$

Od tego momentu mamy do rozwiązania „normalne" równanie:

$$4x+6-x+3+16x=-8x+16+40$$
$$4x-x+16x+8x=16+40-3-6$$
$$27x=47$$
$$x=\frac{47}{27}=1\frac{20}{27}$$

Odpowiedź: Równanie oznaczone, $x=1\frac{20}{27}$.

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $6x+7+2x=8-x+1+80$

b) $-4(2x-5)=2(3x+7)$

c) $(8x-5)+(2x-3)=(x-2)-(3x+4)$

d) $x(x-3)=(x+2)^2$

e) $(3x+5)^2+(4x+6)^2=(5x+6)^2+37$

f) $\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{7}{15}(3+x)$

g) $\frac{5x-4}{6}-\frac{7-2x}{2}=0$

h) $\frac{x(3-x)}{3}-\frac{3-2x^2}{6}=2x$

i) $3-\frac{2x+3}{2}=\frac{17}{6}-\frac{3x+2}{2}$

j) $\frac{0{,}7x+5}{7}=0{,}1\left(x+\frac{2}{7}\right)$

1. Odpowiedź: a) $9\frac{1}{9}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{-4}{7}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{84}{11}$; g) $\frac{25}{11}$; h) $\frac{-1}{2}$; i) $\frac{2}{3}$; j) równanie sprzeczne.

3.1.2 Rozwiąż równania:

a) $x-2(x+5)=-3(4+x)+8$

b) $\frac{x}{2}-3(x-2)=-5x+16$

c) $\frac{x+1}{3}-2(x-1)=\frac{x}{2}-x$

d) $(x+2)^2=2x+(x-3)^2$

e) $(x-2)(x+2)=(x-1)^2$

f) $2(x-4)(x+5)=x(2x-10)-14$

Odpowiedź: a) 3; b) 4; c) 2; d) $\frac{5}{8}$; e) 2,5; f) $2\frac{1}{6}$.

3.1.3 Podaj liczbę rozwiązań równania:

a) $2(3x-2)-5=7-2x$

b) $5x-3=2(x+4)+3x$

c) $(x-2)^2=(x-1)(x+1)-4x$

d) $8-(2x-4)=-2(x-1)+10$

e) $\frac{3x-2}{3}-2x=-\frac{2}{3}-x$

f) $(x+3)^2-(x-3)(x+3)=5$

Odpowiedź:

a) $x = 2$ oznaczone; b) $0 = 11$ sprzeczne; c) $0 = -5$ sprzeczne; d) $0 = 0$ nieoznaczone; e) $0 = 0$ nieoznaczone; f) –2 i 1/6 oznaczone.

3.1.4 Rozwiąż równanie podane w postaci proporcji (najpierw przyjmij odpowiednie założenia):

a) $\frac{5}{4x+3}=\frac{2}{x}$

b) $\frac{x}{x-1}=\frac{5x+1}{5x+3}$

c) $\frac{3+x}{x-2}=\frac{5-x}{-x+1}$

d) $\frac{x-2}{-x}=\frac{1-x}{x-2}$

e) $\frac{7}{7x-10}=\frac{5}{5x-20}$

Odpowiedź: a) –2; b) $\frac{-1}{9}$; c) $\frac{13}{9}$; d) $\frac{4}{3}$; e) sprzeczne.

3.2 Nierówności liniowe

Teraz nauczę się:

- Rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- Zaznaczać zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisywać w postaci przedziału.

Rozwiązywanie nierówności nie różni się znacząco od rozwiązywania równań.

W nierównościach zamiast znaku „=" mamy znak nierówności.

W porównywaniu do równań mamy tu do czynienia z dwoma podstawowymi różnicami:

1) W trakcie obliczeń, gdy zachodzi konieczność pomnożenia lub podzielenia całego równania przez liczbę ujemną, należy obrócić znak nierówności w drugą stronę.

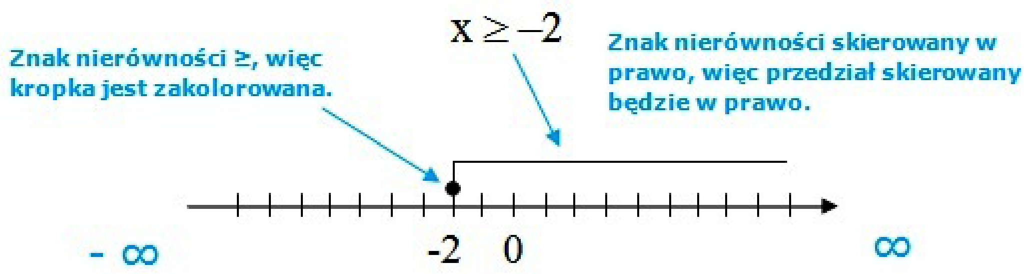
2) Po uzyskaniu rozwiązania, należy zaznaczyć je na osi oraz za pomocą przedziału liczbowego.

Przykład 1

$$2(x+1)-3 \le 4x+3$$
$$2x+2-3 \le 4x+3$$
$$2x-1 \le 4x+3$$
$$2x-4x \le 3+1$$
$$-2x \le 4 \;/ \div(-2)$$
$$x \ge -2$$

Dzielimy całe równanie przez (-2),
w związku z czym
musimy obrócić znak nierówności.

Teraz należy zaznaczyć wynik na osi liczbowej.



Po narysowaniu przedziału na osi, należy jeszcze go zapisać.

Nawias trójkątny (domknięty), bo kropka w przykładzie jest zakolorowana.

Nawias okrągły (otwarty), bo przy nieskończoności zawsze jest otwarty.

$$x \in \langle -2, \infty)$$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $5(x-1)-2x+3>2x$

$5(x-1)-2x+3>2x$

$5x-5-2x+3>2x$

$3x-2>2x$

$3x-2x>2$

$x>2$

$x \in (2;\ \infty)$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż nierówności:

a) $5(x-1)-2x+3\rangle 2x$

b) $-2(x+6)\rangle 4(3+2x)$

c) $3(2-x)\leq -\frac{2}{3}(6x-21)$

d) $1-\frac{2x-5}{3}\langle 3$

e) $\frac{5x+1}{2}\geq \frac{2-5x}{-3}$

f) $2-3(3-2x)\rangle 3-\frac{19-12x}{2}$

g) $5-\frac{2x-3}{3}\rangle 4-\frac{4x+2}{6}$

3.3 **Odpowiedź:** a) $(2,+\infty)$; b) $(-\infty;-2,4)$; c) $(-\infty,8\ \rangle$; d) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; e) $\langle\ -\frac{7}{5},+\infty)$; f) $\varnothing$; g) R.

3.3 Przekształcanie wzorów

Teraz nauczę się:

- Przekształcać wzory matematyczne, fizyczne, chemiczne

Przekształcanie wzorów często sprawia uczniom wiele problemów, a jest to naprawdę bardzo proste. Pamiętaj, że każdy wzór możesz potraktować jako równanie. Działania wykonujesz zawsze po obu stronach równania. Aby pozbyć się jakiejś wielkości, wykonujesz działanie odwrotne do danego.

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczaniu jednej zmiennej, która we wzorze występuje jako niewiadoma.

Przykład 1

Znając wzór na siłę, wyznacz wzór na przyspieszenie ciała.

$F = m \cdot a$

Podziel obie strony równania przez m

$a = \frac{F}{m}$

Przykład 2

Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$ wyznacz czas.

$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$

Pomnóż obie strony równania przez $\frac{2}{a}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Wyciągnij pierwiastek z obu stron równania

ZADANIA

3.3.1 Przekształć wzory fizyczne , tak aby wyznaczyć:

a) m, v ze wzoru na pęd $p = m \cdot v$

b) T ze wzoru na częstość $f = \frac{1}{T}$

c) m, v ze wzoru na energię kinetyczną $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$

d) l, g ze wzoru na okres wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

e) x, y z równania soczewki $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

f) l, s ze wzoru na opór $R = \rho\,\frac{l}{s}$

g) q, r z prawa Coulomba $F = k\frac{q^2}{r^2}$

Odpowiedź:

a) $m = \frac{p}{v}$, $v = \frac{p}{m}$; b) $T = \frac{1}{f}$; c) $m = \frac{2E}{v^2}$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$; d) $l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$, $g = \frac{4l\pi^2}{T^2}$;

e) $x = \frac{fy}{y-f}$, $y = \frac{fx}{x-f}$; f) $l = \frac{Rs}{\rho}$, $s = \frac{\rho l}{R}$; g) $q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}}$.

3.3.2 Ze wzoru na stężenie procentowe wyznacz:

a) masę substancji m_s

$$c_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$$

b) masę roztworu m_r

Odpowiedź: a) $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$; b) $m_r = \frac{m_s \cdot 100\%}{c_p}$.

3.3.3 Przekształć wzory matematyczne tak, aby wyznaczyć:

a) promień r, ze wzoru na objętość kuli $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) bok trójkata równobocznego, ze wzoru na pole trójkata $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) a, b, ze wzoru na pole trapezu $p = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

d) promień r, ze wzoru na pole koła $p = \pi r^2$

Odpowiedź: a) $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$; b) $a = \sqrt{\frac{4p\sqrt{3}}{3}}$; c) $a = \frac{2p-bh}{h}$, $b = \frac{2p-ah}{h}$; d) $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$.

3.3.4 Wyznacz a z wyrażeń:

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{3b}=\frac{c}{d}$ b) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b-c}=\frac{1}{c}$

c) $(\frac{(a+2b)}{2}:\frac{3a}{b}):2d=e$ d) $\sqrt{\frac{2a}{a+c}}=2d$

Odpowiedź: a) $a=\frac{3db}{2d-3bc}$; b) $a=\frac{bc-c^2-b^2}{2c+b}$; c) $a=\frac{2b^2}{12ed-b}$; d) $a=\frac{4cd^2}{2-4d^2}$.

3.4 Rozwiązywanie zadań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się:

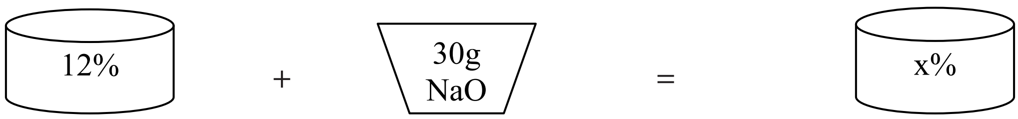
- Układać i rozwiązywać równania i nierówności liniowe do zadań z treścią.

Zadania chemiczne można rozwiązywać różnymi metodami. Często korzystamy ze wzorów chemicznych, które należy przekształcić do odpowiedniej postaci. Istnieją też inne sposoby. A oto jeden z nich:

Przykład 1

Do 130 g 12% roztworu NaOH wrzucono 40 g NaOH. Jakie jest jego stężenie procentowe

Rozwiązanie



130 g roztworu substancji rozpuszczanej 130g + 30g = 160g roztworu

Układamy równanie:

$$12\% \cdot 130g\ + 30g = 160g \cdot x\%$$

stąd $x =$ 28,5%

Przykład 2

Ile wody należy odparować z 200 gramów 25% roztworu Na_2SO_4, aby otrzymać roztwór o stężeniu 30%?

Rozwiązanie

W 200 g 25% roztworu znajduje się 0.25 · 200 = 50g czystego Na_2SO_4 i 150 g wody. Stężenie procentowe roztworu, jaki chcemy otrzymać, wynosi 30%. Jeśli masę rozpuszczalnika oznaczymy jako x, ze wzoru na stężenie procentowe otrzymamy równanie:

$$c_p = \frac{m_s.100\%}{m_r}$$

$$30\% = \frac{50}{150+x}$$

$$x = 18,(3)$$

Należy więc odparować 150 g – 18,(3) g = 131,7 g wody.

Rozwiązując zadania fizyczne, pamiętaj o jednostkach.

Przykład 3[43]

Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością 20 m/s, a drugą połowę ze stałą prędkością 30 m/s. Obliczycz średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi.

Rozwiązanie

Średnia prędkość samochodu wynosi $\mathbf{v}_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdzie

$\Delta s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = \mathbf{s}$ całkowita droga przebyta przez samochód,

$\Delta t = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ całkowity czas ruchu samochodu,

$t_1 = \frac{s}{2v_1}$ czas, w którym samochód przebył pierwszą połowę drogi jadąc z prędkością v_1

$t_2 = \frac{s}{2v_2}$ czas, w którym samochód przebył drugą połowę drogi z prędkością v_2

zatem średnia prędkość samochodu jest równa:

$vśr = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = 24\ \frac{m}{s}$

Uwaga: Średnia prędkość samochodu nie jest, w tym przypadku, średnią arytmetyczną prędkości.

Przykład 4

Adam wyjeżdża w trasę o godzinie 13.00 i jedzie motocyklem ze średnią prędkością 70 $\frac{km}{h}$. Piotr wyjeżdża godzinę póniej i ma do pokonania dwa razy krótszą trasę. Jedzie motocyklem z szybkością 50 $\frac{km}{h}$. Oblicz, jakie trasy mieli do pokonania motocykliści, jeżeli wiadomo, że skończyli jazdę o tej samej godzinie.

Rozwiązanie

Zauważ, że:

$t_1 = t_2 + 1$

$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 70(t_2 + 1)$

$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 50\, t_2$

$s_1 = 2s_2$

stąd otrzymujemy równanie

$70(t_2 + 1) = 100\, t_2$

Odpowiedź:

$t_2 = 2\frac{1}{3}\ h,\qquad t_1 = 3\frac{1}{3}\ h,\qquad s_2 = 116{,}7\ km,\qquad s_1 = 233{,}4\ km$

43 www.mif.pg.gda.pl/zz/3%20Kinematyka.pdf, 12.03.2013.

ZADANIA

3.4.1 Paweł jedzie do pracy ze średnią szybkością 50 $\frac{km}{h}$. W pogodny dzień podróż zajmuje mu 1,4 h. W deszczowy dzień jego średnia szybkość wynosi 35 $\frac{km}{h}$. Oblicz jaką drogę pokonuje Paweł do pracy i ile minut więcej zajmuje mu pokonanie tej trasy w deszczowy dzień.

Odpowiedź: $s = 70$ km, t_2-$t_1 = 36$ min

3.4.2 Oblicz średnią szybkość Ziemi w ruchu dookoła Słońca, wiedząc że w ciągu roku planeta pokonuje drogę 10^9 km.

Odpowiedź: $v = 1{,}14 \cdot 10^5 \frac{km}{h}$

3.4.3 Samolot leciał z szybkością v = 780 $\frac{km}{h}$ i pokonał drogę 1800 km, następnie 1400 km leciał z wiatrem, którego szybkość wynosiła 150$\frac{km}{h}$. Oblicz czas przelotu całej trasy i średnią szybkość samolotu.

Odpowiedź: $t = 3$ h 12 min, $v = 846 \frac{km}{h}$

3.4.4 Karuzela wykonała 4 okrążenia o promieniu r = 15 m wokół własnej osi w czasie t = 100 s. Oblicz średnią szybkość karuzeli.

Odpowiedź: $v = \frac{\mathrm{n}2\pi r}{t} = 3{,}77 \frac{m}{s}$

3.4.5 Statek wycieczkowy płynie z miejscowości A do B, tam i spowrotem. Prędkość statku względem wody to 40 $\frac{km}{h}$, a prędkość wody względem brzegu rzeki to 2 $\frac{m}{s}$. Oblicz średnią prędkość statku na całej trasie.

Odpowiedź:

(Pamiętaj o zamianie jednostek. Wykorzystaj wzór z przykładu 3, rozważ ruch w obu kierunkach).
$v_{śr} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1} = 10{,}75 \frac{m}{s}$

3.4.6 Swobodnie puszczona kulka stalowa odbija się (bez strat energii) od poziomej, doskonale sprężystej powierzchni, uderzając w nią co 1,2 s. Jak wysoko podskakuje kulka? Przyjmij $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Odpowiedź: Skorzystaj ze wzoru $h = \frac{gt^2}{2}$, za czas podstaw $\frac{t}{2}$ (pomyśl dlaczego), $h = 1{,}8$ m.

3.4.7 Z miast odległych o 150 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwa samochody. Średnia prędkość jazdy jednego z nich wynosi 80 $\frac{km}{h}$, a drugiego 60 $\frac{km}{h}$. O której godzinie i w jakiej odległości od każdego z miast nastapi ich spotkanie?

Odpowiedź: (Pamiętaj, że jadą tyle samo czasu).

$s_1 = v_1 \cdot t = 80t$

$s_2 = v_2 \cdot t = 60t$

$s = 80t + 60t = 150$

$t = 1{,}0714\,h = 1h\,4\,min$

$s_1 = 85{,}7\,km$

$s_2 = 64{,}3\,km$

Samochody spotkają się o godzinie 9.04.

3.4.8 Ile gramów 30% roztworu LiOH należy dodać do 200 gramów 15% roztworu tego związku, aby otrzymać roztwór 20%?

Odpowiedź: $0{,}3x + 0{,}15 \cdot 200 = 0{,}2(200 + x)$

$x = 100g$

3.4.9 Odparowano 35 g 12% roztworu NaCl. Jaką masę osadu otrzymano?

Odpowiedź: $m_s = \frac{c_p \cdot m_r}{100\%}$

$m_s = 12 \cdot 35/100 = 4{,}2$ g

3.4.10 Ile $CaCl_2$ należy dodać do 300 gramów 25% roztworu $CaCl_2$, aby otrzymać roztwór o stężeniu 40%?

Odpowiedź: $0{,}25 \cdot 300 + x = 0{,}4x + 0{,}4 \cdot 300$

$x = 75$ g

3.4.11 Zmieszano 120 g 18% roztworu KOH i 35 g 25% roztworu tego związku. Jakie jest stężenie procentowe powstałego roztworu?

Odpowiedź: $ms = 120 \cdot 18\% + 35 \cdot 25\% = 30{,}35$ g

$mr = 120 + 35 = 155$ g

$Cp = 19{,}58\%$

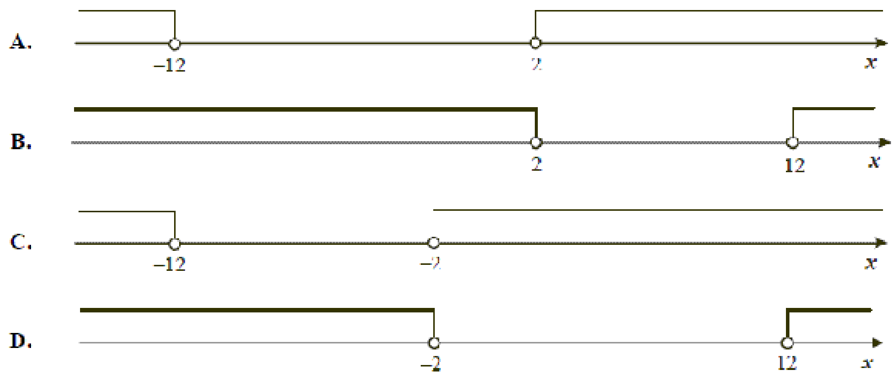
1. Wskaż nierówność, która opisuje sumę przedziałów zaznaczonych na osi liczbowej:[44]

a) $|x-2|>4$ b) $|x-2|<4$ c) $|x-4|<2$ d) $|x-4|>2$

2. Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3}=\frac{2}{3}$ jest liczba:

a) 21 b) 7 c) 17/3 d) 0

3. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$[45]



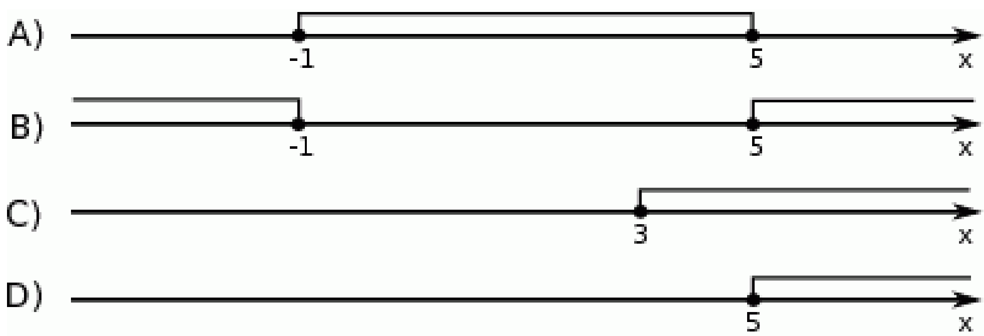
4. Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest:

a) 1 b) 7/3 c) 4/7 d) 7

5. Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3)<0$ należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

6. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x-2| \geq 3$.[46]



7. Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.[47]

a) $|x+1|>5$ b) $|x-1|<2$ c) $|x+\frac{2}{3}|\leq 3$ d) $|x-\frac{1}{3}|\geq 3$

44 Zadania: 1, 2 zaczerpnięte z Próbna matura, CKE, listopad, 2010.
45 Zadania: 3, 4, 5 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010.
46 Arkusz maturalny, Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
47 Zadania: 7, 8, 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011.

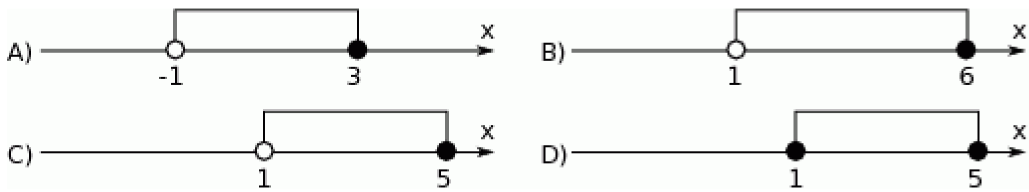
8. Rozwiązanie równania $x(x-1)+36=x(x+3)$ należy do przedziału:

a) (3, 10) b) (11, +∞) c) (–5, 9) d) (–∞, 5)

9. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}<\frac{5x}{12}$ jest:

a) 1 b) 2 c) –1 d) – 2

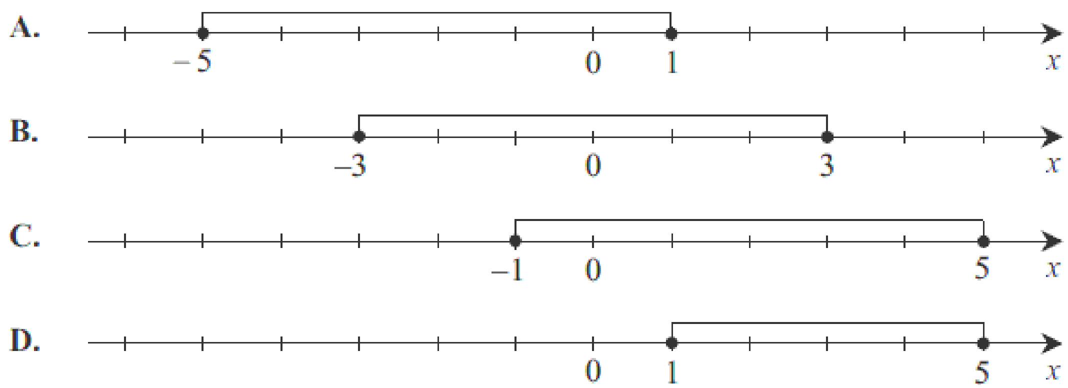
10. Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\leq 0$ i $x>1$.



11. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1|=4x$.[48]

a) $x=-1$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=-2$

12. Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\leq 3$:[49]



13. Rozwiązaniem równania $\frac{x-6}{2x-4}=\frac{2}{3}$ jest:

a) 8 b) 10 c) $\frac{1}{2}$ d) –10

14. Największa liczba naturalna n spełniająca nierówność $n<2\pi-1$ to:[50]

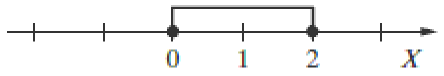
a) 3 b) 5 c) 6 d) 0

15. Rozwiązaniem równania $-2=\frac{x-1}{x+2}$ jest liczba:

a) –1 b) 1 c) 0 d) $\frac{5}{3}$

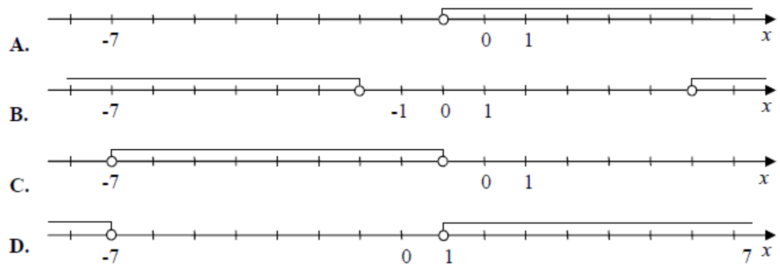
48 Arkusz maturalny, CKE, maj, 2012.
49 Zadania: 12, 13 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2010.
50 Zadania: 14, 15, 16 zaczerpnięte z „Próbna matura z Operonem", listopad, 2011.

16. Przedział zaznaczony na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



a) $|x+1| \leq 1$ b) $|x+1| \geq 2$ c) $|x-1| \geq 1$ d) $|x-1| \leq 1$

17. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+3| > 4$ jest przedstawiony na rysunku:[51]



18. Rozwiązaniem równania $3(2-3x) = x-4$ jest:[52]

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=3$ d) $x=4$

19. Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tą zależność jest:

a) $0,15 \cdot x = 230$ b) $0,85 \cdot x = 230$

c) $x + 0,15 \cdot x = 230$ d) $x - 0,15 \cdot x = 230$

20. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $2x+1 = 2-\sqrt{3}x$ i rozstrzygnij, czy rozwiązanie jest liczbą wymierną?[53]

21. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójata. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

22. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$[54]

23. **(4pkt)** Uzasadnij, że $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}^{40}\cdot(3,1)^{22}}{6^2} < \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{22}$.

24. **(2 pkt)** Oblicz, dla jakich wartości parametru a wartość wyrażenia $|3a-1|$ nie jest większa od 3.

25. **(2 pkt)** Trzej wspólnicy postanowili podzielić zysk w wysokości 6500 zł w stosunku $1:4:8$. Jakie kwoty dostaną ci wspólnicy?

26. **(2 pkt)** Sprowadź wyrażenie $|x-1|+|x|-|-x+1|$ do najprostszej postaci, gdy $x \in (0,1)$[55].

27. **(2 pkt)** Za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu. Ile lat ma Julka?

---

51 Arkusz maturalny z matematyki, OKE, Poznań, 2013.
52 Zadania 18, 19 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, sierpień, 2011.
53 Zadania 20, 21 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
54 Zadania 22, 23, 24, 25 zaczerpnięte z informatora CKE, 2007.
55 Zadania 26, 27 zaczerpnięte z próbnej matury z Operonem, listopad, 2009.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia*. *Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Historia_liczb
2. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-wymierne-przyklady.png
3. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-niewymierne-przyklady.png
4. www.bazywiedzy.com/gfx/liczby-rzeczywiste-przyklady.png
5. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wyrażenie_wymierne
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
7. www.pl.wikipedia.org/wiki/Postać_wykładnicza
8. www.pl.wikipedia.org/wiki/Potęgowanie
9. www.pl.wikipedia.org/wiki/Pierwiastkowanie
10. www.erainzyniera.pl/biblioteka/ciekawostki/anegdoty,i,ciekawostki,matematyczne.html
11. www.matematykam.pl/rodzaje_przyblizen.html
12. www.pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_pi
13. www.pl.wikipedia.org/wiki/Procent
14. www.matematyka.strefa.pl/lokaty_bankowe.pdf
15. www.pl.wikipedia.org/wiki/Przedział_liczbowy
16. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wartość_bezwzględna
17. www.pl.wikipedia.org/wiki/Skala_logarytmiczna
18. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
19. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pd
20. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
21. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
22. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
23. www.hd.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
24. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
25. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
26. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
28. www.wiking.edu.pl/article.php?id=269
29. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3

Interdyscyplinarny podręcznik

Matematyka

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Układy równań pierwszego stopnia

1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony,
- nieoznaczony,
- sprzeczny.

Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie.**

Przykład 1

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość $x = 2$ do pierwszego równania:

$$2+y=3$$
$$y=1$$
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

Przykład 2

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{cases}$$

$$0=0$$

➡ Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania.**

Przykład 3

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \,/\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-2 \end{cases}$$

$$0=-1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax+by=A \\ cx+dy=B \end{cases}$$

Przykład 4[1]

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2}=\dfrac{2-y}{4}+6 \quad /\cdot 4 \\ 6(x-1)-2x+4=y-8 \end{cases}$$

Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 4\cdot\dfrac{3x}{2}=4\cdot\dfrac{2-y}{4}+4\cdot 6 \\ 6x-6-2x+4=y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3x=2-y+24 \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.

$$\begin{cases} 6x=26-y \\ 4x-2=y-8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" i z „y" na lewo, a liczby na prawo.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-8+2 \end{cases}$$

Wykonujemy końcowe obliczenia.

$$\begin{cases} 6x+y=26 \\ 4x-y=-6 \end{cases}$$

1 http://www.matematykam.pl/upraszczanie_ukladu.html, 17.02.2013.

Krótkie przypomnienie z gimnazjum

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

METODA PODSTAWIANIA

Przykład 5[2]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} \boxed{2x + 4y = 10} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} \boxed{2x = 10 - 4y} \quad /\div 2 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} \boxed{x = 5 - 2y} \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać: x = 5 - 2y. Uzyskane wyrażenie (5 – 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x = \boxed{5 - 2y} \\ -3(5 - 2y) - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + 6y - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + y = -13 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = -13 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

2 http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej y=2, do wcześniej wyprowadzonej postaci: x = 5 - 2y
Po podstawieniu obliczamy drugą niewiadomą (x).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu niewiadomych.

METODA PRZECIWNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

Przykład 6[3]

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą x (bo ma najmniejszą wartość w obu równaniach).

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 4y = 10 & / \cdot 3 \\ \boxed{3x} - 5y = -7 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest 6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 – w ten sposób w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „–" (tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaliśmy mnożenie równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia, przez liczby określone w poprzednim kroku.

3 http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 6x+12y=30 \\ -6x+10y=14 \end{cases} \quad +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x-6x}+12y+10y=30+14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x" skracają się do „0"

$$12y+10y=30+14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y=44$$
$$y=2$$

$$2x+4y=10$$
$$2x+4\cdot 2=10$$
$$2x+8=10$$
$$2x=10-8$$
$$2x=2$$
$$x=1$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik y=2).

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

1.2 Graficzna interpretacja układów równań

Teraz nauczę się wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1[4]

$$\begin{cases} 4x+2y=14 \\ 3x-y=8 \end{cases}$$

4 http://www.matematykam.pl/metoda_graficzna.html, 17.02.2013.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x" na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 & / \div 2 \\ -y = -3x + 8 & / \div (-1) \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y" (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu (x, y), to nasze rozwiązanie.

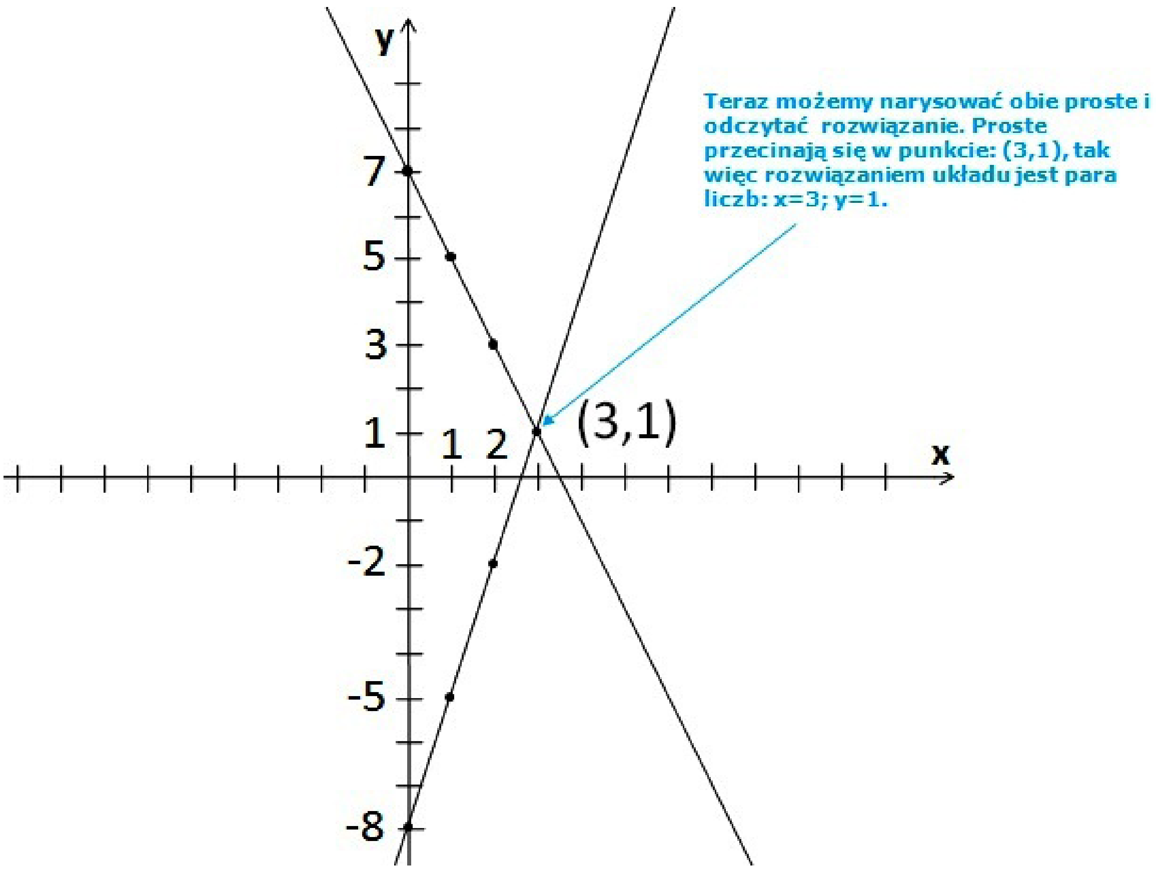
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	7	5	3

x	0	1	2
y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ZADANIA

1.1.1. Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{4x - y = 18}{5x + 2\frac{1}{2}y = 30} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 6{,}3 \\ 2x + 5y = 8{,}6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 0{,}2y = 35 \\ 2{,}5x - 5y = 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \dfrac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1 - 0{,}3(y-2) = \dfrac{x+1}{5} \\ \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{4x+9}{20} - 1{,}5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2(x+y) - 3(x - 2y) = -7x - 2 \\ 5(x+1) - 2(3 - y) = -4(x+2) \end{cases}$

n) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5} + \dfrac{5x-3y}{3} = x + 1 \\ \dfrac{2x-3y}{3} + \dfrac{4x-3y}{2} = y + 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

a) Układ równań nieoznaczony

b) Układ równań sprzeczny

c) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, układ równań oznaczony

d) $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$, układ równań oznaczony

e) $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

f) $\begin{cases} x=1{,}3 \\ y=1{,}2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

g) $\begin{cases} x=9 \\ y=40 \end{cases}$, układ równań oznaczony

h) $\begin{cases} x=3\frac{3}{23} \\ y=-1\frac{5}{23} \end{cases}$, układ równań oznaczony

i) $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

j) $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

k) $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$, układ równań oznaczony

l) $\begin{cases} x=5\frac{3}{11} \\ y=-1\frac{9}{11} \end{cases}$, układ równań oznaczony

m) $\begin{cases} x=-\frac{13}{15} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$, układ równań oznaczony

n) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, układ równań oznaczony

Wnioski:

- Dla układu oznaczonego proste przecinają się w 1 punkcie.
- Dla układu nieoznaczonego proste pokrywają się.
- Dla układu sprzecznego proste są równoległe i nie pokrywają się.

1.1.2. Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$

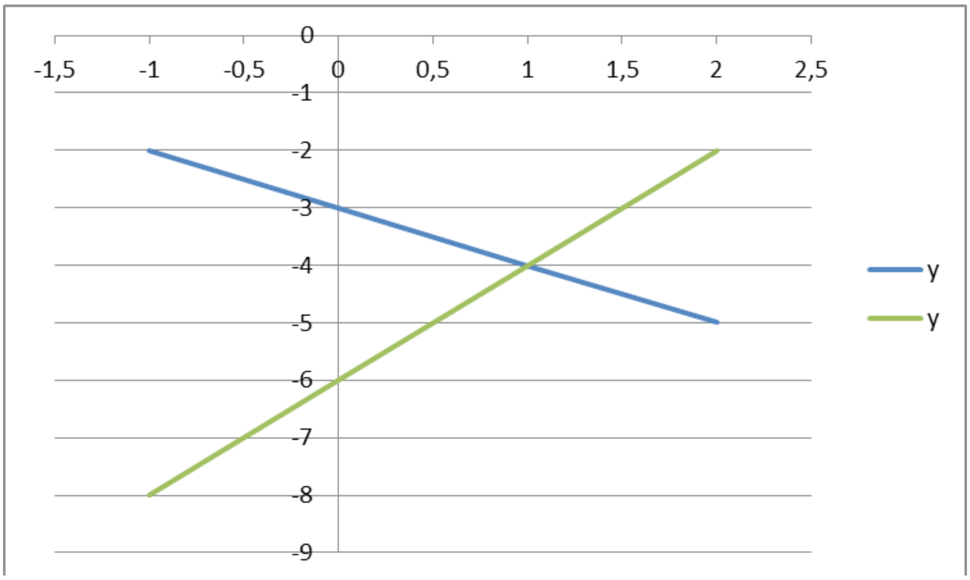
b) $\begin{cases} 3x + y = -(x-8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$

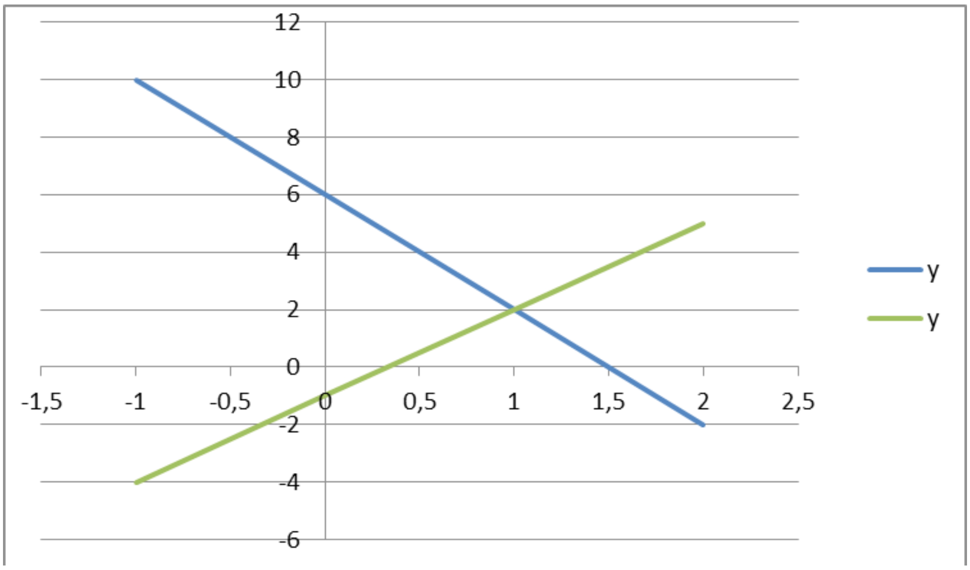
d) $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

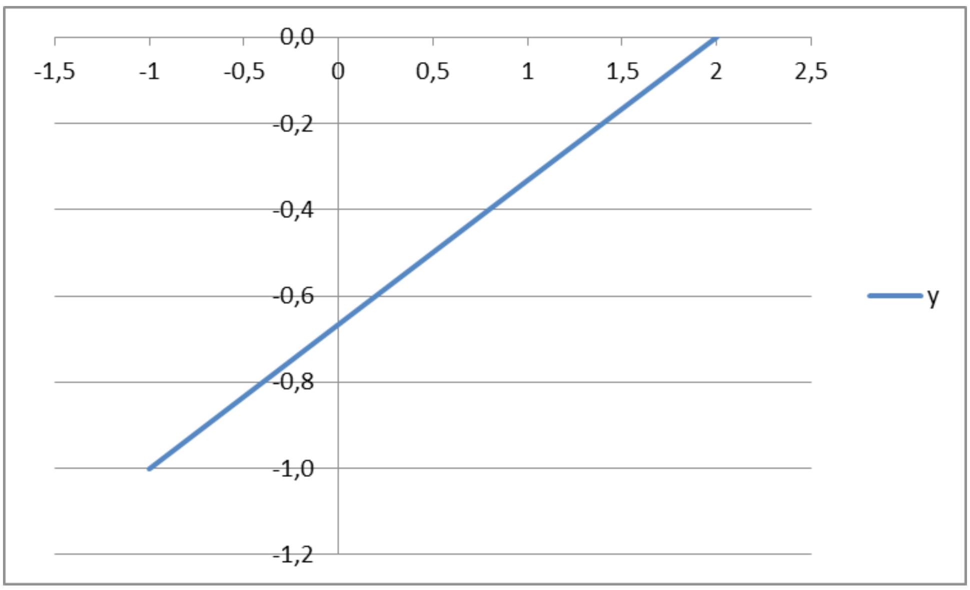
a) $x = 1 \quad y = -4$



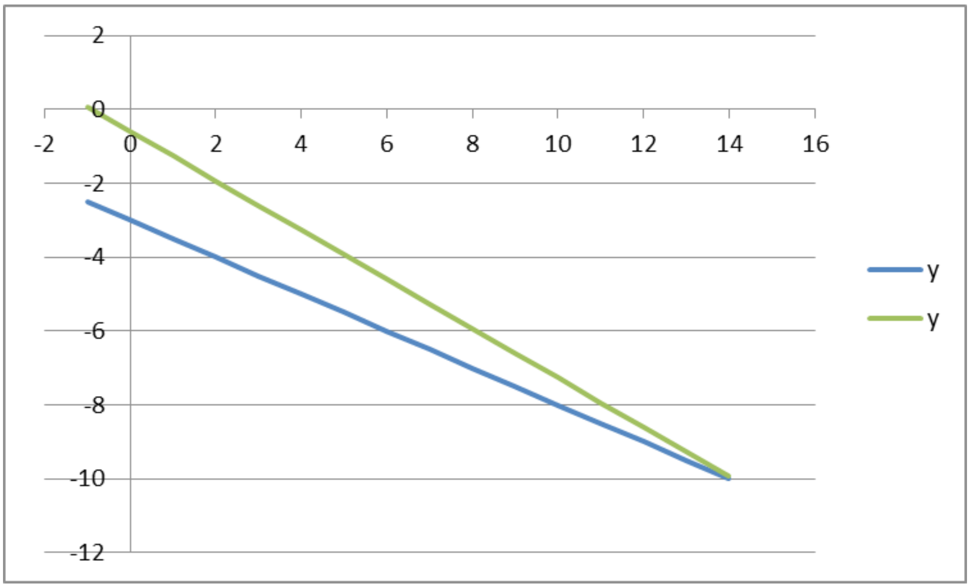
b) $x = 1 \quad y = 2$



c) rozwiązaniem jest R



d) $x = 13, y = -9{,}3$



1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową 10 $\frac{m}{s}$ i poruszał się z przyspieszeniem 1 $\frac{m}{s^2}$ Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość 20 $\frac{m}{s}$ i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 10\frac{m}{s}$, $v = 20\frac{m}{s}$, a=1 $\frac{m}{s^2}$, s_0= 100 m

Szukamy: t, s

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

Odpowiedź:

$t = 10$ s, $s = 250$ m

Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się 120 m^3 wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

Odpowiedź:

v_1 – objętość pierwszej rury

v_2 – objętość drugiej rury

p_1 – przepustowość pierwszej rury

p_2 – przepustowość drugiej rury

t_1 – czas napełniania przez pierwszą rurę

t_2 – czas napełniania przez drugą rurę

$v = p \cdot t$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$p_{1\cdot} 2 + p_2 = 120$

$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$

Odpowiedź:

Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi 40 m^3.

ZADANIA

1.1.3. W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością 20 $\frac{m}{s}$ przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem 2 $\frac{m}{s^2}$ w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_1 = 20\frac{m}{s}$, a = $2\frac{m}{s^2}$,

Szukamy: s, t, v_2

Układamy równania ruchu pojazdów. Zauważ, że drogi pojazdów są jednakowe.

$$\begin{cases} s = v_1 t \\ s = \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie:

$v_1 t = \frac{at^2}{2}$, stąd $t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

Odpowiedź:

$t = 20$ s, $s = 400$ m, $v_2 = 40\frac{m}{s}$

1.1.4. Z balkonu, znajdującego się na wysokości 50 m, spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?

Rozwiązanie

Mamy dane: $h = 50$ m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$

Szukamy: t, v

Doniczka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem ziemskim g.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} \mathrm{h} = \dfrac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{cases}$$

Odpowiedź:

$t = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ s

$v = 31{,}6 \frac{m}{s}$

1.1.5. Samolot podczas lądowania z szybkością 200 $\frac{m}{s}$ wyhamował na drodze 1000 m. Z jakim opóźnieniem lądował samolot?

Rozwiązanie

Mamy dane:

$v_0 = 200 \frac{m}{s}$, $s = 1500$ m, $v_k = 0$

Szukamy: a

Samolot poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Układamy równania ruchu:

$$\begin{cases} s = v_0 - \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = v_0 - at \end{cases}$$

$t = \frac{v_0}{a}$, podstawiamy do pierwszego równania

$s = \frac{v_0^2}{2a}$, stąd $a = \frac{v_0^2}{2s} = 20 \frac{m}{s^2}$

Odpowiedź:

$a = 20 \frac{m}{s^2}$

1.1.6. Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?

Odpowiedź: 2:5

1.1.7. Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty". Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?

Odpowiedź: Stefan miał 10 zł, a Jan 8 zł

1.1.8. Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?

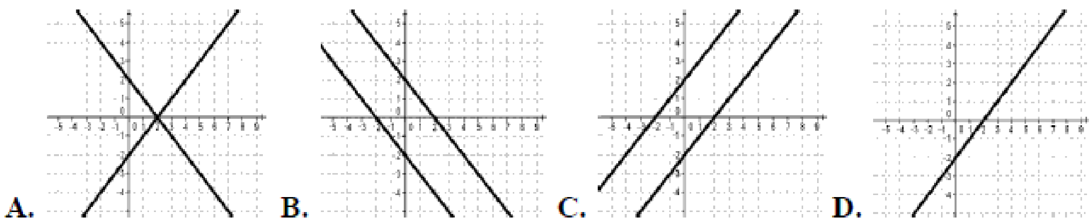
Odpowiedź: 2 długopisy, 9 ołówków

1.1.9. Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł. W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje 1 m^3 wody zimnej, a ile ciepłej?

Odpowiedź: 1 m^3 ciepłej wody kosztuje 6 zł, a zimnej 2 zł

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[5] Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:



Odpowiedź: c

2.[6] Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:

a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

5 Zadanie 1: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 18.02.2013.
6 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.

Odpowiedź: d

3.[7] Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$y = -2x - \frac{1}{4}$ i $4x - 4y + 5 = 0$

Odpowiedź: (–1/2,3/4)

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

a) $x = 1, y = -1$ $x = -1, y = 1$

b) $x = -1, y = -1$ $x = 1, y = 1$

Odpowiedź: d

5.[8] Aby układ $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ był układem nieoznaczonym, należy w miejsce a wstawić:

a) 10 b) –5 c) 5 d) –6

Odpowiedź: c

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia x – liczba uczniów klasy I, y – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

a) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}08x + 0{,}075y = 51 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0{,}80 + 0{,}75y = 51 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0{,}8x + 0{,}75y = 66 \end{cases}$

Odpowiedź: c

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

Odpowiedź: a

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

Odpowiedź: 15 kg wafli po12 zł i 5 kg wafli po 8 zł

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

Odpowiedź: $a = 6$, $b = 7$ lub $a = 7$, $b = 6$

---

7 Zadanie 3, 4: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 18.02.2013.

8 Zadania 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

2. Funkcja liniowa

To już potrafię:

- Zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych.
- Odczytać współrzędne danych punktów.
- Odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero.
- Odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).
- Obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

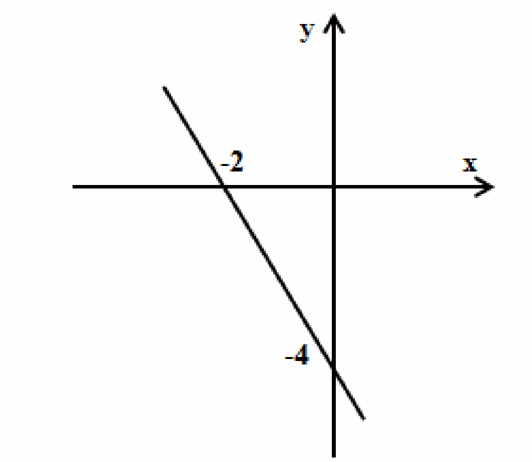
Zad.1. Funkcja przedstawiona na rysunku przyjmuje wartości ujemne dla argumentów:

A. $x < -4$

B. $x < -2$

C. $x > -2$

D. $x < -3$



Zad.2. Na odcinku trasy o długości 120 km samochód jechał z prędkością y km/h. Wzór funkcji określającej zależność czasu od prędkości, to:

A. $y = 120x$ **B.** $y = \frac{120}{x}$

C. $\frac{x}{y} = 120, \ y \neq 0$ **D.** $\frac{y}{x} = 120, \ x \neq 0$

Zad.3. Które przyporządkowanie nie jest funkcją:

A. Każdemu nauczycielowi przyporządkujemy ucznia, którego uczy.

B. Każdemu wielokątowi przyporządkujemy liczbę jego boków.

C. Każdej figurze geometrycznej przyporządkowana jest jej nazwa.

D. Każdej liczbie całkowitej jest przypisana liczba do niej przeciwna.

Zad.4. Miejscem zerowym funkcji $y = -6x + 3$ jest:

A. Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **B.** $x = \frac{1}{2}$

C. Punkt $(0,3)$ **D.** $x = 3$

Zad.5. Wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x(2 - x)$ dla argumentu $x = 4$ wynosi:

A. -16 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 0

Zad.6. Które zdanie dotyczące funkcji $y = 2x - 4, x \in R$ jest prawdziwe:

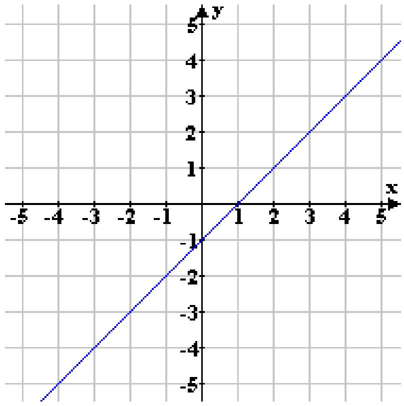
A. Funkcja jest malejąca.

B. Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(2,4)$.

C. Miejscem zerowym tej funkcji jest 2.

D. Funkcja jest stała.

Zad.7. Rysunek przedstawia wykres funkcji liniowej. Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?



A. 4 **B.** 2 **C.** -4 **D.** 2

Zad.8. $y = 5$ jest to funkcja:

A. Rosnąca **B.** Stała **C.** Malejąca **D.** Nie jest to funkcja

Zad.9. Do wykresu funkcji $y = ax, x \in R$, należy punkt $A = (-2,5)$. Wzór tej funkcji to:

A. $y = 5x$

B. $y = -2x$

C. $y = 2\frac{1}{2}x$

D. $y = -2{,}5x$

Zad.10. Funkcja określona jest następująco: każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkujemy sumę jej cyfr. Dziedziną tej funkcji jest:

A. Zbiór wszystkich liczb naturalnych.

B. Zbiór liczb naturalnych większych od 9, a mniejszych od 100.

C. Zbiór liczb wymiernych większych od 9, a mniejszych od 100.

D. Zbiór liczb całkowitych.

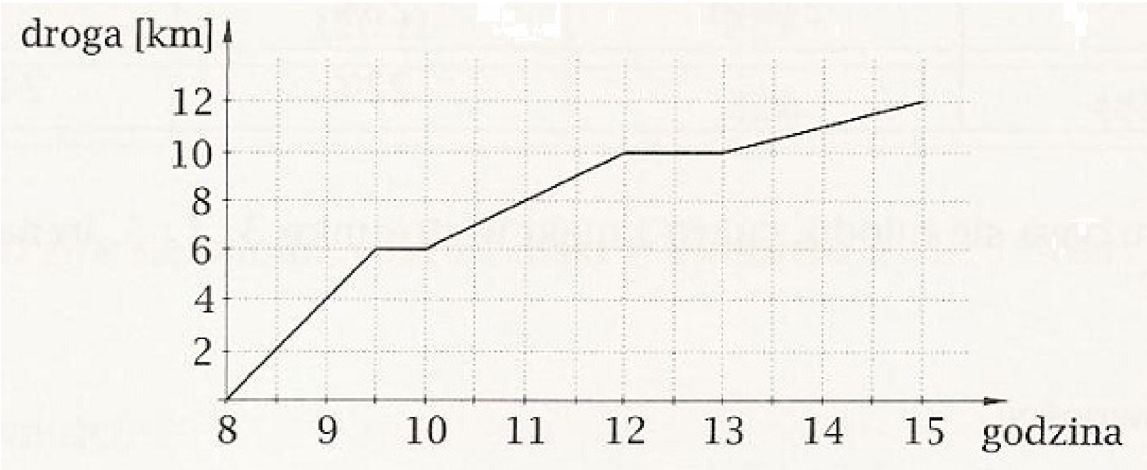
Odpowiedzi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	A	C	B	B	D	B

ZADANIA OTWARTE

Zad.1. Trzech pracowników może oczyścić basen w ciągu 5 godzin. Napisz wzór funkcji określającej zależność liczby pracowników (y) od liczby godzin pracy (x). Podaj współczynnik proporcjonalności tej funkcji.

Zad.2. Wykres przedstawia odległość, jaką pokonała Małgosia w zależności od czasu.



Na podstawie wykresu uzupełnij poniższy tekst.

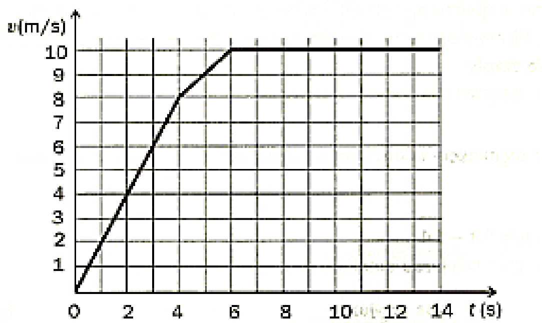
Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła…

Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie…

Pierwsze 8 km pokonała w czasie…

Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością…

Zad.3. Wykres przedstawia zależność szybkości od czasu w pewnym ruchu.



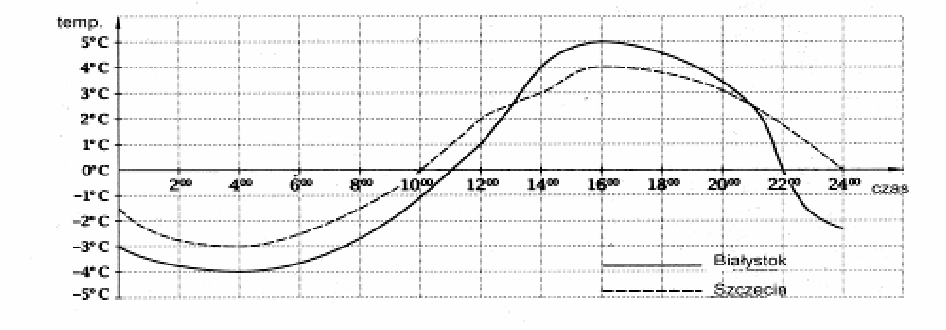
Odpowiedz na pytania:

Kiedy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a kiedy jednostajnym?

Jaką drogę przebyło ciało między 6 a 8 sekundą ruchu?

Jaka była maksymalna szybkość tego ciała?

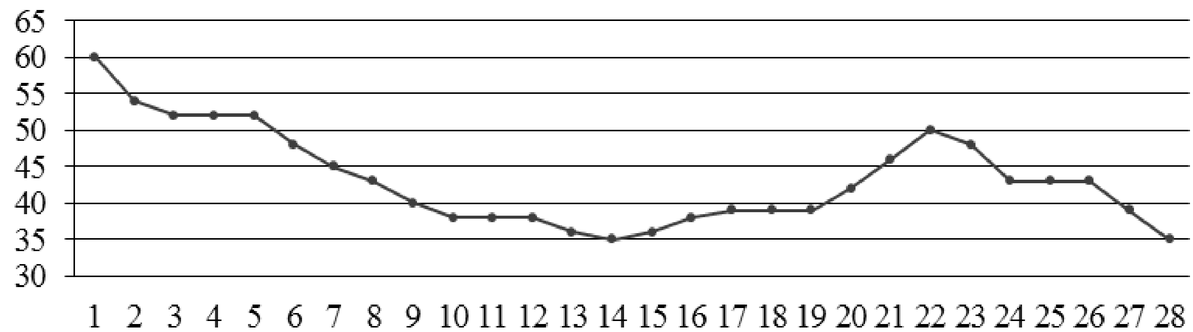
Zad.4. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy zmiany temperatury odnotowanej tego samego dnia w Białymstoku i Szczecinie.



Jaką temperaturę pokazywał termometr w obu miastach o 12^{00}?
O której godzinie temperatura w tych miastach wynosiła 0^{o}C?
W jakich godzinach temperatura w Białymstoku była ujemna?
O której godzinie temperatura w obu miastach była taka sama?
W jakich godzinach w Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie?
Jaka była najwyższa temperatura w Białymstoku, a jaka w Szczecinie? O której to było godzinie?
Jaka temperatura była w Białymstoku, gdy w Szczecinie były 3^{o}C?

Zad.5. Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.

Ceny akcji firmy Zysk & Ryzyko w lutym (zł)



a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

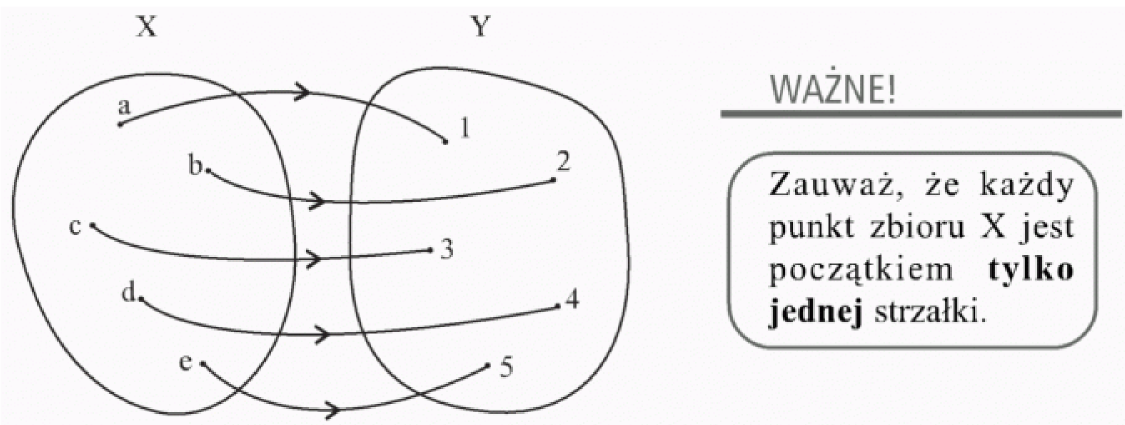
b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	$y = \frac{15}{x}$, $x \in R_+$, $a = 15$
2	Przez pierwszą godzinę marszu Małgosia szła 4 km. Pierwszy odpoczynek zorganizowała o godzinie 9^{30}. Pierwsze 8 km pokonała w czasie 3 godzin. Przez ostatnie dwie godziny Małgosia szła z prędkością 1 km/h.
3	a) Ciało poruszało się ruchem przyspieszonym w pierwszych czterech sekundach ruchu oraz od czwartej do szóstej sekundy ruchu – z innym przyspieszeniem. Z ruchem jednostajnym mamy do czynienia od szóstej do czternastej sekundy ruchu. b) $s = 10\frac{m}{s} \cdot 2s = 20m$. c) Maksymalna szybkość, którą osiągnęło to ciało, wynosi $10\frac{m}{s}$.
4	a) O godzinie 12^{00} w Szczecinie były 2°C, a w Białymstoku 1°C. b) 0°C w Białymstoku było o godzinie 11^{00}, a w Szczecinie o 10^{00}. c) W Białymstoku temperatura ujemna była w godzinach 0^{00} – 11^{00}. d) Temperatura w obu miastach była taka sama o godz. 13^{00} i 21^{00}. e) W Białymstoku było cieplej niż w Szczecinie w godzinach 13^{00} – 21^{00}. f) Najwyższa temperatura w Białymstoku wynosiła 5°C (godz. 16^{00}), a w Szczecinie 4°C (również o godz. 16^{00}). g) Gdy w Szczecinie było 3°C, to w Białymstoku było 4°C.
5	a) Wartość akcja spadła w lutym o 25 zł. b) Kupując i sprzedając akcje w ciągu lutego można było na nich zarobić. Aby zysk był możliwie największy (15 zł za akcję), należało kupić akcje 14 lutego, a sprzedać 22 lutego. c) Poniedziałki były: 5, 12, 19, 26 lutego.

2.1 Pojęcie funkcji. Sposoby opisywania funkcji

Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory i pewne przyporządkowanie.



Symbolicznie zapisujemy to jako f: X → Y

Zbiór x nazywamy **dziedziną** funkcji (D_f), a elementy dziedziny nazywamy **argumentami**. Zbiór y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy **wartościami funkcji**.

Zmienną x nazywamy też **zmienną niezależną**, a y **zmienną zależną**.

$\boldsymbol{X = \{a, b, c, d, e\}}$ **– zbiór argumentów (dziedzina funkcji)**

$\boldsymbol{Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$ **– zbiór wartości funkcji**

Bardzo ważne!

Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość (z jednego punktu grafu może wychodzić tylko jedna strzałka).

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h,...

Nasza funkcja f jest ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$ do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

Funkcja f liczbie a przyporządkowuje liczbę 2.

Zapisujemy to tak:

$f(a) = 2$ – czytamy: f od a równa się 2

Liczbie b funkcja f przyporządkowuje liczbę 1, piszemy:

$f(b) = 1$ – czytamy: f od b równa się 1

Liczbie c funkcja f przyporządkowuje liczbę 3, piszemy:

$f(c) = 3$ – czytamy: f od c równa się 3

Liczbie d funkcja f przyporządkowuje liczbę 4, co zapisujemy:

$f(d) = 4$ – czytamy: f od d równa się 4

lub: dla argumentu d wartość funkcji wynosi 4.

Liczbie e funkcja f przyporządkowuje liczbę 5, piszemy:

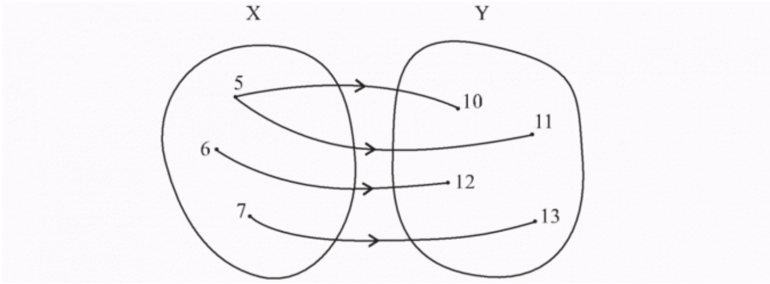
$f(e) = 5$ – czytamy: f od e równa się 5

lub: dla argumentu e wartość funkcji wynosi 5.

Uwaga!

Nie każde przyporządkowanie między dwoma zbiorami nazywa się funkcją.

Funkcją nazywamy tylko takie przyporządkowanie, według którego **każdemu elementowi z dziedziny** (ze zbioru X) przyporządkowany jest **dokładnie jeden element z przeciwdziedziny** (ze zbioru Y).



Rysunek 2-1. Funkcja

Ten graf nie opisuje funkcji, bo liczbie 5 ze zbioru x przyporządkowane zostały dwie liczby: 10 i 11 ze zbioru Y. Zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi zbioru x ma być przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru Y.

Nie ma żadnych zastrzeżeń co do natury zbiorów X i Y. Mogą być to zupełnie dowolne zbiory.

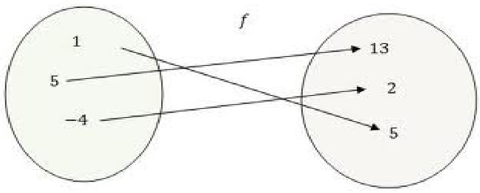
My jednak będziemy zajmować się tylko przypadkiem, gdy zbiory X i Y będą pewnymi podzbiorami liczb rzeczywistych. Innymi słowy, argumentami i wartościami funkcji będą... no właśnie... będą liczby.

SPOSOBY OKREŚLANIA FUNKCJI

Funkcje można określić za pomocą:

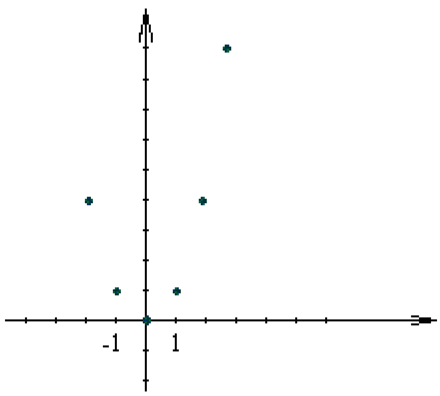
- **grafu**

Przykład 1



Rysunek 2-2. Graf

- **wykresu**



Rysunek 2-3. Wykres

Określenie funkcji za pomocą wykresu jest bardzo wygodne, możemy szybko odczytać wiele różnych informacji o danej funkcji.

wzoru

Przykład 2

$y = x^2$, dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ Używa się również zapisu $f(x) = x^2$ lub $f\colon x \to x^2$.

tabelki

Przykład 3

x	-7	-5	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	5	7	6	5	3	-2

Rysunek 2-4. Tabelka

opisu słownego

Przykład 4

Mamy daną funkcję określoną opisem słownym:

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, wówczas każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby.

–zbioru par uporządkowanych

Przykład 5

$\{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$ Takie określenie funkcji jest niewygodne dla większej ilości argumentów.

Przykład 6

Funkcję „Każdej liczbie ze zbioru $X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}X = \{-4, -3, -2, 0, 1, 3\}$ przypisujemy liczbę o 2 od niej mniejszą", przedstaw w postaci wzoru, tabeli i wykresu.

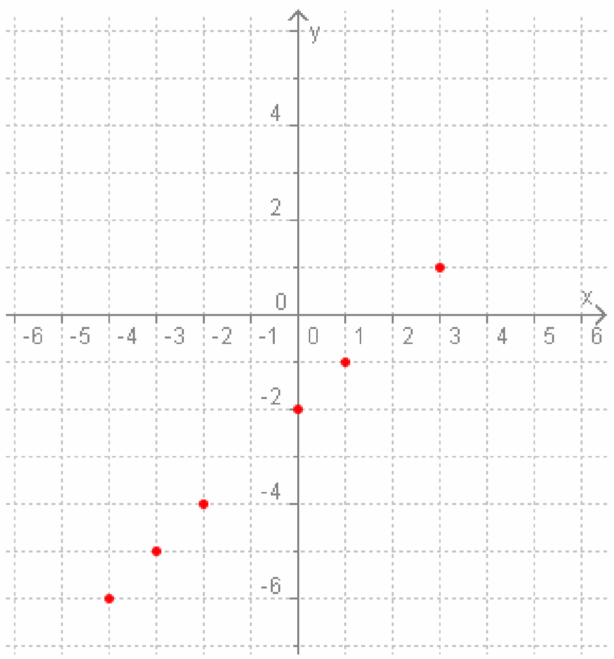
Wzór:

$y = x - 2$

Tabela:

x	–4	–3	–2	0	1	3
y	–6	–5	–4	–2	–1	1

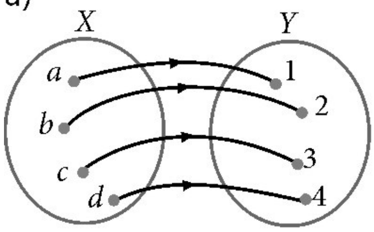
Wykres:



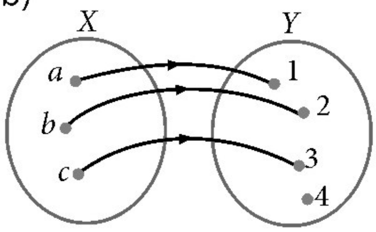
Zadania

2.1.1 Który z grafów określa funkcję:

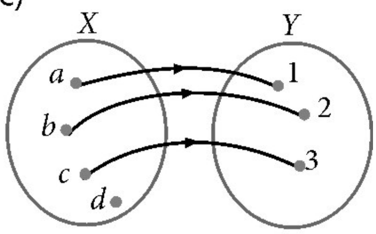
a)



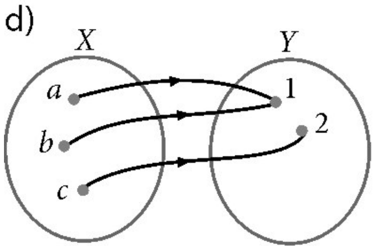
b)



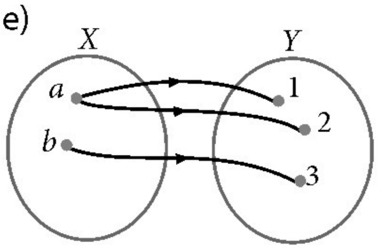
c)



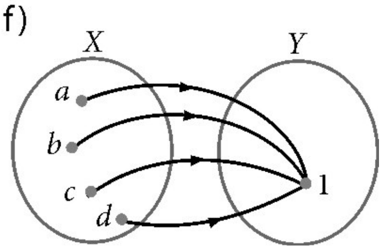
d)



e)



f)



Odpowiedź: a, b, d, f

2.1.2 Sprawdź, czy następujące przyporządkowanie jest funkcją. Jeżeli jest, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji, a jeżeli nie jest, uzasadnij dlaczego.

a) Każdemu zarejestrowanemu samochodowi przyporządkowany jest numer rejestracyjny.

b) Każdej liczbie różnej od 0 przyporządkowano odwrotność tej liczby.

c) Każdemu słowu w języku polskim przyporządkowana jest liczba jego liter.

d) Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest liczba jego boków.

e) Każdemu odcinkowi przyporządkowana jest jego oś symetrii.

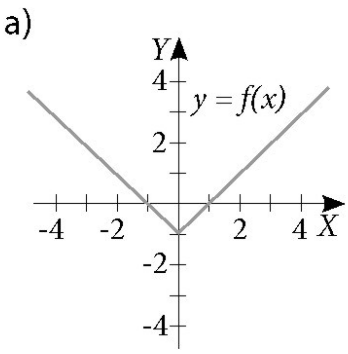
f) Każdej firmie rozpoczynającej działalność gospodarczą przyporządkowany jest numer statystyczny REGON.

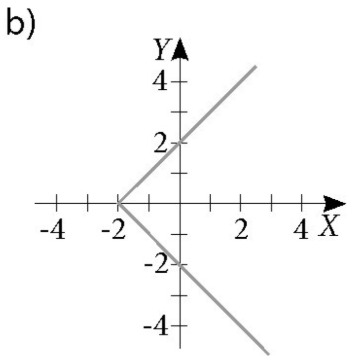
g) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

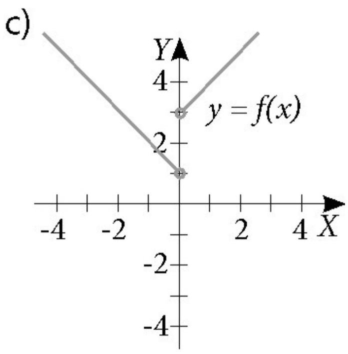
h) Każdej liczbie przyporządkowano kwadrat tej liczby.

Odpowiedź: a, b, c ,d, e, f, g, h – tak

2.1.3 Podaj, które z wykresów przedstawiają funkcję. Odpowiedź uzasadnij.







Odpowiedź: a, c

2.1.4 Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej dwukrotność tej liczby powiększoną o jeden. Opisane słowami przyporządkowanie opisz:

a) wzorem

b) tabelką dla argumentów –3,–2,–1,0,1,2,3

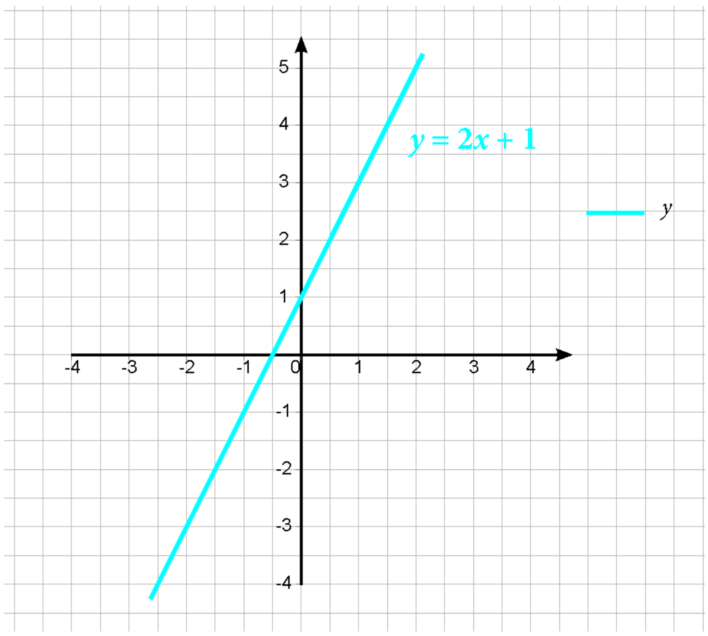
c) wykresem

Odpowiedź: a) $y = 2x + 1$.

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

c)



2.2 Własności funkcji

Teraz nauczę się:

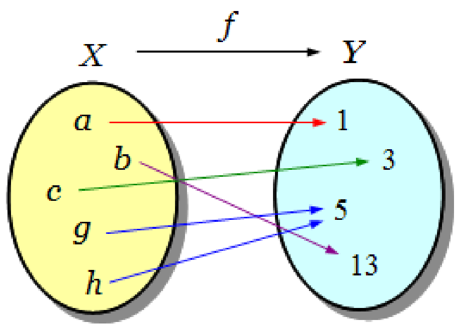
- Obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu;
- Posługiwać się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczania, dla jakiego argumentu przyjmuje daną wartość;
- Wyznaczać dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą.

Przyporządkowanie, będące funkcją, możemy przedstawić na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykres, czyli graficzna interpretacja funkcji liczbowej jako zbioru punktów płaszczyzny. Z wykresu odczytujemy własności funkcji, np. dziedzinę i zbiór wartości.

Dziedzina i wartość funkcji

Wiemy już z poprzedniego działu, że zbiór X, na którym określona jest funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji, a zbiór y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Przykład 1



Rysunek 2-5. Dziedzina i przeciwdziedzina

$X = \{a, b, c, g\ h\}, Y = \{1, 3, 5, 13\}\ Y = \{1, 3, 5, 13\}$

Zbiorem wartości funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$

Przykład 2

Wyznacz dziedzinę funkcji podanej wzorem:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla $x = 2$ w mianowniku wyrażenia będziemy mieli 0, a więc wyrażenie nie będzie miało sensu: $X = D_f = R / \{2\}$

Możemy zapisać dziedzinę inaczej: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Wskazówka:

Dziedziną funkcji danej wzorem jest zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określoną.

b) $f(x)=\sqrt{x-2}$

Rozwiązanie

$x-2\geq 0$

$x\geq 2$

$X=D_f : x\in\langle 2,+\infty\ )$

c) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$

Rozwiązanie

$x+4\rangle 0$

$x\rangle -4$

$X=D_f:(-4,+\infty)$

ZADANIA

2.2.1 Dana jest funkcja:

a) $f(x)=3x+4$

b) $f(x)=2x^2+1$

c) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Oblicz:

$f(0)$, $f(1)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x-1)$, $f(x^2)$

Odpowiedź:

a) $f(0)=4$, $f(1)=7$, $f(\sqrt{2})=4+3\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}+4$, $f(x-1)=3x+1$, $f(x^2)=3x^2+4$

b) $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(\sqrt{2})=7$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x^2}+1$, $f(x-1)=2x^2-4x+3$, $f(x^2)=2x^4+1$

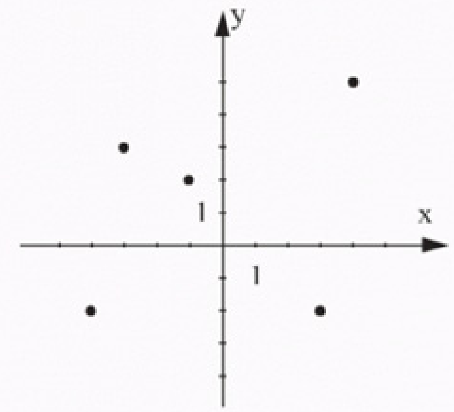
c) $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x+1}$, $f(x-1)=\dfrac{x-1}{x}$, $f(x^2)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

2.2.2 Dla każdej z tych funkcji odczytaj dziedzinę i zbiór wartości:

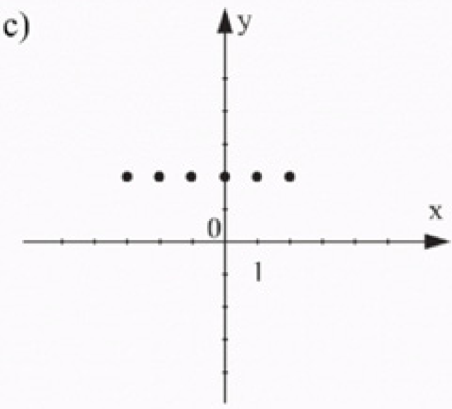
a)

x	-2	-1	0	$1\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$
y	4	3	5	0	$-2\frac{1}{2}$

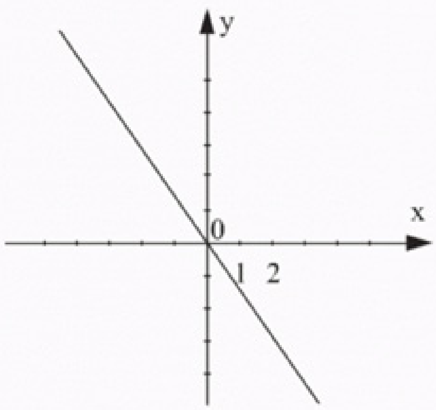
b)



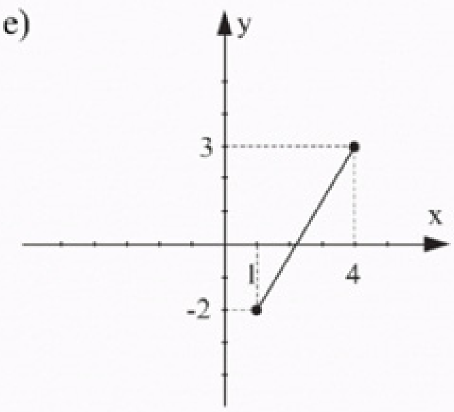
c)



d)



e)



Odpowiedź:

a) $Df = \{-2, -1.\ 0, 1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{3}\}$ $y = \{-2\frac{1}{2}, 0, 3,4,5\}$,

b) $Df = \{-4,-3,-1,3,4\}$ $y = \{-2,2,3,\%\}$,

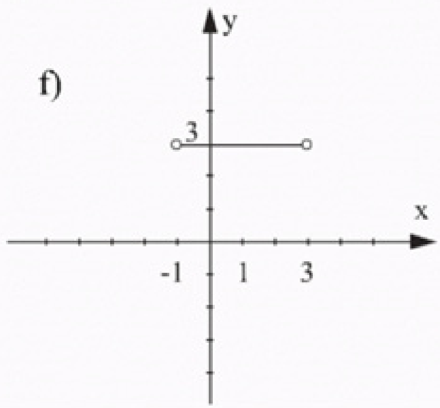
c) $Df = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ $y = \{2\}$,

d) $Df = R$ $y = R$,

e) $Df : x \in <1,4>$ $y \in <-2,3>$,

f) $Df: x \in (-1,3)$ $y = \{3\}$

f)



2.2.3 Funkcja określona jest tabelką:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	–3	3	–1	–2	5	2

a) podaj zbiór argumentów i zbiór wartości funkcji,

b) wymień wszystkie ujemne argumenty tej funkcji,

c) odczytaj wartość dla argumentu $x = 0$ oraz dla argumentu $x = 3$,

d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2?

e) czy punkt (–1,–3) należy do wykresu funkcji?

f) narysuj wykres tej funkcji.

Odpowiedź:

a) $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $Y = \{-3,-2,-1,1,2,3,5\}$

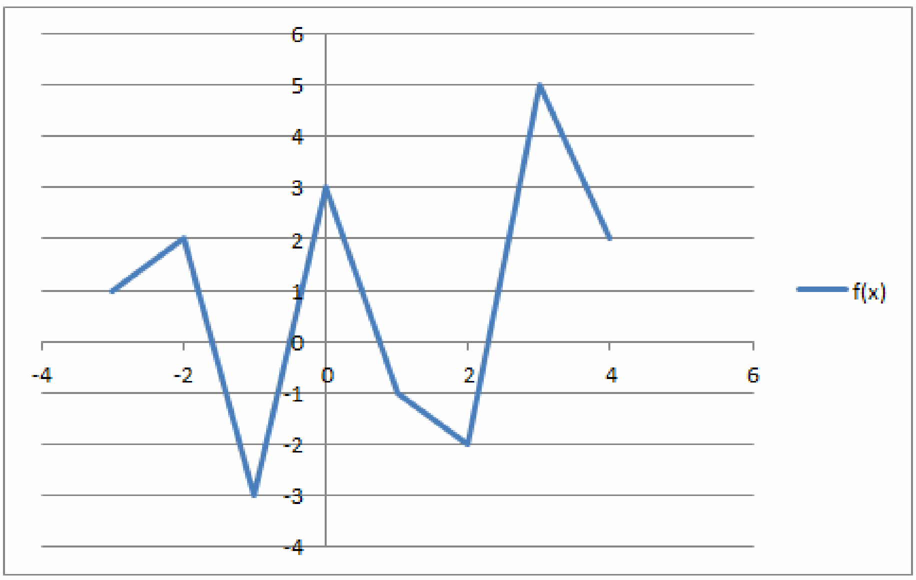
b) $-3,-2,-1$

c) $f(0) = 3, f(3) = 5$

d) $x = 4, x = -2$

e) tak

f)



2.2.4 Podaj dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-3)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 10x + 25}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x+1}$

h) $f(x) = \sqrt{x+3} - \frac{x}{x+4} - \frac{1}{x-1}$

i) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x+3}$

j) $f(x) = -3x^2 + 7x - 8$

k) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$

l) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x-4}{x+2}$

m) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{4}{x^2}$

n) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x-2}}$

o) $f(x) = \frac{3-2x}{\sqrt{2-x}} + \frac{x+6}{\sqrt{x+4}}$

p) $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-16}$

Odpowiedź:

a) R,

b) R/ {–1, 3},

c) R/ {–3, 3},

d) R,

e) R,

f) $x \in (-\infty, 4)$,

g) $x \in \langle 1, +\infty)$,

h) $x \in \langle -3, 1) \cup (1, +\infty)$,

i) R\ {–3, 1},

j) R,

k) R,

l) R\ {–2,0},

m) R\ {–3,0,3},

n) X ∈ $(2, +\infty) \in (2, +\infty)$,

o) $x \in\ \in (-4,2)$,

p) $x \in (4,+\infty)$

Miejsca zerowe

Argument x, dla którego $f(x) = 0$, nazywamy **miejscem zerowym** funkcji f.

Przykład 3

Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{x-1}}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$

Rozwiązania

$$D_f = R$$

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ lub } x + 1 = 0$$

zatem $x = 1$ lub $x = -1$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji f to $x = 1$ oraz $x = -1$

a) $D_f = (1,+\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right) = 0$

$\sqrt{2} - x = 0$ lub $\sqrt{2} + x = 0$

$x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in D_f \quad -\sqrt{2} \notin D_f$

Miejscem zerowym funkcji *f* jest $x = \sqrt{2}$

a) $D_f : x \in R / \{4 \}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ \ + 2 = 0$

$x = -2 \in D_f$

Miejscem zerowym funkcji jest $x = -2$

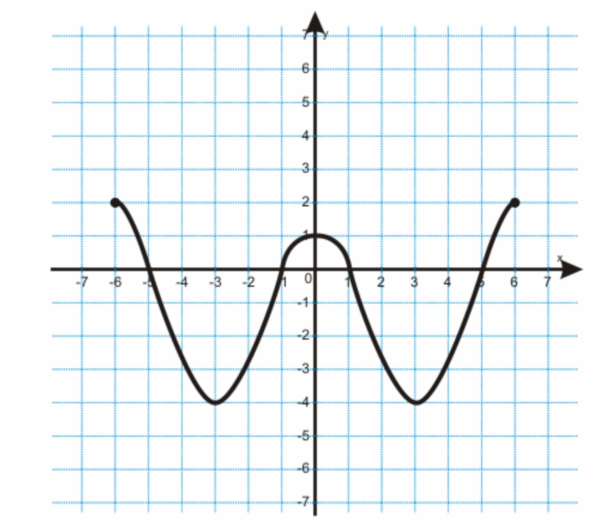
Przykład 4

Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe, dziedzinę i przeciwdziedzinę.

Dziedzina: $D_f = \langle -6; 6 \rangle$

Zbiór wartości: $Z_w = \langle -4; 2 \rangle$

Miejsca zerowe: $x = -5, x = -1, x = 1, x = 5$



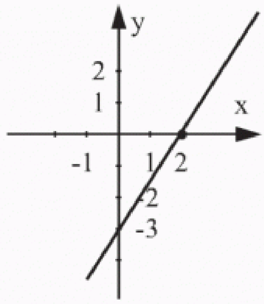
ZADANIA

2.2.5 Wypisz, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

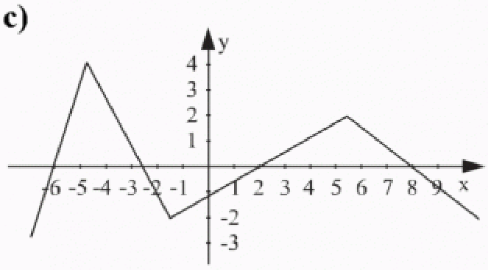
a)

x	-5	0	1	5
y	2	3	4	0

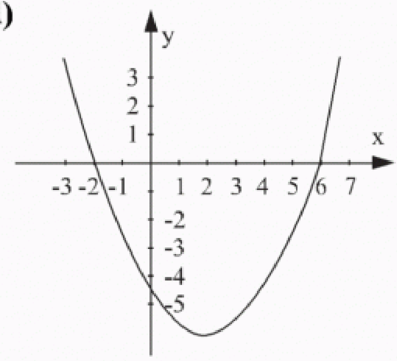
b)



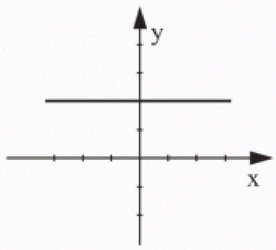
c)



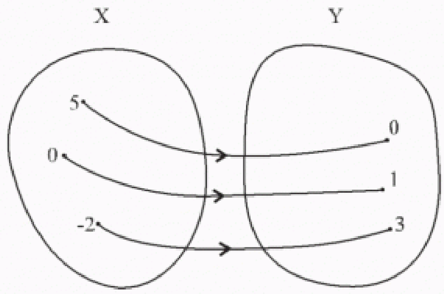
d)



e)



f)



Odpowiedź:

a) $x = 5$, b) $x = 2$, c) $-6; -2,5; 2;8$,

d) $2,6$, e) brak miejsc zerowych, f) $x = 5$

2.2.6 Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 3}$ d) $f(x) = \dfrac{1 + 2x}{4x - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - 2}}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2}}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ h) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

i) $f(x) = \sqrt{x + 9}$ j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 3}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x}$ l) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$

m) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 9}$

Odpowiedź:

a) Df R/–2; $x = 2$,
b) Df R/2; $x = -2$,
c) Df R/3; brak miejsc zerowych,
d) Df R oprócz 1/2; $x = -1/2$,
e) Df (2,+∞); brak miejsc zerowych,
f) Df (–2;+∞) $x = 0$,
g) Df R/{–3,3}; brak miejsc zerowych,
h) Df R/{–2,2}, brak miejsc zerowych,
i) Df<–9,+∞) ; $f(-9) = 0$,
j) Df<0,3) suma (3,+∞); $f(0) = 0$,
k) Df<3,+∞); $f(3) = 0$,
l) Df (–3,+∞); $f(0) = 0$,
m) Df = R; $f(-1) = 0$

2.3 Monotoniczność funkcji

Monotoniczność jest to pewna cecha funkcji, która mówi nam, co się dzieje z wartościami funkcji podczas zwiększania wartości liczbowych argumentów funkcji. Z tego względu wyróżniamy następujące funkcje:

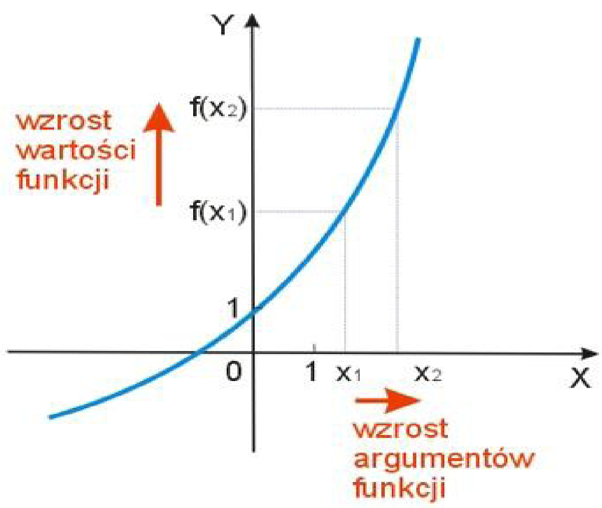
– rosnące
– malejące
– nierosnące
– niemalejące

Warto tu jeszcze wspomnieć o funkcji stałej, choć nie mówimy o niej, jak o funkcji monotonicznej.

Funkcja rosnąca

Funkcja *f* jest **rosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

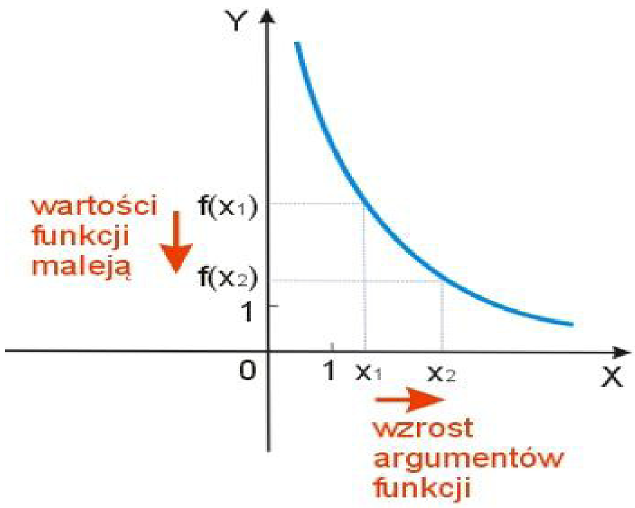


Cechą charakterystyczną wykresu funkcji rosnącej jest to, że zdaje się wznosić ku górze.

Funkcja malejąca

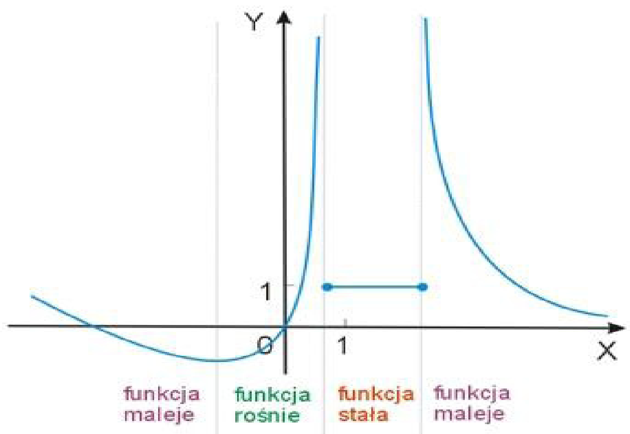
Funkcja f jest **malejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Cechą charakterystyczną wykresu funkcji malejącej jest to, że zdaje się opadać w dół.

Czy funkcja może być jednocześnie malejąca i rosnąca w różnych przedziałach liczbowych? Oczywiście, że tak. Poniżej przykład takiej funkcji wraz z określonymi przedziałami, w których funkcja rośnie i maleje oraz jest stała.

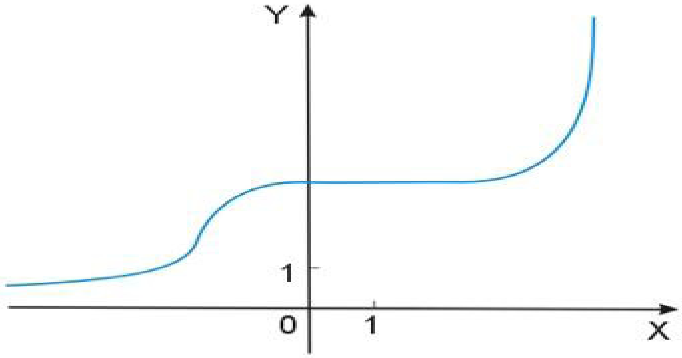


Funkcja niemalejąca

Funkcja f jest **niemalejąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Zatem definicja funkcji niemalejącej przypomina definicję funkcji rosnącej, z tym że w przypadku funkcji niemalejącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała.

Oto ilustracja funkcji niemalejącej.

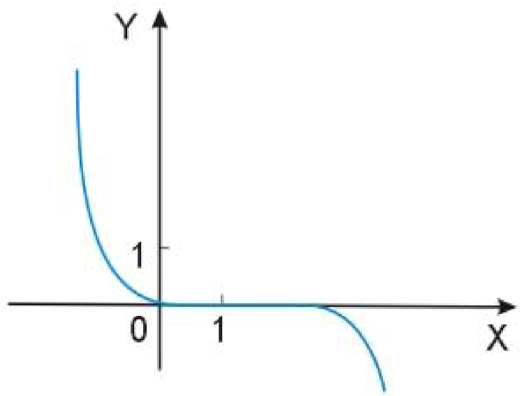


Funkcja nierosnąca

Funkcja f jest **nierosnąca** w zbiorze A, gdy dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru prawdziwa jest implikacja:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

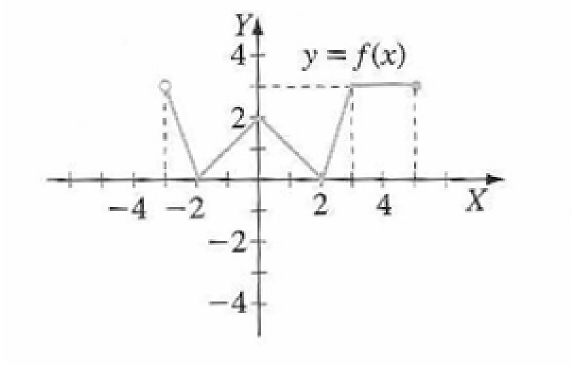
Zatem definicja funkcji nierosnącej przypomina definicję funkcji malejącej, z tym że w przypadku funkcji nierosnącej mamy nieostrą nierówność. Dopuszczamy więc przedziały, w których funkcja jest stała. Oto ilustracja funkcji nierosnącej.

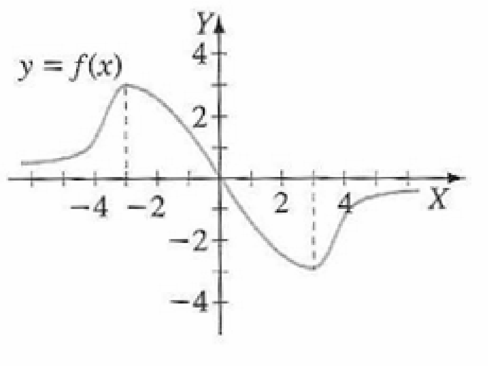


Uwaga: Symbole 〈 , 〉 oznaczają tak zwane **nierówności mocne** (ostre), symbole $\leq, \geq$ oznaczają tak zwane **nierówności słabe** (nieostre).

