E – book dla ucznia

Część 3.

LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

ace

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

Uwaga:

Treści rozszerzone zostały oznaczone przez: *

Matematyka

Matematyka

Wstęp

Drogi uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym „Czy zdam maturę z matematyki?”, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1 Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

1.1 Równanie prostej na płaszczyźnie

Teraz nauczę się:
Wyznaczać równanie prostej w postaci kierunkowej przechodzącej przez dany punkt.

Linia prosta lub prosta – to jedno z podstawowych pojęć geometrii[1].

Równaniem prostej k nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu, który do tej proste należy, ale nie jest spełnione przez współrzędne punktów leżących poza prostą k.

Możemy wyznaczać równanie prostej:

- przechodzącej przez dany punkt,
- przechodzącej przez dany punkt i nachylonej do osi OX pod danym kątem,
- przechodzącej przez dwa dane różne punkty.

Równanie prostej można zapisać w postaci:

Postać ogólna

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$

A, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej.

Np. $3x - 5y + 7 = 0, -\frac{1}{2}x + 12y + 2 = 0,\ 0{,}25x - \frac{1}{3}y - 4 = 0$

Postać kierunkowa

$\boldsymbol{y = ax + b}$

a – współczynnik kierunkowy (kątowy) prostej, b – wyraz wolny.

Współczynnik a można obliczyć jako tangens kąta zawartego pomiędzy wykresem prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych a osią OX: $\boldsymbol{a = tg\alpha}$.

1 www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29, 15.03.2013.

W równaniu prostej x i y oznaczają współrzędne dowolnego punktu P należącego do płaszczyzny. Od ich wartości zależy położenie prostej w układzie współrzędnych.

Punkt P należy do prostej tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Przykład 1

Przekształć równanie zapisane:

a) z postaci kierunkowej na postać ogólną

b) z postaci ogólnej na postać kierunkową

Rozwiązanie:

a) Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = 3x - 5$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę: $y - 3x + 5 = 0$

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną: $-3x + y + 5 = 0$

b) Aby przekształcić równanie z postaci ogólnej na kierunkową, wystarczy z zapisu ogólnego wyznaczyć y.

Dane mamy równanie w postaci ogólnej: $2x - 3y + 6 = 0$

Wyznaczamy y: $-3y = -2x - 6 \,/ : (-3)$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$

Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Jeżeli w równaniu ogólnym nie występuje zmienna y, to wyznaczamy x i otrzymujemy równanie prostej prostopadłej do osi OX.

➡ **Równanie prostej o współczynniku kierunkowym $\boldsymbol{a}$ przechodzącej przez punkt $A = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ można zapisać w postaci $\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$**

Przykład 2

Wiedząc, że współczynnik kierunkowy prostej wynosi 5, napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-2{,}6)$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

$y = 5\big(x - (-2)\big) + 6$

$y = 5(x + 2) + 6$

$y = 5x + 10 + 6$

$y = 5x + 11$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (-1,4)$ i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\alpha = 60°$, to $tg60° = \sqrt{3}$.

Równanie prostej ma więc postać: $y = \sqrt{3}x + b$.

Wiemy, że do prostej należy punkt B, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$4 = \sqrt{3} \cdot (-1) + b$

$b = 4 - \sqrt{3}$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$.

ZADANIA

1.1.1 Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym i przechodzącej przez punkt C. Otrzymane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej.

a) $C = (-3,-2), a = -\frac{1}{3}$ b) $C = (0,3), a = -1$

c) $C = (2,5), a = 3$ d) $C = (-2,-2), a = -4$

1.1.2 Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:

a) $P = (-3,4), \alpha = 45°$ b) $P = (6,15), \alpha = 120°$

c) $P = (-1,5), \alpha = 135°$ d) $P = (2,-3), \alpha = 60°$

1.1.3 Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = -2x + 3$. Wyznacz liczbę a, jeśli:

a) $f(2a-4) = 3a+8$ b) $f(4a+1) = f(5a-3)$ c) $f(8-4a) = \frac{22a-23}{3}$

1.2 Równoległość i prostopadłość prostych, a ich współczynnik kierunkowy

Teraz nauczę się:

- Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
- wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt.

Dwie proste są równoległe, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste k i l dane wzorami:

$$(\boldsymbol{k}) \quad \boldsymbol{y = a_1x + b_1}$$

$$(\boldsymbol{l}) \quad \boldsymbol{y = a_2x + b_2}$$

są **równoległe,** jeżeli:

$$\boldsymbol{a_1 = a_2}$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$\boldsymbol{a_1 \cdot a_2 = -1}$$

Przykład 1

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2{,}4)$ i równoległej do prostej o równaniu: $3x - 2y + 4 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$$3x - 2y + 4 = 0$$

$$-2y = -3x - 4 \,/ : (-2)$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Z warunku równoległości wiadomo, że $a = a_1 = \frac{3}{2}$.

Punkt P leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4y = \frac{3}{2}\left(x - (-2)\right) + 4$, więc
$y = \frac{3}{2}(x+2) + 4 = \frac{3}{2}x + 3 + 4 = \frac{3}{2}x + 7$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{3}{2}x + 7$.

Przykład 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (3, -2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu: $3x + 4y - 7 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x + 4y - 7 = 0$

$4y = -3x + 7 \ /:4$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

$a_1 = -\frac{3}{4}$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$y = a(x - x_1) + y_1$

Z warunku prostopadłości wiadomo, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, stąd

$-\frac{3}{4} \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \ a_2 = \frac{4}{3}$

Punkt B leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{4}{3}(x-3) + (-2)y = \frac{4}{3}(x-3) + (-2)$, więc

$y = \frac{4}{3}x - 4 - 2 = \frac{4}{3}x - 6$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{4}{3}x - 6$.

ZADANIA

1.2.1 Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej:

a) $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$

b) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y=\frac{1}{3}x-2$ i przechodzi przez punkt $A=(2,2)$

e) $y=3x-1$ i przechodzi przez punkt $A=(1,2)$

f) $y=-3x-1$ i przechodzi przez punkt $A=(3,3)$

g) $2x-y+1=0$ i przechodzi przez punkt $A=(4,-3)$

h) $x+y-6=0$ i przechodzi przez punkt $A=(1,-2)$

i) $2x+2y+3=0$ i przechodzi przez punkt $A=(-4,-3)$

j) $x-y+4=0$ i przechodzi przez punkt $A=(-2,-5)$

k) $x+y-4=0$ i przechodzi przez punkt $A=(-6,8)$

1.2.2 Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej:

a) $y=2x-3$ i przechodzi przez punkt $A=(2,3)$

b) $y=-5x+4$ i przechodzi przez punkt $A=(2,1)$

c) $y=-\frac{1}{2}x+4$ i przechodzi przez punkt $A=(4,2)$

d) $y=\frac{2}{3}x-2$ i przechodzi przez punkt $A=(6,1)$

e) $y=4x+6$ i przechodzi przez punkt $A=\left(\frac{1}{4},5\right)$

f) $y=-x-3$ i przechodzi przez punkt $A=(-5,2)$

g) $2x-y+1=0$ i przechodzi przez punkt $A=(4,-3)$

h) $y-0{,}5=0{,}3x$ i przechodzi przez punkt $A=\left(10,-\frac{1}{2}\right)$

i) $x+y+3=0$ i przechodzi przez punkt $A=(6,1)$

j) $3x-y=-9$ i przechodzi przez punkt $A=(-2,6)$

1.2.3 Dana jest prosta l o równaniu $y=\frac{3}{2}x-\sqrt{2}$ oraz punkt $A=(-3,-2)$. Wyznacz wzór funkcji liniowej f wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do prostej l, punkt A należy do wykresu funkcji f.

1.2.4 Określ wzajemne położenie prostych:

a) $18x+3y-1=0$ $y=\frac{1}{3}-6x$

b) $y=\frac{7}{8}x+2$ i $7x-8y+24=0$

c) $6x+2y=4$ i $y=\frac{1}{3}x+2$

d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ i $y=3x+4$

e) $x-2y+3=0$ i $2x+y-5=0$

f) $3x-6y+7=0$ i $y=\frac{1}{2}x$

g) $3x-6y+7=0$ i $y=-2x+4$

1.2.5 Proste k i l są prostopadłe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: 2x - 9y + 6 = 0, k: y = ax + 6$

b) $l: y = -\frac{1}{3}x + 2, k: y - ax = 4$

c) $l: 2ax - y + 1 = 0,\ k: x + 2y - 6 = 0$

1.2.6 Proste l i m są równoległe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: y = 2x - 5 = 0, m: y = (3-a)x + 4$

b) $l: y = 3x + 6,\ k: y - ax = 4$

c) $l: y = (a+4)x + 5,\ m: y = 4 + 10x$

d) $l: y = ax + 6,\ m: y = 6 + 19x$

1.3 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Teraz nauczę się:

- Obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- Wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- Sprawdzać, czy punkty są współliniowe.

Punkt przecięcia dwóch prostych

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P. Punkt przecięcia P leży na prostej k i na prostej l, zatem jego współrzędne muszą spełniać jednocześnie równania obu prostych. Współrzędne punktu P otrzymujemy, rozwiązując układ równań.

Przykład 1

Wyznacz punkt przecięcia się prostych danych równaniami: $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$.

Z podanych wzorów funkcji tworzymy układ dwóch równań:

$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -5x + 9 \end{cases}$ wyznaczamy z niego x oraz y.

$3x - 7 = -5x + 9$

$3x + 5x = 9 + 7$

$8x = 16\ /:8$

$x = 2$, więc

$y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Proste określone równaniami $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$ przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Jeśli mamy dane dwa różne punkty na płaszczyźnie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, możemy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Możemy napisać równanie takiej prostej, rozwiązując układ równań lub skorzystać z gotowego wzoru.

Poniższe przykłady przedstawiają obie metody.

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}6)$.

Szukamy równania prostej $y = ax + b$

Prosta przechodzi przez punkty $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}9)$, a to oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają równanie prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = -3a + b \\ 9 = a + b \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania i otrzymujemy:

$$6 - 9 = -3a - a + b - b$$

$$-3 = -4a \ /:(-3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Skoro $9 = a + b,$ to $b = 9 - \frac{4}{3} = 7\frac{2}{3}$

Szukane równanie prostej, to $y = \frac{4}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

Określenie wzoru funkcji przechodzącej przez dwa dane punkty za pomocą wzorów

Mając dane dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, możemy obliczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Gdy mamy współczynnik kierunkowy prostej i punkt, który do tej prostej należy, to możemy już napisać jej wzór, korzystając z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$.

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, opisuje wzór:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-2,3)$ i $B = (4,2)$.

Rozwiązanie:

I sposób :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$(y-3)(4-(-2)) - (2-3)(x-(-2)) = 0$$
$$(y-3)\,(4+2) - (-1)\,(x+2) = 0$$
$$(y-3)\cdot(6) + 1\cdot(x+2) = 0$$
$$6y - 18 + x + 2 = 0$$
$$6y = -x + 16$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{16}{6}$$
$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$$

II sposób:

1. Zapisujemy równanie szukanej prostej w postaci kierunkowej, czyli: $y = ax + b$.

2. W kolejnych krokach będziemy wyznaczać współczynniki a i b.

3. Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do równania prostej:

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

4. Podstawiamy współrzędne drugiego punktu do równania prostej: $y_B = a \cdot x_B + b$

5. Rozwiązujemy układ równań

$$y_A = a \cdot x_A + b$$

$$y_B = a \cdot x_B + b$$

otrzymując szukane parametry a i b.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \;/\cdot(-1) \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3 = 2a - b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$-1 = 6a \;/:6$$
$$a = -\frac{1}{6}$$

Podstawiamy do pierwszego równania z układu równań za $a = -\frac{1}{6}$, dzięki temu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b, którą obliczamy:

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + b$$

$$3 = \frac{1}{3} + b$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Otrzymane równanie ma postać: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$.

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2,4)$ i $B = (-3,5)$. Znajdź prostą przechodzącą przez te punkty.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-4}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Korzystamy z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$ i piszemy równanie prostej:

$$y = -\frac{1}{5}(x - (-3)) + (-3) = -\frac{1}{5}(x+3) - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3$$

Ostatecznie prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{3}{5}$.

ZADANIA

1.3.1 Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty:

a) A = (–2,–10), B = (1,–1) b) A = (–3,9), B = (2,–1) c) A = (0,6), B = (6,0)

d) A = (–2,–1), B = (3,0) e) A = (–12,4), B = (3,1) f) A = (8,4), B = (1,–1)

1.3.2 Oblicz brakujące współrzędne punktów, jeśli wiadomo, że należą do danej prostej:

a) $y = \frac{3}{2}x + 2$, $P = (-2, y)$ b) $2x - 3y = 2$, $P = (\frac{1}{2}, y)$

c) $y = 9x - 3$, $P = (x, -6)$ d) $\frac{x}{-7} + \frac{2y}{7} = 1$, $P = (x, -\frac{2}{3})$

1.3.3 Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a wiedząc, że do tej prostej należy punkt M:

a) $a = 0$, $M = (-2,-3)$ b) $a = 3$, $M = (6,-2)$

c) $a = -\frac{3}{4}$, $M = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ d) $a = -5$, $M = (2,3)$

1.3.4 Napisz równanie prostej, do której należą punkty:

a) $A = (-1{,}7),\ B = (3, -5)$

b) $A = (-4{,}4),\ B = (2{,}7)$

c) $A = (-5{,}0),\ B = (5, -6)$

d) $A = \left(1, \frac{1}{12}\right),\ B = \left(3, -\frac{17}{12}\right)$

e) $A = (-2{,}6), B = \left(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$

f) $A = (2{,}1),\ B = (-4{,}2)$

g) $A = (2{,}6),\ B = (-1, -7)$

h) $A = (2{,}4),\ B = (5, -5)$

1.3.5 Sprawdź, czy punkty są współliniowe:

a) $A = (2, 1), B = (4, 5), C = (-3, -9)$

b) $A = (-1, -6), B = (0, -6), C = (12, 0)$

c) $A = (-5, 3), B = (2, 3), C = (4, 3)$

d) $A = (2, 0), B = (2, -4), C = (2, 8)$

1.4 Odległość punktów

Teraz nauczę się:

- Obliczać odległość dwóch punktów;
- Odległość punktu od prostej.

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Odległość punktu A od B liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Przykład 1

Oblicz odległość punktów A i B od siebie, gdy $A = (7,\ 6), B = (-5, 4)$.

Podstawiamy do wzoru:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{144 + 4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Odpowiedź: Odległość punktu A od punktu$B$ wynosi $2\sqrt{37}$.

Odległość punktu od prostej to w istocie długość odcinka, którego początkiem jest dany punkt i opuszczonego na prostą pod katem prostym.

Dana jest prosta k o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ i punkt $P = (x_1, x_2)$, który leży poza prostą k.

Odległość punktu P od prostej k wyraża się wzorem:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Obliczając odległość punktu od prostej, możemy korzystać z powyższego wzoru lub wykonać następujące kroki:

1. Napisać wzór prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.

2. Obliczyć punkt przecięcia danej prostej i prostej do niej prostopadłej.

3. Obliczyć długość odcinka, którego końce to dany w zadaniu punkt i punkt obliczony w punkcie drugim. Długość tego odcinka jest szukaną przez nas odległością punktu A od prostej k.

Przykład 2

Dane są: prosta $k\colon y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2{,}3)$. Obliczmy odległość punktu A od prostej k.

Rozwiązanie:

1. Napiszmy wzór prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.
Jeśli prosta l jest prostopadła do prostej k, to współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $-\frac{1}{2}$.
Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (1{,}3)$, więc:

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Równanie prostej $l\colon y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Obliczamy punkt przecięcia prostej k i prostej do niej prostopadłej.
Rozwiązujemy układ równań złożony ze wzorów obu funkcji

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x = 0{,}4$$

$$y = 2 \cdot 0{,}4 + 3 = 3{,}8$$

Punkt przecięcia prostych k i l ma współrzędne $B = (0{,}4;\, 3{,}8)$

3. Obliczamy długość odcinka AB, czyli odległość punktu A od prostej k.

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}4 - 2)^2 + (3{,}8 - 3)^2} = \sqrt{2{,}56 + 9}$$
$$= \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$$

Odpowiedź: Odległość punktu A od prostej k wynosi 3,4.

Przykład 3

Korzystając z danych z przykładu 2, obliczymy odległość punktu A od prostej k, korzystając ze wzoru $d(P,k) = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

A, B i C to współczynniki prostej z jej postaci ogólnej, natomiast x_1, y_1 to współrzędne danego punktu.

Mamy dane: prostą $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$y = 2x + 3$

$2x - y + 3 = 0$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

ZADANIA

1.4.1 Oblicz długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców:

a) $A = (1,1), B = (4,7)$

b) $A = (-5,2), B = (3,2)$

c) $A = (2,-5), B = (-3,4)$

d) $A = (-1,-4), B = (8,4)$

e) $A = (2,-2), B = (4,5)$

f) $A = (3,-5), B = (4,4)$

g) $A = (6,8), B = (10,0)$

h) $A = (8,0), B = (-2,5)$

1.4.2 Oblicz odległość punktu A od prostej k:

a) $A = (1,4), k: 4x - 2y - 16 = 0$

b) $A = (-5,4), k: y = -2x + 1$

c) $(-2,3), k: 3x - 4y + 2 = 0$

1.4.3 W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-4,2), B = (5,4)$.

a) Oblicz odległość punktu $C = (-1,4)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B.

b) Uzasadnij, że jeśli $m \neq 0$, to punkty A, B oraz punkt $D = (-1, m)$ są wierzchołkami trójkąta.

1.5 Współrzędne środka odcinka

Teraz nauczę się:

- Wyznaczać współrzędne środka odcinka.

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Środek odcinka, mając dane współrzędne jego końców A i B. liczymy ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Przykład 1

Podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach: A = (3, –5), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3 + 6}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) = (4{,}5;\ -1)$$

Przykład 2

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S = (-3, 6)$. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B = (4, -2)$.

Zajmijmy się osobno współrzędną x i osobno współrzędną y.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -3$$

$$\frac{x_1 + 4}{2} = -3$$

$$x_1 + 4 = -6$$

$$x_1 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 6$$

$$\frac{y_1 + (-2)}{2} = 6$$

$$y_1 - 2 = 12$$

$$y_1 = 14$$

Odpowiedź: Współrzędne punktu A wynoszą $(10{,}14)$.

ZADANIA

1.5.1 Podaj środki odcinków, których końce mają współrzędne:

a) $A = (-8,5), B = (0,11)$
b) $A = (3,-5), B = (-13,7)$
c) $A = (-2,3), B = (4,-9)$
d) $A = (1,7), B = (-5,-2)$
e) $A = (5,3), B = (1,3)$
f) $A = (-6,1), B = (4,3)$
g) $A = (-4,-8), B = (2,1)$
h) $A = (-4,5), B = (8,7)$
i) $A = (-4,-7), B = (10,-3)$
j) $A = (0,6), B = (-12,16)$

1.5.2 Dany jest odcinek o końcach w punktach $A = (-2,4)$ i $B = (6,-2)$.

a) Wyznacz współrzędne środka odcinka.

b) Oblicz długość tego odcinka.

c) Wyznacz równanie prostej równoległej do odcinka przechodzącej przez punkt $C = (0,3)$.

1.5.3 Dany jest odcinek $|AB|$, w którym dany jest środek S i koniec B. Wyznacz współrzędne punktu A.

a) $S = (2,-5), B = (9,-3)$
b) $S = (-3,6), B = (2,5)$
c) $S = (2,4), B = (5,8)$
d) $S = (2,7), B = (-3,5)$
e) $S = (2,1), B = (-5,6)$

1.5.4 Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, jeżeli środki jego boków mają współrzędne: $P = (1,3), Q = (-5,4), R = (-6,7)$.

1.5.5 Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek o końcach $A = (29,-15)$ i $B = (45,13)$ w stosunku $|AP|:|PB| = 1:3$.

1.5.6 W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

1.5.7 Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A = (4,6), B = (3,5)$
b) $A = (3,1), B = (-4,-8)$
c) $A = (3,1), B = (-1,7)$
d) $A = (-1,3), B = (1,1)$
e) $A = (1,1), B = (5,5)$
f) $A = (-2,4), B = (6,8)$

1.6 Równanie okręgu*

Teraz nauczę się:

- Posługiwać równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oraz opisywać koła za pomocą nierówności;
- Wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu.

Równanie okręgu

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r.

Niech punkt $P = (a, b)$ leży w dowolnym miejscu na okręgu. Zapiszmy teraz zależność dowolnego punktu P leżącego na okręgu i jego odległości od środka okręgu.

$|OP| = r$, i na mocy definicji odległości dwóch punktów, otrzymujemy:

$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$

$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} \ /\cdot^2$

$r^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$, ma postać:

$\boldsymbol{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2}$ **(postać kanoniczna)**

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$ **(postać ogólna), gdzie $\boldsymbol{r^2 = a^2 + b^2 - c}$**

Przykład 1

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 6)$ i promieniu: 4

$\big(x - (-2)\big) + (y - 6) = 4^2$

$(x + 2) + (y - 6) = 16$

Przykład 2

Podaj wzór okręgu o środku w punkcie $S = (-2, -7)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A = (-6, -4)$.

Mamy dane współrzędne środka okręgu, które możemy podstawić do wzoru:

$(x + 2)^2 + (x + 7)^2 = r^2$

Musimy obliczyć promień okręgu. Możemy to zrobić, podstawiając współrzędne punktu $A = (-6, -4)$ do wzoru:

$(-6 + 2)^2 + (-4 + 7)^2 = r^2$

$(-4)^2 + 3^2 = r^2$

$16 + 9 = r^2$

$25 = r^2$

$r = 5$

Równanie okręgu ma wtedy postać: $(x+2)^2 + (x+7)^2 = 25$.

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli a, b oraz r.

Przykład 3

Przekształć równanie okręgu, które dane jest w postaci ogólnej, na postać kanoniczną.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

Szukamy najpierw współrzędnych środka okręgu.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

$-2a = 4$

$a = -2$

$-2b = -6$

$b = 3$

Obliczamy długość promienia wiedząc, że $r^2 = a^2 + b^2 - c$

$r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - 4 = 4 + 9 - 4 = 9$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ w punkcie $P = (-2{,}3)$.

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ – okrąg o środku w punkcie $S = (3{,}4)$ i promieniu $r = 1$.

Prosta styczna do okręgu w punkcie P jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty: $S = (3{,}4)$ i $P = (-2{,}3)$.

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty:

$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$

$\big(y - (-2)\big)(-2 - 3) - (3 - 4)(x - 3) = 0$

$(y + 2) \cdot (-5) - (-1)(x - 3) = 0$

$-5y - 10 + x - 3 = 0$

$x - 5y - 13 = 0$

$y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$

Prosta styczna do okręgu w punkcie A jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$, więc jej równanie to: $y = -5x + b$.

Skoro punkt P należy do prostej $y = -5x + b$, to:

$3 = -5 \cdot (-2) + b \;\Rightarrow b = -7$

Równanie stycznej do okręgu ma postać: $y = -6x - 7$.

Koło – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu na tej płaszczyźnie (środka koła) nie przekracza pewnej wartości (promienia koła).

Koło w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisane wzorem:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0})^2 \le \boldsymbol{r^2}$$

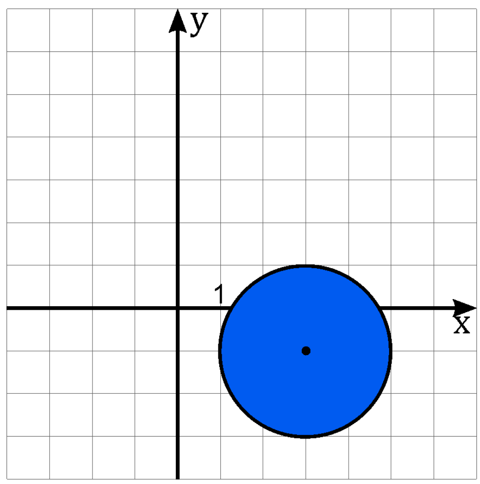
gdzie $r > 0$ – promień koła, (x_0, y_0) – współrzędne środka koła[2]

Przykład 5

Narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$(x-3)^2 + (y+1)^2 \le 4$

Nierówność opisuje koło o środku w punkcie $S = (3, -1)$ i promieniu $r = 2$.



ZADANIA

1.6.1 Wyznacz środek i długość promienia okręgu:

a) $(x-4)^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + (y+3)^2 = 9$ c) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$

d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ e) $(x+6)^2 + (y+10)^2 = 64$ f) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 8$

1.6.2 Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

a) $S = (-4,6), r = 5$ b) $S = (1,2), r = 3$ c) $S = (0,0), r = \sqrt{2}$

d) $S = (-4,1), r = \sqrt{7}$ e) $S = (6,-2), r = 1$ f) $S = (0,1), r = 2$

2 www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o, 19.02.2013.