ZADANIE

2.3.1 Na podstawie wykresu funkcji odczytaj przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca i stała.





Odpowiedź:

a) rosnąca $x \in (-2;0) \cup (2;3)$, malejąca $x \in (-3;-2) \cup (0;2)$, stała $x \in (3;4)$

b) rosnąca $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$, malejąca $x \in (-3;3)$

2.4 Sporządzanie wykresów funkcji

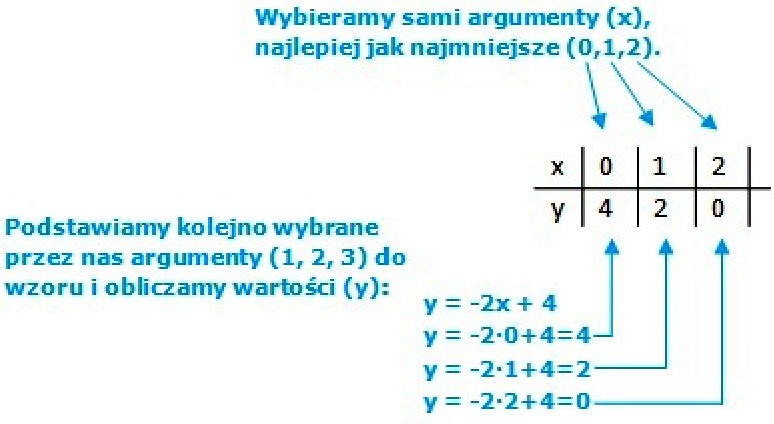
Teraz nauczę się:

Szkicować wykres funkcji za pomocą wzoru lub tabeli;

Odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

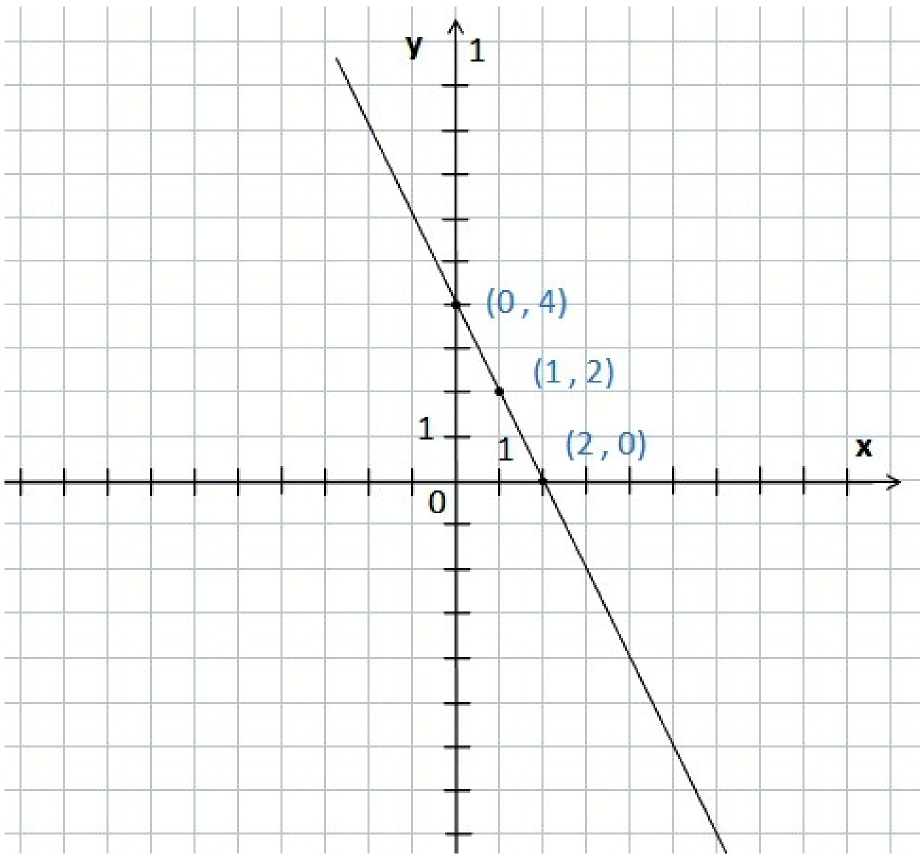
Aby narysować wykres funkcji, należy wykonać dwie następujące po sobie czynności. Powstawanie wykresu funkcji $y = -2x + 4$ przedstawimy na przykładzie: I. Za pomocą wzoru określamy kilka punktów należących do funkcji (minimum 3). W tym celu wybieramy wartości x, podstawiamy je do wzoru i obliczamy wartości y. Wartości x i y pomocniczo możemy zapisywać w tabeli:

x			
y			



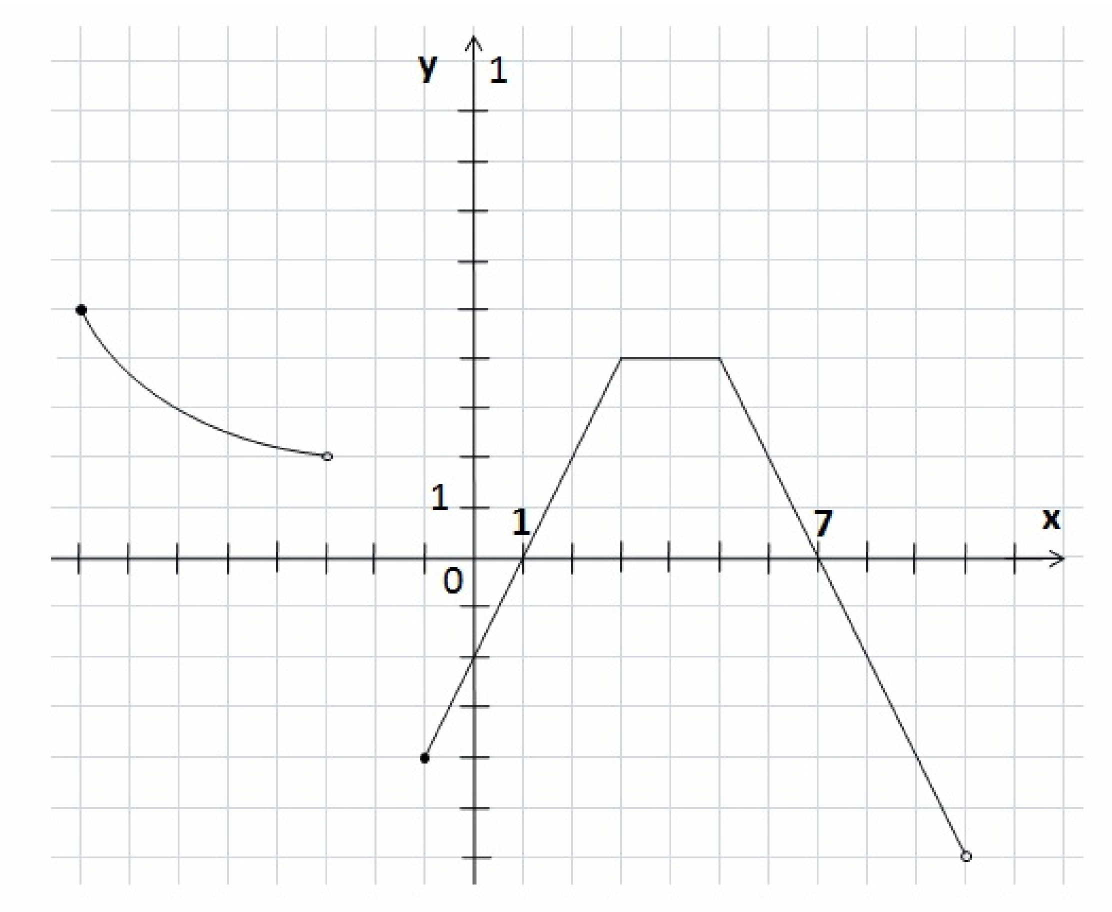
Otrzymujemy więc punkty: (0,4), (1,2),(2,0)

II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je prostą.



Przykład 1

Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:



__Uwaga:__ Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{min}$ lub y_{min}. Maksymalną wartość oznaczamy: $f(x)_{max}$ lub y_{max}. Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna – punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości wypada podać argument (x) lub przedział argumentów, dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.

Odpowiedzi:

Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0X): Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu, to dwa przedziały, zgodne z zakresami liczb widocznymi na powyższym rysunku: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$\boldsymbol{D = \langle -8;\ -3) \cup \langle -1;\ 10)}$

Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi 0Y):

Zbiór wartości to jeden przedział. Powyżej widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$\boldsymbol{Z_w = (-6;\ 5\rangle}$

Monotoniczność

Funkcja malejąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam, gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy –8), nawias jest trójkątny, tam, gdzie jest pusta (–3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam, gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$\boldsymbol{f(x)} \searrow \boldsymbol{f(x)} \searrow$ w przedziałach $\langle \mathbf{-8;\ -3}) \cup \langle \mathbf{5;\ 10})$

Funkcja rosnąca

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca. Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3 nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt, w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)} \nearrow \boldsymbol{f(x)} \nearrow$ w przedziale $\langle \mathbf{-1;\ 3} \rangle$

Funkcja stała

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$\boldsymbol{f(x)}_{\rightarrow}$ w przedziale $\langle \mathbf{3, 5} \rangle$

Miejsce zerowe:

$\boldsymbol{x_1 = 1} \vee \boldsymbol{x_2 = 7}$

Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych Punkty przecięcia z osią $0X$: $(1{,}0)$; $(7{,}0)$
Punkt przecięcia z osią $0Y$: $(0, -2)$

Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia/ ujemna

Przy liczbie –8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie –3 nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX.

$\boldsymbol{f(x)} > 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-8;\ -3}) \cup (\mathbf{1; 7})$

Przy liczbie –1 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów leżących na osi OX. Przy liczbie 10 nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta.

$\boldsymbol{f(x)} < 0$ dla $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-1;\ 1}) \cup (\mathbf{7; 10})$

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Dla wartości –5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.
$\boldsymbol{f(x) = -5}$ dla $\boldsymbol{x = 8,5}$

Dla wartości –2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 7. Rozwiązaniem jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$\boldsymbol{f(x) = -2}$ dla $\boldsymbol{x \in \{0, 7\}}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argument –7, 3. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i dwuelementowego zbioru.

$\boldsymbol{f(x) = 4}$ dla $\boldsymbol{x \in \langle 3, 5\rangle \cup \{-7, 3\}}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$\boldsymbol{f(x) = 6}$ Brak argumentów

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2, 4), B = (6, 2)$

Punkt A nie należy do wykresu funkcji. Punkt B należy do wykresu funkcji.

Maksimum i minimum

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka.

Minimum funkcji: brak

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego –8.

Maksimum funkcji $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

ZADANIA

2.4.1 Uzupełnij tabelkę funkcji $f : R \to R$ i narysuj jej wykres. Zadanie wykonaj również w arkuszu kalkulacyjnym.

x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
y	...								...

a) $y = x$

b) $y = \frac{1}{2}x+1$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = 3x+5$

e) $y = -x + 3$

f) $y = x\frac{3}{4}x - 2$

g) $y = |x|$

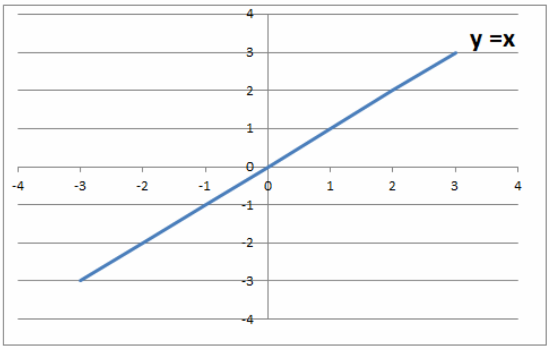
h) $y = |x + 2|$

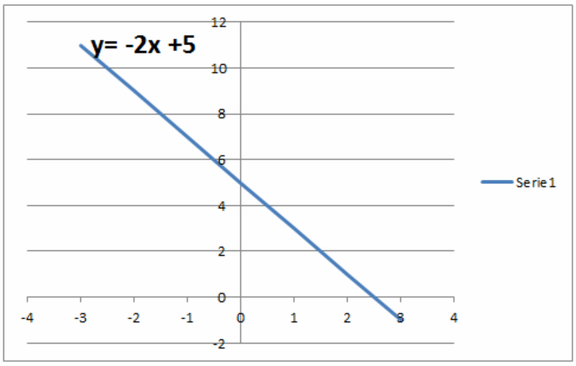
i) $y = |x| - 1$

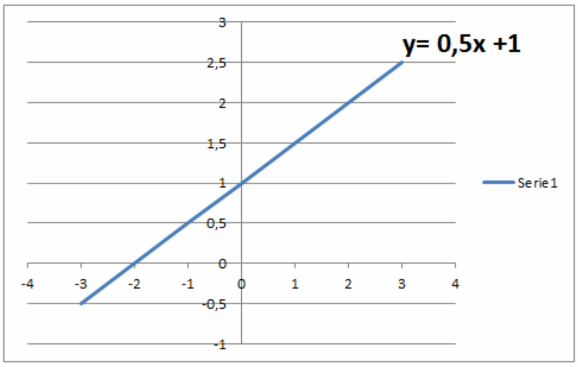
j) $y = \frac{1}{2}|x|$

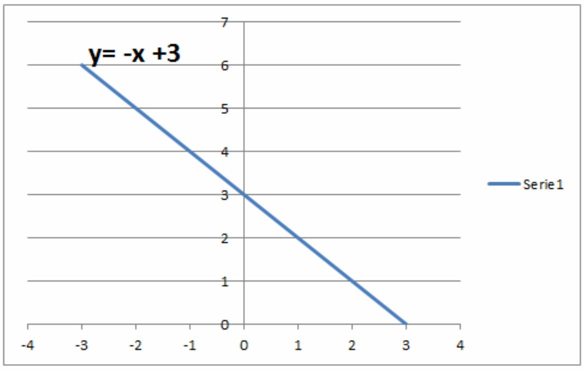
k) $y = 3|x|$

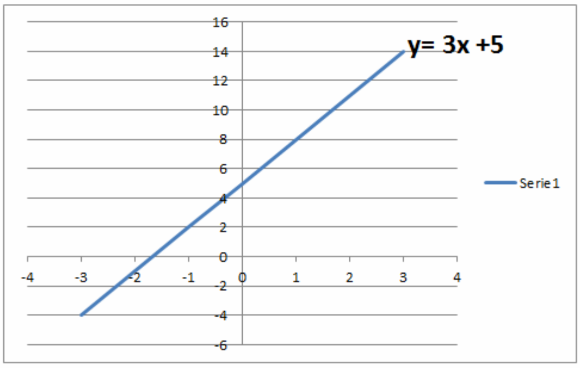
Odpowiedź:

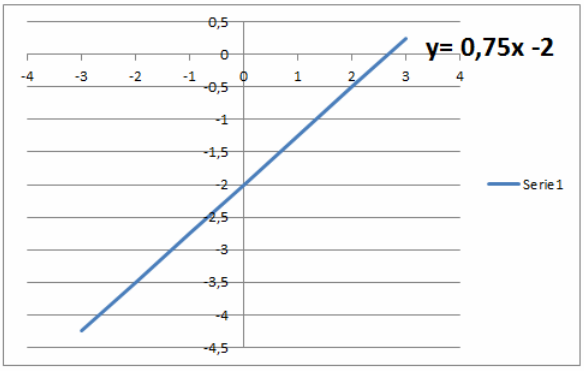

y =x

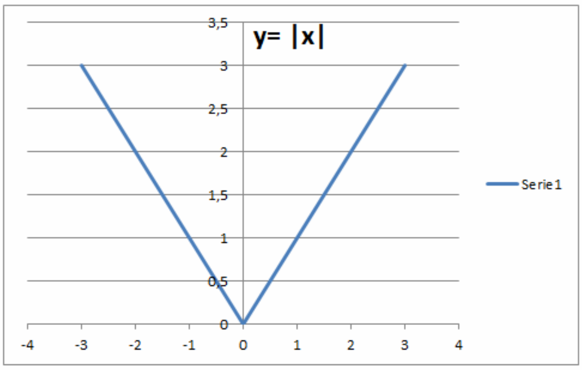

y= -2x +5
Serie1

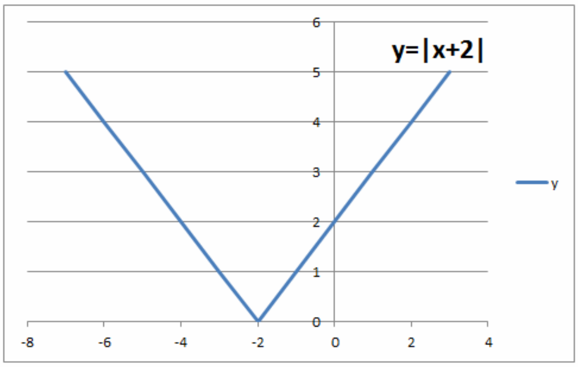

y= 0,5x +1
Serie1

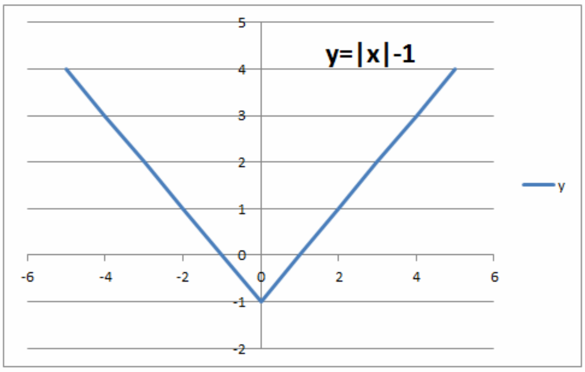

y= -x +3
Serie1

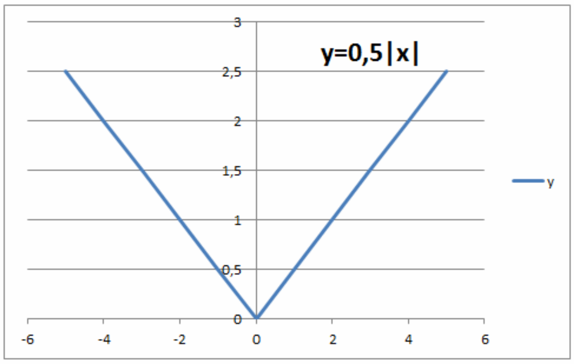

y= 3x +5
Serie1


y= 0,75x -2
Serie1


y= |x|
Serie1

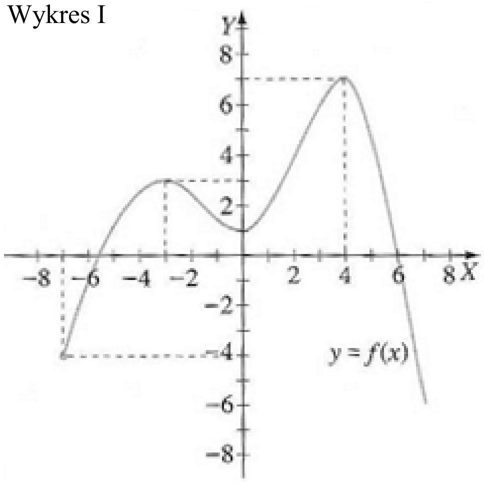

y=|x+2|
y



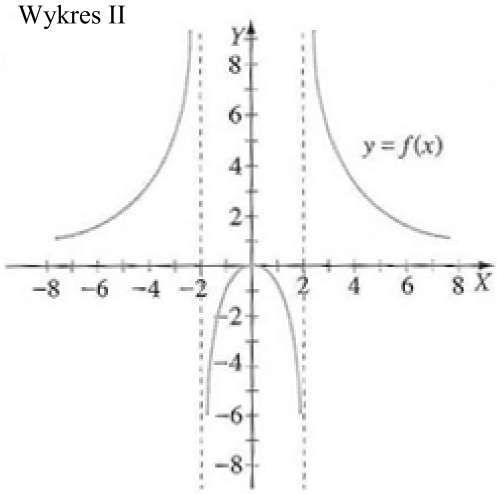


2.4.2 Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ:

Wykres I



Wykres II



a) dziedzinę funkcji,
b) zbiór wartości funkcji,
c) miejsca zerowe funkcji,
d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
e) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała,
f) wartość najmniejszą i największą funkcji (o ile istnieją).

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in \langle -7; +\infty)$

b) $y \in (-\infty; 7)$

c) $x = -5{,}5;\ x = 6$

d) $y > 0$ *dla* $x \in (-5{,}5; 6)$ $y < 0$ *dla* $x \in (-\infty; -5{,}5) \cup (6; +\infty)$

e) f *rosnąca dla* $x \in \langle -7; 4\rangle$ f *malejąca dla* $x \in \langle 4; +\infty)$

f) $y_{max} = 7$ *dla* $x = 4$ y_{min} *nie istnieje*

Wykres II

a) $x \in (-\infty; -2) \cup\cup(-2;2) \cup (2;+\infty)$

b) $y \in (-\infty;+\infty)$

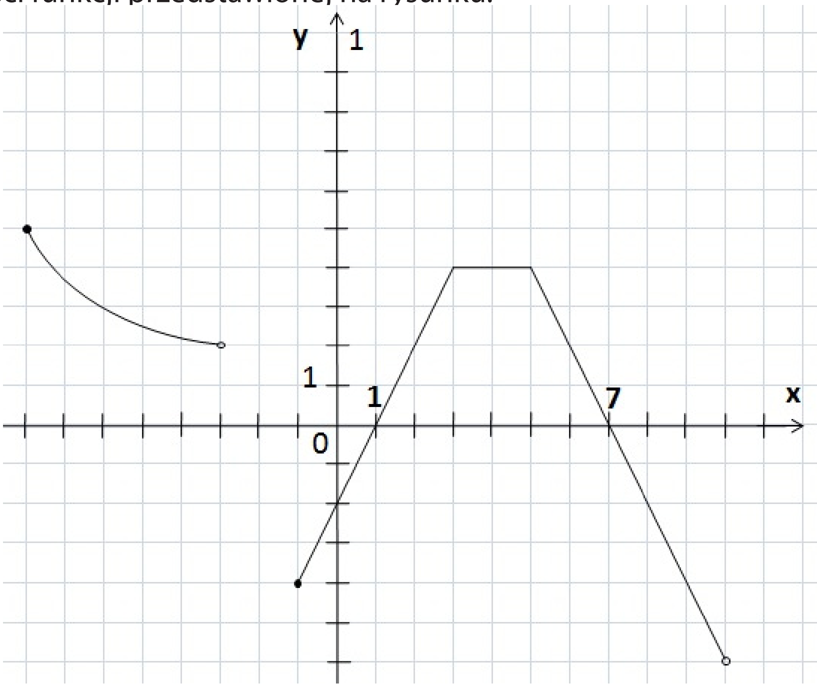
c) $x = 0$

d) $y > 0$ *dla* $x \in (-\infty; -2) \cup (2;+\infty)$ $y < 0$ *dla* $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

e) *f rosnąca dla* $x \in (-\infty; -2) \cup (-2;0)$ *f malejąca dla* $x \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$

f) y_{max} *nie istnieje* y_{min} *nie istnieje*

2.4.3 Określ własności funkcji przedstawionej na rysunku:



a) Dziedzina funkcji
b) Zbiór wartości
c) Przedziały monotoniczności
d) Miejsce zerowe
e) Punkty przecięcia z osiami
f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$
g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$
h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość:
$f(x) = 5, f(x) = -2, f(x) = 4, f(x) = 6$
i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x) \leftarrow 2$; $f(x) \le -2$
j) Sprawdź, czy dane punkty A = (−2, 4), B = (6, 2) należą do wykresu funkcji *f*
k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji

Odpowiedź:

a) $x \in$ <−8; −3) ∪ <−1; 10),

b) $y \in$ (−6;5>,

c) f rosnąca dla $x \in$ <–1;3>, f malejąca dla $x \in$ <–8;–3) ∪ <5; 10), f stała dla $x \in$ <3;5>,

d) $x = 1$, $x = 7$,

e) $x = 0$ $y = -2$; $y = 0$ $x = 1$ i $x = 7$,

f) funkcja jest dodatnia dla $x \in$ <–8;–3) ∪ (1; 7),

g) funkcja jest ujemna dla $x \in$ <–1;1) ∪ (7; 10),

h) $f(x) = 5$ dla $x = -8$, $f(x) = -2$ dla $x = 0$, $f(x) = 4$ dla $x \in$ <3;5>, $f(x) = 6$ nie ma takich x,

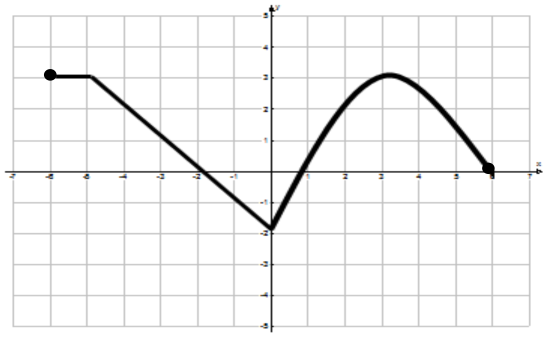
i) $f(x) < -2$ dla $x \in$ <–1;0) ∪ (8; 10), $f(x) \leq -2$ dla $x \in$ <–1;0> ∪ <8; 10),

j) A nie należy, B $\in f$,

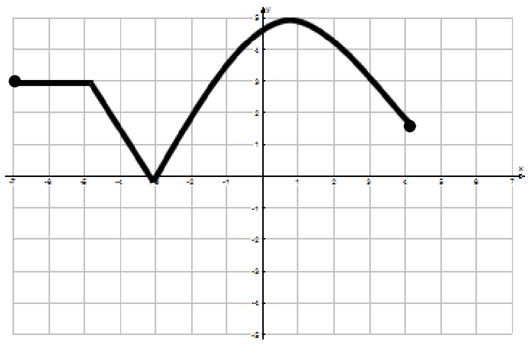
k) $y_{max} = 5$ dla $x = -8$, y_{min} nie istnieje

2.4.4 Zbadaj własności funkcji na podstawie wykresu:

Wykres I



Wykres II



a) Dziedzina funkcji

b) Zbiór wartości

c) Przedziały monotoniczności

d) Miejsce zerowe

e) Punkty przecięcia z osiami

f) Argumenty, dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$

g) Argumenty, dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$

h) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość: $f(x) = 3$, $f(x) = 1$

i) Argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność: $f(x)\langle 3$

j) Sprawdź, czy dane punkty A = (–4, 2), B = (5, 1) należą do wykresu funkcji f

k) Wyznacz minimum i maksimum funkcji

Odpowiedź:

Wykres I

a) $x \in$ <–6,6>

b) $y \in$ <–2,3>

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in$ <3,1> f jest malejąca dla $x \in$ <–5,0> ∪ <3; 6)

f jest stała dla $x \in$ <–6,–5>

d) $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 6\}$

e) (–2,0); $(\frac{1}{2}, 0)$; (6,0); (0,–2)

f) $x \in$ <–6,–2) ∪ <$\frac{1}{2}$; 6)

g) $x \in (-2, \frac{1}{2})$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-6,-5> \cup <\{3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3, 1\}$

i) $x \in (-5,3)$

j) tak

k) $y_{max} = 3$, $y_{min} = -2$

Wykres II

a) $x \in <-7,4>$

b) $y \in <0,5>$

c) funkcja jest rosnąca dla $x \in <0,\frac{1}{2}>$ f jest malejąca dla $x \in <-5,0) \cup <\frac{1}{2}; 4>$
f jest stała dla $x \in <-7,-5>$

d) $x \in \{-3\}$

e) $(3,0)$; $(0;4\frac{1}{2})$

f) $x \in <-7,-3) \cup (-3; 4)$

g) $x \in \{\emptyset\}$

h) $f(x) = 3$ dla $x \in <-7,-5> \cup <\{-1\frac{1}{2}, 3\}$; $f(x) = 1$ dla $x = \{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\}$

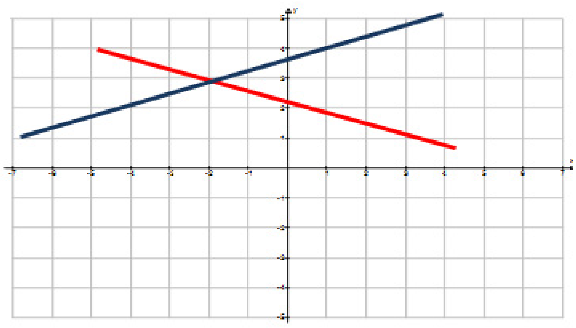
i) $x \in (-5,-1\frac{1}{2}) \cup (3;4)$

j) nie

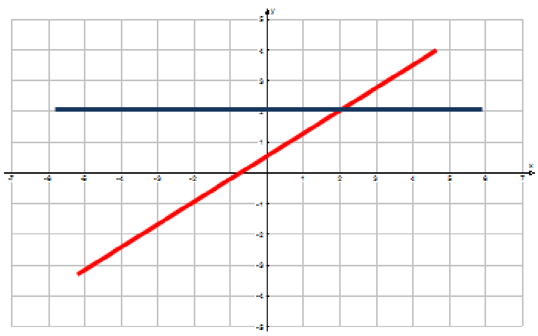
k) $y_{max} = 5$, $y_{min} = 0$

2.4.5 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) = g(x)$.

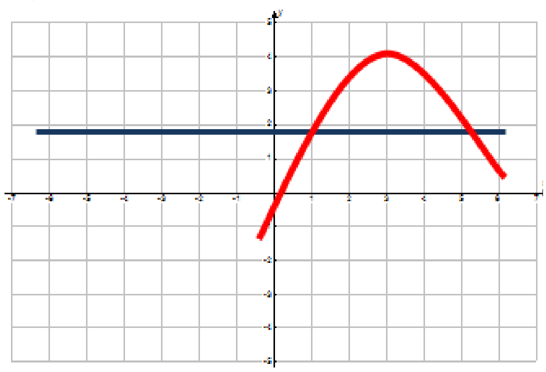
a)



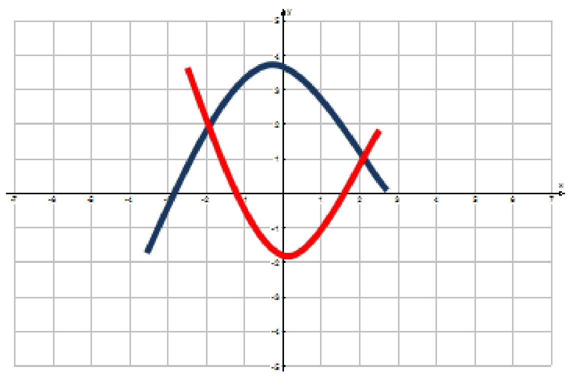
b)



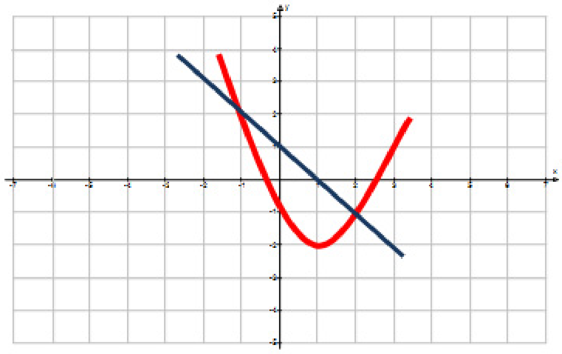
c)



d)



e)

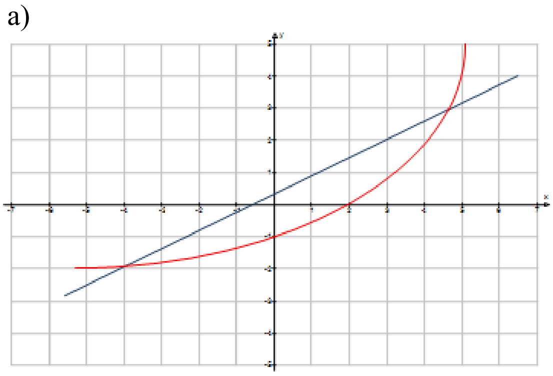


Odpowiedź:

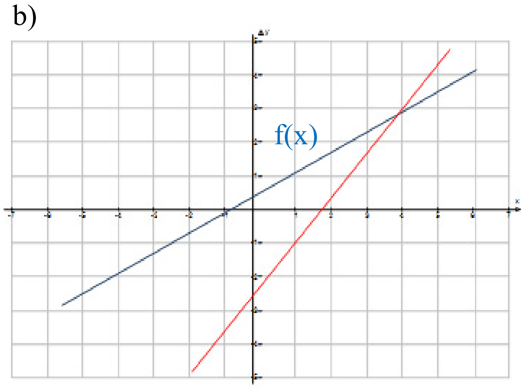
a) $(-2\frac{1}{2},1)$,
b) (2,2),
c) (1,2); (5,2),
d) (−2,2); (2,1),
e) (−1,2); (2,−1)

2.4.6 Odczytaj z poniższych wykresów rozwiązania równania $f(x) \geq g(x)$ oraz $f(x) < g(x)$

a)



b)



Odpowiedź:

a) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in <-4,4\frac{1}{2}>$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in <-\infty,-4) \cup (4\frac{1}{2},+\infty)$
b) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in <-\infty,4>$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (4,+\infty)$
c) $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in <-\infty,-1> \cup <2,5>$; $f(x) < g(x)$ dla $x \in (-1,2) \cup (5,+\infty)$

2.5 Przekształcanie wykresów funkcji

Teraz nauczę się:

Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x+a)$, $y = -f(x)$, $y = -f(x)$;

Narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

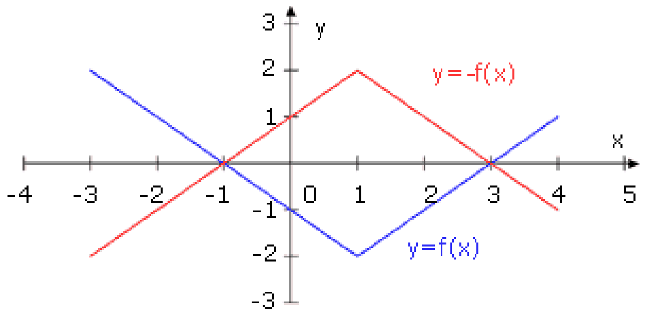
Wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

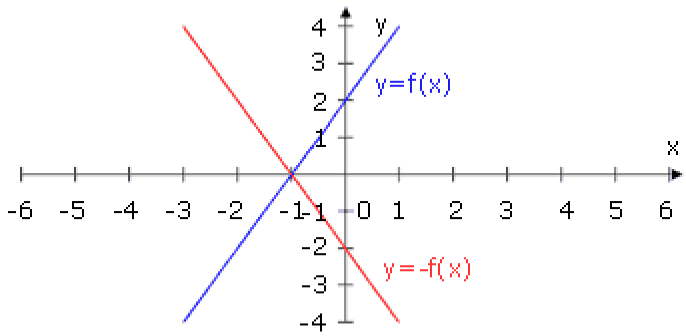
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = |f(x)|$,

$x \rightarrow y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

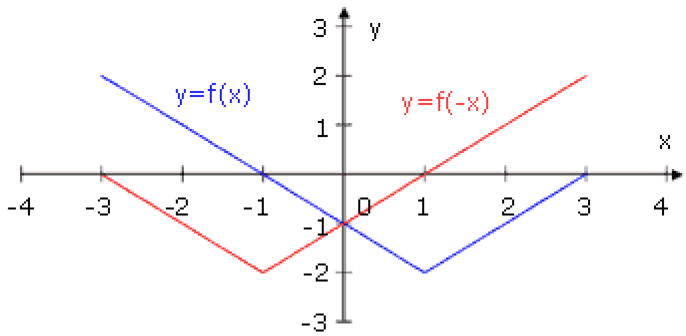
Przykład





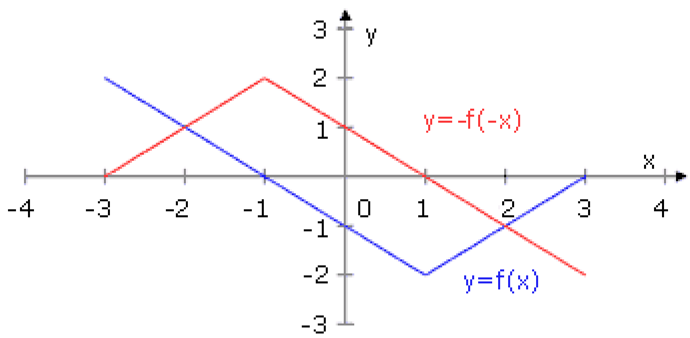
$x \rightarrow y = f(-x)$

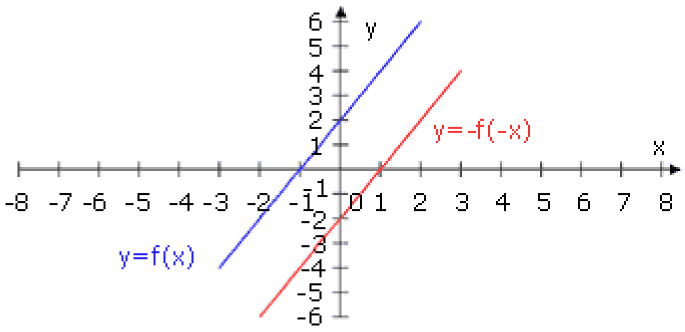
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

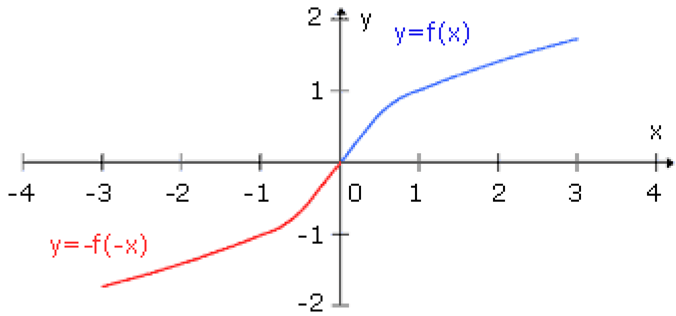


$x \rightarrow y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$.

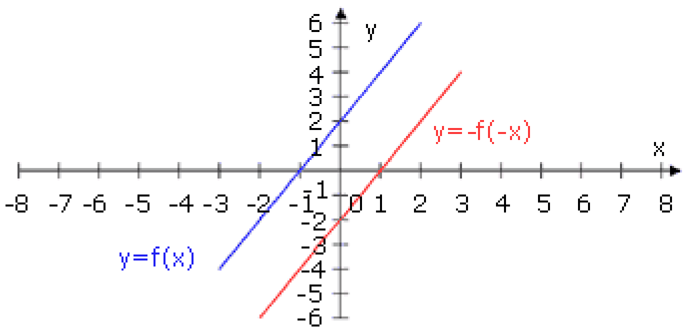






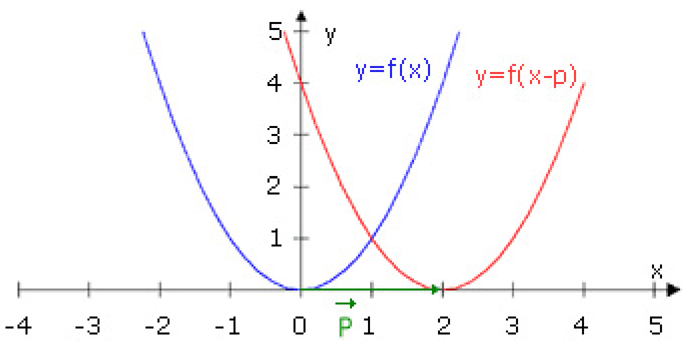
$x \to y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o $|q|$ jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor $[0, q]$).



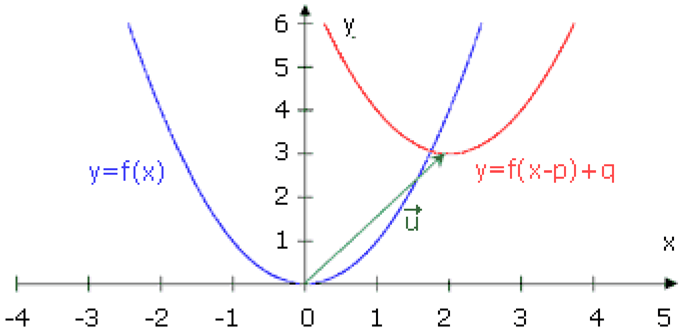
$x \to y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o wektor $[p, 0]$.



$x \rightarrow y = f(x-p)+q$

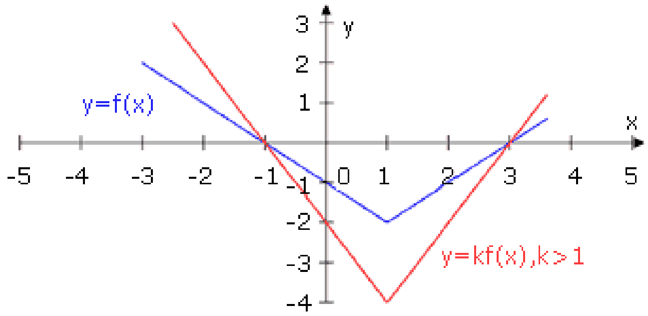
Wykres funkcji $y = f(x-p)+q$ otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

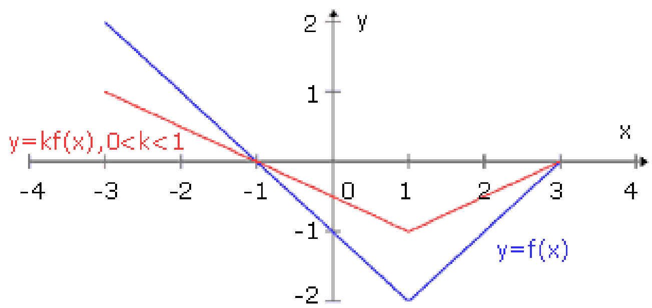


$x \rightarrow y = k \cdot f(x)$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ powstaje z wykresu $y = f(x)$ w wyniku k-krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.

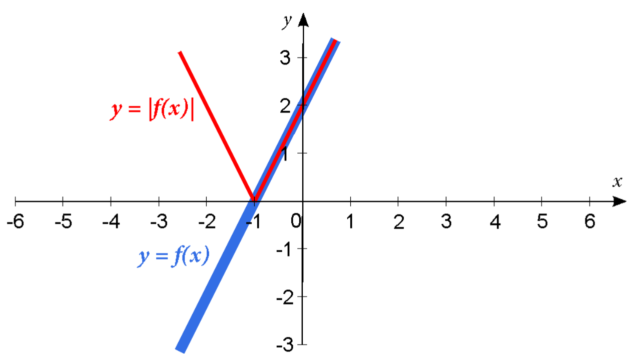
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY). Dla $k \in (0{,}1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).





$* \; x \rightarrow y = |f(x)|$

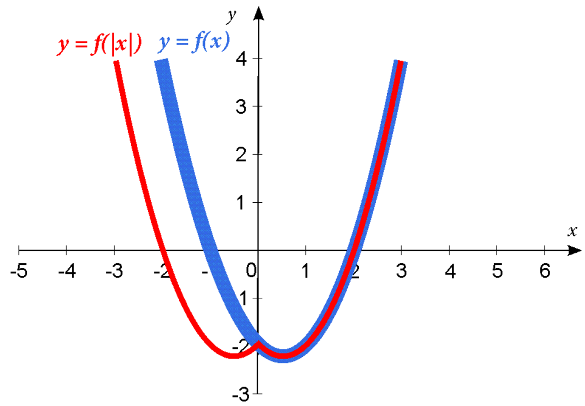
Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$, leżącą nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX, odbić symetrycznie względem osi OX.

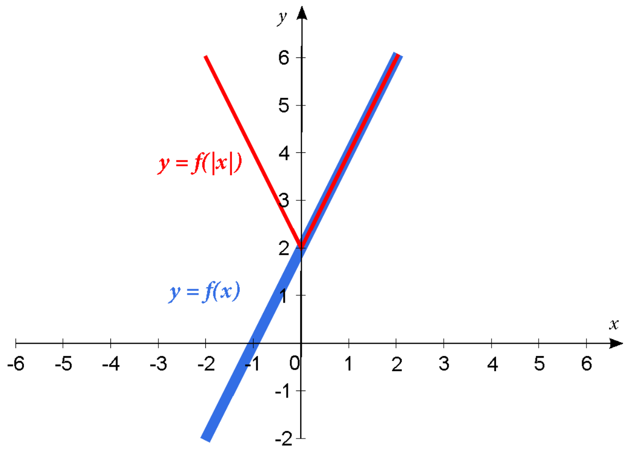


$* \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

- dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

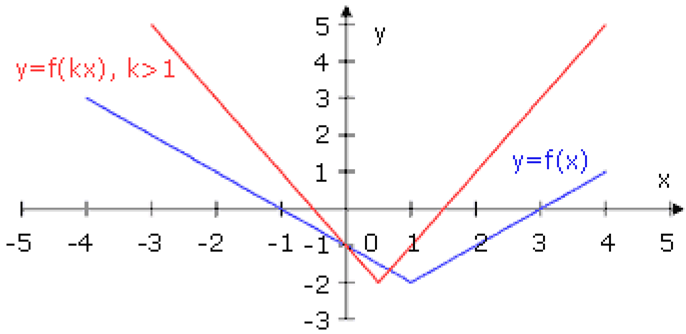


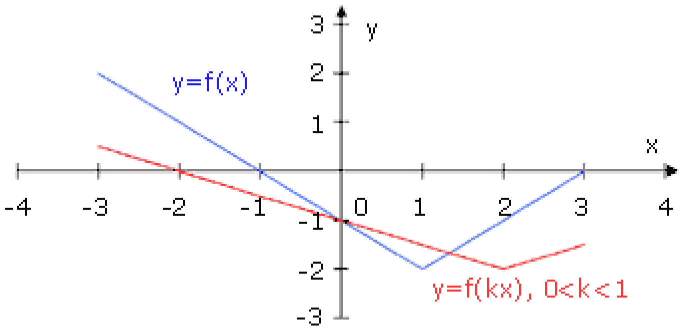


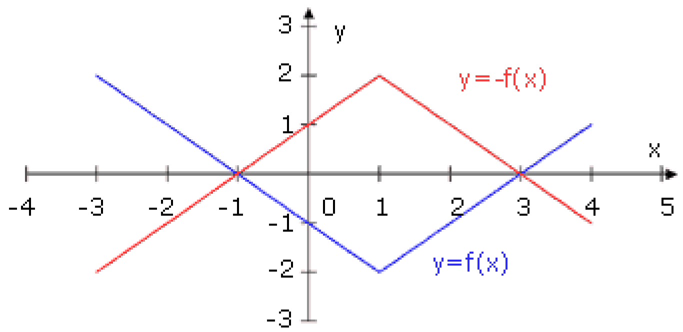
$* \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{x})$

Wykres funkcji $y = f(k * x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX. Dla k ∈ $(0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.







ZADANIA

2.5.1 Mając dane funkcje:

$$f(x) = 2x, f(x) = 3x + 1, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = -2x - 1, f(x) = -x + 4$$

Zapisz wzory funkcji i naszkicuj wykresy:

a) $x \to f(x)$

b) $x \to -f(x)$

c) $x \to f(-x)$

d) $x \to f(x) - 1$

e) $x \to f(x+1)$

f) $x \to |f(x)|$

g) $x \to f(|x|)$

h) $x \to |f(x) - 1|$

Odpowiedź:

a) $y = -f(x) = -2x$

b) $y = -f(x) = -2x$

c) $y = f(-x) = -2x$

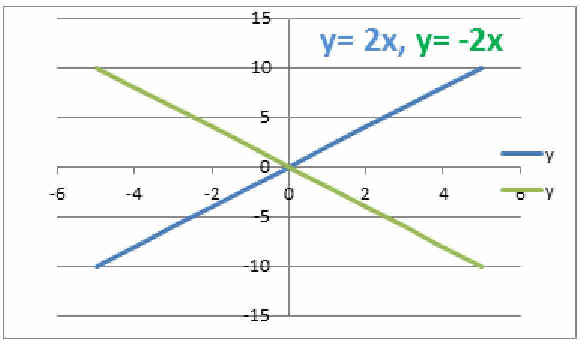
d) $y = f(x) - 1 = 2x - 1$

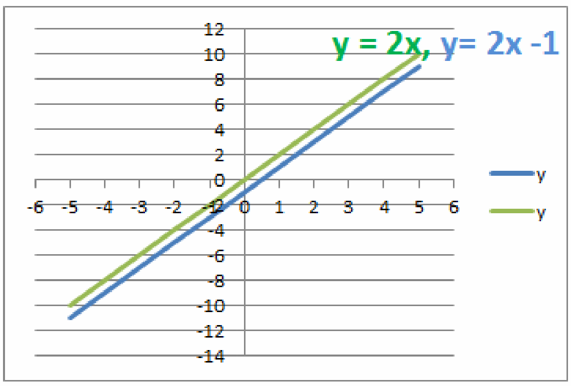
e) $y = f(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$

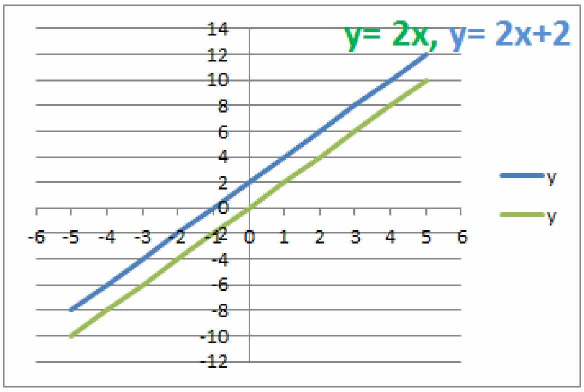
f) $y = |f(x)| = |2x|$

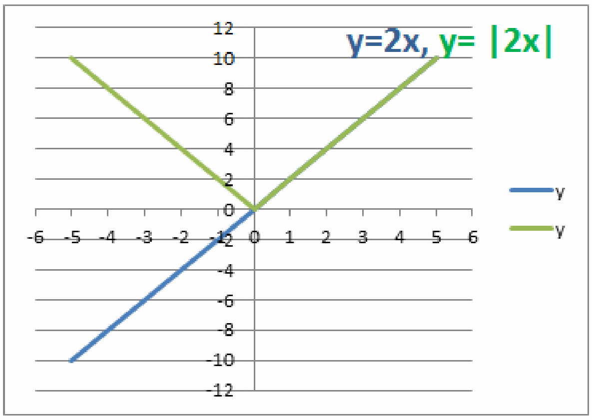
g) $y = f(|x|) = 2|x|$

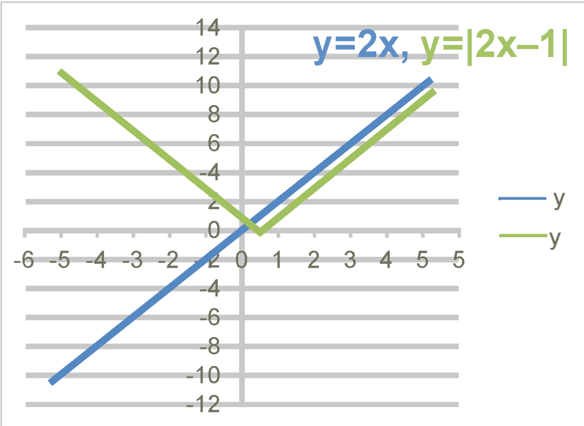
h) $y = |f(x) - 1| = |2x - 1|$

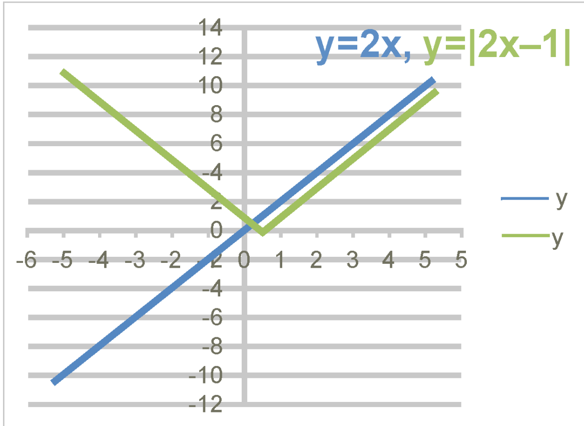












$f(x) = 3x + 1$, $y = -f(x) = -3x - 1$, $y = f(-x) = -3x + 1$, $y = f(x) - 1 = 3x$, $y = f(x+1) = 3x + 4$,

$y = |f(x)| = |3x + 1|$, $y = f(|x|) = 3|x| + 1$, $y = |f(x) - 1| = |3x|$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = -f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $y = f(-x) = \frac{1}{2}x + 2$, $y = f(x) - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = f(x+1) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$,

$y = |f(x)| = |-\frac{1}{2}x + 2|$, $y = f(|x|) = -\frac{1}{2}|x| + 2$, $y = |f(x) - 1| = |-\frac{1}{2}x + 1|$

$f(x) = -2x - 1$, $y = -f(x) = 2x + 1$, $y = f(-x) = 2x - 1$, $y = f(x) - 1 = -2x - 2$,

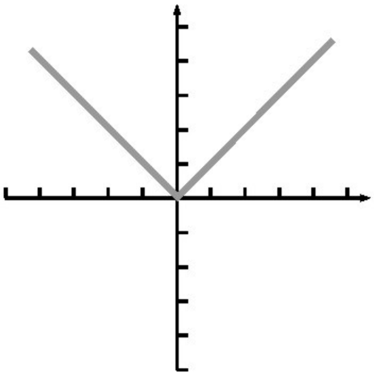
$y = f(x+1) = -2x - 3$, $y = |f(x)| = |-2x - 1|$, $y = f(|x|) = -2|x| - 1$, $y = |f(x) - 1| = |-2x - 2|$

$f(x) = -x + 4$, $y = -f(x) = x - 4$, $y = f(-x) = x + 4$, $y = f(x) - 1 = -x + 3$, $y = f(x+1) = -x + 3$,

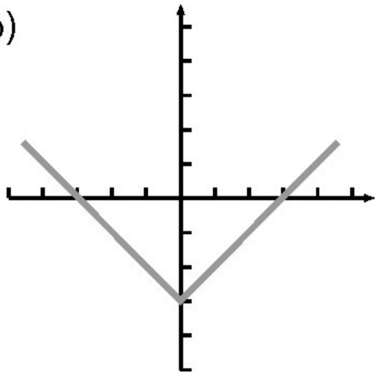
$y = |f(x)| = |-x + 4|$, $y = f(|x|) = -|x| + 4$, $y = |f(x) - 1| = |-x + 3|$

2.5.2 Dla każdego z poniższych wykresów funkcji opisz, jak go otrzymano, przesuwając odpowiedni wykres funkcji $y = |x|$. Podaj wzór funkcji o danym wykresie.

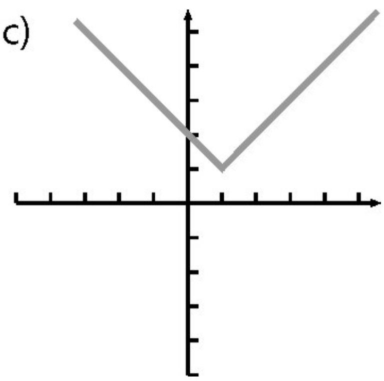
a)



b)



c)



Odpowiedź:

a) $y = |x|$ przesunięto o wektor [1,0] $y = |x-1|$

b) $y = |x|$ przesunięto o wektor [0,–3] $y = |x| - 3$

c) $y = |x|$ przesunięto o wektor [3,1] $y = |x-3| + 1$

2.5.3 Zadanie 1 i 2 rozwiąż za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

2.6 Funkcja liniowa i jej własności

Teraz nauczę się:

- Zapisywać funkcję w postaci ogólnej i kierunkowej;
- Interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- Określać monotoniczność funkcji na podstawie jej wzoru i wykresu;
- *Badać monotoniczność funkcji w zależności od parametru.

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są współczynnikami liczbowymi, nazywamy **funkcją liniową**. **Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.**

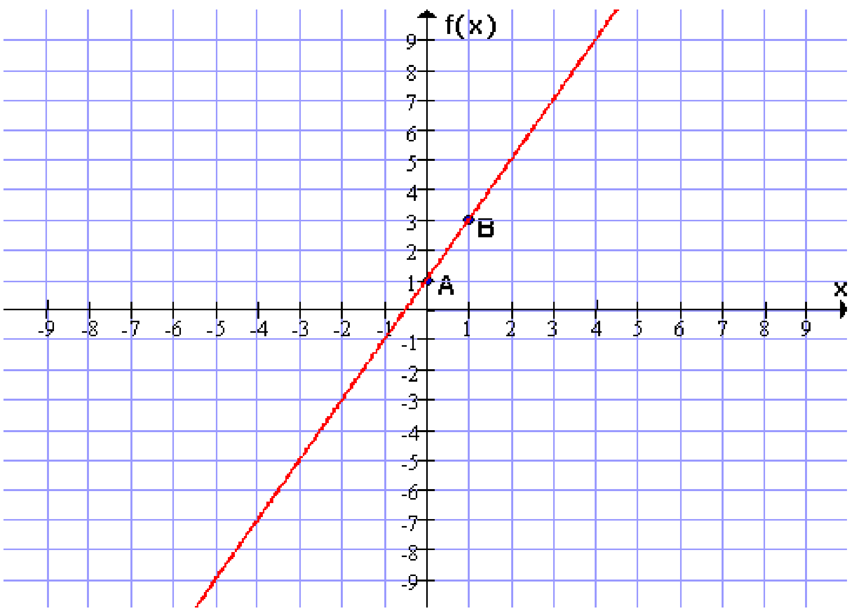
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej.**

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej.**

Wykresem każdej funkcji liniowej **jest linia prosta**. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dwa dowolne jej punkty.

Przykład 1

Narysuj prostą: $y = 2x + 1$ Jeżeli $x = 0$, to $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{A}\,(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ Jeżeli $x = 1$, to $y = 3 \rightarrow \boldsymbol{B}\,(\mathbf{1}, \mathbf{3})$

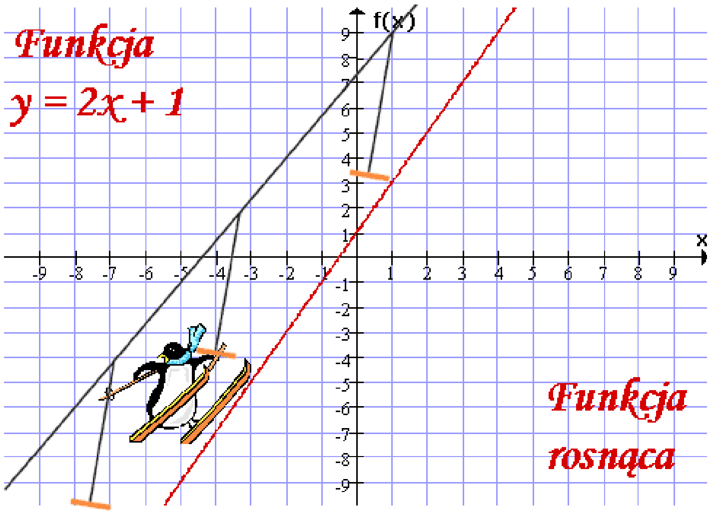


Rysunek 2-6. Wykres funkcji $y = 2x + 1$

Monotoniczność funkcji liniowej

Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz większe wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **rosnąca**.

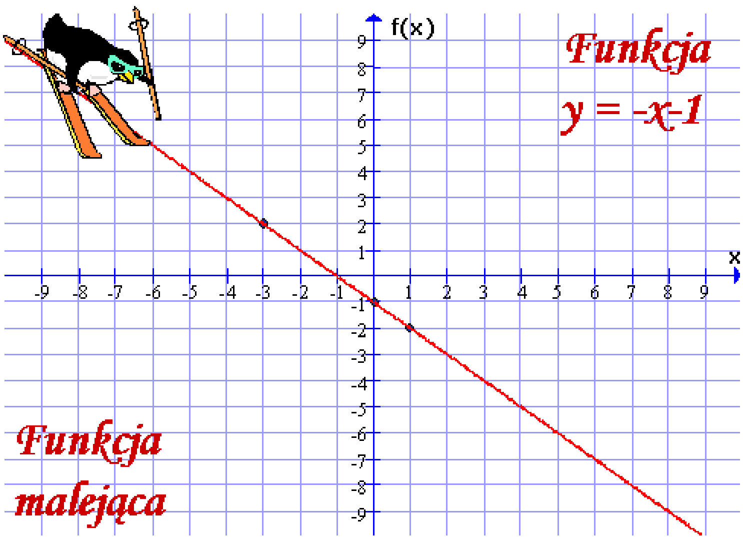
Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy rosnącą, jeżeli $a > 0$.



[9]

Jeżeli dla coraz większych argumentów funkcja przyjmuje coraz mniejsze wartości, to o takiej funkcji mówimy, że jest **malejąca**.

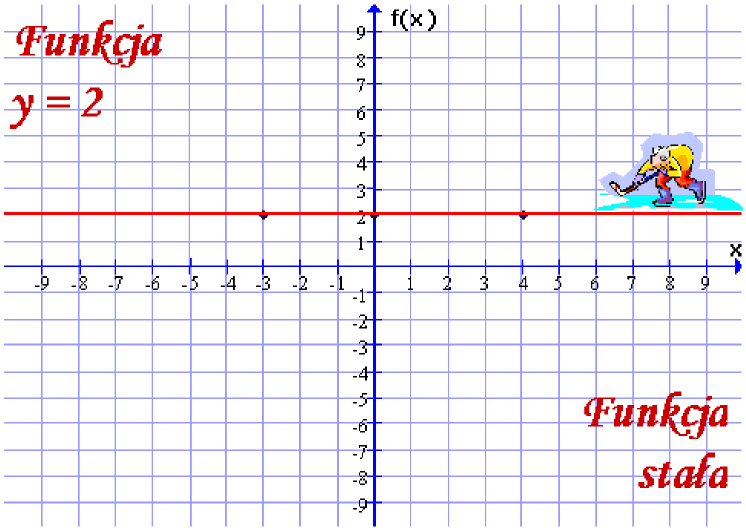
Funkcję liniową $y = ax + b$ nazywamy malejącą, jeżeli $a < 0$.



- Jeżeli dla wszystkich argumentów funkcja przyjmuje taką samą wartość, to o takiej funkcji mówimy, że jest **stała**.

Jeżeli $a = 0$, to funkcja $y = ax + b$ jest stała. Jej wzór przyjmuje postać: $y = b$.

9 https://sites.google.com/site/wlasnoscfunkcji/monotoniczno%C5%9B%C4%87.

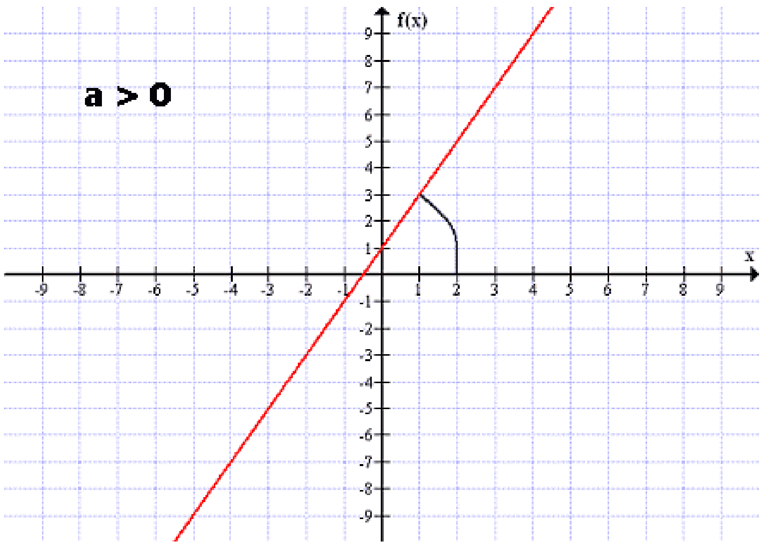


Współczynnik a

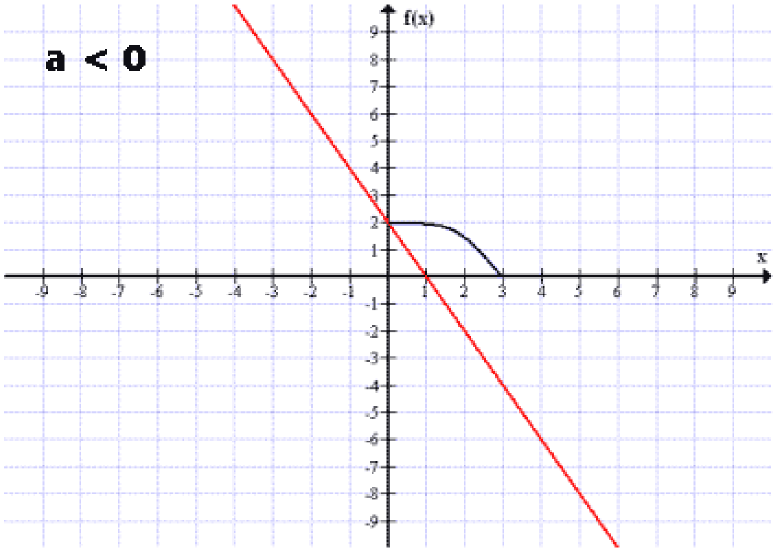
Współczynnik a mówi o kierunku prostej, która jest wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$. Liczba a jest więc nazywana **współczynnikiem kierunkowym** funkcji $y = ax + b$.

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej $a = tg\,\alpha$. Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

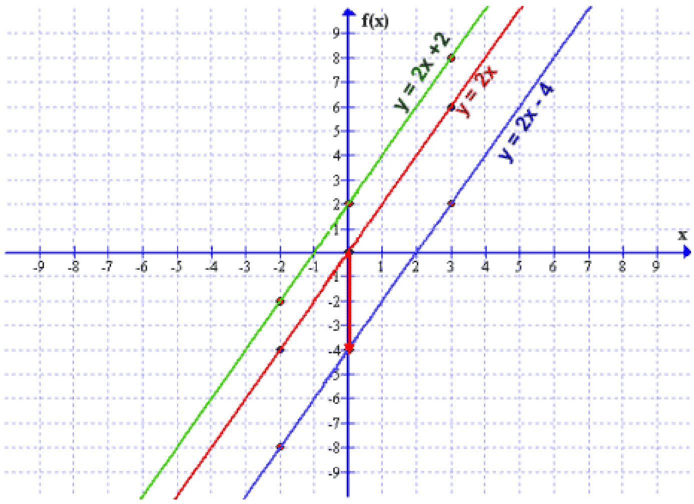
- Wiedząc, że dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej AB, kąt nachylenia do osi x jest wyrażony jako iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Jeżeli liczba a jest dodatnia, to kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem ostrym (im większa jest liczba a, tym kąt ten jest większy):



Jeżeli liczba a jest ujemna, kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem rozwartym:



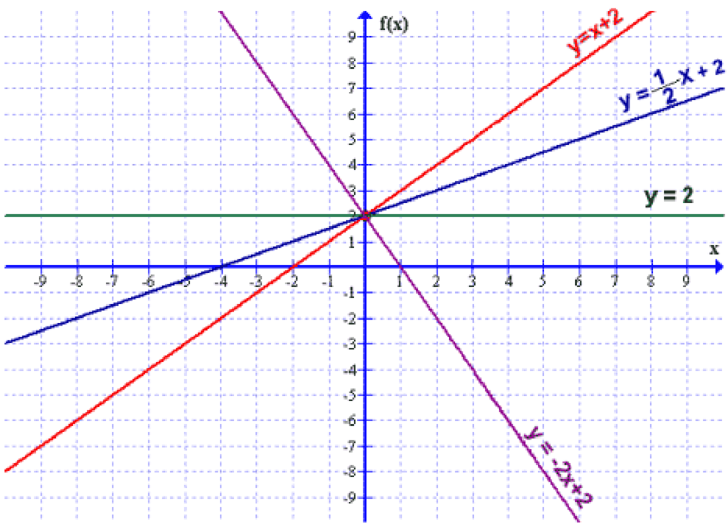
➡ Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



➡ **Współczynnik b**

Współczynnik *b* mówi o tym, w którym punkcie wykres funkcji $y = ax + b$ przecina oś OY, czyli wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych (0,b).

➡ **Wykres**



Miejsce zerowe – jest to taki argument (x), dla którego wartość (y) wynosi 0.

UWAGA!!!!

Funkcja stała nie ma miejsca zerowego z wyjątkiem funkcji $y = 0$, która ma ich nieskończenie wiele.
Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy miejsca zerowego, podstawiając za y wartość 0, i z tak powstałego równania liczymy x (czyli miejsce zerowe).

Przykład 2

$$\mathbf{y = 2x - 4}$$

Podstawiamy za y wartość 0 i rozwiązujemy równanie.

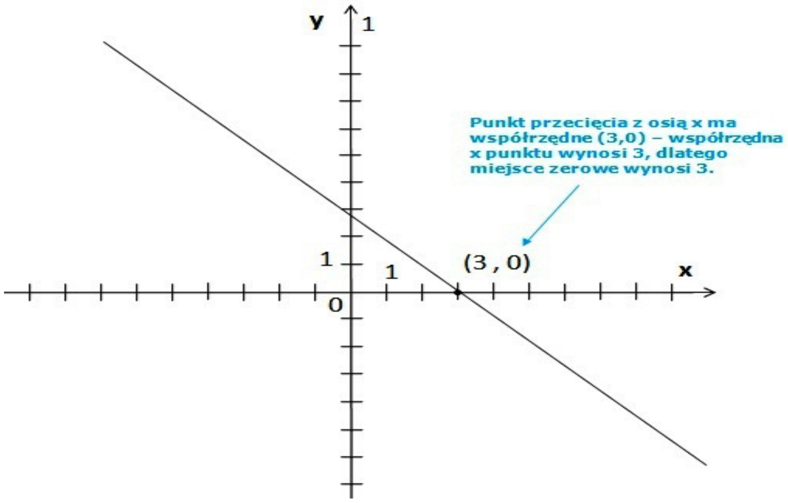
$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 \qquad /\div(-2)$$

$$x = 2$$

Piszemy: Miejsce zerowe funkcji wynosi: $x = 2$

Mając do dyspozycji wykres, szukamy punktu przecięcia wykresu z osią odciętych (x), i odczytujemy wartość argumentu (x), który jest miejscem zerowym.



Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y - ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.

Przykład 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 4$

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$$

Funkcja ma miejsce zerowe równe: $x_0 = 2$

Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

– **punktu przecięcia z osią x** – podstawiając za y wartość 0, i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe znajduje się w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład 4

$y = 4x + 12$

$0 = 4x + 12$

$-4x = 12 \; / \div (-4)$

$x = -3$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: (–3,0)

– **punktu przecięcia z osią y** – podstawiając za x wartość 0, i obliczając y.

Przykład 5

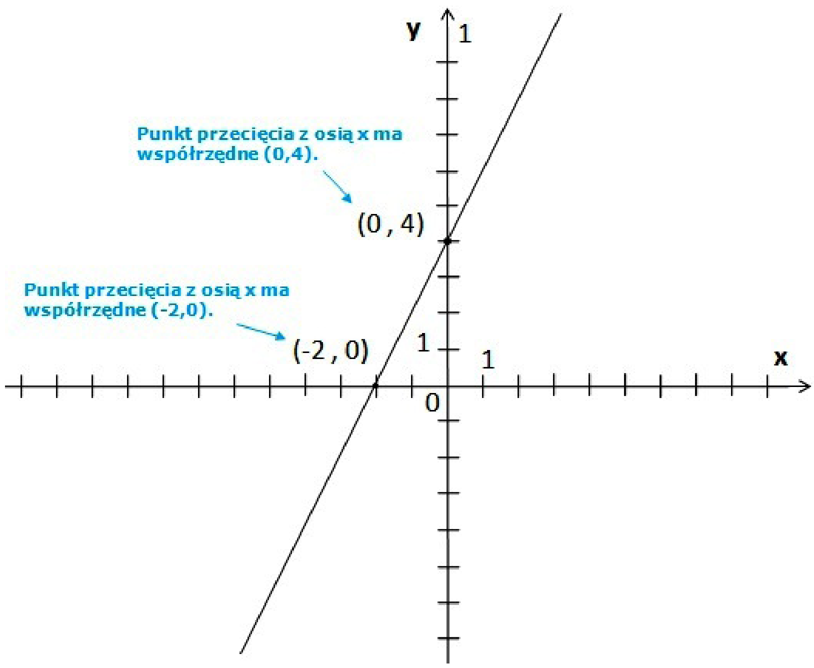
$y = 4x + 12$

$y = 4 \cdot 0 + 12$

$y = 12$

Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: (0,12)

Mając do dyspozycji wykres, odczytujemy współrzędne obu punktów z wykresu.



Punkt przecięcia z osią x: $(-2,0)$ Punkt przecięcia z osią y: $(0,4)$

Sprawdzenie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru funkcji i wykonać obliczenia po obu stronach powstałego równania, aby sprawdzić, czy lewa strona będzie równała się prawej. Jeżeli tak jest, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, znaczy to, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji.

Przykład 6

Sprawdź, czy punkty: A = (1,2); B = (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.

Sprawdzamy osobno oba punkty:

$$y = 3x - 1$$

Podstawiamy punkt (1,2)

$$2 = 3 \cdot 1 - 1$$
$$2 = 2$$
$$L = P$$

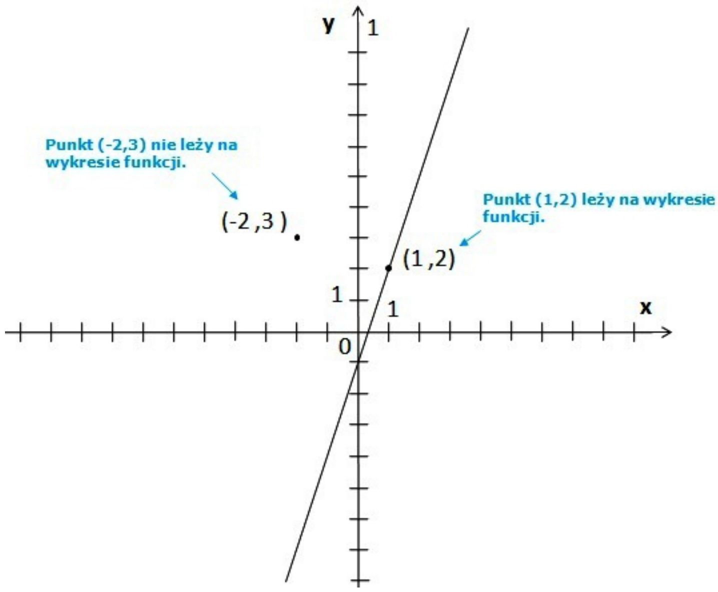
Podstawiamy punkt (-2,3)

$$3 = 3 \cdot (-2) - 1$$
$$3 \neq -7$$
$$L \neq P$$

Punkt (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt (–2,3) nie należy. Mając do dyspozycji wykres funkcji, wystarczy znaleźć dany punkt w układzie współrzędnych – jeżeli leży on na prostej, która jest wykresem funkcji, to dany punkt należy do wykresu funkcji, jeżeli nie, znaczy to, że nie należy.

Przykład:

Sprawdź, czy punkty: (1,2); (–2,3) należą do wykresu funkcji: $y = 3x - 1$.



Punkt A = (1,2) należy do wykresu funkcji, a punkt B = (–2,3) nie należy.

ZADANIA

2.6.1 Podane równanie sprowadź do postaci kierunkowej:

a) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$

b) $x + y - 4 = 0$

c) $2x + 2y + 3 = 0$

d) $x + 2y = 12$

e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

f) $\frac{x-1}{2}+\frac{y+2}{3}=2$

Odpowiedź:

a) $y = 3x + 0{,}5$,

b) $y = -x + 4$,

c) $y = -x - 1\frac{1}{2}$,

d) $y = -\frac{1}{2}x - 6$,

e) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$

2.6.2 Które spośród punktów A, B, C, D należą do wykresu funkcji: $\mathbf{f_1}(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $\mathbf{f_2}(x) = \frac{x+1}{2}$:

a) A = (2,1) B = $(\frac{1}{2},\frac{7}{4})$ C = (–2,1), D = (0, 2),

b) A = (1,1), B = (2,2), C = (–3,–1), D = $(2,\frac{3}{2})$

Odpowiedź:

A ∈ f_1, D ∈ f_1, A ∈ $f_2(x)$, C ∈ $f_2(x)$, D ∈ $f_2(x)$

2.6.3 Narysuj wykresy funkcji, a następnie:

- określ monotoniczność,
- oblicz miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- sprawdź, czy punkt A = (1,3) należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x-1$

b) $f(x) = 2x+\frac{1}{2}$

c) $f(x) = -9x-3$

d) $f(x) = 0{,}4x+0{,}1$

e) $f(x) = \frac{-x+2}{2}$

f) $f(x) = \frac{2-2x}{-4}$

g) $f(x) = -\frac{x}{2}-2$

h) $f(x) = \frac{1-6x}{3}+2x$

Odpowiedź:

a) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y (0, –1); nie należy

b) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0,\frac{1}{2})$; nie należy

c) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{3}$; z osią x $(-\frac{1}{3},0)$; z osią y (0,–3); nie należy

d) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = -\frac{1}{4}$; z osią x $(-\frac{1}{4},0)$; z osią y $(0, \frac{1}{10})$; nie należy

e) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = 2$; z osią x (2,0); z osią y (0,1); nie należy

f) funkcja rosnąca; miejsce zerowe $x = 1$; z osią x (1,0); z osią y $(0, -\frac{1}{2})$; nie należy

g) funkcja malejąca; miejsce zerowe $x = -4$; z osią x (–4,0); z osią y (0,–2); nie należy

h) funkcja stała; miejsce zerowe brak; brak; brak; nie należy

2.6.4 Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-1)x+1$

b) $f(x) = (-m+2)x-4$

c) $f(x) = (m-\frac{\sqrt{3}}{2})x-\sqrt{3}$

Odpowiedź: a) $m > \frac{1}{2}$, b) $m < 2$, c) $m > \sqrt{\frac{3}{2}}$

2.6.5 Przez które ćwiartki przechodzą proste $\mathbf{y_1 = 2x + 1}$ **i** $\mathbf{y_2 = \frac{1}{2}x - 5}$? Która z prostych tworzy z osią OX większy kąt? W której ćwiartce przecinają się proste?

Odpowiedź: y_1 przez I, II, III; y_2 przez I, III, IV

2.7 Zastosowanie funkcji do opisywania zjawisk z życia codziennego

Teraz nauczę się:

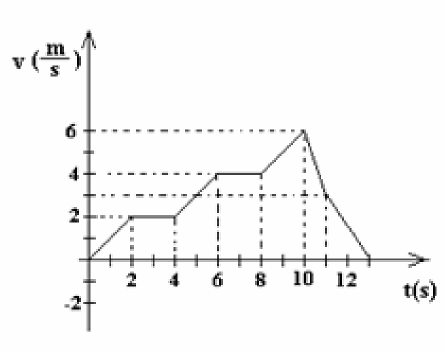
Wykorzystywać własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Funkcje wykorzystywane są w wielu dziedzinach życia, np.:

- W badaniach statystycznych – kurs walut.
- W balistyce – zapisywanie toru lotu pocisku.
- Do obliczania maksymalnej prędkości samochodu, z jaką bezpiecznie może pokonać dany zakręt, oraz wiele innych.

W fizyce często do opisywania zjawisk z życia codziennego korzystamy z wykresów funkcji. Analizując dane przedstawione na wykresie, najpierw sprawdzamy, jakie wielkości fizyczne i ich jednostki zostały na nim zaznaczone.

Przykład 1



Jak zinterpretować dane na powyższym wykresie? Zauważ, że mamy do czynienia z dwiema wielkościami: szybkością i czasem. Co się dzieje z szybkością ciała w poszczególnych przedziałach czasu?

Na początku ciało spoczywało, następnie przez 2 sekundy jego szybkość wzrastała wprost proporcjonalnie do czasu (ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym), przez kolejne 2 sekundy ciało poruszało się ze stałą prędkością, od 4 do 6 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 6 do 8 sekundy znowu poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne dwie sekundy jego szybkość wzrastała, następnie ciało zmieniło zwrot prędkości (zawraca) i przez pierwszą sekundę porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, od 11 do 12 sekundy jest to również ruch jednostajnie przyspieszony. Obliczmy przyspieszenie ciała w poszczególnych przedziałach czasu. Wiedząc, że przyspieszenie jest równe ilorazowi zmiany szybkości ciała do zmiany czasu a = $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Z wykresu odczytujemy:

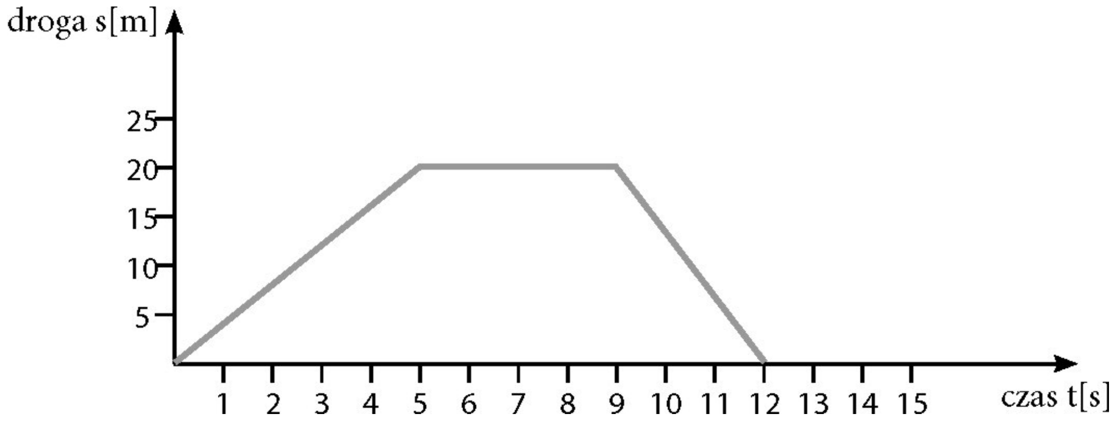
$v_0 = 0, v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 4, v_5 = 4, v_6 = 6,$

$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11, t_7 = 12$, stąd

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{2m/s}{2s} = 1\frac{m}{s^2}$ i analogicznie

$a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, a_2 = 0, a_3 = 1\frac{m}{s^2}, a_4 = -3\frac{m}{s^2}, a_5 = -1{,}5\frac{m}{s^2}.$

Przykład 2



Przeanalizujmy podobny wykres. Zauważmy, jakie wielkości fizyczne mamy teraz zaznaczone na wykresie? Przez pięć pierwszych sekund droga rosła proporcjonalnie do czasu, to znaczy, że ciało poruszało się ruchem jednostajnym, przez kolejne 4 sekundy ciało spoczywa, a przez następne 3 sekundy zawraca, poruszając się ze stałą prędkością. Obliczmy $v_1,\ v_2,\ i\ v_3$ Z lekcji fizyki pamiętasz, że:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, stąd\ v_1 = 4\ \frac{m}{s}, v_2 = 0\ \frac{m}{s}, v_3 = -6\ \frac{2}{3}\frac{m}{s}.$$

Przykład 3

Zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita a wyrażoną w stopniach Celsjusza, jest zależnością liniową.

a) Znajdź tę zależność, wiedząc że $32°F = 0°C$, a $5°F = -15°C$.

b) 22 lipca w San Diego temperatura o godzinie 12^{00} była o $12{,}5°C$ wyższa niż temperatura o godzinie 6^{00}. Wyraź wzrost temperatury w stopniach Fahrenheita.

Jeżeli F jest temperaturą w Fahrenheitach, a C w Celsjuszach, to wiemy, że $F = aC + b$. Stałe a i b wyznaczymy z podanych informacji.

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a(-15) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 32 \\ 15a = b - 5 = 27 \ \Rightarrow a = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

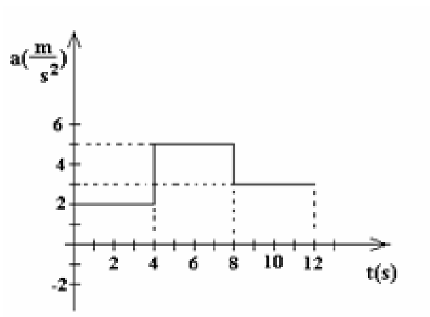
Skorzystamy ze wzoru z podpunktu a).

$$F_2 - F_1 = T_F = \frac{9}{5}C_2 + 32 - \frac{9}{5}C_2 - 32 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$$

Odpowiedź: $22{,}5°F$

ZADANIA

2.7.1 Na podstawie poniższego wykresu dokonaj analizy ruchu ciała i sporządź wykres zależności $v(t)$, $s(t)$.

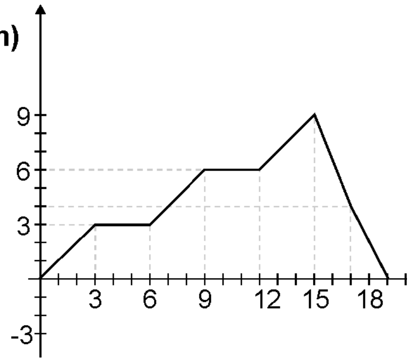


Odpowiedź:

Przez pierwsze dwie sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym a = 2 $\frac{m}{s^2}$, przez kolejne z przyspieszeniem a = 5 $\frac{m}{s^2}$, od 8 do 12s z przyspieszeniem a = 3 $\frac{m}{s^2}$.

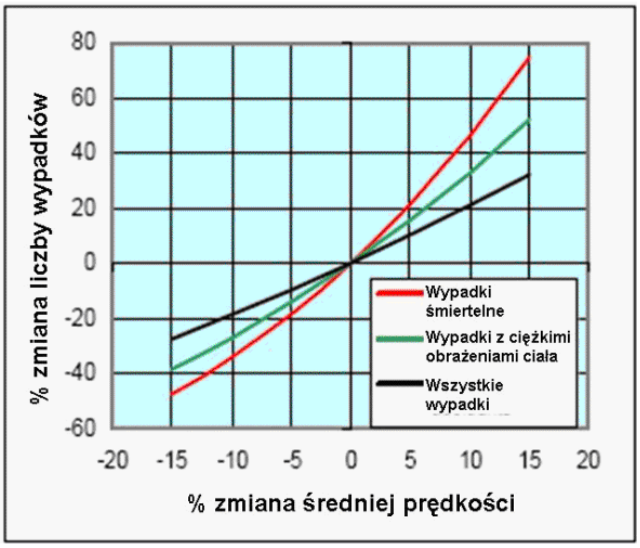
Podstawiamy do wzoru $v = at$ kolejne sekundy czasu i obliczamy odpowiadające jej szybkości.

2.7.2 Opisz zachowanie ciała na podstawie wykresu.



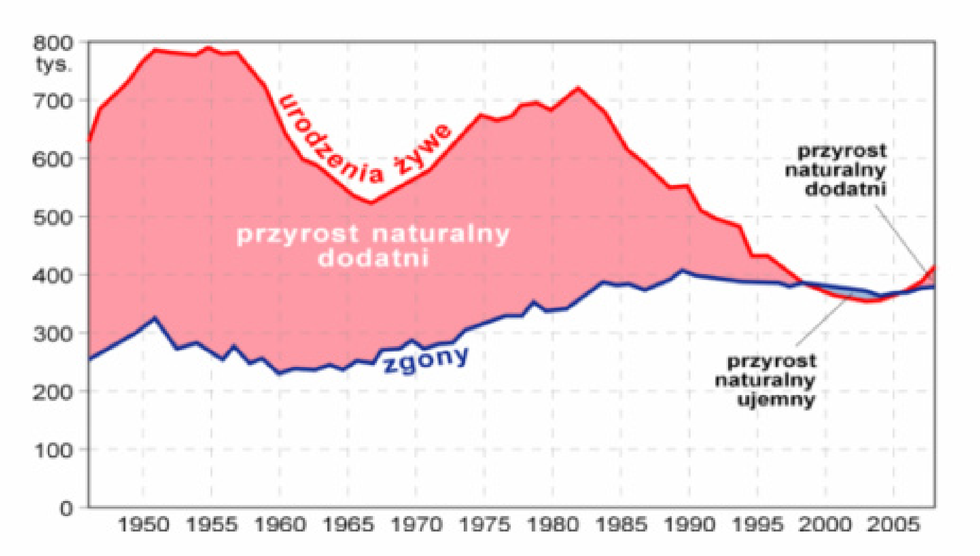
Odpowiedź: Przez pierwsze 3s ciało porusza się ruchem jednostajnym, następnie spoczywa, i tak na zmianę, w 15s zawraca, dalej poruszając się ruchem jednostajnym, ale z inną szybkością.

2.7.3 Jakie informacje można odczytać z poniższego wykresu? Wyciągnij odpowiednie wnioski.



Zależność między zmianami średniej prędkości jazdy a liczbą wypadków

2.7.4 Wykres przedstawia, jak zmieniał się przyrost naturalny ludności w Polsce w latach 1950 – 2005.



[10]

Przyrost naturalny w Polsce w latach 1946 – 2008

10 (www.wiking.edu.pl/article.php?id=269, 25.03.2013).

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak zmieniała się liczba urodzeń w latach 1950 – 2005?
2. W którym roku liczba urodzeń była największa, a w którym najmniejsza?
3. Jak w tym czasie kształtowała się liczba zgonów?
4. W którym roku przyrost naturalny ludności był najwyższy, a w którym najniższy?

Informacja do zadania 2.6.5:

Prędkość rzeki zależy od takich czynników, jak: głębokość rzeki, nachylenie terenu, rodzaj podłoża tworzącego dno i brzegi rzeki.

Większość rzek zwalnia pod koniec swojego biegu, ponieważ nachylenie terenu, czyli spadek wody, znacznie się zmniejsza. Gdyby przeanalizować przekrój rzeki, można by zauważyć, że prędkość różni się w różnych obszarach, najmniejsza jest na dnie rzeki, a największa na jej powierzchni. Powodem tego jest tarcie pomiędzy przepływającą wodą a powierzchnią dna rzeki.

Przy brzegach rzeki, szczególnie na zakrętach, przepływ wody jest najszybszy z powodu siły odśrodkowej.

Zwykle prędkość V wyrażamy w $\left[\frac{m}{s}\right]$ metrach na sekundę, natomiast współczynnik rodzaju podłoża oznaczamy k i wyrażamy w $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$. Poziom wody oznaczamy T i wyrażamy w metrach, do wyznaczenia prędkości używamy również współczynnika nachylenia, spadku terenu S.

Prędkość przepływu wody obliczamy ze wzoru: $V = k \cdot \sqrt[3]{T^2} \cdot \sqrt{S}$

Wskazówka: współczynnik nachylenia S = (różnica poziomów)/(długość rzeki)

2.7.5 Dwie stacje pomiarowe Berthelsdorf i Nossen znajdują się na rzecce Mulde. Pomiędzy tymi stacjami średni poziom wody wynosi 35 cm. Wysokość nad poziomem morza w Berthelsdorf wynosi 376,61 m, a w Nossen – 203,76 m. Długość rzeki na tym odcinku wynosi 42,3 km. Dno rzeki jest wyboiste i wartość współczynnika rodzaju podłoża wynosi 30 $\left[\frac{\sqrt[3]{m}}{s}\right]$.

a) Oblicz prędkość rzeki na tym odcinku.

b) Raz na 20 lat poziom wody rzeki Mulde osiąga 2,5 m. Oblicz, jaką wówczas prędkość osiąga rzeka.

c) 30 sierpnia 2008 roku po długim okresie deszczowym prędkość rzeki osiągnęła wartość 1,68 $\left[\frac{m}{s}\right]$. Oszacuj, jak wysoki był wówczas poziom wody.

2.7.6 Prędkość rzeki można również wyrazić w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$. Tak wyrażona, daje nam informację, jak dużo wody przepływa w ciągu sekundy. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki pomiarów poziomu wody w rzece i jej przepływu.

Data	Godzina	Poziom wody w [cm]	Przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
26.10	01:00	41	2,04
	07:00	39	1,81
	13:00	40	1,92
	19:00	40	1,92
27.10	01:00	40	1,92
	07:00	40	1,92
	13:00	41	2,04
	19:00	44	2,42
28.10	01:00	45	2,55
	07:00	45	2,55
	13:00	41	2,04
	19:00	41	2,04
29.10	01:00	41	2,04
	07:00	41	2,04
	13:00	53	3,78
	19:00	56	4,31
30.10	01:00	73	8,07
	07:00	83	10,9
	13:00	103	19,3
	19:00	106	20,7
31.10	01:00	93	14,8
	07:00	81	10,3
	13:00	75	8,6
	19:00	71	7,56
01.11	01:00	70	7,31
	07:00	66	6,36

a) Przedstaw na wykresie zależność prędkości przepływu od poziomu wody w dniach od 30 października (godz. 01:00) do 31 października (godz. 01:00).

b) Za pomocą jakiej funkcji można opisać tę zależność?

c) Za pomocą programu Exel lub kalkulatora graficznego znajdź wzór funkcji, która w przybliżeniu opisuje tę zależność.

d) Wykorzystując otrzymaną funkcję, oszacuj, ile będzie wynosić prędkość przepływu w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$, jeśli poziom wody osiągnie 2,5 m.

e) Przedstaw chronologicznie na wykresie prędkość przepływu wody w dniach od 30 października (godz. 01:00) do 31 października (godz. 01:00). Wyraź przepływ w $\left[\frac{m^3}{s}\right]$.

f) Jaką wartość wyraża obszar zawarty pomiędzy wykresem funkcji a osią x?

g) Oblicz pole powierzchni tego obszaru (wyznacz pole powierzchni tego obszaru na różne sposoby).

h) Wywnioskuj, jak będzie się zmieniać wartość współczynnika *k*, jeżeli dno rzeki będzie bardziej gładkie.

i) Wyjaśnij, dlaczego prędkość przepływu nie jest liniowo zależna od poziomu wody.

j) Wykorzystanie rzek jako drogi wodnej dla statków wymaga czasem pogłębiania koryta rzeki. Jakie może to mieć konsekwencje dla środowiska?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

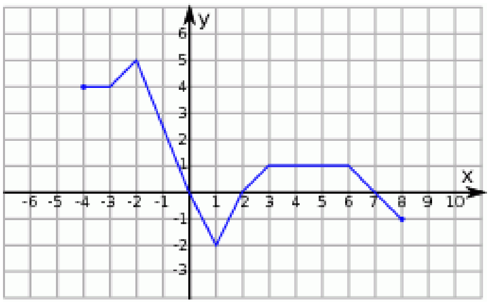
1. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:[11]

a) $-1/3$ b) -3 c) $1/3$ d) 3

2. Zbiorem wartości funkcji f jest:[12]

a) $< -2{,}5 >$ b) $< -4{,}8 >$ c) $< -1{,}4 >$ d) $< 5{,}8 >$

3. Korzystając z wykresu funkcji *f*, wskaż nierówność prawdziwą:



a) $f(-1) < f(1)$ b) $f(1) < f(3)$ c) $f(-1) < f(3)$ d) $f(3) < f(0)$

4. Wskaż m, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała:

a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = -1$

5. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:[13]

a) $-2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$

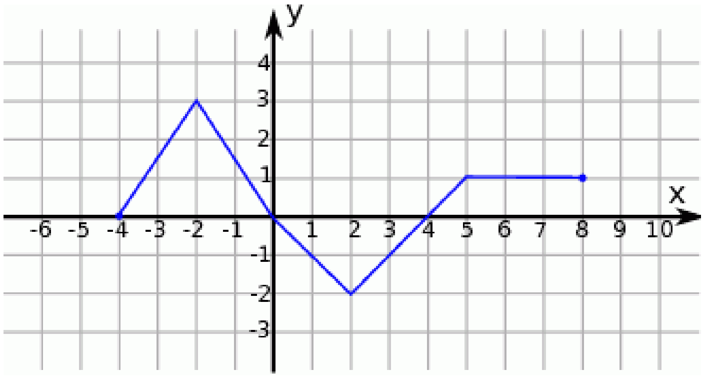
6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Odczytaj z wykresu i zapisz:

---

11 Arkusz próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

12 Zadania: 2, 3, 4 zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2010.

13 Zadania: 5, 6 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2010.



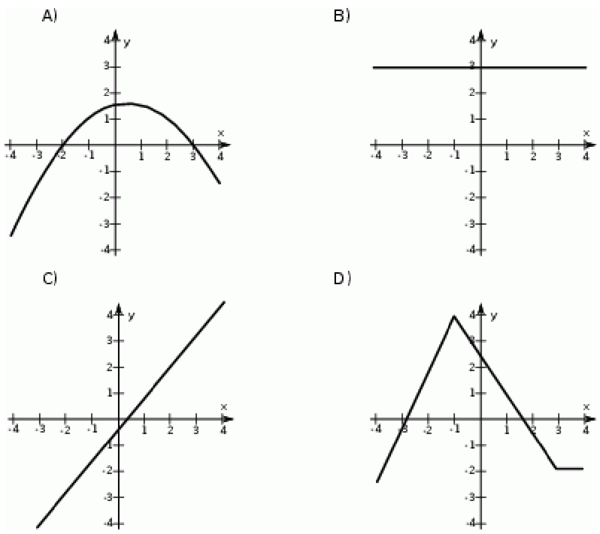
a) zbiór wartości funkcji f

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

7. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$.
Wówczas spełniony jest warunek:[14]

a) $f(x) > 1$ b) $f(2) = 2$ c) $f(3) < 3$ d) $f(4) = 4$

8. Wskaż wykres funkcji, która w przedziale <–4,4> ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



9. Funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:[15]

a) $m = 6$ b) $m = 1,5$ c) $m = 1$ d) $m = 5$

10. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

a) 4 b) –2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

11. Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt $A = (2,-4)$, gdy:[16]

a) $m = 5$ b) $m = -5$ c) $m = 1$ d) $m = -4$

12. Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

a) $x < 6$ b) $x > 6$ c) $x > -6$ d) $x < -6$

---

14 Zadania: 7, 8 zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
15 Zadania: 9, 10 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2010.
16 Zadania: 11, 12 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2009

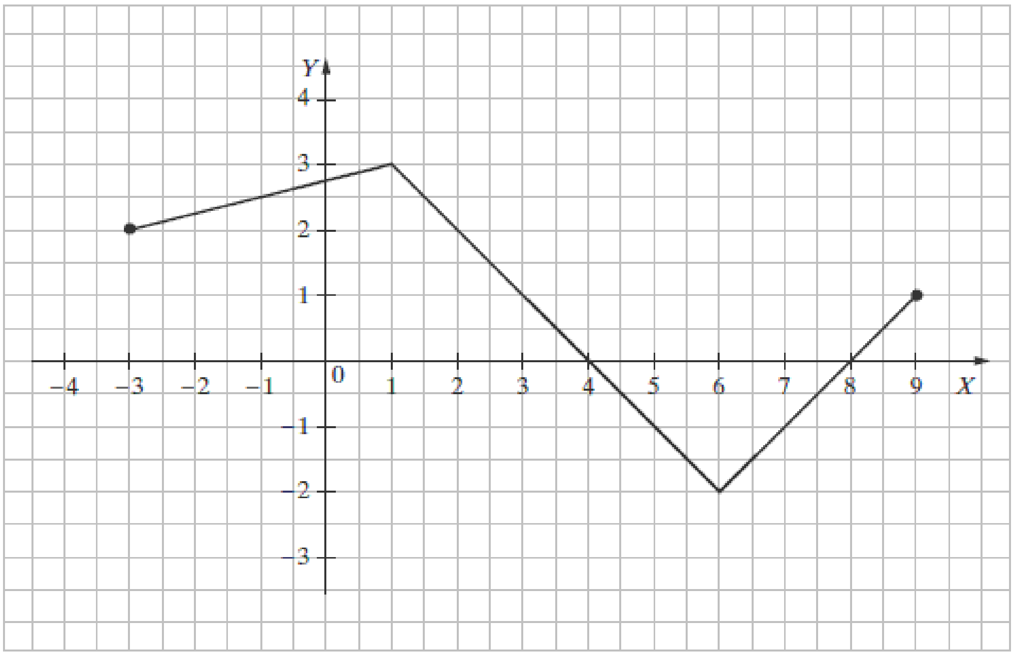
13. Dziedziną funkcji $F(x) = \begin{cases} -2x+1, & gdy\ x \le 3 \\ -x, & gdy\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$ jest zbiór:[17]

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle 1,4\rangle$ c) $\langle 0,4\rangle$ d) $(-\infty,1)$

14. Funkcja liniowa $f(x) = (m+2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

a) $m < -2$ b) $m < 2$ c) $m > -2$ d) $m > -4$

15. Rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

a) $\langle 0,4\rangle$ b) $\langle 1,6\rangle$ c) $\langle 0,6\rangle$ d) $\langle -2,4\rangle$

16. Punkt P = $(a+1,2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

a) 0 b) –1 c) 2 d) 1

17. Funkcja liniowa $f(x) = (m-2)x - 11$ jest rosnąca dla:

a) $m > 2$ b) $m > 0$ c) $m < 13$ d) $m < 11$

18. Funkcja liniowa $f(x) = 3ax - b$ jest malejąca, natomiast funkcja liniowa $g(x) = bx - 3a$ jest rosnąca. Wykresy funkcji f i g przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Oblicz odciętą punktu A oraz wyznacz wzory funkcji f i g wiedząc, że ich wykresy są prostopadłe.[18]

19. Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & dla\ x \in (0,3\rangle \\ \sqrt{3}-3 & dla\ x \in (3,10 \end{cases}$$

17 Zadania: 13, 14, 15, 16, 17 zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011.
18 Zadania: 18, 19 zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Równania i nierówności kwadratowe

3.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$, bo można przekształcić do postaci: $3x^2 - 1 = 0$, gdzie $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$, gdzie a = 5,b = 3, c = 7
- $8x = 3x^2 + 1$, bo można przekształcić do postaci $3x^2 - 8x + 1 = 0$, gdzie a = 3, b = –8, c = 1
- $x^2 + 5x = 0$, gdzie a = 1, b = 5, c = 0

Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + c = 0$, gdy $a \neq 0$, b = 0 i c ≠ 0

- $x^2 - 16 = 0$

  $x^2 = 16$

  $x = 4$ lub $x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$

  $-3x^2 = 6 \,/ \div (-3)$

  $x^2 = -2$ sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x-2)^2 = 4(1-x)$

  $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$

  $x^2 = 0$

  $x = 0$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu $ax^2 + bx = 0$, gdy $a \neq 0, b \neq 0$ i $c = 0$

- $5x^2 - 3x = 0$

  $x(5x - 3) = 0$

  $x = 0$ lub $5x - 3 = 0$

  $x = 0$ lub $x = \frac{5}{3}$

- $-5x - 4x^2 = 0$

  $-x(5 + 4x) = 0$

  $-x = 0$ lub $5 + 4x = 0$

  $x = 0$ lub $4x = -5$

  $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{4}$

ZADANIA

3.1.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2 + 16 = 0$	b) $-\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$	c) $2x^2 + 8 = 0$
d) $2x^2 - 5x = 0$	e) $-3x^2 + 6x = 0$	f) $-x^2 - 2 = 0$
g) $x(x-3) = 0$	h) $(x+2)(x-4) = 0$	i) $\frac{1}{2}x^2 = 0$
j) $5x2 - 7x = 0$	k) $-3x2 + 1 = 0$	l) $5x2 = 1$
m) $-x2 - 3 = 0$	n) $9x2 + \frac{x}{3} = 0$	o) $x2 = (1-x)(1+x)$

Odpowiedź:

a) $x = -4$ lub $x = 4$	b) $x = -3$ lub $x = 3$	c) brak rozwiązań
d) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$	e) $x = 0$ lub $x = 2$	f) brak rozwiązań
g) $x = 0$ lub $x = 3$	h) $x = -2$ lub $x = 4$	i) $x = 0$
j) $x = 0$ lub $x = \frac{7}{5}$	k) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	l) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
m) brak rozwiązania	n) $x = -\frac{1}{27}$ lub $x = 0$	o) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

Teraz nauczę się:

- obliczyć wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne.

Rozwiążmy równanie typu $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$.

Aby rozwiązać równanie $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), najpierw obliczamy wartość wyrażenia

$\Delta = b^2 - 4ac$

- jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \dfrac{-b}{2a}$;
- jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole Δ i δ to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga mała litera delta. Z symbolem δ spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

Przykład 1

- $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \dfrac{-(-13)-7}{2 \cdot 6} = \dfrac{13-7}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-(-13)+7}{2 \cdot 6} = \dfrac{13+7}{12} = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}$ lub $x_2 = \dfrac{5}{3}$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Przykład 2

- $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -23$

Równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 3

➢ $$6x^2+4x+\frac{2}{3}=0$$

$$\Delta=4^2-4\cdot 6\cdot\frac{2}{3}=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{4}{2\cdot 6}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ PROWADZĄCE DO RÓWNAŃ KWADRATOWYCH.

➡ Równanie typu $ax^4+bx^2+c=0$ nazywamy **równaniem dwukwadratowym.**

Przykład 4

$x^4+6x^2+5=0$ $(x^2)^2+6x^2+5=0$

Podstawiam $x^2=t$ w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać:

$t^2+6t+5=0$

$a=1$ $b=6$ $c=5$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=6^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16$

$\Delta>0$ wyznaczamy dwa miejsca zerowe:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow t_1=\frac{-6-\sqrt{16}}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow t_1=\frac{-6+\sqrt{16}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Wracamy do podstawienia $x^2=t$

$x^2=-5$ $\vee$ $x^2=-1$

$x\in\emptyset$ $x\in\emptyset$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań $=\emptyset$)

Przykład 5

Rozwiąż równania:

$$5x - \frac{15}{x} = 10$$

Rozwiązanie

Założenie : $x \neq 0$

$Df : x \in R/\{0\}$

$$5x - \frac{15}{x} = 10 / \cdot x$$

$5x^2 - 15 = 10x$

$5x^2 - 10x - 15 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)$

$\Delta = 400$

$\sqrt{\Delta} = 20$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 20}{10} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 20}{10} = 3$$

$$\frac{8}{4 - x} = \frac{x}{x - 4}$$

Założenie: $4 - x \neq 0$ i $x - 4 \neq 0$

$x \neq 4$ i $x \neq 4$

$Df : x \in R/\{4\}$

$8 \cdot (x - 4) = (4 - x) \cdot x$

$8x - 32 = 4x - x^2$

$x^2 + 4x - 32 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$

$\sqrt{\Delta} = 12$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 12}{2} = -8$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

$x_2 \notin Df$, stąd rozwiązaniem jest $x_1 = -8$

ZADANIA

3.2.1 Rozwiąż równania:

a) $-x^2-2=0$
b) $x\sqrt{3}-\sqrt{2}x^2=0$
c) $x(x-3)=0$
d) $(x-4)(x+2)=0$
e) $(x-2)^2-9=0$
f) $16-(x+3)^2=0$
g) $(3x+2)^2=25$
h) $x^2+6x+5=0$
i) $x^2-10x+25=0$
j) $x^2+2x-120=0$
k) $12x^2+7x-12=0$
l) $3x^2-7x+2=0$
m) $9x^2-24x-20=0$
n) $-3x^2+1{,}5x+54=0$

Odpowiedź:

a) brak rozwiązania
b) $x=0$ lub $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $x=0$ lub $x=3$
d) $x=-2$ lub $x=4$
e) $x=-1$ lub $x=5$
f) $x=-7$ lub $x=1$
g) $x=-\frac{7}{3}$ lub $x=1$
h) $x=-5$ lub $x=-1$
i) $x=5$
j) $x=-12$ lub $x=10$
k) $x=-\frac{4}{3}$ lub $x=\frac{3}{4}$
l) $x=\frac{1}{3}$ lub $x=2$
m) $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=\frac{10}{3}$
n) $x=-4$ lub $x=\frac{9}{2}$

3.2.2 Rozwiąż równania:

a) $(3x-2)^2+2=6$
b) $3(4x-1)^2+1=28$
c) $2(5x-2)^2+5=13$
d) $x(3x-5)=12$
e) $(2x-5)^2+(x+4)^2=41$
f) $\frac{x(x-2)}{5}-3x=2x^2+\frac{x(x+1)}{3}$
g) $(x-2)(x+5)-(x-7)(x+1)=(x+2)(x-3)$
h) $3x^2-6x-24=0$
i) $4x^2-20x+25=0$
j) $x^2-2x+4=0$
k) $4x^2-4x-1=0$
l) $3x^2+2x+2=3x+4x^2-3$

Odpowiedź:

a) 0 lub $\frac{4}{3}$
b) $-\frac{1}{2}$ lub 1
c) 0 lub $\frac{4}{5}$
d) $-\frac{4}{3}$ lub 3
e) 0 lub $\frac{12}{5}$
f) $-\frac{7}{4}$ lub 0
g) $5-2\sqrt{7}$ lub $5+2\sqrt{7}$
h) -2 lub 4
i) $\frac{5}{2}$
j) brak rozwiązań
k) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
l) brak rozwiązań

3.2.3 Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+3}{x-1}=0$

b) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$

c) $\frac{x+1}{4x}=\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{2x-3}{6x}=\frac{2}{2x+3}$

e) $\frac{5-x}{5x}=\frac{2}{5x}$

f) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{-3}{3x-1}$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$

b) $x=-1$ $x=3$

c) $x=2-\sqrt{5}, x=2+\sqrt{5}$

d) $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}, x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x=-5-5\sqrt{2}, x=-5+5\sqrt{2}$

f) równanie sprzeczne

3.2.4 Rozwiąż równania:

a) $x^4-4=0$

b) $x^4-4x^2=0$

c) $x^4-x^2-2=0$

d) $x^4-5x^2+4=0$

e) $x^4-4x^2+4=0$

f) $x^4+2x^2-3=0$

g) $x^4-x^2+1=0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą $x^2=t$, dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe.)

Odpowiedź:

a) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

b) 0,–2,2

c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

d) –1,1,–2,2

e) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

f) –1,1

g) brak pierwiastków rzeczywistych

3.3 *Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

TWIERDZENIE[19]

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ ma rozwiązania x_1, x_2, to: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Dowód

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\cdot\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4a\ \right)}{4a^2}=\frac{4a}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

UWAGA!

Wzory Viete'a mają szerokie zastosowanie przy **rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.**

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

Jeżeli...

- $\Delta<0$ – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta=0$ – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta\geq 0$ – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta>0$ – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

$x_1\cdot x_2<0$ to są one różnych znaków,

$x_1\cdot x_2>0$ – to mają one takie same znaki,

$x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2>0$ – to są one dodatnie,

$x_1\cdot x_2>0$ i $x_1+x_2<0$ – to są one ujemne.

Przykład 1 Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji $y=x^2+5x+6$.

Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości a, b, c do wzorów:

19 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 19.02.2013.

$$x_1 + x_2 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_2 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba –5, a iloczynem liczba 6?”. Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb –2 i –3.

Rozwiązaniami są więc: $x_1 = -2$ i $x_2 = -3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

3.3.1 Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a, oraz zastosuj je tak, aby uzyskać:

a) kwadrat sumy pierwiastków,

b) sumę kwadratów pierwiastków,

c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków,

d) kwadrat różnicy pierwiastków,

e) sumę sześcianów pierwiastków.

Odpowiedź:

a) $(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$

b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$

d) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{c}{a}$

e) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$
$\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\cdot\frac{c}{a}\right)$

3.3.2 Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$,

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2-300x-200=0$,

c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2-x+21=0$.

Odpowiedź:

a) $-\frac{115}{203}$ b) 90400 c) $\frac{43}{441}$

Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2+mx-m=0$ ma:

a) dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta>0$

Z założenia $m^2+4m>0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$

a) jeden pierwiastek

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta=0$

Z założenia $m^2+4m=0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m = -- 4$, $m = 0$

nie ma pierwiastków

Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy $\Delta<0$

Z założenia $m^2+4m<0$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie $m\in(-4;0)$

ZADANIA

3.3.3 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a) $-2x^2+3mx-1=0$ b) $mx^2+2x+m=0$

Odpowiedź:

a) $m = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $m = -1$

3.3.4 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 1 = 0$ ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

Odpowiedź: $m \in \left(-\infty; 2\sqrt{2}\right)$

3.3.5 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Odpowiedź: $m \in (-1;2)$

3.3.6 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Odpowiedź: brak rozwiązań

3.3.7 Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$ jest najmniejsza?

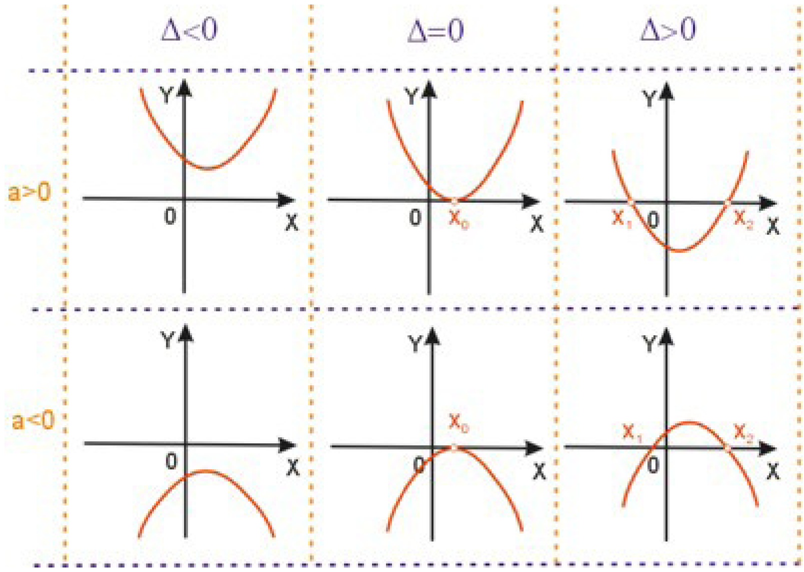
Odpowiedź: $m = 4$

3.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego.** Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika *a* oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

Przykład 1[20]

$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$

Krok 1. Wyznaczamy miejsca zerowe, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia.
Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

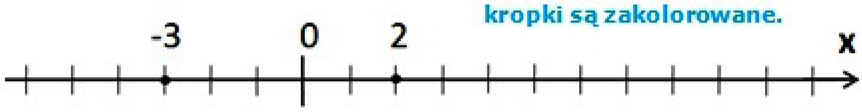
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Krok 2. Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

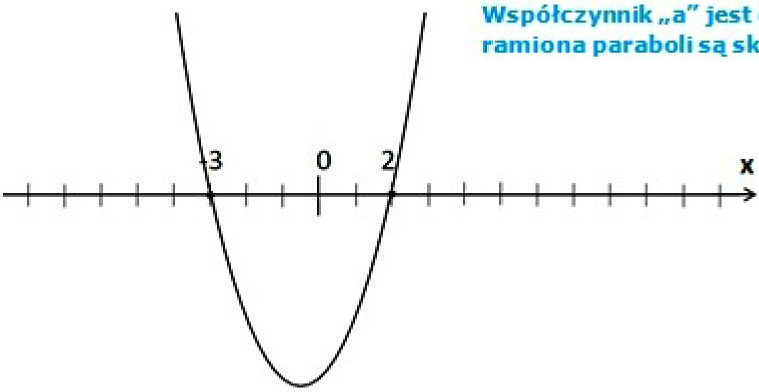
- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

Ze względu na znak nierówności (≥)
kropki są zakolorowane.



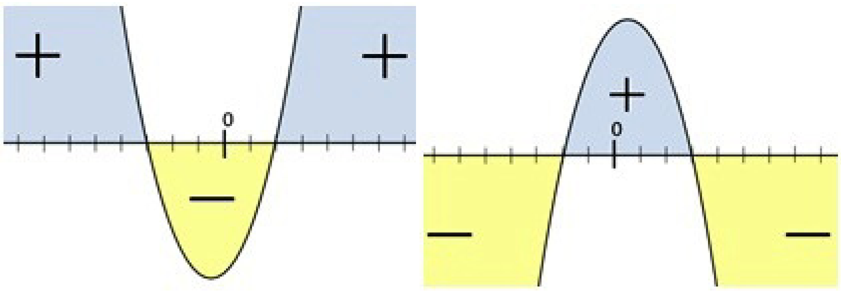
- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istoty jest jedynie kierunek ramion paraboli.

20 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.



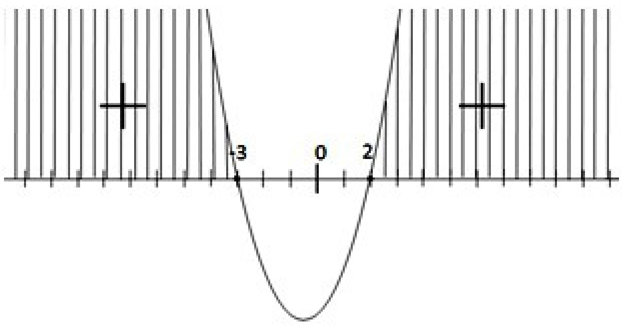
Współczynnik „a" jest dodatni (2), dlatego ramiona paraboli są skierowane w górę.

Krok 3. Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zacznijmy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę). Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy" (<) lub „mniejszy lub równy" (≤), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy" (>) lub „większy lub równy" (≥), zakreślamy obszar dodatni. W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem: ≥, dlatego zakreślamy obszar dodatni:

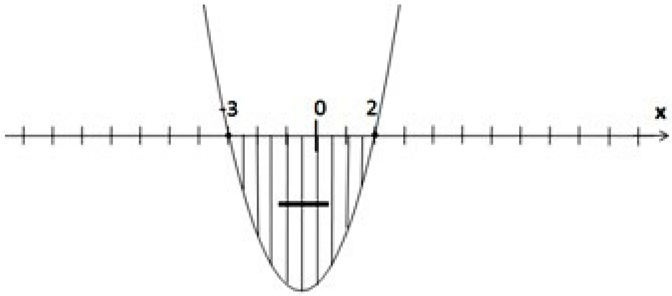


Krok 4. Odczytujemy rozwiązanie. Jest nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in \left(-\infty, \ -3\right\rangle \cup \left\langle 2, \ \infty\right)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę (≤), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



$x \in \langle -3,\ 2 \rangle$

INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI…

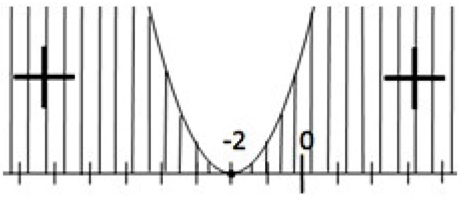
Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie posiadać go wcale. Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

➢ Z jednym miejscem zerowym – gdy ramiona paraboli są skierowane w górę

Przykłady

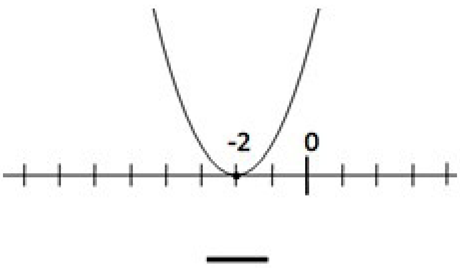
Znak nierówności ≥



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$x \in R$

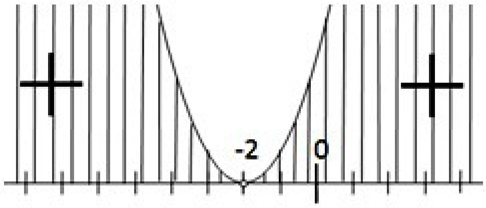
Znak nierówności ≤



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$$x = -2$$

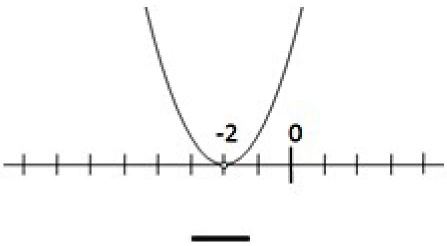
Znak nierówności >



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$$x \in R \setminus \{-2\}$$

Znak nierówności <



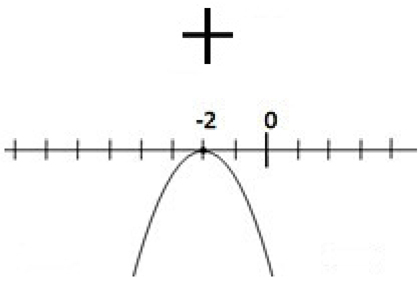
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$$x \in \varnothing$$

- gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

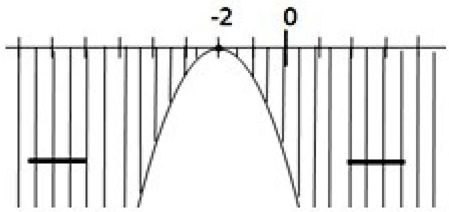
Znak nierówności ≥



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba: –2). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek (–2).

$$x = -2$$

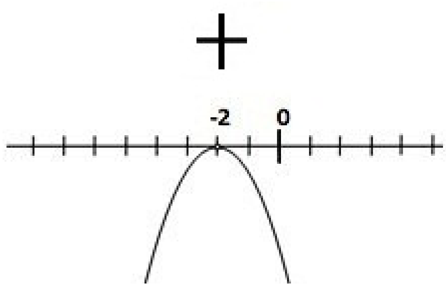
Znak nierówności ≤



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero (–2), także należy do rozwiązania.

$$x \in R$$

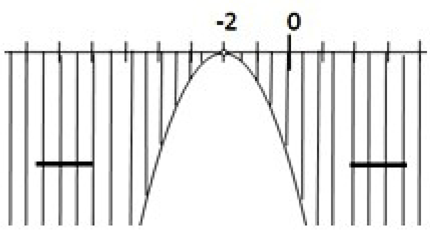
Znak nierówności >



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$$x \in \varnothing$$

Znak nierówności <



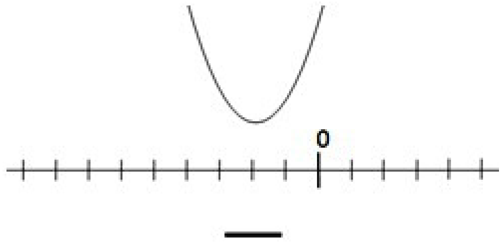
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: –2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla $x = -2$, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba –2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

- Bez miejsc zerowych
- gdy ramiona paraboli są skierowane w górę

Przykłady:

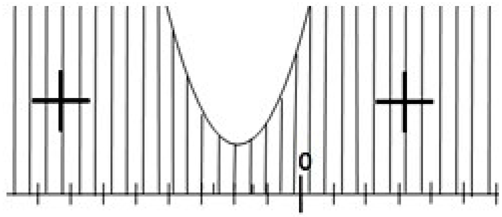
Znak nierówności ≤ lub <



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$x \in \varnothing$

Znak nierówności ≥ lub >

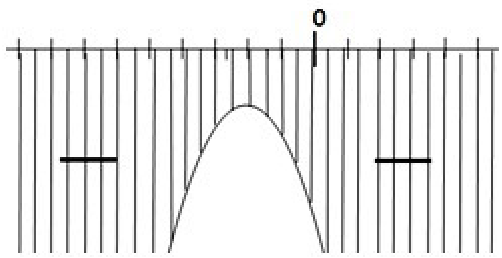


Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.
$x \in R$

- gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

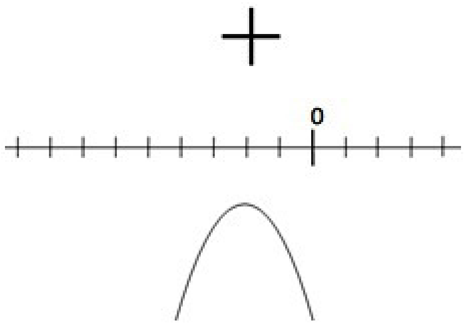
Przykłady:

Znak nierówności ≤ lub <



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.
$x \in R$

Znak nierówności ≥ lub >



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$x \in \varnothing$

ZADANIA

3.4.1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)\rangle 0$

b) $x(x+4)\langle 0$

c) $(x-7)(x+6)\geq 0$

d) $2x^2-8x\leq 0$

e) $x^2-16\rangle 0$

f) $x^2\leq 4$

g) $8x^2\geq 24$

h) $48\langle x^2$

i) $x^2-2x-8\geq 0$

j) $x^2+12x+24\rangle 0$

k) $x^2+12x+24\langle 0$

l) $x^2\langle -4(x+1)$

m) $(2x-6)^2\leq 4x-13$

n) $(2x-6)x\geq 0$

o) $(x-1)(x+3)>0$

p) $(2-x)(2x-3)\leq 0$

q) $-3x^2-8x>0$

r) $6x-2x^2\leq 0$

s) $3x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\leq 0$

t) $(x-3)(3x-4)-(x-3)(x+2)>0$

u) $(x+5)^2+(x+5)(x-3)\leq 0$

v) $(3x-4)(x+2)>(x+2)(x-1)$

w) $(4x-5)(x+4)>(x+4)^2$

x) $9x^2+6x+4<3$

y) $-\frac{3}{4}x^2+x+4\leq 10$

z) $5x-10<2x^2$

Odpowiedź:

a) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

b) $(-4,0)$

c) $\left(-\infty,-6\right\rangle\cup\left\langle 7,+\infty\right)$

d) $\langle 0,4\rangle$

e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

f) $\langle -2,2\rangle$

g) $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{3},+\infty\right)$

h) $(-\infty,-4\sqrt{3})\cup(4\sqrt{3},+\infty)$

i) $\left(-\infty,-2\right\rangle\cup\left\langle 4,+\infty\right)$

j) $(-\infty,-6-\sqrt{3})\cup(-6+2\sqrt{3},+\infty)$

k) $\left(-6-2\sqrt{3},-6+2\sqrt{3}\right)$

l) $\varnothing$

m) $\frac{7}{2}$

n) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

o) $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

p) $(-\infty,\frac{3}{2}>\cup<2,\infty)$

q) $(0,4)$

r) $(-\infty,0>\cup<3,\infty)$

s) $\left\langle -\frac{1}{6},1\right\rangle$

t) $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

u) $\langle -5,-1\rangle$

v) $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},\infty)$

w) $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

x) brak rozwiązania

y) $x\in R$

z) $x\in R$

3.4.2 Znajdź wszystkie liczby całkowite x, spełniające nierówność:

a) $(x-1{,}2)(x-3{,}4)\langle 0$

b) $-x^2+3{,}6x\geq 0$

c) $x^2-6{,}25\langle 0$

d) $2x^2-0{,}6x-16{,}2\langle 0$

Odpowiedź:

a) $\{2,3\}$

b) $\{0,1,2,3\}$

c) $\{-2,-1,0,1,2\}$

d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

3.4.3 Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności, oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a) $x^2-1\rangle 0,\ x^2+3x\leq 0$

b) $9x^2+9x+2\langle 0,\ x^2-9x+2\langle 0$

c) $x2\geq 9$; $(x+7)(x-3)(5x+1)>0$

Odpowiedź:

a) $\langle -3,-1\ );\ x\in(\ -\infty,0\ \rangle\cup(1,+\infty)$

b) zbiór pusty; $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

c) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)\setminus\{-7\}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[21] Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa:

a) $-\frac{7}{2}$ b) $-\frac{7}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{4}$

21 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 19.02.2013..

Odpowiedź: c

2.[22] Rozwiąż nierówność: $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in < -2,4 >$

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 < 4$ jest:

a) $(-2;2)$ b) $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$ c) $(-\infty;2)$ d) $<-2;2>$

Odpowiedź: a

4. Uzasadnij, że równanie $x^2 + (b - 2)x - 2b = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej b ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

5.[23] Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-3,3)$

6.[24] Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x + 6) < 0$ jest:

a) $(-6;0)$ b) $(0;6)$ c) $(-\infty;-6) \cup (0;\infty)$ d) $(-\infty;0) \cup (6;\infty)$

Odpowiedź: a

7. Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty,1 > \cup < 7,\infty)$

8.[25] Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Odpowiedź: $x \in (-2,5)$

9.[26] Liczba wszystkich rozwiązań równania $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$ jest równa:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

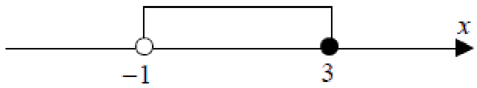
Odpowiedź: d

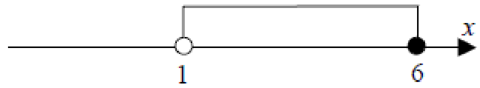
10. Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

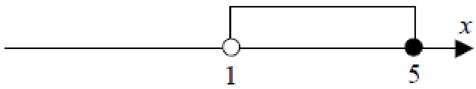
Odpowiedź: $x \in (-\infty,-\frac{1}{2} > \cup < 2,\infty)$

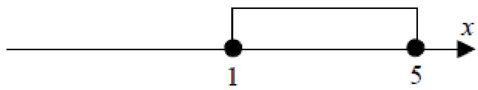
11.[27] Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x - 1)(x - 5) \leq 0$ i $x > 1$.

22 Zadanie 2,3,4: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 19.02.2013..
23 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012–listopad.pdf, 19.02.2013.
24 Zadanie 6: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 19.02.2013.
25 Zhttp://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf,19.02.2013.
26 http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 19.02.2013.
27 Zadania 11,12: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013.

A. 

B. 

C. 

D. 

Odpowiedź: d

12. Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

13.[28] Do zbioru rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) < 0$, należy liczba:

a) 9 b) 7 c) 4 d) 1

Odpowiedź: d

14. Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$.
Odpowiedź: $x \in \langle -1, 2 \rangle$

15.[29] Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 4 i 1 lub –4 i –1

16. Wartość k, dla której jeden z pierwiastków równania $x^2 + 9x + k = 0$ jest równy –3, wynosi:
a) –6 b) –18 c) 18 d) 6
Odpowiedź: c

17. Równanie $2x^2 - 4x - 3 = 0$:
a) nie ma rozwiązań,

b) ma jedno rozwiązanie,

c) ma dwa rozwiązania,

d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: c

18. Rozwiązaniem równania $2(x-2)^2 = (x-2)(x+3)$ jest:

a) $x = -2$ i $x = -1$

b) $x = 7$

---
28 Zadania 13,14: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 19.02.2013..
29 Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń..

c) $x = 2$ i $x = 7$

d) $x = 1$ i $x = 2$

Odpowiedź: c

19. Podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich spełniających nierówność $(3-x)(3+x)>0$ ma:

a) dwa elementy, b) skończoną liczbę elementów,

c) co najmniej 4 elementy, d) nieskończenie wiele elementów.

Odpowiedź: a

20. Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x-1)^2 \geq 5(x-1)$ jest:

a) $(-\infty, 4\rangle$ b) $\langle -4, 1\rangle$ c) $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, \infty)$ d) $\langle 1, \infty)$

Odpowiedź: b

21. Rozwiązaniem równania $x^2 + x = (x+1)^2 - 7(x+2)$ jest liczba:

a) $\frac{15}{8}$ b) $-\frac{13}{8}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $-\frac{13}{6}$

Odpowiedź: d

22. Ile liczb pierwszych zawiera zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej $(x+1)(x-10) < 0$?

a) 5 b) 4 c) więcej niż 10 d) 6

Odpowiedź: b

23. Kwadrat piątej części stada małp pomniejszonej o 3 schował się w jaskini. Jedna małpa pozostała na drzewie. Ile małp liczy stado?

Odpowiedź: 50 małp

24. Liczby $2a-2$, $2a+2$, $a+1$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału liczbowego należy liczba a?

Odpowiedź: $a \in (3, \infty)$

25. Rozwiąż równanie: $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

Odpowiedź: $x \in \{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$

26. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest równa 155. Wyznacz te liczby.

Odpowiedź: –9, –7, –5 lub 5, 7, 9

3.5 *Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego

Teraz nauczę się rozwiązywać układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań metodą algebraiczną:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podstawiamy wyznaczone y z pierwszego równania do drugiego równania i otrzymujemy:

$$2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 / \div 2$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy $\Delta = 9$, a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego: $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone x_1 i x_2 do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 1 \quad = -1$$

$$y_2 = 2x_2 + 1 \quad = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji: $y = 2x^2 + 20x + 47$ i $y = 2x + 1$ w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

ZADANIA

3.5.1 Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną.

a) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7{,}2 \end{cases}$

Odpowiedzi:

a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

b) brak rozwiązania

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -6\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -7\frac{1}{2} \end{cases}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[30] Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

2.[31] Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 *k*m mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: 28 km

3.[32] W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Odpowiedź: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m × 8 m, a w drugim hotelu 35 m × 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m × 12 m, a w drugim hotelu 25 m × 14 m.

4.[33] Turysta pokonał pieszo trasę o długości 30 km z miejscowości *A* do miejscowości *B* ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $v = 6$ km/h, $t = 5$h

5.[34] Z miast A i B, odległych o 330 km, wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km, licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Odpowiedź: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

30 Zadanie 1: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.02.2013.
31 Zadanie 2: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
32 Zadanie 3: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
33 Zadanie 4: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 20.02.2013.
34 Zadanie 5: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 20.02.2013.

6.[35] Miasto *A* i miasto *B* łączy linia kolejowa o długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąć pospieszny pokonał trasę z miasta *A* do miasta *B*.

Odpowiedź: Pociąg pospieszny pokonał tę trasę w 2,5 godziny.

7.[36] Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440 zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż planowano, co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Podaj:

a) ilu uczniów pojechało na wycieczkę;
b) jaki był całkowity koszt wycieczki?

Odpowiedź: 45 osób, koszt dla uczestnika to 32 zł

8. Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań). W sumie rozwiązała 448 zadań. Jeśli rozwiązywałaby codziennie o 4 zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o 2 dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

Odpowiedź: 16 dni, 28 zadań

35 Zadanie 6: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 20.02.2013.
36 Zadania 7-8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

4 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych
- współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu.

4.1 Jednomian kwadratowy

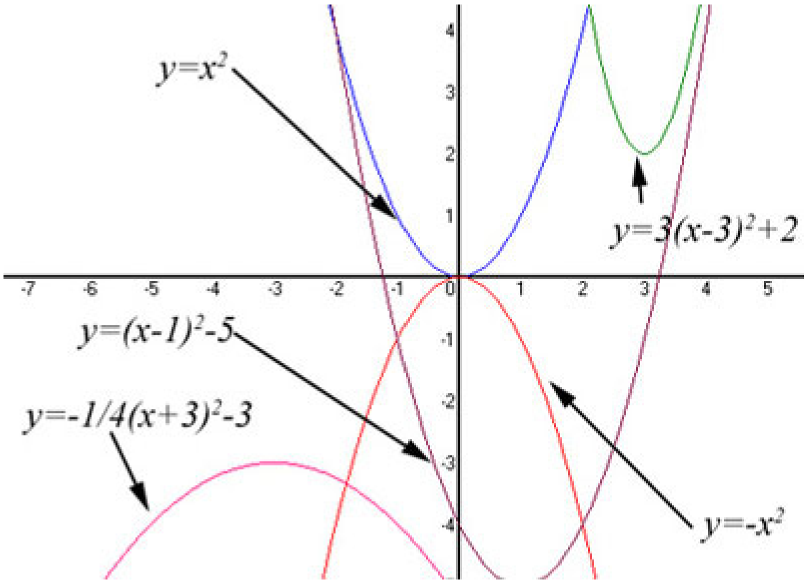
Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**.[37]

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Gdy współczynnik a jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry. Gdy współczynnik a jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

37 http://www.moskat.pl/szkola/matematyka/b_f_kwadratowa.php.



Przykłady funkcji kwadratowych:

$y = 5x^2 + 9x - 4$

$y = -x^2 - x$

$y = 2x^2 - 7$

$y = x^2$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy). Jest to funkcja w postaci $y = ax^2$. Jest to więc przypadek, w którym $a \neq 0$ i $b = c = 0$.

Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$y = x^2$

$y = -x^2$

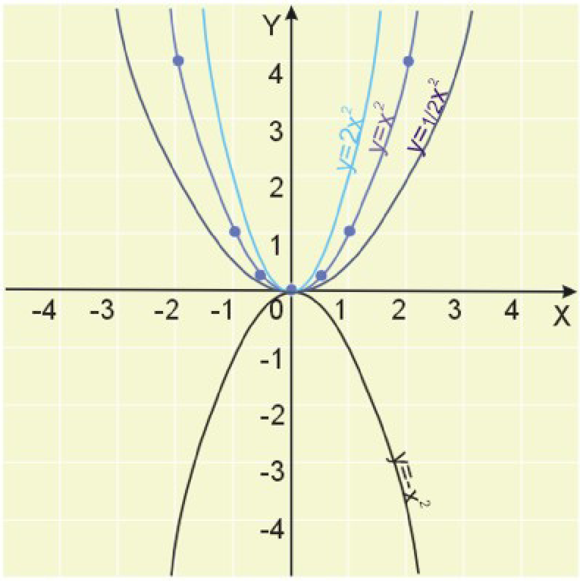
$y = 2x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie *a* jest dowolną liczbą.

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

x	–2	–1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	–4	–1	0	–1/4	–1	–4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2

Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji:



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**. Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik $a > 0$, oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik $a < 0$.
- Im większy jest współczynnik a, tym parabola jest „węższa".
- Parabola posiada jeden **wierzchołek** w punkcie (0,0).
- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór $\langle 0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz $(-\infty;0\rangle$, gdy $a < 0$.
- Oś OY jest **osią symetrii** paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.
- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale $(-\infty;0)$ i rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a > 0$, oraz rośnie w przedziale $(-\infty;0)$ i maleje w przedziale $(0;+\infty)$, gdy $a < 0$.
- Gdy $a < 0$, funkcja osiąga wartość największą (**maksimum**) w punkcie $x = 0$ równe 0, natomiast dla $a > 0$ funkcja osiąga wartość najmniejszą (**minimum**) w punkcie $x = 0$ równe 0.
- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe, gdy $x_0 = 0$.

ZADANIA

4.1.1 Sporządź tabelkę wartości funkcji i naszkicuj wykres funkcji f:

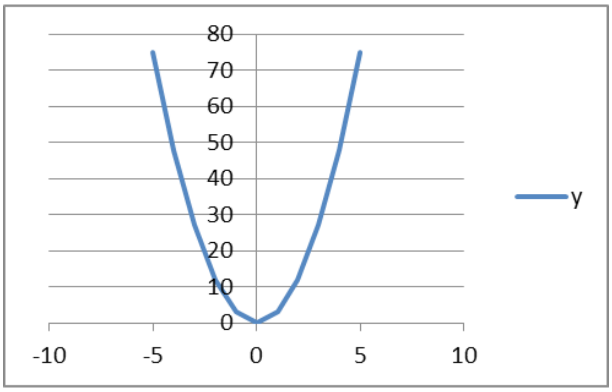
a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

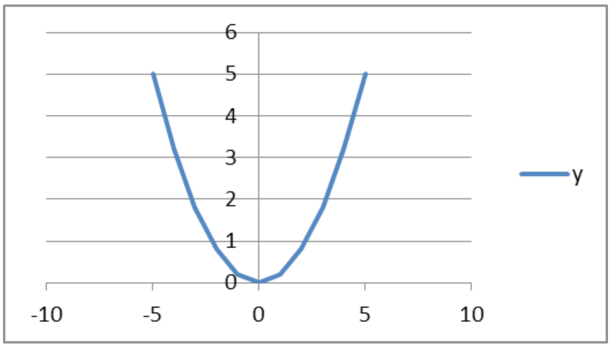
c) $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

Odpowiedź:

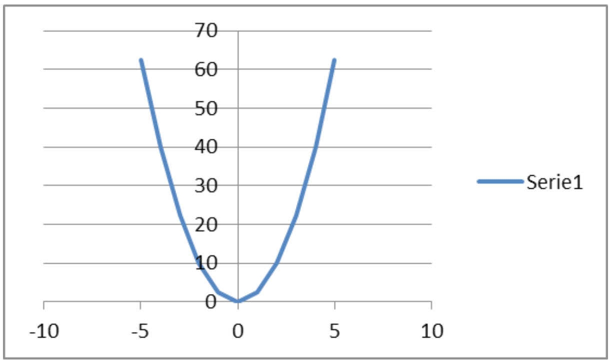
a)



b)



c)



4.1.2 Sprawdź, czy punkt K należy do paraboli $y = 4x^2$:

a) K = (4,32) b) K = (–2,16) c) $K = \left(-\frac{1}{4},1\right)$ d) $K = \left(\frac{1}{2},1\right)$

Odpowiedź:

a) nie należy b) należy c) nie należy d) należy

4.1.3 Omów następujące własności,

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x)=-x^2$

c) $f(x)=2x^2$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$

Odpowiedź:

a) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

b) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

c) Ramiona skierowane w górę; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja maleje w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja rośnie w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą.

d) Ramiona skierowane w dół; oś OY osią symetrii; W = (0,0); funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0>$, funkcja maleje w przedziale $<0,\infty)$; dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą.

4.2 Parabola w układzie współrzędnych

Teraz nauczę się interpretować współczynniki występujące w wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników a, b, c.

Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

1. znaku współczynnika a, który warunkuje skierowanie ramion paraboli,

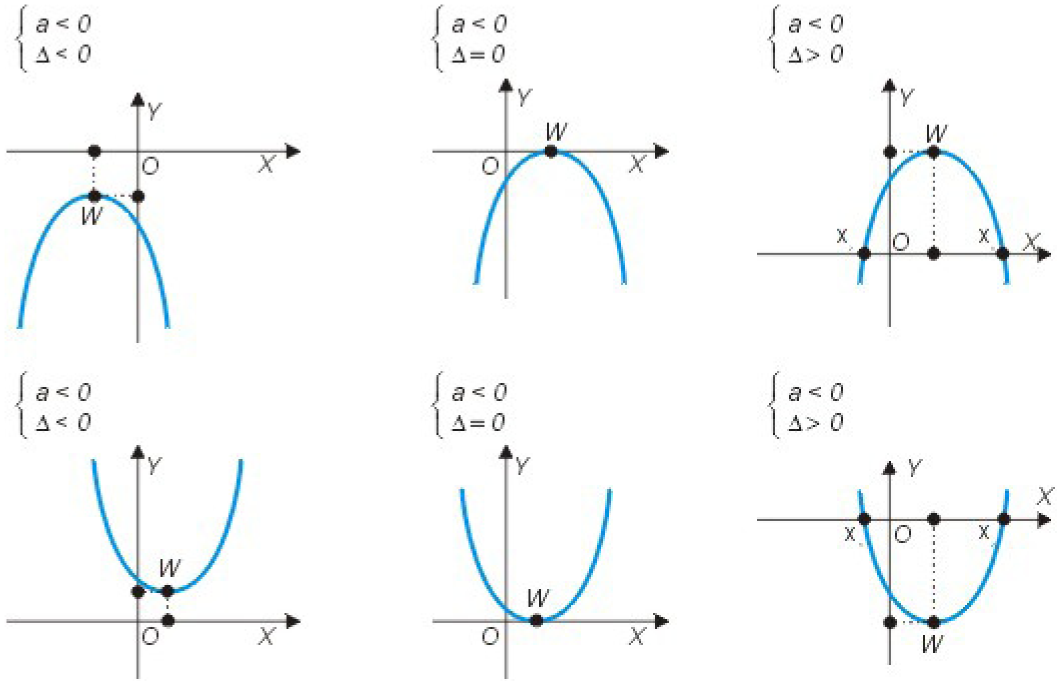
2. wartości wyróżnika Δ, która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią OX:

dla $\Delta < 0$ parabola leży pod ($a < 0$) lub nad ($a > 0$) osią OX, nie ma z osią OX punktów wspólnych,

dla $\Delta = 0$ parabola jest styczna do osi OX,

dla $\Delta > 0$ parabola przecina oś OX w dwóch punktach.

Rożne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



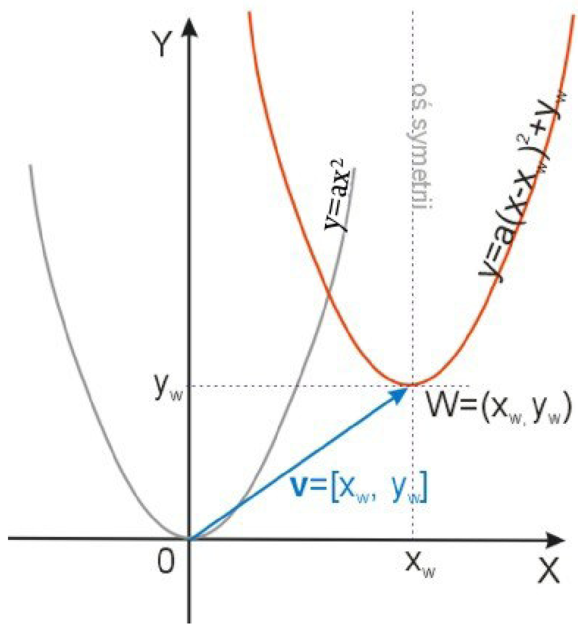
Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$ jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [x_w, y_w]$, przy czym:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$$

W przypadku dodatniego współczynnika a, mamy:



Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli $a > 0$, w dół w przypadku gdy $a < 0$.

- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli $\Delta > 0$.

- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta = 0$.

- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$.

- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.

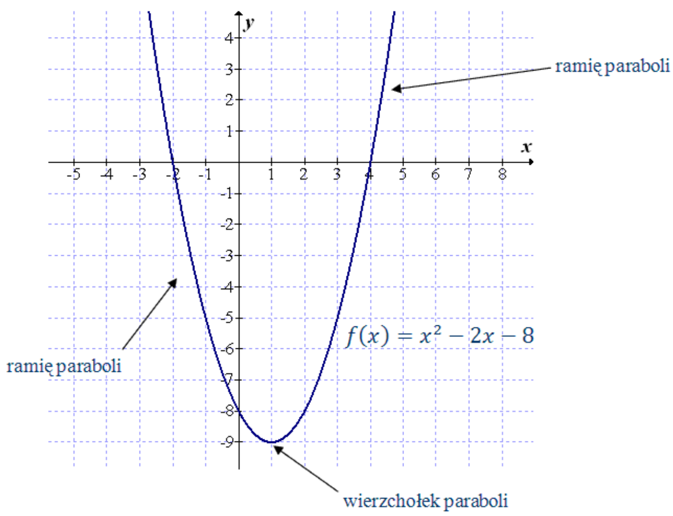
- Funkcja przyjmuje minimum dla $a > 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

- Funkcja przyjmuje maksimum dla $a < 0$ w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ równe $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

- Gdy $a > 0$, funkcja maleje w przedziale $x = (-\infty; \frac{b}{2a})$ i rośnie w przedziale $y = (\frac{b}{2a}; +\infty)$.

- Gdy $a < 0$, funkcja rośnie w przedziale $x = (-\infty; \frac{b}{2a})$ i maleje w przedziale $y = (\frac{b}{2a}; +\infty)$.

ZADANIA



4.2.1 Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x2 - 2x - 8$ (wykres funkcji powyżej).

a) Dziedzina: …

b) Zbiór wartości: ZW = …

c) Miejsca zerowe: …

d) Współrzędne wierzchołka: W = …

e) Oś symetrii to: …

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in$ …

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in$ …

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne: …

i) Monotoniczność: – funkcja jest rosnąca w przedziale … – funkcja jest malejąca w przedziale …

Odpowiedź:

a) Dziedzina: D = R.

b) Zbiór wartości: ZW = $\langle -9; +\infty)$.

c) Miejsca zerowe: funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 4$.

d) W = (1,–9)

e) Oś symetrii: $x = 1$

f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (4 +\infty)$.

g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in (-2; 4)$.

h) Punkt przecięcia z osią y-ów ma współrzędne: (0, –8).

i) Monotoniczność: funkcja jest niemonotoniczna (jest jedynie monotoniczna przedziałami) – funkcja jest rosnąca w przedziale $x \in (1, \infty)$, – funkcja jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty, 1\ \infty)$.

4.2.1 Naszkicuj wykres jednomianu funkcji $f(x)$, a następnie przesuwając równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile – jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a) $y = x^2$, $\vec{u} = [0,3]$

b) $y = -x^2$, $\vec{u} = [-1,0]$

c) $y = 2x^2$, $\vec{u} = [-3,2]$

Odpowiedź:

a) $y = x^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 3, \infty)$, brak miejsc zerowych; W = (0,3);

funkcja rośnie $(0, \infty)$; funkcja maleje $(-\infty, 0)$

b) $y = -(x+1)^2$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $(-\infty, 0 >$, jedno miejsce zerowe $x = -1$; W = (–1,0);

funkcja rośnie $(\infty, -1)$, funkcja maleje $(-1, \infty)$

c) $y = 2(x+3)^2 + 3$, $D_f : x \in R$, zbiór wartości $\langle 2, \infty)$, brak miejsc zerowych; W = (–3,2);

funkcja rośnie $(-3, \infty)$, funkcja maleje $(-\infty, -3)$

4.3 Postacie trójmianu kwadratowego

Teraz nauczę się:

- zapisać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej.

POSTAĆ ILOCZYNOWA TRÓJMIANU KWADRATOWEGO

TWIERDZENIE[38]

Dany jest trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie x_1 i x2 są rozwiązaniami trójmianu.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$y = a(x - x_0)^2$.

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania $(x - 3)(x + 2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod x liczbę 3, to pierwszy nawias się „wyzeruje". Iloczyn jakiejkolwiek liczby przez 0 daje nam 0. Jeśli podstawimy pod drugi x liczbę –2, to ten nawias także nam się „wyzeruje". Rozwiązaniami są więc wartości: $x = 3$ i $x = -2$.

Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Postępujemy analogicznie, jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

38 http://pl.wikibooks.org.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$
$$\sqrt{\Delta} = 6$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

$\Delta > 0$, więc korzystamy ze wzoru: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Widzimy, że $a = 1$.

$(x + 5)(x - 1) = 0$

Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie: $2x^2 - 4x + 2 = 0$.

Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$, stąd $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$, stąd otrzymujemy rozwiązanie: $x = 1$, a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej, korzystając ze wzoru :
$y = a(x - x_0)^2$ Odpowiedź: $2(x-1)^2 = 0$

Sposób II

Policzymy deltę.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$x_0 = 1$

$\Delta = 0$ – korzystamy więc ze wzoru: $y = a(x - x_0)^2$. a jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy: $2(x - 1)^2 = 0$

Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7.

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy że podstawimy te wartości do wzoru.
$$(x-(-3))(x-7) = 0$$
$$(x+3)(x-7) = 0$$
Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:
$$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$$
$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby –3 i 7. Można to sprawdzić przez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

ZADANIA

4.3.1 Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a) $12x^2+11x+2=0$ b) $3x^2-7x+2=0$

c) $2x^2-3x+4=0$ d) $-7x^2+10x-4=0$

e) $5x^2-3x=0$ f) $9x^2-8=0$

g) $2x^2-3x-2=0$ h) $-x^2+x+6=0$

i) $3x^2-5x+4=0$ j) $-4x^2+2x-1=0$

k) $10-2x^2=0$ l) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x=0$

Odpowiedź:

a) $12\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=0$ b) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=0$

c) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

d) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

e) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)=0$

f) $9\left(x^2-\frac{8}{9}\right)=9\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

g) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$

h) $-(x-3)(x+2)=0$

i) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

j) $\Delta<0$, trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe

k) $-2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$

l) $\frac{1}{3}x\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

4.3.2 Podaj pierwiastki trójmiany kwadratowego:

a) $(x-3)(x-30)=0$ b) $2(x-2)(x+5)=0$

c) $\frac{11}{3}(x+15)(x+27)=0$ d) $4x(x+6)=0$

e) $-2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=0$ f) $-2(x+1)\left(x+1-\sqrt{2}\right)=0$

g) $\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right)=0$ h) $(2x-3)(2x-3)=0$

Odpowiedź:

a) $x_1=3, x_2=30$ b) $x_1=2, x_2=-5$

c) $x_1 = -15, x_2 = -27$

d) $x_1 = 0, x_2 = -6$

e) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$

f) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$

g) $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$

h) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

4.3.3 Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$, mając dane pierwiastki:

a) 3 i 5

b) 4 i –9

c) $\frac{1}{3}$ i 7

d) $\frac{2}{7}$ i $-\frac{3}{5}$

e) $\sqrt{2}$ i $1 + \sqrt{2}$

f) $1 + \sqrt{7}$ i $1 - \sqrt{7}$

Odpowiedź:

a) $b = -8, c = 15$

b) $b = 5, c = -36$

c) $b = 7\frac{1}{3}, c = 2\frac{1}{3}$

d) $b = \frac{11}{35}, c = -\frac{6}{35}$

e) $b = -\left(1 + 2\sqrt{2}\right), c = 2 + \sqrt{2}$

f) $b = -2, c = -6$

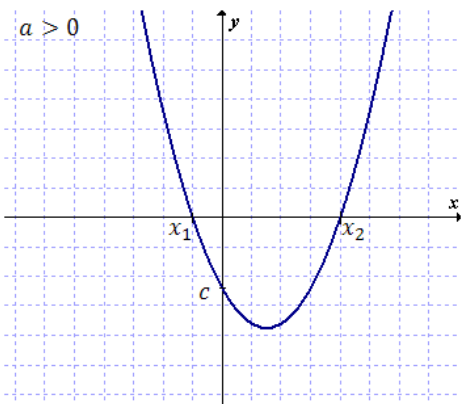
Postać ogólna funkcji kwadratowej

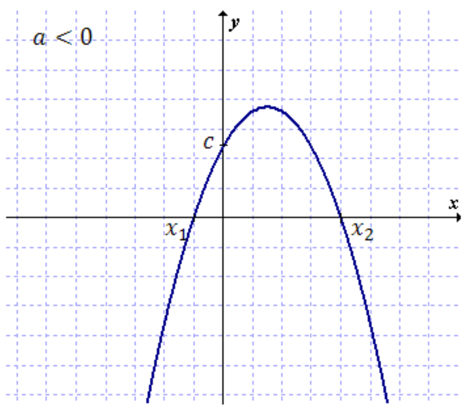
$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY (0, c).

Przykład:





Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami x_1 oraz x_2). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2. Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka W funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie a, p, q są współczynnikami liczbowymi i $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczna funkcji kwadratowej**. Współczynniki p i q to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez $W = (p, q)$. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne p i q ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zaletą postaci kanonicznej jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli. Dodatkowo po współczynniku a możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (gdy $\Delta > 0$) i $f(x) = a(x - x_0)^2$ ($\Delta = 0$) nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze a jest współczynnikiem liczbowym, takim że $a \neq 0$. Literki x_0, x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$.

Uwaga! Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje. Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ($\Delta > 0$), to możemy obliczyć miejsca zerowe x_1 i x_2, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli $\Delta = 0$, to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Zaletą postaci iloczynowej jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku a możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Reasumując

Dla $a \neq 0$ trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

<table>
<tr><td>Postać ogólna</td><td colspan="3">$y = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Postać kanoniczna</td><td colspan="3">$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x-p)^2 + q$,
gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Postać iloczynowa</td><td>$\Delta \langle 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta \rangle 0$</td></tr>
<tr><td>Brak postaci iloczynowej</td><td>$y = a(x - x_0)^2$</td><td>$y = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
</table>

ZADANIA

4.3.4 Wyznacz te wartości parametrów a, b i c, dla których $f(x) = g(x)$:

a) $f(x) = ax^2 - 7x + c$ i $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$ i $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

Odpowiedź:

a) $a = -2$, $b = 7$, $c = -5$

b) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{7}{4}$, $c = -\frac{3}{8}$

4.3.5 Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników a, b i c:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}$

c) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x-2)(x-3)$

e) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

f) $f(x) = (1-x)(3-x) + 6 - 2x$

g) $f(x) = -2(x-3)^2 + 18$

h) $f(x) = 3(x+2)^2 - 6$

i) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$

j) $f(x) = 2\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right)$

Odpowiedź:

a) $f(x) = x^2 - x + 16\frac{1}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{8}$

c) $f(x) = -3x^2 - 24x - 49$

d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

e) $f(x) = -9x^2 + 6x + 5$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

g) $f(x) = -2x^2 + 12x$

h) $f(x) = 3x^2 + 6x + 6$

i) $f(x) = 2x^2 + 18x - 20$

j) $f(x) = 2x^2 + 4\sqrt{2} - 6$

4.3.6 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2 + 20x + 50 = 2(x+p)^2$

b) $3x^2 - 18x + 20 = 3(x+p)^2 + q$

c) $3x^2 - 15x + 25 = a(x+p)^2 + q$

d) $5x^2 + 12x - 6 = a(x+p)^2 + q$

Odpowiedź:

a) $p = -5$

b) $p = 3, q = -7$

c) $a = 3, p = \frac{15}{6}, q = -\frac{75}{12}$

d) $a = 5, p = -1{,}2, q = -13{,}2$

4.3.7 Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a) $f(x) = 4x^2 + 6x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

e) $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2$

g) $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$

h) $f(x) = 2(x-1)(x+10)$

i) $f(x) = 3x(2-3x) + 5$

j) $f(x) = 4(x+5)x$

Odpowiedź:

a) $p = -\frac{3}{4}, q = \frac{3}{2}, f(x) = 4(x + \frac{3}{4}) + \frac{3}{2}$

b) $p = 1, q = 3, f(x) = -2(x-1) + 3$

c) $p = 1, q = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$

d) $p = -2, q = 7, f(x) = -(x+2) + 7$

e) $p = \frac{1}{8}, q = \frac{47}{64}, f(x) = (x - \frac{1}{8}) + \frac{47}{64}$

f) $p = -3, q = -8, f(x) = \frac{2}{3}(x+3) - 8$

g) $p = 4, q = 10, f(x) = -2(x-4) + 10$

h) $p = -4{,}5; q = -50{,}5; f(x) = 2(x + 4\frac{1}{2}) - 50\frac{1}{2}$

i) $p = \frac{1}{3}, q = 6, f(x) = -9(x - \frac{1}{3}) - 6$

j) $p = -2{,}5; q = -25, f(x) = 4(x + 2\frac{1}{2}) - 25$

4.3.8 Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $f(x)=3x^2+x+5$ b) $f(x)=16x^2+8x+1$

c) $f(x)=-2x^2+3x+7$ d) $f(x)=-2x^2+6x+5$

Odpowiedź:

a) brak miejsc zerowych b) jedno miejsce zerowe

c) dwa miejsca zerowe d) dwa miejsca zerowe

4.3.9 Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a) $f(x)=2(x-1)(x+10)$ b) $f(x)=-3(x-2)(x+5)$

c) $f(x)=4(x+5)x$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-6)$

Odpowiedź:

a) $x_1=-10, x_2=1$ b) $x_1=-5, x_2=2$

c) $x_1=-5, x_2=0$ d) $x_1=-1, x_2=6$

4.3.10 Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a) $a=\sqrt{2}, x_1=-4, x_2=\frac{1}{2}$ b) $a=-3, x_1=-2, x_2=0$

c) $a=7, x_0=9$ d) $a=\frac{1}{2}, x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{5}$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\sqrt{2}(x+4)(x-\frac{1}{2})$ b) $f(x)=-3(x+2)x$

c) $f(x)=7(x-9)^2$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$

4.3.11 Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a) $f(x)=(x-1)(x+5)$ b) $f(x)=-(x-6)(x+4)$

c) $f(x)=2(x+1)(x+5)$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

Odpowiedź:

a) $f(x)=(x+2)^2-9$ b) $f(x)=-(x-1)^2+25$

c) $f(x)=2(x+3)^2-8$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+128$

4.3.12 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a) $f(x)=x^2-4x+3$ b) $f(x)=x^2+5x+6$

c) $f(x)=6x^2-5x+1$ d) $f(x)=9x^2+6x-1$

e) $f(x) = -3x^2 + 5$

f) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

g) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

h) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

Odpowiedź:

a) $f(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 2\frac{1}{2})$

b) $f(x) = (x + 3)(x + 2)$

c) $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$

d) $x1 = -\frac{1}{3}(1 + \sqrt{2}), x2 = -\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2})$

e) $f(x) = -3(x - \frac{1}{3}\sqrt{15})\ (x + \frac{1}{3}\sqrt{15})$

f) $f(x) = -2(x - 1)(x + \frac{1}{2})$

g) $f(x) = -2(x - 5)(x + \frac{1}{2})$

h) $x1 = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{37}, x1 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{37}$

4.4. Rysowanie wykresów funkcji[39]

Teraz nauczę się szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.
Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

Poniżej przedstawimy II sposoby rysowania wykresów.

Sposób I

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

1) wierzchołek paraboli,

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych),

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

39 http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html, 21.02.2013.

$$y=-x^2-2x+8$$ a = -1, b = -2, c = 8

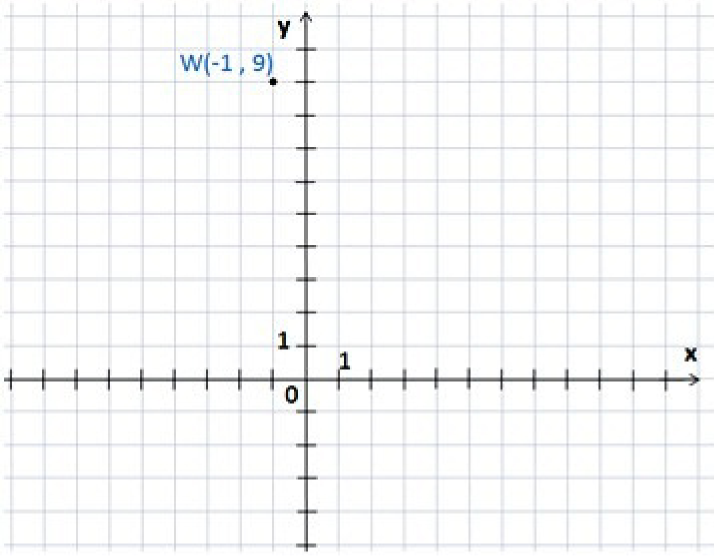
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 8=4+32=36$$

$$p=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\cdot(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-36}{4\cdot(-1)}=\frac{-36}{-4}=9$$

$$W=(-1,\ 9)$$



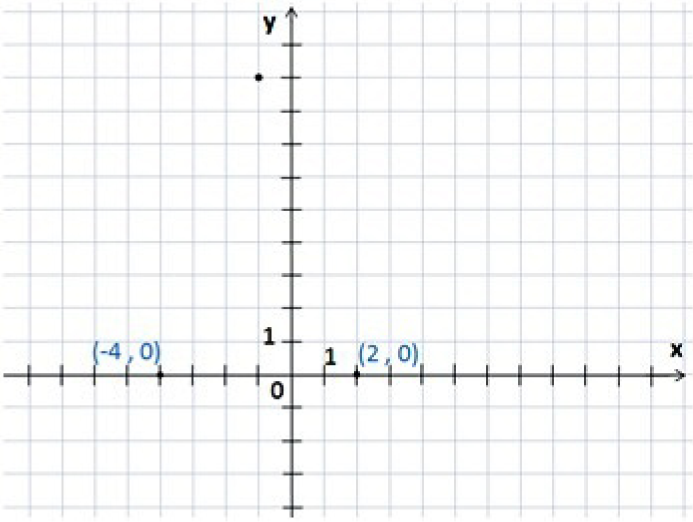
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

UWAGA: Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punktu, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\cdot(-1)}=\frac{2+6}{-2}=\frac{8}{-2}=-4$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\cdot(-1)}=\frac{2-6}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$$

(-4, 0); (2, 0)



3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych: Wybraliśmy argument –5:

Podstawiamy argument -5 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y=-x^2-2x+8=-(-5)^2-2\cdot(-5)+8=-25+10+8=-7$$

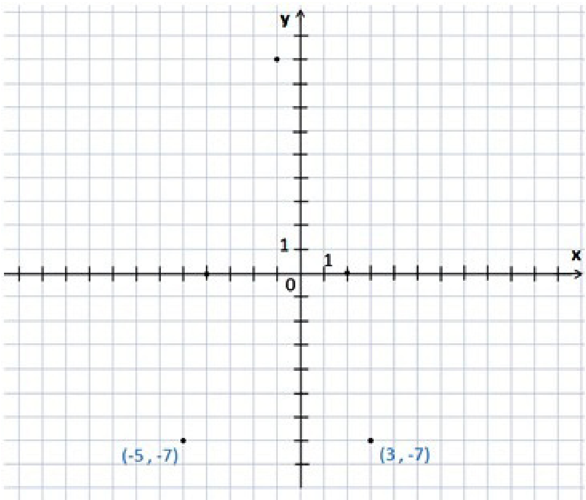
Współrzędne punktu: (–5, –7)

Punkt na prawo od miejsc zerowych: Wybraliśmy argument 3:

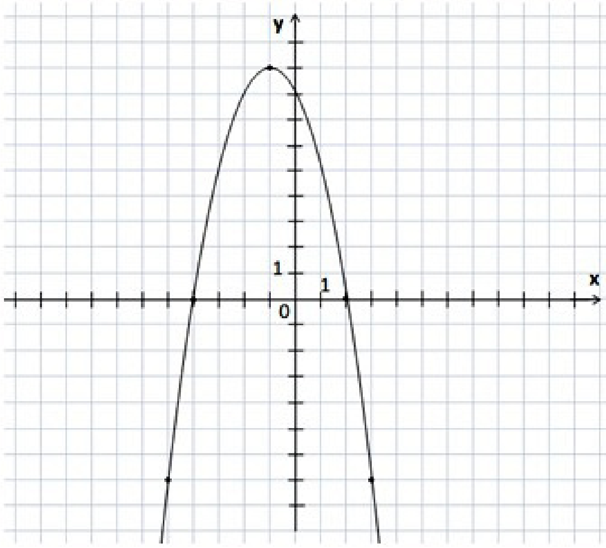
Podstawiamy argument 3 do wzoru funkcji i obliczamy wartość (y):

$$y=-x^2-2x+8=-3^2-2\cdot 3+8=-9-6+8=-7$$

Współrzędne punktu: (3, –7)



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej. Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze zmienionym znakiem!
$X_1 = 1$
$X_2 = -3$

$(1, 0); (-3, 0)$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo. Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

Różnice:

1) wierzchołek paraboli Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru:

Przykład1

$$y = 2(x+5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p" będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q" się nie zmienia:
X = -5
y = 2

$$W=(-5, 2)$$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych) Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo. Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

Sposób II

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

Przykład 2

$y = -2(x+1)^2 - 3$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków). W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszy przypadek funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W=(0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty, znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych: Wybraliśmy:

x = -2

$$y = -2\cdot(-2)^2 = -2\cdot 4 = -8$$

(-2, -8)

x = -1

$$y = -2\cdot(-1)^2 = -2\cdot 1 = -2$$

(-1, -2)

x = 1

$$y = -2\cdot 1^2 = -2\cdot 1 = -2$$

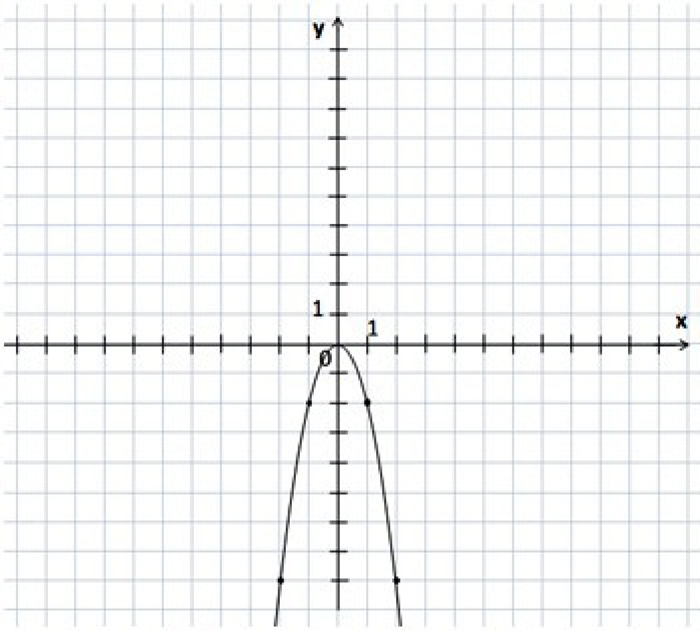
(1, -2)

x = 2

$$y = -2\cdot 2^2 = -2\cdot 4 = -8$$

(2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

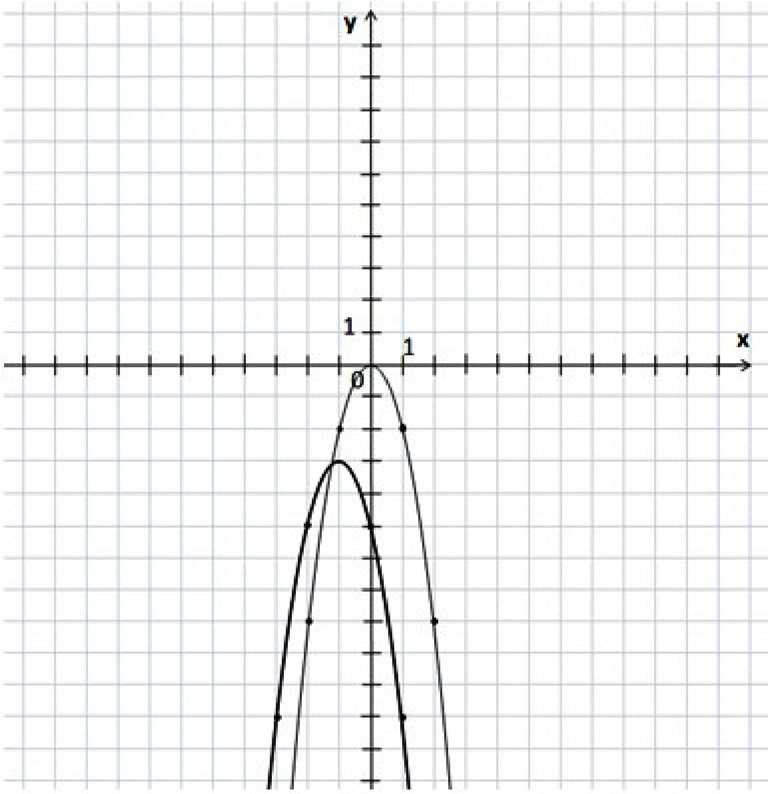


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.



ZADANIA

4.4.1 Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej *f* z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 - 3$

b) $f(x) = x^2 + 8$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

d) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Odpowiedź:

a) z osią OX: 1, –1; z osią OY: –3

b) z osią OX: nie istnieje; z osią OY: 8

c) z osią OX: 2; z osią OY: 4

d) z osią OX: 8, –2; z osią OY: –16

4.4.2 Oblicz:

- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji *f* z osiami układu współrzędnych,
- współrzędne wierzchołka paraboli,
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naszkicuj wykres funkcji *f*, jeśli:

a) $f(x) = x^2 - 9$

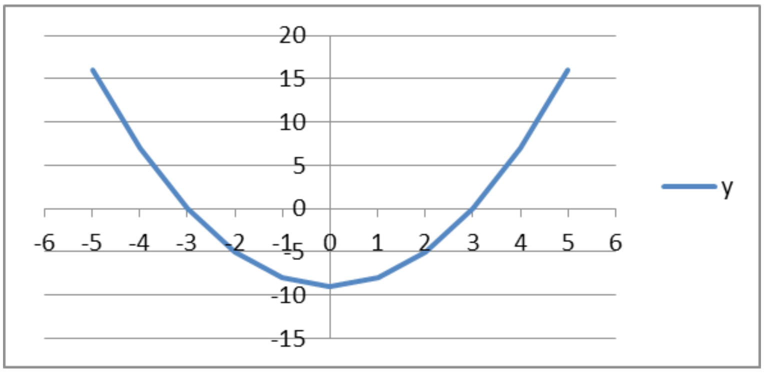
b) $f(x) = x^2 + 6x$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

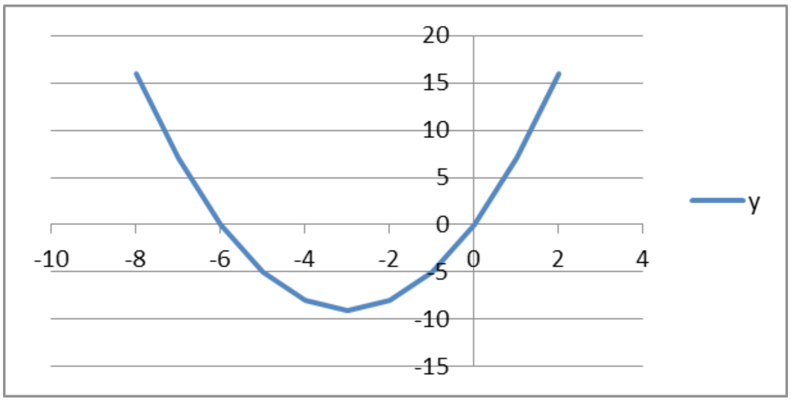
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Odpowiedź:

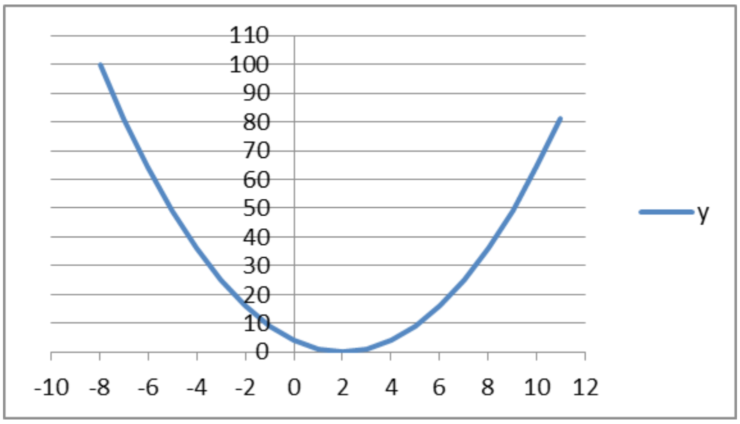
a) z osią OX: ,–3, 3; z osią OY: –9; $p = 0$; $q = -9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$



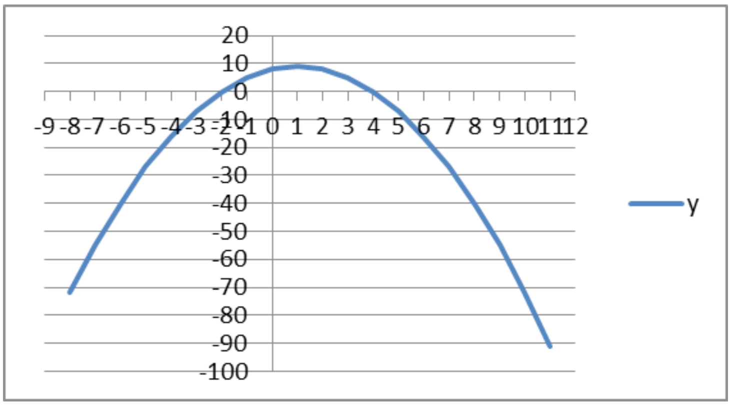
b) z osią OX: 0, –6; z osią OY: 0; $p = -3$; $q = -9$; $x_1 = 0$, $x_2 = -6$



c) z osią OX: 2; z osią OY: 4; $p = 2$; $q = 0$; $x_1 = x_2 = 2$



d) z osią OX: –2, 4; z osią OY: 8; $p = 1$; $q = 9$; $x_1 = -2$, $x_2 = 4$



4.5 Własności funkcji kwadratowej

Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

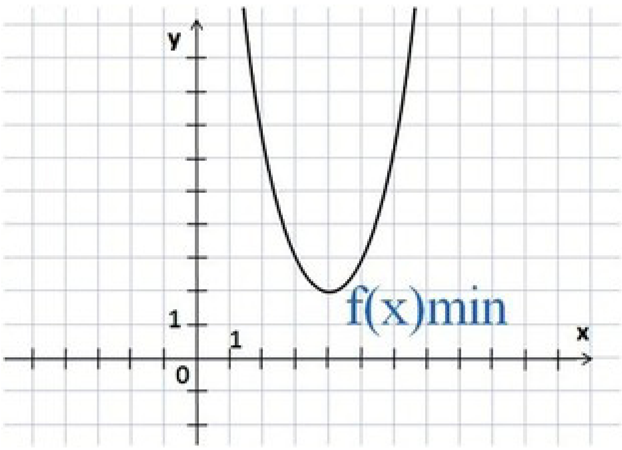
MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum. Przypominamy: Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{\min}$ lub $y_{\min}$. Maksymalną wartości oznaczamy:

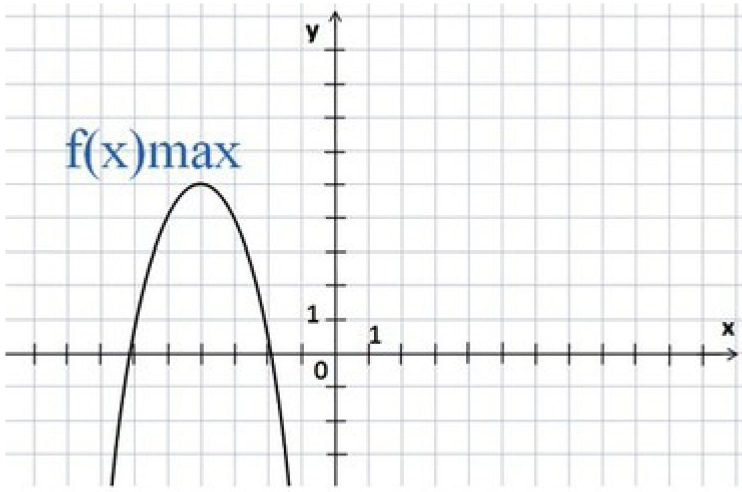
$f(x)_{\max}$ lub $y_{\max}$.

W celu wyznaczenia „– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum," on page 121 funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum, czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniżej położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum,



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyżej położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum.



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „a" funkcji kwadratowej. Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy $a > 0$, w dół, gdy $a < 0$.

Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „a" funkcji ma wartość –3 ($a < 0$). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Dziedzina

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc: $D = R$

Zbiór wartości

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka (q) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka (q):

$$ZW = (-\infty, \; q\rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka (q) a nieskończonością:

$$ZW = \langle q, \; \infty)$$

Przykład 2

$$y=-2x^2-4x+5$$

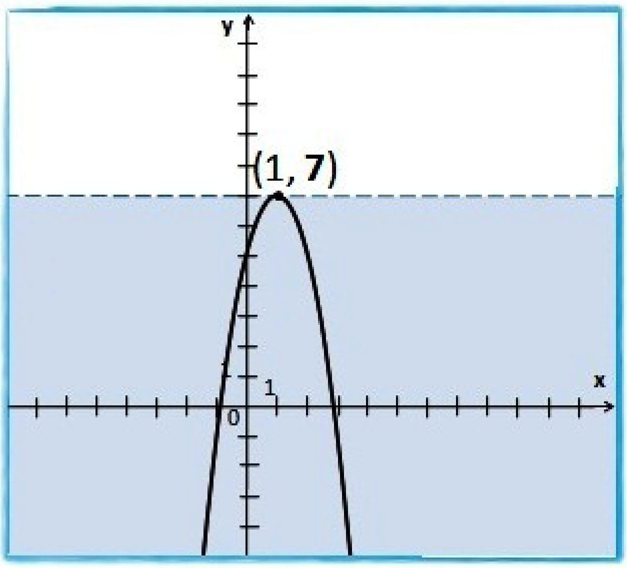
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot(-2)\cdot 5=16+40=56$$

$$q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-56}{4\cdot(-2)}=\frac{-56}{-8}=7$$

Ponieważ współczynnik „a" jest ujemny (-2), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością q.

$$ZW=(-\infty,\ 7\rangle$$



Przykład 3

$$y=2x^2+4x-2$$

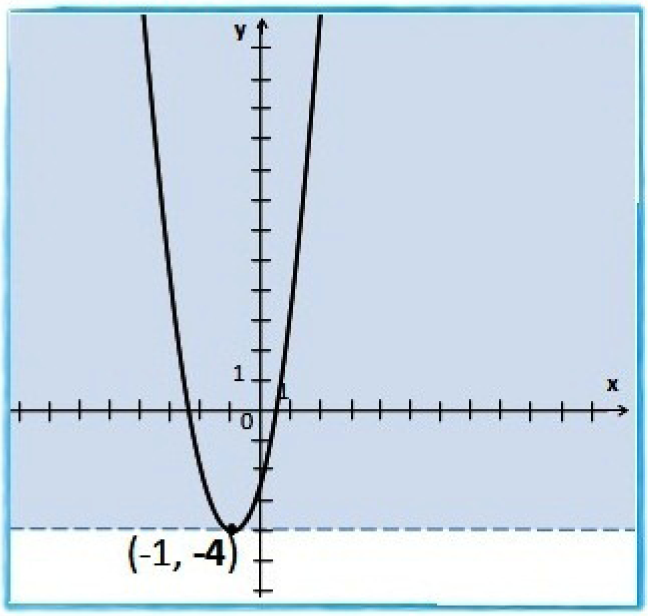
Obliczamy współrzędną „q" wierzchołka:

$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot 2\cdot(-2)=16+16=32$$

$$q=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-32}{4\cdot 2}=\frac{-32}{8}=-4$$

Ponieważ współczynnik „a" jest dodatni (2), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością q a nieskończonością.

$$ZW=\langle -4,\ \infty)$$



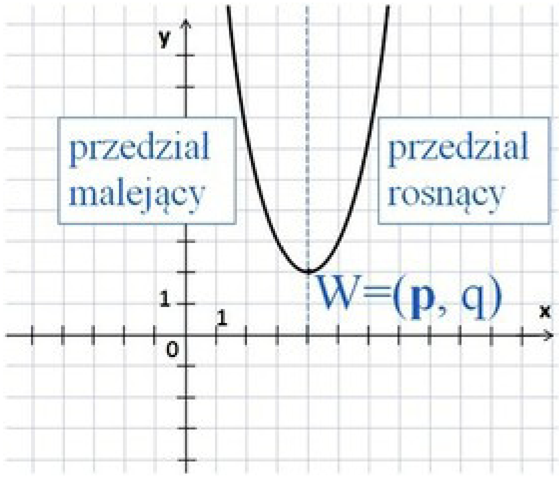
PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie, jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś 0X), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka (p).

Drugą potrzebną informacją jest kierunek ramion paraboli:

Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.



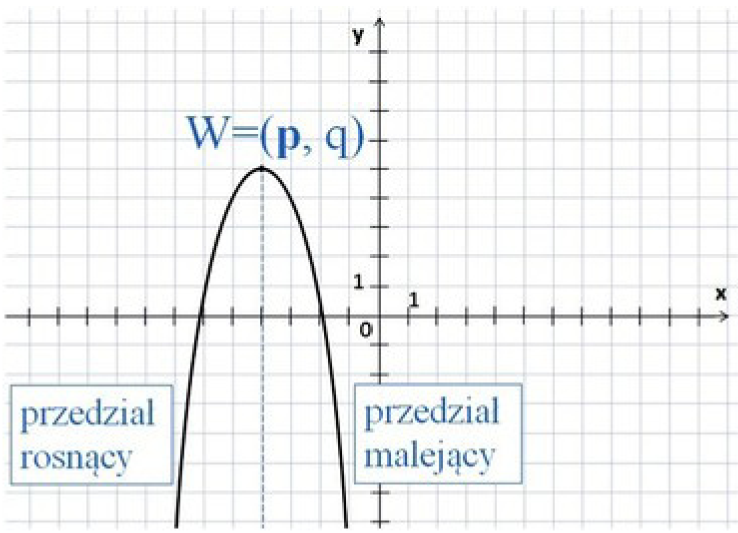
- Funkcja jest rosnąca w przedziale od „p" do nieskończoności.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle p, \ \infty)$

- Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „p".

$f(x)\searrow$ w przedziale $(-\infty, \ p\rangle$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



- Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „*p*”.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\left(-\infty, p\right\rangle$

- Funkcja jest malejąca w przedziale od „*p*” do nieskończoności.

$f(x)\searrow$ w przedziale $\left\langle p, \infty\right)$

$$y = 3x^2 - 12x + 8$$

Obliczamy współrzędną „p” wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a” funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę.
W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\left\langle 2, \infty\right)$

$f(x)\searrow$ w przedziale $\left(-\infty, 2\right\rangle$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 4x + 10$.

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$f(x)\uparrow: (-\infty, 2\rangle$

$f(x)\downarrow: \langle 2, \infty)$

Reasumując

Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y =< -\frac{\Delta}{4a}, \infty)$	$Y =(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} >$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{min} -\frac{\Delta}{4a}$, dla $x = -\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, rosnąca dla $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$	rosnąca dla $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$, malejąca dla $x \in (-\frac{b}{2a}, +\infty)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 = -\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowne do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x = -\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$	

ZADANIA

4.5.1 Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = x^2 - 6x$

c) $y = -2x^2 + 4x$

d) $y = x^2 - 4x + 5$

e) $y = -2x^2 + 6x + 7$

4.5.2 Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

- zbiór wartości,

- miejsca zerowe,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca,
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = -x^2 + 6x$

c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ d) $f(x) = -(x-1)(x+5)$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ f) $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$

	Zbiór wartości	Miejsca zerowe	Wartości dodatnie	Wartości ujemne	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca	Wartość największa	Wartość najmniej-sza
a)	$\langle -4, \infty)$	–2,2	$(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$	$(-2,2)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	–	Dla x=0 y= –4
b)	$(-\infty,9\rangle$	0,6	$(0,6)$	$(-\infty,0)\cup(6,\infty)$	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$	Dla x=3 y= 9	–
c)	$\langle -4, \infty)$	1,5	$(-\infty,1)\cup(5,\infty)$	$(1,5)$	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla x=3 y= –4
d)	$(-\infty,9\rangle$	5,1	$(-5,1)$	$(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$	Dla x=2 y= 9	–
e)	$\langle 0,\infty)$	3	$(-\infty,3)\cup(3,\infty)$	ϕ	$(3,\infty)$	$(-\infty,3)$	–	Dla x=3 y= 0
f)	$(-\infty,10\frac{1}{8}\rangle$	–4, $\frac{1}{2}$	$\left(-5,\frac{1}{2}\right)$	$(-\infty,-4)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$	$\left(-\infty,-1\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1\frac{3}{4},\infty\right)$	Dla $x=-1\frac{1}{3}$ y= $10\frac{1}{8}$	–

4.5.3 Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -2x^2 - 8x - 5$

c) $y = x^2 - 6x + 10$

Odpowiedź:

a) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: $ZW = \langle -1, \infty)$

Miejsce zerowe: $x_1 = 1$ lub $x_2 = 3$

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$

rosnąca w przedziale $\langle 2, \infty)$

Wierzchołek: $W = (2,-1)$

Najmniejsza wartość: $y_{min} = -1$ dla $x = 2$

Największa wartość: nie istnieje

b) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: ZW = $(-\infty, 3>$

Miejsce zerowe: x0 ≈ −3, 2 lub x0 ≈ −0, 8

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca w przedziale $(-\infty, -2>$

malejąca w przedziale $< -2, \infty)$

Wierzchołek: W = (−2, 3)

Największa wartość: ymax = 3 dla x = −2

Najmniejsza wartość: nie istnieje

c) Dziedzina: $D = R$

Zbiór wartości: $ZW = < 1, \infty)$

Miejsce zerowe: nie istnieją

Monotoniczność: funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca w przedziale $(-\infty, 3>$

rosnąca w przedziale $< 3, \infty)$

Wierzchołek: W = (3, 1)

Najmniejsza wartość: ymin = 1 dla x = 3

Największa wartość: nie istnieje

4.5.4 Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + 4x - 1$ z prostymi:

a) $y = -5$ b) $y = -3$ c) $y = -1$ d) $y = 2$

Odpowiedź:

Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 + 4x - 1$ ma:

– 0 punktów wspólnych z prostą $y = -5$

– 1 punkt wspólny z prostą $y = -3$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = -1$

– 2 punkty wspólne z prostą $y = 2$

4.5.5 Wyznacz równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 6x - 7$.

Odpowiedź: $x = 3$

4.5.6 Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

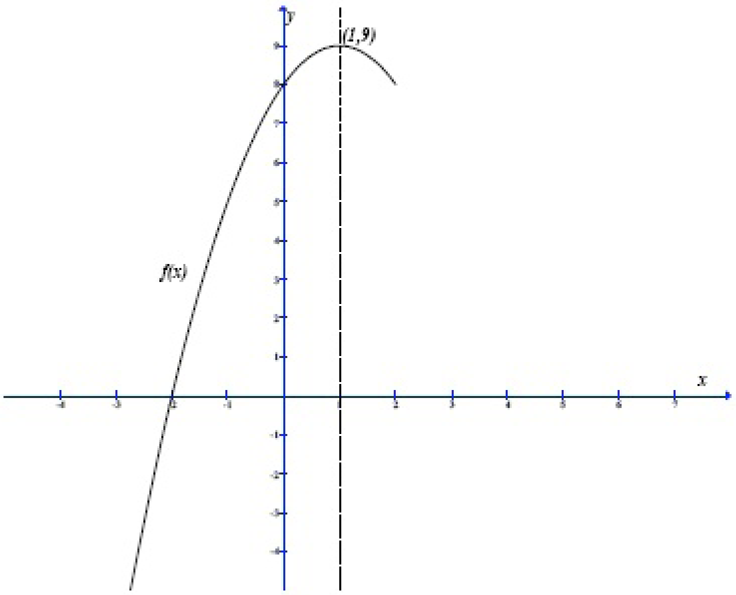
a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

Odpowiedź:

a) $(-\infty, 4>$ b) $x \in \langle 1, 5 \rangle$

4.5.7 Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe.



a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: –2 oraz 4.

b) Funkcja jest rosnąca w przedziale (–2, 4).

c) Funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$.

d) Zbiorem wartości funkcji jest przedział (–1, 9).

Odpowiedź: a

4.5.8 Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $f(x) = (x-3)(x+4)$

c) $f(x) = -3x(x-2)$

d) $f(x) = 2(x-2)(x+4) - 5$

Odpowiedź:

a) $m = 0$

b) $m = -11\frac{5}{4}$

c) $m = 3$

d) $m = -23$

4.5.9 Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 - 3x + 10,\ x \in \langle -1,2 \rangle$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 1,\ x \in \langle -2,5 \rangle$

c) $f(x) = -2x^2 + x - 1,\ x \in \langle 0,2 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = 12$, $m = 0$

b) $m = 46$, $m = 7/8$

c) $m = -7/8$, $m = -7$

4.5.10 Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^2 - 9,\ x \in \langle -2,2 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 5x,\ x \in \langle 3,7 \rangle$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 6,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \in \langle -4,1 \rangle$

Odpowiedź:

a) $m = -9$

b) $m = -14$

c) $m = -10$

d) $m = 1$

4.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

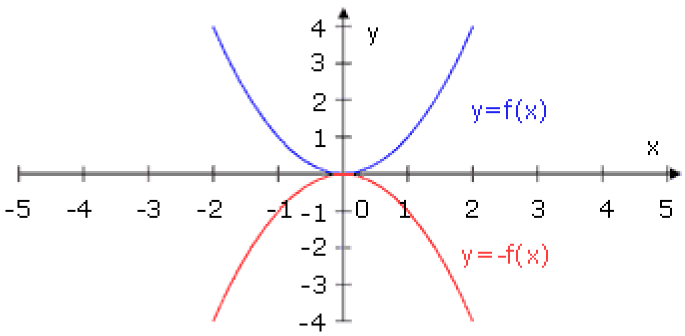
Teraz nauczę się:

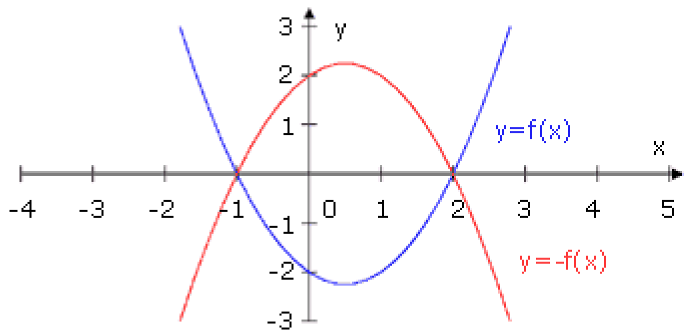
- na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

$x \to y = -f(x)$

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

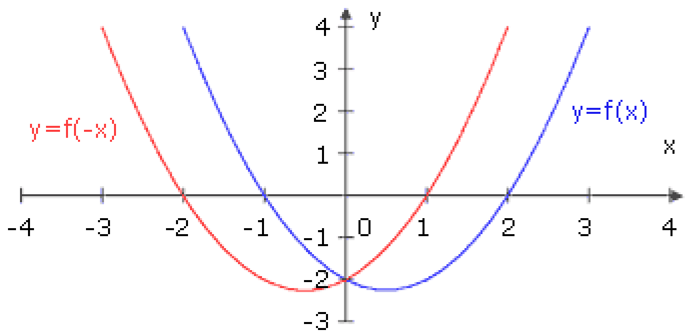
Przykłady:





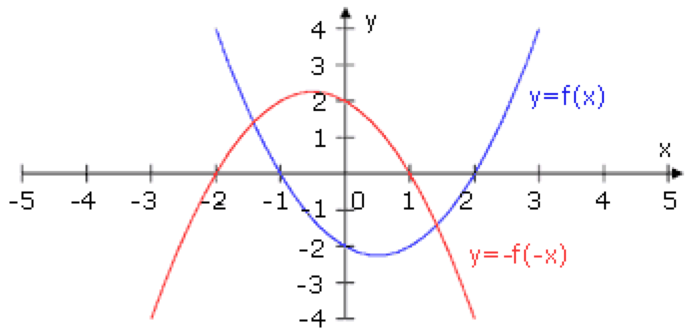
$x \rightarrow y = f(-x)$

Wykres funkcji $y = f(-x)$ **jest symetryczny do wykresu funkcji** $y = f(x)$ **względem osi OY.**



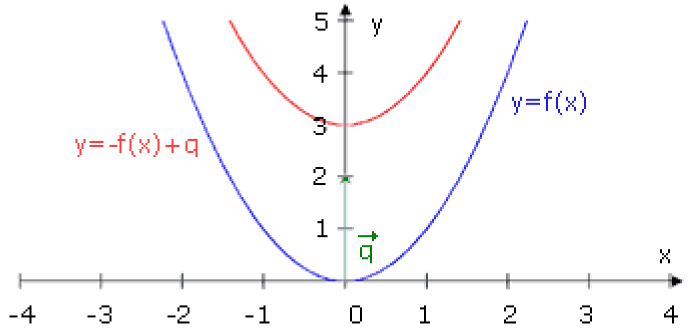
$x \rightarrow y = -f(-x)$

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ **powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji** $y = f(x)$ **przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).**



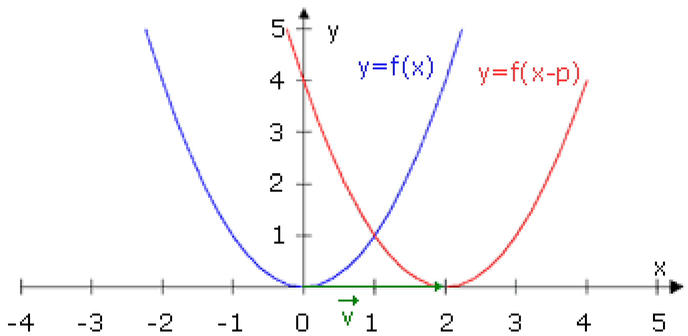
$x \rightarrow y = f(x) + q$

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ **powstaje w wyniku przesunięcia wykresu** $y = f(x)$ **wzdłuż osi OY o** $|q|$ **jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem q (o wektor [0,q]).**



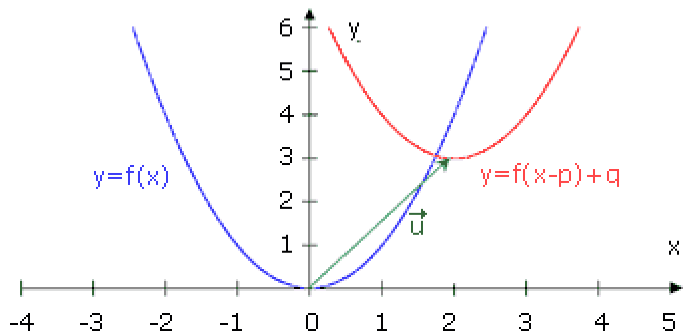
$x \to y = f(x - p)$

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ **otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji** $y = f(x)$ **wzdłuż osi OX o wektor** $\vec{v} = [p,0]$.