1.6.3 Podaj równanie okręgu o ośrodku w punkcie $S = (6, -11)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A = (6, -1)$.

1.6.4 Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt przecięcia prostych $7x - y - 3 = 0$ i $4y - 3x - 13 = 0$ i do którego należy punkt $P = (5,6)$.

1.6.5 Zapisz wzór okręgu za pomocą postaci kanonicznej:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 27 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

1.6.6 Punkt $K = (-1,9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $L = (2,0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

1.6.7 Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $S = (0,3)$ i promieniu $r = \sqrt{6}$ z prostą o równaniu $3x + y - 15 = 0$.

1.6.8 Napisz nierówność, która opisuje koło o promieniu r i środku w punkcie S:

a) $S = (-1,5), r = 4$

b) $S = (-3,0), r = \sqrt{3}$

c) $S = (-1, -2), r = \sqrt{2}$

d) $S = \left(4, \frac{1}{2}\right), r = 3$

1.6.9 Określ położenie punktów $A = (1,0), B = (3,3), C = (4, -1)$ względem koła o środku w punkcie $S = (-1,3)$ i promieniu $r = 4$.

1.6.10 Oblicz odległość punktu A od środka koła $(x-3)^2 + y^2 \leq 9$ oraz określ położenie punktu A względem tego koła, jeżeli:

a) $A = (3, -3)$

b) $A = (4,2)$

c) $A = (-2, -3)$

1.6.11 Przedstaw w prostokątnym układzie współrzędnych figurę

a) $F = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x - 2y + 2 < 0\}$

b) $F = \left\{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge (x-7)^2 + (y+2)^2 \leq 36 \wedge (x-5)^2 + y^2 \geq 4\right\}$

c) $F = \left\{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \wedge (x-2)^2 + y^2 > 16 \wedge (x-6)^2 + y^2 < 4\right\}$

1.7 Symetria osiowa i środkowa

Teraz nauczę się:

- Znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Symetria – słowo greckie, oznaczające regularny układ, harmonię między częściami całości.

Świat jest pełen symetrii, obcujemy z nią na co dzień: w świecie roślinnym, w budowie organizmów żywych, w sztuce, w budownictwie, w technice i w geometrii.

Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A', leżący:

- na prostej prostopadłej do tej prostej k i przechodzącej przez punkt A;
- w tej samej odległości od prostej k, co punkt A;
- po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A[3].

Symetrię osiową względem prostej k oznaczamy S_k.

Twierdzenie

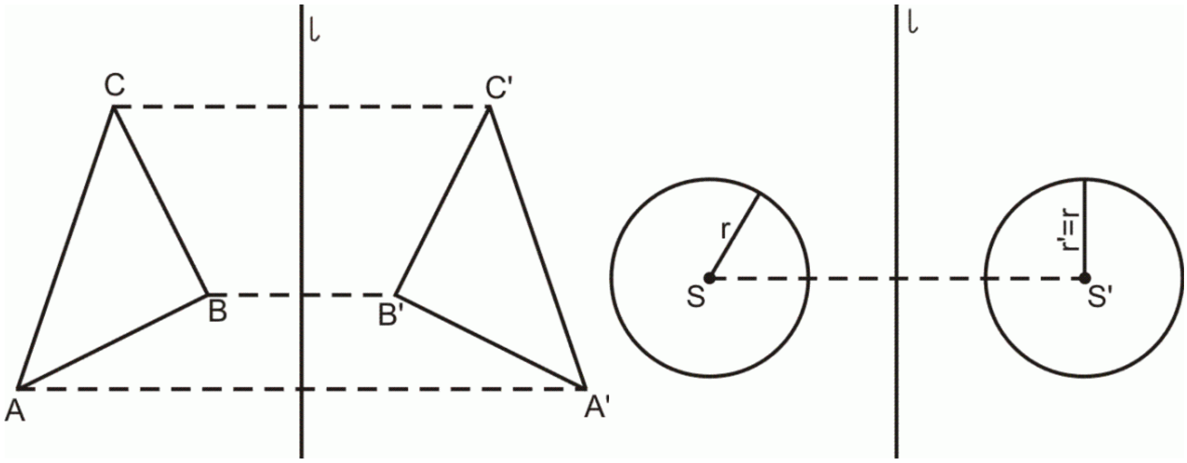
Symetria osiowa jest izometrią. Symetria osiowa, jak każda izometria, zachowuje kształt figury i jej wymiary.

Izometria – przekształcenie geometryczne (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje odległość punktów, czyli odległość między dwoma dowolnymi punktami A i B jest równa odległości między ich obrazami A' i B'.

W symetrii osiowej:

- Obrazem trójkąta względem dowolnej prostej jest trójkąt do niego przystający.
- Obrazem okręgu względem dowolnej prostej jest okrąg o tym samym promieniu.
- Obrazem odcinka jest odcinek takiej samej długości.
- Obrazem prostej jest prosta.

3 www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.



Rysunek 1-1. Przykłady figur symetrycznych

Prostą, względem której figura jest sama do siebie symetryczna, nazywamy **osią symetrii** tej figury. Natomiast figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną.**

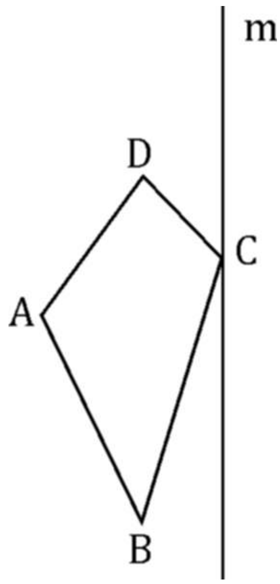
Przykład 1

Figury osiowosymetryczne to, np.:

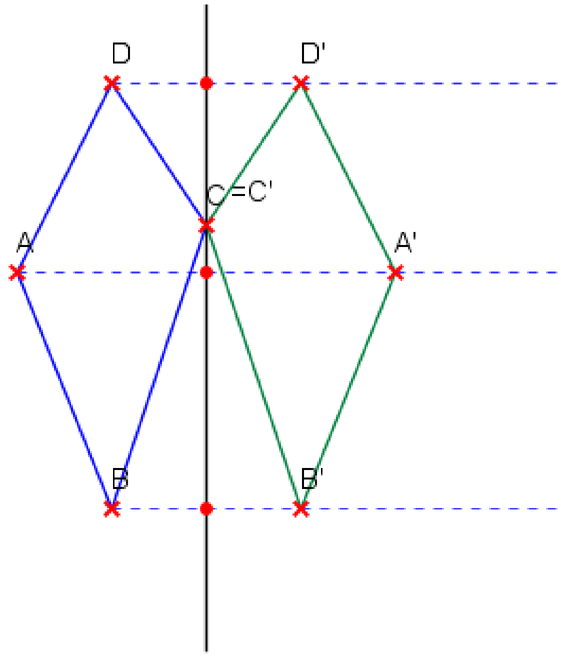
- Odcinek – 2 osie symetrii.
- Kwadrat – 4 osie symetrii.
- Okrąg (koło) – nieskończenie wiele osi symetrii.
- Kąt – 1 oś symetrii (prosta zawierająca dwusieczną kąta).
- Trójkąt równoboczny – 3 osie symetrii.

Przykład 2

Wyznacz konstrukcyjnie obraz figury w symetrii względem danej prostej.



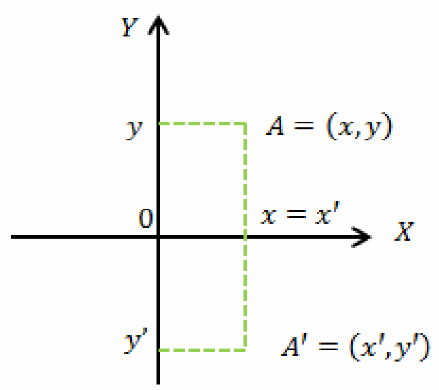
1. Prowadzimy proste prostopadłe do prostej m, przechodzące przez punkty A, B, C, D.
2. Za pomocą cyrkla mierzymy odległość punktu A od prostej m i odkładamy taki sam odcinek po przeciwnej stronie prostej, i otrzymujemy punkt A' symetryczny do punktu A.
3. Analogicznie postępujemy z pozostałymi punktami.
4. Łączymy punkty $A', B', C' D'$ i otrzymujemy figurę symetryczną do danej względem prostej m.



Rysunek 1-2. Figury symetryczne

Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi OX.

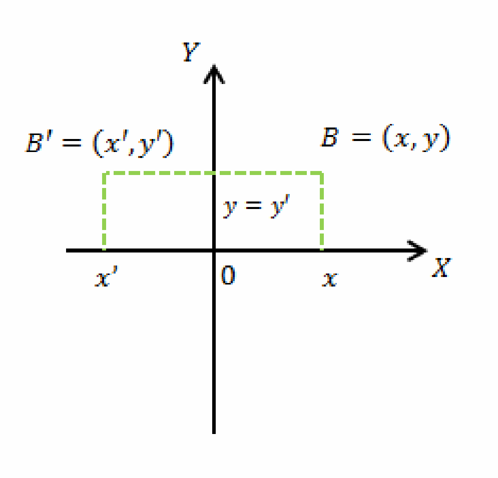


Rysunek 1-3. Symetria względem osi OX

Jak widać na rysunku 3, pierwsze współrzędne obydwu punktów są takie same, natomiast drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Symetria względem osi OY.



Rysunek 1-4. Symetria względem osi OY

Jak widać na rysunku 4, pierwsze współrzędne punktów B i B' są liczbami przeciwnymi, natomiast drugie są równe.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A' = (x, -y)$

Obrazem punktu $B = (x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $B' = (-x, y)$

Symetria środkowa

Symetrią środkową względem punktu O, zwanego środkiem symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O jest stały, a każdemu innemu punktowi A przyporządkowuje się punkt A' taki, że punkt O jest środkiem odcinka AA'.

Symetrię względem punktu O będziemy oznaczać symbolem S_o.

Twierdzenie

Symetria środkowa względem punktu O jest izometrią.

Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest punkt O.

Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej S_o jest ta sama figura. Figurę F nazywamy środkowosymetryczną.

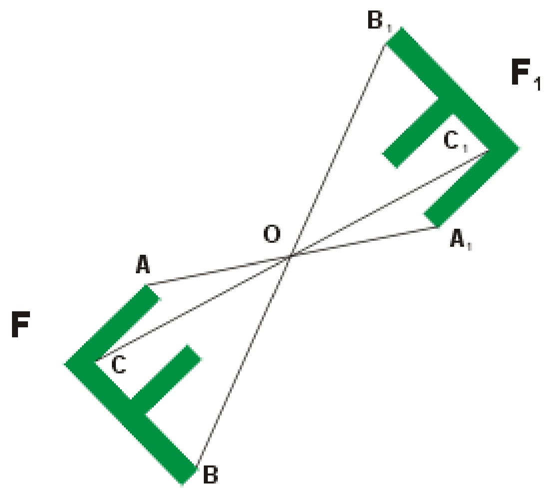
Przykład 3

Figury środkowosymetryczne to, np.:

- Koło (okrąg) – środek koła.
- Odcinek – środek odcinka.
- Prostokąt – punkt przecięcia jego przekątnych.

Przykład 4

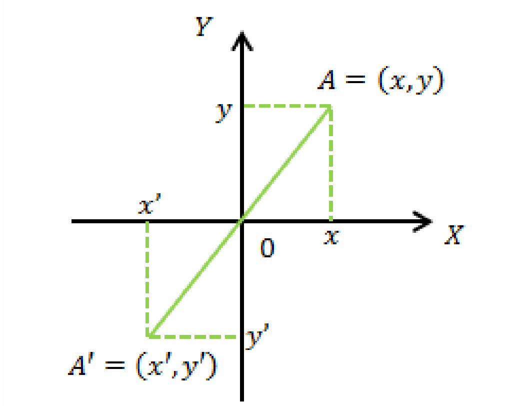
Przykład figury środkowosymetrycznej.



Rysunek 1-5. Przykład figury środkowosymetrycznej4

Trójkąt to figura, która **nie ma** środka symetrii.

Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych



Rysunek 1-6. Symetria względem punktu (0,0)

Jak widać na rysunku 5, pierwsze współrzędne punktów A i A', jak i drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$

4 www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa, 06.03.2013.

ZADANIA

1.7.1 Podaj współrzędne obrazu punktu M w symetrii względem osi OX, OY, o początku układu współrzędnych:

a) $M=(5,-9)$ b) $M=\left(3,-2+\sqrt{3}\right)$ c) $M=\left(\frac{4}{7},-2\frac{3}{4}\right)$

d) $M=(2,3)$ e) $M=(-5,-7)$

1.7.2 Trójkąt ABC, w którym $A=(-5,2)$, $B=(6,-3)$, $C=(1,4)$, przekształcono symetrycznie względem:

a) osi x,

b) osi y,

c) początku układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkątów otrzymanych po przekształceniu.

1.7.3 Podaj przykłady liter, liczb lub wyrazów, które są figurami osiowosymetrycznymi.

1.7.4 Oblicz, dla jakich wartości parametru m i n punkty A i B są symetryczne względem osi z, gdy: $A=(3,-n)$ i $B=(m+2,1)$.

1.7.5 Jakim zbiorem: pustym, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór osi symetrii kwadratu?

1.7.6 Wyznacz równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu:

$x^2+y^2+10x-2y+19=0$ względem prostej: $y=2x+1$.

1.7.7 Znajdź obraz okręgu: $x^2+y^2=4$ w symetrii względem prostej: $y=2x+4$.

1.7.8 Trójkąt o wierzchołkach $A=(-2,3), B=(-4,1), C=(2,6)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktów będących obrazami wierzchołków trójkąta ABC w tym przekształceniu.

Ciekawostka

Ambigram – grafika utworzona kaligraficznie lub obrazowo w taki sposób, że po obróceniu całości można odczytać ten sam tekst[5].
Inaczej mówiąc, ambigramy to grafiki środkowosymetryczne.

Przykłady ambigramów

Rysunek 1-7. Przykłady ambigramów[6]

Palindrom (gr. *palindromeo* – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej. Przykładem palindromu jest: *Kobyła ma mały bok*. Współcześnie palindromy pełnią funkcję gry słownej[7].

Najdłuższy polski palindrom, autorstwa Tadeusza Morawskiego, ma ponad 33 tysiące liter.

Przykłady palindromów:

„Gór ech chce róg"

„Żartem dano nadmetraż"

„Może jeż łże jeżom"

„Zagwiżdż i w gaz"[8]

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[9] Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu:

a) $y = -\frac{1}{3}x - 1$ b) $y = \frac{1}{3}x + 1$ c) $y = 3x + 1$ d) $y = 3x - 1$

5 www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram, 09.03.2013.
6 www. violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd, 07.03.2013.
7 www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom, 09.03.2013.
8 pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski, 21.02.2013.
9 Zadania 1, 2: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Próbna matura z matematyki, listopad 2009, 05.03.2013.

2. Prosta o równaniu $y = -4x + (2m - 7)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Wtedy:

a) $m = 7$ b) $m = 2\frac{1}{2}$ c) $m = -\frac{1}{2}$ d) $m = -17$

3.[10] Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy:

a) $m = -\frac{2}{3}$ b) $m = -\frac{1}{3}$ c) $m = \frac{1}{3}$ d) $m = \frac{5}{3}$

4.[11] Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$.

a) $y = -2x + 1$ b) $y = 0{,}5x - 1$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $y = 2x - 1$

5.[12] Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(2, 1)$.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = -x + 1$

6.[13] Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

a) są równoległe i różne

b) są prostopadłe

c) przecinają się pod kątem innym niż prosty

d) pokrywają się

7.[14] Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$:

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -\frac{1}{2}x$ c) $y = 2x$ d) $y = -2$

8. Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

a) $(-5, -2012)$ b) $(-2012, -5)$ c) $(2, -7)$ d) $(-2012, 5)$

9. Na okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$ leży punkt:

a) $A = (-2, 5)$ b) $B = (2, -5)$ c) $C = (2, -7)$ d) $D = (7, -2)$

10.[15] Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (4, -3)$ i $B = (-1, -13)$. Funkcja f opisana jest wzorem:

a) $f(x) = 2x - 11$ b) $f(x) = 2x + 11$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

---

10 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2010, 05.03.2013.
11 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011, 05.03.2013.
12 Zadanie zaczerpnięte z: Arkusz maturalny CKE, maj, 2011, 05.03.2013.
13 Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Matura próbna, listopad, 2010, 05.03.2013.
14 Zadania 7, 8, 9: zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 05.03.2013.
15 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte z CKE (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.phparkusze), 05.03.2013.

11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Środkiem S tego okręgu jest punkt:

a) $S=(-3,-4)$ b) $S=(3,4)$ c) $S=(3,-4)$ d) $S=(-3,4)$

12. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x-6y+7=0$.

a) $y=\frac{1}{2}x$ b) $y=-\frac{1}{2}x$ c) $y=2x$ d) $y=-2x$

13.[16] Prostą przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A=(1,1)}$ i równoległą do prostej $\boldsymbol{y=0,5x-1}$ opisuje równanie:

a) $y=-2x-1$ b) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ c) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ d) $y=2x-1$

14. Proste: $y=-3x+4$ i $y=\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{4}{3}\right)x$ są prostopadłe, jeżeli:

a) $a=-2$ b) $a=2$

c) $a=\sqrt{5}$ d) $a=-\sqrt{5}$ lub $a=\sqrt{5}$

15.[17] Proste l i k są prostopadłe i $l: 2x-9y+6=0, k: y=ax+b$. Wówczas:

a) $a=-\frac{2}{9}$ b) $a=\frac{2}{9}$ c) $a=-\frac{9}{2}$ d) $a=\frac{9}{2}$

16. Równanie $(x+6)^2+y^2=4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

a) $S=(-6,4), r=4$ b) $S=(6,0), r=4$ c) $S=(6,0), r=2$ d) $S=(-6,0), r=2$

17. (**5 pkt**) Prosta $y=x+4$ przecina okrąg o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

18. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y=-\frac{1}{3}x+2$:

a) $y=3x$ b) $y=-3x$ c) $y=3x+2$ d) $y=\frac{1}{3}x+2$

19. Punkty $B=(-2,4)$ i $C=(5,1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

a) 74 b) 58 c) 40 d) 29

20. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2+(y-6)^2=100$. Środek tego okręgu ma współrzędne:

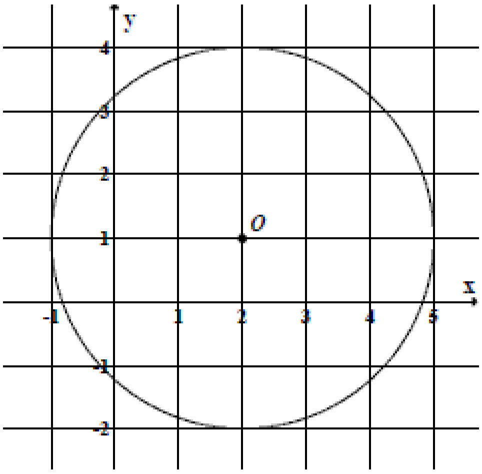
a) $(-4,-6)$ b) $(4,6)$ c) $(4,-6)$ d) $(-4,6)$

---

16 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, styczeń. 2013 (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 05.03.2013.

17 Zadania 15, 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad 2012 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf), 05.03.2013.

21.[18] Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Równanie tego okręgu ma postać



A. $(x-2)^2+(y-1)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=3$

C. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

D. $(x+2)^2+(y+1)^2=3$

22. Punkt $S = (2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

a) $B = (5,11)$ b) $B = \left(\frac{1}{2},2\right)$ c) $B = \left(-\frac{3}{2},-5\right)$ d) $B = (3,11)$

23. Proste o równaniach $y = 2x - 5$ i $y = (3 - m)x + 4$ są równoległe. Wynika stąd, że::

a) $m = 1$ b) $m = \frac{5}{2}$ c) $m = \frac{7}{2}$ d) $m = 5$

24. Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2,\ 1)$.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x + 5$ d) $y = -x + 1$

25. Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu:

a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $y = 0$ d) $y = 4$

26. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy:

a) $-\frac{1}{3}$ b) -3 c) $\frac{1}{3}$ d) 3

27. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6:

a) $x^2 + y^2 = 3$ b) $x^2 + y^2 = 6$ c) $x^2 + y^2 = 12$ d) $x^2 + y^2 = 36$

28. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

a) 30 b) $4\sqrt{5}$ c) $12\sqrt{5}$ d) 36

18 Zadania21, 22: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, czerwiec, 2012 (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf), 05.03.2013.

29. **(5 pkt)** Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2,-1), B = (4,2), C = (5,1)$. Wyznacz:

a) Pole trójkąta ABC.

b) Równanie zawierające wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

30. **(4 pkt**) W rombie $ABCD$ dane są $A = (-3,-1)$ i punkt przecięcia przekątnych $M = (9,3)$. Wiadomo, że punt B leży na prostej $2x - y - 25 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

31. (2 pkt) Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-1,-1), B = (5,2)$, $C = (3,3), D = (1,2)$ jest trapezem?

32. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0,-3)$ i jest prostopadły do prostej $y = 2x - 4$.

33. **(2 pkt)** Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$.

34. **(2 pkt)** W trójkącie równoramiennym $\boldsymbol{ABC}$ o podstawie $\boldsymbol{AB}$ poprowadzono wysokość z wierzchołka $\boldsymbol{C}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli $\boldsymbol{A = (2,8)}$, $\boldsymbol{B = (-2,4)}$.

35. **(4 pkt)** Oblicz pole i obwód rombu $\boldsymbol{ABCD}$ wiedząc, że przekątna $\boldsymbol{AC}$ jest zawarta w prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 2}$ oraz $\boldsymbol{A = (-1,-4)}$ i $\boldsymbol{D = (-6,6)}$.

36.[19] **(6 pkt)** Wyznacz współrzędne punktu $\boldsymbol{BB}$, który jest symetryczny do punktu $\boldsymbol{A = (3,2)}$ względem prostej $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x - 6}$.

37. **(4 pkt)** Dany jest trójkąt równoramienny $\boldsymbol{ABC}$, w którym $|\boldsymbol{AC}| = |\boldsymbol{BC}|$ oraz $\boldsymbol{A = (2,1)}$ i $\boldsymbol{C = (1,9)}$. Podstawa $\boldsymbol{AB}$ tego trójkąta jest zawarta w prostej $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$. Oblicz współrzędne wierzchołka $\boldsymbol{B}$.

38.[20] **(4 pkt)** Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu przechodzącej przez jeden z tych punktów.

39.[21] **(4 pkt)** Okrąg o środku w punkcie $\boldsymbol{S = (3,7)}$ jest styczny do prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 3}$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

19 (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 06.03.2013.
20 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf), 06.03.2013.
21 (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013), 06.03.2013.

2 Wielomiany*

2.1 Pojęcie wielomianu

Wielomian – w matematyce wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i podnoszenia do potęgi o stałym wykładniku naturalnym[22].

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Stopień wielomianu jest to najwyższy ze stopni jego składników (jednomianów) o niezerowych współczynnikach. Dla wielomianu jednej zmiennej jest to największa potęga zmiennej, która występuje w wielomianie.[23]

Przykład 1

Przykłady wielomianów oraz ich stopień:

$W(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7$ – wielomian stopnia 4

$G(x) = 5x^6 + 9x^3 - 7$ – wielomian stopnia 6

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ – wielomian stopnia 2

$Q(x) = 8$ – wielomian stopnia 0

Wielomiany zapisujemy zazwyczaj w postaci uporządkowanej.

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x

Przykład 2

Wyznacz wartości parametrów a i b, tak aby wielomiany $P(x) = x^3 + x^2 + 12x - 8$ oraz $W(x) = x^3 + (2a - b)x^2 + (3b - 2a)x - 8$ były równe.

22 pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian, 27.02.2013.
23 pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.