$x \to y = f(x - p) + q$

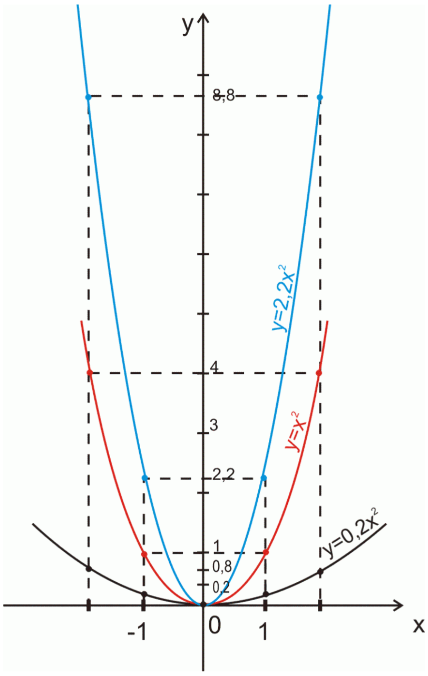
Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ **otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu** $y = f(x)$ **o wektor** $\vec{u} = [p,q]$.



$x \to y = k \cdot f(x)$

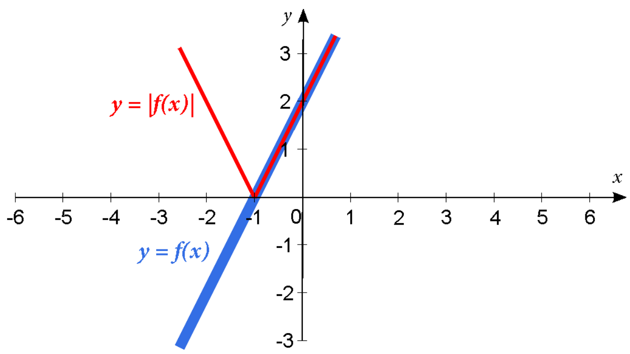
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ **powstaje z wykresu** $y = f(x)$ **w wyniku k- krotnego zbliżania się lub oddalania od osi OY.**

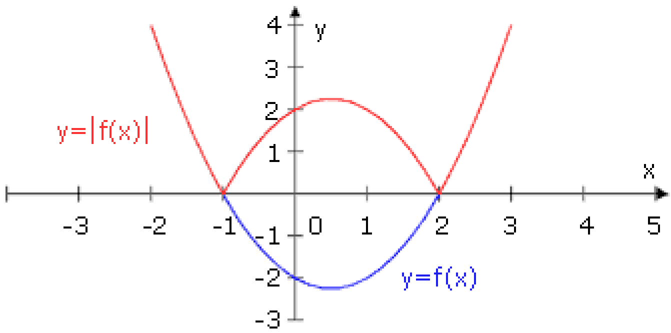
Dla $k > 1$ wykres funkcji $f(x)$ zbliżył się k-krotnie do osi OY („rozciągnął się" wzdłuż osi OY). Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $f(x)$ oddalił się k-krotnie od osi OY („ściągnął się" wzdłuż osi OY).



***$x \rightarrow y = |f(x)|$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = |f(x)|$, należy część wykresu $y = f(x)$, leżącą nad osią OX lub na niej, pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX.

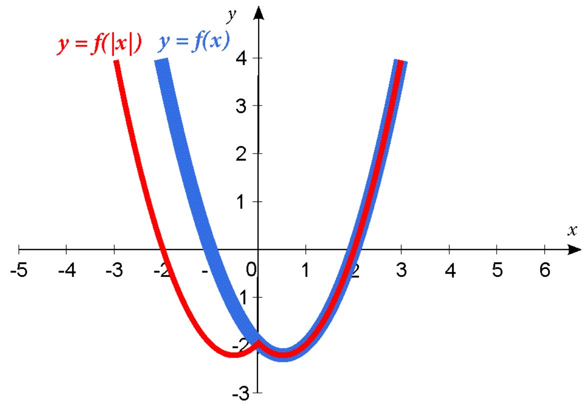




*** $x \rightarrow y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji $y = f(|x|)$, należy:

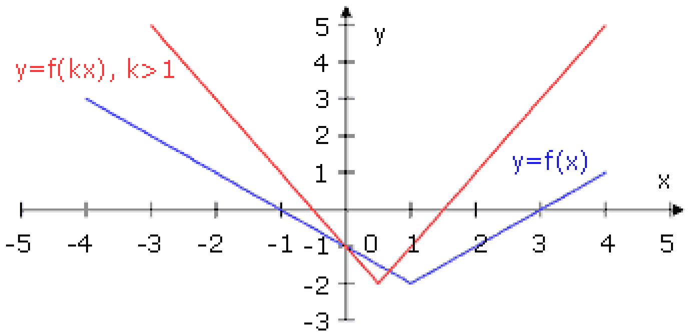
dla $x \geq 0$ część wykresu $y = f(x)$ pozostawić bez zmian, otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla $x < 0$.

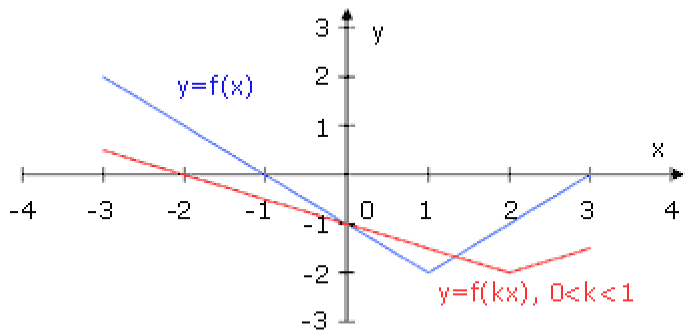


***$x \rightarrow y = f(k^*x)$

Wykres funkcji $y = f(k^*x)$ powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania" lub „rozciągania" wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX.

Dla $k > 1$ wykres funkcji $y = f(x)$ „ściąga się" wzdłuż osi OX. Dla $k \in (0,1)$ wykres funkcji $y = f(x)$ „rozciąga się" wzdłuż osi OX.





ZADANIA

4.6.1 Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$ o p jednostek wzdłuż osi OX i q jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji f. Uzupełnij według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji g	Przesunięcie wzdłuż osi OX p	Przesuniecie wzdłuż osi OY q	Postać kanoniczna wzoru funkcji f	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji f
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x+4)^2 - 5$	W = (–4,–5)
			$f(x) = \frac{3}{4}(x+2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				W = (3,0)
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x-2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		W = (0,–1)

4.6.2 Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = (x - 3)^2$
b) $y = (x + 1)^2$
c) $y = x^2 + 4$
d) $y = x^2 - 3$
e) $y = (x + 1)^2 - 1{,}6$
f) $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) przesuwamy o 3 jednostki w prawo

b) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo

c) przesuwamy o 4 jednostki w górę

d) przesuwamy o 3 jednostki w dół

e) przesuwamy o 1 jednostkę w lewo i 1,6 jednostki w dół

f) rysujemy $y = x^2$, odbijamy symetrycznie względem osi OX i przesuwamy w dół o $3\frac{1}{3}$ jednostki w dół

4.6.3 Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi OY o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Odpowiedź:

a) zbiór wartości $(-\infty, 8\rangle$

b) $b = 12$, $c = -10$

4.6.4 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji:

a) $y = x^2 - 5$
b) $y = -0{,}3x^2 + 12$
c) $y = 1{,}4(x - 48)^2$
d) $y = -35(x + 1{,}2)^2$
e) $y = 15(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

a) W = (0,–5); funkcja maleje $x \in (-\infty, 0)$, funkcja rośnie $x \in (0, \infty)$

b) W = (0,12); funkcja rośnie $x \in (-\infty, 0)$, funkcja maleje $x \in (0, \infty)$

c) W = (48,0); funkcja maleje $x \in (-\infty, 48)$, funkcja rośnie $x \in (48, \infty)$

d) W = (–1,2;0); funkcja rośnie $x \in (-\infty; -1{,}2)$, funkcja maleje $x \in (-1{,}2; \infty)$

e) W = $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; funkcja maleje $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, funkcja rośnie $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$

4.6.5 Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta:

a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$

b) $y = 0{,}6x^2 - 5$ i $y = 10$

c) $y = -0{,}1(x-3)^2$ i $y = -4$

d) $y = 15(x+2)^2 + 4$ i $y = -1$

e) $y = -3{,}2(x-5)^2 - 1$ i $y = -11$

f) $y = -3{,}2(x-5)^2 - 11$ i $y = 20$

Odpowiedź:

a) ma dwa punkty wspólne

b) nie ma punktów wspólnych

c) ma dwa punkty wspólne

d) nie ma punktów wspólnych

e) ma jeden punkt wspólny

f) nie ma punktów wspólnych

4.6.6 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W, przechodząca przez punkt P:

a) W = (–1,–1), P = (3,3)

b) W = (–8,7), P = (1,6)

c) W = (3,2), P = (–5,10)

Odpowiedź:

a) $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$

b) $y = -\frac{1}{81}(x+8)^2 + 7$

c) $y = \frac{1}{8}(x-3)^2 + 2$

4.6.7 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ względem:

a) osi OX

b) osi OY

c) punktu (0,0)

Odpowiedź:

a) $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$

b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$

c) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$

4.6.8 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ względem:

a) osi OX

b) osi OY

c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ b) $f(x) = (x-1)(x+3)$ c) $f(x) = -(x-1)(x+3)$

4.6.9 Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$ względem:

a) osi OX b) osi OY c) punktu (0,0)

Naszkicuj te wykresy.

Odpowiedź:

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$ b) $f(x) = x^2 + x - 6$ c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

4.6.10 Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 3, \infty)$, wykres przechodzi przez punkt P = (–1,5) i ma oś symetrii o równaniu x = 1,

b) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4, \infty)$, jednym z miejsc zerowych jest x = 1 i wykres ma oś symetrii o równaniu x = –1,

c) zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle 4, \infty)$, wykres ma oś symetrii o równaniu x = 2 i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

Odpowiedź:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3\frac{1}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

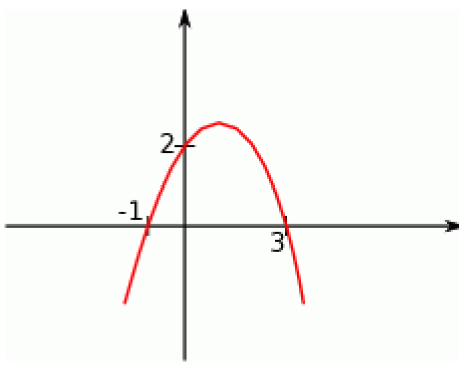
4.6.11 Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

Odpowiedź: 6, 7, 8

4.6.12 Rozwiąż równanie $f(x-1) = 4$, jeżeli $f(x) = x^2 + x - 2$.

Odpowiedź: x = –2, x = 3

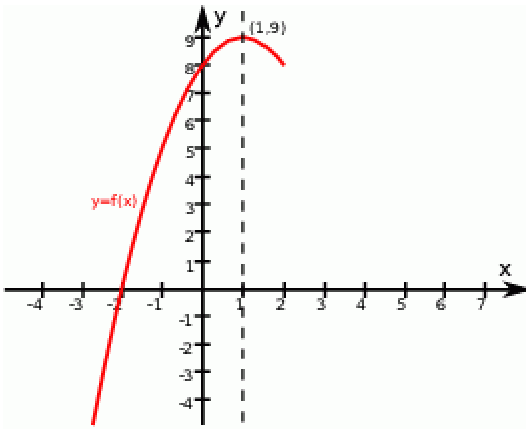
4.6.13 Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór:



Odpowiedź:

$$y=-\frac{2}{3}(x+1)(x-3)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$$

4.6.14 Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



Odpowiedź:

$$y=-(x-1)^2+9$$
$$y=-(x+2)(x-4)$$
$$y=-x^2+2x+8$$

4.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

ZADANIA

4.7.1 Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Odpowiedź: Prędkość turysty z miasta A to 4 km/h, a turysty z miasta B 3 km/h.

4.7.2 Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większa niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Odpowiedź: Wymiary pierwszego boiska to 56 m × 33 m, a drugiego boiska 60 m × 25 m.

4.7.3 Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Odpowiedź: Turysta dziennie przechodził 28 km.

4.7.4 Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Trójkąt ma boki 41cm, 40 cm, 9 cm.

4.7.5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej trójkąta to 17 cm.

4.7.6 Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

Odpowiedź: Czas napełniania zbiornika przez obie rury jednocześnie wynosi $23\frac{1}{3}$ godziny.

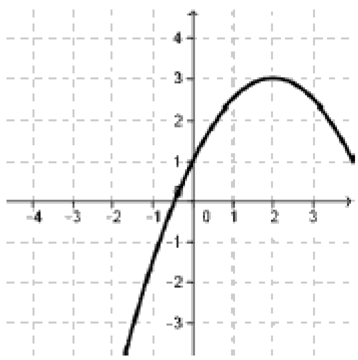
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[40] Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x-7)(x+2)$ są:

a) $x = 7, x = -2$ b) $x = -7, x = -2$ c) $x = 7, x = 2$ d) $x = -7, x = 2$

Odpowiedź: a

2.[41] Wzorem funkcji kwadratowej f, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku jest:



40 Zadanie 1: http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 22.02.2013.
41 Zadania 2, 3: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 22.02.2013.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Odpowiedź: b

3. Największa wartość funkcji $y = -2x^2 + x + 1$ w przedziale $\langle -1; 0{,}5 \rangle$ jest równa:

a) $1\frac{1}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) –4

4.[42] Gdy przesuniemy wykres funkcji $f(x) = 2x - 3$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji opisanej wzorem:

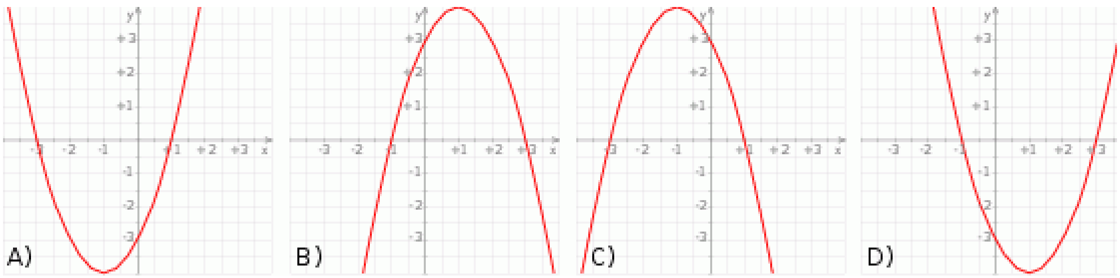
a) $y = 2(x-2) + 4$ b) $y = 2(x-2) - 4$ c) $y = 2(x-2) + 1$ d) $y = 2(x+2) + 4$

5. Funkcja kwadratowa $y = x^2 + bx + c$ jest malejąca dla $x \in (-\infty; 2\rangle$, a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -4; \infty)$. Postać kanoniczna tej funkcji opisana jest wzorem:

a) $f(x) = (x-2)^2 - 4$ b) $f(x) = (x+2)^2 + 4$

c) $f(x) = (x+4)^2 + 2$ d) $f(x) = (x-4)^2 + 2$

6. Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



Odpowiedź: a

7.[43] Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -4\rangle \\ 5x + 10 & \text{dla } x \in (-4, 2) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$$ jest

:

a) –4 b) –2 c) –1 d) 1

8. Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

a) $(-\infty, \frac{3}{2})$ b) $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ c) $(-1, 4)$ d) $(-4, 1)$

42 Zadania 4-6: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 22.02.2013.
43 Zadanie 7: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 22.02.2013.

9. Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:

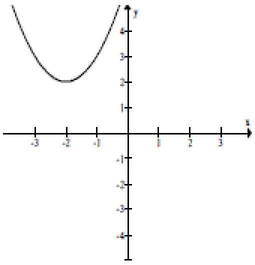
a) $(2,\infty)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(1,+\infty)$

10.[44] Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:

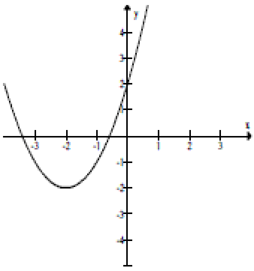
a) $x = -8$ b) $x = -4$ c) $x = 4$ d) $x = 8$

11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

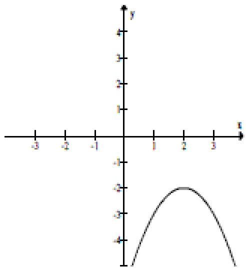
A.



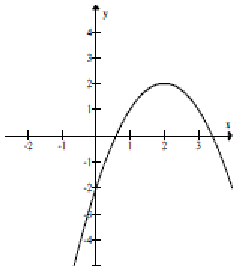
B.



C.

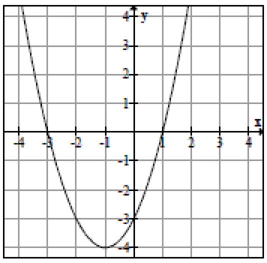


D.

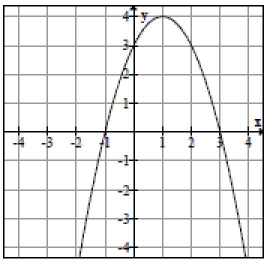


12. Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

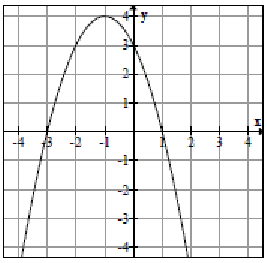
13.[45] Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.



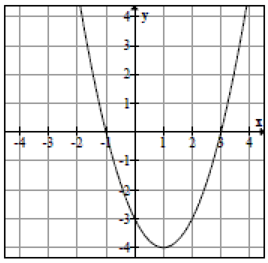
A.



B.



C.



D.

14. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$ jest punkt o współrzędnych:

a) $(0,2)$ b) $(0,-2)$ c) $(-2,0)$ d) $(2,0)$

15.[46] Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale $<-2, 3>$.

16.[47] Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:

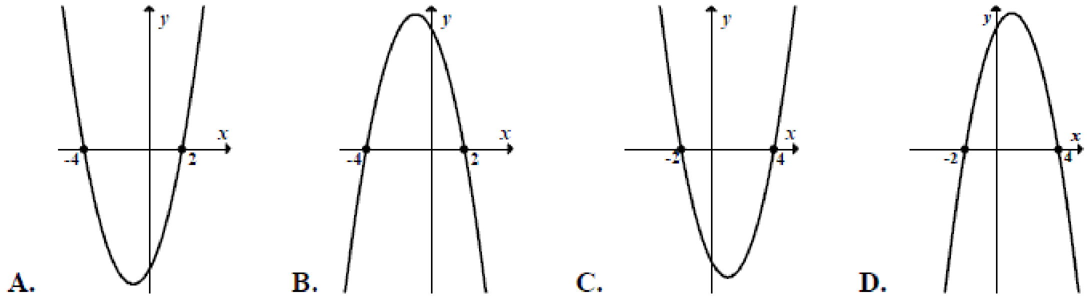
---

44 Zadania 10-12: http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 22.02.2013.

45 http://www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 22.02.2013r

46 Zadanie 15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf ,

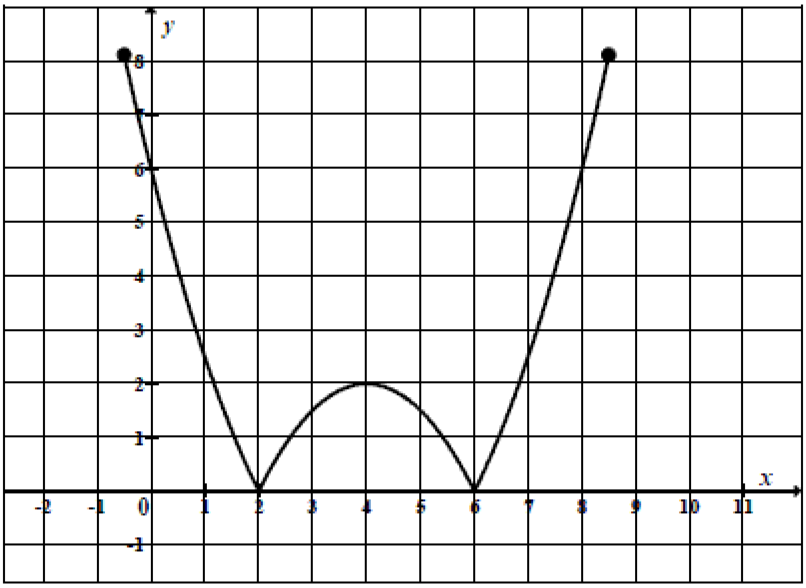
47 Zadanie 16: http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013r



17.[48] Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie:

a) (3,0) b) (0,3) c) (–3,0) d) (0,–3)

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = 3$

19.[49] Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 10x + 9$ w przedziale <3,7> .

Odpowiedź: $y_{max} = -12$, $y_{min} = -16$

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ i $x + y = 10$

Odpowiedź: P = (3,7), R = (5,5)

21. Wyznacz wartość liczby m, tak aby funkcja $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$ miała dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -1$.

Odpowiedź: $m = 12$

22. Wzór w postaci kanonicznej funkcji $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ to:

48 Zadania 17, 18: http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 22.02.2013.

49 Zadania 19-35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

a) $y=\frac{3}{4}\ (x+\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$ b) $y=\frac{3}{4}\ (x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$

c) $y=(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$ d) $y=(x+\frac{1}{3})^2+\frac{1}{8}$

Odpowiedź: a

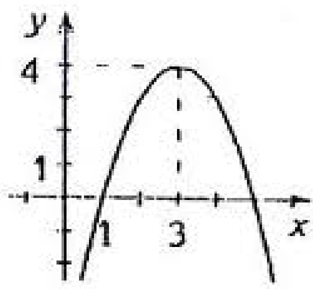
23. Funkcję kwadratową przedstawioną na rysunku opisuje wzór:

a) $f(x)=-x^2+6x-5$

b) $f(x)=-x^2+4x+5$

c) $f(x)=-x^2+3x-2$

d) $f(x)=-x^2-2x+15$



Odpowiedź: a

24. Zbiorem wartości funkcji $y=x^2-6x+11$ jest:

a) $(-\infty,2\rangle$ b) $(-\infty,3\rangle$ c) $\langle 3,\infty)$ d) $\langle 2,\infty)$

Odpowiedź: d

25. Funkcja $f(x)=x^2+bx+c$ osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla $x=2$, jeśli:

a) $b=-4, c=8$ b) $b=4, c=-8$ c) $b=-4, c=-8$ d) $b=4, c=8$

Odpowiedź: a

26. Wykresy funkcji $f(x)=9-x^2$ i $g(x)=x^2-9$:

a) są symetryczne względem osi OX b) są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY d) nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases}x^2-4 \text{ dla } x\geq 0\\ x^2+4 \text{ dla } x<0\end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty,2>$. Funkcja f ma wzór:

a) $f(x)=-(x-3)^2+2$ b) $f(x)=x^2+2$

c) $f(x)=(x+1)^2-2$ d) $f(x)=-(x+2)^2$

Odpowiedź: a

29 Liczba punktów wspólnych prostej $y=-x$ z wykresem funkcji $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$, wynosi:

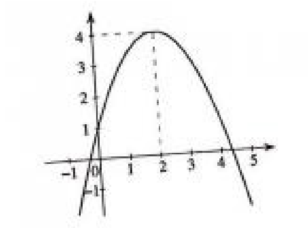
a) 1 b) 2 c) 0 d) 3

Odpowiedź: c

30. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby –6 oraz 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$.

Odpowiedź: 62

31. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej f określ jej wzór:



Odpowiedź: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

32. Największa wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem $y = x + 4$.

Odpowiedź: a) $y = -x^2 + 6x$ **,** b) $x \in (1,4)$

33. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 + y^2$, jeśli $x + y = 4$.

Odpowiedź: 8

34. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami: $y = x^2 + 2x - 8$ oraz $y = x^2 + 6x - 4$ mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

Odpowiedź: (–1,–9)

35. Wartością największą funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x - 3$, określonej w przedziale <–3,2> , jest liczba:

a) –4 b) 5 c) 0 d) 6

36. Funkcja kwadratowa $y = x^2 - 9$ przyjmuje wartości nieujemne dla:

a) $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

b) $x \in (-3,3)$

c) $x \in \langle -3,3 \rangle$

d) $x \in (-\infty,-3 \rangle \cup \langle 3,\infty)$

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.
13. Fischer R. *„Liczby Fibonacciego na giełdzie"*, WIG - Press, Warszawa 1996.
14. Nowakowski J., Borowski K., *Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Difin.

Źródła internetowe

1. www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html
2. www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html
3. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
4. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
5. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
6. pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
11. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
12. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
15. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
16. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
20. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
21. www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
26. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
27. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
28. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

29. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf

30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf

31. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf

32. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze

33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze

34. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf

35. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

36. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf

37. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

38. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf

39. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf

40. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf

41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf

42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

43. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf

44. www.bossa.pl

45. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc

46. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf

47. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf

48. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf

49. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf

50. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

51. www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf

52. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

53. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf

54. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf

Matematyka

Wstęp

Drodzy Nauczyciele!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują się pod każdym z zadań. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1. Planimetria

To już potrafię:

1. Korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe.
2. Rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznać styczną do okręgu.
3. Korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.
4. Rozpoznawać kąty środkowe.
5. Obliczać długość okręgu i łuku okręgu.
6. Obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego.
7. Stosować twierdzenie Pitagorasa.
8. Korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.
9. Obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów.
10. Zamieniać jednostki pola.
11. Obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.
12. Obliczać stosunek pól wielokątów podobnych.
13. Rozpoznawać wielokąty przystające i podobne.
14. Stosować cechy przystawania trójkątów.
15. Korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych.
16. Rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu.
17. Narysować pary figur symetrycznych.
18. Rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii.
19. Wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury.
20. Rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta.
21. Konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach 60°, 30°, 45°, okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt.
22. Rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności.

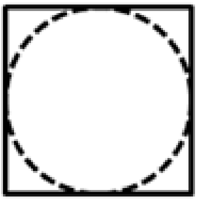
Sprawdź, czy potrafisz?

Zadania zamknięte

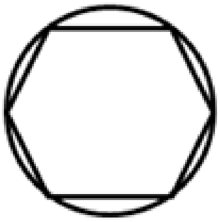
Informacja do zadań 1, 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.

I



II



Zad.1.

Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości $4\sqrt{2}$ m?

A. 4 m

B. 2 m

C. 5,6 m

D. 2,8

Zad.2.

Jaki jest obówd sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

A. 16 m

B. 24 m

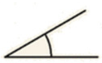
C. $12\sqrt{3}$ m

D. $6\sqrt{3}$ m

Zad.3.

Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły.

A.



B.

C.

D.

Zad.4.

Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

1. BARDZO ATRAKCYJNE CENY

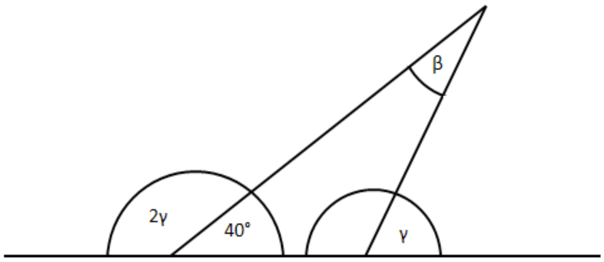
2. OBNIŻKA CEN

3. CENY PROMOCYJNE

4. PRZECENA TOWARÓW

Zad.5.

Jaką miarę ma kąt β:



A. 50°

B. 35°

C. 30°

D. 40°

Zad.6.

Miara kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{3}$ okręgu wynosi:

A. 90°
B. 60°
C. 120°
D. 80°

Zad.7.

Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

A. 6π
B. 18π
C. 9π
D. 12π

Zad.8.

W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

A. przystające

B. równoboczne

C. podobne

D. rozwartokątne

Zad.9.

Pole kwadratu o przekątnej długości $5\sqrt{6}$ to:

A. 25

B. 50

C. 75

D. 15

Zad. 10.

Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm wynosi:

A. 24 cm^2

B. 24 cm

C. 10 cm

D. 12 cm^2

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	C	B	A	D	C	B

Zadania otwarte

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi …

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi …

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na …

Proste prostopadłe oznaczamy symbolem …

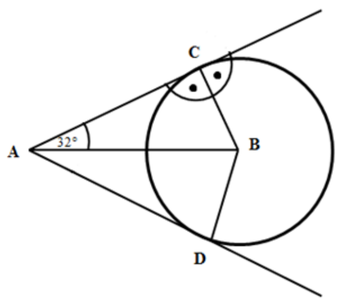
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: …

Przez jeden punkt można poprowadzić …………………… prostych.

Miejsce przecięcia się dwóch prostych to …

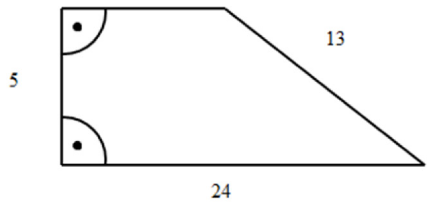
Kąt o mierze 180° nazywamy kątem …

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta ABCD.



3. Oblicz x i y wiedząc, że punkty $A = (3x - 1; 2y)$ i $B = (x + 2; 4y - 1)$ są symetryczne względem osi OX.

4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

Rozwiązania

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi 135° Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na równoramienne, równoboczne, różnoboczne. Proste prostopadłe oznaczamy symbolem $\perp$ Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: romb, deltoid Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych Miejsce przecięcia się dwóch prostych to punkt Kąt o mierze 180° nazywamy kątem półpełnym
2	$\sphericalangle A = 64°, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°, \sphericalangle B = 116°$
3	$3x - 1 = x + 2$ $-2y = 4y - 1$ $x = 1{,}5$ $y = \frac{1}{6}$
4	$b - b -$ górna podstawa $b = 12$ $P = \frac{(24 + 12) \cdot 5}{2} = 65$ $L = 54$
5	Konstrukcja

„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków".

Planimetria[1] jest działem geometrii (słowo „geometria" pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

1. www.medianauka.pl/podstawowe_pojecia_planimetrii, 12.03.2013.

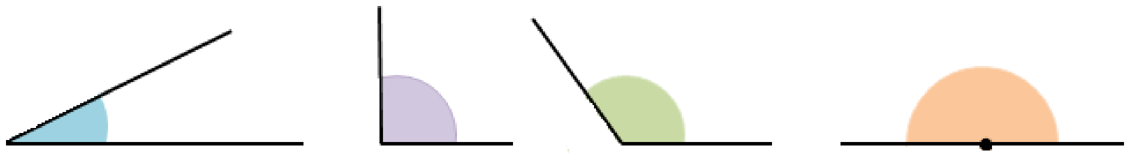
1.1. Kąt środkowy i wpisany

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

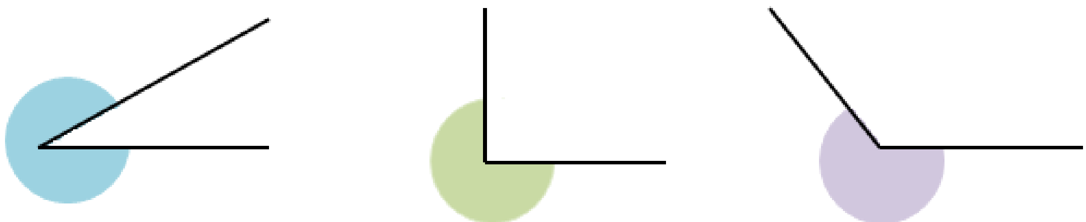
- **Stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym**

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe 180º) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od 180°, ale mniejsze od 360°).

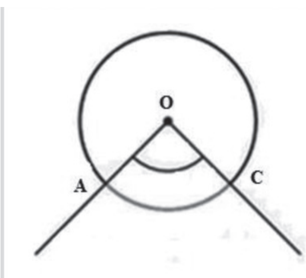
Kąty wypukłe:



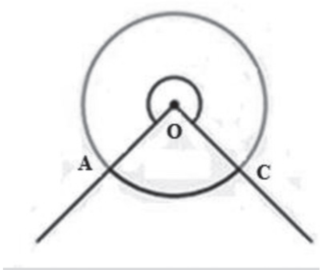
Kąty wklęsłe:



Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.



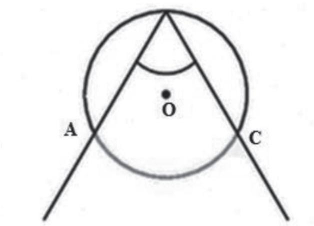
Kąt środkowy wypukły



Kąt środkowy wklęsły

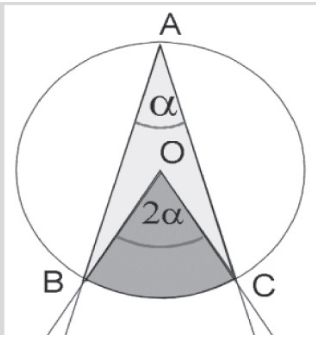
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.

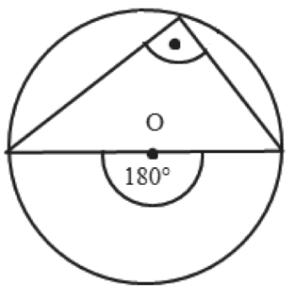
Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.



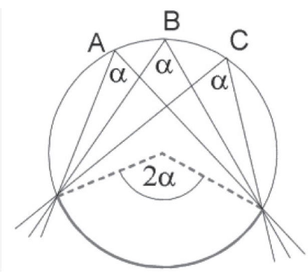
Własności kątów środkowych i wpisanych

- Jeżeli kąty wpisany i środkowy, oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.





- Kąt wpisany opary na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

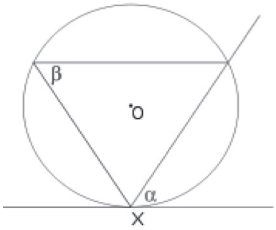


- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

Kąt dopisany do okręgu

Kąt dopisany do okręgu w punkcie X należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie X oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie X.

Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.



$\alpha - kąt\ dopisany$

$\beta - kąt\ wpisany$

Przykład 1

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A, jak na rysunku obok. Kąt dopisany $\alpha = 50°$. Oblicz miarę kąta ACB.

Dorysujmy promienie OA i $OBOB$. Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

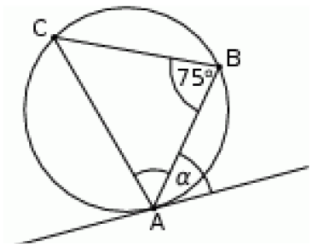
$\sphericalangle OAB = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\sphericalangle OAB = 180° - 80° = 100°$

W takim razie z twierdzenia o kątach: wpisanym i środkowym, mamy

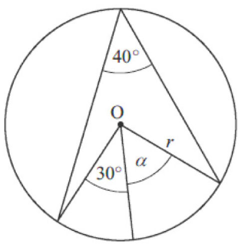
$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180° - 50° - 75° = 55°$



Zadania

1.1.1 Oblicz miarę kąta **α**.



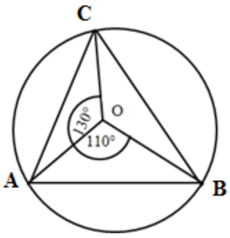
Odpowiedź: 50°

1.1.2 Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta środkowego $\boldsymbol{ABS}$.

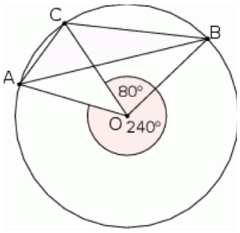
Odpowiedź: 120°

1.1.3 Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

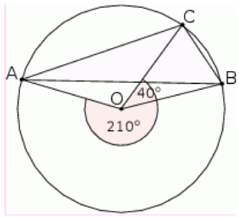
a)



b)



c)



Odpowiedź:

a) 60°, 65°, 55°

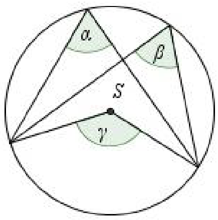
b) 40°, 20°, 120°

c) 20°, 55°, 105°

1.1.4 Okrąg podzielono na trzy części w stosunku $2 : 3 : 3$. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

Odpowiedź: $45°, 45°, 90°$

1.1.5 Dany jest okrąg o środku w punkcie S. Miara kąta α jest równa $70°$. Ile wynosi suma miar kątów $\beta + \gamma$?



Odpowiedź: $210°$

1.1.6 Wierzchołki trójkąta ABC leżą na okręgu i środek O okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąt AOB ma miarę $20°$, to jaką miarę ma kąt ACB?

Odpowiedź: $70°$

1.1.7 Ostrokątny trójkąt równoramienny $\mathbf{ABC}$ o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S, przy czym kąt SAB ma miarę $40°$. Oblicz miarę kąta CAB.

Odpowiedź: $65°$

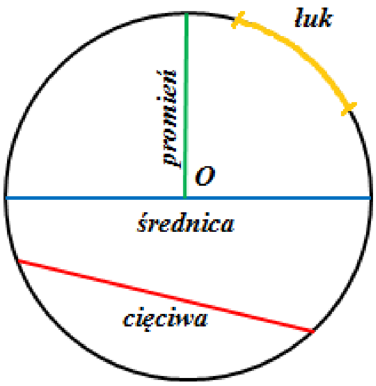
1.2. Wzajemne położenie prostej i okręgu

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)**

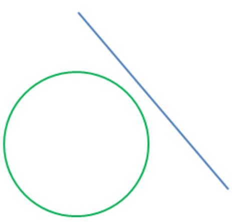
Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od środka O. Okrąg oznaczamy $o(O, r)$.

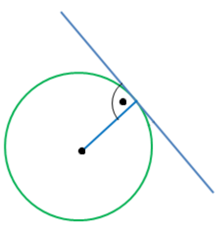
Promieniem okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą r. Okrąg o promieniu r ma długość $2\pi r$.

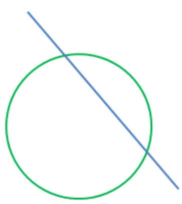


Cięciwą okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu. **Średnicą** okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.
Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i okręgu:

1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.







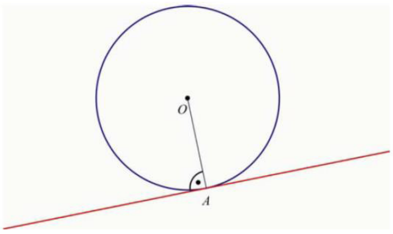
Okrąg i prosta są rozłączne   Okrąg i prosta są styczne   Prosta przecina okrąg

Definicja

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

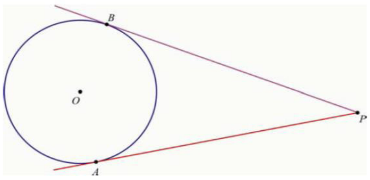
Twierdzenie 1

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

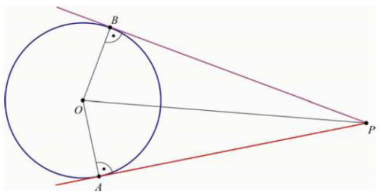


Twierdzenie 2

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.

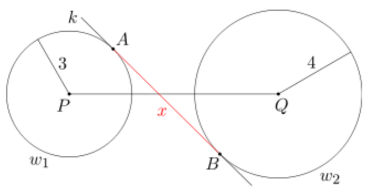


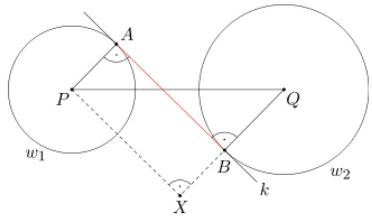
Dowód



Trójkąty POA i POB są prostokątne. Półprosta PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$ (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$. Oznacza to (suma kątów trójkącie), że również $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$.

Ponadto $AO = BO = r$. Z cechy kbk wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że $PA = PB$.





Przykład 1

Dany jest odcinek $|PQ| = 10$ oraz okręgi: jeden o środku P i promieniu 3, a drugi o środku Q i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej k, która jest do nich styczna odpowiednio w punktach

A i B. Oblicz długość odcinka AB.

Zaznaczamy na prostej BQ, lecz poza odcinkiem BQ, taki punkt X, aby długość odcinka BX była równa 33. Następnie uzasadnimy, że czworokąt $ABXP$ jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PQX.

Niech X będzie takim punktem leżącym na prostej BQ, poza odcinkiem BQ, że $|BX| = 3$. Proste $APAP$ i BX są prostopadłe do wspólnej prostej AB, więc $AP \parallel BX$ są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt $APXB$ jest równoległobokiem. A ponieważ w tym równoległoboku kąt $\sphericalangle PAB = 90^{\circ}$, więc równoległobok $ABXP$ jest prostokątem.

Zatem trójkąt PXQ jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |Ab|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4 + 3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

$$|AB| = \sqrt{51}$$

Zadania

1.2.1 Obwód okręgu jest równy $\mathbf{8\pi\ cm.8\pi\ cm}$. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

a) nie mniejsza niż $4\ cm4\ cm$

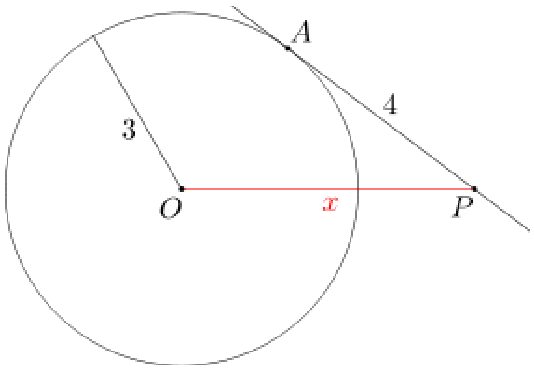
b) nie większa niż $3\ cm3\ cm$?

Odpowiedź:

a) jeden lub wcale

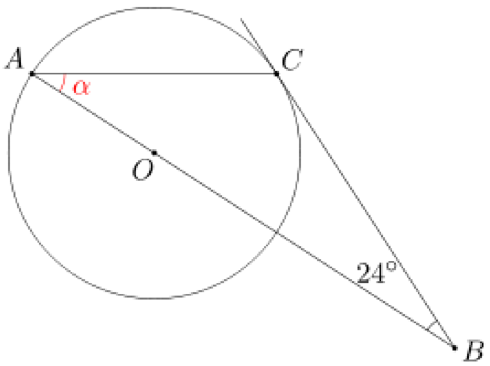
b) dwa punkty

1.2.2 Dany jest okrąg o środku O i promieniu 3. Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiedząc, że długość odcinka $\boldsymbol{AP}$ wynosi 4, oblicz długość odcinka OP.



Odpowiedź: $|OP| = 5|OP| = 5$

1.2.3 Dany jest okrąg o środku $\boldsymbol{O}$ oraz punkty $\boldsymbol{A, C}$ leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie $\boldsymbol{C}$ przecina prostą $\boldsymbol{AO}$ w punkcie $\boldsymbol{B}$. Wiedząc, że miara kąta $\boldsymbol{ABC}$ wynosi $\boldsymbol{24}$°, oblicz miarę kąta $\boldsymbol{CAB}$.



Odpowiedź: $33°$

1.3. Wzajemne położenie dwóch okręgów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

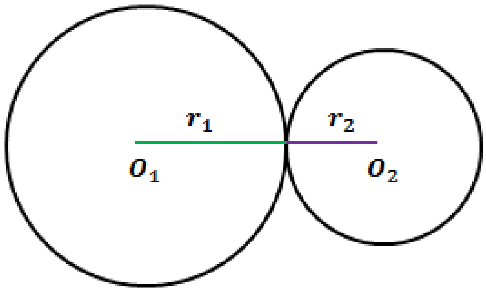
- **Sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt**
- **Sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny**
- **Obliczać miary kątów i długości boków trójkąta**

- **Obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona**
- **Korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi**

Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

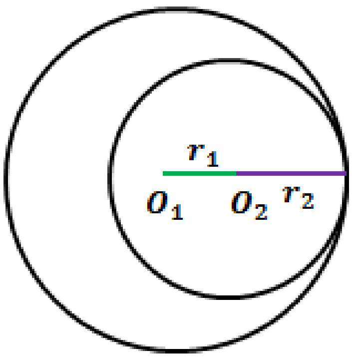
Okręgi styczne zewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.



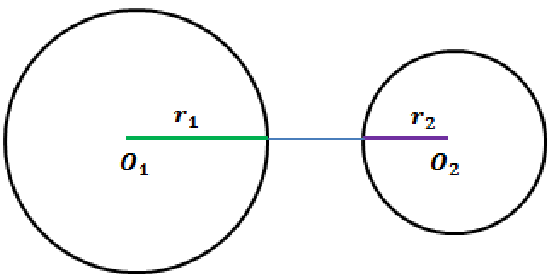
$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Okręgi rozłączne nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

- Większa od sumy ich promieni



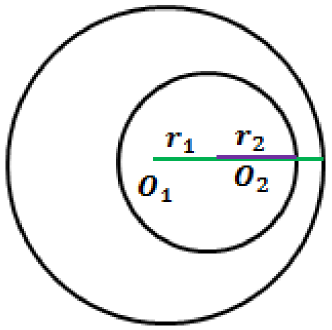
$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni

Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.

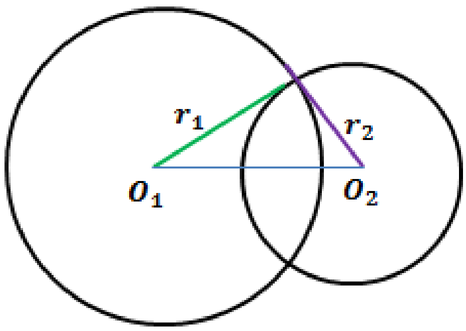
Przykład 1

Dane są dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio równych



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

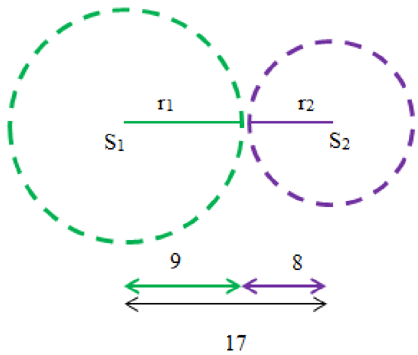
r_1 i r_2. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli



$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

$|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8.$

Robimy rysunek poglądowy, jeden okrąg ma promień $r_1 = 9$, a drugi $r_2 = 8$.



Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.

Zadania

1.3.1 Określ wzajemne położenie okręgów $\mathbf{o(O_1, r_1)}$ i $\mathbf{o(O_2, r_2)}$, jeśli $|\mathbf{O_1O_2}| = \mathbf{12\ cm}$ oraz:

a) $r_1 = 3\ cm,\ \ r_2 = 8\ cm$

b) $r_1 = 5\ cm,\ \ r_2 = 7\ cm$

c) $r_1 = 9\ cm,\ \ r_2 = 7\ cm$

d) $r_1 = 22\ cm,\ \ r_2 = 10\ cm$

Odpowiedź:

a) rozłączne zewnętrznie

b) styczne zewnętrznie

c) przecinające się

d) styczne wewnętrznie

1.3.2 Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach $\mathbf{10\ cm 10\ cm}$ i $\mathbf{6\ cm 6\ cm}$, gdy:

a) okręgi te są styczne zewnętrznie

b) okręgi są styczne wewnętrznie

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego

d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

Odpowiedź:

a) $|S_1S_2| = 16\ cm$

b) $|S_1S_2| = 4\ cm$

c) $|S_1S_2| = 6\ cm$

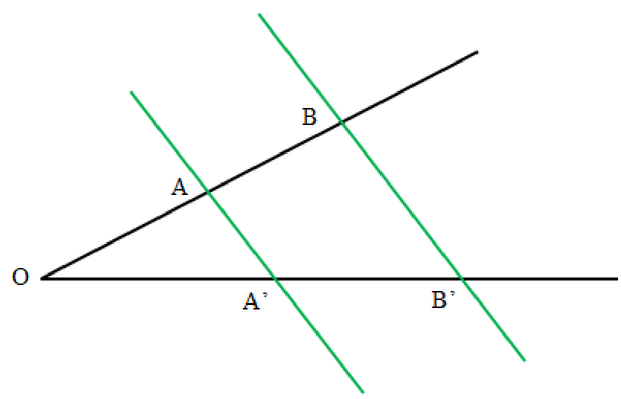
d) $|S_1S_2| = 10\ cm$

1.4. Twierdzenie Talesa

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

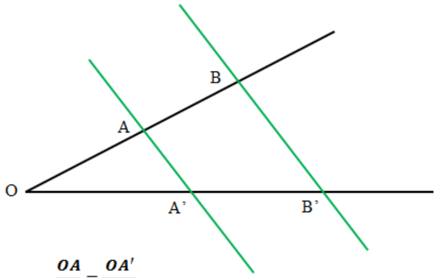
- **Stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych**

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.



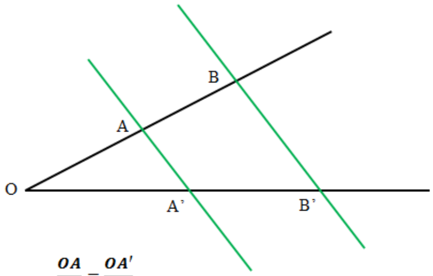
Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

Przypadek 1



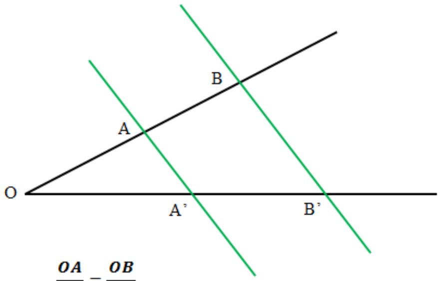
$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$

Przypadek 2

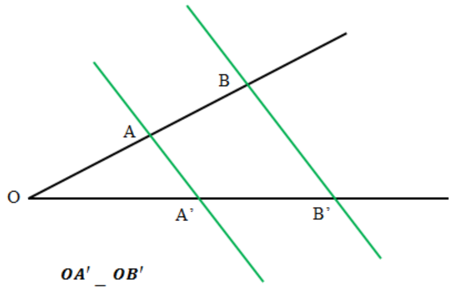


$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$

Przypadek 3



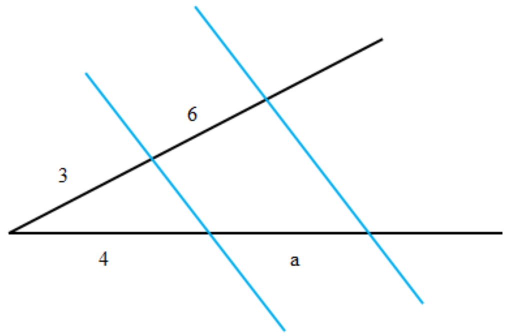
$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$



$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$

Przykład 1

Oblicz długość odcinka a.



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

Układamy proporcję: $\frac{3}{6} = \frac{4}{a}$

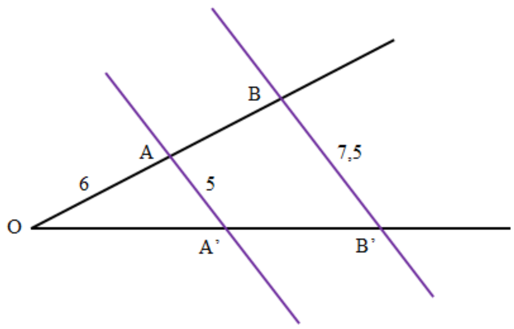
$3a = 6 \cdot 4$

$3a = 24 / : 3$

$a = 8$

Przykład 2

Oblicz długość odcinka AB.



Obliczając długość odcinka AB skorzystamy z przypadku 3.

Układamy proporcję: $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

$$\frac{6}{5} = \frac{6 + |AB|}{7{,}5}$$

$5(6 + |AB|) = 6 \cdot 7{,}5$

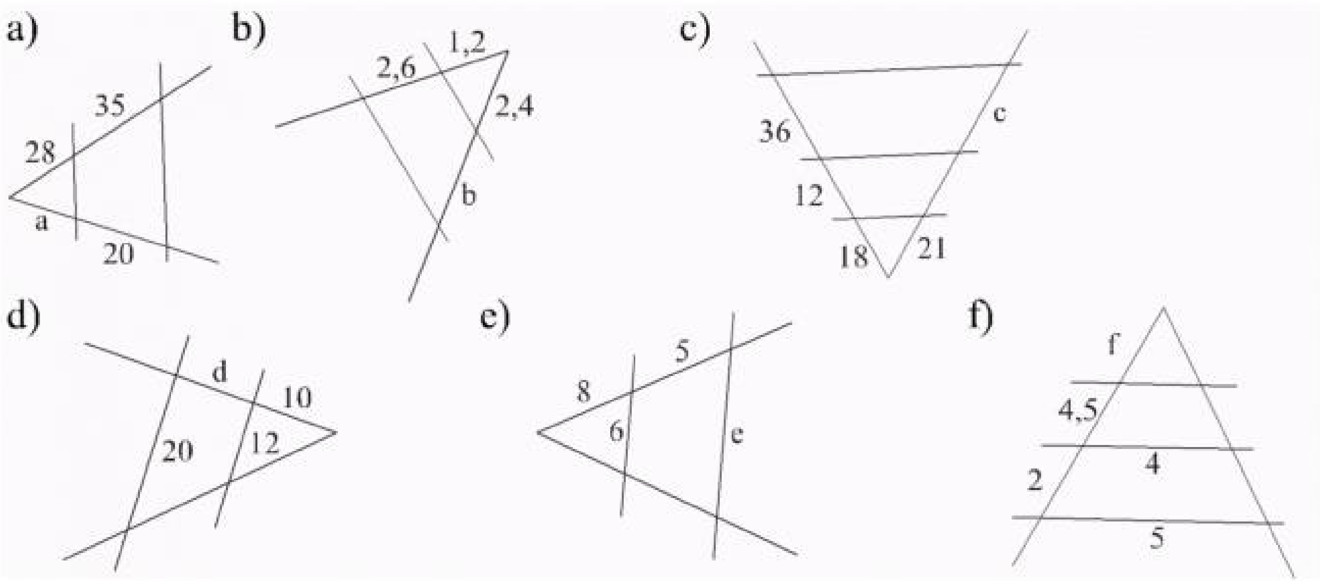
$30 + 5|AB| = 45 / -30$

$5|AB| = 15 / : 5$

$|AB| = 3$

Zadania

1.4.1 Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



Odpowiedź:

a) 16 b) 5,2 c) 42

d) $6\frac{2}{3}$ e) $9\frac{3}{4}$ f) 3,52

1.4.2 W trapezie $\mathbf{ABCD}$, gdzie $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{CD}$, przedłużono boki $\mathbf{AD}$ i $\mathbf{BC}$ do przecięcia w punkcie $\mathbf{S}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DS}$ wiedząc, że jest on krótszy od odcinka $\mathbf{CS}$ o $\mathbf{3\ cm}$ i $|\mathbf{AD}| = \mathbf{16\ cm}$, a $|\mathbf{BC}| = \mathbf{24\ cm}$.

Odpowiedź: $6\ cm$

1.4.3 W trapezie krótsza podstawa wynosi 6, zaś ramiona mają długość 4 i 5. Ramiona trapezu przedłużono tak, iż powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości 4 zostało przedłużone o odcinek długości 3.

Odpowiedź: 30

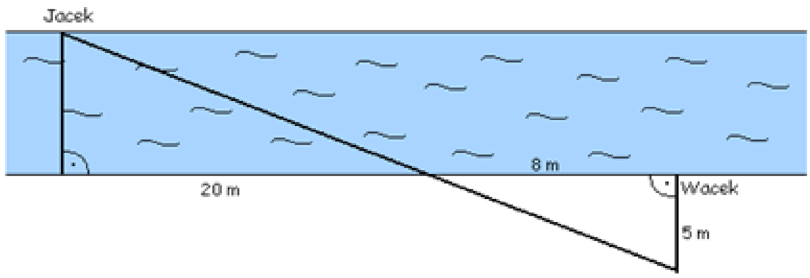
1.4.4. W trójkąt równoramienny o podstawie **8 cm** wpisano kwadrat o boku równym **6 cm**, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

Odpowiedź: 24 cm

1.4.5. Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

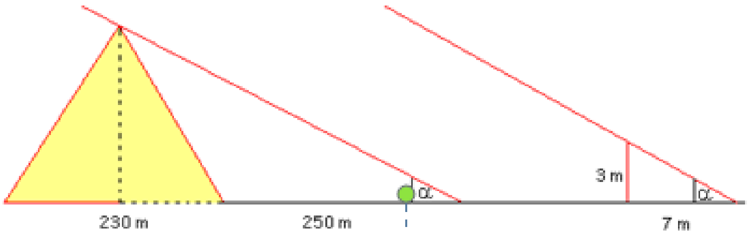
Odpowiedź: 3,4 cm

1.4.6 Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



Odpowiedź: 12,5 cm

1.4.7. Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



Odpowiedź: 156,43 m

1.4.8. Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

Odpowiedź: 12 m

1.4.9. W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: AC = 2,4 i CB = 7,2 m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec A podniesie się na wysokość 4 metrów.

Odpowiedź: O 12 m.

1.4.10. Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm, a średnicę 2 cm?

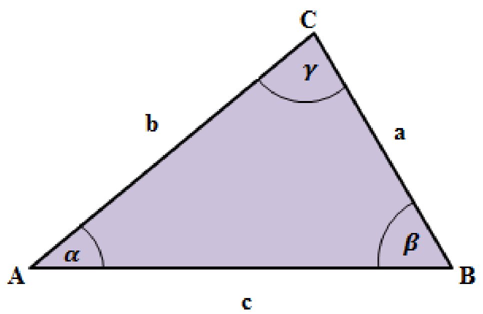
Odpowiedź: Wielkość przedmiotów z odległości 100 m wynosi 10 m.

1.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i odwrotne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt**
- **Sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny**
- **Obliczać miary kątów i długości boków trójkąta**
- **Obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona**
- **Korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi**

Trójkąt – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Podział trójkątów

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

Podział trójkątów ze względu na kąty:

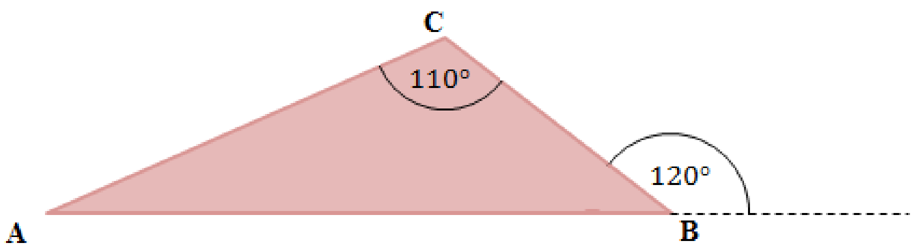
1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.
2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie, nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną.**
3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

Podział trójkątów ze względu na boki:

1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę 60°.
2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.
3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 110º, a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę 120º. Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



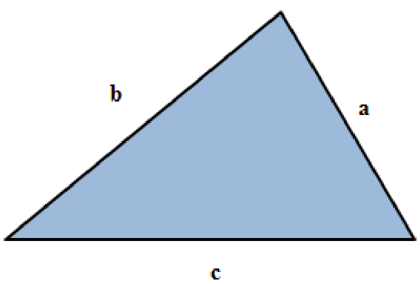
$\sphericalangle B = 180° - 120° = 60°$

$110° + 60° + \sphericalangle A = 180°$

$170° + \sphericalangle A = 180°$

$\sphericalangle A = 180° - 170° \sphericalangle A = 180° - 170° \Rightarrow\Rightarrow \sphericalangle A = 10° \sphericalangle A = 10°$

Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > c$
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > b$
$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > a$

Przykład 2

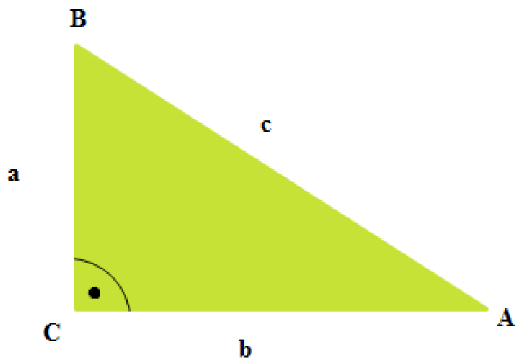
Sprawdź, czy odcinki o długościach $5, 6, 3\sqrt{2}$ mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości, należy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4{,}25 \approx 9{,}25 > 6$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

Twierdzenie Pitagorasa

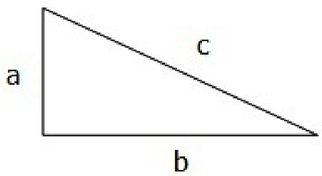


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Przykład 3

Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: $3 : 4$, a przeciwprostokątna ma długość 15 cm.



$a = ?$

$b = ?$

$c = \ 10\ cm$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3 : 4$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$4a = 3b \ \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2 a^2 + b^2 = c^2$

$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15\ cm\ ^2)$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225\ cm^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225\ cm^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144\ cm^2$$

$$b = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \ \Rightarrow \ a = \frac{3}{4} \cdot 12\ cm = 9\ cm$$

Odpowiedź: Przyprostokątne mają długości $9\ cm$ i $12\ cm$.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a) $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$

b) $2, \sqrt{10}, 4$

a) $\left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$24 = 3 + 21$

$24 = 24$

$L = P$

Trójkąt jest prostokątny

c) $4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2$

$16 = 10 + 4$

$16 \neq 14$

$L \neq P$

Trójkąt nie jest prostokątny

Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską.**
Przykłady takich trójek:

3, 4, 5;

5, 12, 13;

40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q takie, że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$$a = p^2 - q^2,\ b = 2pq,\ c = p^2 + q^2.$$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

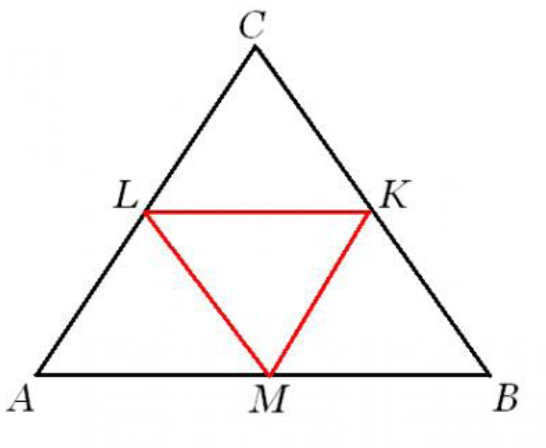
Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$AB \parallel LK \qquad |LK| = \frac{1}{2}|AB|$

$AC \parallel KM \qquad |KM| = \frac{1}{2}|AC|$

$BC \parallel LM \qquad |LM| = \frac{1}{2}|BC|$



Zadania

1.5.1 Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.

Odpowiedź: 30°, 40°, 110°

1.5.2 Jeden kąt trójkąta ma miarę 26°, a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi 12°. Wyznacz kąty tego trójkąta.

Odpowiedź: 26°, 71°, 83°

1.5.3 Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3 : 5 : 4.

Odpowiedź: $a = 12\ cm, b = 20\ cm, c = 16\ cma = 12\ cm, b = 20\ cm, c = 16\ cm$

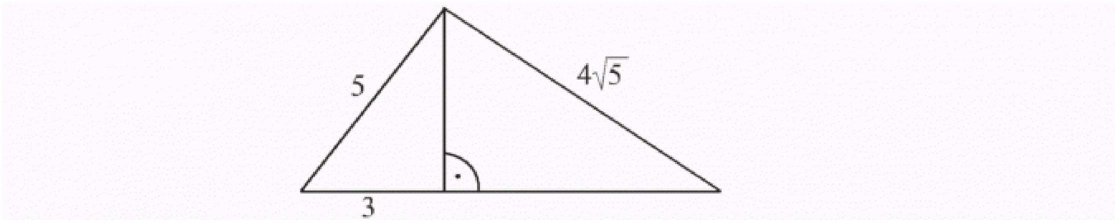
1.5.4 W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.

Odpowiedź: 8 cm

1.5.5 W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}\ cm$

1.5.6 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:



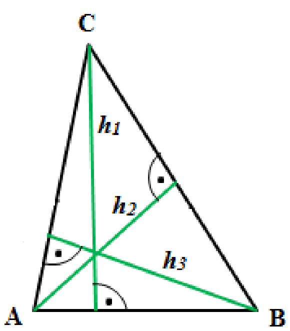
Odpowiedź: $P = 22$

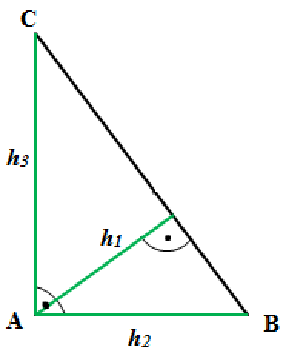
1.5.7 Dany jest trójkąt $\mathbf{ABC}$ o bokach długości: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{6}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AC}| = \mathbf{5}$. Punkt $\mathbf{M}$ jest środkiem boku $\mathbf{AC}$, punkt $\mathbf{N}$ – środkiem boku $\mathbf{BC}$. Obliczyć obwód trapezu $\mathbf{ABNM}$.

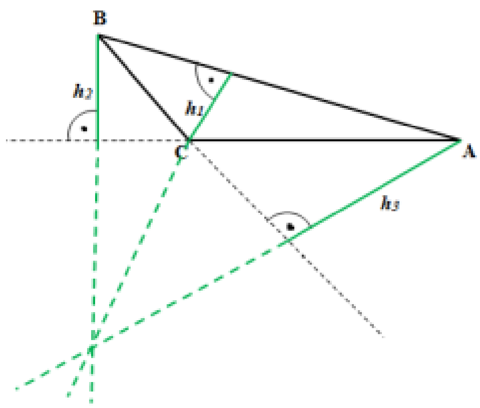
Odpowiedź: 13,5

Wysokości i środkowe w trójkącie

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

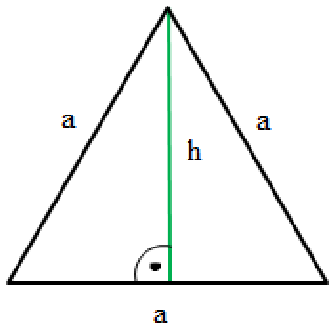






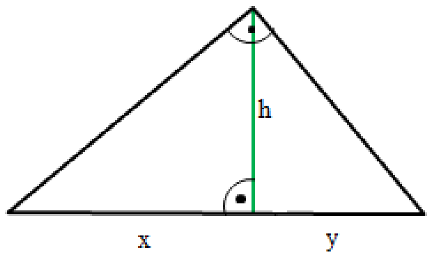
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



Wysokość trójkąta o boku jest równa

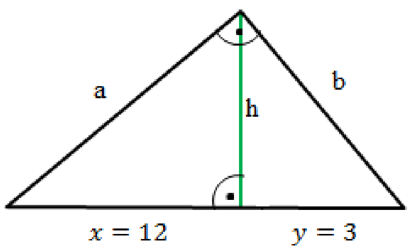
$$\boldsymbol{h} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



W **trójkącie prostokątnym** wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki x, y, dla których $\boldsymbol{h} = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}$

Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości $3\ cm$ i $12\ cm$. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.



a, b – szukane długości przyprostokątnych
h – wysokość

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej a.

$a^2 = x^2 + h^2$

$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}\ cm$

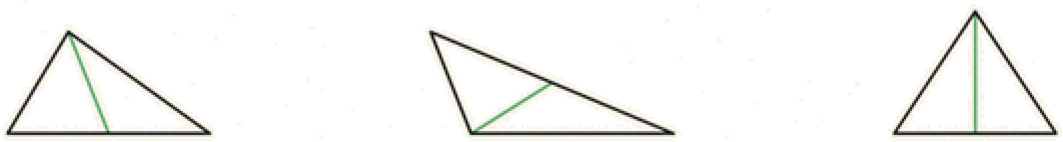
Podobnie liczmy długość przyprostokątnej b.

$b^2 = y^2 + h^2$

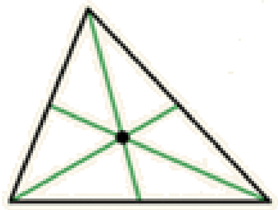
$b^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$

Wysokość trójkąta ma długość $6\ cm$, a przyprostokątne $6\sqrt{5}\ cm$ i $3\sqrt{5}\ cm$.

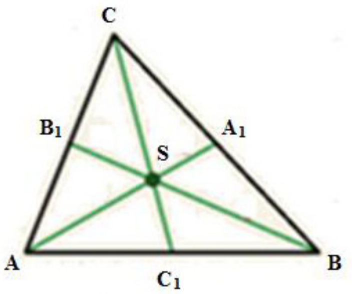
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

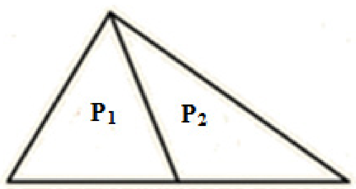


Środek ciężkości S dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości $3, 5, 6$.

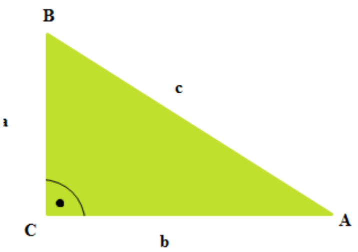
Najpierw liczymy, ile wynosi połowa obwodu trójkąta $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Odpowiedź: Pole trójkąta o bokach $3,\ \ 5, 6$ wynosi $2\sqrt{14}$.

Twierdzenie

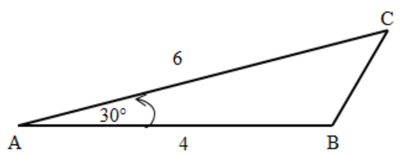
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BCA|}$$

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot sin30°$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6j^2$.

Zadania

1.5.8 W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: $16\ cm, 2\sqrt{97}\ cm, 2\sqrt{97}\ cm$

1.5.9 W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Odpowiedź: $64, 16 + 16\sqrt{2}$

1.5.10 Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|\mathbf{AB}| = \mathbf{4}$ i $|\mathbf{BC}| = \mathbf{2\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $\sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90° \sphericalangle A = 60°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 90°$

1.5.11 Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli $|\mathbf{AC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AB}| = \mathbf{7}$, $\sphericalangle \mathbf{BAC} = \mathbf{60°}$.

Odpowiedź: $7\sqrt{3}$

1.5.12 Oblicz pole trójkąta o bokach $\mathbf{12}$ i $\mathbf{9\sqrt{2}}$ oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze 30°.

Odpowiedź: $27\sqrt{2}$

1.5.13 W trójkącie ostrokątnym $\mathbf{ABC}$ poprowadzono prostą prostopadłą do boku $\mathbf{AB}$, przecinającą bok $\mathbf{AC}$ w punkcie $\mathbf{E}$ i bok $\mathbf{AB}$ w punkcie $\mathbf{F}$. Punkt $\mathbf{D}$ jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu $\mathbf{C}$. Wiedząc, że $|\mathbf{EC}| = \mathbf{3}|\mathbf{FD}| = \mathbf{1}$, oblicz sinus kata $\mathbf{CAB}$.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

1.6. Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

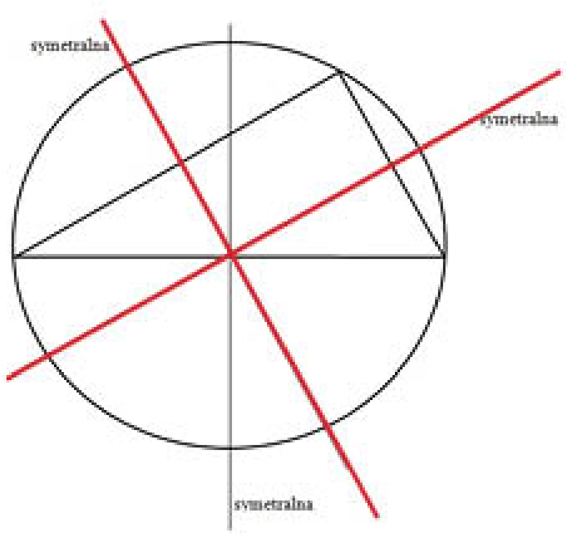
- **Stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu**

Okrąg opisany na trójkącie

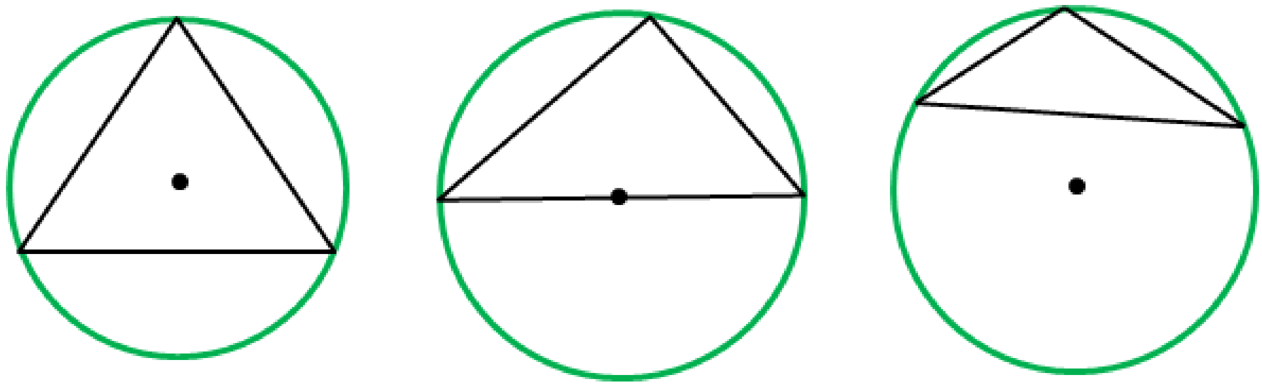
Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.



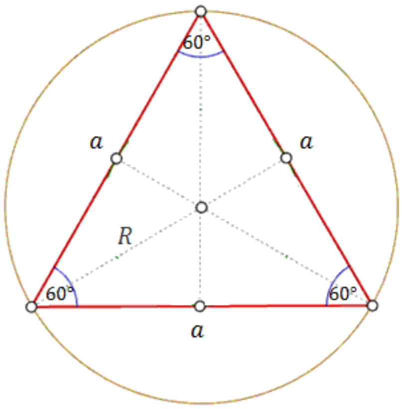
Na każdym trójkącie można opisać okrąg.



- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

Okręgi opisane na wybranych trójkątach

Trójkąt równoboczny



R – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

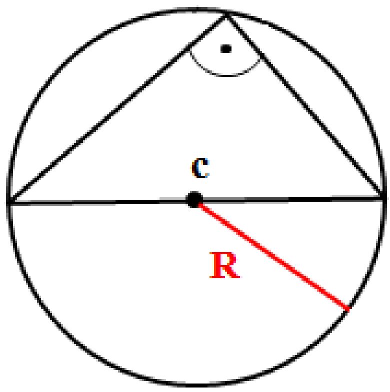
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



c – przeciwprostokątna

h – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$R = \frac{1}{2}c$$

Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku$a = 12\ cm$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru $R = \frac{2}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 12\ cm$, to:

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

więc $R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $4\ cm$ i $10\ cm$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi $2R$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$

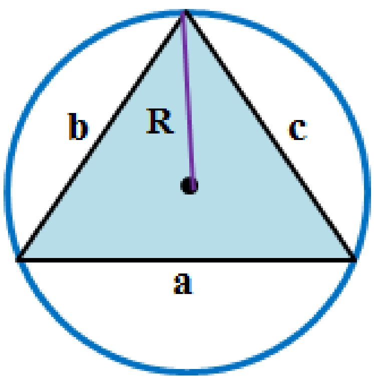
$(2R)^2 = 16 + 100$

$4R^2 = 116/:4$

$R^2 = 29 \Rightarrow R = \sqrt{29}$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = \sqrt{29}$.

Pole trójkąta wpisanego w okrąg



Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wynosi $\boldsymbol{P = \frac{abc}{4R}}$

Zadania

1.6.1 Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: 8π

1.6.2 Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $25\boldsymbol{\pi\ cm^2}$. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$

1.6.3 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

a) równobocznym, o boku długości $8\ cm$.

Odpowiedź: $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

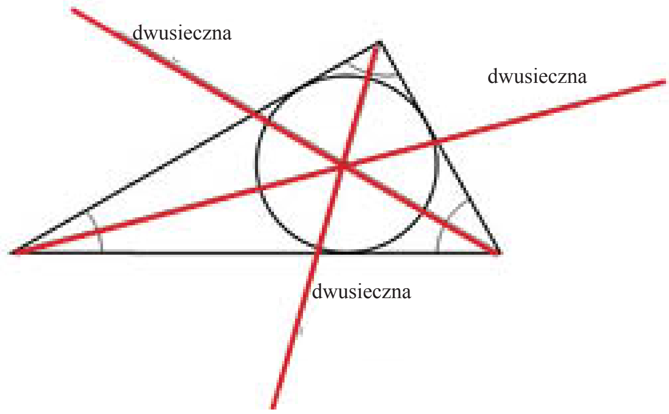
b) prostokątnym, o przyprostokątnych $12\ cm$ i $18\ cm$.

Odpowiedź: $R = 3\sqrt{13}$

1.6.4 Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy $\mathbf{13\frac{13}{24}}$. Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

Odpowiedź: 17

Okrąg wpisany w trójkąt



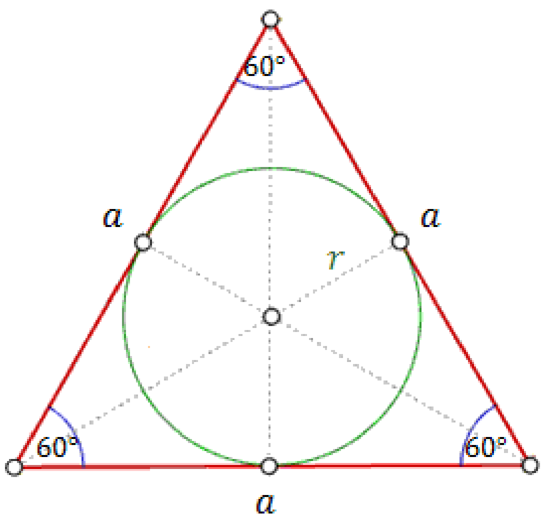
usieczna kąta to półprosta, która ma zątek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa y o równych miarach.

dy trójkąt ma trzy dwusieczne, które ecinają się w jednym punkcie. Punkt ten środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

vv każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

Trójkąt równoboczny



r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

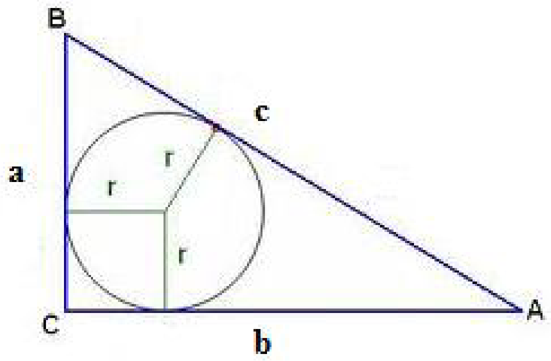
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$\boldsymbol{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{1}{3}h}$$

Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku$a = 8\ cm$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 8\ cm$, to:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

więc $r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm.$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ cm$ wynosi

$r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm.$

Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3\ cm$

i przeciwprostokątnej $5\ cm$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$5^2 = 3^2 + a^2$

$25 = 9 + a^2$

$a^2 = 16\ \Rightarrow a = 4\ cm$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru $r = \frac{a+b+c}{2}$, więc

$$r = \frac{4+3-5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość $1\ cm$.

Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c opisanego na okręgu o promieniu r jest równe

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Zadania

1.6.5 Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: $12\sqrt{3}\ cm^2$

1.7.6 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:

a) Pole koła opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedź: $25\pi\ cm^2$

b) Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $4\pi\ cm^2$

c) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Odpowiedź: $h = \frac{24}{5}\ cm$

Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

1.6.7 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $\mathbf{12\ cm}$. Kąty przy tej podstawie mają po $\mathbf{30}^\circ$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $r = \left(12 - 6\sqrt{3}\right)$

1.6.8 Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $\mathbf{a}$ i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:

a) $a = 4$ b) $a = 3\sqrt{6}$

c) $a = 6\sqrt{2}$ d) $a = 12$

Odpowiedź:

a) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}, R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ b) $r = \sqrt{3}, R = 3\sqrt{2}$

c) $r = \sqrt{6}, R = 2\sqrt{6}$ d) $r = 2\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}$

1.6.9 W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{5}{12}, tg\beta = \frac{12}{5}$

1.7. Przystawanie i podobieństwo trójkątów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Rozpoznawać trójkąty przystające i podobne**
- **Wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów**

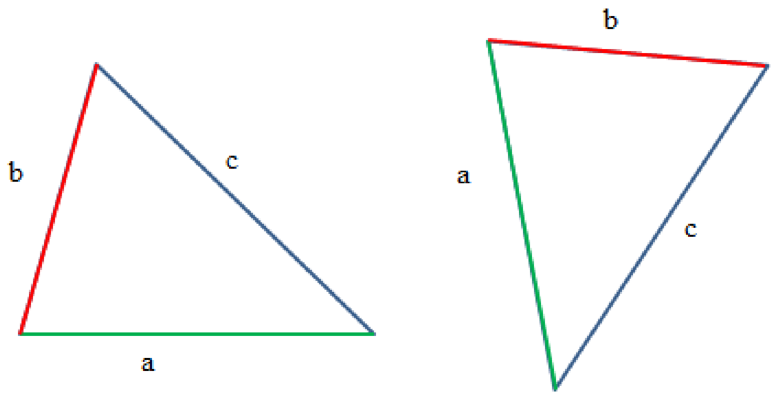
Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem .

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

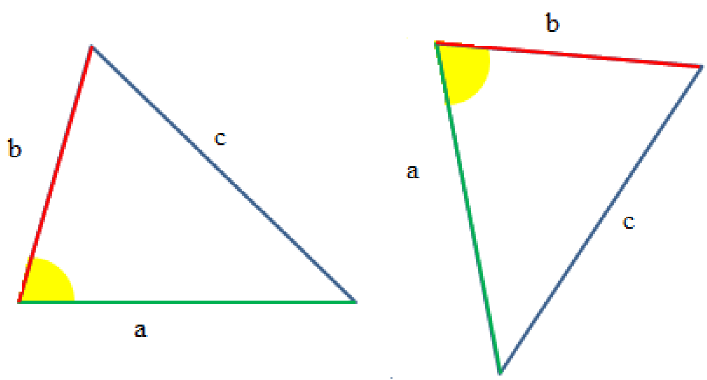
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



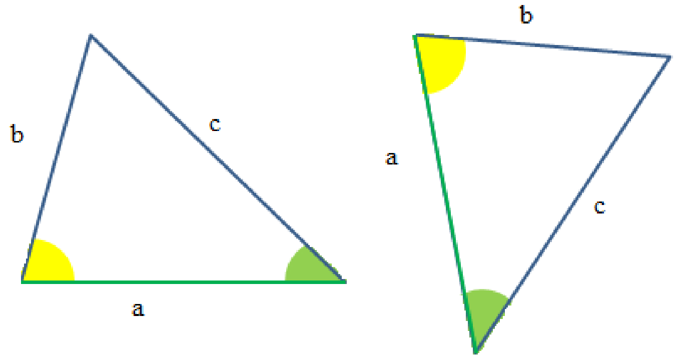
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



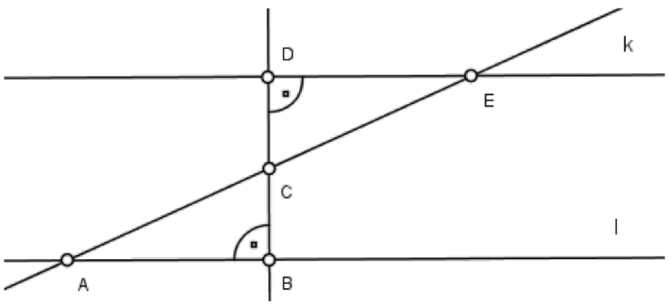
III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Przykład 1

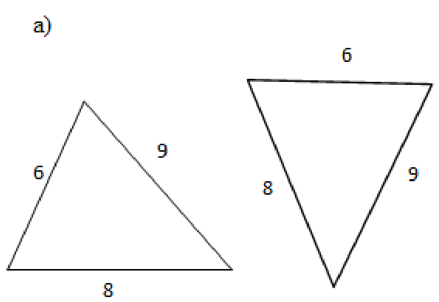
Proste k i l są równoległe. Punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

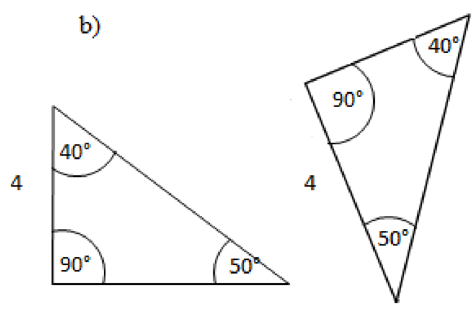


Kąty BCA oraz DCE jako kąty wierzchołkowe mają równe miary. $|DC| = |CB|$, ponieważ punkt C jest środkiem odcinka BD. Wobec powyższych faktów, trójkąty ABC oraz DCE na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

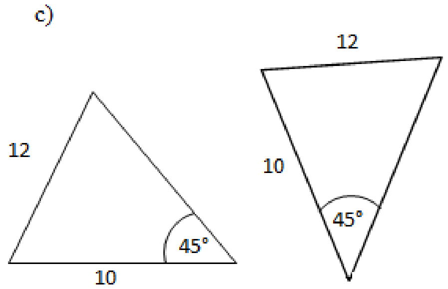
Zadanie

1.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.





c)



Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

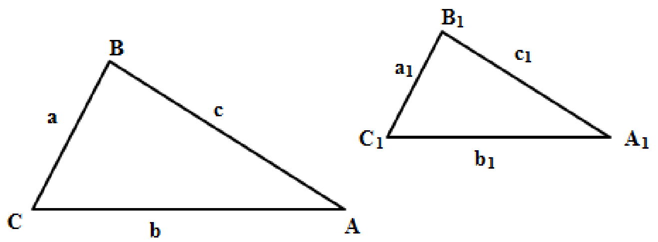
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem ~.

I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



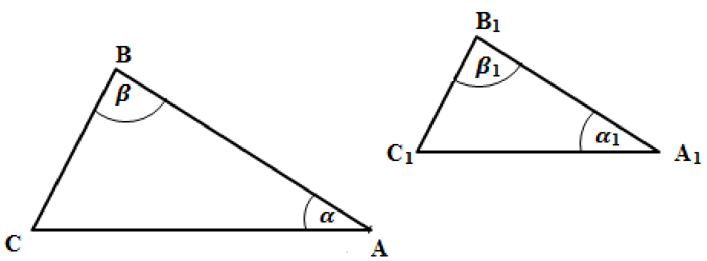
$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} = k$$

k – skala podobieństwa

$\Delta ABC \sim \Delta A_1 A_2 A_3$

II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



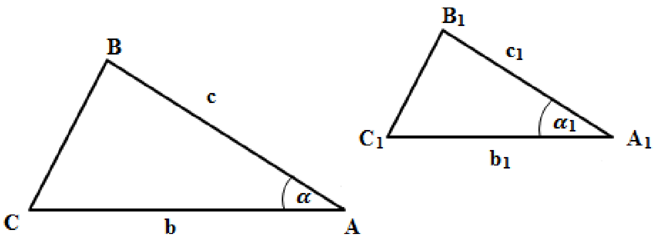
$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \beta_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1 A_2 A_3$

III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



$\alpha = \alpha_1$

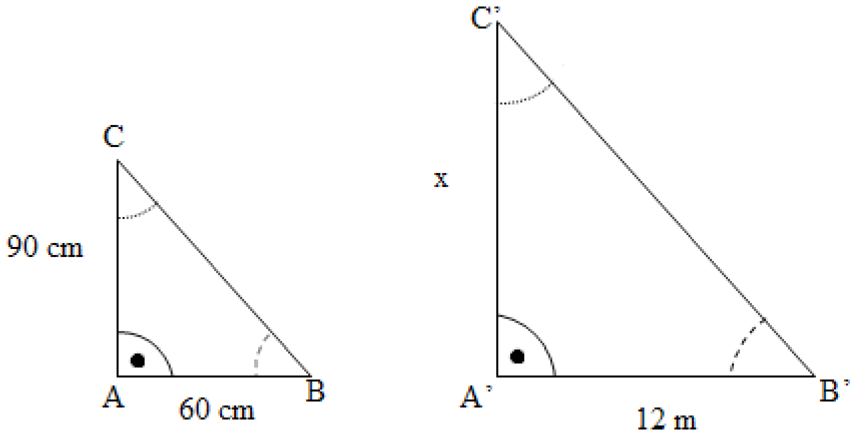
$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1 A_2 A_3$

Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.

W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{x}{12}$

$6x = 9 \cdot 12$

$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$

Odpowiedź: Wieża ma wysokość 18 m.

Zadania

1.7.2 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ w skali $\mathbf{k = 2}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$,

jeśli: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{5}$, $|\mathbf{BC}| = \mathbf{7}$, $|\mathbf{CA}| = \mathbf{4}$.

Odpowiedź: $|A'B'| = 10, |B'C'| = 14, |C'A'| = 8.$

1.7.3 Ramiona trapezu $\mathbf{ABCD}$ przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie $\mathbf{E}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DE}$.

Odpowiedź: 12

1.7.4 Punkty $\mathbf{A', B', C'}$ są środkami boków trójkąta $\mathbf{ABC}$. Pole trójkąta $\mathbf{A', B', C'}$ jest równe $\mathbf{4}$. Oblicz pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Odpowiedź: 16

17.5 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$. Oblicz długość boku $|\mathbf{A'C'}|$, jeżeli $|\boldsymbol{AB}| = \mathbf{8}\boldsymbol{cm}, |\boldsymbol{AC}| = \mathbf{5}\ \boldsymbol{cm}, |\boldsymbol{A'B'}| = \mathbf{12}\ \boldsymbol{cm}$.

Odpowiedź: $|A'C'| = 7{,}5\ cm$

1.7.6 Trójkąty $\boldsymbol{ABC}$ i $\boldsymbol{A'B'C'}$ są podobne. Trójkąt $\boldsymbol{ABC}$ ma boki o długości $\mathbf{4}\ \boldsymbol{cm}, \mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$ i $\mathbf{8}\ \boldsymbol{cm}$. Obwód trójkąta $\boldsymbol{A'B'C'}$ wynosi $\mathbf{135}\ \boldsymbol{cm}$. Oblicz długości boków trójkąta $\boldsymbol{A'B'C'}$.

Odpowiedź: $30\ cm, 45\ cm, 60\ cm$

1.7.7 Drzewo o wysokości $\mathbf{4}\ \boldsymbol{m}$ rzuca cień o długości $\mathbf{8}\ \boldsymbol{m}$. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości $\mathbf{3}\boldsymbol{m}$. Oblicz wysokość znaku drogowego.

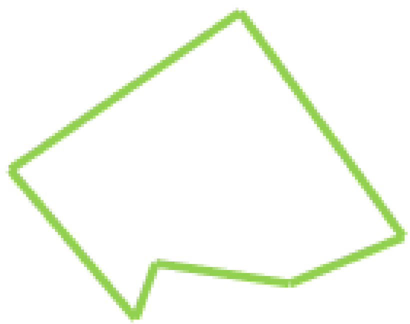
Odpowiedź: $1{,}5\ m$

1.8. Wielokąty

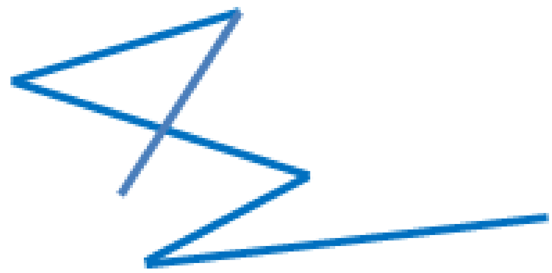
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać liczbę przekątnych wielokąta**
- **Obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta**

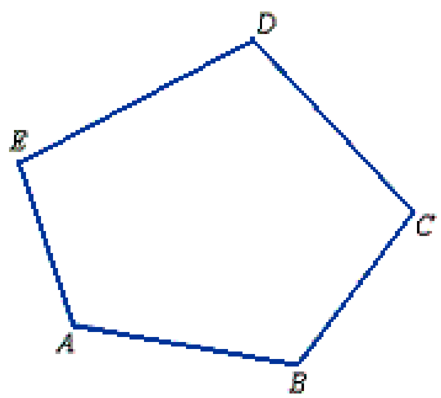
Łamaną nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.
Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej.**



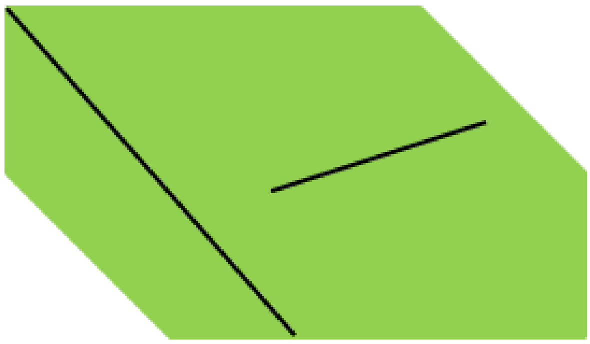
Łamana zwyczajna zamknięta



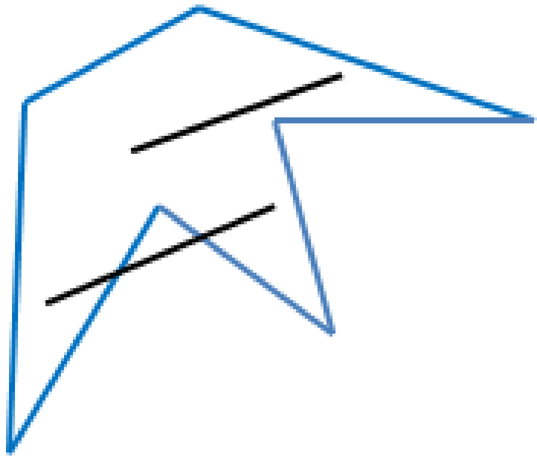
Łamana zwyczajna otwarta



Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.
Wielokąt o n bokach nazywamy również n-kątem.
Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.



Wielokąt wypukły
Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie



Wielokąt wklęsły
Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.

Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

Przykład 1
Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta.
$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:

$$(n-2)\cdot 180^\circ$$

Przykład 2
Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.
$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

$$(n-2)\cdot 180^\circ = (17-2)\cdot 180^\circ = 15\cdot 180^\circ = 2700^\circ$$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę". To znaczy, mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n". Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \ /\cdot 2$$

Obliczamy powstałe równanie:

$(n-3)n = 108$

$n^2 - 3n - 108 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 441$

$\sqrt{\Delta} = 21$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ – nie spełnia warunków zadania, ponieważ liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+21}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1080°$. Jaki to wielokąt? Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$(n-2) \cdot 180° = 1080° \ /: 180°$

$n - 2 = 6$

$n = 8$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

Zadania

1.8.1 Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: Dziesięciokąt.

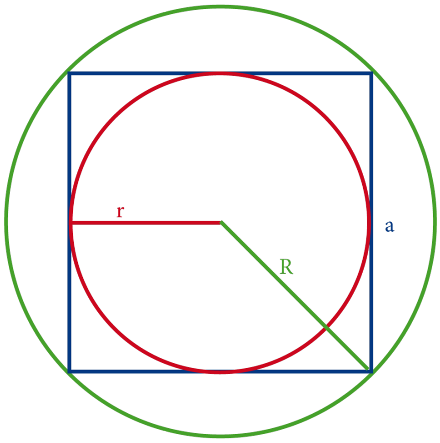
1.8.2 Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1620°$. Jaki to wielokąt?

Odpowiedź: Jedenastokąt.

Czworokąty

Na początek przypomnimy podstawowe wzory na pola czworokątów.

Kwadrat



$P = a^2$

$P = 2R^2$

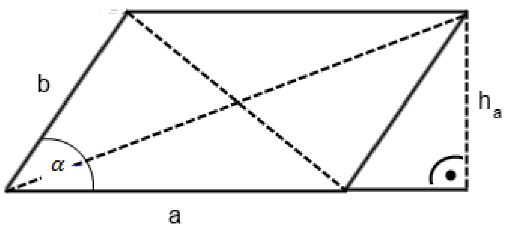
$P = 4r^2$

d – przekątna

$d = a\sqrt{2}$

$P = \frac{1}{2}d^2$

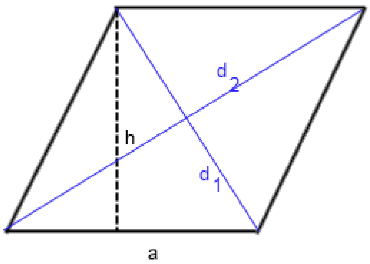
Równoległobok



$P = a \cdot h_a$

$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Romb

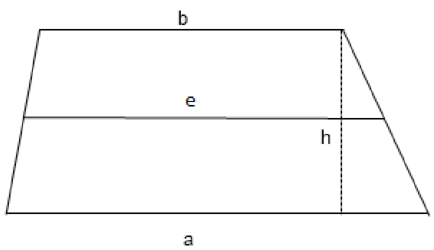


$P = a \cdot h_a$

$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$

$P = a^2 sin\alpha$

Trapez

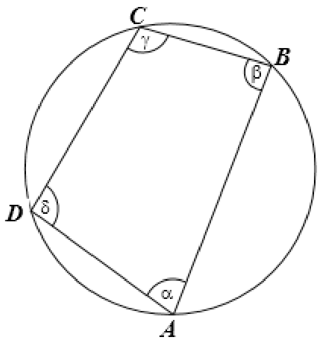


$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

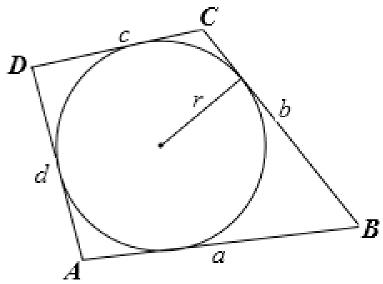
e – odcinek łączący środki ramion trapezu

$e = \frac{a+b}{2}$

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:
$a + c = b + d$



Zadania

1.8.3 Oblicz pole równoległoboku o bokach $\mathbf{7\ cm}$ i $\mathbf{12\ cm}$, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o 60°.

Odpowiedź: $42\sqrt{3}\ cm^2$

1.8.4 W rombie $\mathbf{ABCD}$ bok AB ma długość $\mathbf{20\ cm}$, a przekątna $\mathbf{BD}$ ma długość $\mathbf{24\ cm}$. Punkty $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ są kolejno środkami boków rombu.

a) wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest prostokątem,

b) oblicz pole tego prostokąta.

Odpowiedź: b) $P = 192\ cm^2$

1.8.5 W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą $\mathbf{45}°$ i $\mathbf{30}°$. Oblicz pole trapezu.

Odpowiedź: $P = 21\left(\sqrt{3} - 1\right)\ cm^2$

1.8.6 Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3cm. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedź: $P = 45\ cm^2$

1.8.7 W trójkącie prostokątnym ABC dane są $|\mathbf{AC}| = \mathbf{12}$, $\sphericalangle\mathbf{CAB} = \mathbf{60^\circ}$. Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1 : 5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.

Odpowiedź: $P = 70\sqrt{3}$

1.88 W czworokącie $\mathbf{ABCD}$ przekątne $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BD}$ przecinają się w punkcie $\mathbf{E}$. Dane są pola trzech trójkątów

: $\mathbf{P_{BCE} = 15, P_{ECD} = 5, P_{AED} = 10}$. Oblicz pole czworokąta $\mathbf{ABCD}$.

Odpowiedź: 60.

1.9. Wielokąty foremne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego**
- **Obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego**
- **Obliczać pola wielokątów foremnych**

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.
Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.
Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o *n* bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

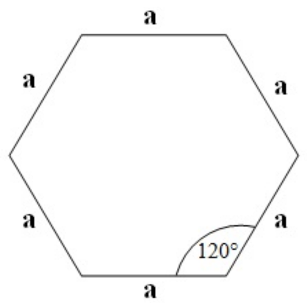
Suma miar kątów wewnętrznych *n*-kąta jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

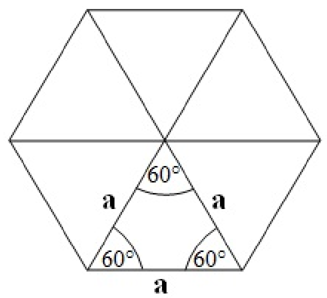
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny.**



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi $720°$.

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę $120°$.



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	Pole	Promień okręgu opisanego na wielokącie	Promień okręgu wpisanego w wielokąt
Trójkąt równoboczny	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zadania

1.9.1 Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $4,5 \text{ cm}$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $R = 3\ cm,\ r = 1{,}5\ cm$

1.9.2 W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

1.9.3 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód o długości $\mathbf{10\ cm}$. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

Odpowiedź: Pole trójkąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{9}$, pole kwadratu $P = 6\frac{1}{4}$, pole sześciokąta $P = \frac{25\sqrt{3}}{6}$

1.9.4 Pole kwadratu jest równe $\mathbf{8\ cm^2}$. Oblicz promień koła:

a) opisanego na kwadracie,

b) wpisanego w kwadrat.

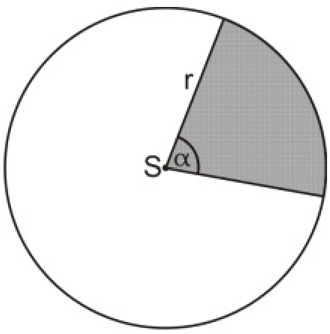
Odpowiedź: $R = 2\ cm,\ \ r = \sqrt{2}\ cm$

1.9.5 W koło o polu $\mathbf{6,25\pi\ cm^2}$ wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

Odpowiedź: $P = 12{,}5\ cm$

1.10. Pole koła i długość okręgu

Dla danego koła o promieniu r możemy policzyć:



pole: $\boldsymbol{P = \pi r^2}$

oraz obwód: $\boldsymbol{L = 2\pi r}$

Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu r. Kąt pełny ma 360°. Podzielmy całe koło na wycinki o kącie 1°. Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$$P = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie α będzie miał postać:

$$\boldsymbol{P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole wycinka koła o promieniu $r = 10$ i kącie równym $60°$.
Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:

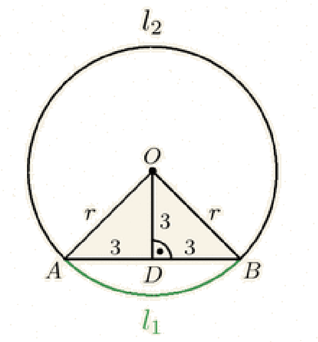
$$P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$$

Długość l łuku okręgu o promieniu r, odpowiadającego katowi środkowemu o mierze α, wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r}$$

Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości $6\ cm$, odległą o $3\ cm$ od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt AOB jest równoramienny. Odcinek OD jest jego wysokością i dzieli cięciwę AB o długości $6\ cm$ na dwie równe części po $3\ cm$. Promień r liczymy z twierdzenia Pitagorasa.
$3^2 + 3^2 = r^2 \ \Rightarrow\ 18 = r^2 \ \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\ cm$

Suma kątów w trójkącie wynosi $180°$. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych ADO i DBO są równe $90°, 45°, 45°$.
$\sphericalangle AOB = 45° + 45° = 90°$

Długość łuku l_1 wynosi:

$$l_1 = \frac{90°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ cm$$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku l_1.

$$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\ cm.$$

Odpowiedź: Okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ cm$ i $4\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\ cm$.

Zadania

1.10.1 Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $\mathbf{60°}$ ma długość $\mathbf{2}$. Oblicz pole tego wycinka.

Odpowiedź: 6π

1.10.2 Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\pi$ odpowiada kąt 135°.

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

1.10.3 Promień koła jest równy $2\ cm$. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze 30°?

Odpowiedź: $\frac{1}{3}\pi$

1.10.4 Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie 60°, jeżeli promień koła ma długość $6\ \mathrm{cm}$.

Odpowiedź: $P = 6\pi\ cm^2, l = 2\pi\ cm$

1.10.5 Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu $9\ \mathrm{cm}$ i kącie 60°.

Odpowiedź: $l = 3\pi\ cm, P = 13{,}5\pi\ cm^2$

1.10.6 Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie 120°, wynosi $l = 8\pi\ cm$.

Odpowiedź: $r = 12\ cm$

Czy zdam maturę z matematyki?

1. [2]W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa *AB* tego trójkąta ma długość:

   A. 6

   B. $2\sqrt{2}$

   C. $2\sqrt{29}$

   D. 14

2. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

   A. $16\sqrt{6}$

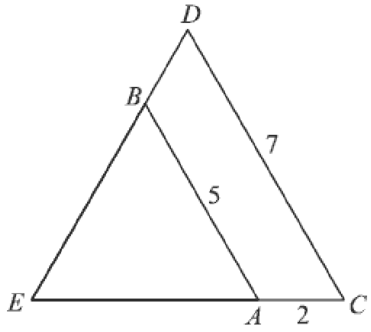
   B. $14\sqrt{6}$

   C. $12 + 4\sqrt{6}$

   D. $12 + 2\sqrt{6}$

2. Zadania 1-6: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 01.03.2013

3. Odcinki *AB* i *CD* są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka *AE* jest równa:



A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5

4. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

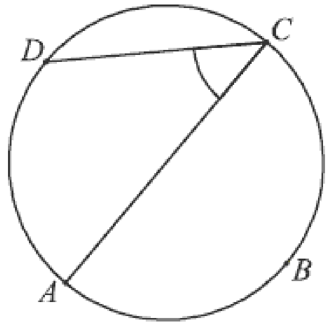
A. 25

B. 50

C. 75

D. 100

5. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego *ACD* jest równa:



A. 90°

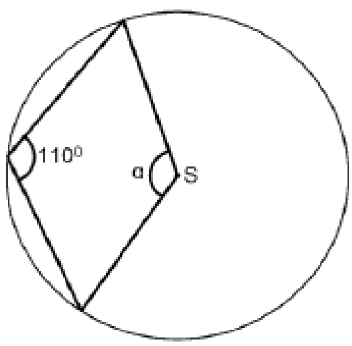
B. 60°

C. 45°

D. 30°

6. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwusieczne kątów *A* i *B*. Dwusieczne te przecinają się w punkcie *P*. Uzasadnij, że kąt *APB* jest rozwarty.

7. [3]Punkt *S* jest środkiem koła. Zatem miara kąta α jest równa (patrz na rysunek):



A. 70°

B. 220°

C. 140°

D. 250°

3. Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze, 01.03.2013.

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe 30° i 60°. Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

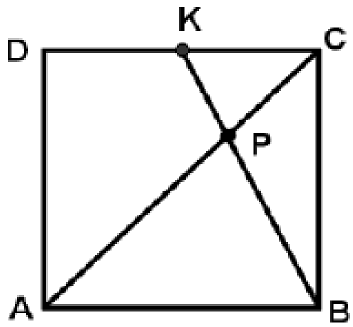
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

9. Na boku *DC* kwadratu *ABCD* obrano punkt *K* tak, że $|DK| = |KC|$ (zobacz rysunek). Przekątna *AC* kwadratu przecina odcinek *BK* w punkcie *P*. Uzasadnij, że pole trójkąta *ABP* jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta *KCP*.



10.[4]Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

A. 36π

B. 9π

C. $18\sqrt{3}\pi$

D. 12π

11. Odcinek o długości 2,4 *m* podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

A. 120 cm

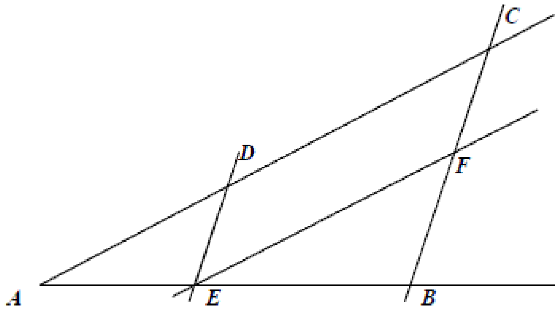
B. 0,72 m

C. 480 mm

D. 14 dm

4. Zadania 10-13: www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 01.03.2013

12. * Proste *DE* i *CB* oraz *EF* i *AC* są równoległe. Oblicz długość odcinka *EB*, jeżeli $AE = 2{,}5$, $DE = 3$ oraz $FB = 4$.



13. Wykaż, że wysokość *CD* trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka *C* kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki *AD* i *DB*, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio *AC* i *BC* tego trójkąta.

14. [5]W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

A. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

D. $\frac{1}{17}$

15. Długość promienia *r* okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

A. $4\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{5}$

16. [6]Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1:

A. o 10%

B. o 110%

C. o 21%

D. o 121%

5. Zadania 14-15: www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 01.03.2013.
6. Zadania 16-21: www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 01.03.2013

17. Przekątna *AC* prostokąta *ABCD* ma długość 14. Bok *AB* tego prostokąta ma długość 6. Długość boku *BC* jest równa:

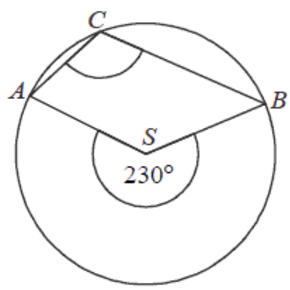
A. 8

B. $4\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{58}$

D. 10

18. Punkty *A*, *B* i *C* leżą na okręgu o środku *S* (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego *ACB* jest równa:



A. 65°

B. 100°

C. 115°

D. 130°

19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

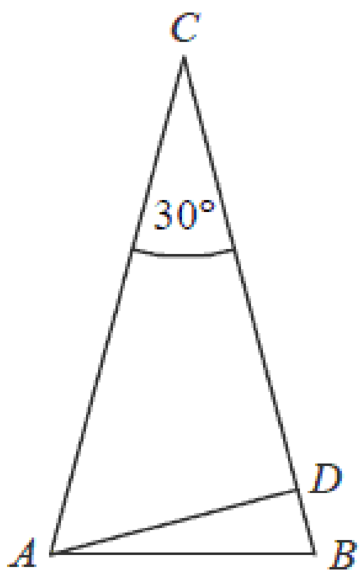
A. 36

B. 18

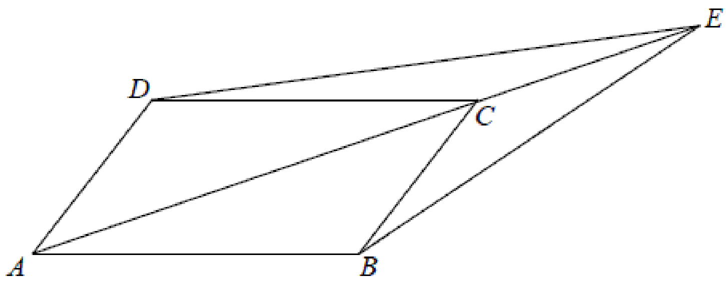
C. 12

D. 6

20. W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość *AD* trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok *BC*.



21. Dany jest równoległobok *ABCD*. Na przedłużeniu przekątnej *AC* wybrano punkt *E* tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku *ABCD* jest cztery razy większe od pola trójkąta *DCE*.



22. [7]Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

A. 21° i 105°

B. 11° i 66°

C. 18° i 108°

D. 16° i 96°

23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta i dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{3}$

D. 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

A. 3 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 8 cm

7. Zadania 22-26: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 02.03.2013.

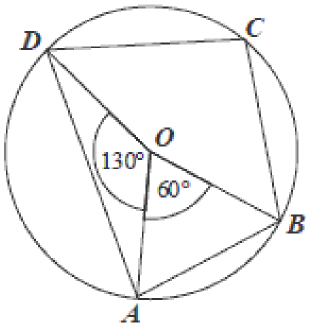
25. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany *BAD* ma miarę:

A. 150°

B. 120°

C. 115°

D. 85°



26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

27. [8]W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa *AB* tego trójkąta ma długość.

A. 6

B. $2\sqrt{21}$

C. $2\sqrt{29}$

D. 14

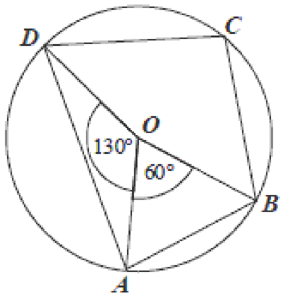
28. Pięciokąt *ABCDE* jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta *ECD*:

A. ΔABF

B. ΔCAB

C. ΔIHD

D. ΔABD



29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $16\sqrt{6}$

B. $14\sqrt{6}$

C. $12 + 4\sqrt{6}$

D. $12 + 2\sqrt{6}$

8. Zadania 27-31: www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf, 02.03.2013

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

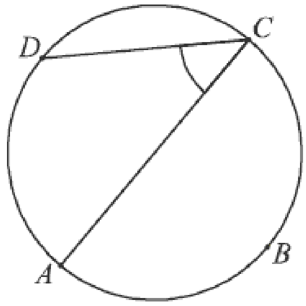
A. 25

B. 50

C. 75

D. 100

31. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego *ACD* jest równa:



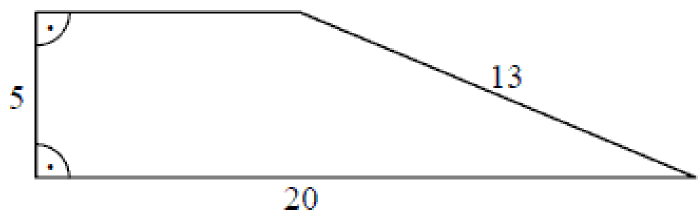
A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

32. [9]Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.
Obwód tego trapezu jest równy:



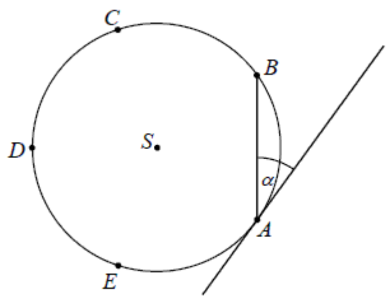
A. 43

B. 46

C. 48

D. 50

33. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* i *E* leżą na okręgu o środku *S* i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek). Wówczas miara kąta ostrego α między cięciwą *AB* i styczną do tego okręgu w punkcie *A* jest równa:



A. 18°

B.30°

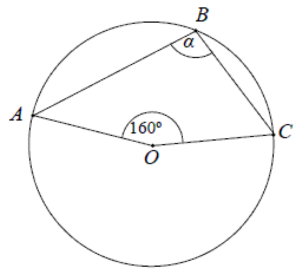
C. 36°

D. 54°

34. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

9. Zadania 32-36: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 03.03.2013.

35. [10] Punkt *O* jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę:



A. 80°

B. 100°

C. 110°

D. 120°

36. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa:

A. $3\sqrt{3}$

B. 3

C. $6\sqrt{3}$

D. 6

37. Dany jest czworokąt *ABCD*, w którym $AB \parallel CD$. Na boku *BC* wybrano taki punkt *E*, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt *AED* jest prosty.

38. [11]Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:

A. 7

B. 14

C. 21

D. 28

39. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:

A. $4\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 8

D. 4

40. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

A. 3

B. 4

C. $\sqrt{34}$

D. $\sqrt{61}$

10. Zadania 37-39: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 04.03.2013.
11. Zadania 40-46: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

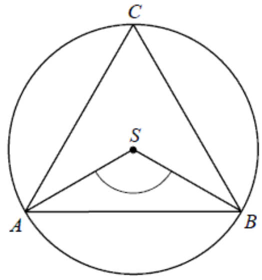
41. Punkty *A*, *B*, *C*, leżące na okręgu o środku *S*, są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego *ASB* jest równa:

A. 120°

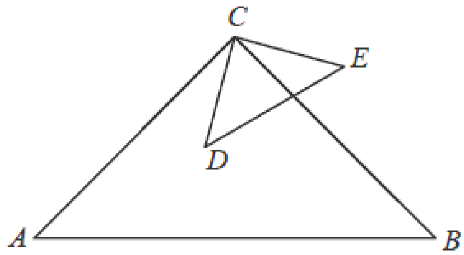
B. 90°

C. 60°

D. 30°



42. Trójkąty prostokątne równoramienne *ABC* i *CDE* są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku *C* jest prosty). Wykaż, że $AD = BE$.



43. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

44. [12]Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E takie, że IADI=IACI oraz IBEI=IBCI. Wykaż, że kąt I ∢ DCE I=45°.

45. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.

46. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

A. 120°

B. 135°

C. 144°

D. 150°

50. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:

A. $6\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{5}$

D. $5\sqrt{3}$

12. Zadania 47-55: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

51. Długościami boków trójkąta mogą być:

A. $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$

B. 6 mm; 0,1 dm; 12cm

C. $4, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

D. 2 dm; 4 cm; 0,07m

52. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:

A. 50°

B. 80°

C. 40°

D. 70°

53. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o 38° większy od drugiego. Kąty te mają miary:

A. 71° i 109°

B. 38° i 142°

C. 26° i 64°

D. 38° i 76°

54. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:

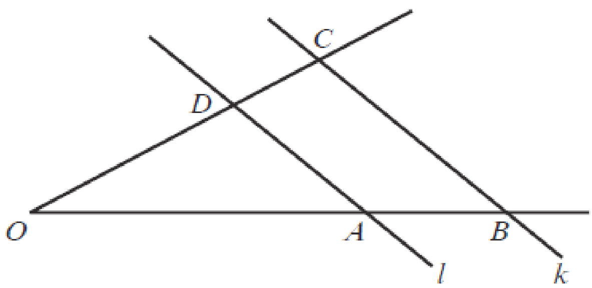
A. 360°

B. 540°

C. 720°

D. 1080°

55. *Proste *l* i *k* są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek *OD* ma długość:



A. 12

B. 18

C. $\frac{18}{5}$

D. $\frac{144}{5}$

56. [13]*Odcinki *AB* i *CD* są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka *AE* jest równa:

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5

57. [14]*Proste *AD* i *BC* są równoległe. Długości odcinków *ED*, *DC* oraz *AB* podane są na rysunku. Długość odcinka *EA* jest równa:

A. 4

B. 8

C. 9

D. 10

13 Zadanie 56: www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf, 04.03.2013

14 Zadanie 57: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

2. Ciągi

W TECHNIKUM NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;**
- **Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;**
- **Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.**

2.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym**

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby **naturalne.**

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ...)$.

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, ..., n\}$ i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.

a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a liczby $(1, 2, 3, ..., n)$ nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności.

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, to ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Przykład 1

$a_n = n + 3: 2, 5, 8, 11, 14, ...$ – ciąg rosnący

$a_n = n^2: 1, 4, 9, 16, 25, ...$ – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n: 3, 2, 1, 0, -1, ...$ – ciąg malejący

$a_n = -5n: \ -5, -10, -15, -20, -25, ...$ – ciąg malejący

2.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$\boldsymbol{r = a_{n+1} - a_n}$ nazywamy różnicą ciągu
$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + r}$

Przykłady ciągów arytmetycznych:
$a_1 = 5, r = 3;$ 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...
$a_1 = 6, r = -2;$ 6, 4, 2, 0, -2, -4, ...

Zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2} \cdot n$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg arytmetyczny jest:

– **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia: $\mathbf{a_{n+1} - a_n > 0}$,

– **malejący**, gdy różnica jest ujemna: $\mathbf{a_{n+1} - a_n < 0}$,

– **stały**, gdy różnica jest równa 0: $\mathbf{a_{n+1} - a_n = 0}$.

CIEKAWOSTKA

[15]W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 - 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych, nazwany następnie jego imieniem: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie n – należy do liczb naturalnych oraz $k_0 = 1$ i $k_1 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1{,}618033998875\ldots = \Phi$$

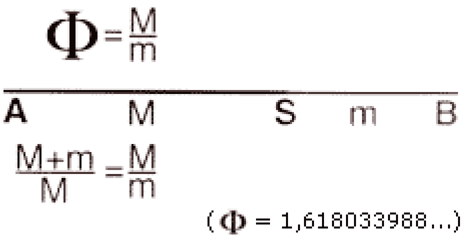
Można pokazać, że Φ jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym.

Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba Φ, jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd też w opracowaniach często podaje się, że $\Phi = 1{,}618$.

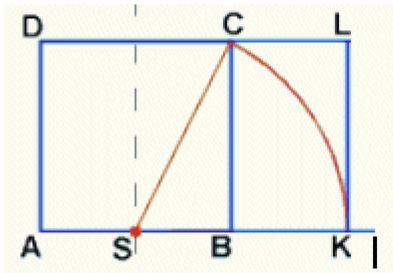
15. „Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym" autor J. Nowakowski i K. Borowski Wydawnictwo Difin., www.bossa.pl, 06.03.2013.

Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:

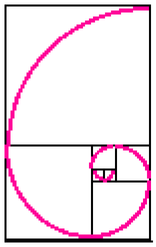
1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.



2. Złoty podział prostokąta .



3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

Praca dla chętnych

Poszukaj więcej informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

Zadania

2.2.1 Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

b) 2, 4, 8, 16, 32, ...

c) -2, -4, -6, -8, ...

d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

Odpowiedź: Ciągi arytmetyczne: a, c, d.

2.2.2 Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n):

a) $a_n = 2n$

b) $a_n = 3n-1$

c) $a_n = 2n+1$

d) $a_n = 1-n$

e) $a_n = n^n$

f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Odpowiedź::
a) 2, 4, 6, 8, 10, 12
b) 2, 5, 8, 11, 14, 17
c) 3, 5, 7, 9, 11, 13
d) 0, -1, -2, -3, -4, -5
e) 1,4, 27, 256, 3125, 46656

f) -1, $\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, -$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$

2.2.3 Dany jest ciąg (a_n) o podanym wzorze: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_3 i a_4.

Odpowiedź: $a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = -\frac{1}{8}$

2.2.4 Sprawdź, czy dany ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 3+n$

b) $a_n = 2n-1$

c) $a_n = n^2+1$

d) $a_n = \frac{2}{3}n+2$

e) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Odpowiedź: Tak: a, b, c.

2.2.5 Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_2 = 5, a_6 = 15$

b) $a_3 = 6, a_{11} = 21$

c) $a_7 = 4, a_9 = 18$

d) $a_1 = 3, a_4 = 9$

e) $a_2 = 1, a_4 = 3\text{-}2\sqrt{3}$

Odpowiedź::

a) $a_n = -35+ (n-1)\cdot 10 = -45+10n$

b) $a_n = 2+ (n-1)\cdot 2 = 2n$

c) $a_n =-38+(n-1)\cdot 7 = -45+7n$

d) $a_n = 3+ (n-1)\cdot 2 = 2n + 1$

e) $a_n = 5+2\sqrt{3}\text{-}n(2+\sqrt{3}$

2.2.6 Znając trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, wyznacz 60 wyraz tego ciągu:

$\boldsymbol{a_1 = 12, a_2 = 24, a_3 = 36}$

Odpowiedź: 720

2.2.7 Mając dany ciąg arytmetyczny (a_n), w którym: $\boldsymbol{a_1 = 2, r = 4, a_n = 122}$, oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg i ile wynosi suma jego wyrazów.

Odpowiedź: $n = 31, S_n = 1922$

2.2.8 Wyznacz a_3, a_7, a_{12} w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 8$, r = 11.

Odpowiedź: $a_3 = 30$, $a_7 = 74$, $a_{12} = 129$

2.2.9 Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów ciągu: 1, 4, 7, 10, 13, ….

Odpowiedź: $S_{20} = 590$

2.2.10 Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym $a_n = 2n - 5$.

Odpowiedź: $S_{15} = 165$

2.2.11 Oblicz *x*, wiedząc, że liczby w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Podaj różnicę ciągu.

a) $8,\ x, 22$ b) $x - 4, 5, x + 12$

Odpowiedź: a) $x = 15, r = 7$ b) $x = 1, r = 8$

2.2.12 Oblicz x, wiedząc, że: $\mathbf{2+6+10+\cdots+x=648}$

Odpowiedź: 70

2.2.13 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n):

a) a_n= 3n

b) a_n= 2n-4

c) a_n= n^2- 1

d) a_n= -n+2

e) $a_n=\frac{-2n}{n+3}$

Odpowiedź::

a) r = 3 ciąg rosnący

b) r = 2 ciąg rosnący,

c) r = 2n+1 dla n ≥ 1 r > 0 ciąg rosnący,

d) r = -1 ciąg malejący,

e) r = $\frac{-6}{n^2+7n+12} < 0$ ciąg malejący

CIEKAWOSTKA

Ciąg liczb Fibonacciego na giełdzie

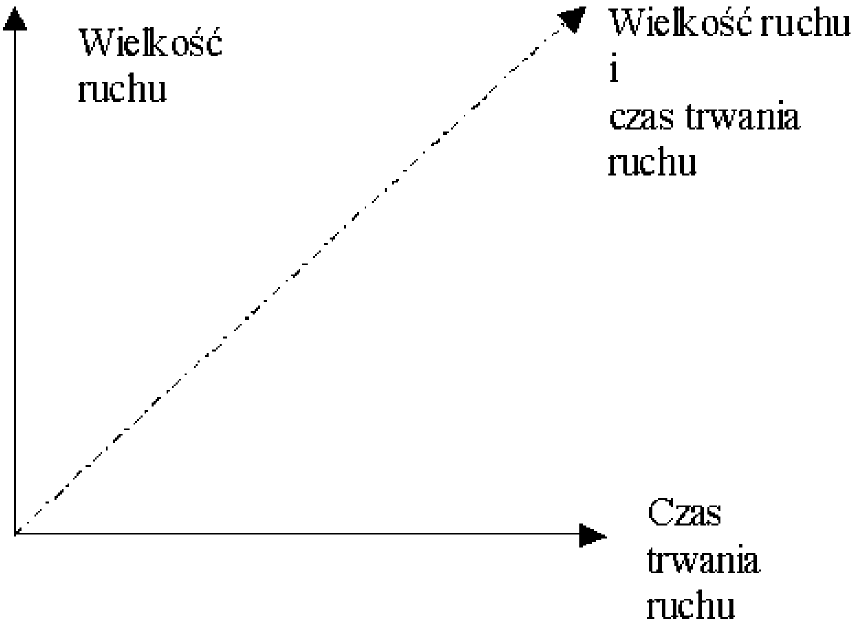
Istnieją trzy sposoby wykorzystania ciągu liczb Fibonacciego do analizy papierów wartościowych:

1. metody czasowe – w odniesieniu do upływu czasu – rozdział 3.2.1.
2. metody cenowe – w odniesieniu do zmiany ceny – rozdział 3.2.2
3. metody cenowo-czasowe – w odniesieniu do upływu czasu i zmiany ceny – rozdział 3.2.3

Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz, przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.

Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.



Rysunek 27. Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.

2.3. Ciąg geometryczny i jego własności

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Badać, czy dany ciąg jest geometryczny**
- **Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego**

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą *q*, zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą *q*, a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q_n - 1 \; dla\, n \geq 2$$

Suma *n*-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \; dla\, q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad dla\, q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, an, a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n^{\,2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 > 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 < 0$$

Ciąg jest malejący wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 < 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 > 0$$

Ciąg jest stały wtedy, gdy:

$$q = 1 \text{ lub } a_1 = 0$$

Jeśli iloraz q jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny. Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału (-1, 1).

CIEKAWOSTKA

Metody cenowe

Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotnym jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi Φ i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby Φ z przedziału <-3, 3>.

Tabela 3. Współczynniki złotego podziału[16]

Potęga n	F^n – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	Ciąg zewnętrzny
2	2,618	
3	4,236	
-1	0,618	Ciąg wewnętrzny
-2	0,382	
-3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrotu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego ,wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół), ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomu poziomów odwrotu Fibonacciego.

Rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).

Zadania

2.3.1 Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a) 3, 6, 12, …

b) 2, -6, 18, …

c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, , \ldots$

16. Źródło: Fischer R., Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.

d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

Odpowiedź: a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, b) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$, c) $a_n = \frac{2}{5} \cdot (5)^{n-1}$, d) $a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

2.3.2 Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $q = -2$, $a_3 = 0{,}5$

b) $q = -\frac{1}{3}$, $a_4 = -27$

c) $q = -0{,}2$, $a_5 = -151{,}2$

d) $q = -6$, $a_4 = 0{,}5$

Odpowiedź: a) $a_1 = \frac{1}{8}$, b) $a_1 = 729$, c) $a_1 = -94500$, d) $a_1 = -\frac{1}{432}$

2.3.3 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na n-ty wyraz wiedząc, że:

a) $a_1 = 1$, $a_5 = 12{,}5$

b) $a_1 = 16$, $a_7 = 256$

c) $a_1 = -3$, $a_{10} = -81$

d) $a_1 = 5$, $a_3 = 2{,}5$

Odpowiedź:

a) $q = \sqrt[4]{\frac{25}{2}}$, $a_n = (\sqrt[4]{\frac{25}{2}})^{n-1}$

b) $q = \sqrt[6]{16}$, $a_n = 16^{\frac{n+4}{5}}$

c) $q = 3$, $a_n = -3^n$

d) $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_n = 5 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^{n-1}$

2.3.4 Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a) $a_1 = 3$, $q = -2$, $a_n = 1536$

b) $a_1 = -1$, $q = -20$, $a_n = -64000000$

c) $a_1 = 7$, $q = 0{,}5$, $a_n = \frac{7}{128}$

d) $a_1 = 0{,}5$, $q = -4$, $a_n = 128$

Odpowiedź: a) 10, b) 7, c) 8, d) 5

2.3.5 Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = 96$, $a_5 = 48$

b) $a_3 = 12$, $a_6 = 24$

c) $a_2 = 6$, $a_5 = -3$

Odpowiedź: a) $q = \sqrt{2}$, $a_1 = 7{,}5$, b) $q = \sqrt[3]{2}$, $a_1 = 6\sqrt[3]{4}$, c) $q = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $a_1 = 6\sqrt[3]{-2}$

2.3.6 W ciągu geometrycznym (a_n) mamy dane $a_2 = -1$, $q = -2$. Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: $S_n = \frac{3}{16}$

2.3.7 Wyznacz x wiedząc, że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$a_1 = 9$, $a_2 = x$, $a_3 = 1$

Odpowiedź: $x = 3$

2.3.8 Sprawdź, czy ciąg (an) jest geometryczny? Wyznacz q.

a) $a_n = 2^{n+1}$

b) $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$

c) $a_n = 2n^2$

Odpowiedź: a) $q = 2$, b) $q = 9$, c) nie

2.3.9 Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (an), jeśli:

a) $a_1 = 8$, $2a_5 = 3a_4$, $n = 6$

b) $a_1 = 2$, $a_7 = 128$, $n = 8$

Odpowiedź: a) 166,25, b) -510

2.3.10 Zbadaj monotoniczność ciągu (an), określonego wzorem:

a) $a_n = \frac{3-2n}{4n-50}$

b) $a_n = \frac{5n}{n+1}$

c) $a_n = \frac{1}{3n^2-12n-3}$

d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+7}$

Odpowiedź: a, b, d – rosnące, c – nie jest monotoniczny

2.3.11 Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 10^{n+2} - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $b_n = 10^{n+1}$, $q = 10$

2.3.12 Znajdź sumę:

a) $1 + 6 + 21 + \ldots + n(2^n-1)$

b) $3 + 27 + 135 + \ldots + (2n-1) \cdot 3^n$

Odpowiedź: a) $(n-1)\cdot 2^{n+1} - 0,5 \cdot (n^2+ n-4)$, b) $(n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$

2.3.13 Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

2.4. Praktyczne zastosowanie ciągów (procent prosty, procent składany)

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać podatki i zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)**

Kapitalizacja odsetek [17]

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk. W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej, na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia podatku od zysków kapitałowych (w wysokości 19%), zwanego potocznie podatkiem Belki.

Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota. Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

17. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc, 06.03.2013

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001-31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004-1.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 – brak wzoru na procent składany.

▶ CIEKAWOSTKA

Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

Zadania

2.4.1 Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

2.4.2 Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym, z kapitalizacją odsetek:

a) co miesiąc

b) co kwartał

c) co pół roku

d) co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.
Odpowiedź: a) 2253,65 zł, b) 2251,02 zł, c) 2247,20 zł, d) 2240 zł

2.4.3 Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

Odpowiedź: 10982,29 zł

2.4.4 Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000zł.

a) bank I oferuje 14% w stosunku rocznym, z roczną kapitalizacją odsetek,

b) bank II oferuje 10% w stosunku rocznym, z kwartalną kapitalizacją odsetek,

c) bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji. Zdecydujesz się na rok czy na 2 lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

Odpowiedź: a) po roku 68400 zł, po dwóch latach 77976 zł

b) po roku 66228,77 zł, po dwóch latach 73104,17 zł

c) po roku 60906,21 zł, po 2 latach 61826,11 zł

2.4.5 Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

a) Oblicz, jaką kwotą (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.

b) O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Odpowiedź: a) 33043,06 zł, b) o 713,80 zł

2.4.6 Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).

2.4.7 Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

2.4.8 W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?

2.4.9 [18]Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku . Bank zaproponował mu następujące oferty:

a) oprocentowanie 6% w sali rocznej, z odsetkami doliczanymi po roku,

b) oprocentowanie 3,8% w skali rocznej, z odsetkami doliczanymi co kwartał,

18. http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/.

c) dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?

Odpowiedź: a) 1049 zł, b) 1031 zł, c) Pierwsza – o 18 zł

2.4.10 Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować na 20 lat, przy rocznej stopie procentowej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400$.

Odpowiedź: Skorzystaj z funkcji finansowej PV

= PV(6%; 20; 0; 400)
w wyniku otrzymujemy: 125$

Z matematycznego punktu widzenia obliczyliśmy sumę ciągu geometrycznego.
Ten sam wynik uzyskamy, wprowadzając własną formułę: = 400/(1+6%)^20 = 125.

2.4.11 Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyłeś w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5 % w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.

Odpowiedź:

Możesz skorzystać z kalkulatora kredytowego p..:
www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/kredytowy.html
prowizja: 450 zł, kwota kredytowana: 15450 zł, kwota do wypłaty: 15000 zł, suma spłat: 22007,32 zł, rata: 183,39 zł.

2.4.12 Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:

a) na koniec okresu rozliczeniowego,

b) na początek okresu rozliczeniowego,

c) jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

Odpowiedź:

a) 169,35 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0))

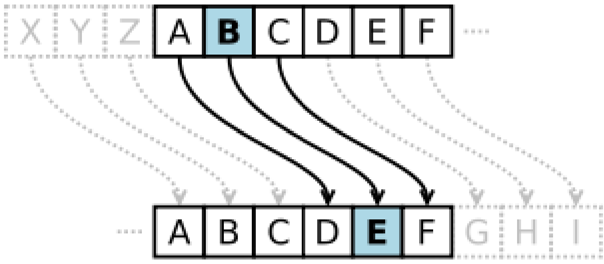
b) 168,58 zł (=PMT(5,5%/12;6;1000;0;0;1))

c) 252,87 zł

Możesz skorzystać z funkcji finansowej PMT.

CIEKAWOSTKA

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, i pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻ

Szyfr: CĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻAĄB

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŻ DĆFĄ, EKTRP ŚZŃM YŹŚŁ L UAGWĘ INCJ

Praca dla chętnych

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza). Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

Czy zdam maturę z matematyki?

1. [19]Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

2. Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy:

A. $-\frac{3}{25}$

19. Zadania 1-3: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

B. $\frac{3}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$

D. $\frac{7}{25}$

3. Ciąg (9, x, 19) jest arytmetyczny, a ciąg (x, 42, y, z) jest geometryczny. Oblicz x, y, z.

4. [20]Który wyraz ciągu $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$ jest równy zero?

A. a_9

B. a_{18}

C. a_{21}

D. a_{49}

5. Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n równym:

A. $a_n = 3 \cdot 2^n$

B. $a_n = \frac{4n^2-9}{3+2n}$

C. $a_n = \frac{2n+3}{n+2}$

D. $a_n = \frac{n^2+1}{3}$

6. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

7. [21]Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_2 = 64$

B. $a_2 = 0$

C. $a_2 = -64$

D. $a_2 = 128$

20. Zadania 4-6: www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 08.03.2013.
21. Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 08.03.2013.

8. Liczby 2; $2x$-1; 0,5 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:

A. $x = 0$

B. $x = 0$ lub $x = 1$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

9. O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

10. [22]Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 7

11. Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

A. $10000 \cdot (1{,}0075)^4$

B. $10000 \cdot (1{,}03)^4$

C. $10000 \cdot (1{,}0)^{16}$

D. $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

12. Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}, y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1, z = 3\sqrt{5} + 2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

A. z, y, x

B. y, x, z

C. x, y, z

D. z, x, y

22. Zadania 10-15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.

13. Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

A. $S_{2n} = 8n^2 + 4n$

B. $S_{2n} = 4n^2 + 2n$

C. $S_{2n} = 4n^2 + n$

D. $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

14. Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

A. $q = 2$

B. $q = 7$

C. $q = 9$

D. $q = 28$

15. W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16. [23]Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_3 = \frac{1}{2}$

B. $a_3 = -\frac{1}{2}$

C. $a_3 = \frac{3}{8}$

D. $a_3 = -\frac{3}{8}$

17. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy:

A. $a_4 = -18$

B. $a_4 = 0$

C. $a_4 = 4{,}5$

D. $a_4 = 144$

18. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

23. Zadania 16-18: www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 09.03.2013.

19. [24]Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n+4}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_8 = 2\sqrt{5}$

B. $a_8 = 8$

C. $a_8 = 5\sqrt{2}$

D. $a_8 = \sqrt{12}$

20. Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas:

A. $a = 8\sqrt{2}$

B. $a = 4\sqrt{2}$

C. $a = 8 - 2\sqrt{2}$

D. $a = 8 + 2\sqrt{2}$

21. Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

22. [25]Liczby 12, 18, $2x + 1$ są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

A. $x = 11\frac{1}{2}$

B. $x = 12$

C. $x = 12\frac{1}{2}$

D. $x = 13$

23. W ciągu arytmetycznym a_n dane są $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 30

B. 110

C. 220

D. 2046

24. Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$.

24. Zadania 19-21: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.
25. Zadania 22-24: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.

25. [26]Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy:

A. $a_1 = \frac{2}{3}$

B. $a_1 = \frac{4}{9}$

C. $a_1 = \frac{3}{2}$

D. $a_1 = \frac{9}{4}$

26. Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy:

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$

B. $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$

C. $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$

D. $a_5 + a_7 = 2a_8$

27. Liczby x, y, 19, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

28. [27]W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

A. 13

B. 0

C. -13

D. -26

29. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. 8

B. 2

C. $\frac{1}{8}$

D. $-\frac{1}{2}$

30. [28]Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności 102 dm^3 wypływa w pierwszej minucie 5 dm^3 cieczy, a w każdej następnej o 0,25 dm^3 mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?

26. Zadania 25-27: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
27. Zadania 28-29: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 10.03.2013.
28. Zadania 30-37: Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

31. Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:

a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w miesiącu poprzednim,

b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.

32. Wyznacz liczbę składników w sumie $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 151$ i wyznacz tę sumę.

33. Oblicz, dla jakiej wartości k liczby $5, (k + 1)^2, 2k + 9$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?

34. Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.

a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?

b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?

35. Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby x, y, z, t, tak aby liczby 4, x, y, z, t, 8 tworzyły ciąg geometryczny.

36. Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnice utworzona w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

37. Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

3. Wielomiany*

3.1. Pojęcie wielomianu

Wielomian – w matematyce wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i podnoszenia do potęgi o stałym wykładniku naturalnym[29].

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$, to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Stopień wielomianu – jest to najwyższy ze stopni jego składników (jednomianów) o niezerowych współczynnikach. Dla wielomianu jednej zmiennej jest to największa potęga zmiennej, która występuje w wielomianie[30].

Przykład 1

Przykłady wielomianów oraz ich stopień:

$W(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7$ – wielomian stopnia 4

$G(x) = 5x^6 + 9x^3 - 7$ – wielomian stopnia 6

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ – wielomian stopnia 2

$Q(x) = 8$ – wielomian stopnia 0

Wielomiany zapisujemy zazwyczaj w postaci uporządkowanej.

29. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian, 27.02.2013.
30. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x.

Przykład 2

Wyznacz wartości parametrów a i b, tak aby wielomiany $P(x) = x^3 + x^2 + 12x - 8$ oraz $W(x) = x^3 + (2a - b)x^2 + (3b - 2a)x - 8$ były równe.

Wielomiany $P(x)$ i $W(x)$ są tego samego stopnia. Musimy sprawdzić, dla jakich wartości a i b współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3b - 2a = 12 \end{cases}$$

$$2b = 13 \quad \Rightarrow b = 6{,}5$$

$$2a = 1 + 6{,}5 \quad \Rightarrow a = 3{,}75$$

$$W(x) = P(x) \quad \Leftrightarrow a = 3{,}75 \ \wedge b = 6{,}5$$

Zadania

3.1.1. Dany jest wielomian $\boldsymbol{W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 7}$. Oblicz:

a) $W(2)$

b) $W(-1)$

c) $W(\sqrt{3})$

d) $W\left(-\frac{1}{2}\right)$

Odpowiedź: a) 33, b) -6, c) $11\sqrt{3} - 1$, d) $-5\frac{1}{8}$

3.1.2. Podane wielomiany uporządkuj malejąco i podaj ich stopień.

a) $P(x) = 6x^5 - 2 + 4x^2 + 9x$

b) $P(x) = 7x^3 + 12 - 9x^6 + 14x + 3x^2$

c) $P(x) = -8x^{19} + 3x^9 - 7x^{15} + 6x$

d) $P(x) = -2 + x^6 + x^{11} - 6x^3$

Odpowiedź:

a) $P(x) = 6x^5 + 4x^2 + 9x - 2P(x) = 6x^5 + 4x^2 + 9x - 2,$

b) $P(x) = -9x^6 + 7x^3 + 3x^2 + 14x + 12,$

c) $P(x) = -8x^{19} - 7x^{15} + 3x^9 + 6x,$

d) $P(x) = x^{11} + x^6 - 6x^3 - 2$

3.1.3. a) Dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax - b$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 4.$

b) Dany jest wielomian $W(x) = 3x^4 + ax^3 - bx^2 + 5x - 3.$ Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 5.$

c) Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 3ax^3 - 2bx^2 + 6.$ Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 5, W(2) = 8$

d) Dany jest wielomian $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c.$ Oblicz a, b i c wiedząc, że $W(-1) = 3, W(1) = 5, W(2) = 9.$

e) Dany jest wielomian

$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c.$ Oblicz a, b, c wiedząc, że: $W(-1) = 1,\ W(0) = 1,$ $W(1) = -1$

Odpowiedź:

a) $a = 2, b = 1,$

b) $a = -6\frac{1}{2}, b = -3\frac{1}{2},$

c) $a = -\frac{1}{3};\ b = \frac{1}{2},$

d) $a = 3, b = 2, c = 1,$

e) $a = -1, b = -2, c = 1$

3.1.4. Wyznacz wartości parametrów a i b (lub a, b i c), tak aby wielomiany $W(x)$ i $P(X)$ były równe.

a) $W(x) = (3a-1)x^3 + (2b-a)x^2 + (a+b)x - 4,\ P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 4$

b) $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4,\ \ P(x) = cx^3 + 2ax^2 + ax + b$

c) $W(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + c,\ \ P(x) = (b-1)x^3 + (a+1)x^2 + 3bx - 2a$

d) $W(x) = ax^3 + 7x^2 - bx - 3c,\ \ P(x) = (4b+c)x^2 + (c+2)x + 15 - a$

e) $W(x)=(a+1)x^3+3x^2-5cx-2,\ \ P(x)=2x^3+bx^2-12x-2$

Odpowiedź:

a) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=-1 \wedge b=-2$

b) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=2 \wedge b=4 \wedge c=2$

c) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=-4 \wedge b=-3 \wedge c=-8$

d) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=0 \wedge b=-2 \wedge c=15$

e) $W(x)=P(x) \Leftrightarrow a=1 \wedge b=3 \wedge c=2\dfrac{2}{5}$

3.2. Działania na wielomianach

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne**
- **Rozszerzać i skracać wyrażenia wymierne**
- **Dzielić wielomiany przez dwumian**

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dodawanie i mnożenie wielomianów jest łączne i przemienne, zachodzi również rozdzielność mnożenia wielomianów względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na redukcji wyrazów podobnych.

Dodawanie wielomianów

Aby dodać dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, dodajemy do siebie wszystkie wyrazy podobne tych wielomianów i porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 1

Dodaj wielomiany:

a) $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3$ oraz $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4 \\ &= (-3x^4 + 3x^4) + (4x^3 + 5x^3) + (7x^2 + 4x^2) + (-9x + 6x) + (3 - 4) \\ &= 9x^3 + 11x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

b) $W(x) = 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3$ oraz $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3 + 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2 \\ &= 6x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

c $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ oraz $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

$W(x) + P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 + (-3x^3 + 5x^2 - 7x + 3) = (3x^3 - 3x^3) +$
$(-5x^2 + 5x^2) + (7x - 7x) + (-3 + 3) = 0$

Wniosek

Suma dwóch wielomianów może mieć stopień mniejszy lub równy większemu stopniowi wielomianów, może także być wielomianem zerowym.

Odejmowanie wielomianów

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, należy do wielomianu $W(x)$ dodać wielomian $-P(x)$. Następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie wielomianów:

a) $W(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ oraz $P(x) = -8x^2 + 5x^2 + 6x - 8$

$$\begin{aligned} W(x) - P(x) &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 - (-8x^3 + 5x^2 + 6x - 8) \\ &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 + 8x^3 - 5x^2 - 6x + 8 = \end{aligned}$$

$$= (4x^3 + 8x^3) + (-7x^2 - 5x^2) + (5x - 6x) + (-3 + 8) = 12x^3 - 12x^2 - x + 5$$

b) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ oraz $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$$W(x) - P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - (6x^3 + 4x^2 - 3x + 2)$$
$$= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 =$$
$$= (6x^3 - 6x^3) + (-7x^2 - 4x^2) + (5x + 3x) + (-2 - 2) = -11x^2 + 8x - 4$$

Stopień otrzymanego wielomianu zależy od wielomianów składowych, analogicznie jak w przypadku dodawania.

Mnożenie wielomianów

Aby pomnożyć dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, trzeba pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Następnie zredukować wszystkie wyrazy podobne i uporządkować otrzymany wielomian.

Przykład 3

Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $W(x) = 3x^2 - 4x + 1W(x) = 3x^2 - 4x + 1$ oraz $P(x) = x + 3P(x) = x + 3$

$$W(x) \cdot P(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3x + 3$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 9x + 3$$

b) $W(x) = 4x^3 + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - 3x$

$$W(x) \cdot P(x) = (4x^3 + 1) \cdot (4x^2 - 3x) = 16x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 3x$$

Wniosek

Stopień iloczynu niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Dzielenie wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielnym przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że W$(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia sposobem pisemnym liczb rzeczywistych.

Wykonaj dzielenie wielomianów:

$W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3)$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dzielimy $2x^3$ przez x i otrzymujemy $2x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ mnożymy $2x^2$ przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy

$-2x^3 - 6x^2$ z przeciwnymi znakami

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dodajemy stronami i przepisujemy $4x + 7$

$\underline{-2x^3 - 6x^2\quad}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dzielimy $-9x^2$ przez x

$\underline{-2x^3 - 6x^2\quad}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ mnożymy $-9x$ przez $(x + 3)$ i wynik

$-2x^3 - 6x^2$ zapisujemy z przeciwnymi znakami

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\quad 9x^2 + 27x$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dodajemy stronami i przepisujemy -7

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dzielimy $31x$ przez x

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ mnożymy 31 przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy z przeciwnym znakiem

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$-31x - 93$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dodajemy stronami

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$\underline{\qquad -31x - 93}$

$= \quad -100$

W dzieleniu wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 - 9x + 31$ i resztę $R(x) = -100$

Przykład 5

Wielomiany można dzielić przez dwumian, stosując **schemat Hornera**.

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 2)$

$r = 2$

Wielomian jest stopnia trzeciego, więc tabelka wygląda następująco:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1			

W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy wszystkie stopnie wielomianu, w drugim wierszu natomiast wszystkie współczynniki tego wielomianu. Pierwszy współczynnik zawsze przepisujemy na dole.

Przystępujemy do obliczeń.

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2		

$r = 2$

$1 \cdot 2 - 4 = -2$ (-2 wpisujemy do dolnego wiersza)

Dalej analogicznie:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	

$r = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ (-1 wpisujemy do dolnego wiersza)

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	-7

$r = 2$

$-1 \cdot 2 - 5 = -7$ (-7 wpisujemy do dolnego wiersza)

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia drugiego.

W dolnym wierszu tabelki otrzymaliśmy współczynniki tego wielomianu.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian

$(x - 2)$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = x^2 - x - 1$ i resztę (-7).

Więc wielomian $W(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2) - 7$.

Zadania

3.2.1. Dane są wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ i $F(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

Oblicz: $P(0), P(-2), P(\sqrt{2}), F(\sqrt{3}), F(\sqrt{2})$

Odpowiedź:

$P(0) = -3, P(-2) = -1, P(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 7,\ F(\sqrt{3}) = -5, F(\sqrt{2}) = \ -1$

3.2.2. Oblicz sumę i różnice wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 4,\ P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 7x + 10$

b) $W(x) = -7x^4 - 6x^2 - 5x + 8,\ P(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 8$

c) $W(x) = -10x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,\ P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 3x^4$

d) $W(x) = -3x^9 + 6x^7 - 5,\ P(x) = 8x^4 - 6x$

Odpowiedź:

a) $W(x) + P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x + 6,\ W(x) - P(x) = 10x^3 - 12x^2 - 2x - 14$

b) $W(x) + P(x) = -4x^3 - 11x,\ W(x) - P(x) = -14x^4 + 4x^3 - 12x^2 + x + 16$

c) $W(x) + P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 13x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,$
$W(x) - P(x) = -2x^8 - 4x^6 - 7x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5$

d) $W(x) + P(x) = -3x^9 6x^7 + 8x^4 - 6x - 5,$
$W(x) - P(x) = -3x^9 + 6x^7 - 8x^4 + 6x - 5$

3.2.3. Oblicz iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = -3x^2 + 6,\ P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

b) $W(x) = 2x^7 + 6x^3,\ P(x) = -4x + 2$

c) $W(x) = -3x^6 + 4x^2 + 2,\ P(x) = 2x + 1$

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 6x,\ P(x) = x^2 - 3$

Odpowiedź:

a) $-6x^5 + 18x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 24$

b) $-14x^8 + 4x^7 - 24x^4 + 12x^3$

c) $-6x^7 - 3x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

d) $2x^7 - 6x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 18x$

3.2.4. Wykonaj dzielenie wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$, gdy:

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40,\ P(x) = x - 5$

b) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,\ P(x) = 2x - 1$

c) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 13x - 2,\ P(x) = 3x - 2$

d) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9,\ P(x) = x - 3$

e) $W(x) = 2x^3 - 19x^2 + 13x - 2, P(x) = 3x - 2$

Odpowiedź:

a) $x^2 + 6x + 8$ b) $x^2 - 2x + 3$ c) $2x^2 - 5x + 1$

d) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ e) $2x - 10$

3.2.5. Dane są wielomiany $A(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $B(x) = x^3 - 8$, $C(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

a) $A(x) + B(x)$ b) $A(x) + 2B(x)$ c) $2A(x) - 4B(x)$

d) $5B(x) - 10C(x)$ e) $A(x) \cdot C(x)$ f) $(x - 2) \cdot C(x) - B(x)$

g) $A(x) - (3x + 5) \cdot B(x)$ h) $(C(x))^2$ i) $(A(x))^2 - (P(x))^2$

Odpowiedź

a) $3x^3 - 7x - 4$, b) $4x^3 - 7x - 12$ c) $-14x + 40$

d) $5x^3 - 10x^2 - 20x - 80$ e) $2x^6 - 7x^4 - 12x^3x + 56x - 32$

f) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$

g) $-3x^4 - 3x^3 + 17x + 44$ h) $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$

i) $3x^6 - 28x^4 + 32x^3 + 49x^2 - 56x - 48$

3.3. Rozkład wielomianu na czynniki

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Stosować wzory skróconego mnożenia na (a±b)3 oraz a3±b3**
- **Rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłą-**

czając wspólny czynnik przed nawias

Warto na początku przypomnieć sobie wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.

Kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory stopnia trzeciego:

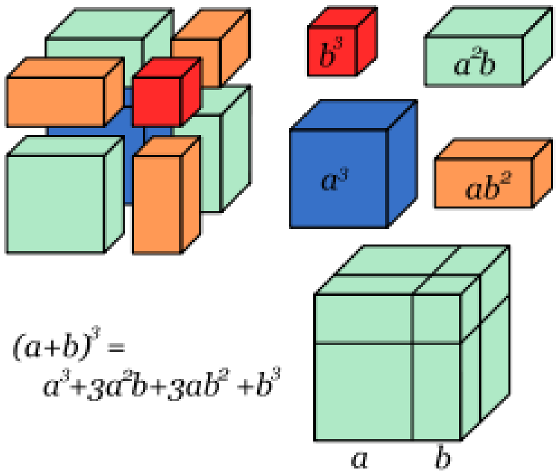
Sześcian sumy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma sześcianów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Różnica sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Każdy z tych wzorów możemy udowodnić w sposób algebraiczny lub, podobnie jak w przypadku wzorów stopnia drugiego, poprzez interpretację geometryczną. Trzeba jednak przejść do przestrzeni



trójwymiarowej.

Rysunek 3-1. Graficzne uzasadnienie wzoru na sześcian sumy[31]

Przykład 1

$(x+5)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

$(3x-4)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 3x \cdot 4^2 - 4^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

31. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia, 07.03.2013.

$$\sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{7}+21+7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{7}+3\cdot 1\cdot(\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^3}$$
$$= \sqrt[3]{(1+\sqrt{7})^3} = 1+\sqrt{7}$$

Zadanie

3.3.1. Uprość:

a) $(x+5)^3$ b) $(2x+1)^3$

c) $(x+3y5)^3$ d) $(x-2)^3$

e) $(3x-4)^3$ f) $(2x-y)^3$

Odpowiedź:

a) $x^3+15x^2+75x+125$ b) $8x^3+12x^2+6x+1$
c) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ d) $x^3-6x^2+12x-8$
e) $27x^3-108x^2+144x-64$ f) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

3.3.2. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, uprość wyrażenia:

a) x^3-8 b) x^3-125

c) $64x^3+27$ d) $8x^3+216$

e) $(x+2)^3$ f) $(x-5)^3$

Odpowiedź:

a) $(x-2)(x^2+2x+4)$ b) $(x-5)(x^2+5x+25)$
c) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$ d) $(2x+6)(4x^2-12x+36)$
e) $x^3+6x^2+12x+8$ f) $x^3-15x^2+75x-125$

Rozłożyć wielomian na czynniki, to znaczy zapisać go w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeśli taki rozkład nie istnieje, to mówimy, że wielomian jest **nierozkładalny.**

➡ **Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod:**

1) wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
2) wzory skróconego mnożenia,
3) zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej,
4) grupowanie wyrazów.

Przykład 2

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z wspólnego dzielnika współczynników liczbowych oraz najniżej potęgi x.

a) $W(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

b) $W(x) = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2 + 2x - 3)$

Przykład 3

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $W(x) = x^4 - 64 = (x^2 - 8)(x^2 + 8) = (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(x^2 + 8)$

W poniższym przykładzie liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania wzoru na różnicę sześcianów.

b) $W(x) = 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9)$

c) $W(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 4

Rozłóż wielomian na czynniki, zamieniając na postać iloczynową funkcji kwadratowej.

W tym przypadku wielomian musi mieć postać funkcji kwadratowej.

$W(x) = 4x^2 - 8x - 12$

Obliczamy deltę i pierwiastki tej funkcji.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$\Delta > 0$, więc są dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 16}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 16}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

Zapisujemy postać iloczynową:

$W(x) = 4(x + 1)(x - 3)$

Przykład 5

Rozłóż wielomian na czynniki metodą przez grupowanie wyrazów.

Z tej metody można skorzystać, gdy mamy parzystą ilość czynników w wielomianie.

Łączymy wyrażenia w pary, każdą parę traktujemy jako osobne wyrażenie i każde z nich przekształcamy, wyłączając czynnik przed nawias. Ostatecznie zapisujemy iloczyn, wyłączając wspólny nawias przed nawias.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 3)$

b) $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = (4x^3 - 8x^2) - (3x - 6) = 4x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(4x^2 - 3)$

c) $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^3 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Zadania

3.3.3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = 3x^4 - 5x^3$

b) $W(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$

c) $W(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2$

d) $W(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^4$

e) $W(x) = 4x^2(x^2 - 2) + 2(x^2 - 2)$

Odpowiedź:

a) $W(x) = x^3(3x - 5)$,

b) $W(x) = 2x(2x^2 - 3x + 6)$,

c) $W(x) = x^2(x + 2)(x - 2)(x - 4)$

d) $W(x) = 4x^4(x^6 + 2x + 1)$

e) $W(x) = 2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2x^2 + 1)$

3.3.4. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$

b) $W(x) = (9x^2 - 6x + 1)(9x^2 - 1)$

c) $W(x) = (x^3 - 27)(x^2 - 9)$

d) $W(x) = (x^4 - 25)(x^3 + 8)$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $W(x) = (3x - 1)^3(3x + 1)$

c) $W(x) = (x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

d) $W(x) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x+2)(x^2-2x+4)$

3.3.5. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$ b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

c) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x - 14$ d) $W(x) = x^4 + x^3 + 27x + 27$

e) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$ f) $W(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

g) $W(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

h) $W(x) = 15x^6 - 10x^5 + 45x^4 - 30x^3$

i) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ j) $W(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$

k) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$ l) $W(x) = x^4 + 5x^2 - x^3 - 5x$

Odpowiedź:

a) $W(x) = (x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

b) $W(x) = (x+2)(x^2+9)$ c) $W(x) = (x+2)(x\sqrt{3}-\sqrt{7})(x\sqrt{3}+\sqrt{7})$

d) $W(x) = (x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$

e) $W(x) = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(3x-1)$

f) $W(x) = (x+2)^3$

g) $W(x) = (x-1)^3(x+1)^2$

h) $W(x) = 5x^3(x^2+3)(3x-2)$

i) $W(x) = (x-2)(x-3)(x+3)$

j) $W(x) = (x+7)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

k) $W(x) = (x-4)(x+4)(x-2)$

l) $W(x) = x(x-1)(x^2+5)$

3.3.6. Rozłóż wielomiany na czynniki poznanymi metodami.

a) $5x^6 + 10x^5 - 15x^2$ b) $8x^3 - 27$

c) $2x^2 - 6x - 8$ d) $4x^3 -$

e) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$ f) $2x^3 +$

g) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3$ h) $(x^4 - 1$

i) $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2$ j) $x^3 + 3x$

k) $x^4 + x^3 - 8x - 8$ l) $x^5 + 10x^4 + 25x^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Odpowiedź:

a) $5x^4(x^2+2x-3)$

b) $(2x-3)(4x^2-6x+9)$

c) $2(x-4)(x+1)$

d) $4x(x+5)(-3x-2)^2(5x-1)$

e) $x^2(2x-3)^2$

f) $(x+2)(x-2)(2x+3)$

g) $2x^3(x-3)(x-1)$

h) $x^5(x+4)(x-4)(x+2)(x+3)$

i) $-2x^2(x-2)(x+5)$

j) $(x-2)(x+2)(x+3)$

k) $(x^3-8)(x+1)$

l) $x^3(x+5)^2$

3.3.7. Wykorzystując poznane metody, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej.

a) $8x^3-12x^2+6x-1$

b) $3x^4-5x^3+5x^2-5x+2$

c) $x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x$

d) $x^4+2x^3-4x^2-8x$

e) x^3+3x^2-2x

Odpowiedź:

a) $(2x-1)^3$

b) $(x-1)(3x-2)(x^2+1)$

c) $(x^2+3x+1)x(x^2+1)$

d) $x(x-2)(x+2)^2$

e) $x\left(x-1+\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)$

Ciekawostka

Wzory skróconego mnożenia można szybko wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala.**

Blaise Pascal (1623-166) – francuski filozof, matematyk i fizyk. Badał prawdopodobieństwo, próżnię i ciśnienie atmosferyczne. Wynalazł m.in. pierwszą maszynę liczącą „Pascalinę" oraz TRÓJKĄT PASCALA. Od jego nazwiska wywodzi się nazwa jednostki ciśnienia (Pa) i język programowania Pascal[32].

Trójkąt Pascala pozwala wyprowadzić wzory skróconego mnożenia.

Przyjrzyjmy się postaci wzorów:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

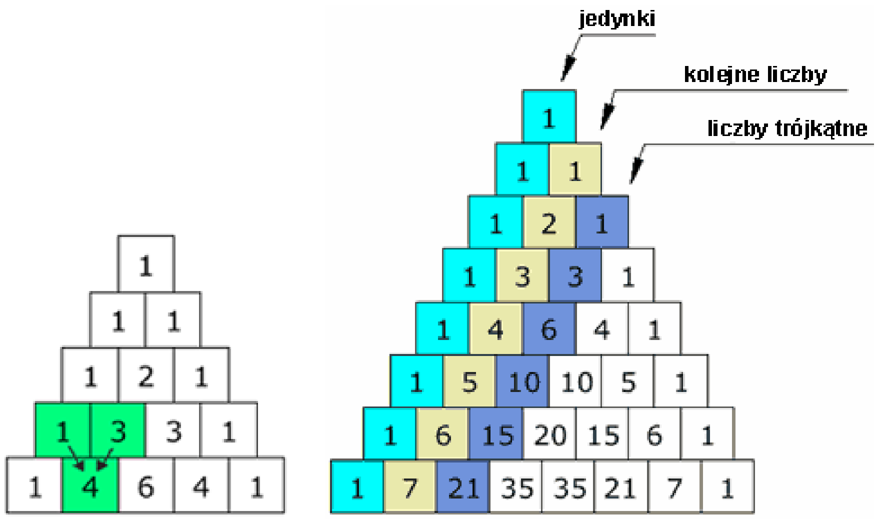
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

32. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal, 19.02.2013.

Zapiszmy same współczynniki liczbowe składników. Postać kolejnych czynników liczbowych jest widoczna. Współczynniki liczbowe utworzyły trójkąt, który nazywa się trójkątem Pascala.

Zasady budowy trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to tablica liczb, w której każdy element powstaje przez sumowanie elementów stojących nad nim. Elementy skrajne to jedynki.



Rysunek 3-2. Zasada tworzenie trójkąta Pascala

Wyznaczymy teraz współczynniki piątej potęgi dwumianu.

$(a+b)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Dwumian Newtona, czyli wzór na $(a+b)^n(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 6

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)!\cdot 0!} = \frac{7!}{7!\cdot 1!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4! \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)! \cdot 6!} = \frac{7!}{1! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7}{6! \cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)! \cdot 7!} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} = 1$$

Więc: $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Zadanie

3.3.8. Wyznacz, korzystając z trójkąta Pascala:

a) $(a-b)^4$ b) $(a-b)^5$ c) $(a+b)^6$

Odpowiedź:

a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

c) $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

3.4. Równania wielomianowe

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych**
- **Rozwiązywać równania wielomianowe**

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań wielomianowych, przybliżymy pojęcie pierwiastka wielomianu.

Pierwiastek wielomianu lub równania wielomianowego – to rozwiązanie tego równania. W przypadku wielomianów mamy zazwyczaj do czynienia z kilkoma pierwiastkami.

Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nazywamy jego miejsce zerowe. Powiemy zatem, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy W(a) = 0, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \ \wedge n \in \mathbb{N}_+$

Przykład 1

Sprawdź, czy liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 - 19x - 20$.

$$W(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 19(-2) - 20 = -8 - 8 + 38 - 20 = 2$$

Otrzymany wynik jest różny od 0, więc liczba (-2) nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 2

Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu.

$$W(x) = 2x^5 - 4x^2 - 24x$$

Więc: $W(2) = 2 \cdot (2)^5 - 4 \cdot (2)^2 - 24 \cdot 2 = 64 - 16 - 48 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Równanie $W(x) = 0$, gdzie $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a \ \ x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$, nazywamy równaniem wielomianowym stopnia n.

Rozwiązywanie równań wielomianowych sprowadza się do znalezienia pierwiastków danych wielomianów.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania rozłożyć na czynniki.

Przykład 3

Rozwiąż równanie: $x^4 - 9 = 0$.

$$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3) = 0$$

Wyrażenie będzie równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(x - \sqrt{3}) = 0 \ \vee \ (x + \sqrt{3}) = 0 \ \vee \ (x^2 + 3) = 0$$

$$x - \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$x + \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2+3>0$, więc $x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie: $x^4+x^3-8x-8=0x^4+x^3-8x-8=0$.

Skorzystamy z metody grupowania wyrazów.

$x^3(x+1)-8(x+1)$

$(x+1)(x^3-8)=0$

$(x+1)=0 \ \vee \ (x^3-8)=0$

$x=-1 \ \vee \ x^3=8 \ \Rightarrow x=2$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x=-1 \vee \ x=2$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie: $x^5-2x^4+5x^3=0$.

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias: $x^3(x^2-2x+5)=0$, to wyrażenie jest równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy:

$x^3=0 \ \vee \ x^2-2x+5=0$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2-2x+5=0$

$\Delta=4-4\cdot1\cdot5=-16<0$, skoro $\Delta<0$, to trójmian nie ma pierwiastków.

Więc rozwiązaniem jest $x=0$.

Przykład 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt[4]{2-4x^2-3x}$.

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, więc:

$2-4x^2-3x\geq 0 \ /\cdot(-1)$

$4x^2+3x-2\leq 0$

$\Delta=9+32=41$

$x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \ \ x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Odpowiedź: $x\in\left\langle\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right\rangle$

Zadania

3.4.1. Zapisz podane wyrażenia w prostszej postaci. Przyjmij, że każdy mianownik w podanych ułamkach jest różny od zera.

a) $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$ b) $\frac{30x^4-6x^3+45x^2-9x}{8x^3+12x}$ c) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^3-2x^2-12x+8}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

Odpowiedź:

a) x^2+1 b) $\frac{3(5x-1)}{4}$ c) $\frac{x-1}{x^2-4}$

d) $\frac{x+3}{x-3}$, e) $\frac{x-2}{x+1}$

3.4.2. Rozwiąż równania:

a) $3x^4-12=0$ b) $x^3+4x=0$

c) $x^3+x^2-x-1=0$ d) $x^3-5x^2-x+5=0$

e) $x^5-x^4-5x^3+5x^2+6x-6=0$

f) $x^3+8x^2-2x-16=0$

Odpowiedź:

a) $x=\sqrt{2} \lor x=-\sqrt{2}$ b) $x=0$

c) $x=1 \lor x=-1$, d) $x=5 \lor x=1 \lor x=-1$

e) $x=1 \lor x=\sqrt{2} \lor x=-\sqrt{2}\ x=\sqrt{3} \lor x=-\sqrt{3}$

f) $x=\sqrt{2} \lor x=-\sqrt{2} \lor x=-8$

3.4.3. Rozwiąż, rozkładając na czynniki:

a) $3x^3+6x^2+4x+8=0$ b) $x^6+2x^5+x^4+x^2+2x+1=0$

c) $1+x^2=x^3+x$ d) $3x^2-4x=-x^3+12$

e) $-9x-5x^2=-x^3-45$ f) $x^4+3x^3-6x-4=0$

g) $x^3-7x^2+6=0$ h) $5x^3+9x^2-26x-24=0$

i) $x^3-7x^2+2x-14=0$ j) $x^3+2x^2-5x-10=0$

k) $x^3-7x^2-4x+28=0$ l) $x^3-3x^2-4x+12=0$

m) $6x^3+6x^2-3x-3=0$ n) $x^3+x^2-5x-5=0$

o) $2x^3-4x^2-6x+12=0$ p) $x^3+x^2-5x-5=0$

q) $x^5-2x^4-9x^3+18x^2=0$ r) $-2x^4-\sqrt{3}x^3+2x+\sqrt{3}=0$

s) $2x^3-3x^2-8x+12=0$

t) $2x^5-18x^3+2x^2-18=0$

u) $x^3+3x^2-5x-15=0$

v) $x^3+x^2-9x-9=0$

w) $x^8+x^6-x^4-x^2=0$

x) $20x^4-20x^3+5x^2=0$

Odpowiedź:

a) $x=-2$

b) $x=-1$

c) $x=1$

d) $x=2 \vee x=-2 \vee x=-3$

e) $x=5 \vee x=3 \vee x=-3$

f) $x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \vee x=-2 \vee x=-1$

g) $x=3-\sqrt{15} \vee x=3+\sqrt{15} \vee x=1$

h) $x=-3 \vee x=-\frac{4}{5} \vee x=2$

i) $x=7$

j) $x=-2 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

k) $x=2 \vee x=-2 \vee x=7$

l) $x=3 \vee x=\sqrt[3]{4}$

m) $x=-1 \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

n) $x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

o) $x=2 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

p) $x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

q) $x=2 \vee x=0 \vee x=3 \vee x=-3$

r) $x=1 \vee x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

s) $x=-2 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$

t) $x=3 \vee x=-3 \vee x=-1$

u) $x=-3 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

v) $x=-1 \vee x=3 \vee x=-3$

w) $x=0 \vee x=1 \vee x=-1$,

x) $x=0 \vee x=\frac{1}{2}$

3.4.4. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^3+5x^2+6x}$

b) $f(x)=\sqrt{(x-3)(4-x^2)}$

c) $f(x)=\sqrt{x(2+x)(x-3)^2}-\sqrt{(x+2)^2(4-x)}$

d) $f(x)=\frac{8x^3-125}{4x^3-4x^2-25x+25}$

e) $f(x)=\frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3-16x}$

f) $f(x)=\frac{6x-2}{x^2-x-2}$

g) $f(x)=-3x^2+7x-8$

h) $f(x)=x+\frac{1-\sqrt{x+1}}{3\sqrt{1-2x}}$

i) $f(x)=\frac{\sqrt{3-|x+2|}}{x(x+3)}$

j) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x+6}}$

l) $f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

Odpowiedź:

a) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,-2,0\}$

b) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle -2,3\rangle$

c) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 0,4\rangle$

d) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

e) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4,0,4\}$

f) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$

g) $x \in \mathbb{R}$

h) $x \epsilon \left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right)$

i) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-3\}$

j) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$

k) $x \epsilon (-\infty, 6)$

l) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy[33]:

A. $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$

B. $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$

C. $2x^5 + 3x + 1$

D. $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

2. Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (x-2)^{53} + 53x + 2^{53}$ jest równy:

A. 2^{54}

B. 0

C. 2^{53}

D. 53

3. Wielomian $W(x) = x^2(x-2) - (x-2)$ można zapisać w postaci:

A. $x^2(x+2)$

B. $(x^2+1)(x-2)$

33. Zadania 1-22: zaczerpnięte z www.zadania.info, 21.03.2013.

C. $x(x-2)^2$

D. $(x-1)(x+1)(x-2)$

4. Wielomiany $W(x)=(x-2)(x+1)(x+2)$ i $P(x)=(a-b)x^3+x^2+(a+b)x-4$ są równe. Z tego wynika, że:

A. $a=1, b=2$

B. $a=-1, b=-2$

C. $a=-1, b=2$

D. $a=2, b=-1$

5. Stopień wielomianu $W(x)=(x-1)(3x+5)^2(2x+1)^3$ jest równy:

A. 4

B. 5

C. 6

D. 8

6. Wielomian W określony jest wzorem $W(x)=-x^9+x^8-6$. Zatem $W(-5)$ jest liczbą:

A. ujemną

B. dodatnią

C. niewymierną

D. pierwszą

7. Po rozłożeniu wielomianu $W(x)=x^3+5x^2-3x-15$, otrzymujemy:

A. $W(x)=(x+5)(x-3)(x+3)$

B. $W(x)=(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

C. $W(x)=(x-5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

D. $W(x)=(x+5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

8. Dane są wielomiany $W(x)=3x^2-2x, V(x)=2x^2+3x$. Stopień wielomianu $W(x)\cdot V(x)$ jest równy:

A. 6

C. 5

D. 4

E. 3

9. Wartość wielomianu $W(x) = 3x - x^2 - x^3$, dla $x = -3$, jest równa:

A. 12

B. -9

C. 9

D. -24

10. Wielomian $P(x) = W(x) - K(x)$ jest siódmego stopnia oraz $W(x) = mx^7 + 8x^5 + 5, K(x) = 3x^3 + 8x^5 + (3m + 2)x^7$. Wynika stąd, że liczba m jest różna od:

A. 3

B. -1

C. 1

D. 0

11. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$:

A. jest iloczynem wielomianów $(x - 2)$ i $(x^4 + 1)$

B. ma trzy miejsca zerowe

C. ma dwa miejsca zerowe

D. jest różnicą wielomianów $(x^5 - 2)$ i $x + 2$

12. Funkcja $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$ ma:

A. 1 miejsce zerowe

B. 2 miejsca zerowe

C. 3 miejsca zerowe

D. nie ma miejsc zerowych

13. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ w punkcie m jest równa 15, dla:

A. $m = 3$

B. $m = 3 \vee m = -3$

C. $m = 2 \vee m = -2 \vee m = 3$

D. $m = 2$

14. Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $W(x) = 5x^2 - 2x^3 + 3$, aby otrzymać wielomian $P(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$?

A. $6 - 7x^2 - 6x^3$

B. $2x^3 + 17x^2$

C. $6x^3 + 7x^2$

D. $6x^3 + 7x^2 - 6$

15. Wiadomo, że $W(-1) = -1$, gdy $W(x) = 2x^3 + px - 3$. Zatem wartość współczynnika p wynosi:

A. $\frac{1}{4}$

B. -4

C. 4

D. -1

16. Wielomiany P i Q określone są wzorami $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = -x^5 + 1$.

Wielomian $R(x) = 2P(x) + Q(x)$ jest stopnia:

A. 0

B. 10

C. 1

D. 5

17. Wielomiany $P(x) = (a+1)x^3 + x^2 - b$ i $P(x) = (b-1)x^3 + x^2 + 2a + 1$ są równe. Zatem liczba $a + b$:

A. należy do zbioru $\langle 2,\ 3)$

B. jest większa od 3

C. należy do zbioru $(-2,0\rangle$

D. jest mniejsza od -2

18. Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi:

A. $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$

B. $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$

C. $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$

D. $(x^4 - 2)(x + 1)$

19. Wielomian $x^3 - 3x^2 - 3$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

A. $(x - 3)(x - 1)(x + 1)$

B. $(x - 3)x^2$

C. $(x - 3)(x^2 + 1)$

D. $(x - 3)^2(x^2 + 1)$

20. Dane są wielomiany $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + 2$ oraz $P(x) = 2x^4 + 5X^3 + 3x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

A. $5x^4 + 3x + 2$

B. $3x + 2$

C. $-x^4 + 3x + 2$

D. $-x^4 + 3x - 2$

21. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

22. Dane są wielomiany $W(x)=x^3-3x+1$ oraz $V(x)=2x^3$. Wielomian $W(x)\cdot V(x)$ jest równy:

A. $2x^5-6x^4+2x^3$

B. $2x^6-6x^4+2x^3$

C. $2x^5+3x+1$

D. $2x^5+6x^4+2x^3$

23. Dane są wielomiany $W(x)=-2x^3+5x^2-3$ oraz $P(x)=2x^3+12x$. Wielomian $W(x)+P(x)$ jest równy[34]:

A. $5x^2+12x-3$

B. $4x^3+5x^2+12x-3$

C. $4x^6+5x^2+12x-3$

D. $4x^3+12x^2-3$

24. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+6x-4$. Współczynnik a jest równy[35]:

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4

25. Dane są wielomiany $W(x)=2x^2-5x$ i $P(x)=x^3-5x^2+2x-1$. Wielomian $G(x)=2W(x)-P(x)$ jest równy[36]:

A. x^3-3x^2-3x+2

B. $-x^3+7x^2-7x+4$

C. $-x^3+9x^2-12x+7$

D. x^3-x^2-8x+5

34. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.
35. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 05.03.2013.
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 05.03.2013.

26. Dane są wielomiany $\boldsymbol{W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4}$ oraz $\boldsymbol{M(x) = x^3 - 2x^2 + 5}$. Wielomian $\boldsymbol{W(x) - M(x)}$ jest równy[37]:

A. $\boldsymbol{4x^3 + 9}$

B. $\boldsymbol{3x^3 + 1}$

C. $\boldsymbol{2x^3 - 1}$

D. $\boldsymbol{4x^3 - 4x^2 + 9}$

27. Dane są wielomiany $W(x) = x - 4$ i $M(x) = x^2 - 2x$. Wielomian $W(x) \cdot P(x)$ jest równy[38]:

A. $x^3 - 2x^2 - 8x$

B. $x^3 - 6x^2 + 8x$

C. $x^3 - 4x^2 - 0\ x$

D. $x^3 - 4x^2 + 6x$

28. Suma odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1$ jest równa[39]:

A. 4

B. $-0{,}25$

C. 6

D. -4

29. Liczba $x = 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^2 - 2a$, gdy a jest równe:

A. 18

B. -18

C. 9

D. $18\sqrt{2}$

30. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy[40]:

A. 0

B. 1

37. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf, 05.03.2013.
38. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 05.03.2013.
39. Zadania 28, 29: zaczerpnięte ze strony www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 05.03.2013.
40. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 05.03.2013.

C. 2

D. 3

31. Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-4)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = 0$ są liczby[41]:

A. $-3, -2, 2, 3$

B. $2, 3$

C. $-3, 2$

D. $-2, 3$

32. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{36-x^2}{(6-x)(x^3-1)}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{1,6\}$

B. $R\backslash\{-6,-1,6\}$

C. $R\backslash\{-6,6\}$

D. $R\backslash\{-6,1,6\}$

33. Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0$ ma[42]:

A. gokładnie jedno rozwiązanie

B. dokładnie dwa rozwiązania

C. dokładnie trzy rozwiązania

D. dokładnie cztery rozwiązania

34. Liczba 5 nie należy do dziedziny wyrażenia[43]:

A. $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

B. $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$

C. $\frac{x^2-25}{x^2+25}$

D. $\frac{x^2-25}{x+5}$

41. Zadania 31, 32: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 06.03.2013.
42. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.03.2013.
43. Zadania 34–47: zaczerpnięte z www.zadania.info, 20.03.2012.

35. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{2}{x} : \frac{x^2-16}{x+1}$ jest zbiór:

A. $R\setminus\{-1,0\}$

B. $R\setminus\{-4,-1,0,4\}$

C. $R\setminus\{-4,4\}$

D. R

36. Do dziedziny funkcji f, określonej wzorem $f(x) = \frac{5x}{x(x+1)(x-\sqrt{7})(x^2+7)}$:

A. nie należą 2 liczby

B. nie należą 3 liczby

C. nie należą 4 liczby

D. nie należy 5 liczb

37. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{x^2-2x+3}$ jest największa, gdy liczba x jest równa:

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{4}$

D. 2

38. Dla której z liczb wyrażenie $\frac{2+x}{x-5}$ nie ma sensu liczbowego?

A. -2

B. -5

C. 0

D. 5

39. Dziedziną wyrażenia $W = \frac{x^2-36}{(x+4)(x^2+4x+4)}$ jest zbiór:

A. $R\setminus\{-6,-4,-2,6\}$

B. $R\setminus\{-6,-4,2,6\}$

C. $R \backslash \{-4, 2\}$

D. $R \backslash \{-4, -2\}$

40. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5x + 6}$ jest zbiór:

A. $R \backslash \{2\}$

B. R

C. $R \backslash \{2, 3\}$

D. $R \backslash \{3\}$

41. Zbiór $R \backslash \{-3, 0, 2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

A. $\frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}$

B. $\frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 5x^2 + 6x}$

C. $\frac{3x + 2}{x(x-2)(x-3)}$

D. $\frac{2x + 1}{x(x-2)(x+3)}$

42. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x}$ jest zbiór:

A. $R \backslash \{-5, 5\}$

B. $R \backslash \{0, 4\}$

C. $R \backslash \{-2, 2\}$

D. $R \backslash \{-5, 0, 4, 5\}$

43. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{-x - 3}$ jest zbiór:

A. $\langle -3, +\infty)$

B. $(-3, \ +\infty)$

C. $(-\infty, -3\rangle$

D. $(-\infty, -3)$

44. Najmniejszą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2 - 8x - \frac{59}{4}}$, jest:

A. -2

B. -3

C. -4

D. -5

45. Największą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{30 - 6x}$, jest:

A. -5

B. -4

C. 5

D. 6

46. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}$ jest:

A. $(-\infty, 1\rangle$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-1, +\infty)$

47. Wyrażenie $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+3}$ jest równe:

A. $\frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$

B. $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$

C. $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$

D. $\frac{x+2}{-5}$

48. Wyrażenie $\frac{x-1}{3x-6}-\frac{2}{x-2}$ jest równe[44]:

A. $\frac{x+1}{3x-6}$

B. $\frac{x+5}{3x-6}$

C. $\frac{x-7}{3x-6}$

D. $\frac{x-3}{3x-6}$

49. (**6 pkt**) Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - mx^3 + nx^2 - 8$. Wartość tego wielomianu dla $x = 2$ jest taka sama, jak dla $x = -2$, a wartość wielomianu dla $x = 3$ wynosi 82. Wyznacz wartości liczb m i n oraz rozwiąż nierówność: $W(x) > x^4 + 2$.[45]

50. (**2 pkt**) Sprawdź, czy wielomiany $W(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ i $H(x) = (x^2-3x+2)(x^2+3x+2)$ są równe.

51. (2 pkt) Określ dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+3}{x^2-4}+\frac{4}{x-2}$ i wykonaj działania.

52. (2 pkt) Rozwiąż równanie $x^3-7x^2+2x-14=0$.

53. (2 pkt) Rozwiąż równanie $x^3-7x^2-4x+28=0$[46].

54. (2 pkt) Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-5x-10=0$[47].

55. Liczby $x_1=-4$ i $x_2=3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+4x^2-9x-36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

56. (**2 pkt**) Rozwiąż równanie $\boldsymbol{x^3+2x^2-6x-12}$.

57. (**2 pkt**) Rozwiąż równanie $x^3+x^2+x+1=0$[48].

58. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie: $\frac{x-2}{3x-1}=\frac{x+5}{3x+2}$[49].

44. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 21.03.2013.
45 Zadania 49, 50, 51, 52: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.
46 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 17.03.2013
47. Zadania 54, 55, 56: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 17.03.2013.
48. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 17.03.2013.
49. Zadania 58, 59, 60: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 17.03.2013.

59. (2 pkt) Wykonaj działania: $\frac{x-5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-10x+25}$.

60. (3 pkt) Pewną liczbę wymierną można przedstawić w postaci $\frac{n}{3-n}$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 32\}$. Gdy powiększymy licznik tego ułamka o 39, a mianownik o 20, to podwoimy wartość tego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

4.1. Równanie prostej na płaszczyźnie

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać równanie prostej w postaci kierunkowej przechodzącej przez dany punkt**

Linia prosta lub prosta – to jedno z podstawowych pojęć geometrii[50].

Równaniem prostej $\boldsymbol{k}$ nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu, który do tej prostej należy, ale nie jest spełnione przez współrzędne punktów leżących poza prostą $\boldsymbol{k}$.

Możemy wyznaczać równanie prostej:

- przechodzącej przez dany punkt,
- przechodzącej przez dany punkt i nachylonej do osi OX pod danym kątem,
- przechodzącej przez dwa dane różne punkty.

Równanie prostej można zapisać w postaci:

Postać ogólna: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$**,**

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$

A, B, CA, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej.

Np. $3x - 5y + 7 = 0, -\frac{1}{2}x + 12y + 2 = 0,\ 0{,}25x - \frac{1}{3}y - 4 = 0$

50. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta#Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29, 15.03.2013.

Postać kierunkowa: $\boldsymbol{y = ax + b}$

a – współczynnik kierunkowy (kątowy) prostej, b – wyraz wolny.

Współczynnik a można obliczyć jako tangens kąta zawartego pomiędzy wykresem prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych a osią OX: $\boldsymbol{a = tg\alpha}$**.**

W równaniu prostej x i y oznaczają współrzędne dowolnego punktu P należącego do płaszczyzny. Od ich wartości zależy położenie prostej w układzie współrzędnych.

Punkt P należy do prostej tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Przykład 1

Przekształć równanie zapisane:

a) z postaci kierunkowej na postać ogólną,

b) z postaci ogólnej na postać kierunkową.

a) Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = 3x - 5$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę: $y - 3x + 5 = 0$

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną: $-3x + y + 5 = 0$

b) Aby przekształcić równanie z postaci ogólnej na kierunkową, wystarczy z zapisu ogólnego wyznaczyć y.

Dane mamy równanie w postaci ogólnej: $2x - 3y + 6 = 0$

Wyznaczamy y: $-3y = -2x - 6 \ /:(-3)$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Jeżeli w równaniu ogólnym nie występuje zmienna y, to wyznaczamy x i otrzymujemy równanie prostej prostopadłej do osi OX.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt $\boldsymbol{A = (x_1, y_1)}$ **można zapisać w postaci** $\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

Przykład 2

Wiedząc, że współczynnik kierunkowy prostej wynosi 5, napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-2,6)$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

$y = 5(x - (-2)) + 6$

$y = 5(x + 2) + 6$

$y = 5x + 10 + 6$

$y = 5x + 11$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (-1,4)$ i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Ponieważ $\alpha = 60°$, to $tg60° = \sqrt{3}$.

Równanie prostej ma więc postać: $y = \sqrt{3}x + b$.

Wiemy, że do prostej należy punkt B, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$4 = \sqrt{3} \cdot (-1) + b$

$b = 4 - \sqrt{3}$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$.

Zadania

4.1.1. Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym i przechodzącej przez punkt C. Otrzymane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej.

a) $C = (-3,-2), a = -\frac{1}{3}$ b) $C = (0,3), a = -1$

c) $C = (2,5), a = 3$ d) $C = (-2,-2), a = -4$

Odpowiedź:

a) $\frac{1}{3}x + y + 1 = 0$ b) $x + y - 3 = 0$

c) $-3x + y + 1 = 0$ d) $4x + y + 6 = 0$

4.1.2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:

a) $P = (-3,4), \alpha = 45°$ b) $P = (6,15), \alpha = 120°$

c) $P = (-1,5), \alpha = 135°$ d) $P = (2,-3), \alpha = 60°$

Odpowiedź:

a) $y = x + 7$ b) $y = -\sqrt{3}x + 15 + 6\sqrt{3}$

c) $y = -x + 4$ d) $y = \sqrt{3}x - 3 - 2\sqrt{3}$

4.1.3. Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = -2x + 3$. Wyznacz liczbę a, jeśli:

a) $f(2a - 4) = 3a + 8$ b) $f(4a + 1) = f(5a - 3)$ c) $f(8 - 4a) = \frac{22a-23}{3}$

Odpowiedź:

a) $a = \frac{3}{7}$, b) $a = 4$, c) $a = 8$

4.2. Równoległość i prostopadłość prostych, a ich współczynnik kierunkowy

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych**
- **Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt**
- *** Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych**
- *** Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt**

Dwie proste są równoległe, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste *k* i *l*, dane wzorami

$$(k) \quad y = a_1x + b_1$$

$$(l) \quad y = a_2x + b_2$$

są **równoległe,** jeżeli:

$$a_1 = a_2$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Przykład 1

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2{,}4)$ i równoległej do prostej o równaniu $3x - 2y + 4 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x - 2y + 4 = 0.$

$-2y = -3x - 4 \ /:(-2)$

$y = \frac{3}{2}x + 2$

$a_1 = \frac{3}{2}$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$y = a(x - x_1) + y_1$

Z warunku równoległości wiadomo, że $a = a_1 = \frac{3}{2}$.

Punkt P leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{3}{2}(x - (-2)) + 4$, więc

$y = \frac{3}{2}(x + 2) + 4 = \frac{3}{2}x + 3 + 4 = \frac{3}{2}x + 7$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{3}{2}x + 7$.

Przykład 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (3,-2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $3x + 4y - 7 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x + 4y - 7 = 0$

$4y = -3x + 7 \ /:4$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

$a_1 = -\frac{3}{4}$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$y = a(x - x_1) + y_1$

Z warunku prostopadłości wiadomo, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, stąd:

$-\frac{3}{4} \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{4}{3}$

Punkt B leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{4}{3}(x - 3) + (-2)$, więc
$y = \frac{4}{3}x - 4 - 2 = \frac{4}{3}x - 6$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{4}{3}x - 6$.

Zadania

4.2.1. Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej:

a) $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$

b) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (2,2)$

e) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

f) $y = -3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (3,3)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $x + y - 6 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (1, -2)$

i) $2x + 2y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-4, -3)$

j) $x - y + 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-2, -5)$

k) $x + y - 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-6,8)$

Odpowiedź:

a) $y=-\frac{1}{3}x+5$

b) $y=-\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$

c) $y=\frac{3}{2}x-4$

d) $y=-3x+8$

e) $y=-\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$

f) $y=\frac{1}{3}x+2$

g) $x+2y+2=0$

h) $x-y-3=0$

i) $x-y-3=0$

j) $x+y+7=0$

4.2.2. Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej:

a) $y=2x-3$ i przechodzi przez punkt $A=(2,3)$

b) $y=-5x+4$ i przechodzi przez punkt $A=(2,1)$

c) $y=-\frac{1}{2}x+4$ i przechodzi przez punkt $A=(4,2)$

d) $y=\frac{2}{3}x-2$ i przechodzi przez punkt $A=(6,1)$

e) $y=4x+6$ i przechodzi przez punkt $A=\left(\frac{1}{4},5\right)$

f) $y=-x-3$ i przechodzi przez punkt $A=(-5,2)$

g) $2x-y+1=0$ i przechodzi przez punkt $A=(4,-3)$

h) $y-0{,}5=0{,}3x$ i przechodzi przez punkt $A=\left(10,-\frac{1}{2}\right)$

i) $x+y+3=0$ i przechodzi przez punkt $A=(6,1)$

j) $3x-y=-9$ i przechodzi przez punkt $A=(-2,6)$

Odpowiedź:

a) $y=2x-1$

b) $y=-5x+11$

c) $y=-\frac{1}{2}x+4$

d) $y=\frac{2}{3}x-3$

e) $y=4x+4$

f) $y=-x-3$

g) $y=2x-11$

h) $y=0{,}3x-3{,}5$

i) $x+y+7=0$

j) $3x-y+12=0$

4.2.3. Dana jest prosta *l* o równaniu $y=\frac{3}{2}x-\sqrt{2}$ oraz punkt $A=(-3,-2)$. Wyznacz wzór funkcji liniowej *f* wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do prostej *l*, a punkt *A* należy do wykresu funkcji *f*.

Odpowiedź: $y=-\frac{2}{3}x-4$

4.2.4. Określ wzajemne położenie prostych:

a) $18x + 3y - 1 = 0$ $y = \frac{1}{3} - 6x$

b) $y = \frac{7}{8}x + 2$ i $7x - 8y + 24 = 0$

c) $6x + 2y = 4$ i $y = \frac{1}{3}x + 2$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ i $y = 3x + 4$

e) $x - 2y + 3 = 0$ i $2x + y - 5 = 0$

f) $3x - 6y + 7 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x$

g) $3x - 6y + 7 = 0$ i $y = -2x + 4$

Odpowiedź:

a) proste równoległe, b) proste równoległe, c) proste prostopadłe, d) proste przecinające się, e) proste prostopadłe, f) proste równoległe, g) proste prostopadłe

4.2.5. Proste k i l są prostopadłe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: 2x - 9y + 6 = 0, k: y = ax + 6$

b) $l: y = -\frac{1}{3}x + 2$, $k: y - ax = 4$

c) $l: 2ax - y + 1 = 0$, $k: x + 2y - 6 = 0$

Odpowiedź:

a) $a = -\frac{9}{2}$ b) $a = 3$ c) $a = -1$

4.2.6. Proste l i m są równoległe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: y = 2x - 5 = 0, m: y = (3 - a)x + 4$

b) $l: y = 3x + 6$, $m: y = 12 + ax$

c) $l: y = (a + 4)x + 5$, $m: y = 4 + 10x$

d) $l: y = ax + 6$, $m: y = 6 + 19x$

Odpowiedź:

a) $a = 1$ b) $a = 3$

c) $a = 6$ d) $a = 19$

4.3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych**
- **Wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)**
- **Sprawdzić, czy punkty są współliniowe**

Punkt przecięcia dwóch prostych

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P. Punkt przecięcia P leży na prostej k i na prostej l, zatem jego współrzędne muszą spełniać jednocześnie równania obu prostych. Współrzędne punktu P otrzymujemy, rozwiązując układ równań.

Przykład 1

Wyznacz punkt przecięcia się prostych danych równaniami: $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$.

Z podanych wzorów funkcji tworzymy układ dwóch równań:

$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -5x + 9 \end{cases}$ wyznaczamy z niego x oraz y.

$3x - 7 = -5x + 9$

$3x + 5x = 9 + 7$

$8x = 16 \ /:8$

$x = 2$

Więc: $y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1 y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Odpowiedź: Proste określone równaniami $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$, przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Jeśli mamy dane dwa różne punkty na płaszczyźnie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, możemy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Możemy napisać równanie takiej prostej, rozwiązując układ równań lub skorzystać z gotowego wzoru.