Wielomiany $P(x)$ i $W(x)$ są tego samego stopnia. Musimy sprawdzić, dla jakich wartości a i b współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3b - 2a = 12 \end{cases}$$

$2b = 13 \quad \Rightarrow b = 6{,}5$

$2a = 1 + 6{,}5 \;\Rightarrow a = 3{,}75$

$W(x) = P(x) \;\Leftrightarrow a = 3{,}75 \;\wedge b = 6{,}5$

ZADANIA

2.1.1 Dany jest wielomian $W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 7$, oblicz:

a) $W(2)$ b) $W(-1)$ c) $W(\sqrt{3})$ d) $W\left(-\frac{1}{2}\right)$

2.1.2 Podane wielomiany uporządkuj malejąco i podaj ich stopień.

a) $P(x) = 6x^5 - 2 + 4x^2 + 9x$

b) $P(x) = 7x^3 + 12 - 9x^6 + 14x + 3x^2$

c) $P(x) = -8x^{19} + 3x^9 - 7x^{15} + 6x$

d) $P(x) = -2 + x^6 + x^{11} - 6x^3$

2.1.3 a) Dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax - b$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 4$.

b) Dany jest wielomian

$W(x) = 3x^4 + ax^3 - bx^2 - 3$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(-1) = 2, W(-1) = 5$.

c) Dany jest wielomian

$W(x) = x^3 + 3ax^3 - 2bx^2 + 6$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 5, W(2) = 8$.

d) Dany jest wielomian $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx^2 + c$. Oblicz a, b i c wiedząc, że $W(-1) = 3, W(2) = 9$.

e) Dany jest wielomian

$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$. Oblicz a, b, c wiedząc, że: $W(-1) = 1,\; W(0) = 1,$ $W(1) = -1$

2.1.4 Wyznacz wartości parametrów a i b (lub a, b i c), tak aby wielomiany $W(x)$ i $P(X)$ były równe.

a) $W(x)=(3a-1)x^3+(2b-a)x^2+(a+b)x-4,\ P(x)=2x^3-5x^2-x-4$

b) $W(x)=ax^3+bx^2+cx+4,\ \ P(x)=cx^3+2ax^2+ax+b$

c) $W(x)=ax^3+bx^2-9x+c,\ \ P(x)=(b-1)x^3+(a+1)x^2+3bx-2a$

d) $W(x)=ax^3+7x^2-bx-3c,\ \ P(x)=(4b+c)x^2+(c+2)x+15-a$

e) $W(x)=(a+1)x^3+3x^2-5cx-2,\ \ P(x)=2x^3+bx^2-12x-2$

2.2 Działania na wielomianach

Teraz nauczę się:

- Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
- Rozszerzać i skracać wyrażenia wymierne;
- Dzielić wielomiany przez dwumian

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dodawanie i mnożenie wielomianów jest łączne i przemienne, zachodzi również rozdzielność mnożenia wielomianów względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na redukcji wyrazów podobnych.

Dodawanie wielomianów

Aby dodać dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, dodajemy do siebie wszystkie wyrazy podobne tych wielomianów i porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 1

Dodaj wielomiany:

a) $W(x)=-3x^4+4x^3+7x^2-9x+3$ oraz $P(x)=3x^4+5x^3+4x^2+6x-4$

$$\begin{aligned}W(x)+P(x)&=-3x^4+4x^3+7x^2-9x+3+3x^4+5x^3+4x^2+6x-4\\&=(-3x^4+3x^4)+(4x^3+5x^3)+(7x^2+4x^2)+(-9x+6x)+(3-4)\\&=9x^3+11x^2-3x-1\end{aligned}$$

b) $W(x)=6x^5-7x^3+5x-3$ oraz $P(x)=4x^4-3x^2+6x-2$

$$\begin{aligned}W(x)+P(x)&=6x^5-7x^3+5x-3+4x^4-3x^2+6x-2\\&=6x^5+4x^4-7x^3-3x^2+11x-2\end{aligned}$$

c) $W(x)=3x^3-5x^2+7x-2W(x)=3x^3-5x^2+7x-2$ oraz $P(x)=-3x^3+5x^2-7x+3$

$W(x)+P(x)=3x^3-5x^2+7x-3+(-3x^3+5x^2-7x+3)=(3x^3-3x^3)+$
$(-5x^2+5x^2)+(7x-7x)+(-3+3)=0$

Wniosek

Suma dwóch wielomianów może mieć stopień mniejszy lub równy większemu stopniowi wielomianów, może także być wielomianem zerowym.

Odejmowanie wielomianów

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, należy do wielomianu $W(x)$ dodać wielomian $-P(x)$. Następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie wielomianów:

a) $W(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ oraz $P(x) = -8x^2 + 5x^2 + 6x - 8$

$$\begin{aligned} W(x) - P(x) &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 - (-8x^3 + 5x^2 + 6x - 8) \\ &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 + 8x^3 - 5x^2 - 6x + 8 = \end{aligned}$$

$$= (4x^3 + 8x^3) + (-7x^2 - 5x^2) + (5x - 6x) + (-3 + 8) = 12x^3 - 12x^2 - x + 5$$

b) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ oraz $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} W(x) - P(x) &= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - (6x^3 + 4x^2 - 3x + 2) \\ &= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = \end{aligned}$$

$$= (6x^3 - 6x^3) + (-7x^2 - 4x^2) + (5x + 3x) + (-2 - 2) = -11x^2 + 8x - 4$$

Stopień otrzymanego wielomianu zależy od wielomianów składowych, analogicznie jak w przypadku dodawania.

Mnożenie wielomianów

Aby pomnożyć dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, trzeba pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Następnie zredukować wszystkie wyrazy podobne i uporządkować otrzymany wielomian.

Przykład 3

Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $W(x) = 3x^2 - 4x + 1$ oraz $P(x) = x + 3$

$$\begin{aligned} W(x) \cdot P(x) &= (3x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3x + 3 \\ &= 3x^3 + 5x^2 - 9x + 3 \end{aligned}$$

b) $W(x) = 4x^3 + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - 3x$

$$W(x) \cdot P(x) = (4x^3 + 1) \cdot (4x^2 - 3x) = 16x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 3x$$

Wniosek

Stopień iloczynu niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Dzielenie wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielnym przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że W$(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia sposobem pisemnym liczb rzeczywistych.

Wykonaj dzielenie wielomianów:

$W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3)$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dzielimy $2x^3$ przez x i otrzymujemy $2x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ mnożymy $2x^2$ przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy

$-2x^3 - 6x^2$ z przeciwnymi znakami

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dodajemy stronami i przepisujemy $4x + 7$

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dzielimy $-9x^2$ przez x

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ mnożymy $-9x$ przez $(x + 3)$ i wynik

$-2x^3 - 6x^2$ zapisujemy z przeciwnymi znakami

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$9x^2 + 27x$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dodajemy stronami i przepisujemy -7

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dzielimy $31x$ przez x

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ mnożymy 31 przez $(x + 3)$

$-2x^3 - 6x^2$ i wynik zapisujemy z przeciwnym

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$ znakiem

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$-31x - 93$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dodajemy stronami

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$\underline{\quad -31x - 93}$

$= \quad -100$

W dzieleniu wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 - 9x + 31$ i resztę $R(x) = -100$

Przykład 5

Wielomiany można dzielić przez dwumian, stosując **schemat Hornera**

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 2)$

$r = 2$

Wielomian jest stopnia trzeciego, więc tabelka wygląda następująco:

III	II	I	0
1	–4	3	–5
1			

W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy wszystkie stopnie wielomianu, w drugim wierszu natomiast wszystkie współczynniki tego wielomianu. Pierwszy współczynnik zawsze przepisujemy na dole.

Przystępujemy do obliczeń.

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2		

$r = 2$

$1 \cdot 2 - 4 = -2$ (-2 wpisujemy do dolnego wiersz)

Dalej analogicznie:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	

$r = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ (-1 wpisujemy do dolnego wiersz)

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	-7

$r = 2$

$-1 \cdot 2 - 5 = -7$ (-7 wpisujemy do dolnego wiersz)

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia drugiego.

W dolnym wierszu tabelki otrzymaliśmy współczynniki tego wielomianu.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian

$(x - 2)$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = x^2 - x - 1$ reszty (-7).

Więc wielomian: $W(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2) - 7$.

ZADANIA

2.2.1 Dane są wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ **i** $F(x) = x^4 - 6x^2 + 7$**.**

Oblicz: $P(0), P(-2), P(\sqrt{2}), F(\sqrt{3}), F(\sqrt{2})$

2.2.2 Oblicz sumę i różnice wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 4,\ P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 7x + 10$

b) $W(x) = -7x^4 - 6x^2 - 5x + 8,\ P(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 8$

c) $W(x) = -10x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,\ P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 3x^4$

d) $W(x) = -3x^9 + 6x^7 - 5,\ P(x) = 8x^4 - 6x$

2.2.3 Oblicz iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = -3x^2 + 6,\ P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

b) $W(x) = 2x^7 + 6x^3,\ P(x) = -4x + 2$

c) $W(x) = -3x^6 + 4x^2 + 2,\ P(x) = 2x + 1$

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 6x,\ P(x) = x^2 - 3$

2.2.4 Wykonaj dzielenie wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$, gdy:

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40,\ P(x) = x - 5$

b) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,\ P(x) = 2x - 1$

c) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 13x - 2,\ P(x) = 3x - 2$

d) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9,\ P(x) = x - 3$

e) $W(x) = 2x^3 - 19x^2 + 13x - 2, P(x) = 3x - 2$

2.2.5 Dane są wielomiany $A(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $B(x) = x^3 - 8$, $C(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

a) $A(x) + B(x)$ b) $A(x) + 2B(x)$ c) $2A(x) - 4B(x)$

d) $5B(x) - 10C(x)$ e) $A(x) \cdot C(x)$ f) $(x - 2) \cdot C(x) - B(x)$

g) $A(x) - (3x + 5) \uparrow\cdot B(x)$ h) $(C(x))^2$ i) $(A(x))^2 - (P(x))^2$

2.3 Rozkład wielomianu na czynniki

Teraz nauczę się:

- Stosować wzory skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$;
- Rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias..

Warto na początku przypomnieć sobie wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.

Kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory stopnia trzeciego:

Sześcian sumy

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sześcian różnicy

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

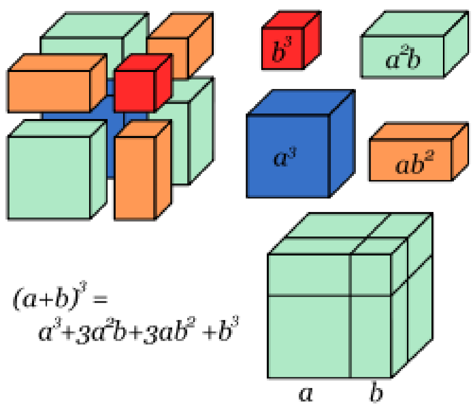
Suma sześcianów

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Różnica sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Każdy z tych wzorów możemy udowodnić w sposób algebraiczny lub – podobnie jak w przypadku wzorów stopnia drugiego – poprzez interpretację geometryczną. Trzeba jednak przejść do przestrzeni trójwymiarowej.



Rysunek 2-1. Graficzne uzasadnienie wzoru na sześcian sumy[24]

24 www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia, 07.03.2013.

Przykład 1

$$(x+5)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 5 + 3\cdot x\cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

$$(3x-4)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot 4 + 3\cdot 3x\cdot 4^2 - 4^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$$

$$\sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{7}+21+7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{7}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^3}$$
$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{7}\right)^3} = 1+\sqrt{7}$$

Zadania

2.3.1 Uprość:

a) $(x+5)^3$ b) $(2x+1)^3$ c) $(x+3y5)^3$

d) $(x-2)^3$ e) $(3x-4)^3$ f) $(2x-y)^3$

2.3.2 Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, uprość wyrażenia:

a) x^3-8 b) x^3-125 c) $64x^3+27$

d) $8x^3+216$ e) $(x+2)^3$ f) $(x-5)^3$

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy zapisać go w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeśli taki rozkład nie istnieje, to mówimy, że wielomian jest **nierozkładalny.**

Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod:

1) wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,

2) wzory skróconego mnożenia,

3) zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej,

4) grupowanie wyrazów.

Przykład 2

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z wspólnego dzielnika współczynników liczbowych oraz najniższej potęgi x.

a) $W(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2+2)$

b) $W(x) = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2+2x-3)$

Przykład 3

Rozłóż wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $W(x) = x^4 - 64 = (x^2-8)(x^2+8) = \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)(x^2+8)$

W poniższym przykładzie liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania wzoru na różnicę sześcianów.

b) $W(x) = 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9)$

c) $W(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$

$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 4

Rozłóż wielomian na czynniki, zamieniając na postać iloczynową funkcji kwadratowej.

W tym przypadki wielomian musi mieć postać funkcji kwadratowej.

$W(x) = 4x^2 - 8x - 12$

Obliczamy deltę i pierwiastki tej funkcji.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$\Delta > 0$, więc są dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 16}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 16}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

Zapisujemy postać iloczynową:

$W(x) = 4(x + 1)(x - 3)$

Przykład 5

Rozłóż wielomian na czynniki metodą przez grupowanie wyrazów.

Z tej metody można skorzystać, gdy mamy parzystą ilość czynników w wielomianie.

Łączymy wyrażenia w pary, każdą parę traktujemy jako osobne wyrażenie i każde z nich przekształcamy, wyłączając czynnik przed nawias. Ostatecznie zapisujemy iloczyn, wyłączając wspólny nawias przed nawias.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 3)$

b) $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = (4x^3 - 8x^2) - (3x - 6) = 4x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(4x^2 - 3)$

c) $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^3 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ZADANIA

2.3.3 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = 3x^4 - 5x^3$

b) $W(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$

c) $W(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2$

d) $W(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^4$

e) $W(x) = 4x^2(x^2 - 2) + 2(x^2 - 2)$

2.3.4 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$

b) $W(x) = (9x^2 - 6x + 1)(9x^2 - 1)$

c) $W(x) = (x^3 - 27)(x^2 - 9)$

d) $W(x) = (x^4 - 25)(x^3 + 8)$

2.3.5 Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$

b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

c) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x - 14$

d) $W(x) = x^4 + x^3 + 27x + 27$

e) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

f) $W(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

g) $W(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

h) $W(x) = 15x^6 - 10x^5 + 45x^4 - 30x^3$

i) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

j) $W(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$

k) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$

l) $W(x) = x^4 + 5x^2 - x^3 - 5x$

2.3.6 Rozłóż wielomiany na czynniki poznanymi metodami:

a) $5x^6 + 10x^5 - 15x^2$

b) $8x^3 - 27$

c) $2x^2 - 6x - 8$

d) $4x^3 - 8x^2 - 3x + 6$

e) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$

f) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$

g) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3$

h) $(x^4 - 16x^2)(x^5 + 5x^4 + 6x^3)$

i) $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2$

j) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

k) $x^4 + x^3 - 8x - 8$

l) $x^5 + 10x^4 + 25x^3$

2.3.7 Wykorzystując poznane metody, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej:

a) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

b) $3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2$

c) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$

d) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

e) $x^3 + 3x^2 - 2x$

Ciekawostka

Wzory skróconego mnożenia można szybko wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala.**

Blaise Pascal (1623-166) – francuski filozof, matematyk i fizyk. Badał prawdopodobieństwo, próżnię i ciśnienie atmosferyczne. Wynalazł m.in. pierwszą maszynę liczącą „Pascalinę" oraz TRÓJKĄT PASCALA. Od jego nazwiska wywodzi się nazwa jednostki ciśnienia (Pa) i język programowania Pascal[25].

Trójkąt Pascala pozwala wyprowadzić wzory skróconego mnożenia.

Przyjrzyjmy się postaci wzorów:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1

1 1

1 2 1

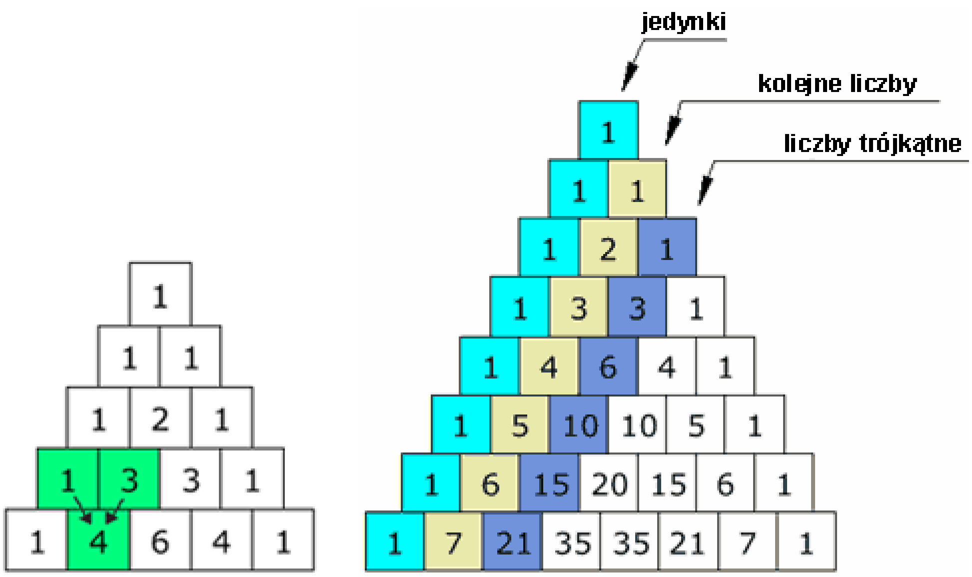
1 3 3 1

1 4 6 4 1

Zapiszmy same współczynniki liczbowe składników. Postać kolejnych czynników liczbowych jest widoczna. Współczynniki liczbowe utworzyły trójkąt, który nazywa się trójkątem Pascala.

Zasady budowy trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to tablica liczb, w której każdy element powstaje poprzez sumowanie elementów stojących nad nim. Elementy skrajne to jedynki.



Rysunek 2-2. Zasada tworzenie trójkąta Pascala

25 www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal, 19.02.2013.

Wyznaczymy teraz współczynniki piątej potęgi dwumianu.

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Dwumian Newtona, czyli wzór na $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 6

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)!\cdot 0!} = \frac{7!}{7!\cdot 1!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!} = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)!\cdot 7!} = \frac{7!}{0!\cdot 7!} = 1$$

Więc:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

ZADANIE

2.3.8 Wyznacz, korzystając z trójkąta Pascala:

a) $(a-b)^4$ b) $(a-b)^5$ c) $(a+b)^6$

2.4 Równania wielomianowe

Teraz nauczę się:

- Wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;
- Rozwiązywać równania wielomianowe.

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań wielomianowych, przybliżymy pojęcie pierwiastka wielomianu.

Pierwiastek wielomianu lub równania wielomianowego to rozwiązanie tego równania.

W przypadku wielomianów mamy zazwyczaj do czynienia z kilkoma pierwiastkami.

Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nazywamy jego miejsce zerowe. Powiemy zatem, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \ \wedge n \in \mathbb{N}_+$

Przykład 1

Sprawdź, czy liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu: $W(x) = x^3 - 2x^2 - 19x - 20$.

$W(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 19(-2) - 20 = -8 - 8 + 38 - 20 = 2$

Otrzymany wynik jest różny od 0, więc liczba (-2) nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 2

Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu:

$W(x) = 2x^5 - 4x^2 - 24x$

Więc: $W(2) = 2 \cdot (2)^5 - 4 \cdot (2)^2 - 24 \cdot 2 = 64 - 16 - 48 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Równanie $W(x) = 0$,$W(x) = 0$, gdzie $W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a \ \ x^2 + a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0$ nazywamy równaniem wielomianowym stopnia n

Rozwiązywanie równań wielomianowych sprowadza się do znalezienia pierwiastków danych wielomianów.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania rozłożyć na czynniki.

Przykład 3

Rozwiąż równanie: $x^4 - 9 = 0$

$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3) = 0$

Wyrażenie będzie równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$(x - \sqrt{3}) = 0 \lor (x + \sqrt{3}) = 0 \lor (x^2 + 3) = 0$

$x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 3 > 0$, więc $x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie: $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$

Skorzystamy z metody grupowania wyrazów.

$x^3(x + 1) - 8(x + 1)$

$(x + 1)(x^3 - 8) = 0$

$(x + 1) = 0 \lor (x^3 - 8) = 0$

$x = -1 \lor x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = -1 \lor x = 2$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie: $x^5 - 2x^4 + 5x^3 = 0$.

Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias:

$x^3(x^2 - 2x + 5) = 0$, to wyrażenie jest równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy:

$x^3 = 0 \lor x^2 - 2x + 5 = 0$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, skoro $\Delta < 0$, to trójmian nie ma pierwiastków.

Więc rozwiązaniem jest: $x = 0$.

Przykład 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt[4]{2 - 4x^2 - 3x}$

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, więc:

$2 - 4x^2 - 3x \geq 0 \,/\cdot (-1)$

$4x^2 + 3x - 2 \leq 0$

$\Delta = 9 + 32 = 41$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \; x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Odpowiedź: $x \in \langle \frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \rangle$.

ZADANIA

2.4.1 Zapisz podane wyrażenia w prostszej postaci. Przyjmij, że każdy mianownik w podanych ułamkach jest różny od zera.

a) $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$

b) $\frac{30x^4-6x^3+45x^2-9x}{8x^3+12x}$

c) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^3-2x^2-12x+8}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

2.4.2 Rozwiąż równania:

a) $3x^4 - 12 = 0$

b) $x^3 + 4x = 0$

c) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

d) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

e) $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$

f) $x^3 + 8x^2 - 2x - 16 = 0$

2.4.3 Rozwiąż, rozkładając na czynniki:

a) $3x^3 + 6x^2 + 4x + 8 = 0$

b) $x^6 + 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $1 + x^2 = x^3 + x$

d) $3x^2 - 4x = -x^3 + 12$

e) $-9x - 5x^2 = -x^3 - 45$

f) $x^4 + 3x^3 - 6x - 4 = 0$

g) $x^3 - 7x^2 + 6 = 0$

h) $5x^3 + 9x^2 - 26x - 24 = 0$

i) $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$

j) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$

k) $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$

l) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

m) $6x^3 + 6x^2 - 3x - 3 = 0$

n) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$

o) $2x^3-4x^2-6x+12=0$

p) $x^3+x^2-5x-5=0$

q) $x^5-2x^4-9x^3+18x^2=0$

r) $-2x^4-\sqrt{3}x^3+2x+\sqrt{3}=0$

s) $2x^3-3x^2-8x+12=0$

t) $2x^5-18x^3+2x^2-18=0$

u) $x^3+3x^2-5x-15=0$

v) $x^3+x^2-9x-9=0$

w) $x^8+x^6-x^4-x^2=0$

x) $20x^4-20x^3+5x^2=0$

2.4.4 Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^3+5x^2+6x}$

b) $f(x)=\sqrt{(x-3)(4-x^2)}$

c) $f(x)=\sqrt{x(2+x)(x-3)^2}-\sqrt{(x+2)^2(4-x)}$

d) $f(x)=\frac{8x^3-125}{4x^3-4x^2-25x+25}$

e) $f(x)=\frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3-16x}$

f) $f(x)=\frac{6x-2}{x^2-x-2}$

g) $f(x)=-3x^2+7x-8$

h) $f(x)=x+\frac{1-\sqrt{x+1}}{3\sqrt{1-2x}}$

i) $f(x)=\frac{\sqrt{3-|x+2|}}{x(x+3)}$

j) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{-x+6}}$

l) $f(x)=\frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

1.[26] Dane są wielomiany $W(x)=x^3-3x+1$ oraz $V(x)=2x^3$. Wielomian $W(x)\cdot V(x)$ jest równy:

a) $2x^5-6x^4+2x^3$ b) $2x^6-6x^4+2x^3$ c) $2x^5+3x+1$ d)) $2x^5+6x^4+2x^3$

2. Wyraz wolny wielomianu $W(x)=(x-2)^{53}+53x+2^{53}$ jest równy:

a) 2^{54} b) 0 c) 2^{53} d) 53

3. Wielomian $W(x)=x^2(x-2)-(x-2)$ można zapisać w postaci:

a) $x^2(x+2)$

b) $(x^2+1)(x-2)$

c) $x(x-2)^2$

d) $(x-1)(x+1)(x-2)$

4. Wielomiany $W(x)=(x-2)(x+1)(x+2)$ i $P(x)=(a-b)x^3+x^2+(a+b)x-4$ są równe. Z tego wynika, że:

a) $a=1, b=2$ b) $a=-1, b=-2$ c) $a=-1, b=2$ d) $a=2, b=-1$

26 Zadania 1-22: zaczerpnięte z www.zadania.info, 21.03.2013.

5. Stopień wielomianu $W(x) = (x-1)(3x+5)^2(2x+1)^3$ jest równy:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8

6. Wielomian W określony jest wzorem $W(x) = -x^9 + x^8 - 6$. Zatem $W(-5)$ jest liczbą:

a) ujemną b) dodatnią c) niewymierną d) pierwszą

7. Po rozłożeniu wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$, otrzymujemy:

a) $W(x) = (x+5)(x-3)(x+3)$ b) $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

c) $W(x) = (x-5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ d) $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

8. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - 2x, V(x) = 2x^2 + 3x$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

9. Wartość wielomianu $W(x) = 3x - x^2 - x^3$ dla $x = -3$ jest równa:

a) 12 b) -9 c) 9 d) -24

10. Wielomian $P(x) = W(x) - K(x)$ jest siódmego stopnia oraz
$W(x) = mx^7 + 8x^5 + 5, K(x) = 3x^3 + 8x^5 + (3m+2)x^7$.
Wynika stąd, że liczba m jest różna od:

a) 3 b) -1 c) 1 d) 0

11. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$:

a) jest iloczynem wielomianów $(x-2)$ i (x^4+1)

b) ma trzy miejsca zerowe

c) ma dwa miejsca zerowe

d) jest różnicą wielomianów $(x^5 - 2)$ i $x + 2$

12. Funkcja $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$ ma:

a) 1 miejsce zerowe b) 2 miejsca zerowe

c) 3 miejsca zerowe d) nie ma miejsc zerowych

13. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ w punkcie m jest równa 15 dla:

a) $m = 3$ b) $m = 3 \lor m = -3$

c) $m = 2 \lor m = -2 \lor m = 3$ d) $m = 2$

14. Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $W(x) = 5x^2 - 2x^3 + 3$, aby otrzymać wielomian $P(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$?

a) $6 - 7x^2 - 6x^3$ b) $2x^3 + 17x^2$ c) $6x^3 + 7x^2$ d) $6x^3 + 7x^2 - 6$

15. Wiadomo, że $W(-1) = -1$, gdy $W(x) = 2x^3 + px - 3$. Zatem wartość współczynnika p wynosi:

a) $\frac{1}{4}$ b) -4 c) 4 d) -1

16. Wielomiany P i Q określone są wzorami $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = -x^5 + 1$.

Wielomian R

$(x) = 2P(x) + Q(x)$ jest stopnia:

a) 0 b) 10 c) 1 d) 5

17. Wielomiany $P(x) = (a + 1)x^3 + x^2 - b$ i $P(x) = (b - 1)x^3 + x^2 + 2a + 1$ są równe. Zatem liczba $a + b$:

a) należy do zbioru $\langle 2,\ 3)$ b) jest większa od 3

c) należy do zbioru $(-2, 0\rangle$ d) jest mniejsza od -2

18. Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi:

a) $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$ b) $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$ c) $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$ d) $(x^4 - 2)(x + 1)$

19. Wielomian $x^3 - 3x^2 - 3$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

a) $(x - 3)(x - 1)(x + 1)$ b) $(x - 3)x^2$

c) $(x - 3)(x^2 + 1)$ d) $(x - 3)^2(x^2 + 1)$

20. Dane są wielomiany $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + 2$ oraz $P(x) = 2x^4 + 5X^3 + 3x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

a) $5x^4 + 3x + 2$ b) $3x + 2$ c) $-x^4 + 3x + 2$ d) $-x^4 + 3x - 2$

21. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

22. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

a) $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$ b) $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$ c) $2x^5 + 3x + 1$ d) $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

23.[27] Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

a) $5x^2 + 12x - 3$ b) $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$

c) $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$ d) $4x^3 + 12x^2 - 3$

24.[28] Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Współczynnik a jest równy

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

25.[29] Dane są wielomiany $W(x) = 2x^2 - 5x$ i $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.
Wielomian $G(x) = 2W(x) - P(x)$ jest równy:

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ b) $-x^3 + 7x^2 - 7x + 4$

c) $-x^3 + 9x^2 - 12x + 7$ d) $x^3 - x^2 - 8x + 5$

26.[30] Dane są wielomiany $\boldsymbol{W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4}$ oraz $\boldsymbol{M(x) = x^3 - 2x^2 + 5}$. Wielomian $\boldsymbol{W(x) - M(x)}$ jest równy:

a) $\boldsymbol{4x^3 + 9}$ **b)** $\boldsymbol{3x^3 + 1}$ **c)** $\boldsymbol{2x^3 - 1}$ **d)** $\boldsymbol{4x^3 - 4x^2 + 9}$

27.[31] Dane są wielomiany $W(x) = x - 4$ i $M(x) = x^2 - 2x$. Wielomian $W(x) \cdot P(x)$ jest równy:

a) $x^3 - 2x^2 - 8x$ b) $x^3 - 6x^2 + 8x$ c) $x^3 - 4x^2 - 10x$ d) $x^3 - 4x^2 + 6x$

28.[32] Suma odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1$ jest równa:

a) 4 b) $-0{,}25$ c) 6 d) -4

29. Liczba $x = 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^2 - 2a$, gdy a jest równe:

a) 18 b) -18 c) 9 d) $18\sqrt{2}$

30.[33] Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

---

27 Zadanie 23: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.
28 Zadanie 24: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 05.03.2013.
29 Zadanie 25: zaczerpnięte z www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 05.03.2013.
30 Zadanie 38: zaczerpnięte z www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_351687432168743168741687651646 87/mat_ark_pdst.pdf, 05.03.2013.
31 Zadanie 27: zaczerpnięte z www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 05.03.2013.
32 Zadania 28, 29: zaczerpnięte ze strony (www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf), 05.03.2013.
33 (www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf), 05.03.2013.

31.[34] Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-4)(x-3)}{(x-2)(x+3)}=0$ są liczby

a) $-3,-2,2,3$ b) $2,3$ c) $-3,2$ d) $-2,3$

32. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{36-x^2}{(6-x)(x^3-1)}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{1,6\}$ b) $R\backslash\{-6,-1,6\}$ c) $R\backslash\{-6,6\}$ d) $R\backslash\{-6,1,6\}$

33.[35] Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=0$ ma:

a) dokładnie jedno rozwiązanie b) dokładnie dwa rozwiązania

c) dokładnie trzy rozwiązania d) dokładnie cztery rozwiązania

34.[36] Liczba 5 nie należy do dziedziny wyrażenia:

a) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$ b) $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$ c) $\frac{x^2-25}{x^2+25}$ d) $\frac{x^2-25}{x+5}$

35. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{2}{x}:\frac{x^2-16}{x+1}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-1,0\}$ b) $R\backslash\{-4,-1,0,4\}$ c) $R\backslash\{-4,4\}$ d) R

36. Do dziedziny funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{5x}{x(x+1)(x-\sqrt{7})(x^2+7)}$:

a) nie należą 2 liczby b) nie należą 3 liczby c) nie należą 4 liczby d) nie należy 5 liczb

37. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{x^2-2x+3}$ jest największa, gdy liczba x jest równa:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) 2

38. Dla której z liczb wyrażenie $\frac{2+x}{x-5}$ nie ma sensu liczbowego?

a) -2 b) -5 c) 0 d) 5

39. Dziedziną wyrażenia $W=\frac{x^2-36}{(x+4)(x^2+4x+4)}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-6,-4,-2,6\}$ b) $R\backslash\{-6,-4,2,6\}$ c) $R\backslash\{-4,2\}$ d) $R\backslash\{-4,-2\}$

40. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{3x}{x^2-5x+6}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{2\}$ b) R c) $R\backslash\{2,3\}$ d) $R\backslash\{3\}$

41. Zbiór $R\backslash\{-3,0,2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

a) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x^2-x-2}{x^3+5x^2+6x}$ c) $\frac{3x+2}{x(x-2)(x-3)}$ d) $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$

34 Zadania 31, 32: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 06.03.2013.
35 Zadanie 33: zaczerpnięte z arkusza CKE, sierpień 2012 (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 20.03.2013.
36 Zadania 34–47: zaczerpnięte z www.zadania.info, 20.03.2012.

42. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-4x}$ jest zbiór:

a) $R\backslash\{-5,5\}$ b) $R\backslash\{0,4\}$ c) $R\backslash\{-2,2\}$ d) $R\backslash\{-5,0,4,5\}$

43. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{-x-3}$ jest zbiór:

a) $\langle -3,+\infty)$ b) $(-3, +\infty)$ c) $(-\infty,-3\rangle$ d) $(-\infty,-3)$

44. Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2-8x-\frac{59}{4}}$ jest:

a) -2 b) -3 c) -4 d) -5

45. Największą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{30-6x}$, jest:

a) -5 b) -4 c) 5 d) 6

46. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}$ jest:

a) $(-\infty,1\rangle$ b) $(1,+\infty)$ c) $(-\infty,1)$ d) $(-1,+\infty)$

47. Wyrażenie $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+3}$ jest równe:

a) $\frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$ b) $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$ d) $\frac{x+2}{-5}$

48.[37] Wyrażenie $\frac{x-1}{3x-6} - \frac{2}{x-2}$ jest równe:

a) $\frac{x+1}{3x-6}$ b) $\frac{x+5}{3x-6}$ c) $\frac{x-7}{3x-6}$ d) $\frac{x-3}{3x-6}$

49. **(6 pkt)** Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - mx^3 + nx^2 - 8$. Wartość tego wielomianu dla $x = 2$ jest taka sama, jak dla $x = -2$, a wartość wielomianu dla $x = 3$ wynosi 82. Wyznacz wartości liczb m i n oraz rozwiąż nierówność $W(x) > x^4 + 2$.

50. **(2 pkt)** Sprawdź, czy wielomiany $W(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ i $H(x) = (x^2-3x+2)(x^2+3x+2)$ są równe.

51. **(2 pkt)** Określ dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+3}{x^2-4} + \frac{4}{x-2}$ i wykonaj działania.

52. **(2pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

53. **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

54.[38] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

55. Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

---

37 http: //www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 21.03.2013.

38 Zadania 54, 55, 56: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 17.03.2013.

56. **(2pkt)** Rozwiąż równanie $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 6x - 12x^3 + 2x^2 - 6x - 12}$.

57.[39] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

58.[40] **(2 pkt)** Rozwiąż równanie $\frac{x-2}{3x-1} = \frac{x+5}{3x+2}$.

59. **(2 pkt)** Wykonaj działania: $\frac{x-5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-10x+25}$

60. **(3 pkt)** Pewną liczbę wymierną można przedstawić w postaci $\frac{n}{\mathbf{3} \; - n}$, gdzie $n \in \{1,2,3,....,32\}$. Gdy powiększymy licznik tego ułamka o 39, a mianownik o 20, to podwoimy wartość tego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

---

39 www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 17.03.2013.

40 Zadania 58, 59, 60: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 17.03.2013.

3 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

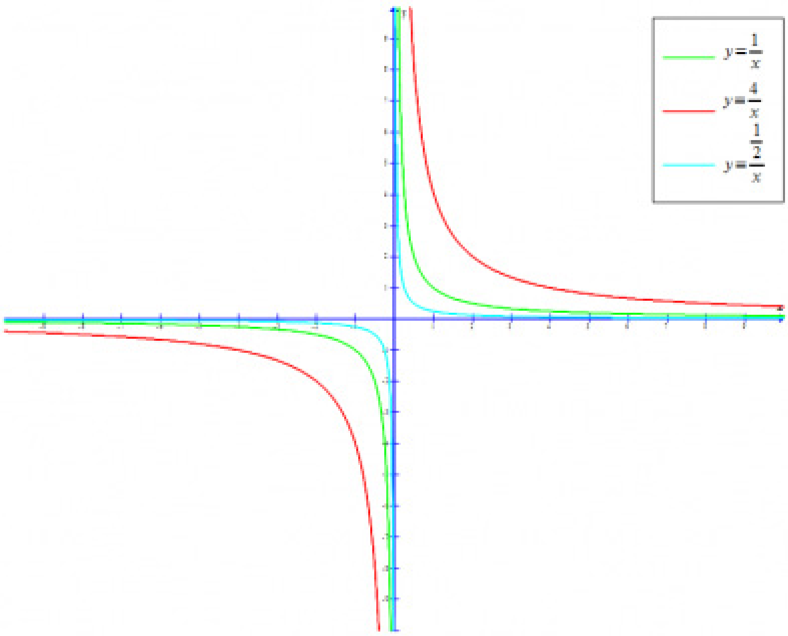
3.1 Funkcja wykładnicza i jej własności

Teraz nauczę się:

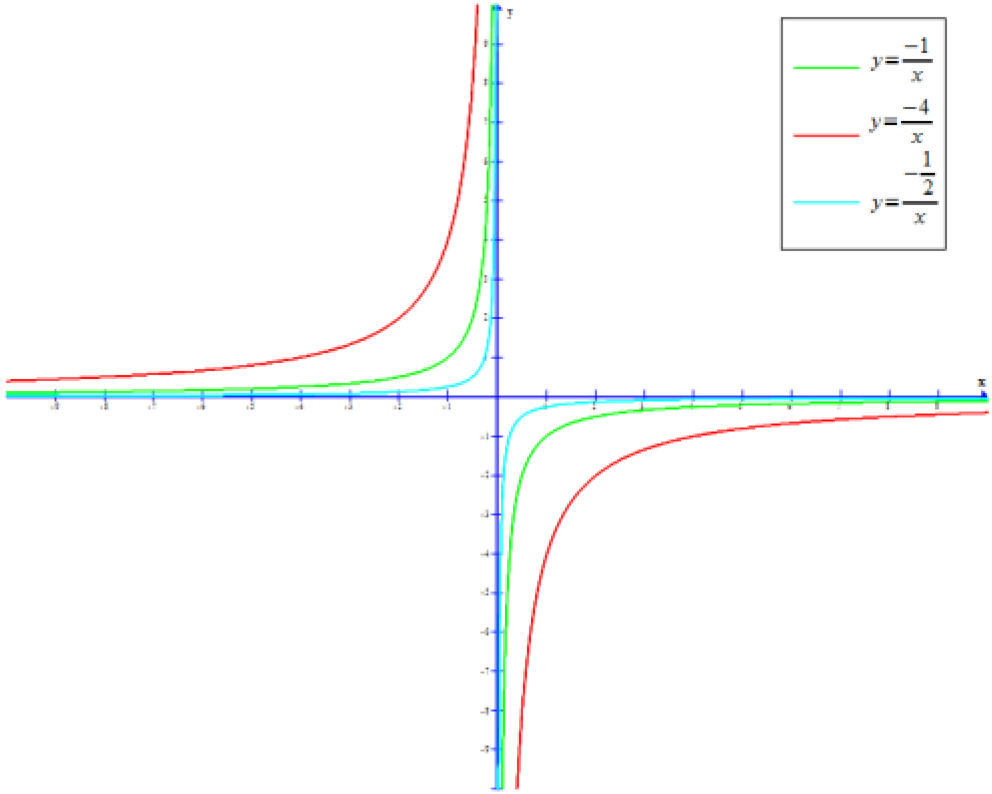
- Szkicować wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla danego a;
- Korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Pojęcie hiperboli.

Poniżej narysowano kilka różnych funkcji typu $f(x)=\frac{a}{x}$.



Rysunek 3-1. Wykres funkcji hiperbolicznej, a > 0



Rysunek 3-2. Wykres funkcji hiperbolicznej, $a < 0$

Krzywą, która jest wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy hiperbolą. Wykres składa się z dwóch rozłącznych części, zwanych gałęziami hiperboli.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

Wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Gdy $a > 0$, gałęzie hiperboli $y = \frac{a}{x}$ leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

Gdy $a < 0$, gałęzie hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Zatem, aby narysować wykres funkcji, wystarczy znać wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla $x > 0$, a następnie odbić go symetrycznie względem punktu $(0,0)$, czyli początku układu współrzędnych.

Wykres funkcji typu $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) zbliża się do obu osi układu współrzędnych (punkty tego wykresu mogą leżeć dowolnie blisko tych osi). Prostą $x = 0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, a **prostą $y = 0$ nazywamy asymptotą poziomą tego wykresu.**

Zmniejszanie wartości „a" powoduje zbliżenie się hiperboli do osi układu.

Zwiększanie wartości „a" powoduje oddalenie się hiperboli od osi układu.

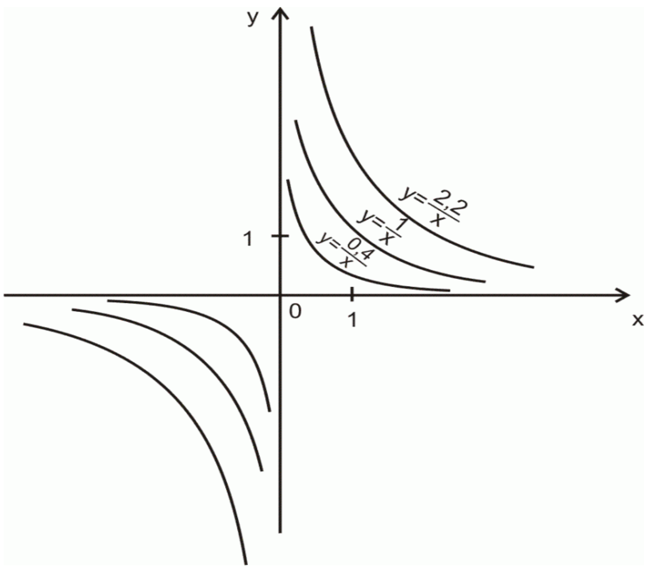
Przykład 1

W jednym układzie współrzędnych należy narysować wykresy funkcji:

$f(x) = \frac{0,4}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{2,2}{x} f(x) = \frac{0,4}{x}, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{2,2}{x}.$

Budujemy częściową tabelę zmienności funkcji:

x	0,25	0,5	1	2
$f(x)=\frac{0{,}4}{x}$	1,6	0,8	0,4	0,2
$f(x)=\frac{1}{x}$	4	2	1	0,5
$f(x)=\frac{2{,}2}{x}$	8,8	4,4	2,2	1,1



Rysunek 3-3. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, $a>0$

UWAGA!!!

- Jeśli , $a>0$ to gałęzie hiperboli są położone w I i III ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ ($a\neq 0$) **jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli** $R/\{0\}$**.**
- Widzimy, że funkcja jest **malejąca** w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

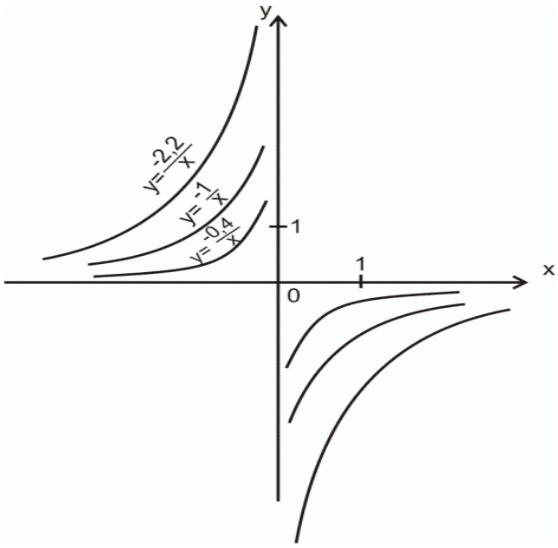
Przykład 2

W jednym układzie współrzędnych należy narysować wykresy funkcji:

$f(x)=-\frac{0{,}4}{x}, f(x)=-\frac{1}{x}, f(x)=-\frac{2{,}2}{x}.$

Wykres funkcji $y=-f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y=f(x)$ przez odbicie symetryczne względem osi OX.

Wykorzystując tę własność oraz wykresy funkcji z **Przykładu 1**, widzimy, że wykresy podanych funkcji są następujące:



Rysunek 3-4. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a < 0$

UWAGA!!!

- Jeśli $a < 0$, to ramiona hiperboli są położone w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ **(** $a \neq 0$ **) jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli** $R/\{0\}$**.**
- Widzimy, że funkcja jest **rosnąca** w przedziale $(-\infty;0)$, a także w przedziale $(0;\infty)$.

Poniżej przypominamy reguły dotyczące przesuwania wykresów funkcji:

Niech $a > 0$ i $b > 0$.

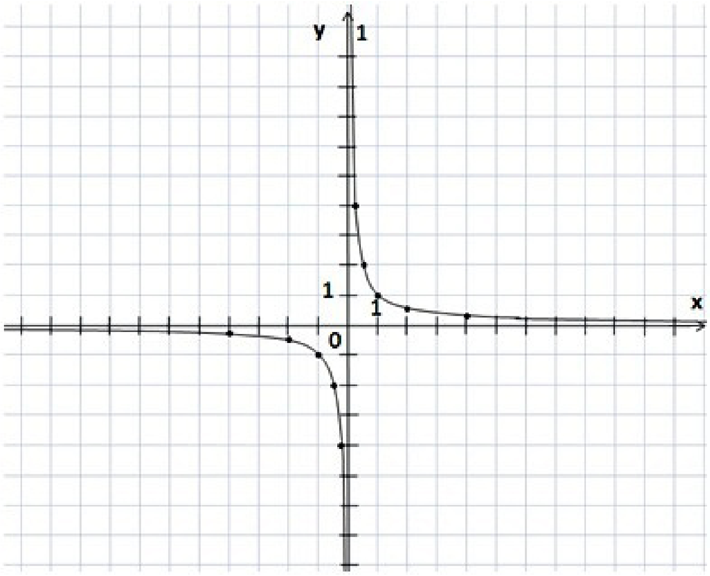
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) + b$.
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w prawo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) - b$.
- Jeśli wykres funkcji $y = f$(x) przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x + a) + b$.
- Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o a jednostek w lewo i b jednostek w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x + a) - b$.

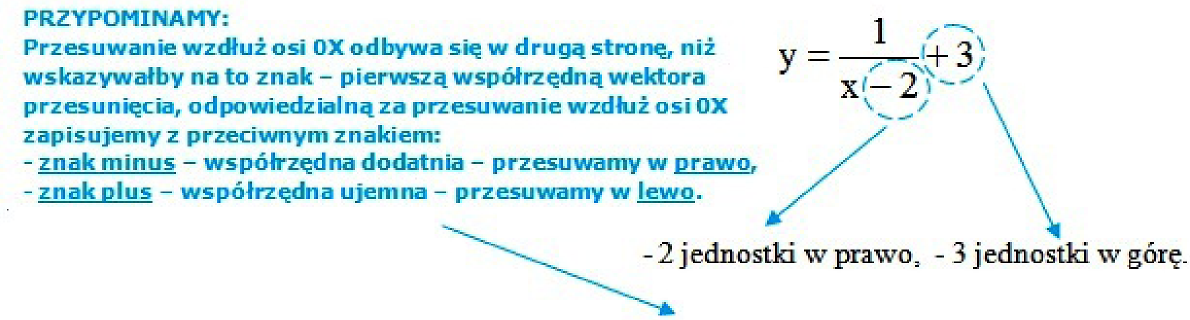
Powyższą regułę wykorzystajmy w przykładzie.

Przykład 3[41]

Narysuj wykres funkcji: $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

W pierwszej kolejności rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{1}{x}$



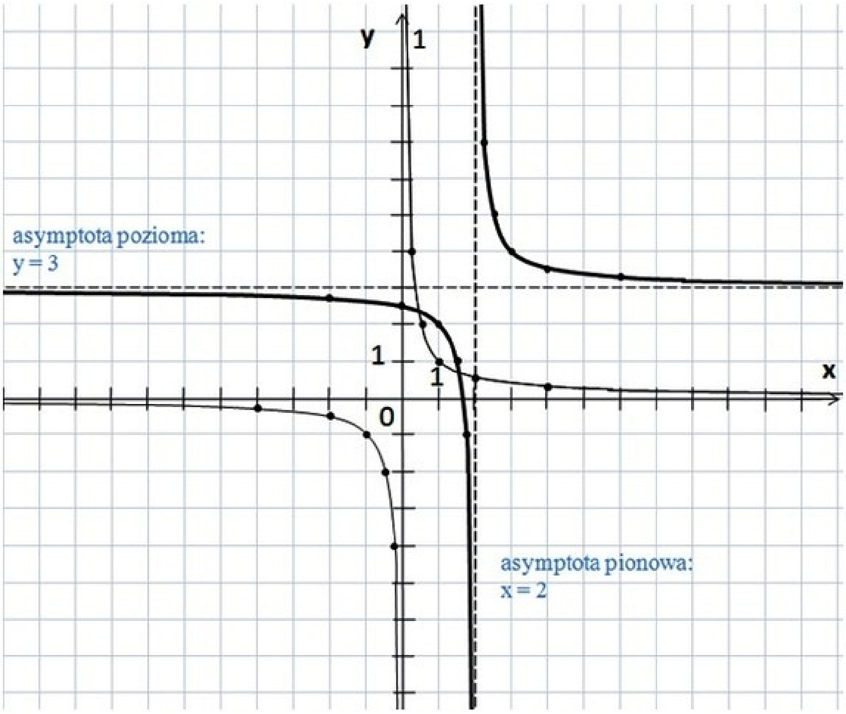


ASYMPTOTY pionową i poziomą przesuwamy wraz z wykresem funkcji.

Dla rozpatrywanego przykładu:

- asymptota pozioma będzie znajdowała się na wysokości 3: $y = 3$,
- asymptota pionowa będzie znajdować się w miejscu argumentu 2: $x = 2$.

41 www.matematykam.pl, 03.03.2013.