Poniższe przykłady przedstawiają obie metody.

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}6)$.

Szukamy równania prostej $y = ax + b$.

Prosta przechodzi przez punkty $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}9)$, a to oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają równanie prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = -3a + b \\ 9 = a + b \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania, i otrzymujemy:

$$6 - 9 = -3a - a + b - b$$

$$-3 = -4a \; /:(-3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Skoro $9 = a + b$, to $b = 9 - \frac{4}{3} = 7\frac{2}{3}$

Szukane równanie prostej, to $y = \frac{4}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

Określenie wzoru funkcji przechodzącej przez dwa dane punkty za pomocą wzorów

Mając dane dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, możemy obliczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Gdy mamy współczynnik kierunkowy prostej i punkt, który do tej prostej należy, to możemy już napisać jej wzór, korzystając z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$.

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, opisuje wzór:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(-2,3)$ i $B=(4,2)$.

Rozwiązanie:

I sposób :

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

$$(y-3)(4-(-2))-(2-3)(x-(-2))=0$$
$$(y-3)(4+2)-(-1)(x+2)=0$$
$$(y-3)\cdot(6)+1\cdot(x+2)=0$$
$$6y-18+x+2=0$$
$$6y=-x+16$$
$$y=-\frac{1}{6}x+\frac{16}{6}$$
$$y=-\frac{1}{6}x+\frac{8}{3}$$

II sposób:

1. Zapisujemy równanie szukanej prostej w postaci kierunkowej, czyli: $y=ax+b$.
2. W kolejnych krokach będziemy wyznaczać współczynniki *a* i *b*.
3. Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do równania prostej:

$$y_A=a\cdot x_A+b$$

4. Podstawiamy współrzędne drugiego punktu do równania prostej:

$$y_B=a\cdot x_B+b$$

5. Rozwiązujemy układ równań

$$y_A=a\cdot x_A+b$$

$$y_B=a\cdot x_B+b$$

otrzymując szukane parametry *a* i *b*.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \ /\cdot(-1) \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = 2a - b \\ \ \ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$-1 = 6a \ /:6$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

Podstawiamy do pierwszego równania z układu równań za $a = -\frac{1}{6}$, dzięki temu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b, którą obliczamy:

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + b$$

$$3 = \frac{1}{3} + b$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Otrzymane równanie ma postać: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2,4)$ i $B = (-3,5)$. Znajdź prostą, przechodzącą przez te punkty.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-4}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Korzystamy z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$ i piszemy równanie prostej.

$$y = -\frac{1}{5}\big(x - (-3)\big) + (-3) = -\frac{1}{5}(x+3) - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3$$

Ostatecznie prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{3}{5}$.

Zadania

4.3.1. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty:

a) A = (-2,-10), B = (1,-1) b) A = (-3,9), B = (2,-1) c) A = (0,6), B = (6,0)

d) A = (-2,-1), B = (3,0) e) A = (-12,4), B = (3,1) f) A = (8,4), B = (1,-1)

Odpowiedź:

a) $a = 3$ b) $a = -\frac{8}{5}$ c) $a = -1$

d) $a = \frac{1}{5}$ e) $a = -\frac{1}{5}$ f) $a = \frac{5}{7}$

4.3.2. Oblicz brakujące współrzędne punktów, jeśli wiadomo, że należą do danej prostej:

a) $y = \frac{3}{2}x + 2$, $P = (-2, y)$ b) $2x - 3y = 2$, $P = (\frac{1}{2}, y)$

c) $y = 9x - 3$, $P = (x, -6)$ d) $\frac{x}{-7} + \frac{2y}{7} = 1$, $P = (x, -\frac{2}{3})$

Odpowiedź:

a) $y = -1$ b) $y = -\frac{1}{3}$

c) $x = -1$ d) $x = -8\frac{1}{3}$

4.3.3. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a, wiedząc, że do tej prostej należy punkt M:

a) $a = 0$, $M = (-2, -3)$ b) $a = 3$, $M = (6, -2)$

c) $a = -\frac{3}{4}$, $M = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ d) $a = -5$, $M = (2, 3)$

Odpowiedź:

a) $y = -3$ b) $y = 3x - 20$

c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ d) $y = -3x + 13$

4.3.4. Napisz równanie prostej, do której należą punkty:

a) $A = (-1, 7)$, $B = (3, -5)$

b) $A = (-4, 4)$, $B = (2, 7)$

c) $A = (-5, 0)$, $B = (5, -6)$

d) $A = \left(1, \frac{1}{12}\right)$, $B = \left(3, -\frac{17}{12}\right)$

e) $A = (-2, 6)$, $B = \left(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$

f) $A = (2, 1)$, $B = (-4, 2)$

g) $A = (2, 6)$, $B = (-1, -7)$

h) $A = (2, 4)$, $B = (5, -5)$

Odpowiedź:

a) $y = -3x + 4$ b) $y = \frac{1}{2}x + 6$ c) $y = -\frac{3}{5}x - 3$

d) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$ e) $y = -3x$ f) $y = -\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{3}$

g) $y = 4\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$

h) $y = -3x + 10$

4.3.5. Sprawdź, czy punkty są współliniowe:

a) $A = (2,1), B = (4,5), C = (-3,-9)$

b) $A = (-1,-6), B = (0,-6), C = (12,0)$

c) $A = (-5,3), B = (2,3), C = (4,3)$

d) $A = (2,0), B = (2,-4), C = (2,8)$

Odpowiedź:

a) tak

b) nie

c) tak

d) tak

4.4. Odległość punktów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać odległość dwóch punktów**
- **Obliczać odległość punktu od prostej**

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Odległość punktu A od punktu B liczymy, korzystając ze wzoru:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość punktów A i B od siebie, gdy $A = (7,\ 6), B = (-5,4)$.

Podstawiamy do wzoru:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5-7)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{144+4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

Odpowiedź:

Odległość punktu A od punktu B wynosi $2\sqrt{37}$.

Odległość punktu od prostej to w istocie długość odcinka, którego początkiem jest dany punkt i opuszczonego na prostą pod kątem prostym.

Dana jest prosta k o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ i punkt $P = (x_1, x_2)$, który leży poza prostą k.

Odległość punktu P od prostej k wyraża się wzorem:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Obliczając odległość punktu od prostej, możemy korzystać z powyższego wzoru lub wykonać następujące kroki:

1. Napisać wzór prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.
2. Obliczyć punkt przecięcia danej prostej i prostej do niej prostopadłej.
3. Obliczyć długość odcinka, którego końce to dany w zadaniu punkt i punkt obliczony w punkcie drugim. Długość tego odcinka jest szukaną przez nas odległością punktu A od prostej k.

Przykład 2

Dane są: prosta $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2{,}3)$. Obliczmy odległość punktu A od prostej k.

Rozwiązanie:

1. Napiszemy wzór prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

Jeśli prosta l jest prostopadła do prostej k, to współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $-\frac{1}{2}$.

Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (1{,}3)$, więc:

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Równanie prostej $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Obliczamy punkt przecięcia prostej k i prostej do niej prostopadłej.

Rozwiązujemy układ równań złożony ze wzorów obu funkcji:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x = 0{,}4$$

$$y = 2 \cdot 0{,}4 + 3 = 3{,}8$$

Punkt przecięcia prostych k i l ma współrzędne $B = (0{,}4; 3{,}8)$

3. Obliczamy długość odcinka AB, czyli odległość punktu A od prostej k.

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}4 - 2)^2 + (3{,}8 - 3)^2} = \sqrt{2{,}56 + 9}$$
$$= \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$$

Odpowiedź:

Odległość puntu A od prostej k wynosi 3,4.

Przykład 3

Korzystając z danych z przykładu 2, obliczymy odległość puntu A od prostej k, korzystając ze wzoru

$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

A, B i C to współczynniki prostej z jej postaci ogólnej, natomiast x_1, y_1 to współrzędne danego punktu.

Mamy dane: prostą k: $y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2{,}3)$.

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$$y = 2x + 3$$

$$2x - y + 3 = 0$$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Zadania

4.4.1. Oblicz długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców:

a) $A = (1{,}1), B = (4{,}7)$

b) $A = (-5{,}2), B = (3{,}2)$

c) $A = (2,-5), B = (-3{,}4)$

d) $A = (-1,-4), B = (8{,}4)$

e) $A = (2,-2), B = (4{,}5)$

e) $A = (3,-5), B = (4{,}4)$

f) $A = (6{,}8), B = (10{,}0)$

g) $A = (8{,}0), B = (-2{,}5)$

Odpowiedź:

a) $3\sqrt{5}$

b) 8

c) $\sqrt{117}$

d) $\sqrt{165}$

e) $\sqrt{53}$

f) $5\sqrt{2}$

g) $4\sqrt{5}$

h) $5\sqrt{5}$

4.4.2. Oblicz odległość punktu A od prostej k:

a) $A = (1{,}4)$, $k: 4x - 2y - 16 = 0$

b) $A = (-5, 4)$, $k: y = -2x + 1$

c) $(-2,3)$, $k: 3x - 4y + 2 = 0$

Odpowiedź:

a) $2\sqrt{5}$ b) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{16}{5}$

4.4.3. W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-4,2)$, $B = (5,4)$.

a) Oblicz odległość punktu $C = (-1,4)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B.

b) Uzasadnij, że jeśli $m \neq 0$, to punkty A, B oraz punkt $D = (-1, m)$ są wierzchołkami trójkąta.

Odpowiedź:

a) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

b) 3 punkty są wierzchołkami trójkąta, jeżeli nie leżą na jednej prostej.

Musimy zatem sprawdzić, że punkt $D = (-1, m)$ nie leży na prostej AB. Ponieważ wyliczyliśmy już równanie tej prostej, nie ma z tym problemu (wstawiamy współrzędne tego punktu do równania prostej i patrzymy, że nie wyjdzie 0): $2 \cdot (-1) - 3m + 2 = 3m \neq 0$.

4.5. Współrzędne środka odcinka

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać współrzędne środka odcinka**

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Środek odcinka, mając dane współrzędne jego końców A i B, liczymy ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Przykład 1

Podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach: A = (3, -5), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru:

$$S=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+6}{2},\frac{-5+3}{2}\right)=(4{,}5;\ -1)$$

Przykład 2

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S=(-3,6)$. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B=(4,-2)$.

Zajmijmy się osobno współrzędną x i osobno współrzędną y.

$\frac{x_1+x_2}{2}=-3$	$\frac{y_1+y_2}{2}=6$
$\frac{x_1+4}{2}=-3$	$\frac{y_1+(-2)}{2}=6$
$x_1+4=-6$	$y_1-2=12$
$x_1=10$	$y_1=14$

Odpowiedź:

Współrzędne punktu A wynoszą $(10{,}14)$.

Zadania

4.5.1. Podaj środki odcinków, których końce mają współrzędne:

a) $A=(-8,5), B=(0,11)$ b) $A=(3,-5), B=(-13,7)$

c) $A=(-2,3), B=(4,-9)$ d) $A=(1,7), B=(-5,-2)$

e) $A=(5,3), B=(1,3)$ f) $A=(-6,1), B=(4,3)$

g) $A=(-4,-8), B=(2,1)$ h) $A=(-4,5), B=(8,7)$

i) $A=(-4,-7), B=(10,-3)$ j) $A=(0,6), B=(-12,16)$

Odpowiedź:

a) $S=(-4{,}8)$ b) $S=(-5{,}1)$

c) $S=(1,-3)$ d) $S=\left(-2,\frac{5}{2}\right)$

e) $S=(3{,}3)$ f) $S=(-1{,}2)$

g) $S=\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$ h) $S=(2{,}6)$

i) $S=(3,-5)$ j) $S=(-6{,}11)$

4.5.2. Dany jest odcinek o końcach w punktach $A=(-2{,}4)$ i $B=(6,-2)$.

a) Wyznacz współrzędne środka odcinka.

b) Oblicz długość tego odcinka.

c) Wyznacz równanie prostej równoległej do odcinka przechodzącej przez punkt $C = (0,3)$.

Odpowiedź:

a) $S = (2,1)$ b) $|AB| = 10$ c) $y = \frac{4}{3}x + 3$

4.5.3. Dany jest odcinek $|AB|$, w którym dany jest środek S i koniec B. Wyznacz współrzędne punktu A.

a) $S = (2,-5),\ B = (9,-3)$ b) $S = (-3,6),\ B = (2,5)$ c) $S = (2,4),\ B = (5,8)$
d) $S = (2,7),\ B = (-3,5)$ e) $S = (2,1),\ B = (-5,6)$

Odpowiedź:

a) $A = (-5,-7)$ b) $A = (-8,7)$ c) $A = (-1,0)$

d) $A = (7,9)$ e) $A = (9,-4)$

4.5.4. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, jeżeli środki jego boków mają współrzędne: $P = (1,3), Q = (-5,4), R = (-6,7)$.

Odpowiedź:

$A = (0,6), B = (2,0), C = (-12,8)$

4.5.5. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek o końcach $A = (29,-15)$ i $B = (45,13\ )$ w stosunku $|AP|:|PB| = 1:3$.

Odpowiedź:

$P = (33,-8)$

4.5.6. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

Odpowiedź:

$y = -2x + 14$

4.5.7. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A = (4,6), B = (3,5)$ b) $A = (3,1), B = (-4,-8)$

c) $A = (3,1), B = (-1,7)$ d) $A = (-1,3), B = (1,1)$

e) $A = (1,1), B = (5,5)$ f) $A = (-2,4), B = (6,8)$

Odpowiedź:

a) $y = -x + 9$ b) $y = -\frac{7}{9}x - 5\frac{2}{9}$

c) $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$

d) $y = x + 2$

e) $y = -x + 6$

f) $y = -2x + 10$

4.6. Równanie okręgu*

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Posługiwać równaniem okręgu (x – a)2 + (y – b)2 = r2 oraz opisywać koła za pomocą nierówności**
- **Wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu**

Równanie okręgu

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r.

Niech punkt $P = (a, b)$ leży w dowolnym miejscu na okręgu. Zapiszmy teraz zależność dowolnego punktu P leżącego na okręgu i jego odległość od środka okręgu.

$|OP| = r$, i na mocy definicji odległości dwóch punktów otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} \ /\cdot^2$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2$$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$, ma postać:

$\boldsymbol{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2}$ **(postać kanoniczna)**

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$ **(postać ogólna), gdzie $\boldsymbol{r^2 = a^2 + b^2 - c}$**

Przykład 1

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S = (-2, 6) i promieniu = 4.

$$\left(x - (-2)\right) + (y - 6) = 4^2$$

$$(x+2)+(y-6)=16$$

Przykład 2

Podaj wzór okręgu o środku w punkcie $S=(-2,-7)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A=(-6,-4)$.
Mamy dane współrzędne środka okręgu, które możemy podstawić do wzoru:

$$(x+2)^2+(x+7)^2=r^2$$

Musimy obliczyć promień okręgu. Możemy to zrobić, podstawiając współrzędne punktu $A=(-6,-4)$ do wzoru:

$$(-6+2)^2+(-4+7)^2=r^2$$

$$(-4)^2+3^2=r^2$$

$$16+9=r^2$$

$$25=r^2$$

$$r=5$$

Równanie okręgu jest postaci: $(x+2)^2+(x+7)^2=25$.

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli a, b oraz r.

Przykład 3

Przekształć równanie okręgu dane w postaci ogólnej na postać kanoniczną.

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0$$

Szukamy najpierw współrzędnych środka okręgu.

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0$$

$$-2a=4 \qquad\qquad -2b=-6$$

$$a=-2 \qquad\qquad b=3$$

Obliczamy długość promienia wiedząc, że: $r^2=a^2+b^2-c$

$$r^2=(-2)^2+(3)^2-4=4+9-4=9$$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=9$$

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ w punkcie $P=(-2,3)$.

$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ – okrąg o środku w punkcie $S=(3,4)$ i promieniu $r=1$.

Prosta styczna do okręgu w punkcie P jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty: $S=(3,4)$ i $P=(-2,3)$.

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

$$(y-(-2))(-2-3)-(3-4)(x-3)=0$$

$$(y+2)\cdot(-5)-(-1)(x-3)=0$$

$$-5y-10+x-3=0$$

$$x-5y-13=0$$

$$y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$$

Prosta styczna do okręgu w punkcie A jest prostopadła do prostej $y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$, więc jej równanie to: $y=-5x+b$.

Skoro punkt P należy do prostej $y=-5x+b$, to:

$3=-5\cdot(-2)+b \Rightarrow b=-7$

Odpowiedź:

Równanie stycznej do okręgu ma postać $y=-6x-7$.

Koło – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu na tej płaszczyźnie (środka koła) nie przekracza pewnej wartości (promienia koła).

Koło w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisane wzorem:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2\leq \boldsymbol{r}^2$$

gdzie: $r>0$ – promień koła, (x_0,y_0) – współrzędne środka koła[51].

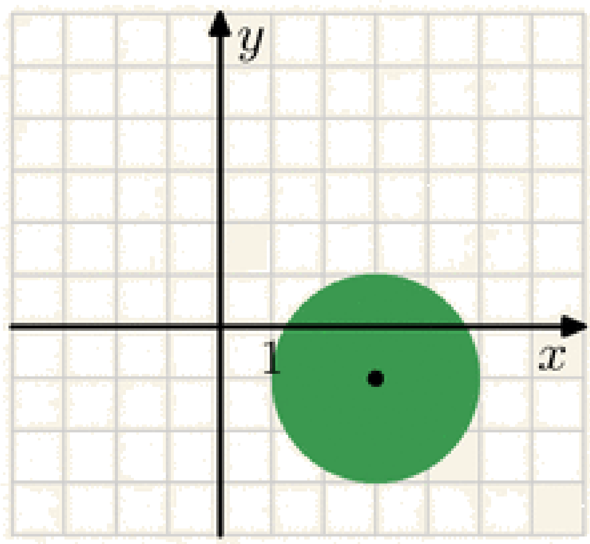
51. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o, 19.02.2013.

Przykład 5

Narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$$(x-3)^2+(y+1)^2 \leq 4$$

Nierówność opisuje koło o środku w punkcie $S=(3,-1)$ i promieniu $r=2$.



Zadania

4.6.1. Wyznacz środek i długość promienia okręgu:

a) $(x-4)^2+y^2=4$ b) $x^2+(y+3)^2=9$

c) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$ d) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

e) $(x+6)^2+(y+10)^2=64$ f) $(x-3)^2+(y+5)^2=8$

Odpowiedź:

a) $S=(4,0)$, r = 2 b) $S=(0,-3)$, r = 3

c) $S=(2,-4)$, r = 5 d) $S=(2,0-1)$, r = 2

e) $S=(-6,-10)$, r = 8 f) $S=(3,-5)$, r = $2\sqrt{2}$

4.6.2. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

a) $S=(-4,6), r=5$ b) $S=(1,2), r=3$

c) $S = (0{,}0), r = \sqrt{2}$ d) $S = (-4{,}1), r = \sqrt{7}$

e) $S = (6,-2), r = 1$ f) $S = (0{,}1), r = 2$

Odpowiedź:

a) $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 25$ b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ c) $x^2 + y^{2^2} = 2,$

d) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 7$ e) $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 1$ f) $x^2 + (y-1)^2 = 4$

4.6.3. Podaj równanie okręgu o ośrodku w punkcie $S = (6,-11)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A = (6,-1)$.

Odpowiedź:

$(x-6)^2 + (y+11)^2 = 100$

4.6.4. Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt przecięcia prostych $7x - y - 3 = 0$ i $4y - 3x - 13 = 0$ i do którego należy punkt $P = (5{,}6)$.

Odpowiedź:

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 20$

4.6.5. Zapisz wzór okręgu za pomocą postaci kanonicznej:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 27 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Odpowiedź:

a) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 7$ b) $x^2 + y^2 = 3$

c) $x^2 + (y-3)^2 = 5$ d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

4.6.6. Punkt $K = (-1{,}9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $L = (2{,}0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Odpowiedź:

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$

4.6.7. Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $S = (0{,}3)$ i promieniu $r = \sqrt{6}$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$.

Odpowiedź:

Okrąg z prostą nie ma punktów wspólnych.

4.6.8. Napisz nierówność opisującą koło o promieniu r i środku w punkcie S.

a) $S=(-1,5), r=4$ b) $S=(-3,0), r=\sqrt{3}$

c) $S=(-1,-2), r=\sqrt{2}$ d) $S=\left(4,\frac{1}{2}\right), r=3$

Odpowiedź:

a) $(x+1)^2+(y-5)^2\leq 16$ b) $(x+3)^2+y^2\leq 3$

c) $(x+1)^2+(y+2)^2\leq 2$ d) $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leq 9$

4.6.9. Określ położenie punktów $A=(1,0), B=(3,3), C=(4,-1)$ względem koła o środku w punkcie $S=(-1,3)$ i promieniu $r=4$.

Odpowiedź:

Punkty A i B należą do koła, punkt C leży poza kołem.

4.6.10. Oblicz odległość punktu A od środka koła $(x-3)^2+y^2\leq 9$ oraz określ położenie punktu A względem tego koła, jeżeli:

a) $A=(3,-3)$ b) $A=(4,2)$ c) $A=(-2,-3)$

Odpowiedź:

a) $d=3$, punkt należy do koła

b) $d=\sqrt{5}$, punkt należy do koła

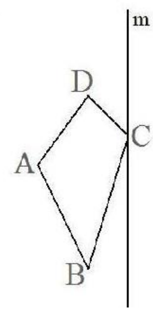
c) $d=6$, punkt nie należy do koła

4.6.11. Przedstaw w prostokątnym układzie współrzędnych figurę:

a) $F=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\wedge x^2+y^2\leq 9\wedge x-2y+2<0\}$

b) $F=\left\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\wedge (x-7)^2+(y+2)^2\leq 36\wedge (x-5)^2+y^2\geq 4\right\}$

c) $F=\left\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\wedge (x-2)^2+y^2>16\wedge (x-6)^2+y^2<4\right\}$



4.7. Symetria osiowa i środkowa

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu**

Symetria – słowo greckie, oznaczające regularny układ, harmonię między częściami całości.

Świat jest pełen symetrii, obcujemy z nią na co dzień: w świecie roślinnym, w budowie organizmów żywych, w sztuce, w budownictwie, w technice i w geometrii.

Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A', leżący:

- na prostej prostopadłej do tej prostej k i przechodzącej przez punkt A,
- w tej samej odległości od prostej k co punkt A,
- po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A[52].

Symetrię osiową względem prostej k oznaczamy jako S_k.

Twierdzenie

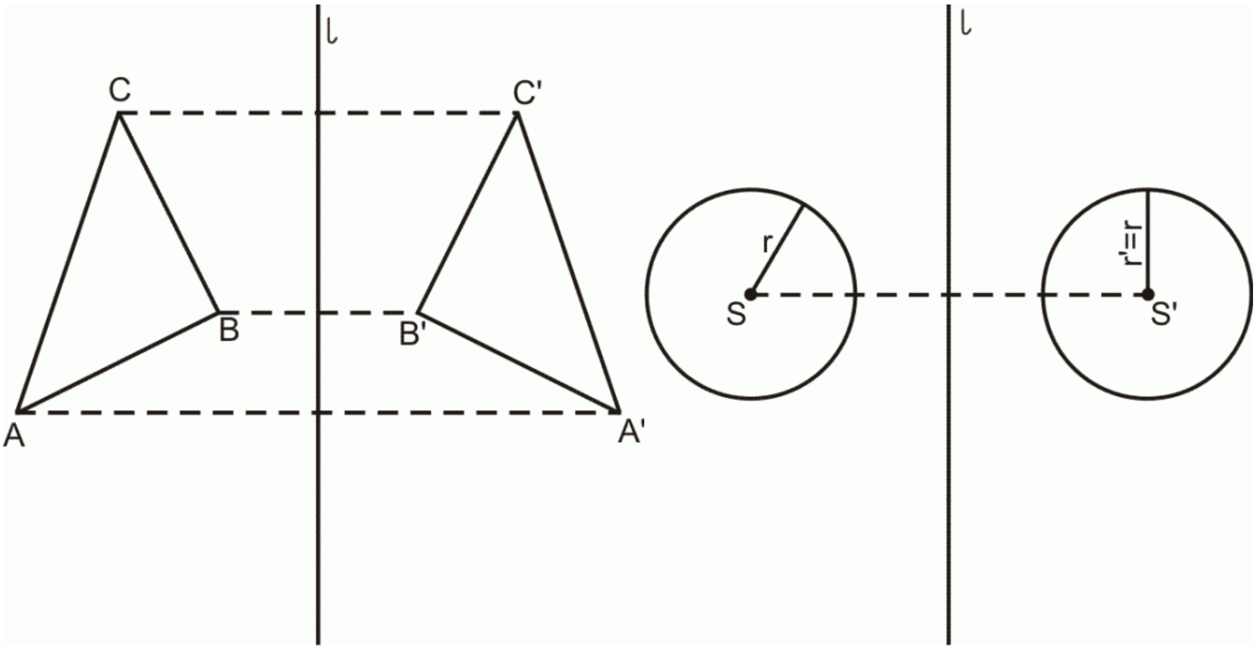
Symetria osiowa jest izometrią.
Symetria osiowa, jak każda izometria, zachowuje kształt figury i jej wymiary.

Izometria – przekształcenie geometryczne (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje odległość punktów, czyli odległość między dwoma dowolnymi punktami A i B jest równa odległości między ich obrazami A' i B'.

W symetrii osiowej:

- obrazem trójkąta względem dowolnej prostej jest trójkąt do niego przystający,
- obrazem okręgu względem dowolnej prostej jest okrąg o tym samym promieniu,
- obrazem odcinka jest odcinek o takiej samej długości,
- obrazem prostej jest prosta.

52. www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.



Rysunek 4-1. Przykłady figur symetrycznych

Prostą, względem której figura jest sama do siebie symetryczna, nazywamy **osią symetrii** tej figury. Natomiast figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną.**

Przykład 1

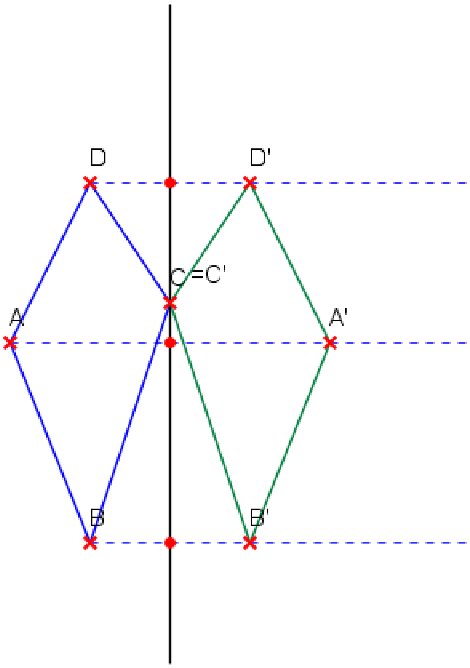
Figury osiowosymetryczne, to np.:

- odcinek – 2 osie symetrii,
- kwadrat – 4 osie symetrii,
- okrąg (koło) – nieskończenie wiele osi symetrii,
- kąt – 1 oś symetrii (prosta zawierająca dwusieczną kąta),
- trójkąt równoboczny – 3 osie symetrii.

Przykład 2

Wyznacz konstrukcyjnie obraz figury w symetrii względem danej prostej.

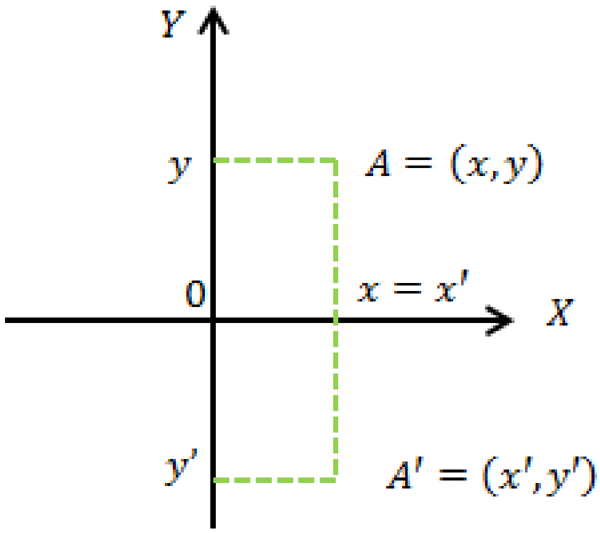
1. Prowadzimy proste prostopadłe do prostej m, przechodzące przez punkty A, B, C, D.
2. Za pomocą cyrkla mierzymy odległość punktu A od prostej m, i odkładamy taki sam odcinek po przeciwnej stronie prostej. Otrzymujemy punkt A' symetryczny do punktu A.
3. Analogicznie postępujemy z pozostałymi punktami.
4. Łączymy punkty $A', B', C' \ D'$ i otrzymujemy figurę symetryczną do danej względem prostej m.



Rysunek 4-2. Figury symetryczne

Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi OX.

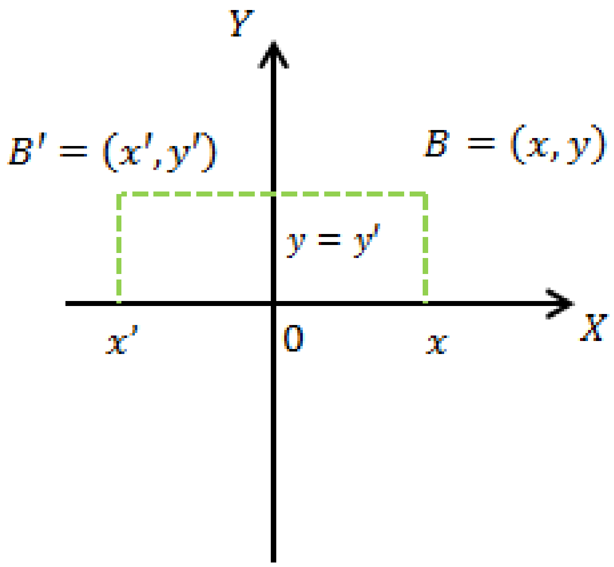


Rysunek 4-3. Symetria względem osi OX

Jak widać na rysunku 3, pierwsze współrzędne obydwu punktów są takie same, natomiast drugie są liczbami przeciwnymi:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Symetria względem osi OY.



Rysunek 4-4. Symetria względem osi OY

Jak widać na rysunku 4, pierwsze współrzędne punktów B i B' są liczbami przeciwnymi, natomiast drugie są równe:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A' = (x, -y)$.

Obrazem punktu $B = (x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $B' = (-x, y)$.

Symetria środkowa

Symetrię względem punktu O będziemy oznaczać symbolem S_o.

Symetrią środkową względem punktu O, zwanego środkiem symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O jest stały, a każdemu innemu punktowi A przyporządkowuje się punkt A', taki że punkt O jest środkiem odcinka AA'[53].

Twierdzenie

Symetria środkowa względem punktu O jest izometrią.

Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest punkt O.

Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej S_o jest ta sama figura. Figurę F nazywamy środkowosymetryczną.

53 www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.

Przykład 3

Figury środkowosymetryczne, to np.:

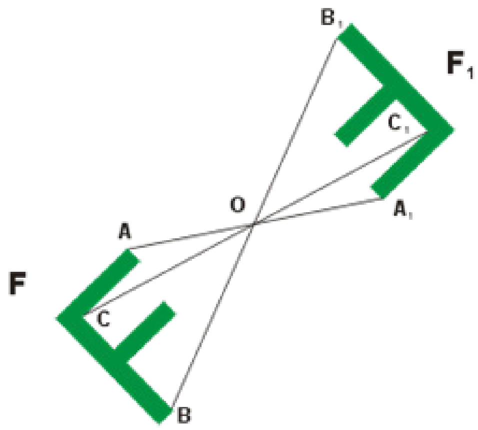
§ koło (okrąg) – środek koła,

§ odcinek – środek odcinka,

§ prostokąt – punkt przecięcia jego przekątnych.

Przykład 4

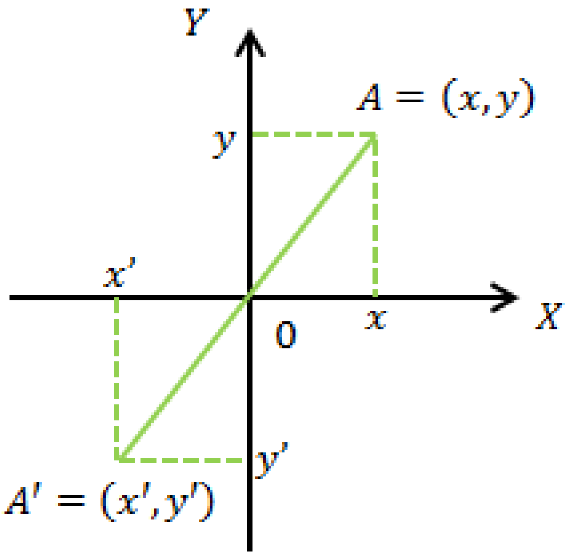
Przykład figury środkowosymetrycznej



Rysunek 4-5. Przykład figury środkowosymetrycznej[54]

Trójkąt to figura, która **nie ma** środka symetrii.

Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych



Rysunek 4-6. Symetria względem punktu (0,0)

Jak widać na rysunku 5, pierwsze współrzędne punktów A i A', jak i drugie są liczbami przeciwnymi.

54. www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa, 06.03.2013.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.

Zadania

4.7.1. Podaj współrzędne obrazu punktu M w symetrii względem osi OX, OY, początku układu współrzędnych:

a) $M = (5, -9)$

b) $M = (3, -2 + \sqrt{3})$

c) $M = \left(\frac{4}{7}, -2\frac{3}{4}\right)$

d) $M = (2,3)$

e) $M = (-5, -7)$

Odpowiedź:

a) $OX: M' = (5,9)$, $OY: M' = (-5,9)$, względem początku układu współrzędnych: $M' = (-5, -9)$

b) $OX: M' = (3,2 - \sqrt{3})$, $OY: M' = (-3, -2 + \sqrt{3})$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (-3,2 - \sqrt{3})$

c) $OX: M' = \left(\frac{4}{7}, 2\frac{2}{3}\right)$, $OY: M' = \left(-\frac{4}{7}, -2\frac{2}{3}\right)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (-\frac{4}{7}, 2\frac{2}{3})$

d) $OX: M' = (2, -3)$, $OY: M' = (-2,3)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (-2, -3)$

e) $OX: M' = (-5,7)$, $OY: M' = (-5, -7)$,

względem początku układu współrzędnych: $M' = (5,7)$

4.7.2. Trójkąt ABC, w którym A = (-5,2), B = (6,-3), C = (1,4), przekształcono symetrycznie względem:

a) osi x,

b) osi y,

c) początku układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkątów otrzymanych po przekształceniu.

Odpowiedź:

a) A' = (-5,-2), B' = (6,3), C' = (1,-4)

b) A' = (5,2), B' = (-6,-3), C' = (-1,4)

c) A' = (5,-2), B' = (-6,3), C' = (-1,-4)

4.7.3. Podaj przykłady liter, liczb lub wyrazów, które są figurami osiowosymetrycznymi.

4.7.4. Oblicz, dla jakich wartości parametru m i n punkty A i B są symetryczne względem osi, gdy: $A = (3, -n)$ i $B = (m + 2,1)$.

Odpowiedź:

$m = 1, n = -1$

4.7.5. Jakim zbiorem: pustym, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór osi symetrii kwadratu?

Odpowiedź:

Zbiór skończony.

4.7.6. Wyznacz równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu

$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 19 = 0$ **względem prostej** $y = 2x + 1$.

Odpowiedź:

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 7$

4.7.7. Znajdź obraz okręgu $x^2 + y^2 = 4$ w symetrii względem prostej $y = 2x + 4$.

Odpowiedź:

$(x + 3{,}2)^2 + (y - 1{,}6)^2 = 4$

4.7.8. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktów będących obrazami wierzchołków trójkąta ABC w tym przekształceniu.

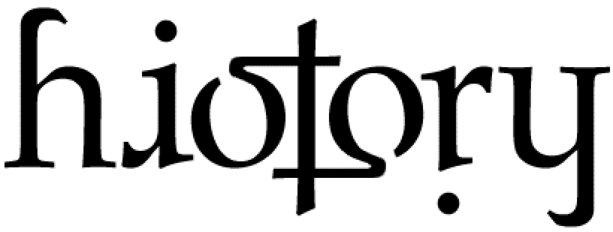
Odpowiedź:

$A' = (2, -3), B' = (4, -1), C' = (-2, -6)$

CiEKAWOSTKA

Ambigram – grafika utworzona kaligraficznie lub obrazowo w taki sposób, że po obróceniu całości można odczytać ten sam tekst[55]. Inaczej mówiąc, ambigramy to grafiki środkowosymetryczne.

Przykłady ambigramów:



Rysunek 4-7. Przykłady ambigramów[56]

Palindrom (gr. *palindromeo* – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej. Przykładem palindromu jest: *Kobyła ma mały bok*. Współcześnie palindromy pełnią funkcję gry słownej[57].

Najdłuższy polski palindrom, autorstwa Tadeusza Morawskiego, ma ponad 33 tysiące liter.

Przykłady palindromów:

- *Gór ech chce róg*
- *Żartem dano nadmetraż*
- *Może jeż łże jeżom*
- *Zagwiżdż i w gaz[58]*

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu[59]:

A. $y = -\frac{1}{3}x - 1$

B. $y = \frac{1}{3}x + 1$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = 3x - 1$

55. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram, 09.03.2013.
56. www.violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd, 07.03.2013.
57. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom, 09.03.2013.
58. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski, 21.02.2013.
59. Zadania 1, 2: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Próbna matura z matematyki, listopad, 2009, 05.03.2013.

2. Prosta o równaniu $y = -4x + (2m - 7)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Wtedy:

A. $m = 7$

B. $m = 2\frac{1}{2}$

C. $m = -\frac{1}{2}$

D. $m = -17$

3. Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy[60]:

A. $m = -\frac{2}{3}$

B. $m = -\frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = \frac{5}{3}$

4. Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$[61]:

A. $y = -2x + 1$

B. $y = 0{,}5x - 1$

C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

D. $y = 2x - 1$

5. Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(2, 1)$[62].

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = -x + 1$

60. Zadanie zaczerpnięte z Arkusza maturalny CKE, maj, 2010, 05.03.2013.
61. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011, 05.03.2013.
62. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011, 05.03.2013.

6. Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$ [63]:

A. są równoległe i różne

B. są prostopadłe

C. przecinają się pod kątem innym niż prosty

D. pokrywają się

7. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$ [64]:

A. $y = \frac{1}{2}x$

B. $y = -\frac{1}{2}x$

C. $y = 2x$

D. $y = -2$

8. Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

A. $(-5, -2012)$

B. $(-2012, -5)$

C. $(2, -7)$

D. $(-2012, 5)$

9. Na okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$ leży punkt:

A. $A = (-2, 5)$

B. $B = (2, -5)$

C. $C = (2, -7)$

D. $D = (7, -2)$

10. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (4, -3)$ i $B = (-1, -13)$. Funkcja f opisana jest wzorem[65]:

A. $f(x) = 2x - 11$

B. $f(x) = 2x + 11$

63. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Matura próbna, listopad, 2010, 05.03.2013.
64. Zadania 7, 8, 9: zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 05.03.2013.
65. Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte z CKE (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze), 05.03.2013.

C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

D. $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Środkiem S tego okręgu jest punkt:

A. $S = (-3,-4)$

B. $S = (3,4)$

C. $S = (3,-4)$

D. $S = (-3,4)$

12. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$:

A. $y = \frac{1}{2}x$

B. $y = -\frac{1}{2}x$

C. $y = 2x$

D. $y = -2x$

13. Prostą przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ i równoległą do prostej $\boldsymbol{y} = \mathbf{0,5}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ opisuje równanie[66]:

A. $y = -2x - 1$

B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

D. $y = 2x - 1$

14. Proste: $y = -3x + 4$ i $y = \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{4}{3}\right)x$ są prostopadłe, jeżeli:

A. $a = -2$

B. $a = 2$

66. Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, styczeń, 2013, (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 05.03.2013.

C. $a = \sqrt{5}a = \sqrt{5}$

D. $a = -\sqrt{5}$ lub $a = \sqrt{5}$

15. Proste l i k są prostopadłe i $l: 2x - 9y + 6 = 0, k: y = ax + b$. Wówczas[67]:

A. $a = -\frac{2}{9}$

B. $a = \frac{2}{9}$

C. $a = -\frac{9}{2}$

D. $a = \frac{9}{2}$

16. Równanie $(x + 6)^2 + y^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

A. $S = (-6,4), r = 4$

B. $S = (6,0), r = 4$

C. $S = (6,0), r = 2$

D. $S = (-6,0), r = 2$

17. (**5 pkt**) Prosta $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

18. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$:[68]

A. $y = 3x$

B. $y = -3x$

C. $y = 3x + 2$

D. $y = \frac{1}{3}x + 2$

19. Punkty $B = (-2,4)$ i $C = (5,1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 74

67. Zadania 15, 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2012 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012--listopad.pdf), 05.03.2013.
68. Zadania18, 19, 20: zaczerpnięte z CKE (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 05.03.2013.

B. 58

C. 40

D. 29

20. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y-6)^2=100$. Środek tego okręgu ma współrzędne:

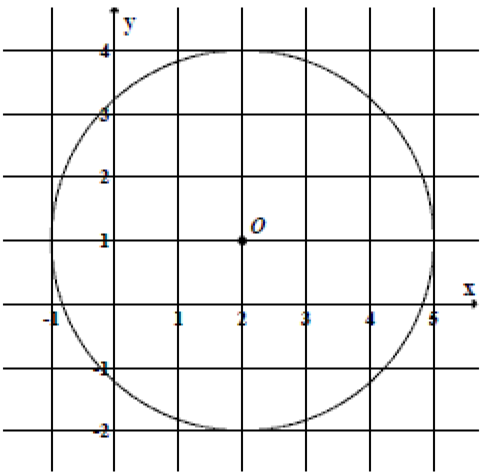
A. $(-4,-6)$

B. $(4,6)$

C. $(4,-6)$

D. $(-4,6)$

21. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Równanie tego okręgu ma postać[69]:



A. $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=3$

C. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

D. $(x+2)^2+(y+1)^2=3$

22. Punkt $S=(2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A=(-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

A. $B=(5,11)$

B. $B=\left(\frac{1}{2},2\right)$

C. $B=\left(-\frac{3}{2},-5\right)$

D. $B=(3,11)$

69. Zadania 21, 22: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, czerwiec, 2012, www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 05.03.2013.

23. Proste o równaniach $y = 2x - 5$ i $y = (3 - m)x + 4$ są równoległe. Wynika stąd, że[70]:

A. $m = 1$

B. $m = \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{7}{2}$

D. $m = 5$

24. Prosta *k* ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$[71]:

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x + 5$

D. $y = -x + 1$

25. Styczną do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu:

A. $x = 1$

B. $x = 3$

C. $y = 0$

D. $y = 4$

26. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$, jest równy:

A. $-\frac{1}{3}$

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

70. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 05.03.2013
71. Zadania 24, 25, 26, 27, 28: zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, maj, 2011 (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf), 05.03.2013.

27. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6:

A. $x^2 + y^2 = 3$

B. $x^2 + y^2 = 6$

C. $x^2 + y^2 = 12$

D. $x^2 + y^2 = 36$

28. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 30

B. $4\sqrt{5}$

C. $12\sqrt{5}$

D. 36

29. (5 pkt) Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2,-1), B = (4,2), C = (5,1)$. Wyznacz:

a) pole trójkąta ABC[72],

b) równanie zawierające wysokość trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka A.

30. (4 pkt) W rombie $ABCD$ dane są $A = (-3,-1)$ i punkt przecięcia przekątnych $M = (9,3)$. Wiadomo, że punkt B leży na prostej $2x - y - 25 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

31. (2 pkt) Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-1,-1), B = (5,2)$, $C = (3,3), D = (1,2)$ jest trapezem?

72. Zadania 29-32: zaczerpnięte z testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

32. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0,-3)$ i jest prostopadły do prostej $y = 2x - 4$.

33. (2 pkt) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$[73].

34. (2 pkt) W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB poprowadzono wysokość z wierzchołka C. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli

$A = (2,8)$, $B = (-2,4)$ [74].

35. (4 pkt) Oblicz pole i obwód rombu $ABCD$ wiedząc, że przekątna AC jest zawarta w prostej o równaniu

$y = 2x - 2$ oraz $A = (-1,-4)$ i $D = (-6,6)$.

36. (6 pkt) Wyznacz współrzędne punktu B, który jest symetryczny do punktu

$A = (3,2)$ względem prostej $y = -\frac{1}{3}x - 6$ [75].

37. (4 pkt) Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $A = (2,1)$ i $C = (1,9)$.

Podstawa AB tego trójkąta jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B .[76]

38. (4 pkt) Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu przechodzącej przez jeden z tych punktów[77].

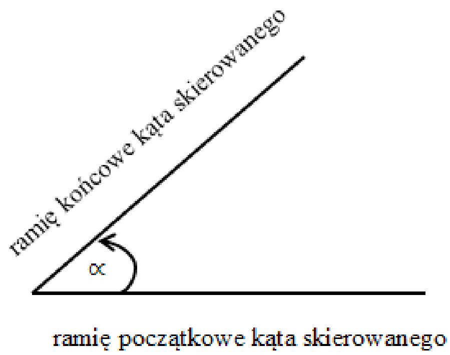
39. (4 pkt) Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności[78].

73. (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 06.03.2013.
74. Zadania 34, 35: zaczerpnięte z arkusza maturalnego (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze), 06/03.2013
75. (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 06.03.2013.
76. (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 06.03.2013.
77. (www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf), 06.03.2013.
78. (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013), 06.03.2013.

5. Trygonometria

5.1. *Miara łukowa i stopniowa kąta

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy parę prostych o wspólnym początku (wierzchołek kąta).



Jednostką miary łukowej jest radian.

$$1\, radian = \frac{180°}{\pi} \sim 57°17'44''$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Rysunek 5-1. Kąt skierowany

Jednostki mniejsze niż stopień to **minuta kątowa 1′** (uwaga: to nie jest jednostka czasu)

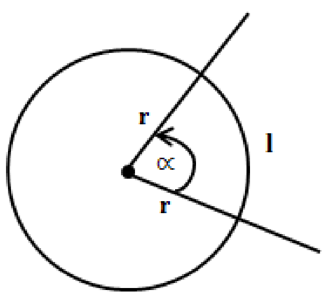
$1^{\circ} = 60'$ $\qquad$ $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} 1'$

oraz **sekunda kątowa (1″)**

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

.

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu.



Miarą kąta skierowanego jest stopień.

$$1° = \frac{1}{360} \text{kąta pełnego}$$

Rysunek 5-2. Radian

Zamiana miary stopniowej $(\alpha°)$ na miarę łukową (α):

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}\ radiana$$

Przykład 1

$180^\circ = \pi\ rad.$

$90^\circ = \frac{\pi}{2}\ rad.$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}\ rad.$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową (α°):

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Przykład 2

$\frac{3}{2}\pi\ rad = 270^\circ$

$\frac{\pi}{3}\ rad = 60^\circ$

$\frac{\pi}{2}\ rad = 90^\circ$

CIEKAWOSTKA

W niektórych krajach obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. Gradusy. **Gradus** – jest to jedna setna część kąta prostego.

Zadania

5.1.1. Znajdź:

a) miarę łukową kątów: $90^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

b) miarę stopniową kątów: $3\pi\ rad;$ $6{,}5\pi\ rad;$ $\frac{6}{5}\pi\ rad;$ $\frac{5}{3}\pi\ rad.$

Odpowiedź:

a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ b) 540°, 117°, 216°, 300°

5.1.2. Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta. Wynik podaj w stopniach.

Odpowiedź:

114°

5.1.3. Pole wycinka koła o promieniu $r = 3\ cm$, jest równe $2\ cm^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

Odpowiedź:

$\alpha = \frac{4}{9}$

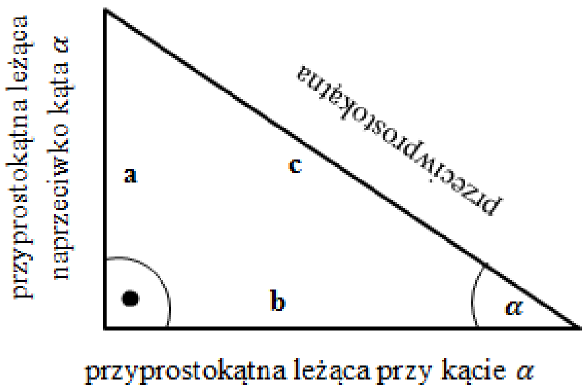
5.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wykorzystywać definicję i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens kątów o miarach od 0° do 180°**
- **Obliczać miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną)**

Termin trygonometria pochodzi od dwóch greckich słów: trigonom (trójkąt) i metron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

Rozważmy trójkąt prostokątny o kącie ostrym α.



Rysunek 5-3. Trójkąt prostokątny

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, leżącej naprzeciwko kąta α, do długości przyprostokątnej (leżącej przy tym kącie) i oznaczamy $tg\ \alpha$.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, leżącej naprzeciwko kąta α, do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $sin\ \alpha$.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta α (czytaj: kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, przylegającej do kąta α, do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $cos\ \alpha$.

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangensem kąta α **(czytaj: kotangensem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, przylegającej do kąta** α, **do długości drugiej przyprostokątnej i oznaczamy** $ctg\ \alpha$.

$$ctg\alpha = \frac{a}{b}$$

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, zatem ilorazy określające sinus i cosinus są liczbami mniejszymi od 1.

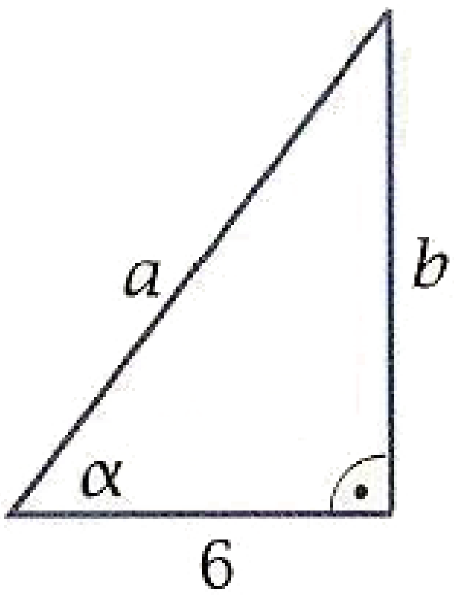
Przykład 1

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi 3/4. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$cos\alpha = \frac{6}{a}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{a}$$



CIEKAWOSTKA

Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim, zapisywali oni hinduską nazwę sinusa bez samogłosek jako *jb*. Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie zatoka to sinus, tak też przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa sinus znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

Wartości funkcji trygonometrycznych, dla różnych miar kątów, można odczytać z tablic.

Z tablic możemy korzystać w dwóch celach:

1. Możemy odczytać wartość danej funkcji, dla danego kąta.

2. Możemy odczytać, z jakim kątem mamy do czynienia, mając podaną wartość danej funkcji.

Funkcje trygonometryczne i ich wartości odczytywane z tabeli wykorzystujemy do obliczania długości poszczególnych boków lub miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2

Podaj wartość tangensa kąta o mierze $15°$.
Dla podanego kąta i funkcji, odczytujemy wartość:

	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	-
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046
13°	0.225	0.9744	0.2309	4.3315
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874

Możemy więc zapisać, że tangens $15°$ wynosi 0,2679:

$\text{tg}\ 15° = 0{,}2679$

Przykład 3

Podaj miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,6023. Dla podanego kąta i funkcji, odczytujemy wartość. Szukamy w kolumnie funkcji cosinus podanej wartości (0,6023), a jeżeli jej nie ma w tabeli, szukamy wartości najbliższej do danej (dla naszego przykładu będzie to wartość 0,6018):

	sin	cos	tg	ctg
46°	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
47°	0.7314	0.682	1.0724	0.9325
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
49°	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
50°	0.766	0.6428	1.1918	0.8391
51°	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
52°	0.788	0.6157	1.2799	0.7813
53°	0.7986	0.6018	1.327	0.7536
54°	0.809	0.5878	1.3764	0.7265
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
56°	0.829	0.5592	1.4826	0.6745
57°	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494

Kąt ma więc w przybliżeniu miarę 53°.

5.3. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

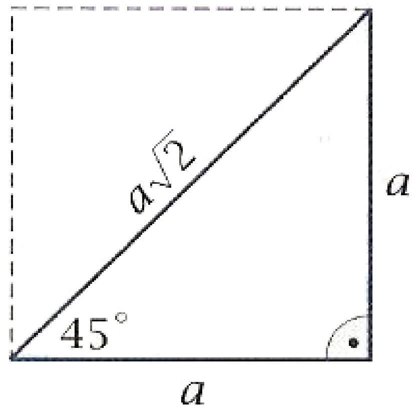
Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°, korzystamy z tego, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° jest połową kwadratu.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°.

$$sin45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{a}{a} = 1$$



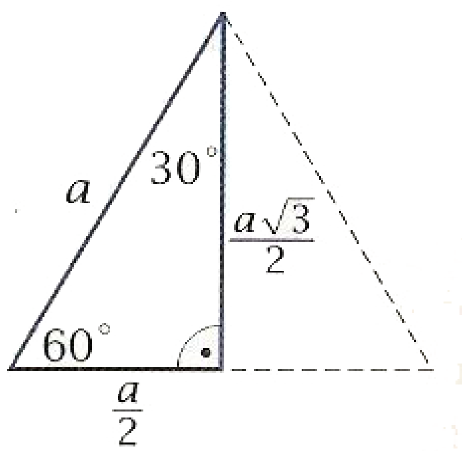
Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60°, korzystamy z tego, że trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° to połowa trójkąta równobocznego.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°.

$$sin30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$ctg30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

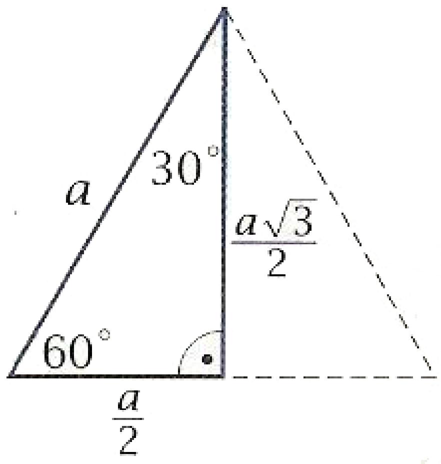
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°.

$$sin60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



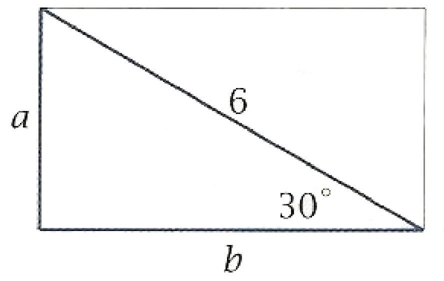
Wartości funkcji trygonometrycznych

α	$30°$	$45°$	$60°$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 5-1. Wartości funkcji trygonometrycznych

Przykład 1

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



$$\frac{a}{6} = sin30°$$

$$\frac{b}{6} = cos30°$$

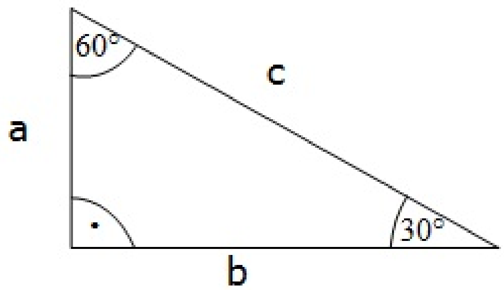
Korzystamy z wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{b}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

Przykład 2

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.



$$cos30° = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{c}$$

$$\sqrt{3}c = 2 \cdot 6$$

$$\sqrt{3}c = 12 /: \sqrt{3}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

Zadania

5.3.1. Oblicz:

a) $sin30° \cdot cos60° + 2sin45°$

b) $tg45° + sin60° + 2cos30°$

c) $tg30° \cdot ctg60° - sin30° \cdot cos30°$

d) $(tg30° - ctg30°) : cos30°$

e) $\sqrt{2tg^2 60° - 4cos^2 45°} - ctg45°$

Odpowiedź:

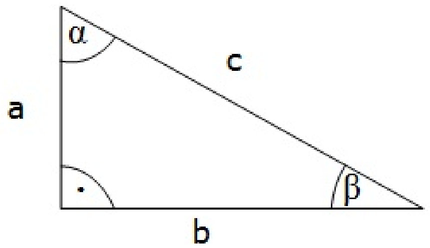
a) $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$ b) $1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{12-9\sqrt{3}}{36}$ d) $-1\frac{1}{3}$ e) 6

5.3.2. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.

Odpowiedź:
$P = 9\sqrt{3}\ cm^2$

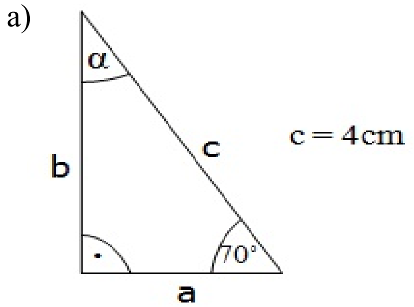
5.3.3. Oblicz miary kątów trójkąta.

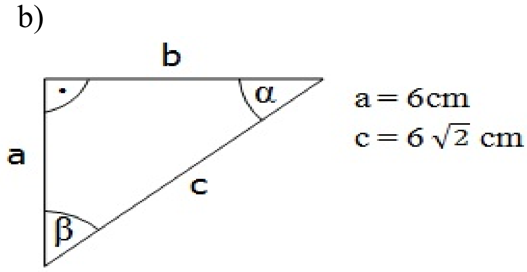


dane:
a = 6cm
c= 14cm

Odpowiedź: $\alpha = 65°, \beta = 25°$

5.3.4. Rozwiąż podane trójkąty prostokątne:





Odpowiedź:

a) $\alpha = 20°, a = 1{,}368\ cm, b = 3{,}7588\ cm$

b) $\alpha = 45°, \beta = 45°, b = 6\ cm$

5.3.5. Linę podtrzymującą maszt przymocowano na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy naprężona linia z poziomem?

Odpowiedź:

Linia nachylona jest do poziomu pod kątem około 64°.

5.3.6. Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 45°. Oblicz jego pole, jeżeli jego podstawy mają długość 12 cm i 6 cm.

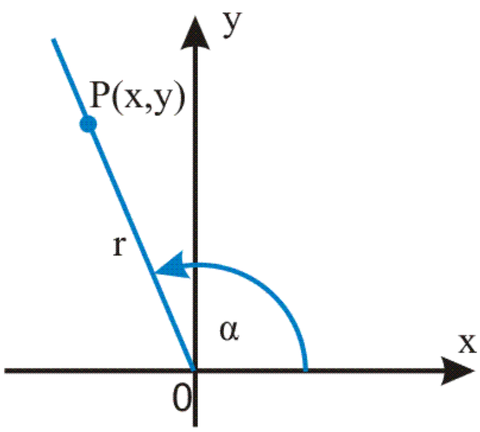
Odpowiedź:

$P = 27\sqrt{3}\ cm^2$

5.4. *Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych kątów, umieszczamy te kąty w układzie współrzędnych.

Dowolny kąt w układzie współrzędnych, to kąt skierowany, którego ramieniem początkowym jest dodatnia półoś x.



α – kąt skierowany

dodatnia półoś x – ramię początkowe kąta α

półprosta $OP^{\rightarrow}$ – ramię końcowe kąta α

$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – promień wodzący punktu $P \neq 0$, gdzie $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym

Rysunek 5 4. Promień wodzący

Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Sinusem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem dowolnego kąta C w układzie współrzędnych nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do odciętej tego punktu.

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Cotangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do rzędnej tego punktu.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych katów o mierze $0°$, $90°$ i $180°$.

Dla ułatwienia obliczeń, na końcowym ramieniu każdego kąta obieramy punkt, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1.

Dla kąta $\mathbf{0°}$, $\boldsymbol{P = (1,0)}$

$x = 1, y = 0, r = 1$

$sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$tg0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

Dla kąta $\mathbf{90°}$, $\boldsymbol{P = (0,1)}$

$x = 0, y = 1, r = 1$

$sin90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$cos90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$tg90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$

$ctg90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

Dla kąta $\mathbf{180°}$, $\boldsymbol{P = (-1,0)}$
$x = -1, y = 0, r = 1$

$sin180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$cos180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$

$tg180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} - nie\ istnieje$

Wyniki umieścimy w tabeli

α	$0°$	$90°$	$180°$
$sin\alpha$	0	1	0
$cos\alpha$	1	0	-1
$tg\alpha$	0	$-$	0
$ctg\alpha$	$-$	0	$-$

Tabela 5-2. Wartości funkcji trygonometrycznych

Zadania

5.4.1. Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany α, w którym punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta, a następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P = (1,7)$

b) $P = (-2,5)$

c) $P = (-\sqrt{3}, -4)$

d) $P = (6, -3)$

Odpowiedź:

a) $r = 5\sqrt{2}, sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}, cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, tg\alpha = 7, ctg\alpha = \frac{1}{7}$

b) $r = 29, sin\alpha = \frac{5}{29}, cos\alpha = \frac{-2}{29}, tg\alpha = -\frac{5}{2}, ctg\alpha = -\frac{2}{5}$

c) $r = 19, sin\alpha = -\frac{4}{19}, cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{19}, tg\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{2}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $r = 3\sqrt{5}, sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}, cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, tg\alpha = -\frac{1}{2}, ctg\alpha = -2$

5.5. Wzory redukcyjne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Korzystać ze worów typu:** *sin (90º - α) = cos α*

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

Jeśli argument zmienia się w nieparzystą wielokrotność kąta $\frac{\pi}{2}$, to funkcja przechodzi w kofunkcję (sinus w cosinus, cosinus w sinus, tangens w cotangens, cotangens w tangens). Ponieważ wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, więc należy je akiem, pisząc prawą stronę wzoru. Znak piszemy taki, jaki odpowiada funk występującej z lewej strony wzoru.

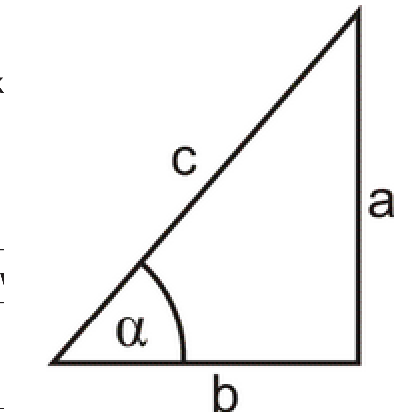


Tabela wzorów redukcyjnych

$\varphi =$	I ćwiartka	II ćwiartka		III ć		rtka	
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$			$2\pi - \alpha$
$sin\varphi$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cos\varphi$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
$tg\varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tabela 5-3. Wzory redukcyjne

Przykład 1

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos\alpha$$

Funkcja przeszła w kofunkcję, bo kąt zmienił się o $\frac{\pi}{2}$. Znak z prawej strony jest dodatni (+), bo kąt $\frac{\pi}{2} + \alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam sinus jest dodatni.

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

Funkcja nie zmieniła się, bo kąt zmienił się o π. Znak z prawej strony jest ujemny (-), bo kąt π - α jest kątem drugiej ćwiartki, a tam cosinus jest ujemny.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
$sin\alpha$	+	+	-	-
$cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

Tabela 5-4. Znaki funkcji trygonometrycznych

Przykład 2

$$sin150° = sin(180° - 30°) = sin30° = \frac{1}{2}$$

$$cos420° = cos(4 \cdot 90° + 60°) = cos60° = \frac{1}{2}$$

$$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$$

$$cos\frac{3}{4}\pi = cos135° = cos(180° - 45°) = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadania

5.5.1. Oblicz:

a) $sin120°$

b) $cos315°$

c) $tg(-840°)$

d) $sin\,\frac{\pi}{3}$

e) $ctg\,(-2\pi)$

f) $2sin^2 225° - ctg330° \cdot tg450°$

Odpowiedź:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) nie ma rozwiązania

f) $1 + \sqrt{3}$

5.5.2. Korzystając z wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $\frac{cos135° + tg330°}{ctg225° \cdot sin840°}$

b) $sin\,\frac{5\pi}{4} \cdot tg\,\frac{4\pi}{3} + cos2\frac{1}{2}\pi$

Odpowiedź:

a) $\frac{-\sqrt{6}-2}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

5.5.3. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

5.6. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

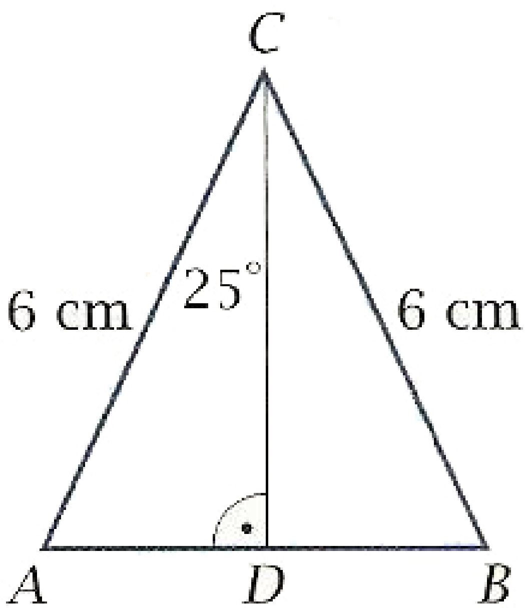
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Stosować proste zależności między funkc**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

- **Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub co … ych funkcji tego samego kąta ostrego**

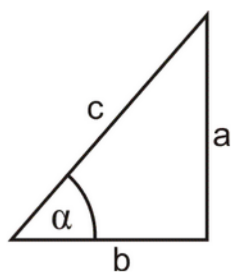


Jedynka trygonometryczna

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Uzasadnimy wzór dla sinusa i cosinusa kąta ostrego.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$



$a^2 + b^2 = c^2$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$a^2 + b^2 = c^2 \, / : c^2$

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

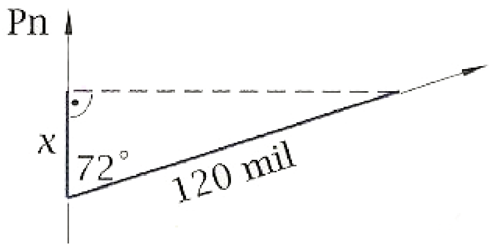
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

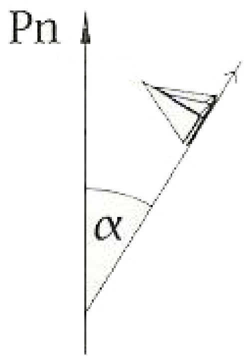
Wniosek:

Jeżeli $\alpha\epsilon(0°;90°)\alpha\epsilon(0°;90°)$, to:

$$\boldsymbol{sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}}$$





Przykład 1

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$

b) $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$

Niech będzie dany trójkąt prostokątny.

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha : cos\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha$

b) $\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha : sin\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = ctg\alpha$

Ponieważ wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta ostrego są liczbami odwrotnymi, to:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

Z tego wynika, że $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$.

Przykład 2

Wiedząc, że $cos\alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2}$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

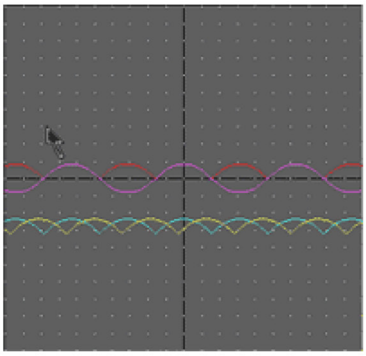
$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

Przykład 3

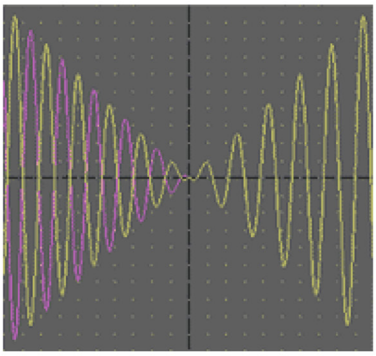
Udowodnij tożsamość trygonometryczną: $sin^3 x - cos^2 x = sinx - sinx \cdot cos^2 x - \left(\frac{sinx}{tgx}\right)^2$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie:

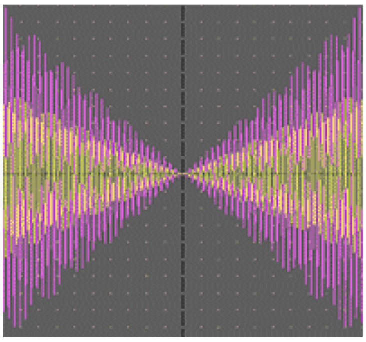
- $y = sin(cos(x))$



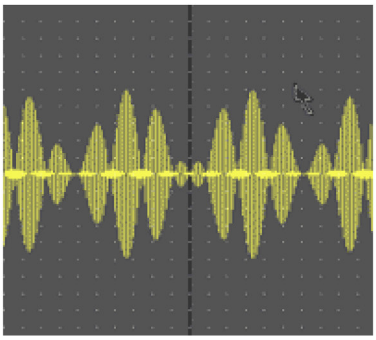
- $y = -x \cdot cos(100x)$



- $y = x \cdot sin(20x)$



- $y = 5sin(0,5x) \cdot cos(50x)$



$$\frac{sinx}{tgx} = sinx : tgx = sinx : \frac{sinx}{cosx} = sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} = cosx$$

$$sin^3 x - cos^2 x = sinx - sinx \cdot cos^2 x - (cosx)^2$$

$$sin^3 x - cos^2 x = sinx(1 - cos^2 x) - cos^2 x$$

$$sin^3 x - cos^2 x = sinx \cdot sin^2 x - cos^2 x$$

$$sin^3 x - cos^2 x = sin^3 x - cos^2 x$$

$$L = P$$

Zadania

5.6.1. Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych:

a) $cos\alpha = \frac{1}{4}$

b) $tg\alpha = 2\sqrt{2}$

Odpowiedź:

a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, tg\alpha = \sqrt{15}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$

b) $sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, cos\alpha = \frac{1}{3}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5.6.2. Oblicz $a + b$, gdy $a = 1 - cos^2\alpha, b = tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha$, dla $\alpha = 45°$.

Odpowiedź: 1

5.6.3. Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Odpowiedź:

$sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{1}{2}$

5.7. Zastosowanie trygonometrii

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wykorzystywać wiadomości i umiejętności w zadaniach i problemach życia codziennego**

Przykład 1

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta? Jaką długość ma wysokość opuszczona na tę podstawę?
Wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli kąt między ramionami trójkąta na dwa równe kąty

$\sin 25° = \frac{|AD|}{6}$

$|AD| = 6 \sin 25°$

$|AB| = 2|AD| = 12 sin25°$

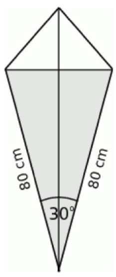
Wartość $\sin 25°$ odczytujemy z tablic.

$\sin 25° \approx 0{,}4226$

$|AB| = 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5{,}1$

$cos25° = \frac{|CD|}{6}$

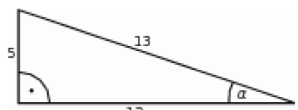
$|CD| = 6 \cdot cos25°$



Wartość $\cos 25°$ odczytujemy z tablic.

$cos25° \approx 0{,}906$

$|CD| = 6 \cdot 0{,}906 \approx 5{,}4$



Odpowiedź:

Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości, a wysokość około 5,4 cm.

Przykład 2

Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°. O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).

Rysunek pomocniczy do zadania:

$$\frac{x}{120} = cos72°$$

$$x = 120 \cdot cos72°$$

Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tablic.

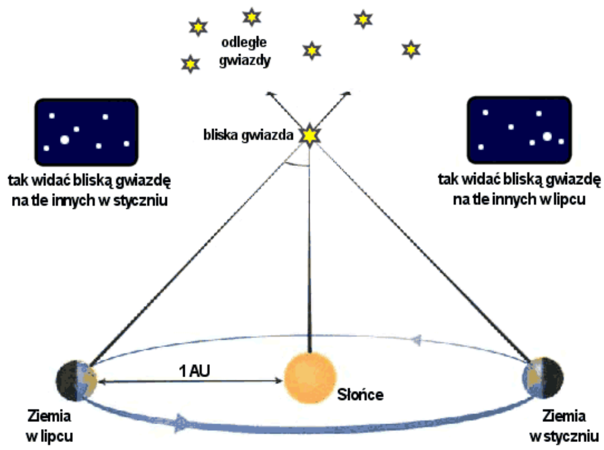
$$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$$

Odpowiedź:

Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

CIEKAWOSTKA

[79]Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się przy pomiarze odległości do trudno dostępnych obiektów, np. do wyznaczania odległości obiektów astronomicznych przy pomocy zjawiska paralaksy. Paralaksa to zjawisko pozornej zmiany położenia obiektu oglądanego z dwóch kierunków. W praktyce najłatwiej zobaczyć zmianę położenia na tle innych, odległych obiektów. Paralaksę geocentryczną stosuje się do pomiarów odległości w Układzie Słonecznym, wówczas za bazę przyjmuje się promień Ziemi. Do wyznaczenia odległości do innych gwiazd, za bazę obiera się jedną jednostkę astronomiczną, czyli średnią odległość Ziemia – Słońce (149,6 mln km). Można zmierzyć położenie danej gwiazdy na tle odległych gwiazd w dwóch momentach czasu, gdy Ziemia jest na przeciwnych miejscach na swojej orbicie. Otrzymujemy wtedy podwojony kąt paralaksy ($2\pi\pi$).



Rysunek 5-5 Kąt paralaksy

Kąt ten jest na tyle mały, że wyrażamy go w sekundach łuku i oznaczamy symbolem π. **Jedna sekunda łuku,** czyli odległość, z jakiej obiekt o średnicy równej średniej odległości Ziemi od Słońca, miałby rozmiary jednej sekundy łuku na niebie.

CIEKAWOSTKA

79. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk, 19.04.2013.

[80]**Parsek** – jednostka odległości używana w astronomii. Jest to odległość, dla której paralaksa roczna położenia Ziemi widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity wynosi 1 sekundę łuku. Parsek można równoważnie opisać jako odległość, z jakiej połowa wielkiej osi orbity ziemskiej (czyli 1 j.a.) jest widoczna jako łuk o długości 1 sekundy kątowej.
Słowo parsek zostało wprowadzone przez Herberta Turnera w XIX wieku. Utworzył on je jako zbitkę pierwszych sylab słów paralaksa i sekunda. Parsek oznaczany jest skrótem pc lub ps. Używanie drugiego ze skrótów nie jest wskazane, gdyż jest on identyczny ze skrótem dla pikosekundy (1 ps = 10^{-12} s).
1 pc ≈ 3,2616 roku świetlnego **≈ 206265 jednostek astronomicznych ≈ $3{,}086 \cdot 10^{16}$** m

CIEKAWOSTKA

Zadania

5.7.1. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Ramię tego trapezu ma długość $10\ cm$, a obwód wynosi $40\ cm$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

Odpowiedź: $2\ cm$, $18\ cm$

5.7.2. Oblicz wysokość drzewa, które daje cień o długości 17 m przy wysokości słońca 54º. *Wysokość słońca – kąt między kierunkiem promieni słonecznych a płaszczyzną horyzontu.*

Odpowiedź: $23{,}4\ m$

80. www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek, 20.04.2013.

5.7.3. Najbardziej „stroma" kolej na świecie znajduje się w Gwatemali. Tory biegną pod kątem 52°. Na jaką wysokość wjedziesz po przejechaniu 1000 m?

5.7.4. Pod jakim kątem nachylona jest do podłoża drabina o długości 10 m, jeżeli sięga ona na wysokość 8 m? Jak wysoko sięgnie ta drabina, jeżeli kąt między nią a ziemią będzie wynosił 60°?

5.7.5. Obserwator stoi na stromym brzegu na wysokości 35 m nad wodą. Widzi żaglówkę pod kątem 12° do poziomu wody. Jak daleko jest ta żaglówka od brzegu?

5.7.6. Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi znajduje się Księżyc, jeżeli kąt paralaksy wynosi $\pi = 57'$. Przyjmij promień Ziemi R = 6378 km.

Odpowiedź: $d = \frac{R}{tg\pi} = 384000$ km

5.7.7. Oblicz kąt paralaksy najbliższej nam gwiazdy Proxima Centauri, znajdującej się w odległości 4,3 lat świetlnych od Ziemi. P**Odpowiedź:** Rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu jednego roku. (Jaką drogę pokona światło? $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$).

Odpowiedź: $d = 4{,}3$ lat świetlnych $= 4{,}3 \cdot 365{,}35 \cdot 24 \cdot 3600s \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 4{,}1 \cdot 10^{16}$ m

$R = 149\,600\,000$ km $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$m

$tg\alpha = \frac{r}{d} \approx 6{,}36 \cdot 10^8$

$\alpha = (3{,}6 \cdot 10^{-6})°$

5.7.8. Po upływie 6 miesięcy pozycja obserwowanej gwiazdy zmieniła się, tak że jej kąt paralaksy wyniósł 0,00013°. Oblicz odległość gwiazdy od Ziemi wiedząc, że promień orbity Ziemi wynosi $1{,}496 \cdot 10^8$ km. Odległość wyraź w kilometrach i parsekach.

Odpowiedź: $tg\alpha = \frac{r}{l}$, $l = \frac{r}{tg\alpha} = 6{,}6 \cdot 10^{13}$ km $= 2{,}14$ pc

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy $\cos\alpha$ jest równy[81]:

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

81. Zadania 1, 2, 3: zaczerpnięto z próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

C. $\frac{\sqrt{17}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{65}}{9}$

2. Dany trójkąt jest prostokątny (patrz rysunek). Wtedy tgα jest równy:

A. $\sqrt{2}$,

B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Kąt α jest ostry i tgα = 4/3. Oblicz sinα + cosα.

4. Kąt α jest ostry i sin α = 3/4. Wartość wyrażenia 2 – cos $^2\alpha$ równa się[82]:

A. $\frac{25}{16}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{17}{16}$

D. $\frac{31}{16}$

5. Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa:

A. 3200 cm^2

B. 6400 cm^2

C. 1600 cm^2

D. 800 cm^2

6. Kąt α jest ostry i tg$\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz cos α.

7. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy[83]:

A. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

B. tg$\alpha = \frac{13}{12}$

82. Zadania 4, 5, 6: zaczerpnięto z matury z matematyki, CKE, maj, 2010.
83. Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.

C. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

8. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, wtedy[84]:

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

9. Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. 1

10. (2 pkt) Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

11. Liczba $\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa[85]:

A. $\sqrt{3} - 1$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 13$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

84. Zadania 8, 9, 10: zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2011.
85. Zadania 11, 12: zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.

A. $\frac{12}{13}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{13}{12}$

13. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ jest[86]:

A. mniejsza od -1

B. równa 1

C. większa od 1

D. równa 0

14. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy cosα jest równy[87]:

A. $\frac{45}{49}$

B. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

15. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas[88]:

A. $\cos\alpha = \sin\alpha$

B. $\cos\alpha > \sin\alpha$

C. $\cos\alpha < \sin\alpha$

D. $\cos\alpha = 1 - \sin\alpha$

16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy[89]:

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

86. Zadania 13, 14: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2010.
87. Próbna matura z operonem, listopad, 2009.
88. Zadania 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2011.
89. Zadania 18, 19, 20: zaczerpnięto z arkusza maturalnego, OKE, Poznań, styczeń, 2013.

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

17. Wyrażenie $\frac{1-sin^2\alpha}{\frac{1}{tg^2\alpha}}$, gdzie α jest kątem ostrym, można zapisać w postaci:

A. $\sin^2 \alpha$

B. $\frac{cos^4\alpha}{sin\,\alpha}$

C. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

D. $\frac{1}{sin\,\alpha}$

18. (2 pkt) Wykaż, że jeżeli kąt α jest kątem ostrym i tg α = 2, to $\cos\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. (2 pkt) W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

20. Oblicz wartość wyrażenia $tg^2\alpha - 3\cos^2\alpha$, jeżeli $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem ostrym.

21. (4 pkt) Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $tg\,\alpha + \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$. Oblicz wartość $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i tg α [90].

22. (2 pkt) Drabina o długości 2,5 m oparta o mur styka się z nim na wysokości 2 m. Na jakiej wysokości zetknie się z murem drabina o długości 3,5 m, jeśli obie drabiny nachylone są pod takim samym kątem do podłoża?

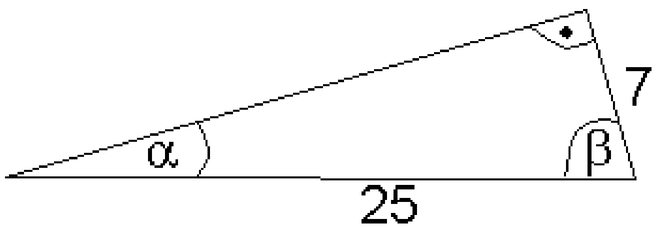
23. (2 pkt) Posługując się wzorem: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, oblicz $\sin 75°$.

24. (2 pkt) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ [91].

25. (2 pkt) Oblicz a-b, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

26. (4 pkt) Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia

$(tg\beta - \frac{1}{sin\beta})^2 \cdot \cos\alpha$.



90. Zadania 21,22, 23: zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
91. Zadania 24, 25, 26, 27: zaczerpnięte z informatora maturalnego, CKE, 2007.

27. (**4 pkt**) Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{ctg\,\alpha - tg\,\alpha}{ctg\,\alpha + tg\,\alpha}$.

28. (**5 pkt)** Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α [92].

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha < 0$.

b) Dla $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.medianauka.pl/podstawowe_pojecia_planimetrii
2. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
3. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
4. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
5. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf

92. Arkusz maturalny, CKE, maj, 2009.

6. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
8. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
9. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
10. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
11. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
12. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.bossa.pl
15. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
16. www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
20. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
21. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
23. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
24. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
26. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian
27. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.
28. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia
29. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascalwww.zadania.info
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
31. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_351687432168743168741687651646 87/mat_ark_pdst.pdf
32. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf,
33. www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
34. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
35. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php
36. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
37. www.zadania.info
38. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
39. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
40. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf
41. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf

42. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
43. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta#Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29
44. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o
45. www.math.edu.pl/symetria
46. www.math.edu.pl/symetria
47. www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa
48. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram
49. www. violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd
50. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom.
51. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski
52. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
53. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
54. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
55. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
56. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
57. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
58. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
59. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
60. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
61. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
62. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
63. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
64. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
65. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013)
66. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk
67. www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek

Matematyka

Projekt „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież –
Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”

Wstęp

Drogi uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują pod każdym z nich. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

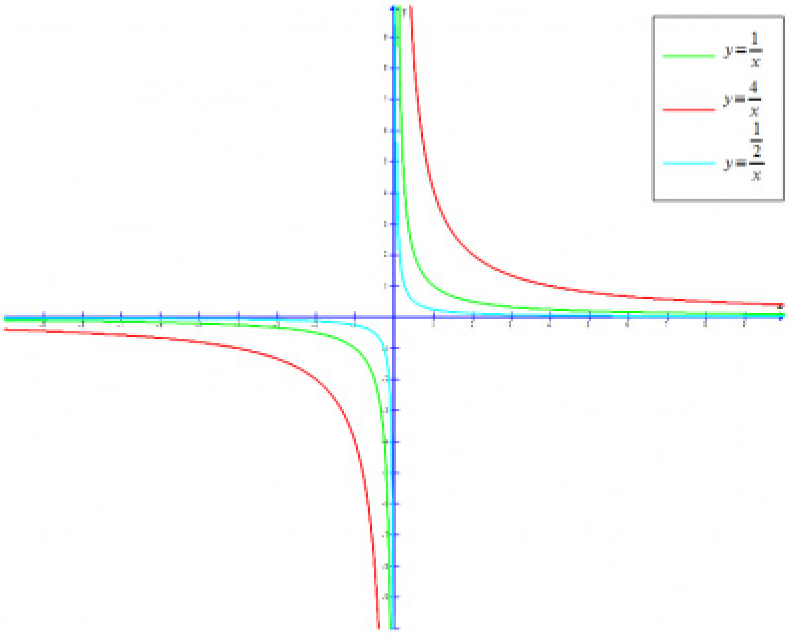
1.1 Funkcja wykładnicza i jej własności

Teraz nauczę się:

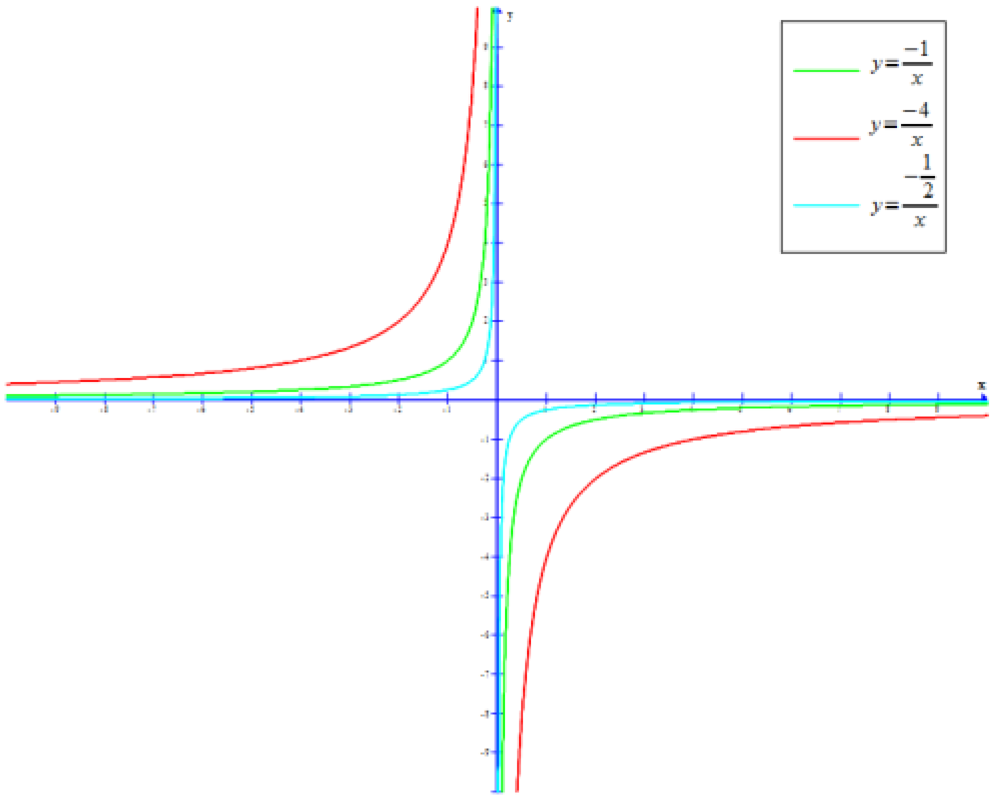
- Korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.
- Rozwiązywać równania wielomianowe.

Pojęcie hiperboli

Poniżej narysowano kilka różnych funkcji typu $f(x) = \dfrac{a}{x}$.



Rysunek 1-1. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a > 0$



Rysunek 1-2. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a < 0$

Krzywą, która jest wykresem funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy hiperbolą. Wykres składa się z dwóch rozłącznych części, zwanych gałęziami hiperboli.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Gdy $a > 0$, gałęzie hiperboli $y=\frac{a}{x}$ leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych. Gdy $a < 0$, gałęzie hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Zatem, aby narysować wykres funkcji, wystarczy znać wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x > 0$, a następnie odbić go symetrycznie względem punktu $(0{,}0)$, czyli początku układu współrzędnych.

Wykres funkcji typu $y=\frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) zbliża się do obu osi układu współrzędnych (punkty tego wykresu mogą leżeć dowolnie blisko tych osi). Prostą $x=0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, a prostą $y=0$ nazywamy asymptotą poziomą tego wykresu.

Zmniejszanie wartości „a" powoduje zbliżanie się hiperboli do osi układu.

Zwiększanie wartości „a" powoduje oddalanie się hiperboli od osi układu.

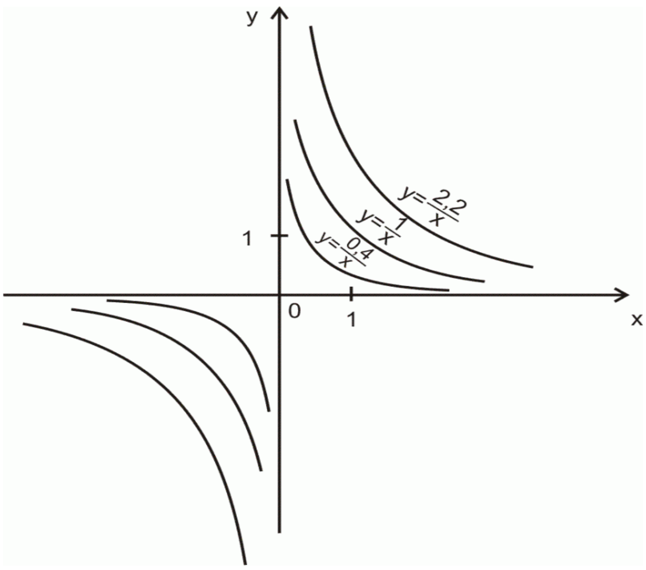
Przykład 1

W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji:

$f(x) = \frac{0,4}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{2,2}{x}$

Budujemy częściową tabelę zmienności funkcji:

x	0,25	0,5	1	2
$f(x) = \frac{0,4}{x}$	1,6	0,8	0,4	0,2
$f(x) = \frac{1}{x}$	4	2	1	0,5
$f(x) = \frac{2,2}{x}$	8,8	4,4	2,2	1,1



Rysunek 1-3. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a > 0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a > 0$, to gałęzie hiperboli są położone w I i w III ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś $OX\ OX$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś $OYOY$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli $R/\{0\}$.
- Widzimy, że funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

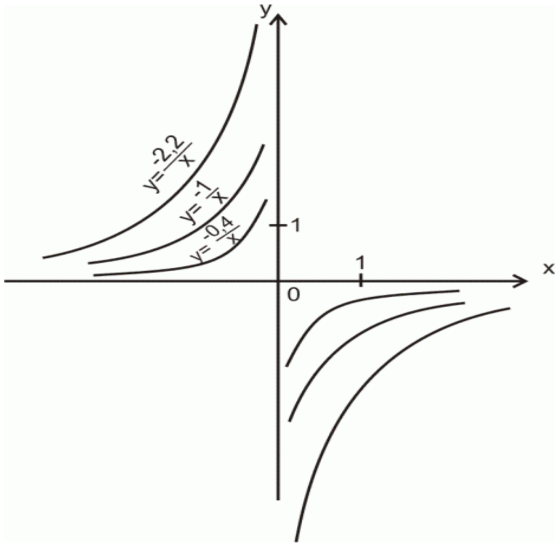
Przykład 2

W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji:

$f(x) = -\frac{0{,}4}{x}, f(x) = -\frac{1}{x}, f(x) = -\frac{2{,}2}{x}$.

Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez odbicie symetryczne względem osi OX.

Wykorzystując tę własność oraz wykresy funkcji z przykładu 1, widzimy, że wykresy podanych funkcji są następujące:



Rysunek 1-4. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a < 0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a < 0$, to ramiona hiperboli są położone w II i w IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli $R/\{0\}$.
- Widzimy, że funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

Poniżej przypominamy reguły dotyczące przesuwania wykresów funkcji.

Niech: $a > 0$ i $b > 0$.

- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x-a) + b$.
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x-a) - b$.

- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x + a) + b$.

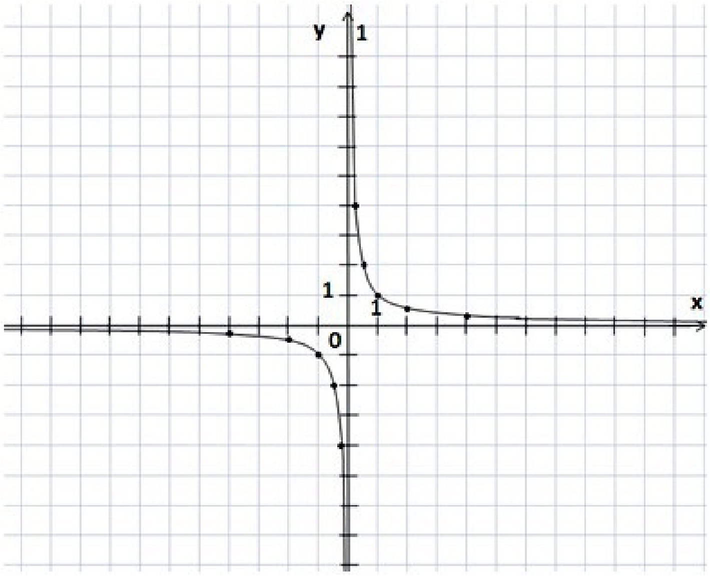
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x + a) - b$.

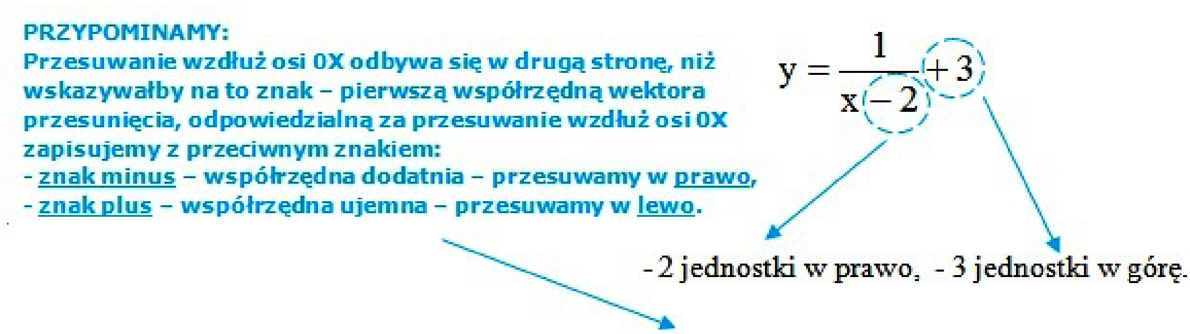
Powyższą regułę wykorzystajmy w przykładzie.

Przykład 3[1]

Narysuj wykres funkcji: $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

W pierwszej kolejności rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{1}{x}$





ASYMPTOTY, pionową i poziomą, przesuwamy wraz z wykresem funkcji.

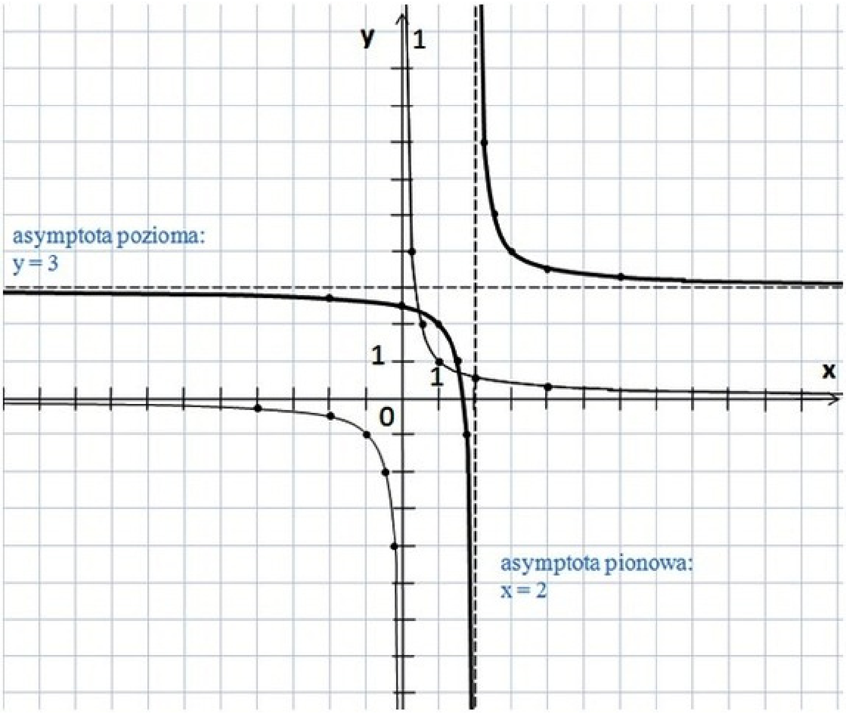
Dla rozpatrywanego przykładu:

- asymptota pozioma będzie znajdowała się na wysokości 3: $y = 3$,

- asymptota pionowa będzie znajdować się w miejscu argumentu 2: $x = 2$.

-

1 www.matematykam.pl, 03.03.2013.