ZADANIA

3.1.1 Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=\frac{6}{x}$ b) $f(x)=-\frac{8}{x}$ c) $f(x)=\frac{2}{x}+3$ d) $f(x)=-\frac{4}{x}+2$

e) $f(x)=\frac{4}{x-2}$ f) $f(x)=\frac{-2}{x+1}$ g) $f(x)=\frac{5}{x+3}$ h) $f(x)=\frac{-3}{x-1}$

i) $f(x)=\frac{4}{x-3}-2$ j) $f(x)=\frac{-4}{x-4}+1$

3.1.2 Wykres funkcji $f(x)=\frac{4}{x}$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g, jeżeli wykres funkcji f przesunięto:

a) o 5 jednostek do dołu

b) o 3 jednostki w prawo

c) o 2 jednostki do góry i 4 jednostki w lewo

3.1.3 Zapisz równania asymptot wykresu funkcji:

a) $y=\frac{3}{x-1}+2$ b) $y=\frac{-0{,}7}{x+12}-\frac{1}{3}$ c) $y=\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}}-\sqrt{5}$ d) $y=\frac{7}{3(x-\frac{1}{2})}+\frac{4}{5}$

3.1.4 Punkt $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} = \left(3\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{6}\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{a}{x}$ b) $f(x) = \frac{a}{x+4}$ c) $f(x) = \frac{a}{x} - 2$ d) $f(x) = \frac{a}{x-2} + 2$

Dla każdej z tych funkcji wyznacz wartość współczynnika $\boldsymbol{a}$.

3.1.5 Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x-5} + 3$ b) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 3$ c) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+6}$ d) $f(x) = \frac{-3}{x} + 1$

3.1.6 Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x = -5;\ y = 3$ b) $x = 0{,}6;\ y = 0$ c) $x = -15;\ y = -6$

d) $x = 0;\ y = -2$ e) $x = 0;\ y = 0$

3.1.7 a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y = -\frac{10}{x+7} - 9$.

b) Podaj współrzędne wszystkich punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y = \frac{-6}{x-12} + 8$ oraz $y = \frac{6}{x+7} - 15$.

Proporcjonalność odwrotna

Definicja: Proporcjonalność odwrotna[42]

Proporcjonalność odwrotna to taka zależność między dwiema zmiennymi wielkościami x i y, w której iloczyn tych wielkości jest stały. Czyli:

$x \cdot y = a$, gdzie $a, x, y \in R / \{0\}$.

Wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**.

Z powyższego wzoru możemy obliczyć x w zależności od y, wtedy: $x = \frac{a}{y}$

oraz y w zależności od x, wtedy: $y = \frac{a}{x}$

Zauważ, że ostatni wzór to wzór funkcji omawianej w poprzednim podrozdziale tego tematu.

Przykład 4

Pan Nowak ma przeczytać książkę, która liczy 520 stron. Postanowił, że codziennie będzie czytał taką samą liczbę stron. Liczba x przeczytanych dziennie stron oraz liczba y dni w czasie, w którym Pan Nowak przeczytał książkę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, ponieważ:

$x \cdot y = 520$

42 www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39-funkcja_fxa_x_homograficzna, 15.03.2013.

Jeśli Pan Nowak czyta więcej stron dziennie, to czas czytania książki jest krótszy. Czytając 20 stron dziennie, Pan Nowak przeczyta książkę w ciągu 26 dni, zaś przy czytaniu 65 stron dziennie, przeczyta ją w ciągu 8 dni.

Mamy stałą wartość iloczynu $20 \cdot 26 = 65 \cdot 8 = 520$.

Liczba dni czytania y zależy od liczby przeczytanych stron x w sposób $y = \frac{520}{x}$.

Przykład 5

Weźmy podstawowy wzór fizyczny:

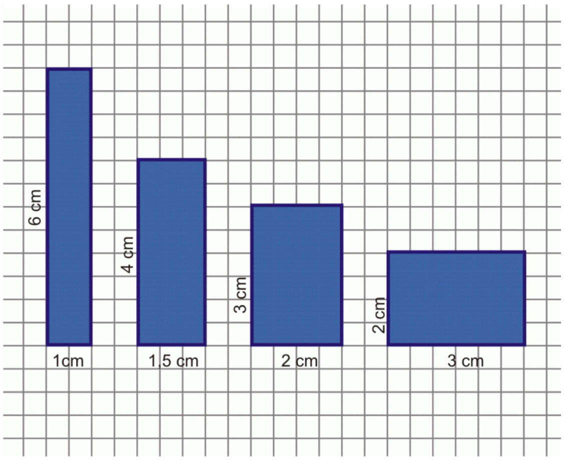
$$v = \frac{s}{t}$$

Zakładamy, że droga (s) jest stała, a prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do czasu.

Np. jedzie samochód z miasta A do miasta B. Im szybciej jedzie, tym mniej czasu mu to zajmie. Odległość między tymi miastami się nie zmienia, czyli droga (s) jest wielkością stałą.

Przykład 6

Na rysunku poniżej przedstawiono prostokąty o polu $6\ \mathrm{cm}^2$



Rysunek 3-5. Prostokąty o równym polu

Przy stałym polu prostokąta im większa jest długość jednego jego boku, tym mniejsza jest długość drugiego.

Jeśli długość jednego boku prostokąta **zwiększymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 2,5 razy;
- 5 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 5 razy;
- 6 razy, to jego drugi bok zmniejszy się 6 razy.

I odwrotnie, jeśli długość jednego boku prostokąta **zmniejszymy:**

- 2,5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 2,5 razy;
- 5 razy, to jego drugi bok zwiększy się 5 razy;
- 6 razy, to jego drugi bok zwiększy się 6 razy.

Zauważ, że pole prostokąta jest stałe i równe iloczynowi długości jego boków.

Przykład 7[43]

Samochód jadąc ze stałą prędkością, pokonuje pewną drogę w ciągu 6 godzin. Z jaką prędkością powinien jechać motocyklista, aby tę samą trasę przejechać w ciągu 3 godzin?

Zauważ, że stała jest długość trasy, czyli droga, jaką pokonują samochód i motocyklista. Droga jest równa iloczynowi prędkości przez czas jazdy.

Odpowiedź: Motocyklista ma pokonać tę samą trasę w ciągu 3 godzin, czyli w czasie 2 razy krótszym niż samochód. Zatem jego prędkość powinna być 2 razy większa niż prędkość samochodu.

Wniosek:

- Jeśli jedna z wielkości rośnie (maleje), a równocześnie druga wielkość maleje (rośnie) tyle samo razy, to te wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi.**
- **Iloczyn** wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

ZADANIA

3.1.8 Sprawdź, czy wielkości podane w tabelce są odwrotnie proporcjonalne? Jeżeli tak, to podaj wartość współczynnika proporcjonalności.

x	0,3	1	3	2	0,2
y	4	1,2	0,4	0,6	6

3.1.9 Uzupełnij tabelkę tak, aby podane wielkości były odwrotnie proporcjonalne.

x	3,6		0,1	144
y		0,6	36	

3.1.10 Koło zębate o 120 zębach napędza koło zębate o 48 zębach. Ile razy obróciło się małe koło, gdy duże koło w tym czasie obróciło się 40 razy?

3.1.11 Kierowca pokonał pewną trasę, jadąc ze średnią szybkością 90 km/h. O ile kilometrów na godzinę powinien zwiększyć szybkość, aby pokonać tę samą trasę w czasie krótszym o 25%?

43 www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne, 15.03.2103

3.2 Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczej

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = a^x$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Jej nazwa pochodzi od tego, że x znajduje się w wykładniku.

Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza,** która przecina oś OY w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Kształt wykresu zależy od podstawy a.

Przypadek I[44]

Funkcja rosnąca w podstawie mająca liczbę większą od 1.

Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = 2^x$

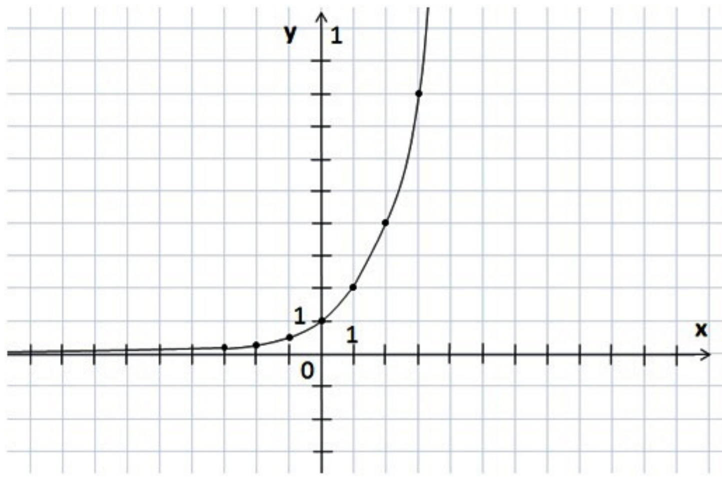
Aby narysować wykres funkcji, w pierwszej kolejności tworzymy tabelę, zawierającą punkt (0, 1) oraz parę punktów położonych na lewo od tego punktu, oraz parę położonych na prawo.

Trzy liczby na lewo od 0. Trzy liczby na prawo od 0.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Następnie zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią.

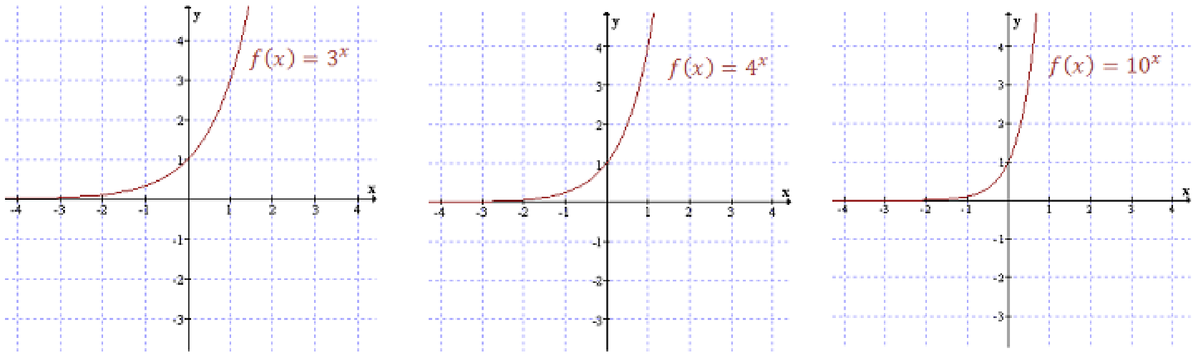
UWAGA!!!! Linia wykresu nie może przeciąć osi OX.



44 www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html, 12.03.2013.

Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $\boldsymbol{a} > 1$.

Przykładowo:



Rysunek 3-6. Wykresy funkcji wykładniczych, a > 0

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $\underline{a > 1}$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D = R}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW = R_+}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $\boldsymbol{rosnąca}$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x)} > 0$, gdy $\boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $\boldsymbol{y = 0}$.

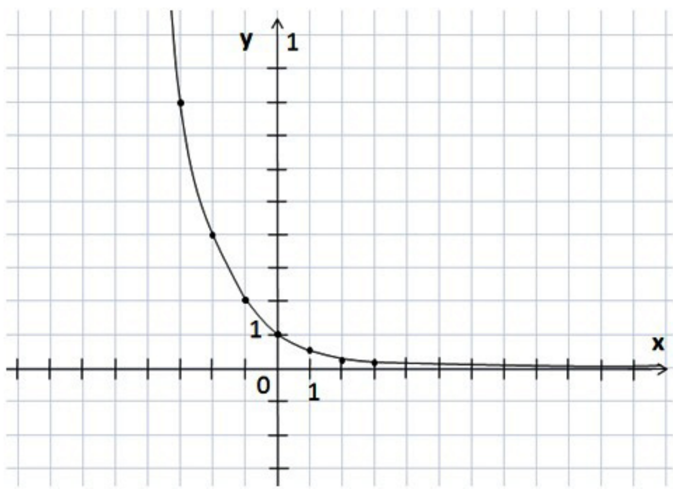
Przypadek II

Funkcje mające w podstawie ułamek.

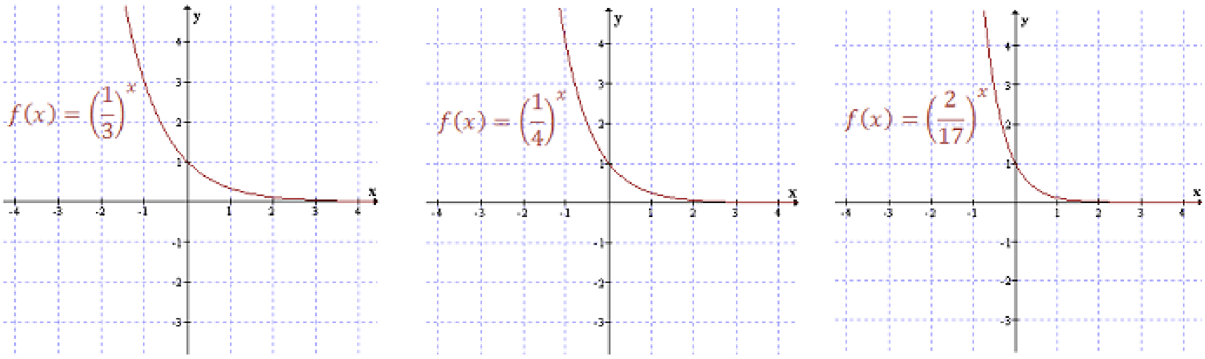
Przedstawimy na przykładzie: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Postępujemy dokładnie w … w podstawie liczbę większą od 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji wykładniczych o podstawie $a < 1$. Przykładowo:



Rysunek 3-7. Wykresy funkcji wykładniczych, a < 0

Własności funkcji wykładniczej o podstawie $a < 1$:

1. Dziedzina: $D = R$.
2. Zbiór wartości: $ZW = R_+$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $malejąca$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $f(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; +\infty)$.
5. Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych.
6. Oś OX jest asymptotą poziomą, czyli prosta $y = 0$.

Funkcje wykładnicze – przesunięcie

Funkcje wymagające przesuwania prostszych przypadków wzdłuż osi układu.

Przykład:

$f(x) = 2^{x-1} - 4$

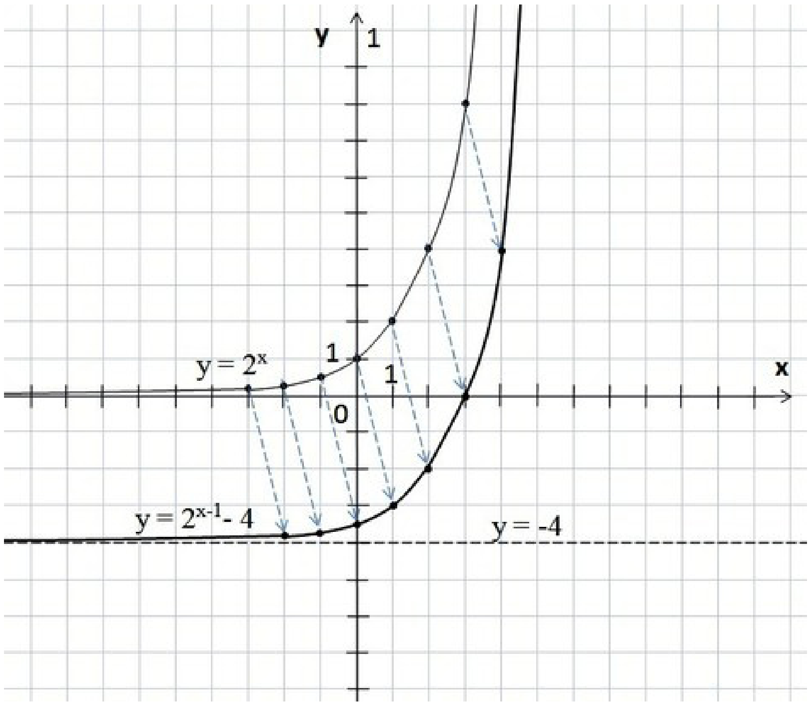
W celu narysowania powyższej funkcji, w pierwszej kolejności rysujemy prostszą funkcję:

$f(x) = 2^x$

W tym przypadku będziemy wykres funkcji $y = 2^x$ przesuwać o wektor $[1, -4]$ (przesuwamy wykres o 1 jednostkę w prawo i 4 jednostki w dół).

UWAGA:

W przypadku tej funkcji asymptota pozioma również przesunie się o 4 jednostki w dół, czyli będzie miała wzór $y = -4$.



Dla przypadków, gdy wykres otrzymujemy poprzez przesunięcie o wektor, asymptota znajduje się na wysokości, która wynika z przesunięcia wykresu funkcji o określoną liczbę jednostek w górę lub w dół.

UWAGA!!!!

Gdy funkcja ma miejsce zerowe, należy je obliczyć, przyrównując wzór funkcji do zera. Otrzymujemy wówczas równanie wykładnicze.

Określenie, czy funkcja ma miejsce zerowe, nie wymaga rysowania wykresu. Wystarczy stwierdzić, czy podczas rysowania będziemy przesuwać wzór funkcji w dół, czy nie. Tylko funkcje wymagające przesuwania w dół podczas rysowania mają miejsce zerowe.

Przykład:

Obliczymy miejsce zerowe funkcji:

$f(x) = 2^{x+7} - 16$

Rysując tę funkcję, wykres funkcji $f(x) = 2^x$ musielibyśmy przesunąć o 7 jednostek w lewo i 16 w dół. Wynika stąd, że ta funkcja ma miejsca zerowe.

Aby je obliczyć, wystarczy wzór funkcji przyrównać do zera.
$2^{x+7} - 16 = 0$

$2^{x+7} = 16$

$2^{x+7} = 2^4$ teraz możemy pominąć podstawy i przyrównać wykładniki.
$x + 7 = 4 \Rightarrow x = -3$

Odpowiedź: Funkcja ma miejsce zerowe dla $x = -3$.

ZADANIA

3.2.1 Narysuj wykresy następujących funkcji:

a) $f(x)=(0{,}6)^x$ b) $f(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^x$ c) $f(x)=10^x$

3.2.2 Narysuj wykres funkcji $f(x)=3^x$, a następnie wykresy funkcji:

a) $f(x)=1+3^x$ b) $f(x)=-4+3^x$ c) $f(x)=3^{x+2}$ d) $f(x)=3^{x-3}$

e) $f(x)=-3^x$ f) $f(x)=4-3^x$ g) $f(x)=9\cdot 3^x$

3.2.3 Dane są funkcje:

$j:(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x-5$ $k:(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ $l:(x)=6^{x+4}$

Które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) przyjmują tylko wartości dodatnie,

c) mają asymptotę $y=0$,

d) mają miejsca zerowe,

e) przecinają oś. y

3.2.4 Podaj równanie asymptoty funkcji $f(x)$, określonej wzorem:

a) $f(x)=5^{x-2}$ b) $f(x)=0{,}3^{x+3}-4$ c) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x-1$

d) $f(x)=5^x+5$ e) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}-4$

3.2.5 Napisz wzór funkcji wykładniczej $f(x)=a^x$, gdzie $a>0$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A=(3,\frac{1}{8})$.

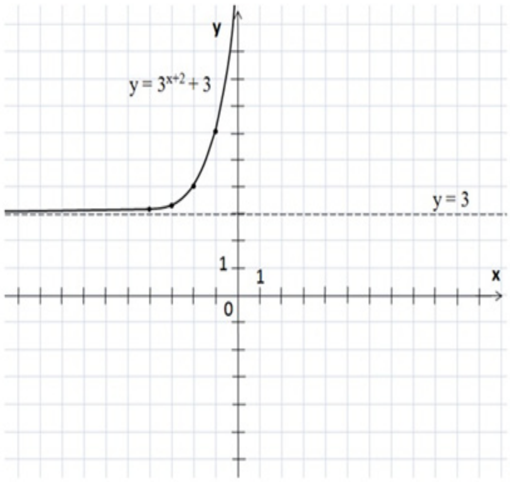
a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f(x+2)-1$.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji $g(x)$.

c) Dla jakich argumentów funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

3.2.6 Narysuj wykres funkcji i określ jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, monotoniczność, miejsce zerowe oraz asymptotę):

$f(x) = 3^{x+2} + 3$



Dziedzina: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}$.

Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW} = (3, +\infty)$.

Funkcja rosnąca.

Miejsce zerowe: brak.

Asymptota: $y = 3$.

3.3 Funkcja logarytmiczna i jej własności*

W tym rozdziale rozważać będziemy funkcje o postaci $y = \log_a x$. Takie funkcje nazywamy **funkcjami logarytmicznymi**.

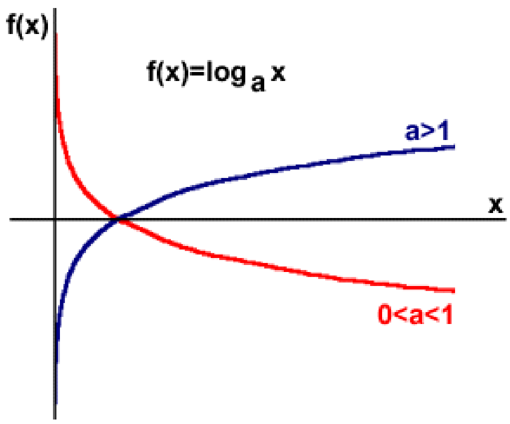
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci:

$f(x) = \log_a x$ gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

Dziedziną każdej funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$, a **zbiorem wartości** zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

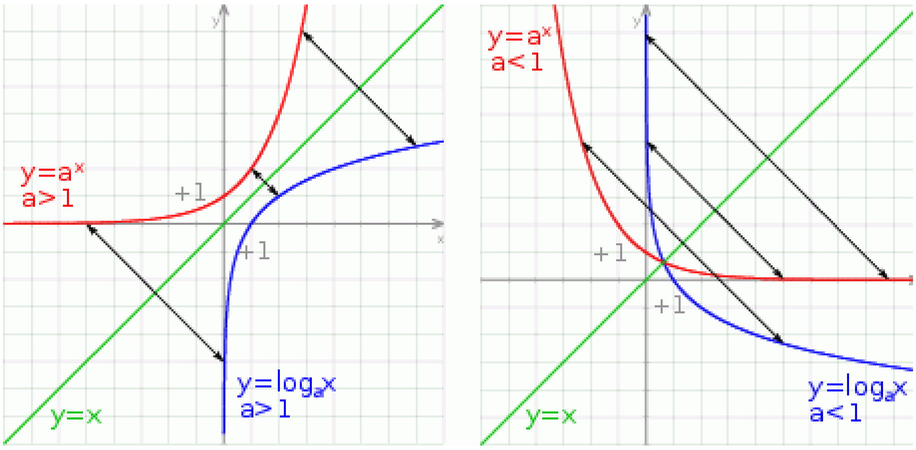
Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się **krzywą logarytmiczną**.

Funkcja logarytmiczna jest funkcją malejącą dla $a \in (0, 1)$, natomiast dla $a \in (1, +\infty)$ jest funkcją rosnącą.



Rysunek 3-8. Wykresy funkcji logarytmicznych

Funkcja logarytmiczna $\boldsymbol{f(x) = log_a\, x}$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $f(x) = ax$. Wykresy tych funkcji są symetryczne względem prostej $\boldsymbol{f}(x) = x$.

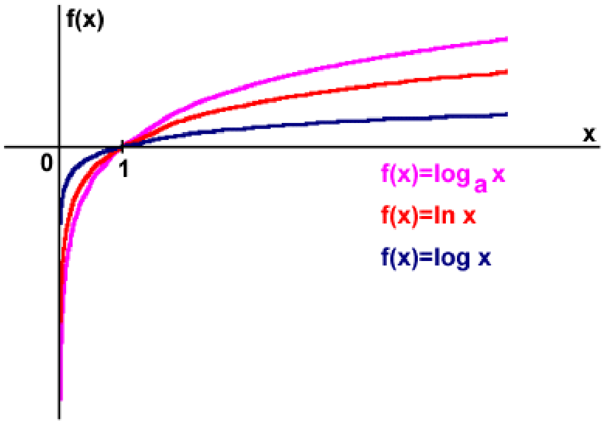


Rysunek 3-9. Funkcja wykładnicza a logarytmiczna

Ciekawostka

Wiadomo, że w zależności od podstawy, istnieją trzy grupy logarytmów:

- logarytm przy dowolnej podstawie – $\log_a x$
- logarytm przy podstawie dziesiętnej (***dziesiętne***) – $\log_{10} x = log\ x = lg\ x$
- logarytm przy podstawie z ***e (liczby Nepera e = 2,718281828...)*** – $\log_e x = ln\ x$



Rysunek 3-10. Wykres funkcji logarytmicznej przy podstawie z e

Symbol $ln\,x$ jest symbolem logarytmu naturalnego i oznacza logarytm o podstawie $a = e(e \approx 2{,}7)$.

$lnx = \log_e x$

$ln1 = 0,$ bo $e^0 = 1$

$lne = 1,$ bo $e^1 = e$

$ln\sqrt{e} = \frac{1}{2},$ bo $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

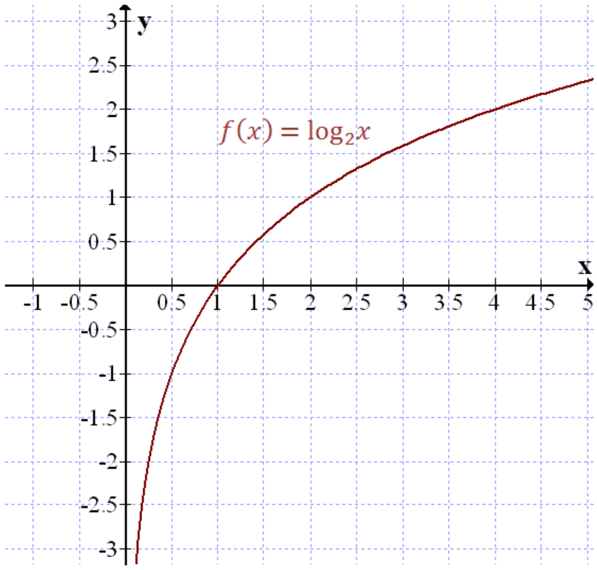
Funkcja logarytmiczna i jej własności*

Przypadek I [45] – dla $a > 1$

Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_2 x$. Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x. Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

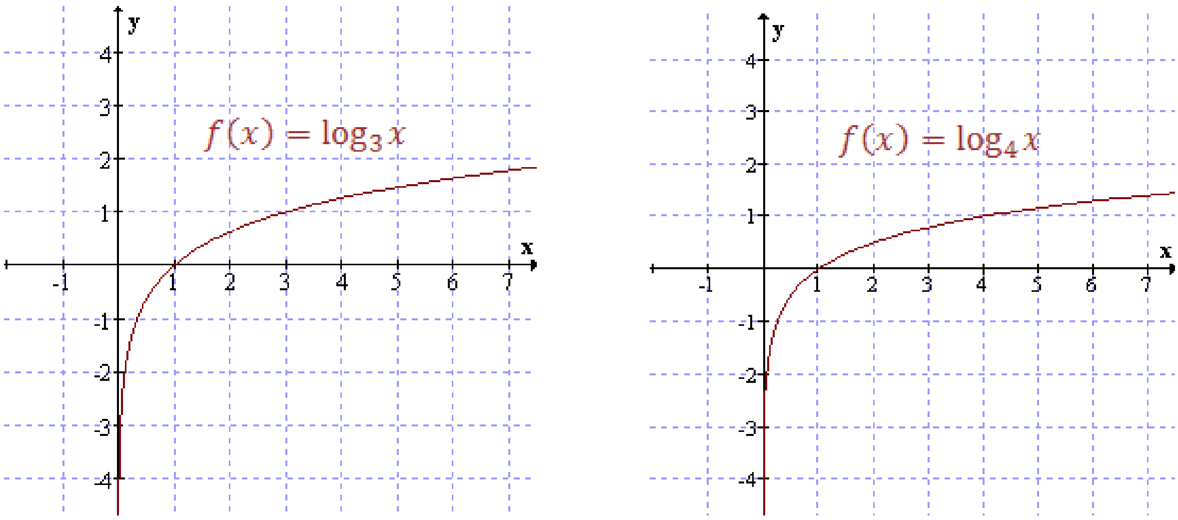
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log^2 x$	-2	-1	0	1	2

Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $a > 1$.

Przykłady:



Rysunek 3-11. Wykres funkcji logarytmicznych, $a > 1$

45 Przypadek I i II: www.matemaks.pl/funkcja-logarytmiczna.php, 17.03.2013.

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $\underline{a > 1}$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D = R_+}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW = R}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest $\boldsymbol{rosnąca}$.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x) > 0}$, gdy $\boldsymbol{x \in (1;\ +\infty)}$.
5. Miejsca zerowe: $\boldsymbol{x = 1}$.
6. Oś OY jest asymptotą pionową, czyli prosta $\boldsymbol{y = 0}$.

Przypadek II – dla $\underline{a < 1}$

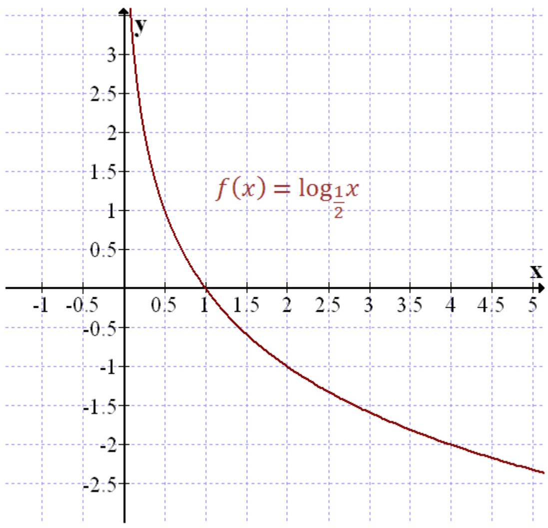
Ten przypadek omówimy na przykładzie funkcji: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Na początek obliczmy wartości tej funkcji dla kilku przykładowych argumentów x.

Sporządźmy zatem odpowiednią tabelkę:

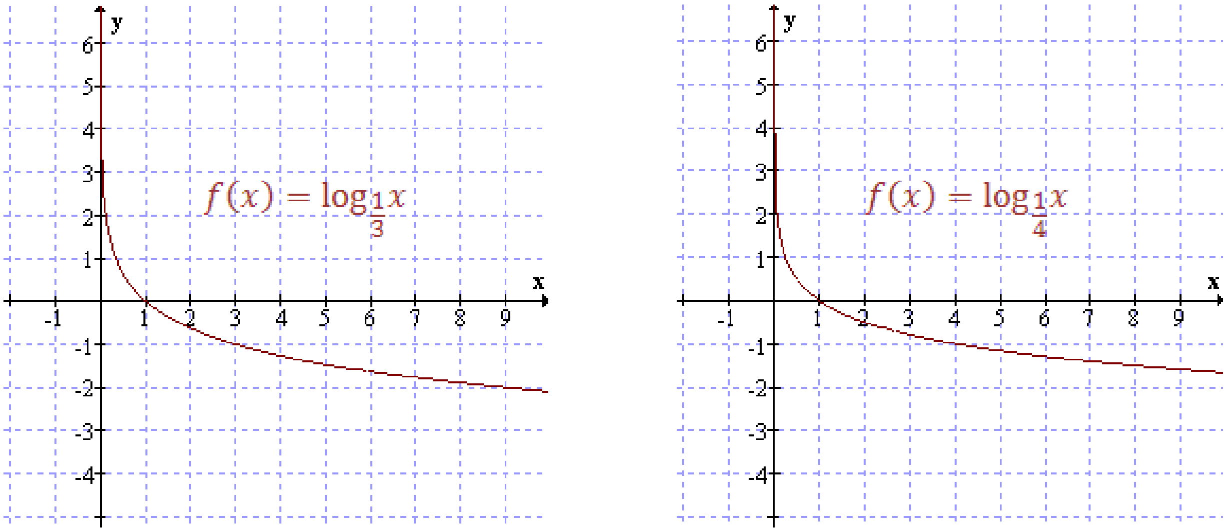
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log^2 x$	2	1	0	-1	-2

Zatem wykres tej funkcji będzie wyglądał następująco:



Bardzo podobnie wyglądają wykresy innych funkcji logarytmicznych o podstawie $\boldsymbol{a} < 1$.

Przykłady:



Rysunek 3-12. Wykresy funkcji logarytmicznych, $0 < a < 1$

Własności funkcji logarytmicznej o podstawie $a < 1$:

1. Dziedzina: $\boldsymbol{D = R_+}$.
2. Zbiór wartości: $\boldsymbol{ZW = R}$.
3. Monotoniczność: funkcja jest ***malejąca***.
4. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie: $\boldsymbol{f(x)} > 0$, gdy $\boldsymbol{x \in (0;\ 1)}$.
5. Miejsca zerowe: $\boldsymbol{x = 1}$.
6. Oś OY jest asymptotą pionową, czyli prosta $\boldsymbol{y = 0}$.

ZADANIE

3.3.1 Podaj współrzędne punktów symetrycznych względem prostej $y = x$ do punktów:

a) $A = (1{,}5), B = (4, -2), C = (-5, -1), D = (0, -3), E = (10{,}0)$

3.4 Szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznej*

Teraz nauczę się:

- Szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw.

ZADANIA

3.4.1. Narysuj wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \log_2(x - 3)$

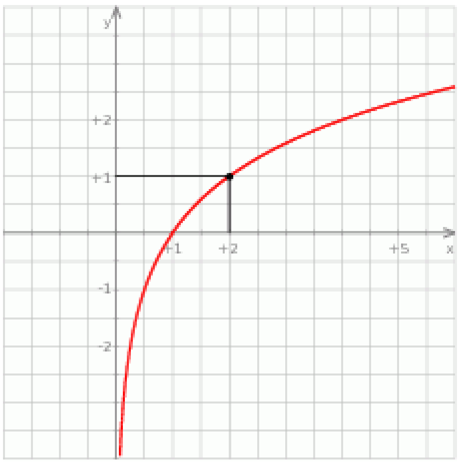
b) $y = \log_2(5 + x)$

c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = -4 + \log_2 x$

e) $y = \log_2(x + 1)$

3.4.2. Dany jest wykres funkcji logarytmicznej f.

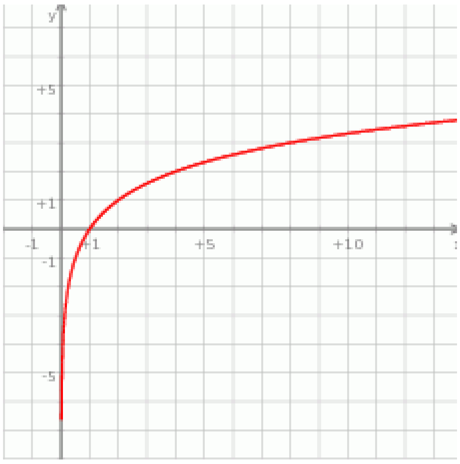


a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.

c) Odczytaj z rysunku zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są nie mniejsze od wartości funkcji f.

3.4.3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.



a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p. b) Oblicz $f(0{,}125)$.

c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x-4)|$. d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.

3.5 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne w zjawiskach fizycznych i chemicznych

Teraz nauczę się:

- Posługiwać funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- Posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Zastosowanie funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym

Przykład 1

Model wykładniczy

Niech funkcja $f(t), t \geq 0$ opisuje pewną wielkość zmieniającą się w czasie. Wielkość ta zmienia się zgodnie z **modelem wykładniczym**, jeśli:

$f(t) = b \cdot a^t$, gdzie $a > 0, a \neq 1$ i $t \geq 0$.

UWAGA!!!

Liczby a i b są na ogół wyznaczane doświadczalnie.

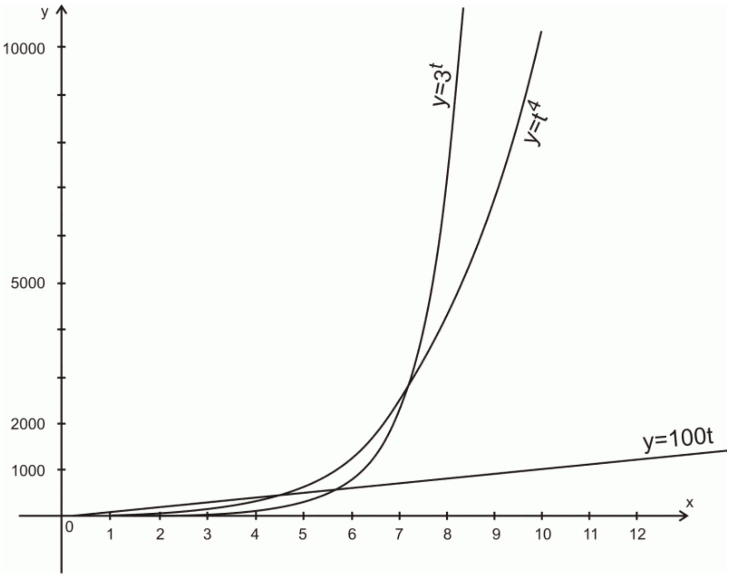
Jeśli $a > 0$, to mamy do czynienia ze wzrostem wykładniczym.

Wzrost wykładniczy jest wzrostem bardzo szybkim. Często nazywa się go wzrostem gwałtownym. Jest on znacznie szybszy nie tylko od wzrostu liniowego opisanego przez funkcję $g(t) = at, a > 0$, ale także od wzrostów opisanych przez funkcje potęgowe $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

Dla małych wartości czasu wzrost wykładniczy może być nawet wolniejszy niż wzrost liniowy, ale począwszy od pewnego momentu (różnego dla różnych zjawisk) tempo wzrostu krzywej z modelu wykładniczego jest już znacznie większe niż w przypadku modeli opisywanych przez funkcje $h(t) = b \cdot t^n$ dla $b > 0$ i $n \in N_+$.

UWAGA!!!

Funkcja rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, której wykres jest w tym przedziale „podobny" do wykresu funkcji wykładniczej, jest funkcją rosnącą coraz szybciej, czyli tempo wzrostu funkcji jest szybkie.



Rysunek 3-13. Wzrost wykładniczy

Z przedstawionego wykresu odczytujemy, że dla $t > 8$ wartości funkcji $f(t) = 3^t$ zaczynają przewyższać wartości funkcji $g(t) = 100t$ i $h(t) = t^4$ i im większy jest czas, tym różnice pomiędzy wartościami tych funkcji są większe.

Dla $a \in (0;1)$mamy do czynienia ze spadkiem wykładniczym, czyli funkcja $f(t) = b{\cdot}a^t$ maleje coraz wolniej.

Dokonując pomiaru wartości wielkości opisanej ustalonym modelem wykładniczym, stwierdza się, że w stałych odstępach czasu zwiększają się one lub zmniejszają o ten sam procent.

Wiele zjawisk w przyrodzie odbywa się (przynajmniej w pewnej fazie ich trwania) według modelu wykładniczego. Są to między innymi: promieniotwórczość naturalna, wzrost lub spadek liczby populacji, stygnięcie ciał itd. Omówimy je w kolejnych przykładach i zadaniach.

Funkcję $f(t) = ba^t$ $f(t) = b{\cdot}a^t$ można przedstawić na wiele sposobów, tzn. można stosować do jej opisu różne podstawy a funkcji wykładniczej.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich i różnych od jedynki liczb a i c istnieje taka liczba $k \neq 0$, że funkcje $f(t) = ba^t$ i $g(t) = bc^{kt}$ są równe, tzn. $ba^t = bc^{kt}$, dla dowolnego $t > 0$

Uzasadnienie tego twierdzenia jest bardzo proste.

Należy znaleźć liczbę k, która dla każdej wartości $t \geq 0$, spełnia warunek $a^t = c^{kt}$.

Korzystając z własności potęg, otrzymujemy:

$a^t = (c^k)^t$ dla każdego $t \geq 0$.

Stąd $a = c^k$.

Korzystając z określenia logarytmu, obliczamy: $k = \log_c a$.

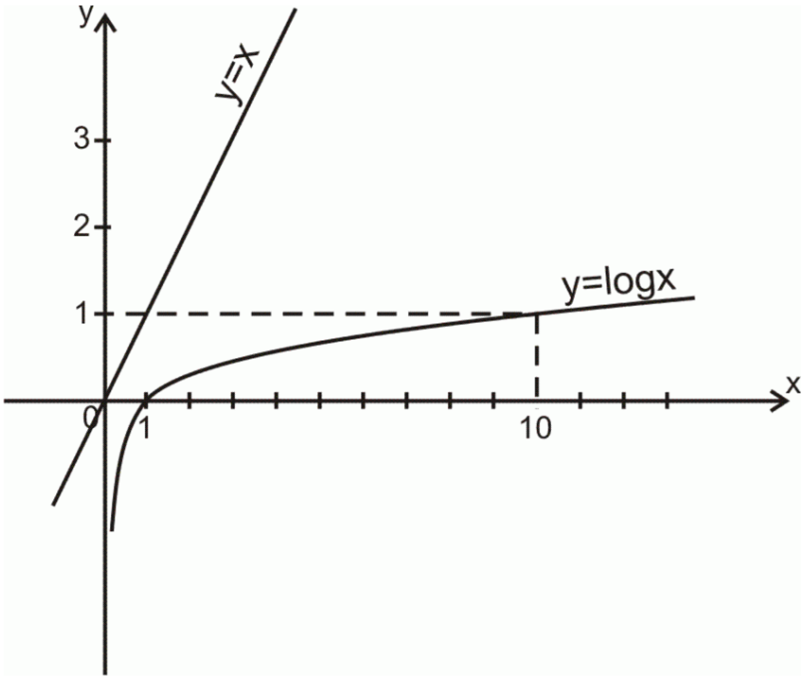
A więc istnieje liczba $k = \log_c a$ taka, że funkcję $f(t)$ można zastąpić funkcją $g(t)$.

Zastosowanie funkcji logarytmicznych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w kontekście praktycznym[46]

Przykład 2

Skala logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x, a > 1, x > 0$, jest funkcją rosnącą. Jej wzrost jest jednak bardzo powolny, wolniejszy nawet od wzrostu liniowego.



Rysunek 3-14. Wykres funkcji $logx < x$ dla $x > 0$

Jeśli zakres wartości pewnej wielkości jest dodatni i bardzo szeroki, to wygodniej jest go podawać w skali.

Podanie konkretnej wartości w o pewnej wielkości oddaje jej obraz tylko wtedy, gdy możemy ją porównać z innymi wartościami, a szczególnie z najmniejszą wartością ω_0.

Iloraz $\frac{\omega}{\omega_0}$ mówi nam, ile razy wartość ω jest większa od najmniejszej wartości ω_0 przyjmowanej przez daną wielkość. Iloraz ten jest liczbą bezwymiarową i dużą przy szerokim zakresie wartości.

Zlogarytmowanie ilorazu $\frac{\omega}{\omega_0}$ prowadzi do tzw. **skali logarytmicznej** danej wielkości. Do logarytmowania używa się na ogół logarytmu dziesiętnego lub naturalnego.

46 www.megamatma.pl, 17.03.2013.

Skala logarytmiczna jest więc przedstawieniem wartości w pewnej wielkości, np. natężenia, w następującej postaci podanej z użyciem logarytmu: $klog\,\frac{\omega}{\omega_0}$ lub $k\;ln\,\frac{\omega}{\omega_0}$, gdzie: k – stała charakterystyczna dla zjawiska mierzonego przez wartości ω, ω_0 – najmniejsza z wartości przyjmowanych przez ω.

Mimo, że $klog\,\frac{\omega}{\omega_0}$ i $k\;ln\,\frac{\omega}{\omega_0}$ są liczbami bezwymiarowymi, to często wprowadza się dla nich specjalne jednostki, właściwe dla danej dziedziny.

Przykładami skal logarytmicznych są: **skala decybelowa w akustyce, skala Richtera określająca wielkości wstrząsów sejsmicznych, skala pH czy skala wielkości gwiazdowych.**

Wprowadzenie skali logarytmicznej jest nie tylko pomysłem matematycznym na to, aby bardziej przejrzyście przedstawić pewne dane.

Stwierdzono doświadczalnie, że nasze zmysły reagują na bodźce w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

Prawo Webera-Frechnera mówi, że wartość reakcji na bodźce takich zmysłów, jak: wzrok, słuch czy poczucie temperatury jest proporcjonalna do logarytmu tego bodźca.

Przykład 3

Poziom głośności dźwięku

Źródła dźwięku wysyłają dźwięki o różnym natężeniu. Dźwięki rozchodzą się w postaci fal dźwiękowych. Jeśli kilka źródeł dźwięku wysyła jednocześnie dźwięki, to ich natężenia sumują się.

Natężenie dźwięku I jest ilością energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu i przechodzącej przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej.

Jednostką natężenia dźwięku jest $\frac{W}{m^2}$ (wat na metr kwadratowy).

Natężenie dźwięku odpowiadające tzw. progowi słyszalności jest równe $I_0 = 10 - 12\,\frac{W}{m^2}$. Natężenia innych słyszalnych dźwięków są większe od I_0. Natężenie **szeptu** jest około 100 razy większe niż I_0, zaś natężenie dźwięku towarzyszące **wybuchowi petardy** to już wielkość rzędu $10^4\,\frac{W}{m^2}$, czyli że jest ono 10^{16} razy większe niż I_0.

Przy tak szerokim zakresie wartości natężenia dźwięku wprowadzenie skali logarytmicznej jest bardzo uzasadnione. W skali tej logarytmujemy iloraz $\frac{I}{I_0}$. Wielkość obliczoną za pomocą logarytmu dziesiętnego z ilorazu $\frac{I}{I_0}$ nazywa się **poziomem natężenia dźwięku** lub **poziomem głośności dźwięku.** Oznacza się ją literą L.

I tak przyjęto:

Wzór

Poziom głośności dźwięku:

$L = 10log\,\frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ – poziom słyszalności, I – natężenie dźwięku.

Jednostkami poziomu głośności są **bel i decybel**, oznaczane symbolami **B** i **dB.**

Dźwięk ma poziom głośności równy 1B, jeśli jego natężenie jest równe $10\;I_0$.

Natomiast $1\ dB = 0{,}1\ B$.

Decybele są powszechniej używanymi jednostkami poziomu natężenia dźwięku.

ZADANIA

3.5.1 Aktywność źródła promieniotwórczego określa liczbę atomów, która uległa rozpadowi w jednostce czasu $\mathbf{A} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$. Jednostką aktywności jest bekerel **(1 Bq =** $\frac{1}{s}$**)**. W poniższej tabeli zamieszczono wyniki pomiarów aktywności próbki pewnego pierwiastka promieniotwórczego.

$t(h)$	0	480	960	1200	1950
A (10^3Bq)	5	1,5	0,5	0,25	0,05

Przedstaw na wykresie zależność aktywności próbki tego pierwiastka od czasu.

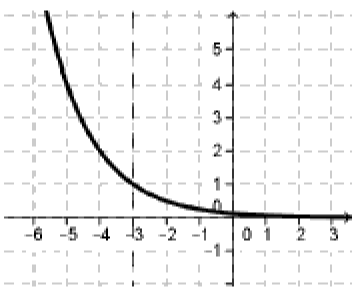
3.5.2 Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu wapnia wynosi 6 miesięcy. W chwili początkowej próbka zawierała 40 mg wapnia. Oblicz, ile wapnia próbka zawierała:

a) dwa lata wcześniej,

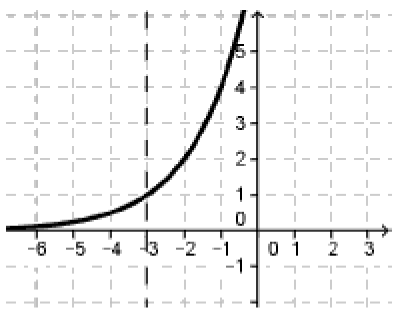
b) po trzech latach.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

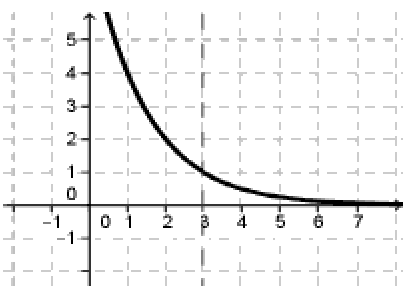
1.[47]: Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-3}$ przedstawiony jest na rysunku



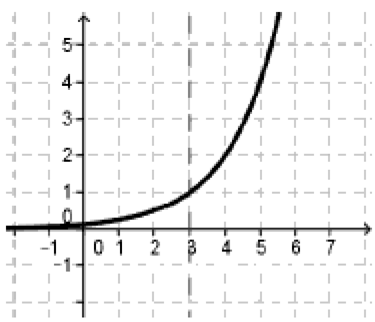
A.



C.



B.



D.

47 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 11.03.2013.

2.[48] Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3^{x+2} - 3$ jest zbiór:

a) $(-2, \infty)$ b) $(-3, -2)$ c) $(3, \infty)$ d) $(-3, \infty)$

3. Wartością funkcji $f(x) = 2^x$ jest liczba:

a) -8 b) -4 c) 0 d) 3

4. Zbiorem wartości funkcji $(x) = 2^x + 3$ jest przedział:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $\langle 0, +\infty)$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-3, +\infty)$

5. Funkcją malejącą jest funkcja:

a) $f(x) = (0{,}5)^{x-1}$ b) $f(x) = (0{,}5)^{-x}$ c) $f(x) = -(0{,}5)^x$ d) $f(x) = (0{,}5)^{2-x}$

6. Funkcja $f(x) = 9^x$ dla argumentu $x = -\frac{3}{2}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{3^3}$ b) 27 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$ d) $\frac{1}{81}$

7. Funkcja $(x) = 8^x$dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $0{,}25$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ d) 4

8. Dla jakiego argumentu $y = 2^x$ przyjmuje wartość 64?

a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 4$

9. Populacja bakterii w próbce podczas pewnego eksperymentu zmniejsza się o 2% dziennie. Jeśli przyjmiemy, że na początku doświadczenia populacja bakterii liczyła A sztuk, to po upływie t dni liczbę bakterii $p(t)$ można opisać wzorem:

a) $p(t) = 0{,}02^t \cdot A$ b) $p(t) = 0{,}98^t \cdot A$ c) $p(t) = 2^t \cdot$

Zadania zamknięte, wydawnictwo Nowa Era[49]

10. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = x$ przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, wynosi:

a) $2\sqrt{2}a$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{8a}$ d) $a\sqrt{2}$

11. Punkt $P = (-3, 1/8)$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{-x}$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

48 Zadania 2-9: zaczerpnięte http: //www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
49 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.nowaera.pl/dokumenty/zadania_zamkniete.pdf, 11.03.2013.