ZADANIA

3.1.1 Sporządź wykresy funkcji:

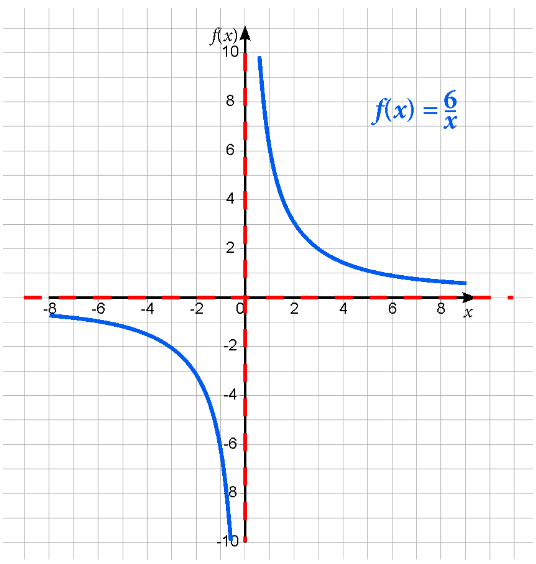
a) $f(x)=\frac{6}{x}$ b) $f(x)=-\frac{8}{x}$ c) $f(x)=\frac{2}{x}+3$ d) $f(x)=-\frac{4}{x}+2$

e) $f(x)=\frac{4}{x-2}$ f) $f(x)=\frac{-2}{x+1}$ g) $f(x)=\frac{5}{x+3}$ h) $f(x)=\frac{-3}{x-1}$

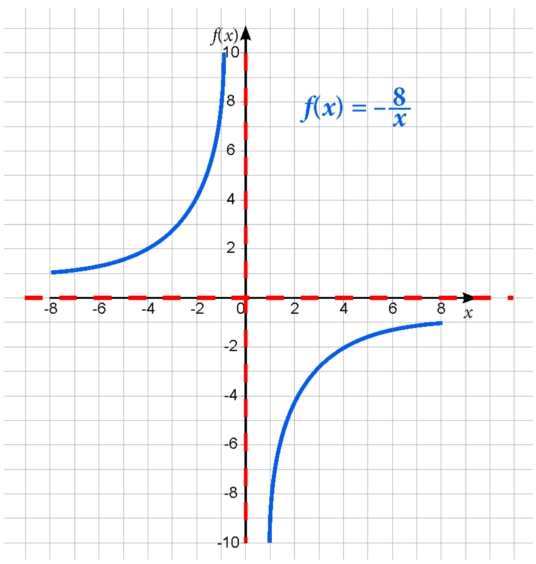
i) $f(x)=\frac{4}{x-3}-2$ j) $f(x)=\frac{-4}{x-4}+1$

Odpowiedzi:

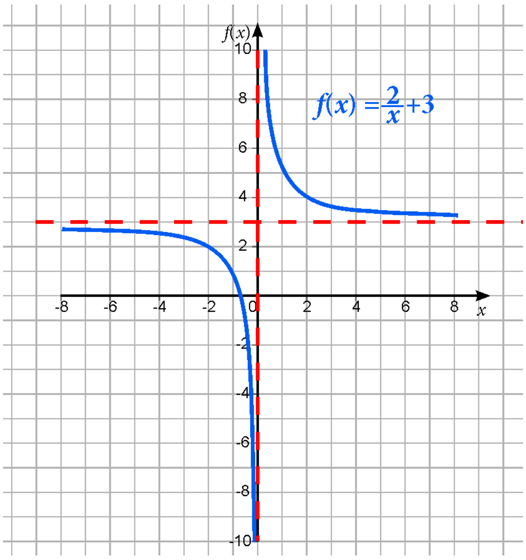
a)



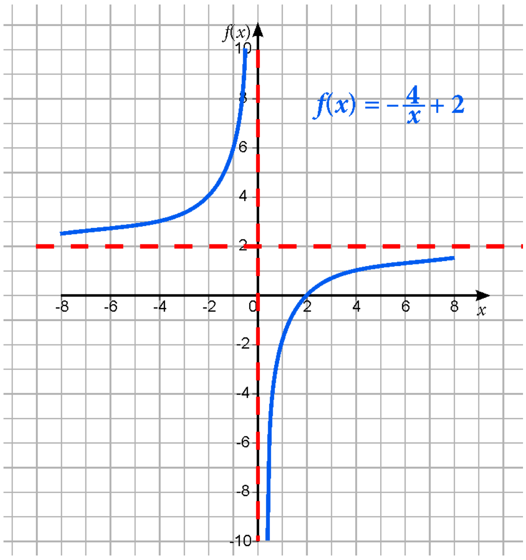
b)



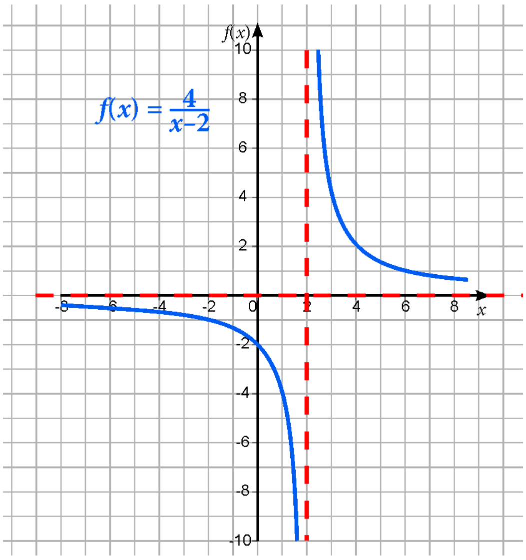
c)


$f(x)=\frac{2}{x}+3$
f(x)
x

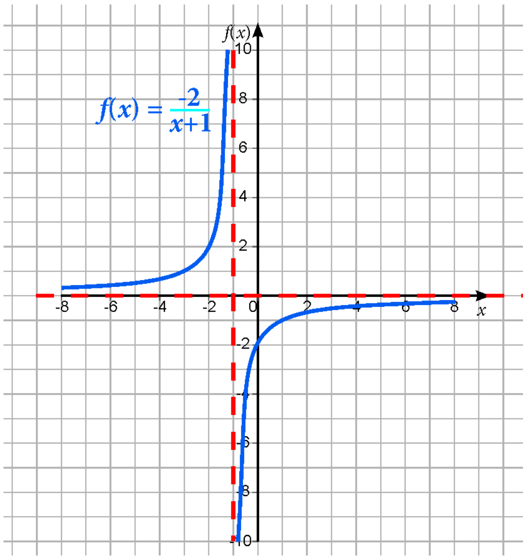
d)


$f(x)=-\frac{4}{x}+2$
f(x)
x

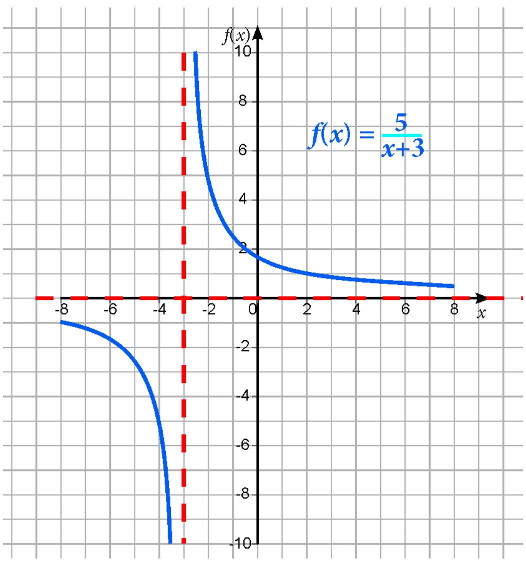
e)


$f(x)=\frac{4}{x-2}$
f(x)
x

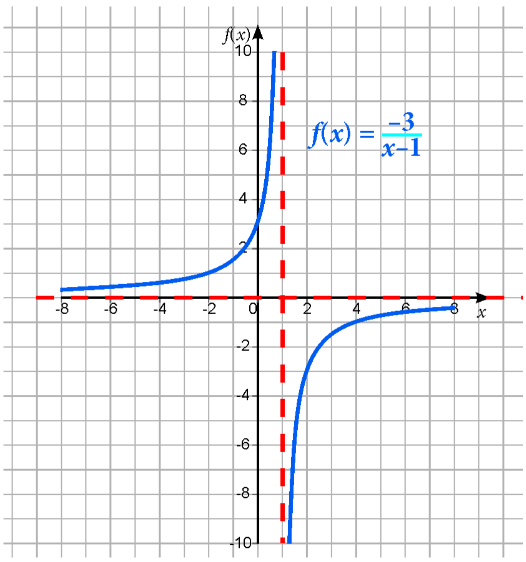
f)


$f(x)=\frac{-2}{x+1}$
f(x)
x

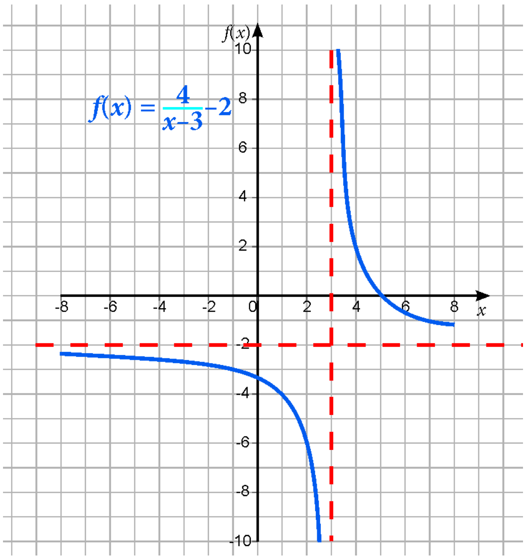
g)


$f(x)=\frac{5}{x+3}$
f(x)
x

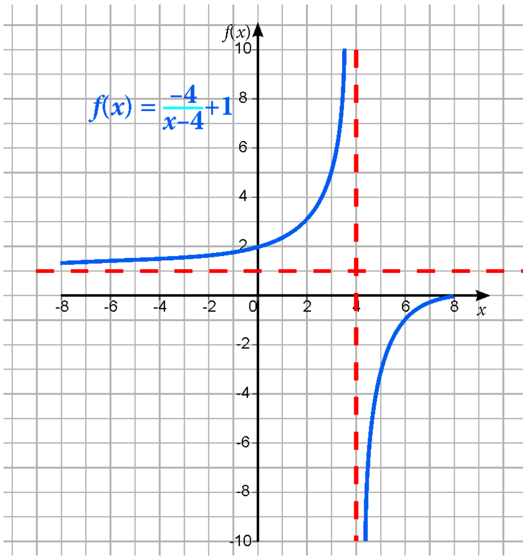
h)


$f(x)=\frac{-3}{x-1}$
f(x)
x

i)



j)



1.1.2. Wykres funkcji $f(x)=\frac{4}{x}$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g, jeżeli wykres funkcji f przesunięto:

a) o 5 jednostek do dołu

b) o 3 jednostki w prawo

c) o 2 jednostki do góry i 4 jednostki w lewo

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{4}{x}-5$ b) $f(x)=\frac{4}{x-3}$ c) $f(x)=\frac{4}{x+4}+2$

1.1.3. Zapisz równania asymptot wykresu funkcji:

a) $y=\frac{3}{x-1}+2$ b) $y=\frac{-0{,}7}{x+12}-\frac{1}{3}$ c) $y=\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}}-\sqrt{5}$ d) $y=\frac{7}{3(x-\frac{1}{2})}+\frac{4}{5}$

Odpowiedź:

a) $\boldsymbol{x=1;\ y=2}$ b) $\boldsymbol{x=-12;\ y=-\frac{1}{3}}$ c) $\boldsymbol{x=-\sqrt{3};\ y=-\sqrt{5}}$ d) $x=\frac{1}{2};\ y=\frac{4}{5}$

1.1.4. Punkt $\boldsymbol{P}=\left(3\frac{1}{2}\sqrt{3},2\sqrt{6}\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $f(x)=\frac{a}{x}$ b) $f(x)=\frac{a}{x+4}$ c) $f(x)=\frac{a}{x}-2$ **d)** $f(x)=\frac{a}{x-2}+2$

Dla każdej z tych funkcji wyznacz wartość współczynnika $\boldsymbol{a}$.

Odpowiedź:

a) $21\sqrt{2}$ b) $21\sqrt{2}+7\sqrt{3}$ c) $21\sqrt{2}+8\sqrt{6}$ d) $21\sqrt{2}-4\sqrt{6}-7\sqrt{3}+4$

1.1.5. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x-5}+3$ b) $f(x)=\frac{3}{x+2}-3$ c) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x+6}$ d) $f(x)=\frac{-3}{x}+1$

Odpowiedź:

a) zbiór wartości: $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$

b) zbiór wartości: $(-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$

c) zbiór wartości: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; funkcja maleje w przedziale $(-\infty,-6)\cup(-6,\infty)$

d) zbiór wartości: $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$; funkcja rośnie w przedziale $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

1.1.6. Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x=-5, y=3$ b) $x=0{,}6, y=0$ c) $x=-15, y=-6$

d) $x=0, y=-2$ e) $x=0, y=0$

Odpowiedź:

a) $f(x)=\frac{3}{x+5}+3$, $f(x)=\frac{-9}{x-5}+3$

b) $f(x)=\frac{1}{x-0{,}6}$, $f(x)=\frac{5}{x-0{,}6}$

c) $f(x)=\frac{1}{x+15}-6$, $f(x)=\frac{20}{x+15}-6$

d) $f(x)=\frac{1}{x}-2$, $f(x)=\frac{-17}{x}+3$

e) $f(x)=\frac{16}{x}$, $f(x)=\frac{-0{,}1}{x}$

1.1.7. a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y=-\frac{10}{x+7}-9$.

b) Podaj współrzędne wszystkich punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y=\frac{-6}{x-12}+8$ oraz $y=\frac{6}{x+7}-15$.

Odpowiedź:

a) $(-7,-9)$

b) $(12,8), (-7,8), (-7,-15), (12,-15)$

Proporcjonalność odwrotna

Definicja: Proporcjonalność odwrotna[2]

Proporcjonalność odwrotna to taka zależność między dwiema zmiennymi wielkościami x i y, w której iloczyn tych wielkości jest stały. Czyli:

$x\cdot y=a$, gdzie $a,x,y\in R/\{0\}$.

2 www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homograficzna, 15.03.2013.

Wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**.

Z powyższego wzoru możemy obliczyć x w zależności od y, wtedy: $x = \frac{a}{y}$
oraz y w zależności od x, wtedy: $y = \frac{a}{x}$

Zauważ, że ostatni wzór to wzór funkcji omawianej w poprzednim podrozdziale tego tematu.

Przykład 4

Pan Nowak ma przeczytać książkę, która liczy 520 stron. Postanowił, że codziennie będzie czytał taką samą liczbę stron. Liczba x przeczytanych dziennie stron oraz liczba y dni, w czasie których pan Nowak przeczytał książkę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, ponieważ:

$x \cdot y = 520$

Jeśli pan Nowak czyta więcej stron dziennie, to czas czytania książki jest krótszy. Czytając 20 stron dziennie, pan Nowak przeczyta książkę w ciągu 26 dni, zaś przy czytaniu 65 stron dziennie, przeczyta ją w ciągu 8 dni.

Mamy stałą wartość iloczynu $20 \cdot 26 = 65 \cdot 8 = 520$.

Liczba dni czytania y zależy od liczby przeczytanych stron x w sposób $y = \frac{520}{x}$.

Przykład 5

Weźmy dla przykładu podstawowy wzór fizyczny:

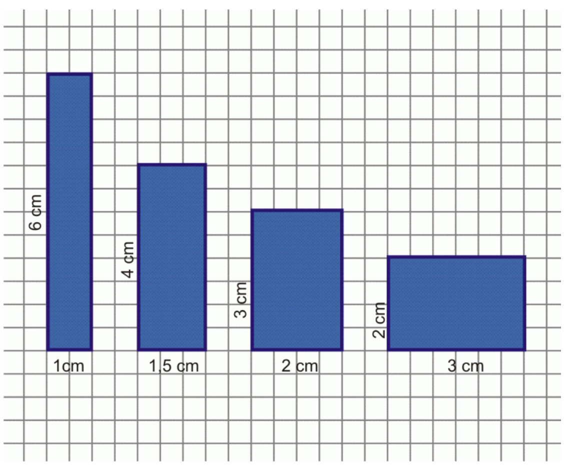
$$v = \frac{s}{t}$$

Zakładając, że droga (s) jest stała, prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do czasu.

Np. samochód jedzie z miasta A do miasta B. Im szybciej jedzie, tym mniej czasu mu to zajmie. Odległość między tymi miastami się nie zmienia, czyli droga (s) jest wielkością stałą.

Przykład 6

Na rysunku poniżej przedstawiono prostokąty o polu $6\ cm^2$.



Rysunek 1-5. Prostokąty o równym polu

Przy stałym polu prostokąta im większa jest długość jednego jego boku, tym mniejsza jest długość drugiego.

Jeśli długość jednego boku prostokąta **zwiększymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 2,5 razy,
- 5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 5 razy,
- 6 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 6 razy.

I odwrotnie, jeśli długość jednego boku prostokąta **zmniejszymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 2,5 razy,
- 5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 5 razy,
- 6 razy, to jego drugi bok zwiększy się 6 razy.

Zauważ, że pole prostokąta jest stałe i równe iloczynowi długości jego boków.

Przykład 7[3]

Samochód, jadąc ze stałą prędkością, pokonuje pewną drogę w ciągu 6 godzin. Z jaką prędkością powinien jechać motocyklista, aby tę samą trasę przejechać w ciągu 3 godzin?

Zauważ, że stała jest długość trasy, czyli droga, jaką pokonują samochód i motocyklista. Droga jest równa iloczynowi prędkości przez czas jazdy.

Odpowiedź: Motocyklista ma pokonać tę samą trasę w ciągu 3 godzin, czyli w czasie 2 razy krótszym niż samochód. Zatem jego prędkość powinna być 2 razy większa niż prędkość samochodu.

Wniosek:

- Jeśli jedna z wielkości rośnie (maleje), a równocześnie druga wielkość maleje (rośnie) tyle samo razy, to te wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi.**
- **Iloczyn** wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

3 www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne, 15.03.2103.

ZADANIA

1.1.8. Sprawdź, czy wielkości podane w tabelce są odwrotnie proporcjonalne? Jeżeli tak, to podaj wartość współczynnika proporcjonalności.

x	0,3	1	3	2	0,2
y	4	1,2	0,4	0,6	6

Odpowiedź:

Aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne, ich iloczyn musi być stały, liczymy więc $x \cdot y$.

$0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$

$1 \cdot 1{,}2 = 1{,}2$

$3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$

$2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2$

Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości to $a = 1{,}2$.

1.1.9. Uzupełnij tabelkę tak, aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne.

x	3,6		0,1	144
y		0,6	36	

Odpowiedź:

x	3,6	6	0,1	144
y	1	0,6	36	0,025

1.1.10 Koło zębate o 120 zębach napędza koło zębate o 48 zębach. Ile razy obróciło się małe koło, gdy duże w tym czasie obróciło się 40 razy?

Odpowiedź:

Małe koło obróciło się 100 razy.

1.1.11 Kierowca pokonał pewną trasę, jadąc ze średnią szybkością 90 km/h. O ile kilometrów na godzinę powinien zwiększyć szybkość, aby pokonać tę samą trasę w czasie o 25% krótszym?

Odpowiedź:

Kierowca powinien zwiększyć szybkość o 30 km/h.

1.2 Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczej

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = a^x$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Jej nazwa pochodzi od tego, że x znajduje się w wykładniku.

Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza,** która przecina oś OY w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Kształt wykresu zależy od podstawy a.

Przypadek I[4]

Funkcja rosnąca, mająca w podstawie liczbę większą od 1.

Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = 2^x$

Aby narysować wykres funkcji, w pierwszej kolejności tworzymy tabelę, zawierającą punkt (0, 1) oraz parę punktów położonych na lewo od tego punktu i parę położonych na prawo.

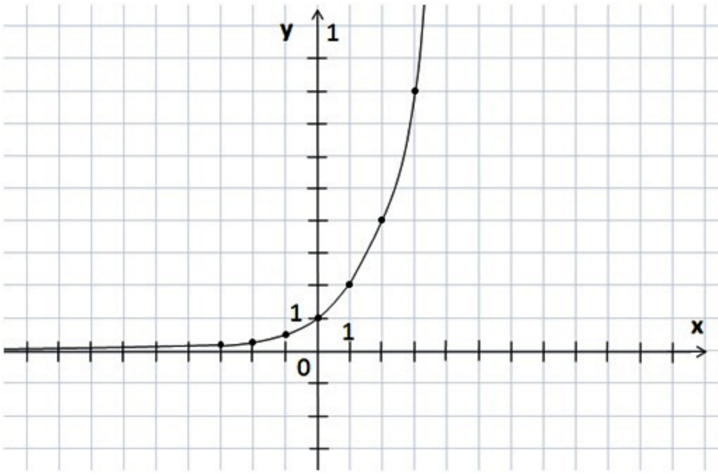
Trzy liczby na lewo od 0. Trzy liczby na prawo od 0.

x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**	2	4	8

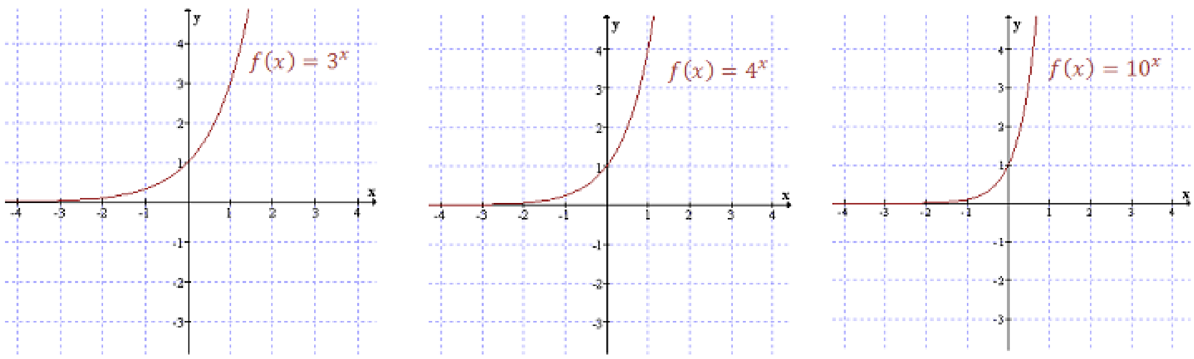
Następnie zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią.

4 www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html, 12.03.2013.

UWAGA!!!! Linia wykresu nie może przeciąć osi OX.



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $a > 1$. Przykładowo:



Rysunek 1-6. Wykresy funkcji wykładniczych, $a > 0$

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a > 1}$:

1. Dziedzina: $D = R$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R_+$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $rosnąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $y = 0$.

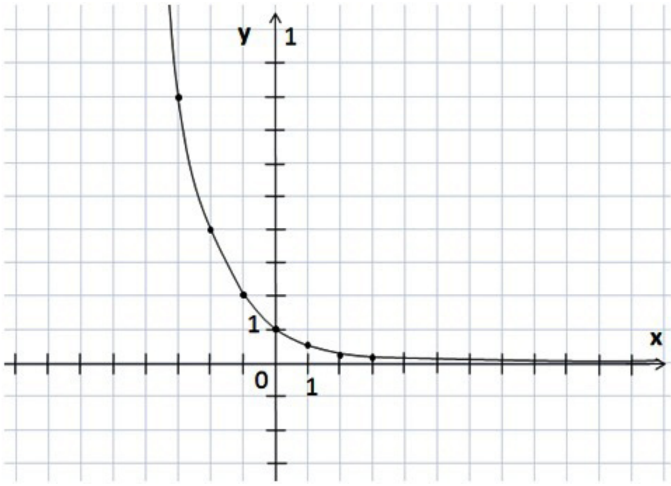
Przypadek II

Funkcje mające w podstawie ułamek.

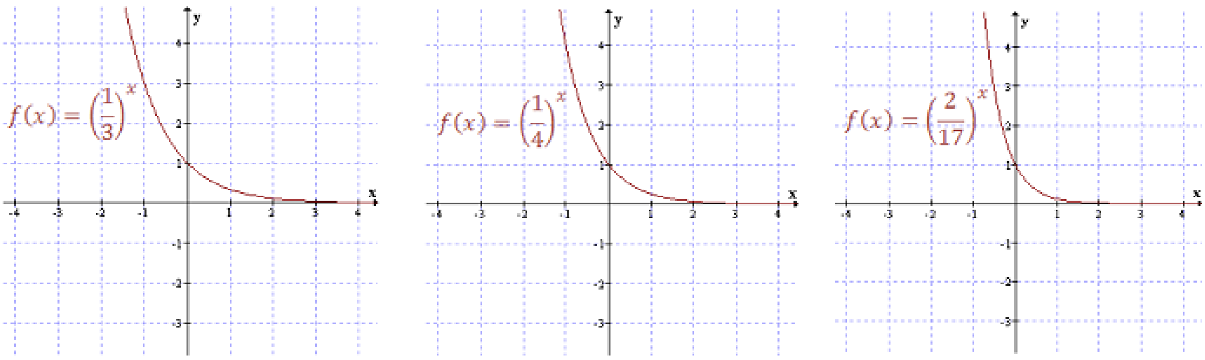
Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Postępujemy dokładnie w ten sam sposób, jak dla funkcji mającej w podstawie liczbę większą od 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $a < 1$. Przykładowo:



Rysunek 1-7. Wykresy funkcji wykładniczych, $a < 0$

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a < 1}$:

1. Dziedzina: $D = R$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R_+$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $malejąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $y = 0$.

Funkcje wykładnicze – przesunięcie

Funkcje wymagające przesuwania prostszych przypadków wzdłuż osi układu.

Przykład:

$f(x) = 2^{x-1} - 4$

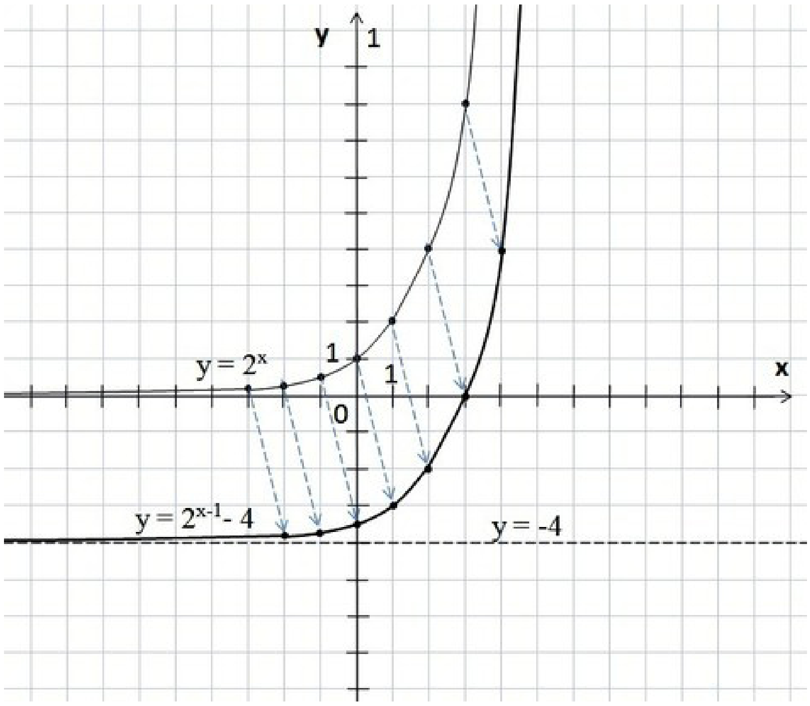
W celu narysowania powyższej funkcji, w pierwszej kolejności rysujemy prostszą funkcję:

$f(x) = 2^x$

W tym przypadku będziemy wykres funkcji $y = 2^x$ przesuwać o wektor $[1, -4]$ (przesuwamy wykres o 1 jednostkę w prawo i 4 jednostki w dół).

UWAGA:

W przypadku tej funkcji asymptota pozioma również przesunie się o 4 jednostki w dół, czyli będzie miała wzór $y = -4$.



Dla przypadków, gdy wykres otrzymujemy poprzez przesunięcie o wektor, asymptota znajduje się na wysokości, która wynika z przesunięci wykresu funkcji o określoną liczbę jednostek w górę lub w dół.

UWAGA!!!!

Gdy funkcja ma miejsce zerowe, należy je obliczyć, przyrównując wzór funkcji do zera. Otrzymujemy wówczas równanie wykładnicze.

Określenie, czy funkcja ma miejsce zerowe, nie wymaga rysowania wykresu. Wystarczy stwierdzić, czy podczas rysowania będziemy przesuwać wzór funkcji w dół, czy nie. Tylko funkcje wymagające przesuwania w dół podczas rysowania, mają miejsce zerowe.

Przykład:

Obliczymy miejsce zerowe funkcji:

$f(x) = 2^{x+7} - 16$

Rysując tę funkcję, wykres funkcji $f(x) = 2^x$ musielibyśmy przesunąć o 7 jednostek w lewo i 16 do dołu. Wynika stąd, że ta funkcja ma miejsca zerowe.

Aby je obliczyć, wystarczy wzór funkcji przyrównać do zera.

$2^{x+7} - 16 = 0$

$2^{x+7} = 16$

$2^{x+7} = 2^4$ teraz możemy pominąć podstawy i przyrównać wykładniki.

$x + 7 = 4 \Rightarrow x = -3$

Odpowiedź: Funkcja ma miejsce zerowe dla $x = -3$.

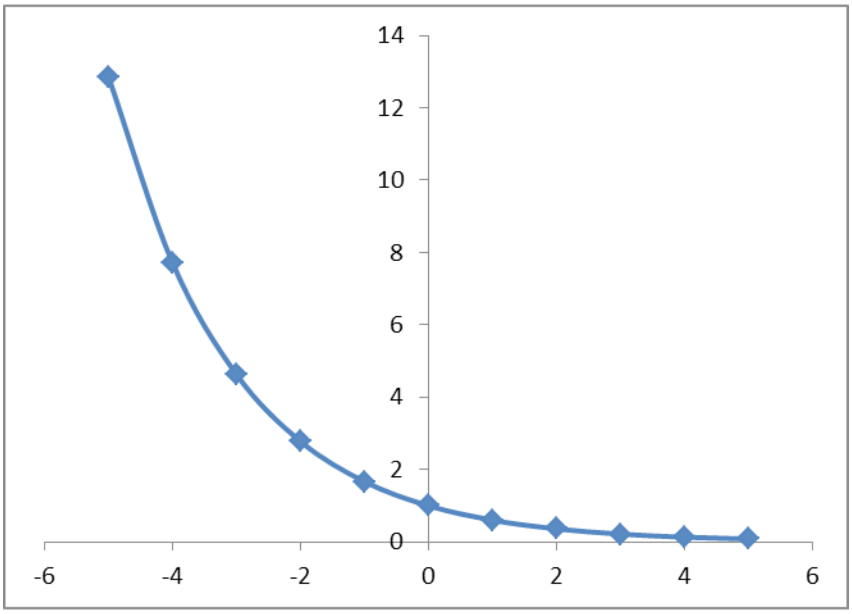
ZADANIA

1.2.1. Narysuj wykresy następujących funkcji:

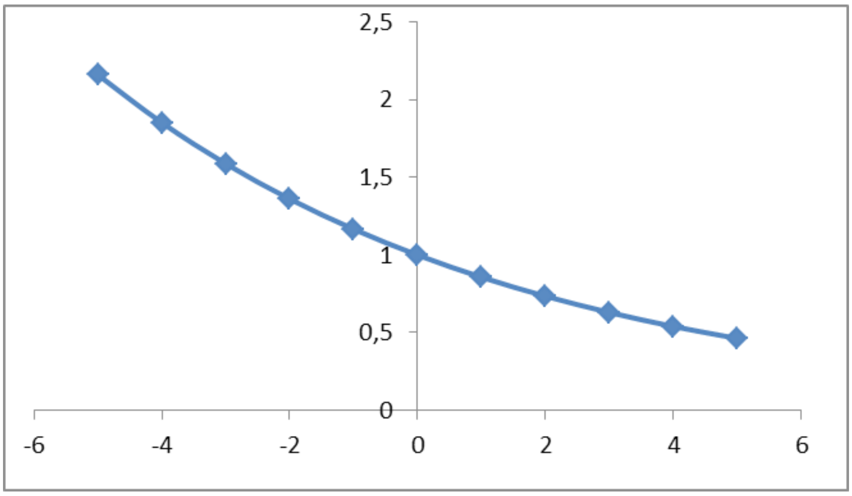
a) $f(x) = (0{,}6)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$ c) $f(x) = 10^x$

Odpowiedzi:

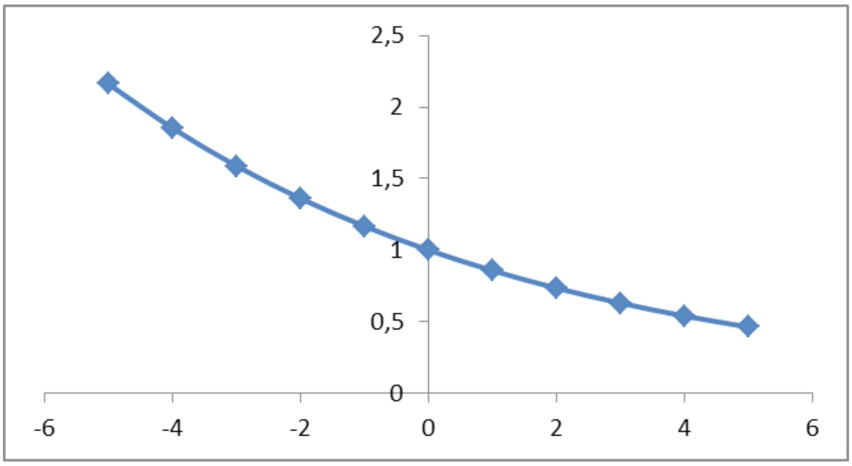
a)



b)



c)

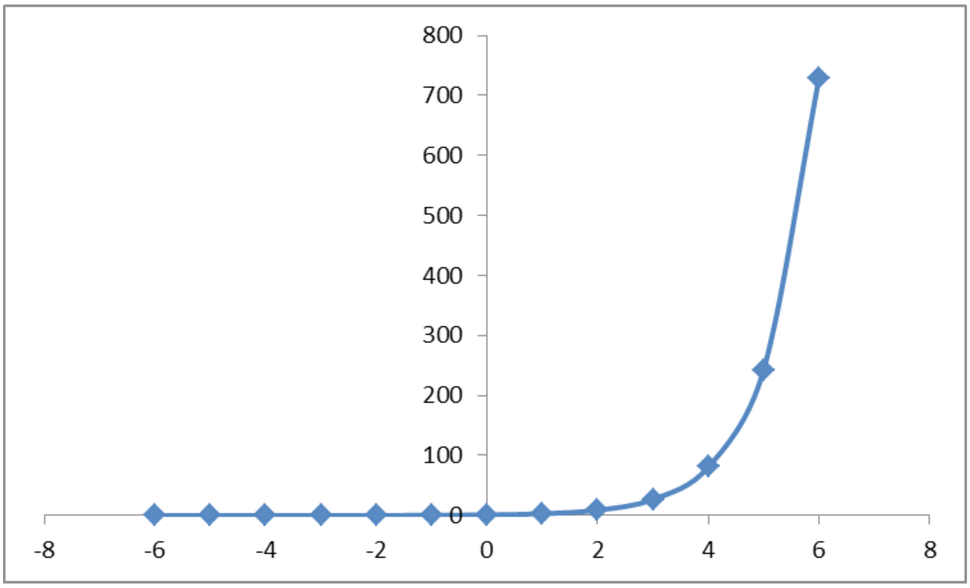


1.2.2. Narysuj wykres funkcji $f(x)=3^x$, a następnie wykresy funkcji:

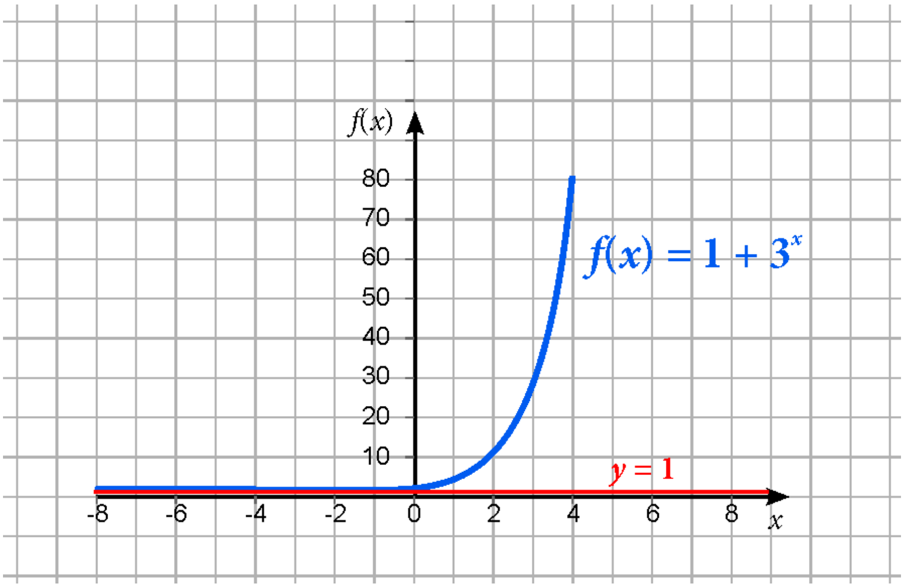
a) $f(x)=1+3^x$ b) $f(x)=-4+3^x$ c) $f(x)=3^{x+2}$ d) $f(x)=3^{x-3}$

e) $f(x)=-3^x$ f) $f(x)=4-3^x$ g) $f(x)=9\cdot 3^x$

Odpowiedzi: wykres $y=3^x$

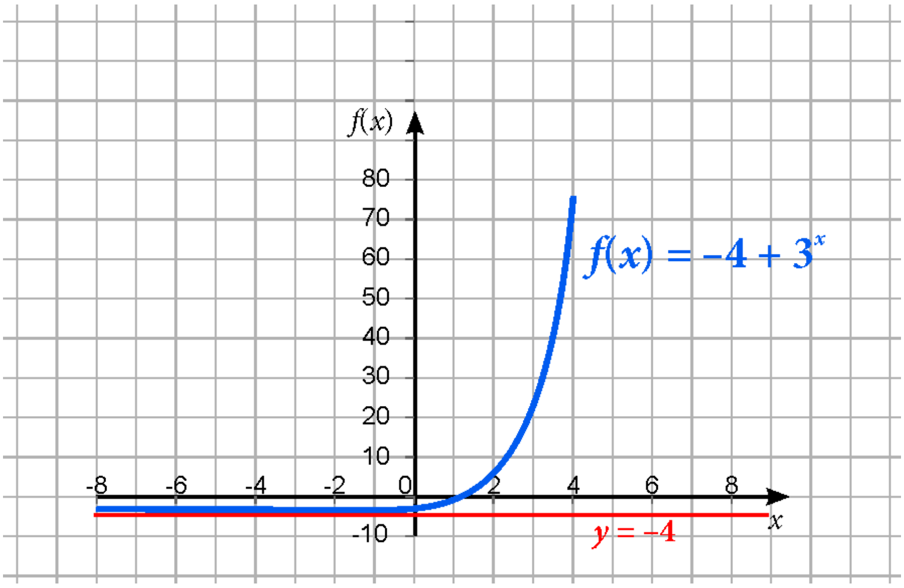


a)



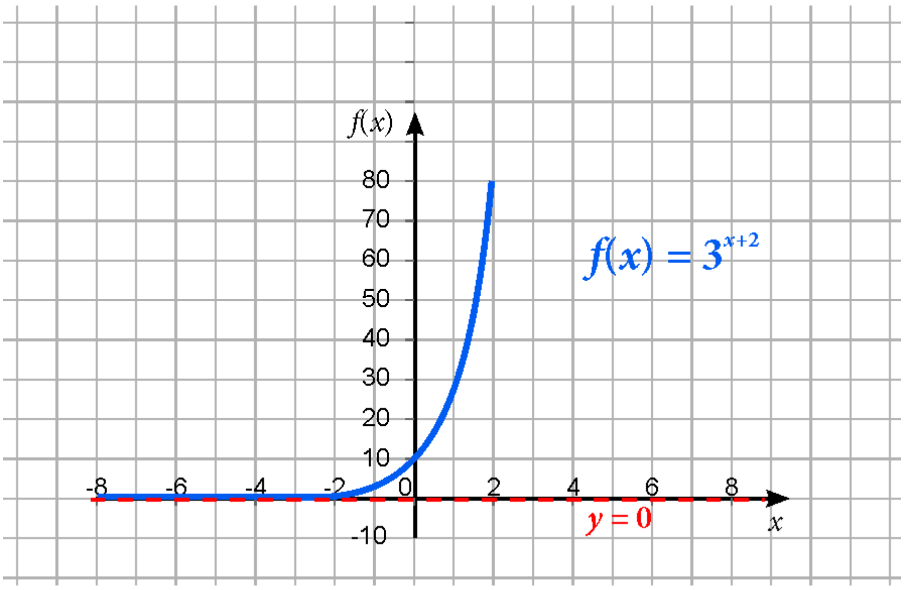
$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
$f(x) = 1 + 3^x$
$y = 1$
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x

b)



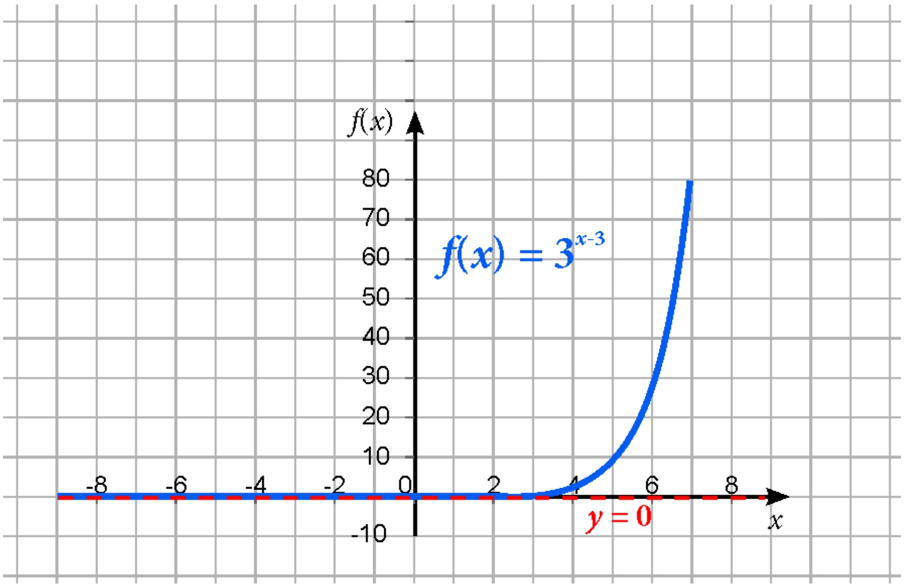
$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
$f(x) = -4 + 3^x$
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
-10
$y = -4$

c)

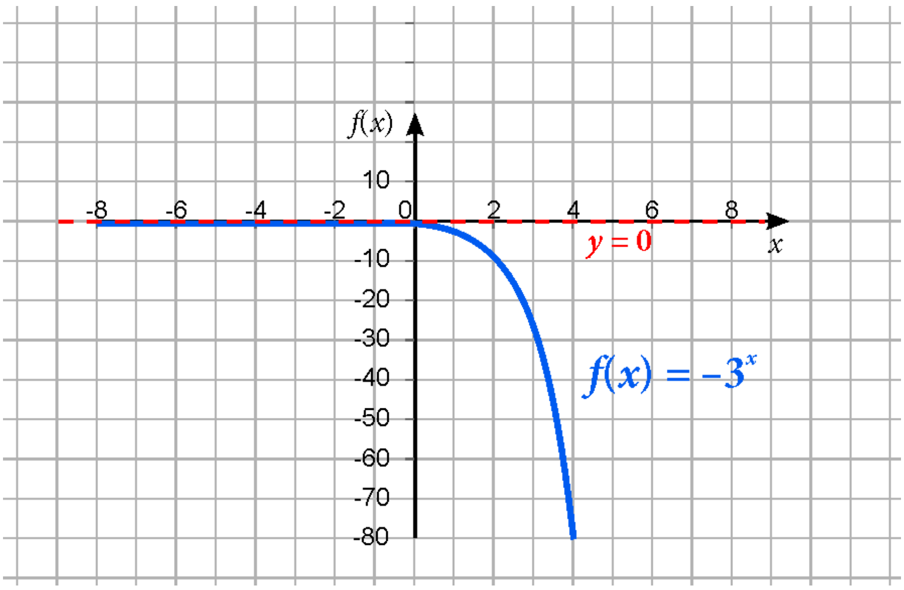


$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
$f(x) = 3^{x+2}$
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
-10
$y = 0$

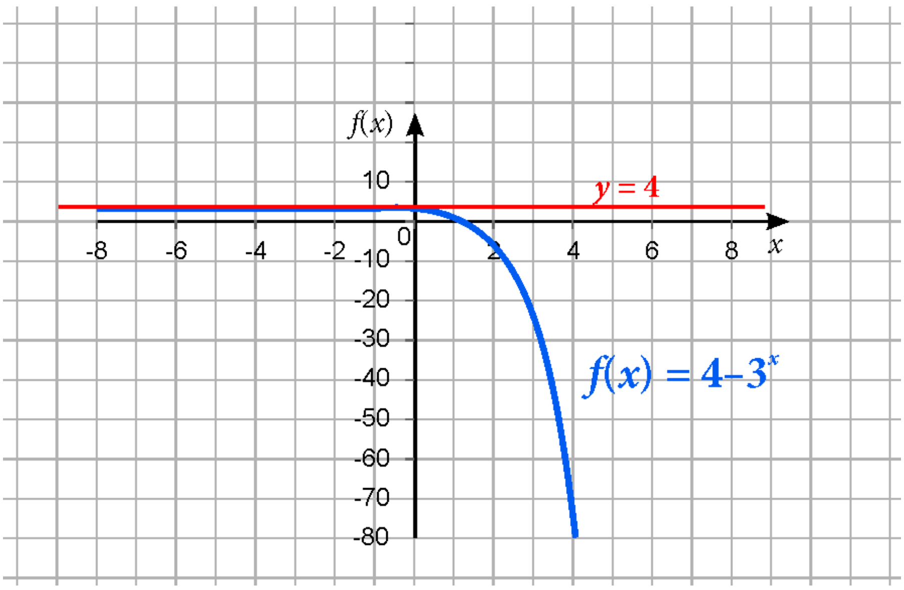
d)


$f(x)$
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
$f(x) = 3^{x-3}$
$y = 0$

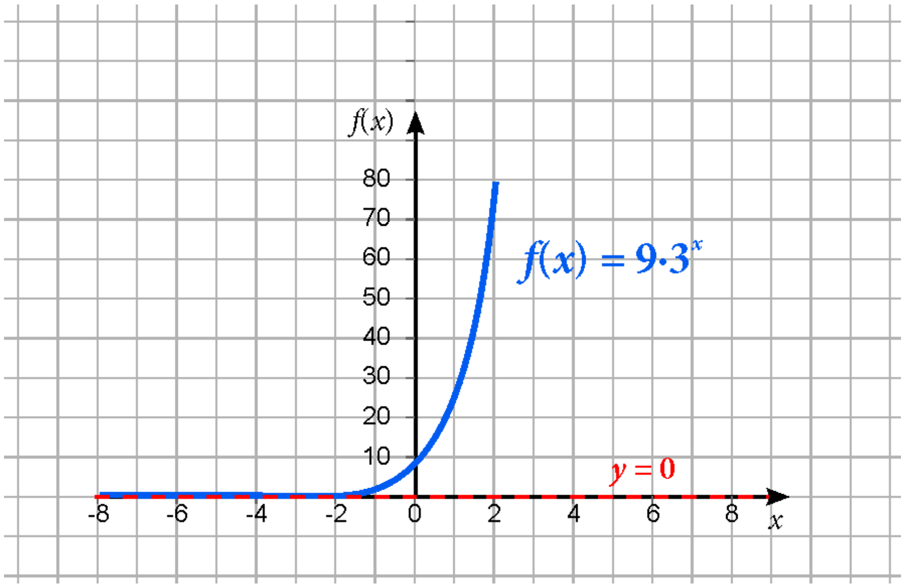
e)


$f(x)$
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
$y = 0$
$f(x) = -3^{x}$

f)


$f(x)$
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
$y = 4$
$f(x) = 4-3^{x}$

g)



1.2.3. Dane są funkcje:

$j:(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^{x}-5 \quad k:(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} \quad l:(x)=6^{x+4}$

Które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) przyjmują tylko wartości dodatnie,

c) mają asymptotę $y=0$,

d) mają miejsca zerowe,

e) przecinają oś y.

Odpowiedź:

a) l b) k, l c) k, l

d) j e) j, k, l

1.2.4. Podaj równanie asymptoty funkcji $f(x)$, określonej wzorem:

a) $f(x)=5^{x-2}$ b) $f(x)=0{,}3^{x+3}-4$ c) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-1$

d) $f(x)=5^{x}+5$ e) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}-4$

Odpowiedź:

a) $y=0$ b) $y=-4$ c) $y=-1$ d) $y=5$ e) $y=-4$

1.2.5. Napisz wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A = (3, \frac{1}{8})$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 2) - 1$.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x)$.

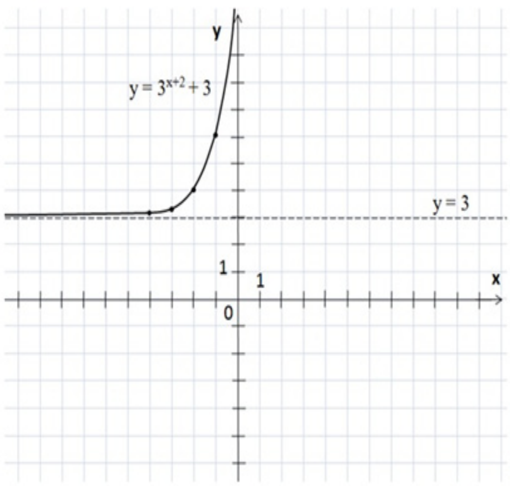
c) Dla jakich argumentów funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

Odpowiedź:

a) $a = \frac{1}{2}$, b) $x = -2$, c) $x > -2$

1.2.6. Narysuj wykres funkcji i określ jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność, miejsce zerowe oraz asymptotę).

$f(x) = 3^{x+2} + 3$



Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.

Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = (3, +\infty)$.

Funkcja rosnąca.

Miejsce zerowe: brak.

Asymptota: $y = 3$.

1.3 Funkcja logarytmiczna i jej własności*

W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje postaci $y = \log_a x$. Takie funkcje nazywamy **funkcjami logarytmicznymi**.

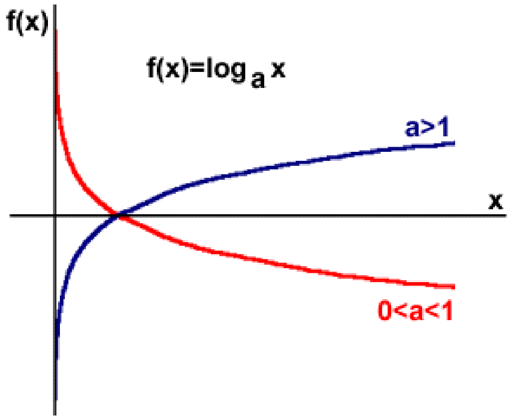
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję o postaci:

$f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

Dziedziną każdej funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

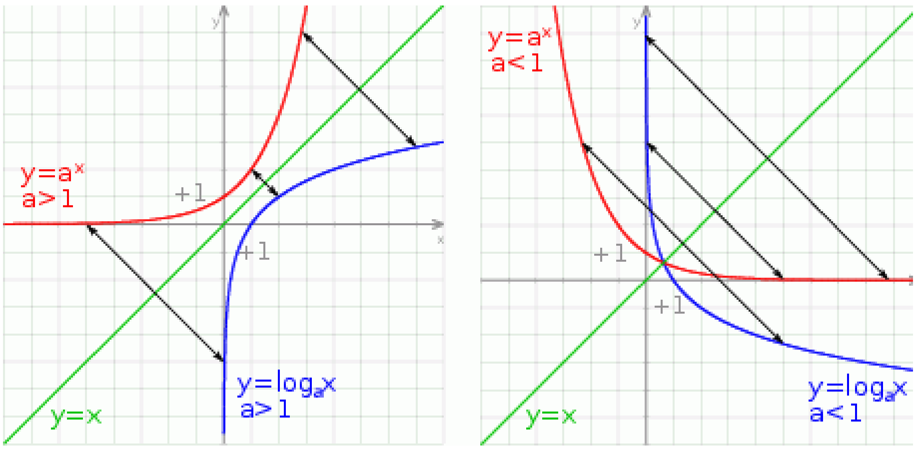
Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się **krzywą logarytmiczną**.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją malejącą dla $a \in (0, 1)$, natomiast dla $a \in (1, +\infty)$ jest funkcją rosnącą.



Rysunek 1-8. Wykresy funkcji logarytmicznych

Funkcja logarytmiczna $\boldsymbol{f(x) = log_a\, x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = ax$. Wykresy tych funkcji są symetryczne względem prostej $\boldsymbol{f}(x) = x$.

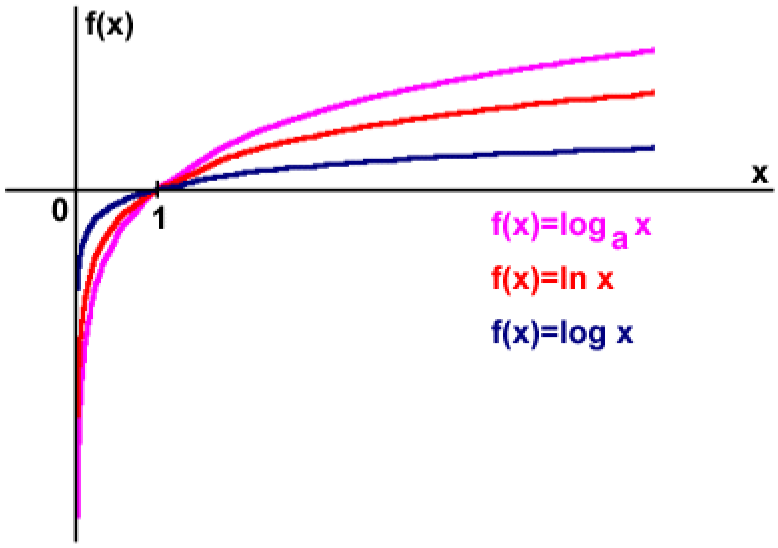


Rysunek 1-9. Funkcja wykładnicza a logarytmiczna

Ciekawostka

Wiadomo, że w zależności od podstawy, istnieją trzy grupy logarytmów:

- logarytm przy dowolnej podstawie – $\mathbf{log}_a\, \boldsymbol{x}$
- logarytm przy podstawie dziesiętnej (***dziesiętne***) – $\mathbf{log}_{10}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{log\, x} = \boldsymbol{lg\, x}$
- logarytm przy podstawie z ***e*** ***(liczby Nepera e = 2,718281828...)*** – $\mathbf{log}_e\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{ln\, x}$



Rysunek 1-10. Wykres funkcji logarytmicznej przy podstawie z e

Symbol $ln x$ jest symbolem logarytmu naturalnego i oznacza logarytm o podstawie

$a = e(e \approx 2{,}7)$.

$lnx = \log_e x$

$ln1 = 0$, bo $e^0 = 1$

$lne = 1$, bo $e^1 = e$

$ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$, bo $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Funkcja logarytmiczna i jej własności*

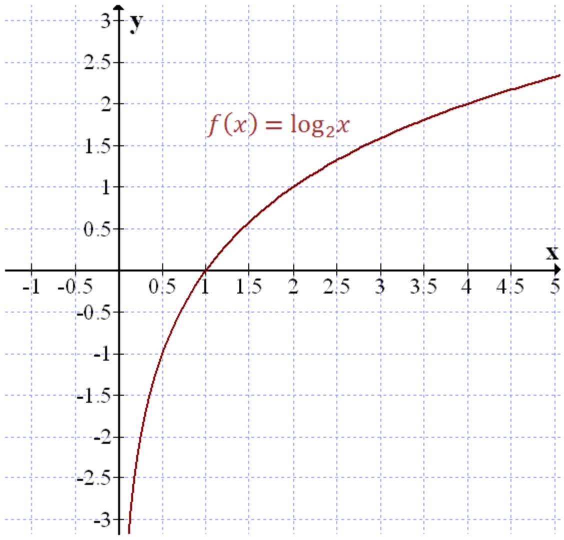
Przypadek I[5] – dla $a > 1$

Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_2 x$. Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x. Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

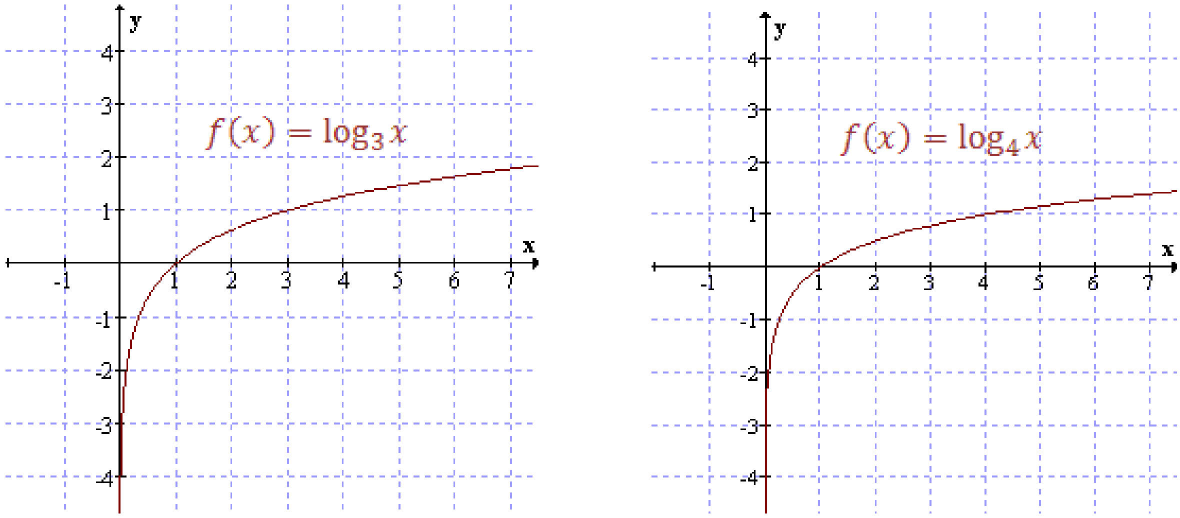
Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:

5 Przypadek I i II, www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php, 17.03.2013.



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a > 1$.

Przykłady:



Rysunek 1-11. Wykres funkcji logarytmicznych, $a > 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a > 1$:

1. Dziedzina: $D = R_+$
2. Zbiór wartości: $ZW = R$
3. Monotoniczność: funkcja jest $rosnąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (1; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: $x = 1$.
6. Oś OY jest asymptota pionowa, czyli prosta $y = 0$.

Przypadek II – dla $a < 1$:

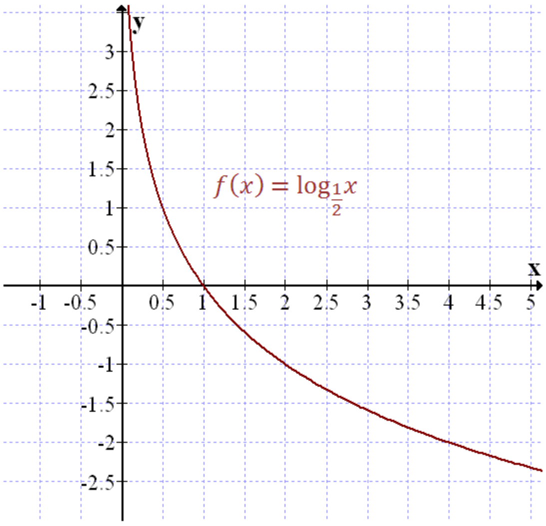
Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x.

Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

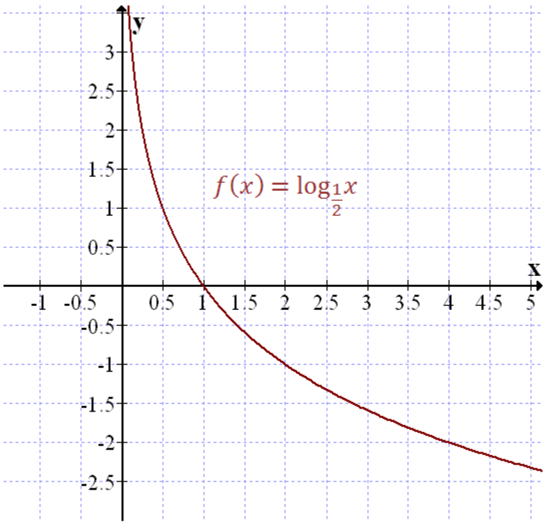
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	2	1	0	-1	-2

Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a < 1$.

Przykłady:



Rysunek 1-12. Wykresy funkcji logarytmicznych, $0 < a < 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a < 1$:

1. Dziedzina: $D = R_+$
2. Zbiór wartości: $ZW = R$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $malejąca$.

4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (0;\ 1)$

5. Miejsca zerowe: $x = 1$.

6. Oś OY jest asymptota pionowa, czyli prosta $y = 0$.

ZADANIE

1.3.1. Podaj współrzędne punktów symetrycznych względem prostej $y = x$ do punktów:

a) $A = (1{,}5), B = (4,-2), C = (-5,-1), D = (0,-3), E = (10{,}0)$

1.4 Szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznej*

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw.

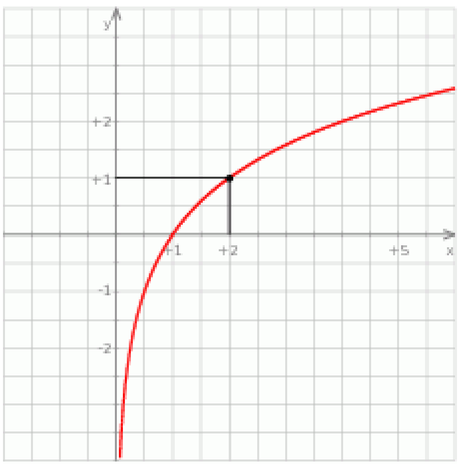
ZADANIA

1.4.1. Narysuj wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \log_2(x-3)$ b) $y = \log_2(5+x)$ c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = -4 + \log_2 x$ e) $y = \log_2(x+1)$

1.4.2. Dany jest wykres funkcji logarytmicznej f.



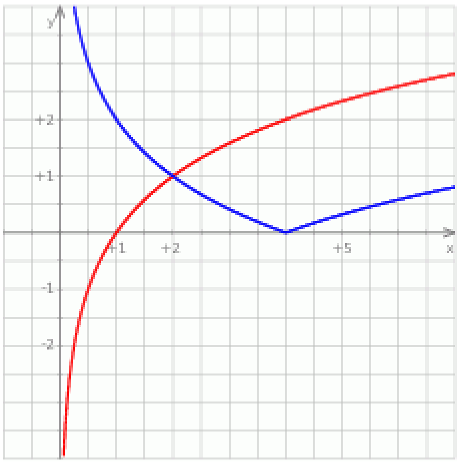
a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.

c) Odczytaj z rysunku zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są nie mniejsze od wartości funkcji f.

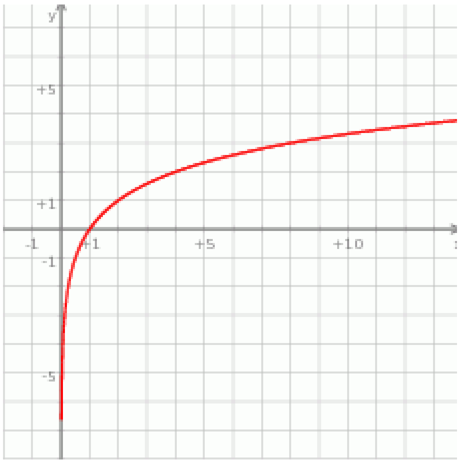
Odpowiedź:

a) $f(x) = \log_2 x$



b) $g(x) \geq f(x)$ dla $x \in (0, 2\rangle$.

1.4.3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.



a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p.

b) Oblicz $f(0{,}125)$.

c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x - 4)|$.

d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.

Odpowiedź:

a) $p = 2$ b) $\log_2(0{,}125) = -3$ c) Wykres rys. d) $x = 5$

1.5 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne w zjawiskach fizycznych i chemicznych

Teraz nauczę się:

- Posługiwać funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- Posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Zastosowanie funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym[6]

Przykład 1

Model wykładniczy

Niech funkcja $f(t), t \geq 0$, opisuje pewną wielkość zmieniającą się w czasie. Wielkość ta zmienia się zgodnie z **modelem wykładniczym**, jeśli:

$f(t) = b \cdot a^t$, gdzie $a > 0, a \neq 1$ i $t \geq 0$.

UWAGA!!!

Liczby a i b są na ogół wyznaczane doświadczalnie.

Jeśli $a > 0$, to mamy do czynienia ze wzrostem wykładniczym.

Wzrost wykładniczy jest wzrostem bardzo szybkim. Często nazywa się go wzrostem gwałtownym. Jest on znacznie szybszy nie tylko od wzrostu liniowego, opisanego przez funkcję $g(t) = at, a > 0$, ale także od wzrostów opisanych przez funkcje potęgowe

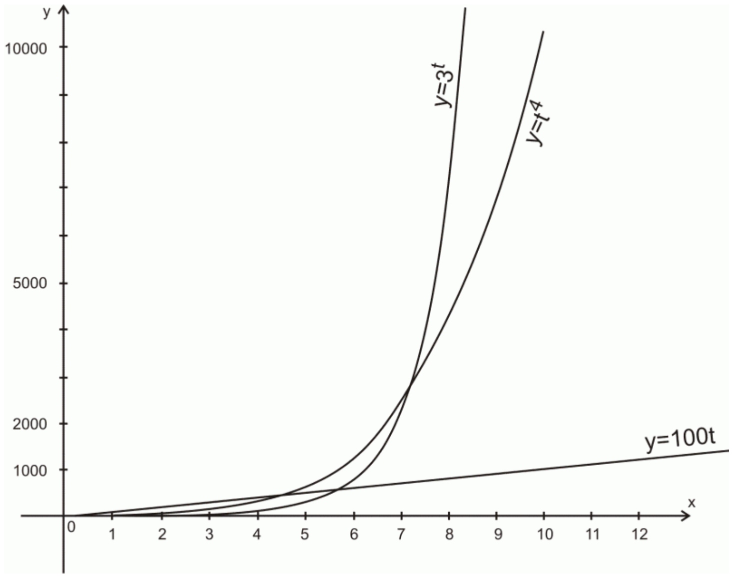
$h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

Dla małych wartości czasu wzrost wykładniczy może być nawet wolniejszy niż wzrost liniowy, ale począwszy od pewnego momentu (różnego dla różnych zjawisk), tempo wzrostu krzywej z modelu wykładniczego jest już znacznie większe niż w przypadku modeli opisywanych przez funkcje $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

UWAGA!!!

Funkcja rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, której wykres jest w tym przedziale „podobny” do wykresu funkcji wykładniczej, jest funkcją **rosnącą coraz szybciej** czyli tempo wzrostu funkcji jest szybkie.

6 www.megamatma.pl, 17.03.2013.



Rysunek 1-13. Wzrost wykładniczy

Z przedstawionego wykresu odczytujemy, że dla $t>8$ wartości funkcji $f(t)=3^t$ zaczynają przewyższać wartości funkcji $g(t)=100t$ *i* $h(t)=t^4$, i im większy jest czas, tym różnice pomiędzy wartościami tych funkcji są większe.

Dla $a\in(0;\ 1)$ mamy do czynienia ze spadkiem wykładniczym, czyli funkcja $f(t)=b\cdot a^t$, maleje coraz wolniej.

Dokonując pomiaru wartości wielkości opisanej ustalonym modelem wykładniczym, stwierdza się, że w stałych odstępach czasu zwiększają się one lub zmniejszają o ten sam procent.

Wiele zjawisk w przyrodzie odbywa się (przynajmniej w pewnej fazie ich trwania) według modelu wykładniczego. Są to między innymi: promieniotwórczość naturalna, wzrost lub spadek liczby populacji, stygnięcie ciał itd. Omówimy je w kolejnych przykładach i zadaniach.

Funkcję $f(t) = ba^t$ można przedstawić na wiele sposobów, tzn. można stosować do jej opisu różne podstawy a funkcji wykładniczej.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich i różnych od jedynki liczb a i c istnieje taka liczba $k \neq 0$, że funkcje $f(t) = ba^t$ i $g(t) = bc^{kt}$ są równe, tzn. $ba^t = bc^{kt}$, dla dowolnego $t > 0$.

Uzasadnienie tego twierdzenia jest bardzo proste.

Należy znaleźć liczbę k, która dla każdej wartości $t \geq 0$, spełnia warunek $a^t = c^{kt}$.

Korzystając z własności potęg, otrzymujemy:

$a^t = (c^k)^t$ dla każdego $t \geq 0$.

Stąd $a = c^k$.

Korzystając z określenia logarytmu, obliczamy: $k = \log_c a$.

$k = log_c a.$

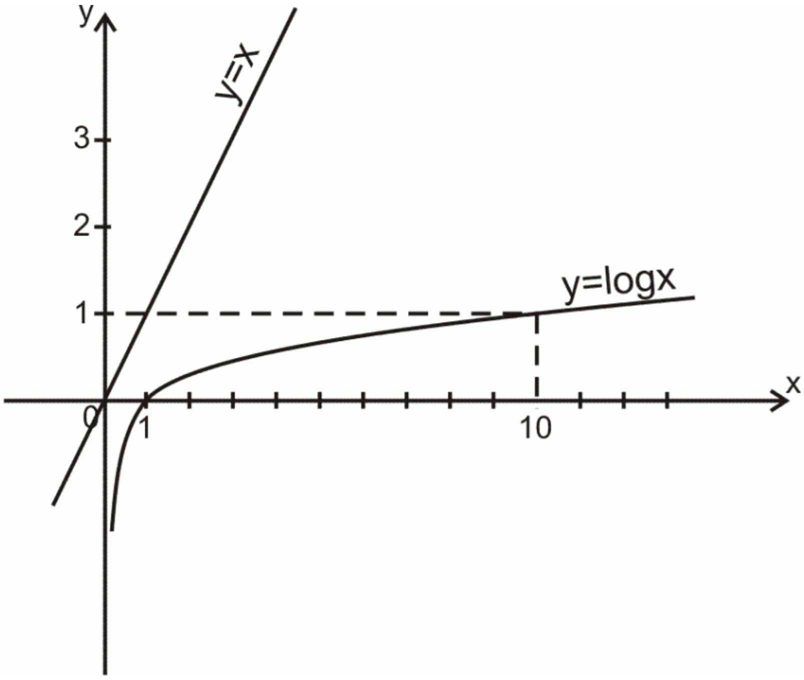
A więc istnieje liczba $k = \log_c a$, taka że funkcję $f(t)$ można zastąpić funkcją $g(t)$.

Zastosowanie funkcji logarytmicznych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w **kontekście praktycznym**[7]

Przykład 2

Skala logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x, a > 1, x > 0$, jest funkcją rosnącą. Jej wzrost jest jednak bardzo powolny, wolniejszy nawet od wzrostu liniowego.



Rysunek 1-14. Wykres funkcji $log x < x$ dla $x > 0$

Jeśli zakres wartości pewnej wielkości jest dodatni i bardzo szeroki, to wygodniej jest go podawać w skali.

Podanie konkretnej wartości w pewnej wielkości oddaje jej obraz tylko wtedy, gdy możemy ją porównać z innymi wartościami, a szczególnie z najmniejszą wartością ω_0.

Iloraz $\frac{\omega}{\omega_0}$ mówi nam, ile razy wartość ω jest większa od najmniejszej wartości ω_0 przyjmowanej przez daną wielkość. Iloraz ten jest liczbą bezwymiarową i dużą przy szerokim zakresie wartości.

Zlogarytmowanie ilorazu $\frac{\omega}{\omega_0}$ prowadzi do tzw. **skali logarytmicznej** danej wielkości. Do logarytmowania używa się na ogół logarytmu dziesiętnego lub naturalnego.

Skala logarytmiczna jest więc przedstawieniem wartości w pewnej wielkości, np. natężenia, w następującej postaci podanej z użyciem logarytmu: $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ lub $k\ ln\frac{\omega}{\omega_0}$, gdzie: k – stała charakterystyczna dla zjawiska mierzonego przez wartości ω, ω_0– najmniejsza z wartości przyjmowanych przez ω.

7 www.megamatma.pl, 17.03.2013.

Mimo że $klog\frac{\omega}{\omega_0}$ i $k\ ln\frac{\omega}{\omega_0}$ są liczbami bezwymiarowymi, to często wprowadza się dla nich specjalne jednostki, właściwe dla danej dziedziny.

Przykładami skal logarytmicznych są: **skala decybelowa w akustyce, skala Richtera określająca wielkości wstrząsów sejsmicznych, skala pH czy skala wielkości gwiazdowych.**

Wprowadzenie skali logarytmicznej jest nie tylko pomysłem matematycznym na to, aby bardziej przejrzyście przedstawić pewne dane.

Stwierdzono doświadczalnie, że nasze zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

Prawo Webera-Frechnera mówi, że wartość reakcji na bodźce takich zmysłów, jak wzrok, słuch czy poczucie temperatury jest proporcjonalna do logarytmu tego bodźca.

Przykład 3

Poziom głośności dźwięku

Źródła dźwięku wysyłają dźwięki o różnym natężeniu. Dźwięki rozchodzą się w postaci fal dźwiękowych. Jeśli kilka źródeł dźwięku wysyła jednocześnie dźwięki, to ich natężenia sumują się.

Natężenie dźwięku I jest ilością energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu i przechodzącej przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej. Jednostką natężenia dźwięku jest $\frac{W}{m^2}$ (wat na metr kwadratowy). Natężenie dźwięku odpowiadające tzw. progowi słyszalności, jest równe $I_0 = 10 - 12\frac{W}{m^2}$. Natężenia innych słyszalnych dźwięków są większe od I_0. Natężenie **szeptu** jest około 100 razy większe niż I_0, zaś natężenie dźwięku towarzyszące **wybuchowi petardy** to już wielkość rzędu $10^4\frac{W}{m^2}$, czyli jest ono 10^{16} razy większe niż I_0.

Przy tak szerokim zakresie wartości natężenia dźwięku wprowadzenie skali logarytmicznej jest bardzo uzasadnione. W skali tej logarytmujemy iloraz $\frac{I}{I_0}$. Wielkość obliczoną za pomocą logarytmu dziesiętnego z ilorazu $\frac{I}{I_0}$ nazywa się **poziomem natężenia dźwięku** lub **poziomem głośności dźwięku.** Oznacza się ją literą L.

I tak przyjęto:

Wzór

Poziom głośności dźwięku:

$L = 10log\frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ – poziom słyszalności, I – natężenie dźwięku.

Jednostkami poziomu głośności są **bel i decybel**, oznaczane symbolami **B** i **dB.**

Dźwięk ma poziom głośności równy 1B, jeśli jego natężenie jest równe $10I_0$.

Natomiast $1\ dB = 0{,}1\ B$.

Decybele są powszechniej używanymi jednostkami poziomu natężenia dźwięku.

ZADANIA

1.5.1. Aktywność źródła promieniotwórczego określa liczbę atomów, która uległa rozpadowi w jednostce czasu $\mathbf{A} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$. Jednostką aktywności jest bekerel $(\mathbf{1\ Bq} = \frac{1}{s})$. W zamieszczonej poniżej tabeli zamieszczono wyniki pomiarów aktywności próbki pewnego pierwiastka promieniotwórczego.

t (h)	0	480	960	1200	1950
A (10^3Bq)	5	1,5	0,5	0,25	0,05

Przedstaw na wykresie zależność aktywności próbki tego pierwiastka od czasu.

1.5.1. Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu wapnia wynosi 6 miesięcy. W chwili początkowej próbka zawierała 40 mg wapnia. Oblicz, ile wapnia próbka zawierała:

a) dwa lata wcześniej,

b) po trzech latach.

Odpowiedź:

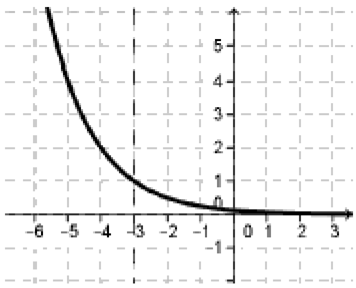
a) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{2}{0,5}} = 40\text{ mg} \cdot 2^4 = 640\text{ mg}$

b) $m = m_0 \cdot 2^{\frac{-3}{0,5}} = 40\text{ mg} \cdot 2^{-6} = 0{,}625\text{ mg}$

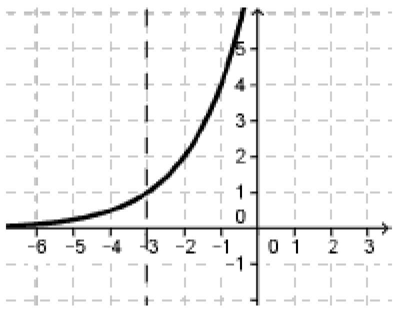
CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[8] Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-3}$ przedstawiony jest na rysunku:

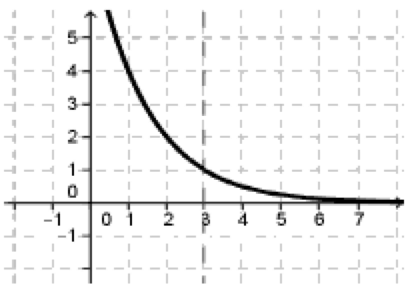
A.



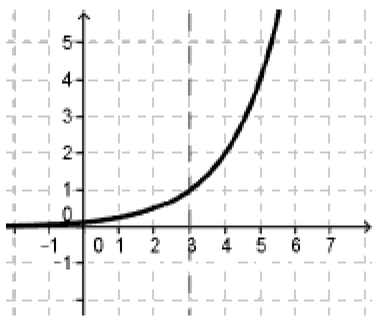
C.



B.



D.



2.[9] Zbiorem wartości funkcji f, określonej wzorem $f(x) = 3^{x+2} - 3$, jest zbiór:

a) $(-2, \infty)$

b) $(-3, -2)$

c) $(3, \infty)$

d) $(-3, \infty)$

3. Wartością funkcji $f(x) = 2^x$ jest liczba:

a) -8

b) -4

c) 0

d) 3

8 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 11.03.2013.

9 Zadania 2-9: zaczerpnięte http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze

4. Zbiorem wartości funkcji $(x) = 2^x + 3$ jest przedział:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $\langle 0, +\infty)$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-3, +\infty)$

5. Funkcją malejącą jest funkcja:

a) $f(x) = (0{,}5)^{x-1}$ b) $f(x) = (0{,}5)^{-x}$ c) $f(x) = -(0{,}5)^x$ d) $f(x) = (0{,}5)^{2-x}$

6. Funkcja $f(x) = 9^x$ dla argumentu $x = -\frac{3}{2}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{3^3}$ b) 27 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$ d) $\frac{1}{81}$

7. Funkcja $(x) = 8^x$ dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $0{,}25$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ d) 4

8. Dla jakiego argumentu $y = 2^x$ przyjmuje wartość 64?

a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 4$

Zadania zamknięte, wydawnictwo Nowa Era[10]

9. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = x$ przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, wynosi:

a) $2\sqrt{2a}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{8a}$ d) $a\sqrt{2}$

10. Punkt $P =$ (-3, 1/8) należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{-x}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

11. Wskaż funkcję rosnącą:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

12. Punkt $P = \left(\log_2 \frac{1}{4};\ \log_{\frac{1}{3}} 81\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 2x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = -2x$

ZADANIA OTWARTE

1. (**5 pkt**) Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - a) + b$. Wyznacz wartości parametrów a i b, jeśli wiesz, że dziedziną funkcji jest przedział $(5, +\infty)$ i do wykresu należy punkt $A = \left(5\frac{1}{8}, 9\right)$. Podaj wzór tej funkcji.

---

10 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf, 11.03.2013.

2 Stereometria

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- Obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- Zamieniać jednostki objętości.

Zamiana jednostek objętości:

$1cm^3 \rightarrow 1\,000\,mm^3$

$1dm^3(1\,litr) \rightarrow 1000\,cm^3$

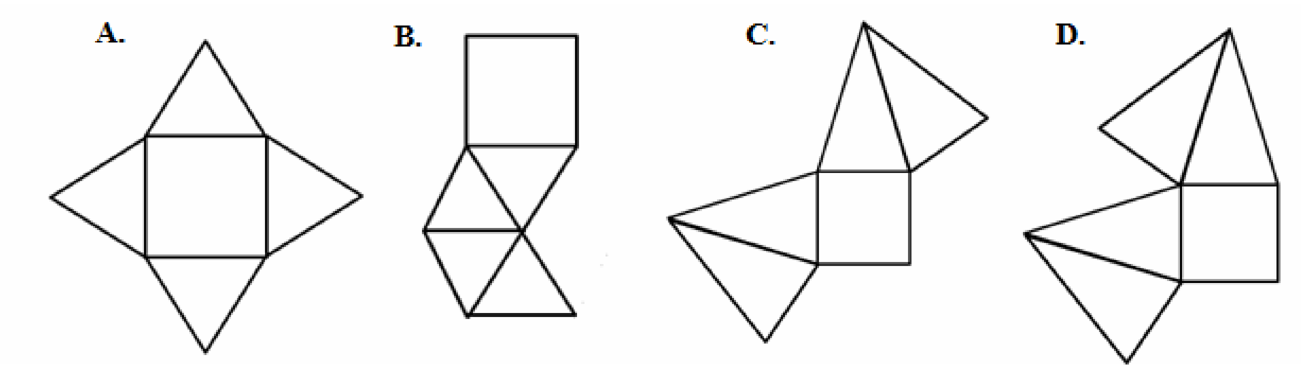
$1cm^3 \rightarrow 1000\,mm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,mm^3$

$1m^3 \rightarrow 1\,000\,dm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,cm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,000\,mm^3$

$1\,hektolitr \rightarrow 100\,litr\acute{o}w \rightarrow 100dm^3$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1. Który rysunek nie przedstawia siatki ostrosłupa czworokątnego?



Zad.2. Podstawą graniastosłupa prawidłowego nie może być:

a) kwadrat b) sześciokąt foremny

c) prostokąt d) trójkąt równoboczny

Zad.3. Bok sześcianu ma długość 6 cm, więc długość jego przekątnej wynosi:

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

Zad.4. Tworząca stożka ma długość 13 cm, a jego wysokość 5 cm. Z tego wynika, że promień podstawy ma długość:

a) $12\ cm$ b) $10\ cm$ c) $6\ cm$ d) $13\ cm$

Zad.5. Jeśli średnica kuli ma 8 cm, to pole powierzchni całkowitej tej kuli wynosi:

a) $16\ \pi$ b) $64\ \pi$ c) 32π d) $256\ \pi$

Zad.6. Przekrojem poprzecznym walca jest:

a) prostokąt b) kwadrat c) kula d) koło

Zad.7. Objętość kuli wynosi $36\pi\ cm^3$, jej promień ma długość:

a) $9\ cm$ b) $3\ cm$ c) $6\ cm$ d) $27\ cm$

Zad.8. Wiedząc, że wysokość walca wynosi $10\ cm$, a promień jego podstawy $0{,}4\ dm$, to pole jego podstawy jest równe:

a) $16\pi\ cm^2$ b) $1{,}6\pi\ dm^2$ c) $16\pi\ dm^2$ d) $0{,}16\pi\ cm^2$

Zad.9. Pole powierzchni sześcianu jest równe $294\ cm^2$. Krawędź tego sześcianu wynosi:

a) 7 b) 4 c) 8 d) 6

Zad.10. Które zdanie jest fałszywe:

a) $5\ cm^2 = 500\ mm^2$ b) $1\ ha = 10000\ m^3$

c) $3000\ mm^2 = 30\ cm^2$ d) $1\ a = 100\ m^2$

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	C	A	B	D	B	D	A	B

ZADANIA OTWARTE

1. Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 108 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli krawędź boczna ma długość 16 cm.

2. Ile litrów wody zmieści się w akwarium o wymiarach $3{,}5\ dm \times 0{,}6\ m \times 55\ cm$? Odpowiedź wyraź w postaci liczby naturalnej.

3. Oblicz wysokość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach 4 i 5, a pole powierzchni całkowitej wynosi 166.

4. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}\ cm$.

5. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jej pole powierzchni jest równe$1440\pi\ cm^2$.

Odpowiedź:

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	a – krawędź podstawy b – krawędź boczna $3a + 3b = 108$ $3a + 3 \cdot 16 = 108$ $3a = 60$ $a = 20$ **Odpowiedź:** Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 20.
2	$a = 3{,}5\ dm$ $b = 0{,}6\ m = 6\ dm$ $c = 55\ cm = 5{,}5\ dm$ $V = a \cdot b \cdot c = 3{,}5\ dm \cdot 6\ dm \cdot 5{,}5\ dm = 115{,}5\ dm^3 = 115{,}5\ l$ **Odpowiedź:** W akwarium zmieści się $115\ l$ wody.
3	a, b – krawędzie podstawy prostopadłościanu x – wysokość prostopadłościanu $a = 4, b = 5\ , P_c = 166$ $2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x = 166$ $18x = 126 \quad \Rightarrow x = 7$ **Odpowiedź:** Wysokość prostopadłościanu wynosi 7.
4	$d = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow a = 5$ $V = a^3 = 5^3 = 125$ $P_c = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ **Odpowiedź:** Objętość sześcianu wynosi $125\ cm^3$, a jego pole powierzchni całkowitej $150\ cm^2$.
5	R – promień kuli $P_c = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 1440\pi\ /: 4\pi$ $r^2 = 360$ $r = 6\sqrt{10}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(6\sqrt{10}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \cdot 10\sqrt{10} = 2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$ **Odpowiedź:** Objętość kuli wynosi $2880\sqrt{10}\pi\ cm^3$.

2.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni

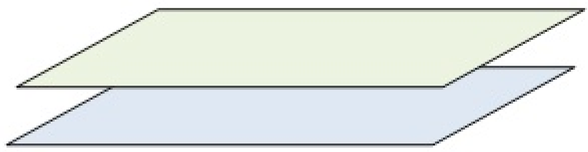
Teraz nauczę się:

- Określać wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni;
- Określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

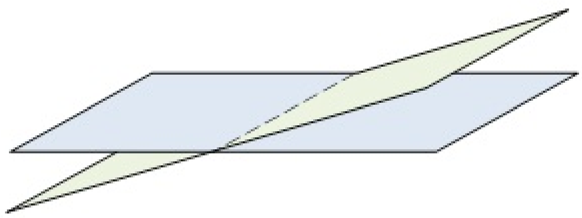
Możliwe są następujące przypadki wzajemnego położenia dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeniach.

Płaszczyzny równoległe



Rysunek 2-1. Płaszczyzny równoległe

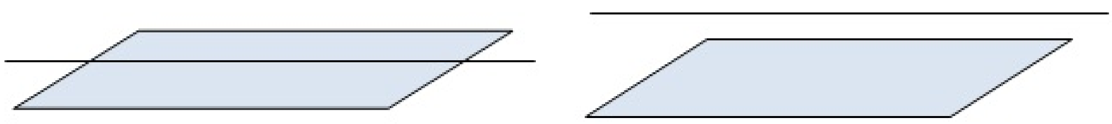
Płaszczyzny przecinające się



Rysunek 2-2. Płaszczyzny przecinające się

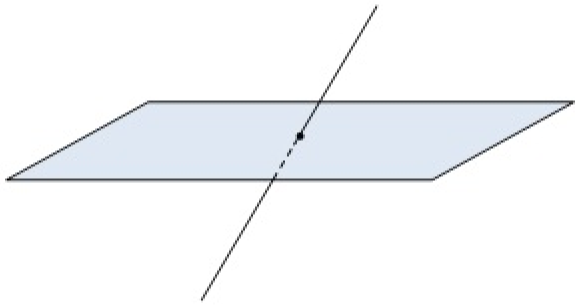
Prosta i płaszczyzna mogą znajdować się względem siebie w następującym położeniu:

Prosta równoległa do płaszczyzny



Rysunek 2-3. Prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta przecina płaszczyznę

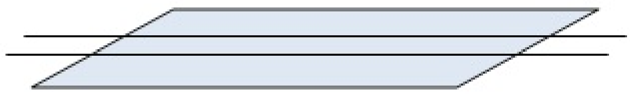


Rysunek 2-4. Prosta przecinająca płaszczyznę

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

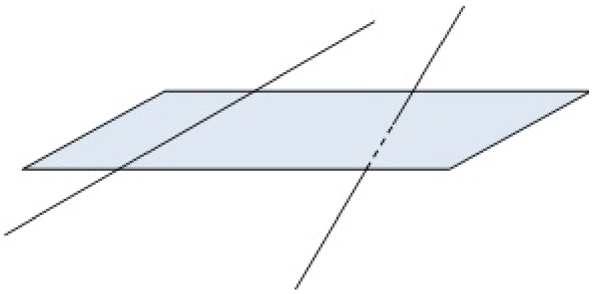
Dwie proste w przestrzeni mogą być:

- Równoległe



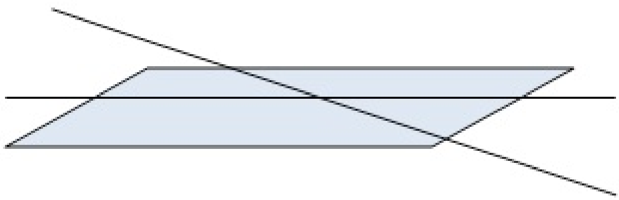
Leżą na płaszczyźnie
i nie mają punktów wspólnych

- Skośne



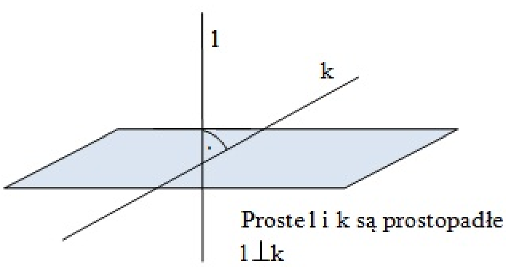
Leżą na różnych płaszczyznach i nie mają punktów wspólnych

- Przecinające się

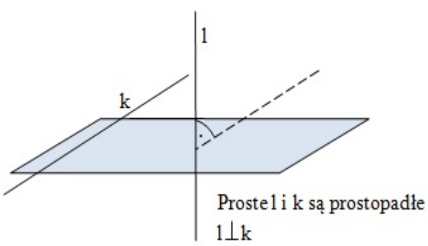


Leżą na jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny

- Prostopadłe



Proste prostopadłe przecinające się

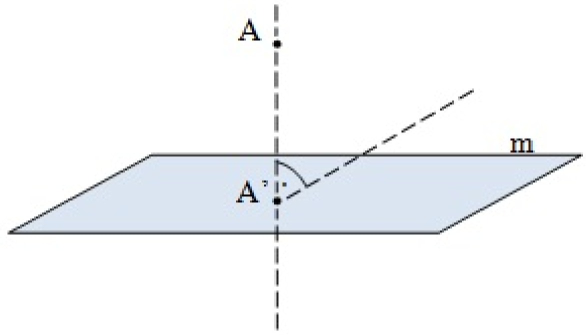


Proste prostopadłe skośne

Rysunek 2-5. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Rzut prostokątny na płaszczyznę

Rzut prostokątny danego punktu na płaszczyznę jest punktem, jaki powstanie, gdy przez dany punkt i płaszczyznę poprowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny.



Punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę m.

Rysunek 2-6. Rzut prostokątny na płaszczyznę

ZADANIA

2.1.1 Wskaż w swoim otoczeniu:

a) proste przecinające się

b) proste równoległe

c) proste skośne

2.1.2 Wskaż w klasie:

a) płaszczyznę i prostą przecinającą tę płaszczyznę

b) płaszczyzny równoległe

c) płaszczyzny przecinające się

d) płaszczyznę i prostą do niej równoległą

2.1.3 Przez dany punkt poprowadź płaszczyznę prostopadłą do danej prostej. Rozpatrz dwa przypadki.

Odpowiedź:

1. Dany punkt C leży na prostej AB. Przez daną prostą przesuńmy dwie dowolne płaszczyzny i z punktu C wystawmy dwie prostopadłe do AB: CD i CE położone na tych płaszczyznach. Wtedy płaszczyzna, wyznaczona przed CD i CE, będzie płaszczyzną szukaną.
2. Dany punkt D leży poza prostą AB. Prosta AB i punkt D, poza nią położony, wyznaczają płaszczyznę P. Poprowadźmy na niej $DC \perp AB$. Następnie przez prostą AB przesuńmy

dowolną płaszczyznę Q i poprowadźmy na niej $CE \perp AB$, wtedy szukaną płaszczyzną jest płaszczyzna R wyznaczona przez CD i CE.

2.1.4 Wykreślić odcinek prostopadły do dwóch prostych skośnych.

Odpowiedź:

Dane są dwie proste skośne AB i CD. Przez dowolny punkt K prostej CD poprowadźmy $A'B' \parallel AB$ i przez dwie przecinające się proste CD i $A'B'$ przesuńmy płaszczyznę P.

Jeżeli teraz z dowolnego punktu E prostej AB poprowadzimy $EF \perp P$, a przez punkt F na tej płaszczyźnie równoległą do $A'B'$, która przetnie CD w punkcie G, to odcinek GH równoległy do EF będzie żądanym odcinkiem.

Istotnie, odcinek HG, jako prostopadły do płaszczyzny P, jest prostopadły do prostej CD położonej na tej płaszczyźnie. Z drugiej strony odcinek $GH = FE$ jest prostopadły również do AB, a więc jest prostopadły do obu danych prostych.

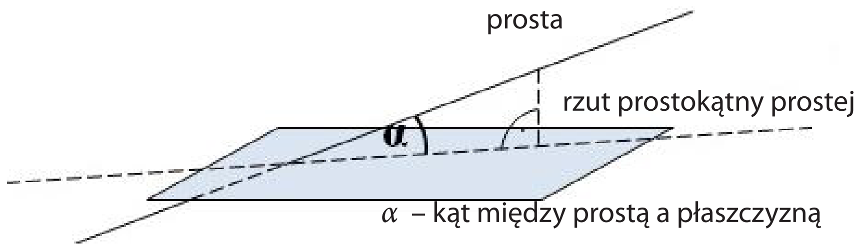
2.2 Kąty między płaszczyznami i w figurach przestrzennych

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać kąty między płaszczyznami;
- Rozpoznawać kąty między ścianami i krawędziami w graniastosłupach i ostrosłupach.

Kąt między prostą a płaszczyzną

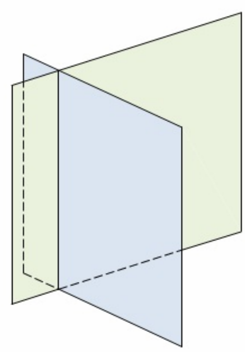
Kąt między prostą a płaszczyzną znajduje się między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



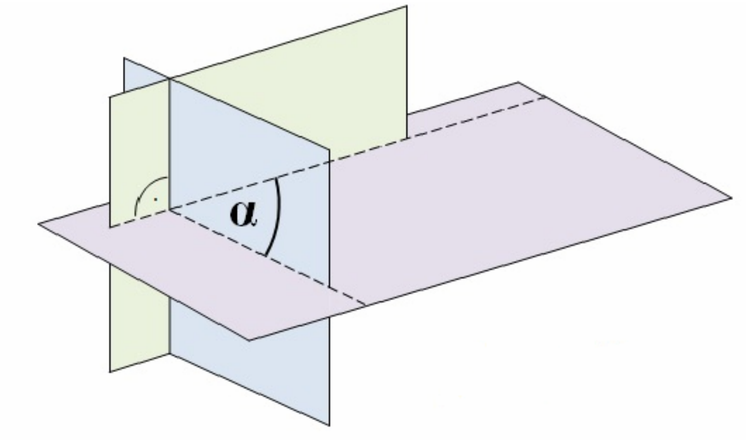
Rysunek 2-7 Kąt między płaszczyzną a prostą

Kąt dwuścienny

To kąt zawierający się pomiędzy dwoma przecinającymi się płaszczyznami:



Kąt dwuścienny wyznaczamy, przecinając obie płaszczyzny trzecią, która jest do nich prostopadła.



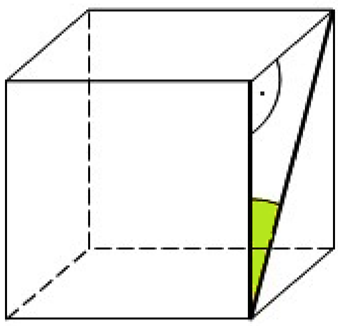
Rysunek 2-8. Kąt dwuścienny

Kąty w bryłach

Często w zadaniach związanych z bryłami pojawiają się wartości kątów między określonymi odcinkami lub ścianami. O prawidłowym rozwiązaniu decyduje wtedy, czy dobrze umiejscowiliśmy dany kąt, a niestety w tym miejscu często pojawiają się błędy. Warto więc wiedzieć, gdzie znajdują się dane kąty.