12. Wskaż funkcję rosnącą:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

13. Punkt $P = \left(\log_2 \frac{1}{4};\ \log_{\frac{1}{3}} 81\right)$ należy do wykresu funkcji:

a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 2x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = -2x$

ZADANIA OTWARTE

1. **(5 pkt)** Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - a) + b$. Wyznacz wartości parametrów a i b, jeśli wiesz, że dziedziną funkcji jest przedział $(5, +\infty)$ i do wykresu należy punkt $A = \left(5\frac{1}{8}, 9\right)$. Podaj wzór tej funkcji.

4 Stereometria

Teraz nauczę się:

- Rozpoznawać graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- Obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- Zamieniać jednostki objętości.

Zamiana jednostek objętości:

$1cm^3 \rightarrow 1\,000\,mm^3$

$1dm^3(1\ litr) \rightarrow 1000\ cm^3$

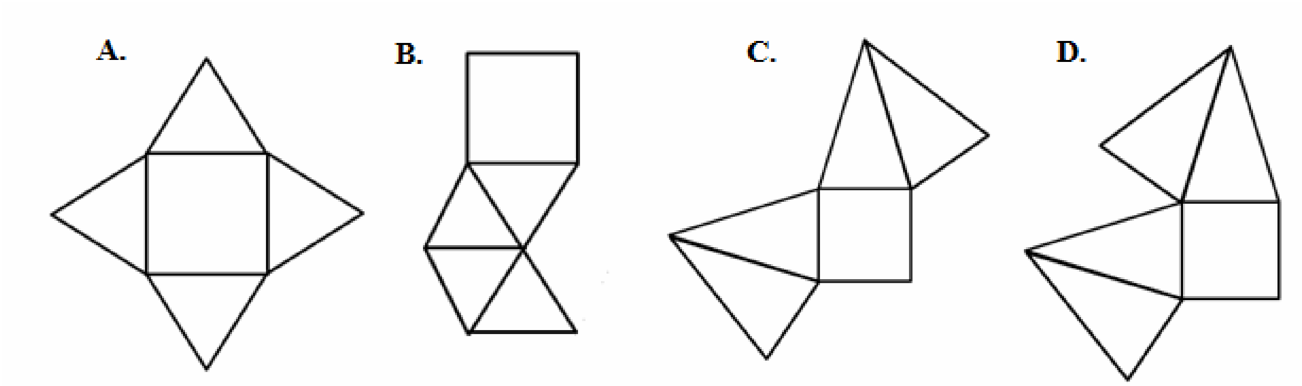
$1cm^3 \rightarrow 1000\ mm^3 \rightarrow 1\,000\,000\ mm^3$

$1m^3 \rightarrow 1\,000\ dm^3 \rightarrow 1\,000\,000\ cm^3 \rightarrow 1\,000\,000\,000\ mm^3$

$1\ hektolitr \rightarrow 100\ litrów \rightarrow 100dm^3$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zad.1 Który rysunek nie przedstawia siatki ostrosłupa czworokątnego?



Zad.2 Podstawą graniastosłupa prawidłowego nie może być:

a) kwadrat

b) sześciokąt foremny

c) prostokąt

d) trójkąt równoboczny

Zad.3 Bok sześcianu ma długość 6 cm, więc długość jego przekątnej wynosi:

a) $6\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{6}$

c) $6\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2}$

Zad.4 Tworząca stożka ma długość 13 cm, a jego wysokość 5 cm. Wynika z tego, że promień podstawy ma długość:

a) $12\ cm$ b) $10\ cm$ c) $6\ cm$ d) $13\ cm$

Zad.5 Jeśli średnica kuli ma 8 cm, to pole powierzchni całkowitej tej kuli wynosi:

a) $16\ \pi$ b) $64\ \pi$ c) 32π d) $256\ \pi$

Zad.6 Przekrojem poprzecznym walca jest:

a) prostokąt b) kwadrat c) kula d) koło

Zad.7 Objętość kuli wynosi $36\pi\ cm^3$. Promień tej kuli ma długość:

a) $9\ cm$ b) $3\ cm$ c) $6\ cm$ d) $27\ cm$

Zad.8 Wiedząc, że wysokość walca wynosi $10\ cm$, a promień jego podstawy $0{,}4\ dm$, to pole jego podstawy jest równe:

a) $16\pi\ cm^2$ b) $1{,}6\pi\ dm^2$ c) $16\pi\ dm^2$ d) $0{,}16\pi\ cm^2$

Zad.9 Pole powierzchni sześcianu jest równe $294cm^2$. Krawędź tego sześcianu wynosi:

a) 7 b) 4 c) 8 d) 6

Zad.10 Które zdanie jest fałszywe:

a) $5\ cm^2 = 500\ mm^2$ b) $1\ ha = 10000\ m^3$

c) $3000\ mm^2 = 30cm^2$ d) $1\ a = 100\ m^2$

ZADANIA OTWARTE

1. Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 108 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli krawędź boczna ma długość 16 cm.

2. Ile litrów wody zmieści się w akwarium o wymiarach $3{,}5\ dm \times 0{,}6\ m \times 55\ cm$? Odpowiedź wyraź w postaci liczby naturalnej.

3. Oblicz wysokość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach 4 i 5, a pole powierzchni całkowitej wynosi 166.

4. Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}cm$.

5. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jej pole powierzchni jest równe $1440\pi\ cm^2$.

4.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni

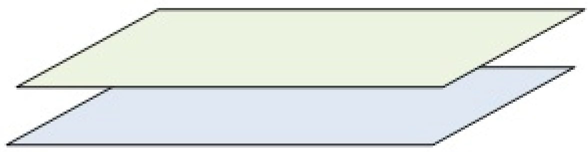
Teraz nauczę się:

- Określać wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni;
- Określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu.

Płaszczyzny i proste w przestrzeni

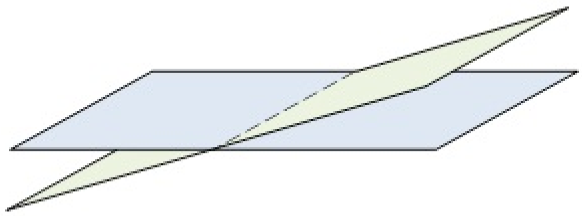
Możliwe są następujące przypadki wzajemnego położenia dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeniach.

Płaszczyzny równoległe



Rysunek 4-1. Płaszczyzny równoległe

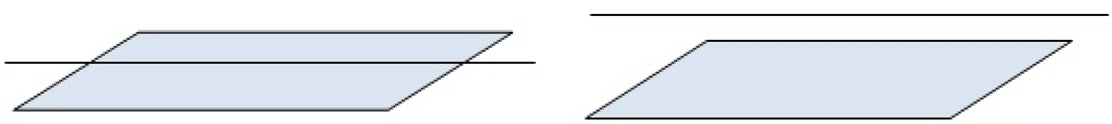
Płaszczyzny przecinające się



Rysunek 4-2. Płaszczyzny przecinające się

Prosta i płaszczyzna mogą znajdować się względem siebie w następującym położeniu:

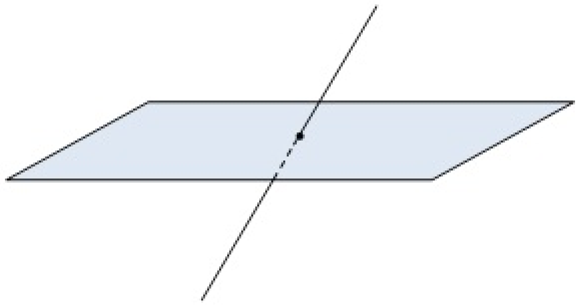
Prosta równoległa do płaszczyzny



Prosta zawiera się w płaszczyźnie — *Prosta nie zawiera się w płaszczyźnie*

Rysunek 4-3. Prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta przecina płaszczyznę

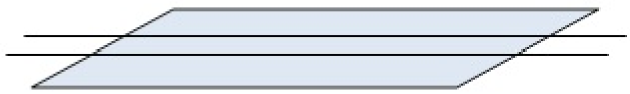


Rysunek 4-4. Prosta przecinająca płaszczyznę

Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

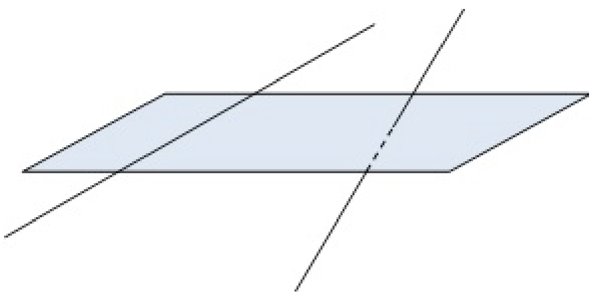
Dwie proste w przestrzeni mogą być:

- Równoległe



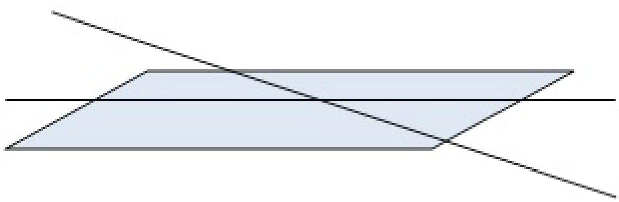
Leżą na płaszczyźnie
i nie mają punktów wspólnych

- Skośne



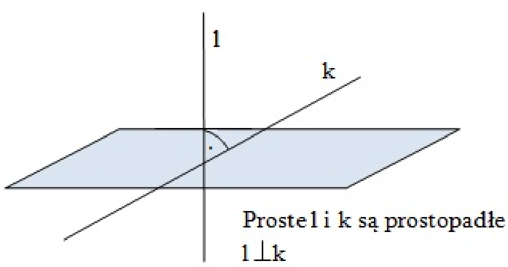
Leżą na różnych płaszczyznach i nie mają punktów wspólnych

- Przecinające się

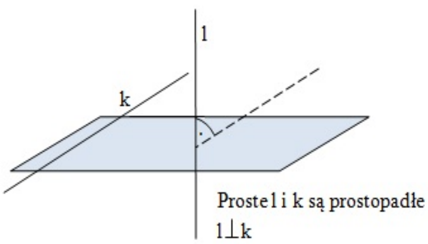


Leżą na jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny

- Prostopadłe



Proste prostopadłe przecinające się

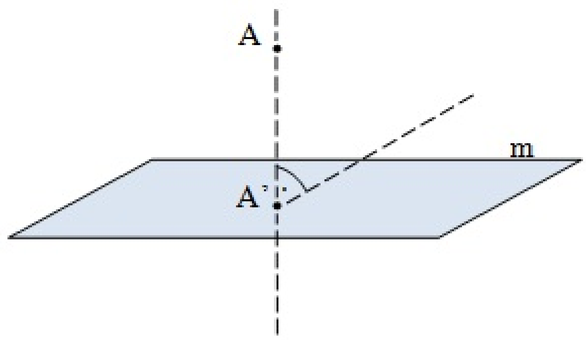


Proste prostopadłe skośne

Rysunek 4-5. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Rzut prostokątny na płaszczyznę

Rzut prostokątny danego punktu na płaszczyznę jest punktem, jaki powstanie, gdy przez dany punkt i płaszczyznę poprowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny.



Punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę m.

Rysunek 4-6. Rzut prostokątny na płaszczyznę

ZADANIA

4.1.1 Wskaż w swoim otoczeniu:

a) proste przecinające się

b) proste równoległe

c) proste skośne

4.1.2 Wskaż w klasie:

a) płaszczyznę i prostą przecinającą tę płaszczyznę

b) płaszczyzny równoległe

c) płaszczyzny przecinające się

d) płaszczyznę i prostą do niej równoległą

4.1.3 Przez dany punkt poprowadź płaszczyznę prostopadłą do danej prostej. Rozpatrz dwa przypadki.

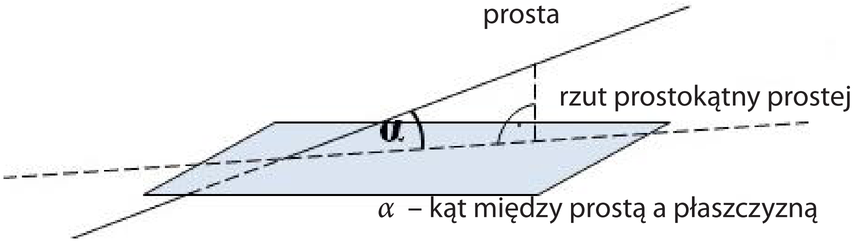
4.1.4 Wykreślić odcinek prostopadły do dwóch prostych skośnych.

4.2 Kąty między płaszczyznami i w figurach przestrzennych

Teraz nauczę się:
- Rozpoznawać kąty między płaszczyznami;
- Rozpoznawać kąty między ścianami i krawędziami w graniastosłupach i ostrosłupach.

Kąt między prostą a płaszczyzną

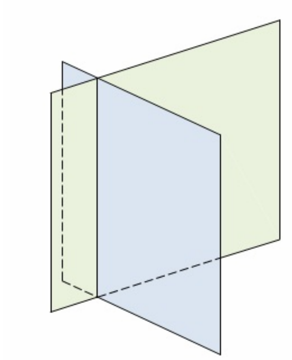
Kąt między prostą a płaszczyzną znajduje się między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



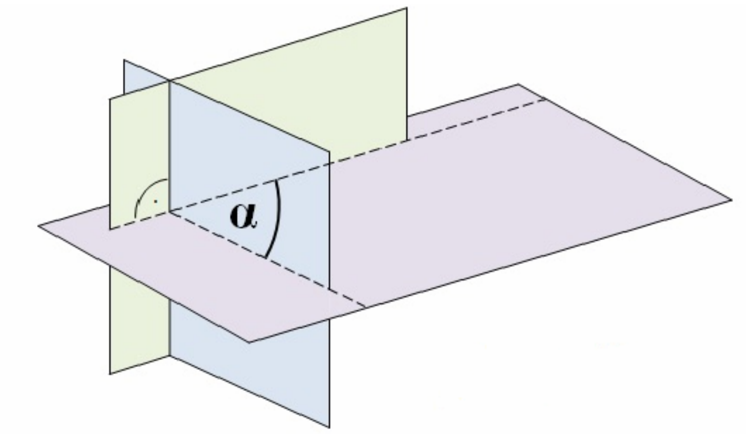
Rysunek 4-7 Kąt między płaszczyzną a prostą

Kąt dwuścienny

To kąt zawierający się pomiędzy dwoma przecinającymi się płaszczyznami:



Kąt dwuścienny wyznaczamy, przecinając obie płaszczyzny trzecią, która jest do nich prostopadła.



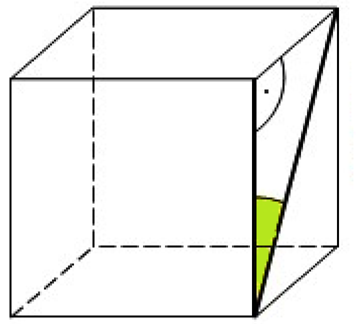
Rysunek 4-8. Kąt dwuścienny

Kąty w bryłach

Często w zadaniach związanych z bryłami pojawiają się wartości kątów między określonymi odcinkami lub ścianami. O prawidłowym rozwiązaniu decyduje wtedy, czy dobrze umiejscowiliśmy dany kąt, a niestety w tym miejscu często pojawiają się błędy. Warto więc wiedzieć, gdzie znajdują się dane kąty.

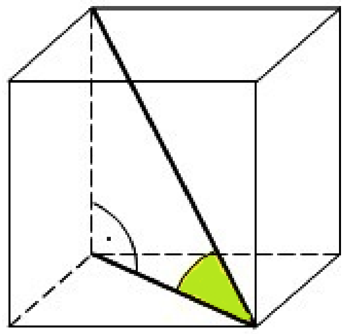
Graniastosłupy

- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną (wysokością)



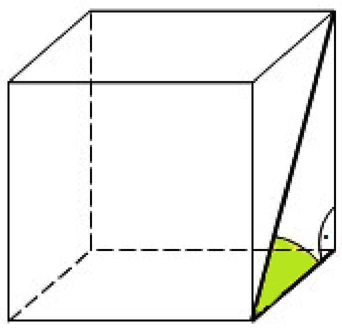
Wysokośćgraniastosłupawrazzkrawędziąpodstawyiprzekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy czworokąt)



Wysokość graniastosłupa wraz z przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa tworzą trójkąt prostokątny.

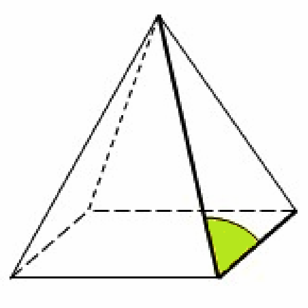
- kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy



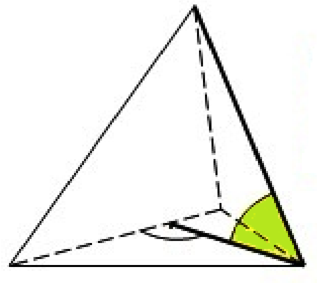
Wysokość graniastosłupa wraz z krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej tworzą trójkąt prostokątny.

Ostrosłupy

- kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

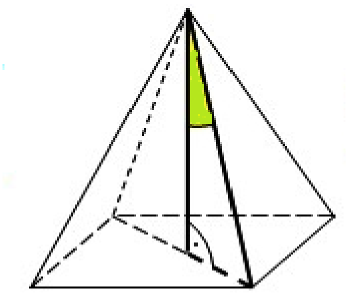


- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie mamy trójkąt równoboczny)



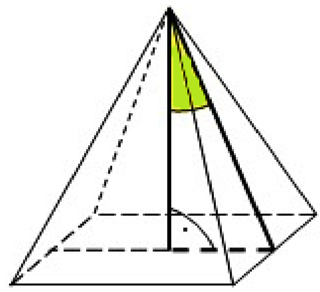
Kąt znajduje się między krawędzią boczną ostrosłupa a wysokością podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



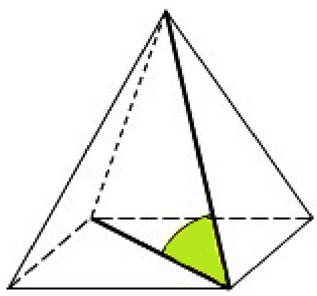
Krawędź boczna i wysokość ostrosłupa wraz z połową przekątnej podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



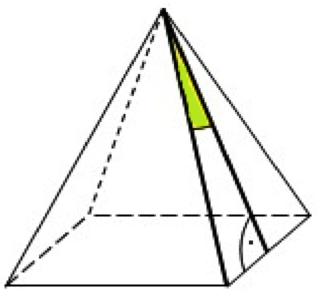
Wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej wraz z połową odcinka, którego długość stanowi połowę długości podstawy, tworzą trójkąt prostokątny.

- kąt między krawędzią boczną a podstawą (gdy w podstawie znajduje się prostokąt)



Kąt znajduje się między krawędzią boczną a przekątną podstawy.

- kąt między krawędzią boczną a wysokością ściany bocznej



Krawędź boczna i wysokość ściany bocznej wraz z połową krawędzi podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

4.2.1 Narysuj sześcian i zaznacz w nim kąt nachylenia:

a) przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

4.2.2 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość $6\sqrt{3}\ cm$, a wysokość ostrosłupa jest równa $3\sqrt{3}\ cm$. Oblicz miarę kąta nachylenieaściany bocznej do podstawy.

4.2.3 Wskaż w klasie kąty dwuścienne. Podaj miary tych katów.

4.2.4 Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

4.2.5 Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 6, a długość krawędzi bocznej jest równa $2\sqrt{15}$15. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej piramidy do podstawy.

4.2.6 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

4.2.7 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym zaznacz kąt liniowy kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi.

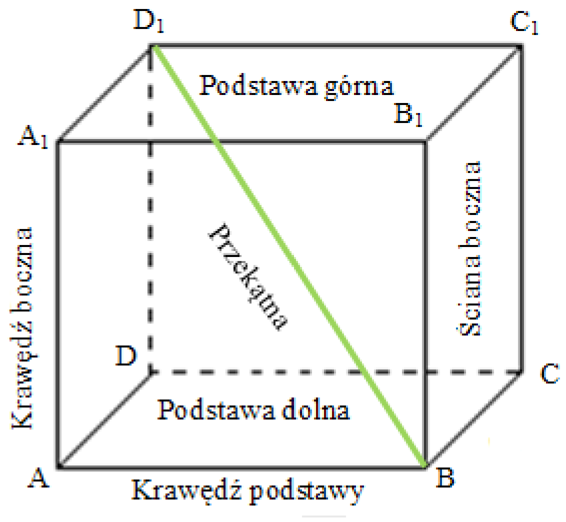
4.3 Graniastosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów;
- Rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Przypomnijmy najpierw najważniejsze pojęcia dotyczące graniastosłupów.

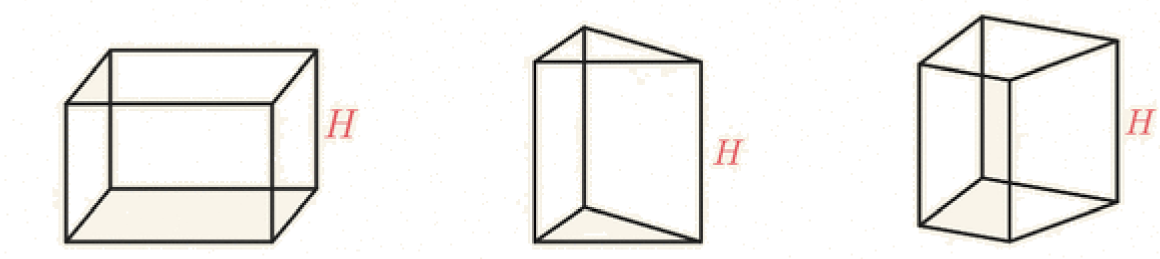
Graniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach, zwanych podstawami graniastosłupa, i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi podstawami są do siebie równoległe.



Rysunek 4-9. Graniastosłup prawidłowy

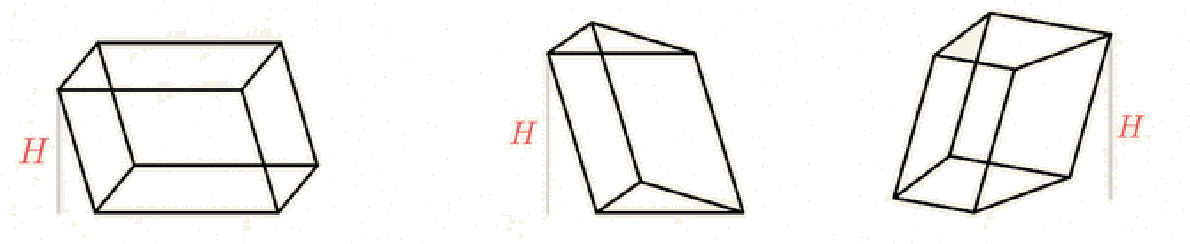
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Przykłady graniastosłupów prostych



Rysunek 4-10. Graniastosłupy proste

Przykłady graniastosłupów pochyłych



Rysunek 4-11. Graniastosłupy pochyłe

Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego dwóch podstaw i polu powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

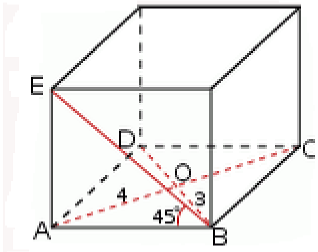
Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości.

$$V = P_p \cdot H$$

Przykład 1

Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych długości $6\ cm$ i $8\ cm$, którego przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze $45°$.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:



Z tego wynika, że $|AE| = |AB| = 5cm$.

Możemy już obliczyć objętość graniastosłupa.

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ cm^2$

$V = P_p \cdot H = 24\ cm^2 \cdot 5\ cm = 120\ cm^3$

Policzymy jeszcze pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

$P_b = 4 \cdot |AB| \cdot |AE| = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100\ cm^2$

$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 24\ cm^2 + 100\ cm^2 = 148\ cm^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $120\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $148\ cm^2$.

ZADANIA

4.3.1 W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem o polu $P = 400\ cm^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

4.3.2 Oblicz objętość prostopadłościanu, jeżeli kąt między jego przekątną o długość $10\ cm$ a podstawą ma miarę $60°$, a jedna z krawędzi podstawy ma długość $4\ cm$.

4.3.3 Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $a = 4\ cm$. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

4.3.4 Kąt zawarty między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą ma miarę $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli jej wysokość ma długość $10\ cm$, a szerokość podstawy wynosi $6\ cm$.

4.3.5 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

4.3.6 Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Wyznacz sinus kąta nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

4.3.7 Oblicz skalę podobieństwa dwóch graniastosłupów prawidłowych czworokątnych. Pierwszy z nich ma wysokość $2\ cm$ i objętość $18\ cm^3$ oraz jest podobny do graniastosłupa, którego krawędź podstawy ma długość $1\ cm$.

4.3.8 Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $8\ cm$ i kącie między ramionami miary $120°$. Przekątna mniejszej ściany bocznej graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Wyznacz objętość graniastosłupa.

4.3.9 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego $ABCA_1B_1C_1$, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $|AC| = 6\ cm$, $|BC| = 8\ cm$, a przekątna AB_1 ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α o mierze $60°$.

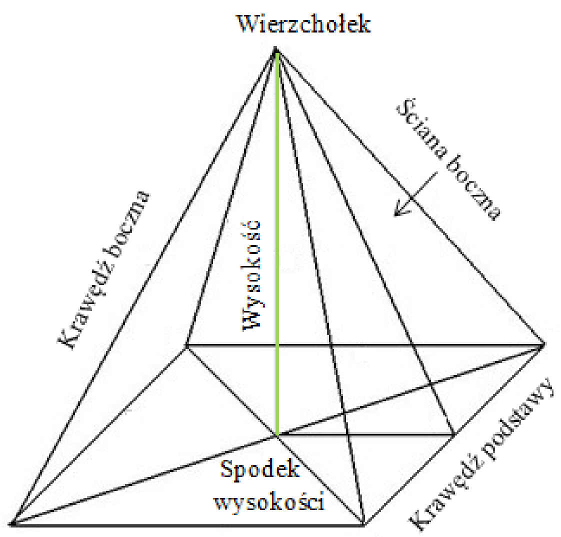
4.4 Ostrosłupy

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości ostrosłupów;
- Rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami a płaszczyznami (między krawędziamiai ścianami, przekątnymi a ścianami);
- Obliczać miary kątów.

Ostrosłup – wielościan, którego wszystkie ściany prócz podstawy są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

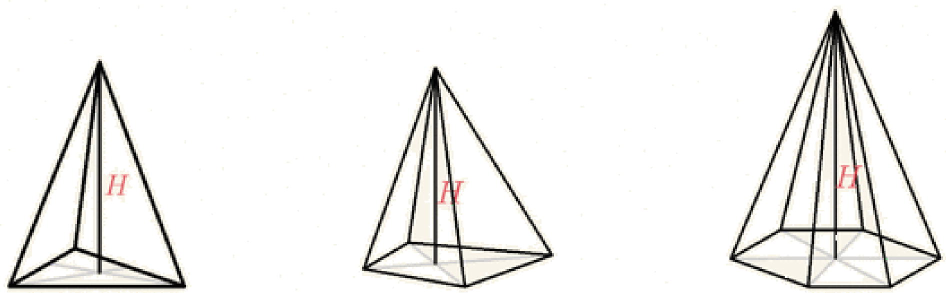
Wysokość ostrosłupa jest to odległość od wierzchołka do płaszczyzny podstawy. Punkt będący rzutem wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywa się spodkiem wysokości.



Rysunek 4-12. Ostrosłup

Ostrosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a jego wysokość pada na środek podstawy. Ściany ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi.

Przykłady ostrosłupów



Niech P_p – oznacza pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, a H – wysokość ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynowi pola podstawy i wysokości.

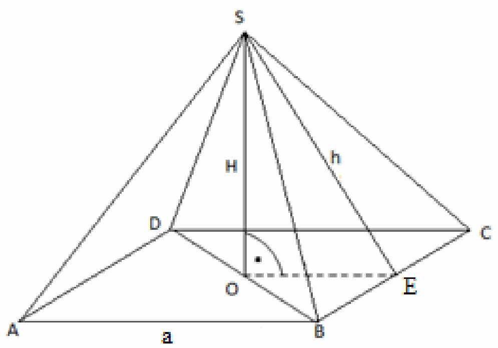
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Przykład 1

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy $a = 6\ cm$, a wysokość ściany bocznej $h = 5\ cm$. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Rozwiązywanie zadania zaczynamy od wykonania rysunku:

Obliczamy wysokość H ostrosłupa, korzystając z trójkąta prostokątnego OES.



$$|OE| = \frac{1}{2}a = 3\ cm$$

$$H^2 = h^2 - |OE|^2$$

$$H^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow H = 4\ cm$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3}6^2 \cdot 4 = 48\ cm^3$$

$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 96\ cm^2$$

Odpowiedź: Objętość tego ostrosłupa wynosi $48\ cm^3$, a pole powierzchni całkowitej $96\ cm^2$.

ZADANIA

4.4.1 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli jego wysokość ma długość $6\ cm$, a kąt między wysokością a krawędzią boczną ma miarę $30°$.

4.4.2 Kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę $60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość $12\ cm$.

4.4.3 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS_o$ o podstawie $ABCD$. Pole trójkąta ASC jest równe 120, a cosinus kąta ASB jest równy $\frac{144}{169}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

4.4.4 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4.4.5 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy $18\ cm$, kąt między wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\alpha = 60°$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Wykonaj odpowiedni rysunek i zaznacz kąt α.

4.4.6 Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = 3$. Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $6\sqrt{3}$. Wyznacz objętość ostrosłupa.

4.4.7 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi bocznej dwa razy dłuższej od krawędzi podstawy.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

b) Wyznacz długość krawędzi ostrosłupa tak, aby pole jego powierzchni bocznej wynosiło $36\sqrt{15}$.

4.4.8 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości $48\ cm^3$. Ściana boczna jest nachylona do podstawy pod takim kątem α, że $tg\alpha = \frac{4}{3}$. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

4.5 Wielościany foremne

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów foremnych.

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez ściany są równe.

Przykład 1

Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi a.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej czworościanu:

$P_c = 4 \cdot P_{\Delta\, równobocznego}$

$P_c = 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Więc $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Obliczamy objętość czworościanu:

ΔOSD jest trójkątem prostokątnym, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$H^2 = h^2 - r^2$

ale $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$H^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

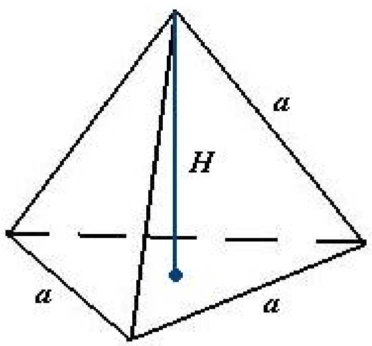
$H^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{36} = \dfrac{24a^2}{36} \quad \Rightarrow \quad H = \dfrac{2a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$V = \dfrac{1}{3}P_p \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{18}}{36} = \dfrac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36}$

Więc $\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

Istnieją następujące wielościany foremne:

Czworościan (tetraedr)



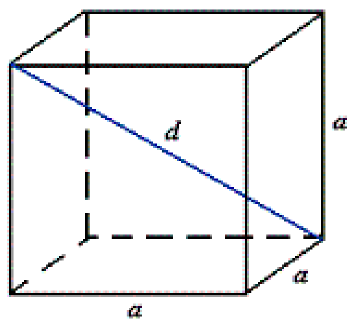
Rysunek 4-13. Czworościan

4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy czworościanem foremnym.

$\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P_c = a^2\sqrt{3}}$

Sześcian (heksaedr)

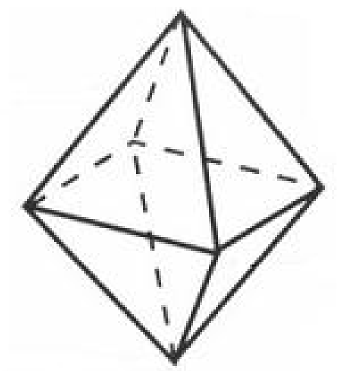


Rysunek 4-14. Sześcian

6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi

$V = a^3 \qquad P_c = 6a^2$

Ośmiościan (oktaedr)

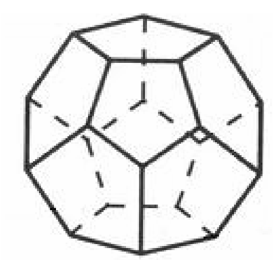


Rysunek 4-15. Ośmiościan

8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków, 12 krawędzi

$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2 \qquad P_c = 2\sqrt{3}a^2$

Dwunastościan (dodekaedr)

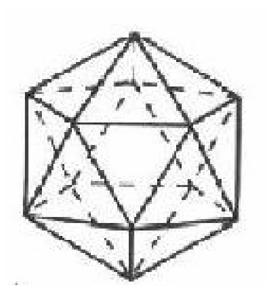


Rysunek 4-16. Dwunastościan

12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków, 30 krawędzi

$V = \frac{(15+7\sqrt{5})}{4}a^3 \qquad P_c = 15(\sqrt{5}+2)a^2$

Dwudziestościan (ikosaedr)



Rysunek 4-17. Dwudziestościan

20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków, 30 krawędzi

$V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3 \qquad P_c = 5\sqrt{3}a^2$

Ciekawostka

Wielościany foremne znali już Pitagorejczycy w VI w. p.n.e. i pod postaciami sześcianu, ośmiościanu, czworościanu i dwudziestościanu wyobrażali cztery żywioły: ziemię, powietrze, ogień i wodę, a od czasów Platona uważano piąty wielościan foremny, dwunastościan, za postać wszechświata. Wielościany te noszą nazwę **brył platońskich.**

ZADANIE DLA DOCIEKLIWYCH

Dlaczego wielościanów foremnych nie może być więcej niż pięć?

ZADANIA

4.5.1 Mając daną długość krawędzi a, wyprowadź wzór na:

a) przekątną sześcianu,

b) wysokość czworościanu foremnego.

4.5.2 Oblicz objętość sześcianu, jeżeli krawędź sześcianu do niego podobnego w skali 3, ma długość $18\ cm$.

4.5.3 Pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni całkowitej czworościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych brył.

4.5.4 Pole powierzchni dwudziestościanu foremnego jest równe $245\sqrt{3}\ cm^2$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego wielościanu.

4.5.5 Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano bryłę o sześciu ścianach. Naszkicuj otrzymaną bryłę. Czy jest to wielościan foremny?

4.5.6 Ściany wielościanu malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:

a) czworościanu foremnego,

b) sześcianu,

c) ośmiościanu foremnego?

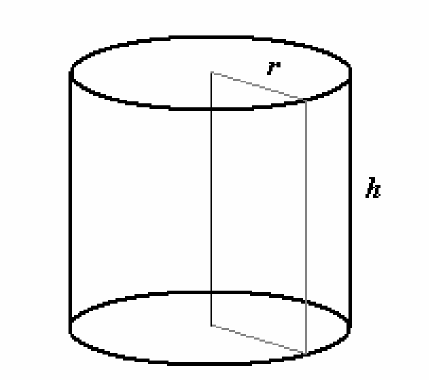
4.6 Walec – jego pole powierzchni i objętość

Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości walców;
- Rozpoznawać w walcach kąty między przekątną przekroju osiowego a płaszczyzną podstawy;
- Obliczać miary kątów.

Walec– to bryła otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jego bok.

Prostą tę nazywamy **osią walca**. Podstawami walca są koła o takim samym promieniu.



Rysunek 4-18. Walec

Powierzchnią boczną walca nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu.

Tworzącą walca nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.

Przekrojem osiowym walca nazywamy część wspólną walca i płaszczyzny zawierającej oś walca.

Objętość walca wyraża się wzorem:

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

Pole powierzchni bocznej walca:

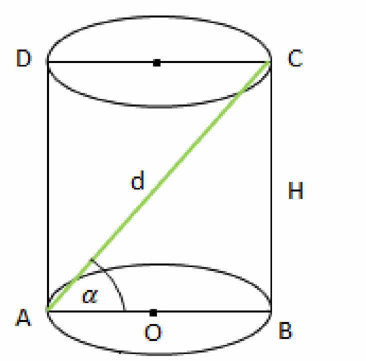
$$P_b = 2\pi r H$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 2\pi r(r + H)$$

Przykład 1

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



ΔABC jest prostokątny, więc $sin\alpha = \frac{H}{d}$

$$H = d \cdot sin\alpha = 10 \cdot sin60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{2r}{d}$$

$$2r = d \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ cm$$

$$r = 2{,}5\ cm$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni całkowitej walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 5\sqrt{3} = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$V = 31{,}25\sqrt{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 2{,}5\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 5\pi\left(2{,}5 + 5\sqrt{3}\right) = 12{,}5\pi + 25\sqrt{3}\pi$$

$$P_c = 12{,}5\pi\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ cm^2$$

ZADANIA

4.6.1 Oblicz objętość walca, jeśli jego przekrój osiowy jest kwadratem o obwodzie równym 24 cm.

4.6.2 Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% większy od promienia podstawy drugiego walca. Oblicz stosunek objętości tych walców.

4.6.3 Długość promienia walca zmniejszono dziesięciokrotnie. Ile razy trzeba zwiększyć wysokość tego walca, aby objętość się nie zmieniła?

4.6.4 Ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości $1\ km$ i średnicy wewnętrznej równej $50\ cm$?

4.6.5 Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy $8\ cm$ i wysokości $10\ cm$ jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki, każda o krawędzi $2\ cm$. Czy woda z kubka się wyleje?

4.6.6 Objętość walca jest równa $108\pi\ cm^3$, a jego wysokość to $12\ cm$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

4.6.7 Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego jeden bok ma długość 8 cm, a przekątna jest o 2 cm dłuższa od drugiego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca wiedząc, że dłuższy bok prostokąta jest wysokością walca.

4.6.8 Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{3}{5}$. Pole przekroju osiowego jest równe 27. Oblicz objętość tego walca.

4.6.9 Do naczynia w kształcie walca wypełnionego wodą do wysokości 7 cm włożono metalową kulkę o promieniu 3 cm. Poziom wody podniósł się o 1 cm i zrównał się z górną podstawą walca. Oblicz objętość naczynia. Przyjmując $\pi = 3{,}14$, wynik podaj z dokładnością do $1 cm^3$.

4.6.10 Puszka na cukier ma kształt walca.

a) Ile kilogramów cukru zmieści się w puszce, której wymiary wynoszą $d = 14\ cm$ a $h = 20\ cm$? Gęstość cukru wynosi 1,6 kg/litrów. Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

b) Jakiej wysokości musiałaby być ta puszka, by mieścił się do niej dokładnie 1 kg cukru? Wynik zaokrąglij z nadmiarem do 1 cm.

4.7 Stożek – jego pole powierzchni i objętość

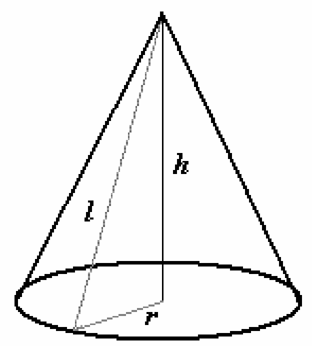
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości stożków;
- Rozpoznawać w stożkach kąty między odcinkami a płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą);
- Obliczać miary kątów.

Stożek – to bryła otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta. Prostą tę nazywamy osią stożka.

Podstawą stożka nazywamy koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka.

Wysokością stożka (h) nazywamy przyprostokątną trójkąta zawartą w osi obrotu.



Rysunek 4-19. Stożek

Powierzchnią boczną stożka nazywamy powierzchnię wyznaczoną przez obrót przeciwprostokątnej trójkąta.

Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywamy **wierzchołkiem stożka.**

Tworzącą stożka (l) nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugi należy do podstawy stożka.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy część wspólną stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka.

Objętość stożka wyraża się wzorem:

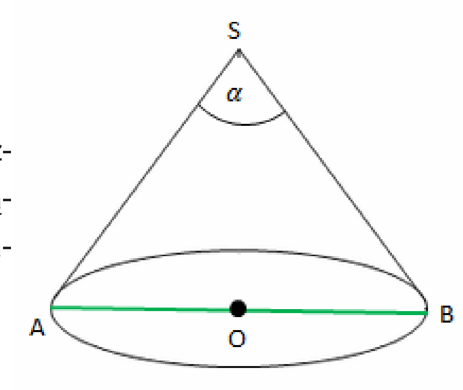
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$$

Pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi r l$$

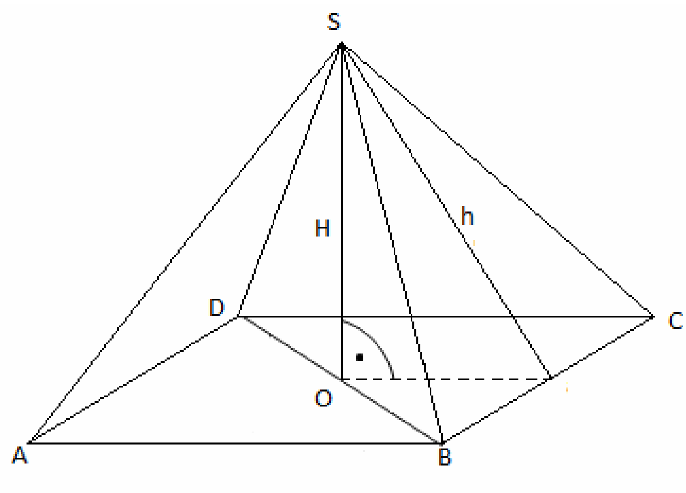
Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = \pi r(r + l)$$



Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka** (kąt α na rysunku).

Przykład 1



Tworząca stożka ma długość $8\ cm$ i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

ΔAOS jest prostokątny i $sin\alpha = \frac{H}{l}$

$$H = 8 \cdot sin60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$cos\alpha = \frac{r}{l}$$

$$r = l \cdot cos\alpha = l \cdot cos60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ cm$$

Podstawiamy do wzoru i obliczamy objętość oraz pole powierzchni całkowitej:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3} cm^3$$

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 8) = 48\pi\ cm^2$$

ZADANIA

4.7.1 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka, jeśli:

a) $\alpha = 60°$ b) $\alpha = 180°$ c) $\alpha = 240°$ d) $\alpha = 270°$

4.7.2 Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie α i promieniu $15\ cm$. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku $6\ cm$. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α.

4.7.3 Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu $49\ cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

4.7.4 Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π cm², a średnica jego podstawy ma długość $12\ cm$. Oblicz objętość tego stożka.

4.7.5 Pole powierzchni bocznej stożka jest cztery razy większe od pola podstawy. Obwód przekroju osiowego stożka jest równy 30. Oblicz objętość tego stożka

4.7.6 Stożek ma wysokość $10\ cm$. Pole przekroju osiowego tego stożka jest równe $30\ cm^2$. Jaką długość ma tworząca tego stożka?

4.7.7 Kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$. Promień podstawy stożka ma długość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

4.7.8 Objętość stożka jest równa 4π, a pole jego podstawy jest równe 4π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

4.7.9 Do naczynia w kształcie odwróconego stożka wrzucono kulkę o promieniu $r = 3\ cm$. Oceń, czy kulka będzie wystawać nad brzeg naczynia. Uzasadnij odpowiedź, wykonując odpowiednie obliczenia, jeżeli wiadomo, że wysokość stożka wynosi $12\ cm$, a promień podstawy to $4\ cm$.

4.7.10 Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$ cm². Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

4.8 Kula – jej pole powierzchni i objętość

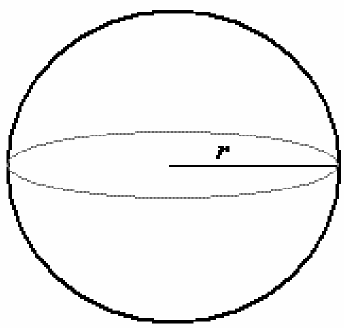
Teraz nauczę się:

- Stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości kuli.

Kula o środku w punkcie O i promieniu r to bryła będąca zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego – **promieniem kuli.**

Obrót okręgu ograniczonego koło tworzy powierzchnię obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli.** Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.



Rysunek 4-20. Kula

Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Objętość kuli wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boldsymbol{P_c = 4\pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu $r = 4\ cm$.

Podstawiamy do wzoru $r = 4\ cm$ i obliczamy:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$$

$$P_c = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi\ cm^2$$

Przykład 2

Oblicz stosunek objętości kuli o promieniu $r_1 = 8\ cm$ do objętości kuli o promieniu $r_2 = 2\ cm$.

Ponieważ każde dwie kule są bryłami podobnymi, to $\frac{r_1}{r_2} = k$.

$$\frac{8}{2} = k \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_2}^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 4^3 = 64$$

Odpowiedź: Stosunek objętości tych kul jest równy 64.

ZADANIA

4.8.1 Oblicz objętość kuli o promieniu $r = 5\ cm$.

4.8.2 Pole powierzchni kuli jest równe $100\pi\ cm^2$. Oblicz objętość tej kuli.

4.8.3 Oblicz pole powierzchni:

a) piłki do koszykówki o średnicy równej $24\ cm$,

b) piłki nożnej o średnicy równej $21{,}8\ cm$.

4.8.4 Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o $20\ cm$, ich promienie są równe odpowiednio: $r_1 = 16\ cm$ i $r_2 = 12\ cm$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

4.8.5 Objętość półkuli jest równa $486\pi\ cm^3$. Oblicz odległość między dwoma najbardziej oddalonymi od siebie punktami tej półkuli.

4.8.6 Kopuła olsztyńskiego planetarium jest półkulą o promieniu $8\ m$. Ile [m^2] blachy należy zakupić, aby wymienić pokrycie tej kopuły, dodając 10 % materiału na zakłady i odpady? Wynik podaj w przybliżeniu do części setnych.

4.8.7 Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w czworościan foremny do objętości kuli opisanej na tym czworościanie.

4.8.8 Po zjedzeniu miąższu arbuza, pozostała skórka z niejadalną częścią o grubości 3 cm. Arbuz miał średnicę 30 cm. Jaką jego część stanowił miąższ?

4.8.9 Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $8\ dm$ od środka kuli. Otrzymany przekrój ma pole $36\ \pi\ dm^2$. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli.

4.8.10 W kulę wpisano walec w ten sposób, że objętość walca stanowi $\frac{9}{16}$ objętości kuli. Oblicz stosunek promienia kuli do wysokości walca.

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

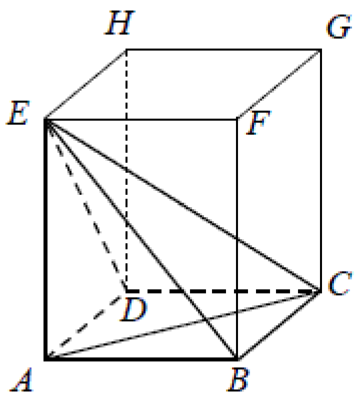
Zadania zamknięte

1.[50] Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa:

a) 6 b) 8 c) 24 d) 64

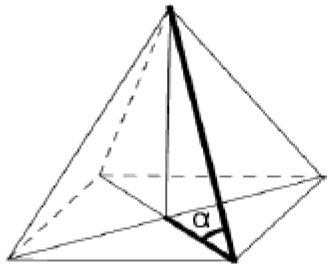
2. Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

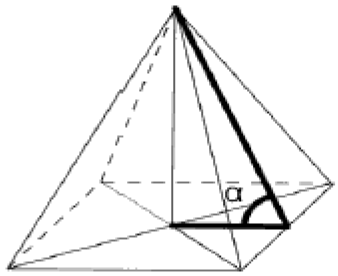
a) $2\sqrt{2}$ b) 16π c) $4\sqrt{2}$ d) 8π

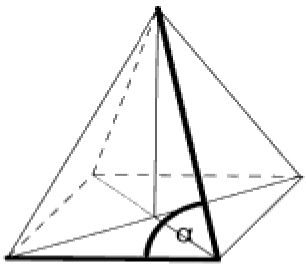


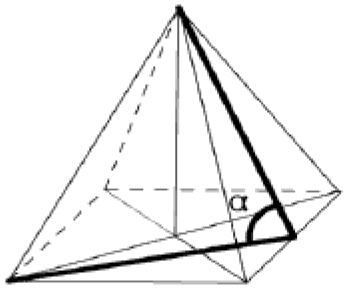
50 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 04.03.2013.

3.[51] Kąt α nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy zaznaczony jest na rysunku:

A. 

C. 

B. 

D. 