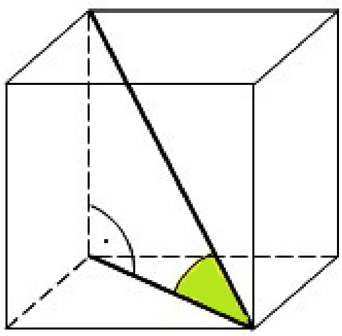
Graniastosłupy

- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną (wysokością)



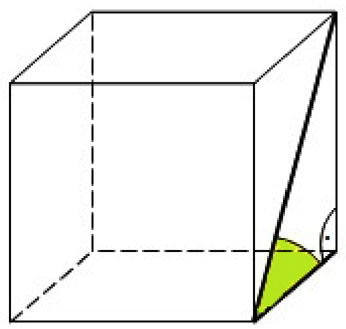
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy czworokąt)



Wysokość graniastosłupa wraz z przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa tworzą trójkąt prostokątny.

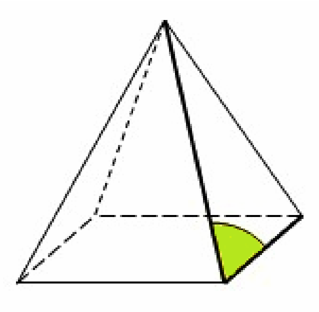
- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy



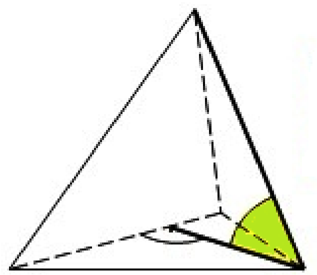
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

Ostrosłupy

- kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

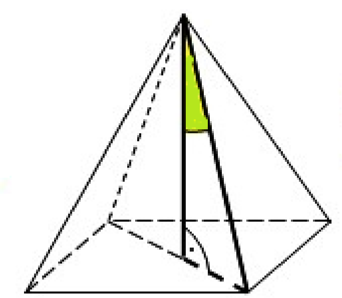


- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie mamy trójkąt równoboczny)



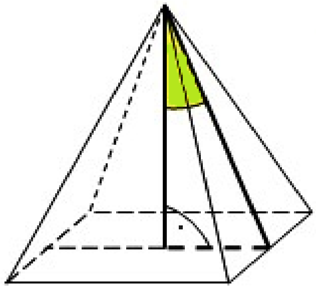
Kąt znajduje się między krawędzią boczną ostrosłupa a wysokością podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



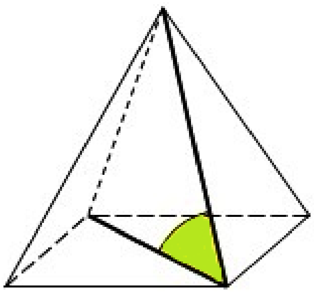
Krawędź boczna i wysokość ostrosłupa wraz z połową przekątnej podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



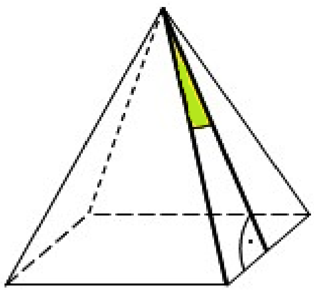
Wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej wraz z połową odcinka, którego długość stanowi połowę długości podstawy, tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



Kąt znajduje się między krawędzią boczną a przekątną podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością ściany bocznej



Krawędź boczna i wysokość ściany bocznej wraz z połową krawędzi podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

ZADANIA

2.2.1 Narysuj sześcian i zaznacz w nim kąt nachylenia:

a) przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

2.2.2 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{3}\ cm$, a wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{3}\ cm$. Oblicz miarę kąta nachylenieaściany bocznej do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

2.2.3 Wskaż w klasie kąty dwuścienne. Podaj miary tych katów.

2.2.4 Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2.5 Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 6, a długość krawędzi bocznej jest równa $2\sqrt{15}$15. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej piramidy do podstawy.

Odpowiedź: $\alpha = 60°$.

2.2.6 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

2.2.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym zaznacz kąt liniowy kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi.

Odpowiedź: Ostrosłup oznacz literami $ABCS$. Z wierzchołka A i B zaznacz proste prostopadłe do krawędzi bocznej CS przecinające się w punkcie D. Kąt ADB jest kątem liniowym kąta dwuściennego.

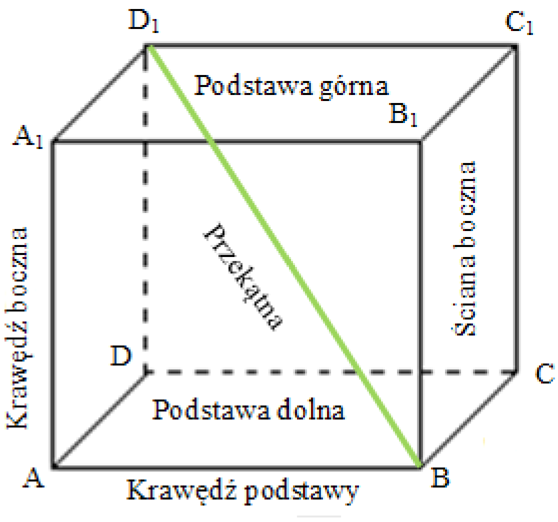
2.3 Graniastosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów;
- Rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Przypomnijmy najpierw najważniejsze pojęcia dotyczące graniastosłupów.

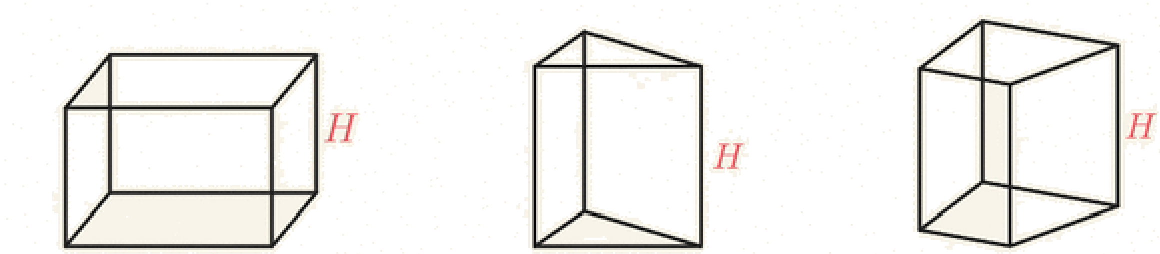
Graniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach, zwanych podstawami graniastosłupa, i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi podstawami są do siebie równoległe.



Rysunek 2-9. Graniastosłup prawidłowy

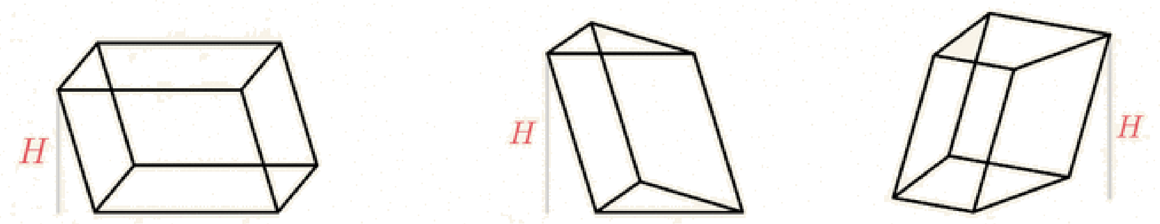
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Przykłady graniastosłupów prostych



Rysunek 2-10. Graniastosłupy proste

Przykłady graniastosłupów pochyłych



Rysunek 2-11. Graniastosłupy pochyłe

Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego dwóch podstaw i polu powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

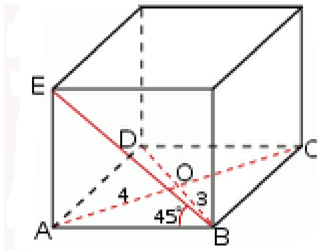
Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości.

$$V = P_p \cdot H$$

Przykład 1

Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych długości $6\ cm$ i $8\ cm$, którego przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze $45°$.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:



Z tego wynika, że $|AE| = |AB| = 5cm$.

Możemy już obliczyć objętość graniastosłupa.

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ cm^2$

$V = P_p \cdot H = 24\ cm^2 \cdot 5\ cm = 120\ cm^3$

Policzymy jeszcze pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

$P_b = 4 \cdot |AB| \cdot |AE| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100\ cm^2$

$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 24\ cm^2 + 100\ cm^2 = 148\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $120\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $148\ cm^2$.

ZADANIA

2.3.1 W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem o polu $P = 400\ cm^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Odpowiedź: $V = 500\ cm^3, P_c = 450\ cm^2$.

2.3.2 Oblicz objętość prostopadłościanu, jeżeli kąt między jego przekątną o długość $10\ cm$ a podstawą ma miarę $60°$, a jedna z krawędzi podstawy ma długość $4\ cm$.

Odpowiedź: $V = 60\sqrt{3}\ cm^3$.

2.3.3 Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $a = 4\ cm$. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Odpowiedź: $16\sqrt{3}\ cm^2$.

2.3.4 Kąt zawarty między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą ma miarę $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli jej wysokość ma długość $10\ cm$, a szerokość podstawy wynosi $6\ cm$.

Odpowiedź: $P_c = 376\ cm^2$.

2.3.5 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$.

2.3.6 Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Wyznacz sinus kąta nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Odpowiedź: $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.3.7 Oblicz skalę podobieństwa dwóch graniastosłupów prawidłowych czworokątnych. Pierwszy z nich ma wysokość $2\ cm$ i objętość $18\ cm^3$ oraz jest podobny do graniastosłupa, którego krawędź podstawy ma długość $1\ cm$.

Odpowiedź: $k = 3$.

2.3.8 Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $8\ cm$ i kącie między ramionami miary $120°$. Przekątna mniejszej ściany bocznej graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Wyznacz objętość graniastosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{128\sqrt{3}}{9}$.

2.3.9 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego $ABCA_1B_1C_1$, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $|AC| = 6\ cm, |BC| = 8\ cm$, a przekątna AB_1 ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α o mierze $60°$.

Odpowiedź: $P_c = 48\left(5\sqrt{3} + 1\right)\ cm^2, V = 240\sqrt{3}\ cm^3$.

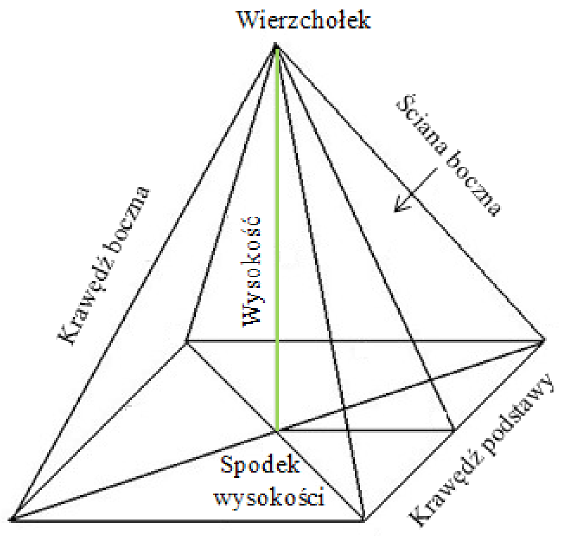
2.4 Ostrosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości ostrosłupów;
- Rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami a płaszczyznami (między krawędziamiai ścianami, przekątnymi a ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Ostrosłup – wielościan, którego wszystkie ściany prócz podstawy są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

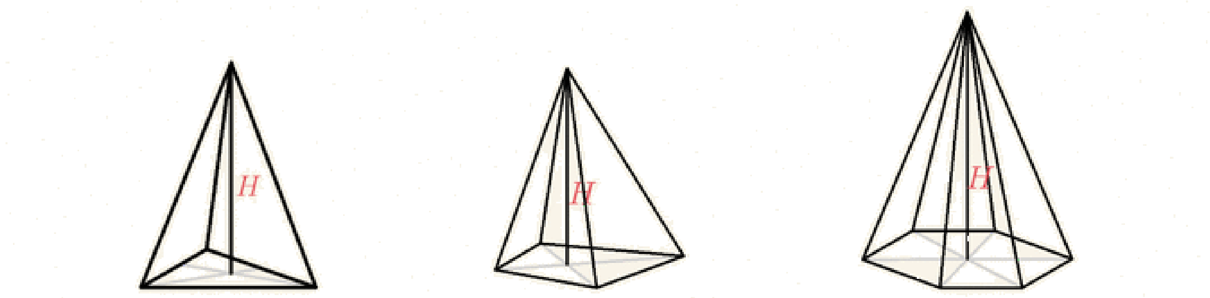
Wysokość ostrosłupa jest to odległość od wierzchołka do płaszczyzny podstawy. Punkt będący rzutem wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywa się spodkiem wysokości.



Rysunek 2-12. Ostrosłup

Ostrosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a jego wysokość pada na środek podstawy. Ściany ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi.

Przykłady ostrosłupów



Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynowi pola podstawy i wysokości.

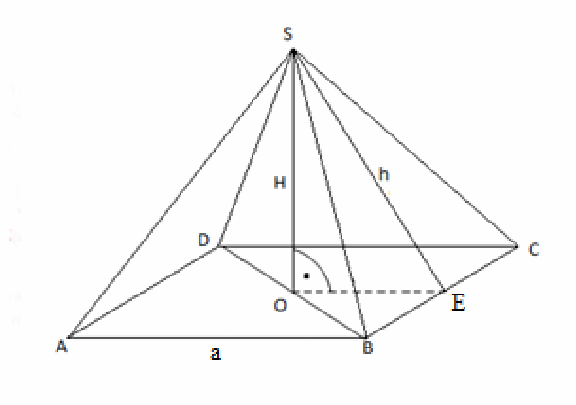
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Przykład 1

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy $a = 6\ cm$, a wysokość ściany bocznej $h = 5\ cm$. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:

Obliczamy wysokość H ostrosłupa, korzystając z trójkąta prostokątnego OES.



$|OE| = \frac{1}{2}a = 3\ cm$

$H^2 = h^2 - |OE|^2$

$H^2 = 5^2 - 3^2 = 16\ \Rightarrow H = 4\ cm$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}6^2 \cdot 4 = 48\ cm^3$

$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 96\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa wynosi $48\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $96\ cm^2$.

ZADANIA

2.4.1 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli jego wysokość ma długość $6\ cm$, a kąt między wysokością a krawędzią boczną ma miarę $30°$.

Odpowiedź: $V = 48\ cm^3$.

2.4.2 Kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę $60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość $12\ cm$.

Odpowiedź: $P_b = 96\sqrt{3}\ cm^2$.

2.4.3 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS_o$ o podstawie $ABCD$. Pole trójkąta ASC jest równe 120, a cosinus kąta ASB jest równy $\frac{144}{169}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 20\sqrt{313}\ cm^2$.

2.4.4 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.4.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy $18\ cm$, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α.

Odpowiedź: $P_b = 648\ cm^2$.

2.4.6 Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = 3$. Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $6\sqrt{3}$. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = 729$.

2.4.7 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi bocznej dwa razy dłuższej od krawędzi podstawy.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

b) Wyznacz długość krawędzi ostrosłupa tak, aby pole jego powierzchni bocznej wynosiło $36\sqrt{15}$.

Odpowiedź: a) $cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; b) Krawędzie muszą mieć długość 6 i 12 jednostek.

2.4.8 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości $48\ cm^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = \frac{4}{3}$. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $P_b = 60\ cm^2$.

2.5 Wielościany foremne

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów foremnych.

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez ściany są równe.

Przykład 1

Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi a.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej czworościanu:

$$P_c = 4 \cdot P_{\Delta\, równobocznego}$$

$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Więc $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Obliczamy objętość czworościanu:

ΔOSD jest trójkątem prostokątnym, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = h^2 - r^2$$

ale $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

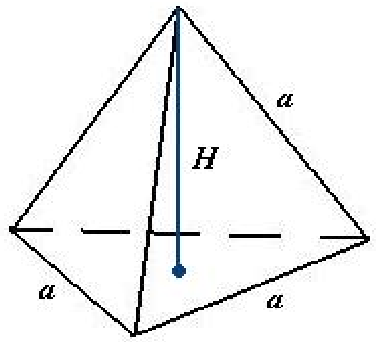
$$H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36} \Rightarrow H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36}$$

Więc $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{a^3\sqrt{2}}}{\boldsymbol{12}}$

Istnieją następujące wielościany foremne:

Czworościan (tetraedr)



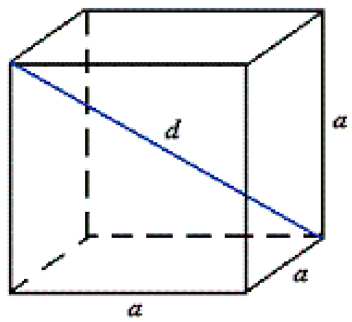
Rysunek 2-13. Czworościan

4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy czworościanem foremnym.

$\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Sześcian (heksaedr)

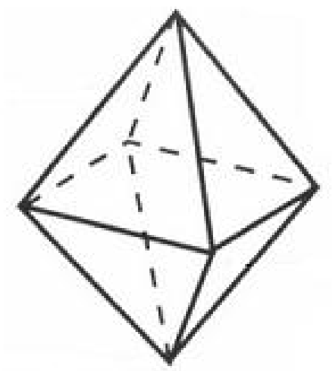


Rysunek 2-14. Sześcian

6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = a^3}$ $\boldsymbol{P_c = 6a^2}$

Ośmiościan (oktaedr)

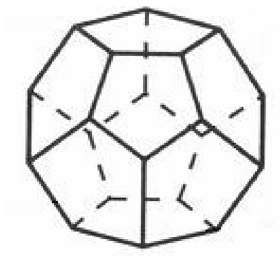


Rysunek 2-15. Ośmiościan

8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków, 12 krawędzi

$\boldsymbol{V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2}$ $\boldsymbol{P_c = 2\sqrt{3}a^2}$

Dwunastościan (dodekaedr)

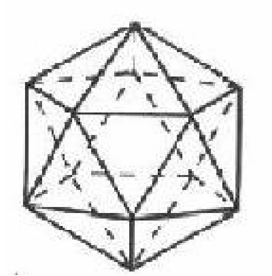


12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków, 30 krawędzi

$$V = \frac{(15+7\sqrt{5})}{4}a^3 \qquad P_c = 15(\sqrt{5}+2)a^2$$

Rysunek 2-16. Dwunastościan

Dwudziestościan (ikosaedr)



20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków, 30 krawędzi

$$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3 \qquad P_c = 5\sqrt{3}a^2$$

Rysunek 2-17. Dwudziestościan

Ciekawostka

Wielościany foremne znali już Pitagorejczycy w VI w. p.n.e. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę, a od czasów Platona uważano piąty wielościan foremny, dwunastościan, za postać wszechświata. Wielościany te noszą nazwę **brył platońskich.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Dlaczego wielościanów foremnych nie może być więcej niż pięć?

ZADANIA

2.5.1 Mając daną długość krawędzi a, wyprowadź wzór na:

a) przekątną sześcianu,

b) wysokość czworościanu foremnego.

Odpowiedź: a) $D = a\sqrt{3}$, b) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

2.5.2 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

Odpowiedź: $V = 216\ cm^3$

2.5.3 Pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni całkowitej czworościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych brył.

Odpowiedź: $2\sqrt{6}$.

2.5.4 Pole powierzchni dwudziestościanu foremnego jest równe $245\sqrt{3}\ cm^2$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego wielościanu.

Odpowiedź: $210\ cm$.

2.5.5 Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano bryłę o sześciu ścianach. Naszkicuj otrzymaną bryłę. Czy jest to wielościan foremny?

Odpowiedź: Nie.

2.5.6 Ściany wielościanu malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:

a) czworościanu foremnego,

b) sześcianu,

c) ośmiościanu foremnego?

Odpowiedź: a) 4, b) 3, c) 2.

2.6 Walec – jego pole powierzchni i objętość

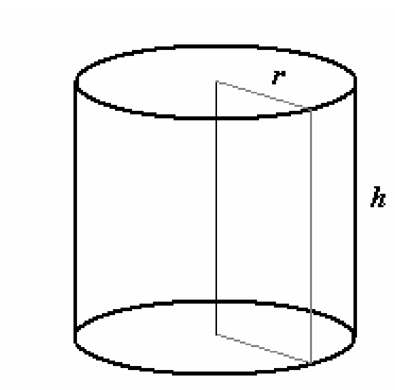
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości walców;
- Rozpoznawać w walcach kąty między przekątną przekroju osiowego a płaszczyzną podstawy;

- Obliczać miary kątów.

Walec– to bryła otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.

Prostą tę nazywamy **osią walca**. Podstawami walca są koła o takim samym promieniu.



Rysunek 2-18. Walec

Powierzchnią boczną walca nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu.

Tworzącą walca nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.

Przekrojem osiowym walca nazywamy część wspólną walca i płaszczyzny zawierającej oś walca.

Objętość walca wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej walca:

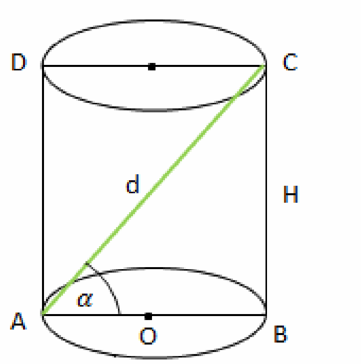
$$\boldsymbol{P_b = 2\pi r H}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 2\pi r(r + H)}$$

Przykład 1

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



ΔABC jest prostokątny, więc $sin\alpha = \frac{H}{d}$

$$H = d \cdot sin\alpha = 10 \cdot sin60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{2r}{d}$$

$$2r = d \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ cm$$

$$r = 2{,}5\ cm$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 5\sqrt{3} = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$V = 31{,}25\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 2{,}5\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 5\pi\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 12{,}5\pi + 25\sqrt{3}\pi$$

$P_c = 12{,}5\pi\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ cm^2$

ZADANIA

2.6.1 Oblicz objętość walca, jeśli jego przekrój osiowy jest kwadratem o obwodzie równym 24 cm.

Odpowiedź: $V = 54\pi$.

2.6.2 Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% większy od promienia podstawy drugiego walca. Oblicz stosunek objętości tych walców.

Odpowiedź: $9:4$.

2.6.3 Długość promienia walca zmniejszono dziesięciokrotnie. Ile razy trzeba zwiększyć wysokość tego walca, aby objętość się nie zmieniła?

Odpowiedź: 100–krotnie.

2.6.4 Ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości $1\ km$ i średnicy wewnętrznej równej $50\ cm$?

Odpowiedź: $62{,}5\pi\ m^3$.

2.6.5 Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy $8\ cm$ i wysokości $10\ cm$ jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki, każda o krawędzi $2\ cm$. Czy woda z kubka się wyleje?

Odpowiedź: Nie.

2.6.6 Objętość walca jest równa $108\pi\ cm^3$, a jego wysokość to $12\ cm$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Odpowiedź: $P_c = 90\pi\ cm^2$.

2.6.7 Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego jeden bok ma długość 8 cm, a przekątna jest o 2 cm dłuższa od drugiego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca wiedząc, że dłuższy bok prostokąta jest wysokością walca.

Odpowiedź: $V = 240\pi\ cm^3$, $P_c = 152\pi\ cm^2$.

2.6.8 Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{3}{5}$. Pole przekroju osiowego jest równe 27. Oblicz objętość tego walca.

Odpowiedź: $V = 40{,}5\pi$.

2.6.9 Do naczynia w kształcie walca wypełnionego wodą do wysokości 7 cm włożono metalową kulkę o promieniu 3 cm. Poziom wody podniósł się o 1 cm i zrównał się z górną podstawą walca. Oblicz objętość naczynia. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, wynik podaj z dokładnością do $1cm^3$.

Odpowiedź: $V = 904\ cm^3$.

2.6.10 Puszka na cukier ma kształt walca.

a) Ile kilogramów cukru zmieści się w puszce, której wymiary wynoszą $d = 14\ cm$ a $h = 20\ cm$? Gęstość cukru wynosi 1,6 kg/litrów. Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

b) Jakiej wysokości musiałaby być ta puszka, by mieścił się do niej dokładnie 1 kg cukru? Wynik zaokrąglij z nadmiarem do 1 cm.

Odpowiedź: a) $1{,}89\ kg$, b) $h = 11\ cm$.

2.7 Stożek – jego pole powierzchni i objętość

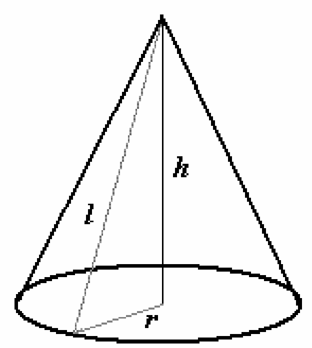
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości stożków;
- Rozpoznawać w stożkach kąty między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą);
- Obliczać miary kątów.

Stożek – to bryła otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta. Prostą tę nazywamy osią stożka.

Podstawą stożka nazywamy koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka.

Wysokością stożka (h) nazywamy przyprostokątną trójkąta zawartą w osi obrotu.



Rysunek 2-19. Stożek

Powierzchnią boczną stożka nazywamy powierzchnię wyznaczoną przez obrót przeciwprostokątnej trójkąta.

Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywam**y wierzchołkiem stożka.**

Tworzącą stożka (l) nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugi należy do podstawy stożka.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy część wspólną stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka.

Objętość stożka wyraża się wzorem:

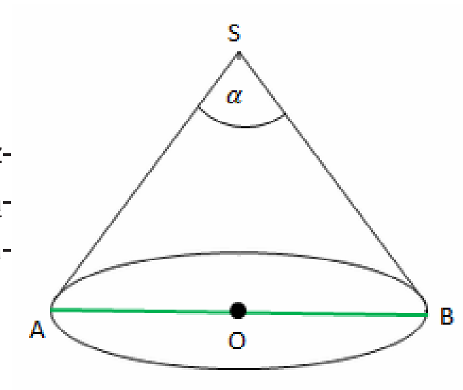
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni bocznej stożka:

$$\boldsymbol{P_b = \pi r l}$$

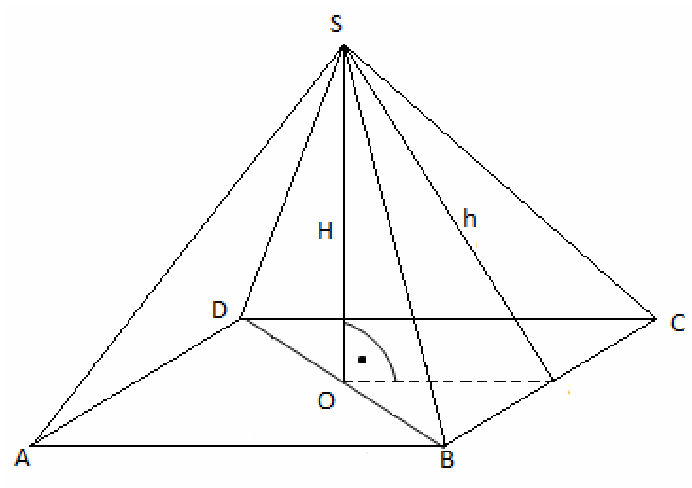
Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = \pi r(r + l)}$$



Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka** (kąt α na rysunku).

Przykład 1



Tworząca stożka ma długość $8\,cm$ i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ΔAOS jest prostokątny i $sin\alpha = \frac{H}{l}$

$$H = 8 \cdot sin60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{r}{l}$$

$$r = l \cdot cos\alpha = l \cdot cos60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ cm$$

Podstawiamy do wzoru i obliczamy objętość oraz pole powierzchni całkowitej:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\ cm^3$$

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 8) = 48\pi\ cm^2$$

ZADANIA

2.7.1 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka, jeśli:

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 180°$ c) $\alpha = 240°$ d) $\alpha = 270°$

Odpowiedź:

a) $4\pi\ cm^2$ b) $36\pi\ cm^2$ c) $64\pi\ cm^2$ d) $81\pi\ cm^2$

2.7.2 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu $15\ cm$. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku $6\ cm$. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α.

Odpowiedź: $\alpha = 72°$.

2.7.3 Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu $49\ cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $49\pi(1 + \sqrt{2})\ cm^2$.

2.7.4 Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π cm^2, a średnica jego podstawy ma długość $12\ cm$. Oblicz objętość tego stożka.

Odpowiedź: $96\pi\ cm^3$.

2.7.5 Pole powierzchni bocznej stożka jest cztery razy większe od pola podstawy. Obwód przekroju osiowego stożka jest równy 30. Oblicz objętość tego stożka

Odpowiedź: $V = 9\pi\sqrt{15}$.

2.7.6 Stożek ma wysokość $10\ cm$. Pole przekroju osiowego tego stożka jest równe $30\ cm^2$. Jaką długość ma tworząca tego stożka?

Odpowiedź: $\sqrt{190}\ cm$.

2.7.7 Kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$. Promień podstawy stożka ma długość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Odpowiedź: 32π.

2.7.8 Objętość stożka jest równa 4π, a pole jego podstawy jest równe 4π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $2\pi\left(2 + \sqrt{13}\right)$.

2.7.9 Do naczynia w kształcie odwróconego stożka wrzucono kulkę o promieniu $r = 3\ cm$. Oceń, czy kulka będzie wystawać nad brzeg naczynia. Uzasadnij odpowiedź, wykonując odpowiednie obliczenia, jeżeli wiadomo, że wysokość stożka wynosi $12\ cm$, a promień podstawy to $4\ cm$.

Odpowiedź: Kulka będzie wystawać ponad brzeg naczynia.

2.7.10 Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Odpowiedź: $V = 9\sqrt{3}\ cm^3$, $P_c = 27\pi\ cm^2$.

2.8 Kula – jej pole powierzchni i objętość

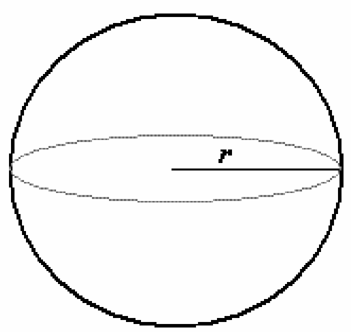
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości kuli.

Kula o środku w punkcie O i promieniu r to bryła będąca zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego – **promieniem kuli.**

Obrót okręgu ograniczonego koło tworzy powierzchnię obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli.** Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.



Rysunek 2-20. Kula

Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Objętość kuli wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 4\pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu $r = 4\ cm$.

Podstawiamy do wzoru $r = 4\ cm$ i obliczamy:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi\ cm^2$$

Przykład 2

Oblicz stosunek objętości kuli o promieniu $r_1 = 8\ cm$ do objętości kuli o promieniu $r_2 = 2\ cm$.

Ponieważ każde dwie kule są bryłami podobnymi, to $\frac{r_1}{r_2} = k$.

$$\frac{8}{2} = k \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_2}^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 4^3 = 64$$

Odpowiedź: Stosunek objętości tych kul jest równy 64.

ZADANIA

2.8.1 Oblicz objętość kuli o promieniu $r = 5\ cm$.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi cm^3$.

2.8.2 Pole powierzchni kuli jest równe $100\pi\ cm^2$. Oblicz objętość tej kuli.

Odpowiedź: $V = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$.

2.8.3 Oblicz pole powierzchni:

a) piłki do koszykówki o średnicy równej $24\ cm$,

b) piłki nożnej o średnicy równej $21{,}8\ cm$.

Odpowiedź: a) $56\pi\ cm^2$, b) $475{,}25\pi\ cm^2$.

2.8.4 Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o $20\ cm$, ich promienie są równe odpowiednio: $r_1 = 16\ cm$ i $r_2 = 12\ cm$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

Odpowiedź: Około $60{,}3\ cm$.

2.8.5 Objętość półkuli jest równa $486\pi\ cm^3$. Oblicz odległość między dwoma najbardziej oddalonymi od siebie punktami tej półkuli.

Odpowiedź: $18\ cm$.

2.8.6 Kopuła olsztyńskiego planetarium jest półkulą o promieniu $8\ m$. Ile [m^2] blachy należy zakupić, aby wymienić pokrycie tej kopuły, dodając 10 % materiału na zakłady i odpady? Wynik podaj w przybliżeniu do części setnych.

Odpowiedź: $442{,}1$ m^2.

2.8.7 Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w czworościan foremny do objętości kuli opisanej na tym czworościanie.

Odpowiedź: $\frac{1}{27}$.

2.8.8 Po zjedzeniu miąższu arbuza, pozostała skórka z niejadalną częścią o grubości 3 cm. Arbuz miał średnicę 30 cm. Jaką jego część stanowił miąższ?

Odpowiedź: $51{,}2\%$.

2.8.9 Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $8\ dm$ od środka kuli. Otrzymany przekrój ma pole $36\ \pi\ dm^2$. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli.

Odpowiedź: $P = 100\pi\ dm^2, V = \frac{1000\pi}{3}\ dm^3$.

2.8.10 W kulę wpisano walec w ten sposób, że objętość walca stanowi $\frac{9}{16}$ objętości kuli. Oblicz stosunek promienia kuli do wysokości walca.

Odpowiedź: 1 lub $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

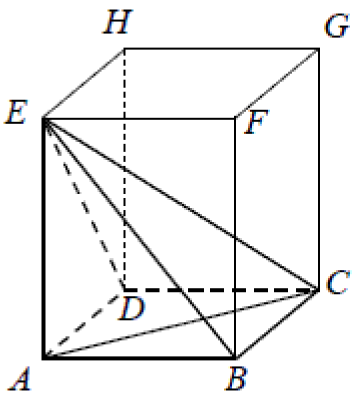
1.[11] Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa:

a) 6 b) 8 c) 24 d) 64

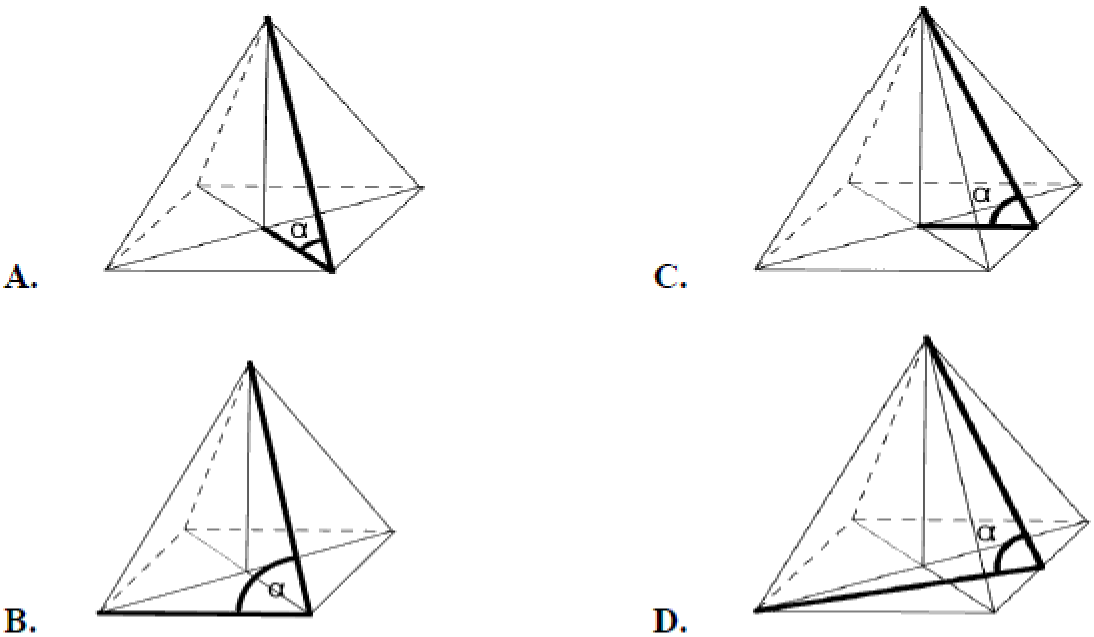
11 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 04.03.2013.

2. Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) 16π c) $4\sqrt{2}$ d) 8π



3.[12] Kąt α nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy zaznaczony jest na rysunku:



4.[13] Objętość sześcianu, w którym przekątna ściany bocznej ma długość $\frac{\sqrt{2}}{4}$, jest równa

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 16 d) 64

5.[14] Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

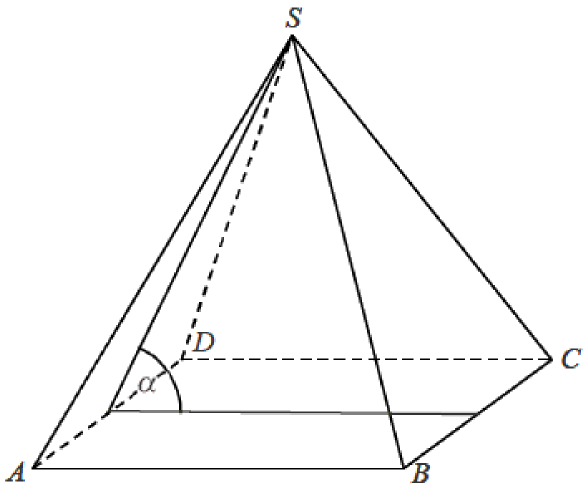
a) 512 b) 384 c) 96 d) 16

12 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

13 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

14 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 04.03.2013.

6. **(4 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



7.[15] Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

a) 96π b) 48π c) 32π d) 8π

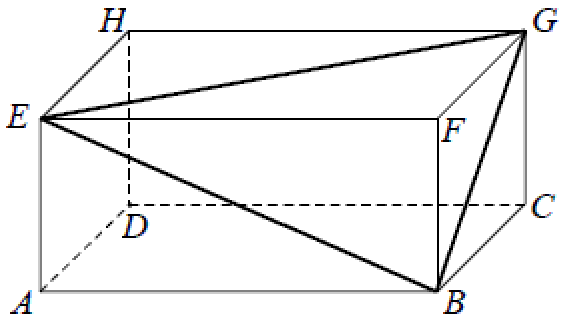
8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to:

a) $r + h = a$ b) $h - r = \frac{a}{2}$ c) $r - h = \frac{a}{2}$ d) $r^2 + h^2 = a^2$

9.[16] Objętość sześcianu jest równa 27. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

10.[17] W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



a) AB b) BG c) GE d) EB

15 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 04.03.2013.

16 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

17 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 04.03.2013.

11. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) 9 d) $3\sqrt{3}$

12. Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa:

a) 124π b) 96π c) 64π d) 32π

13.[18] Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe:

a) 94 b) 60 c) 47 d) 20

14. Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

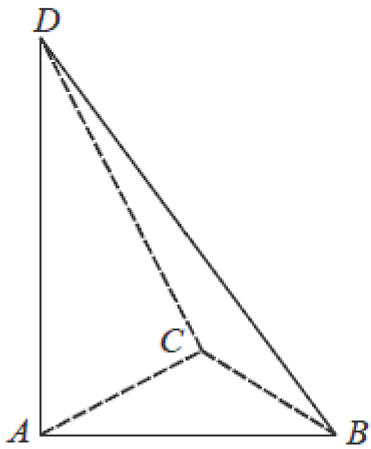
a) 11

b) 18

c) 27

d) 34

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $AD = 12$, $BC = 6$, $BD = CD = 13$.



15.[19] Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są równe 2. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

a) $\sqrt{3}+12$ b) $2\left(\sqrt{3}+6\right)$ c) $2\sqrt{3}+4$ d) $\sqrt{6}+12$

16. Przekątna prostopadłościanu o długości 6 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przekątna podstawy ma długość 3. Jaka jest miara kąta α?

a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$ d) $90°$

17. Producent chce wyprodukować puszkę w kształcie walca o pojemności 3000 m^3 i wysokości 2 dm. Promień podstawy puszki w zaokrągleniu do części dziesiątych wynosi:

a) 6,8 cm b) 6,9 cm c) 7,0 cm d) 7,1 cm

18. Pewien ostrosłup ma 70 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 138 b) 140 c) 69 d) 70

---

18 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.

19 Zadania 15-23: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.

19. Pole powierzchni kuli o objętości 288π wynosi:

a) 144π b) 36π c) 576π d) 452,16

20. Krople deszczu mają zwykle kształt kuli o średnicy 2 mm. Wskaz, ile kropel deszczu napełni szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 8 cm:

a) 108000 b) 432000 c) 54000 d) 162000

21. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest półkolem o promieniu $r = 10$ cm. Pole podstawy stożka wynosi:

a) 100π cm^2 b) 100 cm^2 c) 25π cm^2 d) 25 cm^2

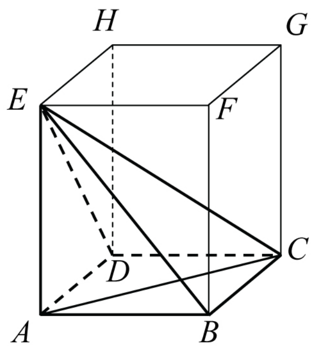
22. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 4 cm i 5 cm. Objętość walca jest równa:

a) 15π cm^3 b) 20π cm^3 c) 25π cm^3 d) 30π cm^3

23. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Objętość stożka jest równa 9π. Tworząca l stożka ma długość:

a) $l = 3\sqrt{2}$ b) $l = 6$ c) $l = 3\sqrt{3}$ d) $l = 7$

24.[20] **(4 pkt)** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



25.[21] **(5 pkt)** Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

26.[22] **(5 pkt)** Krawędź sześcianu jest o 4 krótsza od jego przekątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

27.[23] **(2 pkt)** Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

20 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 09.03.2013.

21 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

22 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

23 Zadania 27, 28: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 09.03.2013.

28. **(5 pkt)** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $tg\alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

29.[24] **(2 pkt)** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

30.[25] ***(4 pkt)*** Zbiornik ma kształt walca z obu stron zakończonego półkulami. Oblicz ile litrów płynu wypełni ten zbiornik, jeśli pole powierzchni całkowitej zbiornika jest równe 3π m^2, a wysokość walca jest równa 2 metry.

31. **(5 pkt)** Pomarańcza ma 5 cm średnicy, a jej skórka ma 5 mm grubości. Wyciśnięty sok stanowi 75% objętości obranej pomarańczy. Ile pomarańczy należy wycisnąć, aby napełnić półlitrowe naczynie? W tym zadaniu przyjmij $\pi = 3$.

32. **(5 pkt)** Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 3 dm $\times$ 0,5 m i wysokości 40 cm, wypełnionego wodą o $^3/_4$ wysokości, wrzucono dwie sześcienne kostki o krawędzi 10 cm. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

33. **(2 pkt.)** Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 360 cm^2, a pole powierzchni bocznej wynosi 240 cm^2, wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy. Odpowiedź: $tg\alpha = \sqrt{3}$.

24 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
25 Zadania 30–33: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

3 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

3.1 Średnia arytmetyczna, średnia ważona

Teraz nauczę się:

- Obliczać średnią arytmetyczną i ważoną zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Jeśli przeprowadzasz ankietę, zbierasz dane, dotyczące np. natężenia ruchu w naszym mieście, lub nauczyciele robią zestawienia z testów badających wiedzę swoich uczniów, to po zdobyciu tych informacji potrzebujesz wyciągnąć wnioski, na podstawie których można będzie odpowiedzieć sobie na pewne pytania.

Grupa badanych pewnej populacji nazywa się próbą statystyczną, którą bada się pod kątem pewnej cechy.

Statystyka opisowa – nauka zajmująca się gromadzeniem danych, porządkowaniem ich, analizą i wyciąganiem wniosków.

Dane statystyczne możemy mieć przedstawione w postaci tabel, diagramów, wykresów, ale wcześniej są przedstawiane w postaci skończonego zbioru liczb.

Ze średnią arytmetyczną najczęściej spotykamy się w szkole, kiedy liczymy sobie średnią ocen z danego przedmiotu czy średnią ocen na świadectwie.

Średnią arytmetyczną danego zbioru liczb liczymy dodając do siebie wszystkie liczby należące do zbioru, a następnie dzielimy otrzymaną sumę przez ilość liczb w zbiorze.

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Przykład 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $1, 8, 12, 6, -4, 2, 5, 5, 11, 9$.

$$\bar{x} = \frac{1+8+12+6-4+2+5+5+11+9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna dla tego zestawu liczb wynosi $5{,}5$.

Przykład 2

Średnia arytmetyczna liczb: 4, 2, 2, 6, x, 8 jest równa 5. Oblicz x.

$$\bar{x} = \frac{4+2+2+6+x+8}{6} = 5$$

$$\frac{22+x}{6} = 5$$

$$22 + x = 30 \Rightarrow x = 8$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 8.

Przykład 3[26]

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Jaka jest cena szóstej akcji?

Obliczamy najpierw łączny koszt wszystkich akcji:

$$6 \cdot 500 = 3000$$

Za 5 akcji zapłacono 2300 zł, więc jeśli od ceny wszystkich akcji odejmiemy cenę 5 akcji, to otrzymamy cenę szóstej akcji.

$$3000 - 2300 = 700\ zł$$

Odpowiedź: Cena szóstej akcji wynosi 700 zł.

Przykład 4

Tabelka przedstawia stan wypożyczania książek przez uczniów klasy I C z biblioteki szkolnej.

Liczba uczniów	10	8	5	4	3
Liczba przeczytanych książek	9	33	6	12	0

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 9 + 8 \cdot 33 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 0}{30} = \frac{90 + 264 + 30 + 48}{30} = \frac{432}{30} = 14{,}4$$

Odpowiedź: W klasie I C średnio na jednego ucznia przypada 14,4 książki.

26 Arkusz maturalny CKE, Matura z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, 26.03.2013.

Średnia ważona

Średnią ważoną stosujemy, gdy poszczególne wartości mają przyporządkowane wagi.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie), to liczba

Przykład 5

Oblicz średnią ważoną liczb $1, 2, 3, 4{,}5, 6, 7, 8, 9, 10$, jeśli liczby parzyste mają wagę 4 a nieparzyste 6.

$$\overline{x_w} = \frac{1\cdot6+2\cdot4+3\cdot6+4\cdot4+5\cdot6+6\cdot4+7\cdot6+8\cdot4+9\cdot6+10\cdot4}{6+4+6+4+6+4+6+4+6+4}$$

$$\overline{x_w} = \frac{6+8+18+16+30+24+42+32+54+40}{50} = \frac{270}{50} = 5{,}4$$

Odpowiedź: Średnia ważona jest równa 5,4.

Przykład 6

Oceny uzyskane w semestrze przez pewnego ucznia z matematyki wraz z ich wagami zostały zestawione w tabeli.Obliczmy średnią tego ucznia.

Ocena	3	1	2	5	4	6	3	4	4
Waga	1	1	1	4	3	5	1	3	3

$$.\overline{x_w} = \frac{3\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+5\cdot4+4\cdot3+6\cdot5+3\cdot1+4\cdot3+4\cdot3}{1+1+1+4+3+5+1+3+3} = \frac{3+1+2+20+12+30+3+12+12}{22} = \frac{95}{22} = 4{,}31$$

Odpowiedź: Średnia ocen wynosi 3,41.

ZADANIA

3.1.1 Oblicz średnią ważoną danych z tabeli:

Wartość	3	4	5	7
Waga	2	1	4	3

Odpowiedź: 5,1.

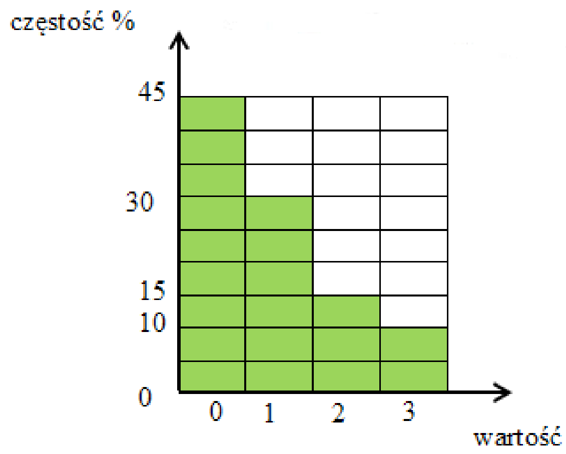
3.1.2 Dla jakiej wartości x średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3?

Odpowiedź: $x = 5$.

3.1.3 Średnia wzrostu 9 osób wynosi $170\ cm$. Jaka będzie średnia wzrostu tej grupy, jeśli dołączy do nich osoba o wzroście $190\ cm$?

Odpowiedź: $172\ cm$.

3.1.4 Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na poniższym diagramie:



Odpowiedź: $0{,}9$.

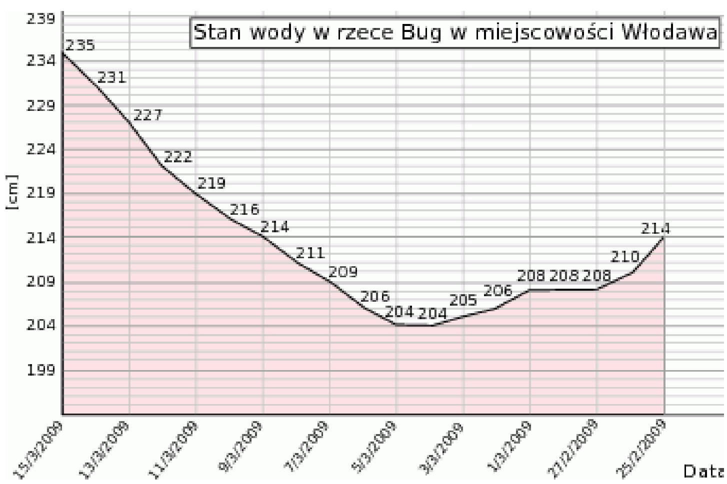
3.1.5 Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 $zł$. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie wynagrodzenie w firmie jest o 2% wyższe niż poprzednio?

Odpowiedź: 2528 $zł$.

3.1.6 Średnia arytmetyczna liczb $a, b, c, d, 22$ jest równa 14. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d?

Odpowiedź: 12.

3.1.7 Na podanym wykresie przedstawiono stan wody w rzece Bug od 25 lutego do 15 marca 2009 roku.



Rysunek 3-1. Stan wody w rzece Bug w miejscowości Włodawa

a) W których dniach stan wody w rzece nie przekraczał 207 cm?

b) Jaki był średni stan wody w rzece w dniach 1-10 marca 2009?

c) O ile procent podniósł się stan wody w rzece między 6 a 12 marca? Wynik podaj z dokładnością do jednego punktu procentowego.

Odpowiedź:

a) Między 2 a 6 marca. b) 208,3 cm. c) O 8%.

3.1.8 Na koniec semestru otrzymasz piątkę, jeśli zdobędziesz średnio co najmniej 70 punktów z pięciu sprawdzianów. Ania otrzymała średnio 68 pkt. z czterech sprawdzianów. Jaką minimalną ilość punktów musi dostać z piątego sprawdzianu, aby na semestr otrzymać piątkę?

Odpowiedź: 78 pkt.

3.1.9 Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci wynosi 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek babci, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 31 lat. Ile lat ma babcia?

Odpowiedź: 63 lata.

3.2 Mediana, dominanta

Teraz nauczę się:

- Obliczać medianę i dominantę zestawu danych.

Mediana zestawu liczb

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza uporządkowany rosnąco (lub malejąco) ciąg liczb.

- Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.
- Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Mediana jest to wartość środkowa występująca w uporządkowanym zestawie danych.

Przykład 1

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13.

W tym przykładzie grupa danych jest liczbą parzystą, więc nie istnieje jedna wielkość środkowa. Mamy dwie takie wartości.

$$\underbrace{2,\ 3,\ 4,}_{\text{3 wartości}}\ 6,\ 8,\ \underbrace{9,\ 11,\ 13.}_{\text{3 wartości}}$$

To, że mamy dwie wielkości środkowe, nie oznacza jednak, że mamy dwie mediany. W takim wypadku medianę otrzymujemy, obliczając średnią arytmetyczną dwóch wyznaczonych liczb.

$$M = \frac{6+8}{2} = 7$$

Odpowiedź: Mediana zestawu liczb wynosi 7.

Przykład 2

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Mamy podany uszeregowany ciąg danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Składa się z 9 wartości. Dokładnie pośrodku znajduje się wartość piąta (ponieważ mamy cztery wartości na lewo od niej i cztery na prawo):

$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8,}_{4\ \text{wartości}}\ 10,\ \underbrace{12,\ 14,\ 16,\ 18}_{4\ \text{wartości}}$$

Odpowiedź: Mediana wynosi 10.

Przykład 3

Poniżej przedstawiona jest liczba 100 ankietowanych dzieci.

Liczba osób	0	1	2	3	4	5
Liczba ankietowanych	15	34	27	15	7	2

Mamy do czynienia z parzystą liczbą wartości (100).

W szeregu 100 liczb liczbami środkowymi będą 50 i 51. Należy ustalić, jaką wartość mają te dwie liczby.

Z tabeli wynika:

- liczby od 1 do 15 mają wartość 0
- liczby od 16 do 49 $(15 + 34 = 49)$ mają wartość 1
- liczby od 50 do 76 $(49 + 27 = 76)$ mają wartość 2

Dalej nie musimy sprawdzać, bo ustaliliśmy wartość obu liczb:

- wartość liczby 50 wynosi 2
- wartość liczby 51 wynosi 2

Stąd mediana jest równa 2.

Dominanta

Dominanta (moda) jest to wartość, która w zebranych danych statystycznych pojawia się najczęściej. Oznaczamy ją symbolem D.

Gdy mamy kilka wielkości, które pojawiają się z tą samą największą liczbą razy, mamy do czynienia z kilkoma dominantami.

Przykład 4

Podaj dominantę z następujących liczb: $1, 3, 5, 0, 2, 5, 6, 1, 0, 4, 5, 4, 0, 0, 0, 7, 0$.

Liczba	0	1	2	3	4	5	6	7
Częstość	6	2	1	1	2	3	1	1

Najczęściej występuje liczba 0.

ZADANIA

3.2.1 Korzystając z danych: $3, 4, 1, 8{,}15, 6, 4, 3, 12, 7, 22, 4, 1, 0, 6, 5, 9,$ określ medianę.

Odpowiedź: 5,5.

3.2.2 Podaj dominantę z następujących liczb:

a) $7, -2, 4, 7, 0, 7, 4,$

b) $1, 5, 6, 1, 6, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 5, 2, 2, 1$.

Odpowiedź: a) 7, b) 1, 5 i 6.

3.2.3 W tabeli przedstawiono wyniki egzaminu dla 100 studentów. Podaj dominantę.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Liczba studentów	22	25	12	25	10	6

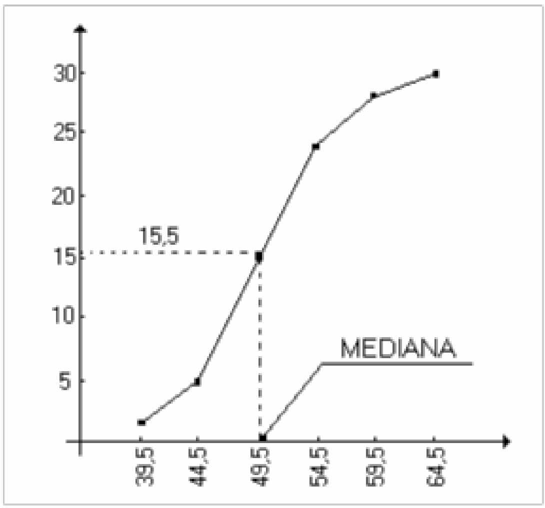
Odpowiedź: $D_1 = 3, D_2 = 4$.

3.2.4 Wyniki konkursu z matematyki podano w punktach: 94, 92, 90, 90, 86, 86, 86, 72. Oblicz medianę tego zestawu danych.

Odpowiedź: 88.

3.2.5 W tabeli przedstawiono wagi uczniów pewnej klasy. Podaj medianę dla tej klasy. Narysuj wykres ilustrujący dane zawarte w tabeli.

Odpowiedź: $M = 49{,}5$.



5.3 Wariancja, odchylenie standardowe

Teraz nauczę się:

- Obliczać wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadkach danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Odchylenie standardowe zestawu liczb $\boldsymbol{\sigma}$ (*sigma*)

Wartość odchylenia standardowego mówi nam, jak bardzo zróżnicowane są dane statystyczne. Im większa jest wartość odchylenie, tym dane są bardziej rozproszone wokół średniej.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ, którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Wariancja to kwadrat odchylenia standardowego.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Rozstęp (R) jest to różnica między największą a najmniejszą z liczb.

Przykład 1

Każdy z 6 zawodników podczas treningu oddał z pistoletu po 10 strzałów do tarczy. Po zsumowaniu punktów każdego zawodnika otrzymano następujące wyniki: 99, 96, 92, 98, 94, 97. Oblicz rozstęp wyników, średni wynik oraz odchylenie standardowe i wariancję.

Obliczmy najpierw rozstęp danych:

Wartość max – 99

Wartość min – 32

$R = 99 - 92 = 7$

Obliczmy teraz średnią wyników

$$\bar{x} = \frac{99 + 96 + 92 + 98 + 94 + 97}{6} = \frac{576}{6} = 96$$

Odchylenie standardowe liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(99-96)^2 + (96-96)^2 + (92-96)^2 + (98-96)^2 + (94-96)^2 + (97-96)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 16 + 4 + 4 + 1}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}38$$

Wariancja wynosi $\sigma^2 = 2{,}37^2 = 5{,}67$

ZADANIA

3.3.1 Oblicz wariancję danych ze zbioru $A = \{4, 5, 8, 9, \ 14\}$.

Odpowiedź: 12,4.

3.3.2 Średnia arytmetyczna trzech liczb a, b, c jest równa 2. Wariancja tych liczb wynosi 3. Oblicz sumę kwadratów liczb a, b i c.

Odpowiedź: 21.

3.3.3 Oblicz z dokładnością do 0,1 odchylenie standardowe następujących danych:

a) $-2; \ 0; \ 1; \ 4; \ 7; \ 14.$

b)

Wartość	-3	-1	0	4	6
Liczebność	10	6	4	2	4

Odpowiedź:

a) $\sigma = 5{,}3.$

b) $\sigma = 3.$

3.3.4 Trzech sędziów oceniło zawodnika, przyznając punkty: 2, 3, 7. Ile wynosi odchylenie standardowe od średniej arytmetycznej zestawu tych punktów?

Odpowiedź: $\sigma = 2{,}16$.

3.3.5 Troje przyjaciół ma wzrost równy odpowiednio 140 cm, 150 cm i 160 cm. Oblicz odchylenie standardowe od średniej wzrostu z dokładnością do części tysięcznych.

Odpowiedź: $\sigma = 8{,}165$.

3.4 Zastosowanie statystyki w praktyce

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wiedzę z zakresu statystyki w sytuacjach praktycznych.

ZADANIA

3.4.1 Czterech pracowników brygady zarobiło w lutym po 1300 zł, a ich szef 2000 zł. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$ płac i odchylenie standardowe σ od niej. Wyniki zaokrąglij do 1 grosza.

Odpowiedź: Średnia płac tych pięciu osób w lutym wynosi 1440 zł z odchyleniem standardowym 280 zł.

3.4.2 Obliczymy odchylenie standardowe i wariancję dla zestawu danych: $1, 3, 5, 5, 11$.

Odpowiedź: $\sigma^2 = 11{,}2$.

3.4.3 Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba osób	11	14
Średnia ocen	4,0	3,8
Odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe dla całej klasy. Wyniki podaj z zaokrągleniem do jednego miejsca po przecinku.

Odpowiedź: Średnia: 3,9; odchylenie standardowe: 1,5.

3.4.4 Wagi ośmiu klaczy urodzonych w pewnym gospodarstwie wynoszą: 38 kg, 40 kg, 42 kg, 42 kg, 45 kg, 48 kg, 50 kg, 51 kg. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

Odpowiedź: 4,47 kg.

3.4.5 Właściciel sklepu może zamówić puszki z ananasami u dwóch różnych dostawców A i B. Poniższe tabelki przedstawiają wyniki badania masy produktu bez zalewy w 10 losowo wybranych puszkach od obydwu dostawców:

	DOSTAWCA A				DOSTAWCA B			
Masa produktu bez zalewy (g)	120	130	135	140	125	135	140	145
Liczba puszek	1	4	2	3	3	2	4	1

Oblicz rozstęp i wariancję mas produktu bez zalewy od dostawcy A i B. Oceń, u którego z dostawców powinien zamawiać towar właściciel sklepu.

Odpowiedź:

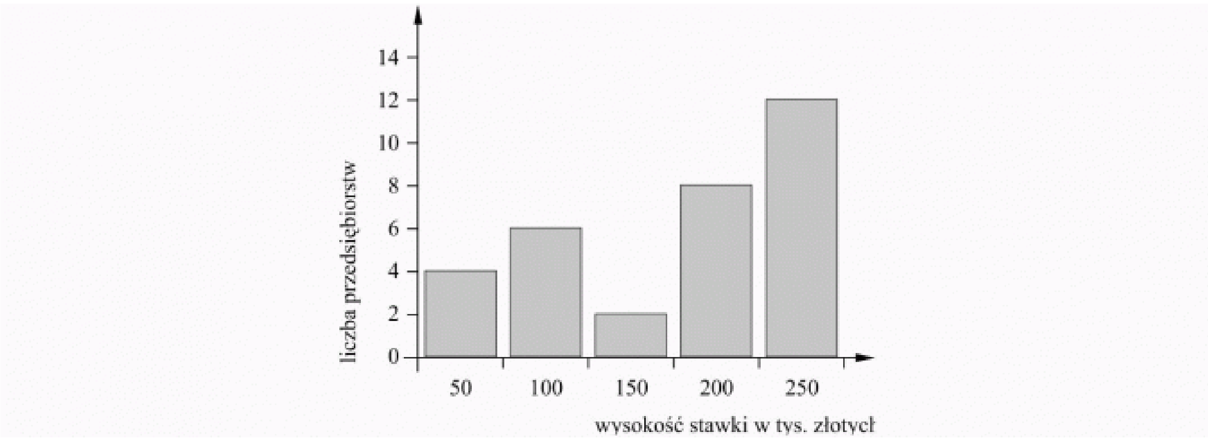
Rozstęp mas produktu bez zalewy od obu dostawców jest taki sam i wynosi 20. Wariancja mas produktu bez zalewy od dostawcy A wynosi 36, a od dostawcy B równa jest 50. Wynika z tego, że właściciel sklepu powinien wybrać dostawcę A.

3.4.6 Diagram przedstawia liczbę przedsiębiorstw w pewnej gminie, płacących podatek roczny w określonej wysokości. Oblicz:

a) średnią stawkę podatku rocznego przypadającego na przedsiębiorstwa z tego zestawienia,

b) podatek dominujący,

c) wysokość podatku, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw,



Rysunek 3-2. Liczba przedsiębiorstw w gminie płacących podatek roczny w określonej wysokości

Odpowiedź:

a) Średnia stawka podatkowa wynosiła $178\ 125\ zł$.

b) Podatek dominujący wynosi $250\ tys.\ zł$.

c) Podatek, którego nie przekroczyła połowa firmy wynosi $200\ 000\ zł$.

d) Rozstęp stawki podatkowej wynosi $200\ 000\ zł$.

3.4.7 W pewnej firmie średnia płaca pracowników produkujących wynosi 2819 zł, zaś średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 2483 zł. Średnia płaca wszystkich pracowników firmy jest równa 2723 zł. Oblicz, jaki procent pracowników produkcyjnych stanowią pozostali pracownicy tej firmy.

Odpowiedź: 40%.

3.5 Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych.

Naukę elementów rachunku prawdopodobieństwa należy rozpocząć od wprowadzenia podstawowych pojęć.

Doświadczenie losowe – w praktyce każde doświadczenie, które może być wielokrotnie powtarzane i którego wyniku nie możemy przewidzieć (np. rzut monetą).

Zdarzenie elementarne – jest to każdy wynik doświadczenia losowego (np. przy rzucie symetryczną kostką do gry może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6).

Zbiór zdarzeń elementarnych – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia (np. przy jednokrotnym rzucie kostką do gry $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać literką $\mathbf{\Omega}$ (czyt. *Omega*).

Zdarzenie losowe – dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek $\{2, 4, 6\}$).

Zdarzenie losowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \ldots$

Zdarzenia losowe dzielimy na:

- Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – zdarzenie elementarne, które spełnia warunki zdarzenia losowego (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek).

- Zdarzenia pewne – zdarzenie elementarne, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką do gry wypadła liczba oczek większa od 0, ale mniejsza lub równa 6).

- Zdarzenia niemożliwe – zdarzenie elementarne, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne (np. w rzucie sześcienną kostka do gry wypadła siódemka).

Bardzo istotne jest, ile elementów zawiera zbiór. Wartość ta jest nazywana mocą zbioru.

Np. moc zbioru A – $\bar{\bar{A}}$

Przykład 1

Rzucamy trzy razy monetą.

a) Wypisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.

b) Wypisz zbiór sprzyjający zdarzeniu – wypadł co najwyżej jeden orzeł.

a)

R – wypadła reszka

O – wypadł orzeł

W tym doświadczeniu losowym można otrzymać następujące wyniki:

$A=\{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ (O,O,R)\ (O,R,O)\ (R,O,O)\ (O,O,O)\}$

Wszystkich możliwych wyników jest 8, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 8$.

b)

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najwyżej jeden orzeł.

$B = \{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ \}$

Wszystkich możliwych wyników jest 4, więc $\overline{\overline{\mathrm{B}}} = 4$.

ZADANIA

3.5.1 Losujesz dwie niepowtarzające się cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i tworzysz z nich liczbę.

a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia. Ile ich jest?

b) Wylosowałeś cyfry, które dały liczbę parzystą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?

Odpowiedź:

a) $A = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4),\ (2\ 1), (2\ 3), (2, 4), (3\ 1), (3\ 2), (3\ 4),\ (4\ 1), (4\ 2), (4\ 3)\}, \overline{\overline{A}} = 12.$

b) $B = \{(1\ 2), (1\ 4), (2, 4), (3\ 2), (3\ 4), (4\ 2)\ \}, \overline{\overline{B}} = 6.$

3.5.2 Rzucamy monetą, a następnie sześcienną kostką do gry (o ściankach z numerami: 2, 4, 6, 8, 10, 12).

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

b) Podaj przykład zdarzenia pewnego A i zdarzenia niemożliwego B.

Odpowiedź: a) zbiór zdarzeń elementarnych składa się z 12 elementów.

b) A – wypadnie orzeł lub reszka i parzysta liczba oczek, B – wypadną dwa orły.

3.5.3 Rzucono dwiema zwykłymi sześciennymi kostkami do gry. Zdarzenie A – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest mniejsza od 2, zdarzenie B – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest większa lub równa 2. Jakimi zdarzeniami są zdarzenia A i B.

Odpowiedź: A – niemożliwe, B – pewne.

3.5.4 W urnie są trzy kule: biała, zielona i niebieska. Losujemu kolejno dwie kule bez zwracania. Wybisz zbiór zdarzeń elemnetarnych tego doświadczenia losowego.

Odpowiedź: $\{(b,z),(b,n),(z,b),(z,n),(n,b),(n,z)\}$.

3.6 Własności prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Korzystać z własności prawdopodobieństwa.

Zdarzenia losowe opisywaliśmy jako pewne podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Omówimy teraz niektóre pojęcia, które związane są z własnościami tych zbiorów.

Zdarzenia przeciwne

Zdarzenie przeciwne jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych przestrzeni, które nie sprzyjają danemu zdarzeniu. Zdarzenie przeciwne oznaczamy tą samą literą, co dane zdarzenie, ale ze znakiem prim.

$\boldsymbol{A}$ – dane zdarzenie

$\boldsymbol{A'}$ – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

Przykład 1

Rzucamy jeden raz kostką do gry. Doświadczenie A – polega na wyrzuceniu 1, 3 lub 4.

$A = \{1,3,4\}$

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A będzie zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu jednej z liczb: $2, 5, 6$.

$A' = \{2,5,6\}$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

Twierdzenie

Jeżeli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to zachodzą równości:

$\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

$\boldsymbol{A \cup A' = 1}$

$\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$

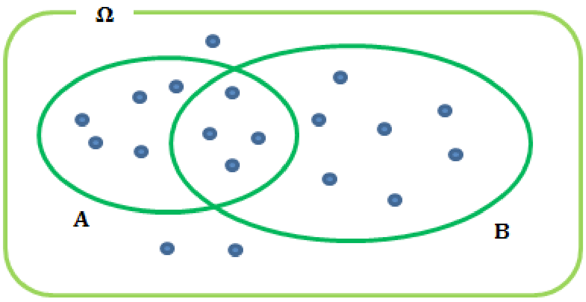
Przykład 2

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają te zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B. Aby obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$, należy ten zbiór wyznaczyć.



Rysunek 5-3. Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

$$P(A \cap B) = \frac{4}{19}$$

Przykład 3

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wypadły co najwyżej cztery oczka.

b) B – wypadła parzysta liczba oczek.

c) $P(A \cap B)$.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 6$

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{\overline{A}} = 4$

Zatem $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $B = \{ 2, 4, 6\}$

$\overline{\overline{B}} = 3$

Zatem $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

$\overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Zdarzenia wykluczające się

Zdarzenia wykluczające się to zdarzenia, które nie mają części wspólnej.

Przykład 4

Wybieramy losowo literę alfabetu spośród liter: a, b, c, d, e, f, g, h. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu samogłoski, a zdarzenie losowe B na wylosowaniu litery g lub h.

$A = \{a, e\}$

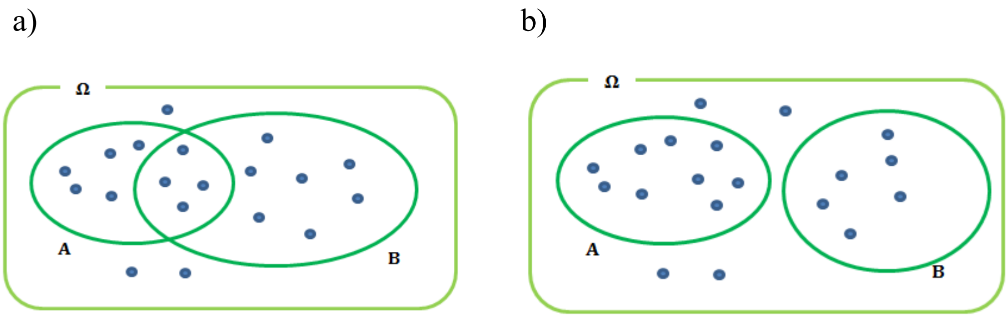
$B = \{g, h\}$

Zdarzenia nie mają żadnego wspólnego zdarzenia elementarnego, a więc wykluczają się. Prawdopodobieństwo części wspólnej dwóch wykluczających się zdarzeń wynosi 0.

$P(A \cap B) = 0$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Przykład 5



Rysunek 5-4. Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Na rysunkach powyżej przedstawiona została przestrzeń zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego.

Obliczymy teraz $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, a następnie sprawdzimy, czy $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

a) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{11}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{16}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{11}{19} = \frac{20}{19}$

Więc $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B) P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$

b) $P(A) = \frac{9}{19}$

$P(B) = \frac{6}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{15}{19}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{19} + \frac{6}{19} = \frac{15}{19}$

Więc: $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

Łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Zależy to od tego, czy zdarzenia te się wykluczają, czy nie.

Twierdzenie

W doświadczeniu losowym dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

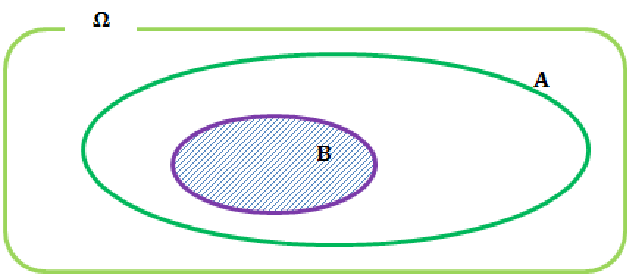
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Przykład 6

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $B \subset A$ oraz $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}3$. Oblicz $P(A \cup B)$.



Skoro $B \subset A$, to: $A \cup B = A$ i $A \cap B = B$

Z twierdzenia: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Skoro $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}3$ i $P(A \cap B) = 0{,}3$, to:

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(A \cup B) = 0{,}7$

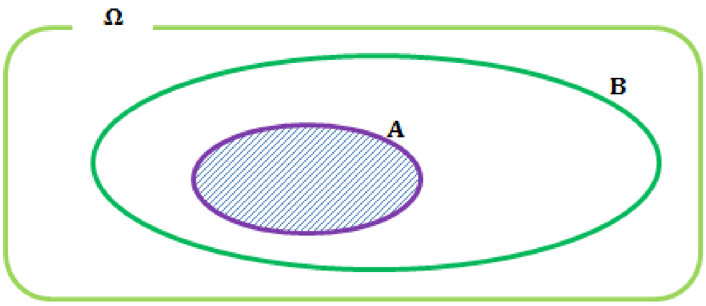
Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń

Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Przykład 7

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy $B \backslash A$.



$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

Korzystając z twierdzenia:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$$

oraz $(B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset (B \backslash A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$$P(B) = P(B \backslash A) \cup (B \cap A) = P(B \backslash A) + P(B \cap A) - P((B \backslash A) \cap (B \cap A))$$
$$= P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

$$0{,}7 = P(B \backslash A) + 0{,}3$$

$$P(B \backslash A) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$$

Twierdzenie

Dla dowolnych zdarzeń $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{\Omega}$ zachodzą następujące własności:

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{P(A)} \le \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{P(\Omega)} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{P(\emptyset)} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{P(A)} \le \boldsymbol{P(B)}$**, gdy** $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{P(A \cup B)} = \boldsymbol{P(A)} + \boldsymbol{P(B)} - \boldsymbol{P(A \cap B)}$$

3.6.1 Losujemy kulę ze zbioru 14 ponumerowanych kul. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu kuli o numerze parzystym. Zdarzenie losowe B polega na wylosowaniu kuli o numerze większym lub równym 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego część wspólną zdarzeń A i B.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$.

3.6.2 Oblicz prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych A i B oraz prawdopodobieństwo różnicy $B \backslash A$, jeżeli: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = \frac{1}{12}, P(B \backslash A) = \frac{1}{4}$.

3.6.3 Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B, wiedząc, że zdarzenia A i B się wykluczają oraz: $P(A) = \frac{1}{10}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź: $P(B) = \frac{1}{2}$.

3.6.4 Jeżeli A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i $P(A) = 5 \cdot P(A')$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{6}$.

3.6.5 A i B są takimi zdarzeniami losowanymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Odpowiedź: $P(A \cup B) = 0{,}4$.

3.6.6 O zdarzeniach losowych A i B wiemy, że: $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \backslash B)$

Odpowiedź:

a) $P(A \cap B) = \frac{11}{30}$.

b) $P(A \backslash B) = \frac{2}{15}$.

3.7 Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia oznaczamy $P(A)$. W nawiasie zapisujemy symbol zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy iloraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A spełnia warunek: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1.}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego 0.

Przykład 1

Rzucamy dwoma identycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

Wyznaczmy najpierw zbiór Ω, czyli przestrzeń, która zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$$

Wypiszmy teraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

$$A = \{(4,6)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 6$$

Więc prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

3.7.1 Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu w pierwszym i trzecim rzucie reszki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}$.

3.7.2 W grze losowej losowane są kulki z trzech pojemników. W pierwszym znajdują się kulki ponumerowane od 1 do 7. W drugim znajdują się dwie kulki: biała i niebieska, a w ostatnim pojemniku znajduje się sześć kulek oznaczonych literami alfabetu: A, B, C, D, E, F. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania ciągu, w którym liczba jest parzysta, a litera alfabetu jest samogłoską.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{7}$.

3.7.3 Z tali 52 kart losujemy 3 karty. Ile możliwych ciągów kart możemy uzyskać? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy w tym samym rozdaniu jako pierwszą kartę damę pik, a jako drugą jakiegokolwiek króla?

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{663}$.

3.7.4 Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 8 \leq 0$:

a) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma wynosi 8,

b) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych.

Odpowiedź: a) $P(A) = \frac{1}{9}$, b) $P(A) = \frac{1}{6}$.

3.8 Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń za pomocą drzewek

Jeżeli doświadczenie losowe składa się z więcej niż jednego etapu, takich jak serie rzutów kostką lub monetą, zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa bywa skomplikowane. Przydatną wówczas jest tak zwana metoda drzew.

Drzewem nazywamy graf ilustrujący przebieg doświadczenia losowego, na którym każdej krawędzi przyporządkowuje się prawdopodobieństwo.

Przykład 1

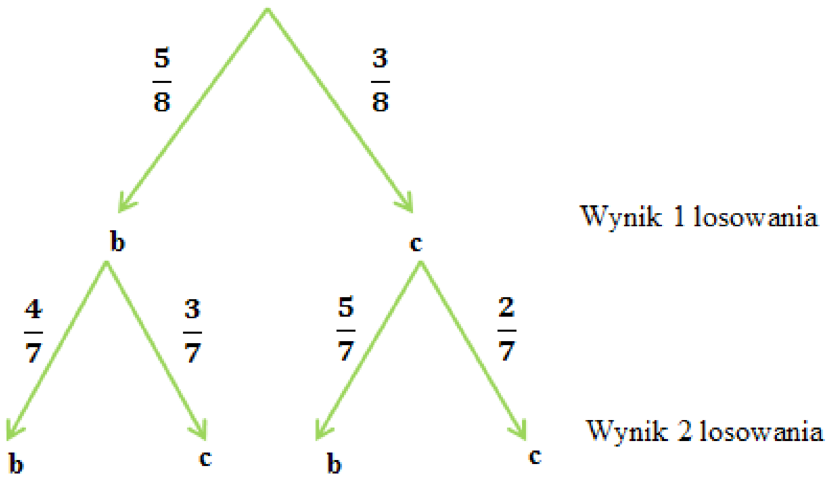
W urnie jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jedną kulę i, bez zwracania, losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wylosowano dwie kule białe.

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów.

Niech b – oznacza kulę białą, a c – kulę czarną.

Budujemy drzewo dla naszego doświadczenia losowego.



Pierwsze losowanie daje nam dwie możliwości, wypadnie kula biała lub kula czarna.

W drugim losowaniu mamy te same możliwości. Osobno rysujemy je dla obu wyników, wynikających z losowania pierwszego.

Reguła iloczynów

Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź.

Reguła sum

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych według reguły iloczynów dla tych gałęzi.

Więc:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych wynosi:

$$P(\{(b,b)\}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej i czarnej wynosi:

$$P(\{(b,c)\}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej i białej wynosi:

$$P(\{(c,b)\}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosi:

$$P(\{(c,c)\}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

a) A – wylosowano dwie kule białe

$$P(A) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów

$$B = \{(b,c),(c,b\}$$

Obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystamy z reguły dodawania. Jeżeli zdarzeniu sprzyjają co najmniej dwa wyniki na drzewie, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest sumą prawdopodobieństw tych wyników.

$P(B) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

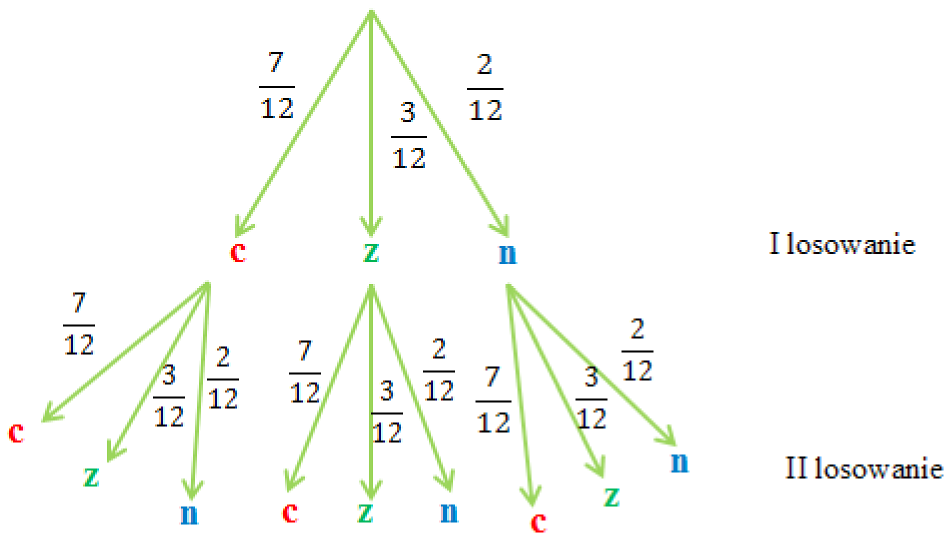
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $P(A) = \frac{5}{14}$, a prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w różnych kolorach wynosi $P(B) = \frac{15}{28}$.

Przykład 2

Mamy 12 kul: 2 niebieskie, 3 zielone, 7 czerwonych. Losujemy kolejno trzy kule (ze zwracaniem). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

A – wylosowanie za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

Budujemy drzewo naszego doświadczenia:



$P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{14}{144} + \frac{6}{144} + \frac{4}{144} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$

ZADANIA

3.8.1 W urnie są 3 kule zielone i 1 czerwona. Losujemy kolejno trzy kule (bez zwracania). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowania wszystkich kul zielonych.

b) wylosowania za trzecim razem kuli zielonej.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$.

3.8.2 Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie dwóch czwórek.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{64}$.

3.8.3 Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na:

Zdarzenie A – polegające na tym, że co najmniej raz wypadł orzeł.

Zdarzenie B – polegające na tym, że tylko raz wypadł orzeł.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$.

3.8.4 Gra polega na rzucaniu sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 oczek, to wygrywamy 10 złotych i możemy grać dalej, a jeśli wypadnie inna liczba oczek niż 6, to odpadamy z gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że jeżeli zagramy, wygramy 30 złotych.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{1296}$.

3.8.5 Z zestawu tematów egzaminacyjnych, składającego się z 25 pytań z matematyki (10 dotyczy działań na liczbach, 9 geometrii, 6 rachunku prawdopodobieństwa), wyjęto losowo 1 zagadnienie i, nie oglądając go, odłożono na bok. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano temat z działań na liczbach.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{2}{5}$.

3.8.6 W konkursie omnibus ustalono następujące reguły: dla 1. tury rozgrywek uczestnik losuje jedną z liter wyrazu omnibus i jeśli jest to spółgłoska, to losuje pytanie z urny, w której są 3 pytania z matematyki, 2 z literatury i 3 z muzyki. W przypadku wylosowania samogłoski, uczestnik losuje pytanie z urny, w której są 2 pytania z matematyki, 3 z historii i 3 z geografii. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane pytanie dotyczy matematyki.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{28}$.

3.9 Reguła mnożenia i dodawania

Teraz nauczę się:

- Stosować regułę mnożenia i dodawania.

Często mamy do czynienia ze zbiorami, dla których chcielibyśmy znać liczbę elementów. Wygodnie jest, gdy wszystkie elementy są wypisane i można je policzyć. Niekiedy jednak, mając pewien zbiór, budujemy z jego elementów nowe zbiory i chcemy poznać liczbę elementów w tych nowych zbiorach.

Zasada mnożenia

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ sposobów.

Zasada dodawania

Jeżeli wybór polega na jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ sposobów.

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób?

Jest 5 osób i pięć miejsc w kolejce. Pierwszą osobę można ustawić na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3 sposoby, czwartą na 2 sposoby, a piątą tylko na 1 sposób.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Odpowiedź: Pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

Przykład 2

Podczas egzaminu student wybiera 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?

Student pierwsze pytanie losuje spośród 6, drugie spośród 5, trzecie spośród 4 i czwarte pytanie spośród 3.

Zatem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Kolejność losowania poszczególnych pytań nie jest istotna, dlatego otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień czterech pytań: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360}{24} = 15$$

Odpowiedź: Student może wybrać pytania na 15 sposobów.

Przykład 3

Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ tak, aby cyfry w nich się nie powtarzały?

W tym przypadku nie wykorzystujemy wszystkich cyfr jednocześnie. Tworzymy liczby trzycyfrowe, mając do dyspozycji pięć cyfr. Kolejność wybieranych cyfr jest ważna.

Wśród tych cyfr nie ma zera, zatem każda z nich może być pierwszą cyfrą tworzonej liczby. Mamy 5 możliwych cyfr na pierwsze miejsce, 4 możliwe cyfry na drugim miejscu i 3 na trzecim miejscu.

Zatem liczba wszystkich możliwych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z podanych cyfr jest równa:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Odpowiedź: Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

ZADANIA

3.9.1 Pewna pani dekoruje stół na przyjęcie gości. Ma do wyboru 6 obrusów, 3 wazony i 2 świeczniki. Ile różnych dekoracji może uzyskać?

Odpowiedź: 36 dekoracji.

3.9.2 Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych?

Odpowiedź: 90.

3.9.3 Z urny zwierającej 4 kule (biała, czarna, niebieska, zielona) losujemy trzy kule. Ile jest możliwych losowań, w których cyfry się nie powtarzają.

Odpowiedź: 4 możliwe losowania.

3.9.4 Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4.

Odpowiedź: Liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1,2,3,4 jest 18.

3.9.5 Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy trzy cyfry. Ile liczb trzycyfrowych można w ten sposób utworzyć, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać,

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

Odpowiedź: a) 343 liczby, b) 210 liczb.

3.9.6 Na ile sposobów można ustawić w szeregu 3 chłopców i 2 dziewczynki, tak aby:

a) najpierw stały dziewczyny, a następnie chłopcy,

b) pierwsza stała dziewczyna,

c) pierwszy i drugi stał chłopiec,

d) żaden z dwóch chłopców nie stał obok siebie.

Odpowiedź: a) 12, b) 48, c) 36, d) 12.

3.10 *Pojęcie silni

Teraz nauczę się:

- Stosować pojęcie silni do rozwiązywania problemów.

Definicja

Silnią liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$ nazywamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż $\boldsymbol{n}$. W notacji matematycznej $\boldsymbol{n}!$ czytamy, jako *„n silnia„*.

Oznaczenie symboliczne $n!$ wprowadził w 1808 roku francuski matematyk Christian Kramp.

Symbolicznie można zapisać:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Definicja

$$\boldsymbol{n! = \begin{cases} 1 & dla\ n = 0 \\ n(n-1)! & dla\ n \geq 1 \end{cases}}$$

Przykład 1

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Przykład 2

Oblicz $5! - 2! \cdot 3!$

$5! - 2! \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 120 - 12 = 108$

Przykład 3

Oblicz $\frac{12!}{10! \cdot 5!}$

$12!$ możemy zapisać jako $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 10! \cdot 11 \cdot 12$

Przykład 4

Doprowadź wyrażenie $\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!}$ do najprostszej postaci.

Rozpiszmy najpierw $(2n+2)!$

$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$

oraz $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

Wracamy do przykładu, i otrzymujemy:

$$\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$$
$$= \frac{(2n+1) \cdot 2(n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}$$

Zadania

3.10.1 Oblicz:

a) $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ b) $\frac{12!}{11!\cdot 4!}$ c) $\frac{9!\cdot 7!}{(6!)^3}$

Odpowiedź:

a) 45. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{49}{10}$.

35.10.2 Uprość:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} =$ b) $\frac{(n+2)!}{n!} =$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} =$

d) $\frac{n!}{(n-3)!} =$ e) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!} =$ f) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!} =$

Odpowiedź:

a) $n + 1$. b) $(n + 1)(n + 2)$. c) $(n + 3)$.

d) $(n - 2)(n - 1)n$. e) $\frac{1}{(n-2)(n-1)}$. f) $\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n}$.

3.11 *Kombinatoryka

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: „ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",„Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 24 osobowej?" itp.

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.

Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy $k-$ elementowy podzbiór tego zbioru.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Przykład 1

Oblicz:

a) $C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$

b) $C_7^3 \cdot C_4^2 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2} 35 \cdot 6 = 210$

Przykład 2

Na ile sposobów z grupy 12 osób można wybrać trzech przedstawicieli?

Wybierając przedstawicieli tej grupy tworzymy 3-osobowy podzbiór.

Jest to 3-elementowa kombinacja ze zbioru 12-elementowego.

Więc:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{9!\cdot 2\cdot 3\cdot} = 220$$

Odpowiedź: z grupy 12 osób, trzech przedstawicieli można wybrać na 220 sposobów.

Przykład 3

Obliczmy teraz trzy przykłady:

a) C_n^0

b) C_n^n

c) C_n^1

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!} = n$$

Wniosek

Jeżeli $n \in N$, to:

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1, \qquad C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = n}$$

ZADANIA

3.11.1 Oblicz:

a) C_8^2 b) $C_{10}^3 \cdot C_6^1$ c) $\frac{C_{12}^3}{C_{14}^5}$ d) $C_{25}^{23} + C_{25}^{24}$

Odpowiedź:

a) 28 b) 720 c) $\frac{10}{91}$ d) 325

3.11.2 W klasie jest 10 dziewcząt i 14 chłopców. Na ile sposobów możesz wybrać grupę, w której są dwie dziewczyny i 4 chłopców?

Odpowiedź: na 45045 sposobów.

3.11.3 Spośród 50 losów na loterii tylko 10 jest wygrywających. Na ile sposobów można wybrać 4 losy tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający.

Odpowiedź: Wszystkich sposobów wylosowania 4 losów w tej loterii tak, aby co najmniej jeden z nich był wygrywający, jest 138 910.

3.11.4 Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i trzy trójki.

Odpowiedź: Szukanych liczb ośmiocyfrowych jest 192080.

Wariacje

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład 4

W finale konkursu matematycznego bierze udział 10 uczestników. Ile jest możliwości zajęcia przez nich trzech pierwszych miejsc, jeżeli uwzględniamy kolejność (I, II i III miejsce)?

$$V_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 720.

Przykład 5

Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:

$$V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

Odpowiedź: Istnieje 5040 czterocyfrowych kodów o różnych cyfrach.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k −wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Liczba k −wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = n^k}$$

Przykład 6

Ile słów sześcioliterowych (z sensem lub bez) można utworzyć z liter $\{A, B, C\}$? Na każde z 6 miejsc możemy wybrać jedną z 3 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$V_3^6 = 3^6 = 729$$

Odpowiedź: Można utworzyć 729 wyrazów.

Przykład 7

Wypełniając test składający się z 10 pytań, można zakreślić tylko jedną z trzech odpowiedzi. Na ile sposobów można rozwiązać ten test?

Przyjmijmy, że pierwsza odpowiedź to „A”, druga „B”, a trzecia „C”.

Będą to 10-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru 3-elementowego $\{A, B, C\}$.

$$V_3^{10} = 3^{10} = 59049$$

Odpowiedź: Test można rozwiązać na 59049 sposoby.

ZADANIA

5.11.5 Na ile sposobów można ustawić pięcioosobową kolejkę, wybierając ludzi spośród 10 osób?

Odpowiedź: Na 30240 sposobów.

5.11.6 Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5?

Odpowiedź: Wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5 jest 5712.

3.11.7 Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A, B, C, D\}$?

Odpowiedź: 16 wyrazów.

3.11.8 Budynek składa się z 4 pięter. Do windy wchodzi na parterze 6 osób. Na ile sposobów mogą oni opuścić windę na kolejnych piętrach?

Odpowiedź: Na 4096 sposobów.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

1.[27] Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa:

a) 100

b) 99

c) 90

d) 19

2. Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa:

a) 400 zł b) 500 zł c) 600 zł d) 700 zł

3.[28] W loterii liczbowej wylosowano dziesięć liczb: 4, 3, 3, 3, 4, 6, 1, 5, 1, 6. Mediana tych danych jest równa:

a) 5 b) 3,6 c) 3,5 d) 3

4. **(1 pkt)** Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfra jedności należy do zbioru A {2, 4, 5, 7}, cyfra dziesiątek do zbioru B = {6, 7, 8}, a cyfra setek do zbioru C = {2, 4, 5, 6}, jest:

a) 48 b) 36 c) 24 d) 12

27 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

28 Zadania 3, 4: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.

5.[29] Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawione są w tabeli:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	7	6	4	2

Mediana ocen ze sprawdzianu jest równa:

a) 3,5 b) 3, c) 4 d) 4,5

6. W pudełku są 4 kule białe i x kul czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{5}$, gdy:

a) $x = 6$ b) $x = 8$ c) $x = 10$ d) $x = 12$

7.[30] Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

a) $\frac{4}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

8. W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

a) 1 b) 14 c) 7 d) 8

9.[31] Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Mediana zarobków tych 6 osób jest równa:

a) 3400 zł b) 3500 zł c) 6000 zł d) 7000 zł

10. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4. Wówczas:

a) $p < \frac{1}{5}$ b) $p = \frac{1}{5}$ c) $p = \frac{1}{4}$ d) $p > \frac{1}{4}$

11.[32] W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa:

a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 5

12. Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi, B' jest zdarzeniem przeciwnym do B, $P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,12 b) 0,18 c) 0,6 d) 0,9

29 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.
30 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
31 Zadania 9, 10: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 08.03.2013.
32 Zadania 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.

13.[33] Tabela przedstawia zestawienie liczby błędów popełnionych przez zdających część teoretyczną egzaminu na prawo jazdy.

Liczba błędów	0	1	2	x
Liczba zdających	8	4	10	8

Średnia arytmetyczna liczby tych błędów popełnionych przez jednego zdającego jest równa 1,6. Wynika stąd, że:

a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ d) $x = 6$

14. O zdarzeniach A oraz B zawartych w Ω wiadomo, że $P(A) = \frac{5}{6}, P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Wtedy:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ b) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ c) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ d) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

15.[34] Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{18}$

16. Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?". Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

17.[35] Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy:

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

18.[36] Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy?

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

33 Zadania 13, 14: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
34 Zadania 15, 16: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
35 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 09.03.2013.
36 Zadanie 18: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

19.

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	15	17	19	15	19	15

Podaj medianę i dominantę rzutu kostką.

Odpowiedź: $M = 3$, $D = 3$ lub $D = 5$.

ZADANIA OTWARTE

1.[37] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

2.[38] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5} losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania, tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba jest mniejsza od 432.

3.[39] **(4 pkt)** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednej reszki czy wyrzucenie orła w co drugim rzucie?

4.[40] **(2 pkt)** Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości, średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

5.[41] **(2 pkt)** Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

6.[42] **(4pkt)** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki: (1) liczba jest podzielna przez 25, (2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste, (3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

7.[43] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1 ,2, 3,..., 7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

---

37 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 10.03.2013.

38 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

39 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

40 www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 10.03.2013.

41 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 10.03.2013

42 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 10.03.2013.

43 www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 10.03.2013.

8.[44] **(4 pkt)** Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

9.[45] **(4 pkt)** W grupie 200 osób 65% uczy się języka angielskiego, 47% uczy się języka rosyjskiego, a 30% uczy się obu tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z tej grupy osoba nie uczy się żadnego z wymienionych języków.

10. **(2 pkt)** Doświadczenie polega na rzucie dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek będzie większa od 7, ale nie przekroczy 11.

11. **(2 pkt)** Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 6.

12. **(2 pkt)** Z liczb dwucyfrowych wybrano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 5?

13. **(4 pkt)** W urnie A jest 5 kul białych i 3 czarne, w urnie B są 4 kule białe i 6 czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej z urn. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyjmiemy kule w jednym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

14. **(4 pkt)** W urnie jest 7 kul białych i 3 czarne. Losujemy z tej urny jedną kulę, a następnie z pozostałych znowu jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ten sposób wyjmiemy kule w różnych kolorach. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

15. **(5 pkt)** W urnie jest 5 kul białych, 8 zielonych i n niebieskich. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej lub niebieskiej jest równe $\frac{3}{4}$. Wyznacz liczbę n. Odpowiedź: $n = 7$.

16. **(2 pkt)** W urnie jest 16 kul białych, 14 kul zielonych, 6 niebieskich i 4 żółte. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, ęe będzie to kula zielona lub żółta.

17. **(6 pkt)** W urnie znajdują się kule białe, czerwone i zielone. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej jest trzykrotnie większe od prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej lub zielonej. Wiedząc, że co czwarta kula jest biała, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej.

44 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 10.03.2013.
45 Zadania 9–17: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.matematykam.pl
2. www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homo-graficzna
3. www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne
4. www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html
5. www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php
6. www.megamatma.pl
7. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php
8. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
9. www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf
10. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf,
11. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
12. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
13. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf,
14. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf,
15. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf,
16. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
20. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
21. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
22. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
23. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
24. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf

Stowarzyszenie POSTIS
20-091 Lublin, ul. Fieldorfa 7/4
tel. +48 81 524 39 66; fax +48 81 524 39 66
www.postis.pl; e-mail: biuro@postis.pl

Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o. o.
20-086 Lublin, ul. Szewska 4 lok. 7
tel. +48 81 532 84 14; tel./fax +48 81 534 35 50; mobile +48 668 445 503
www.pte.lublin.pl; e-mail: biuro@pte.lublin.pl

Autorzy
Kinga Sarad-Deć, pedagog
Joanna Rusinkiewicz, pedagog
Milena Potręć, nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna, nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak, specjalista ds. Mediów
Grzegorz Kozak, specjalista ds. Mediów
Agnieszka Wróblewska, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Zbigniew Biały, specjalista ds. Ekonomii
Ewa Oleksiejczuk, specjalista ds. Ekonomii
Agata Linkiewicz, specjalista ds. Matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch, specjalista ds. Matematyki
Katarzyna Korona, doradca metodyczny
Dorota Ulikowska, doradca metodyczny
Agnieszka Lewicka-Zelent, koordynator merytoryczny

Skład i opracowanie typograficzne
Ewa Kutkowska
Andrzej Sokulski

Przygotowanie publikacji w wersji elektronicznej
Agencja ORPHA
www.orpha.pl
Systemy Wspomagania Nauczania Sp. z o. o.
www.swn.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY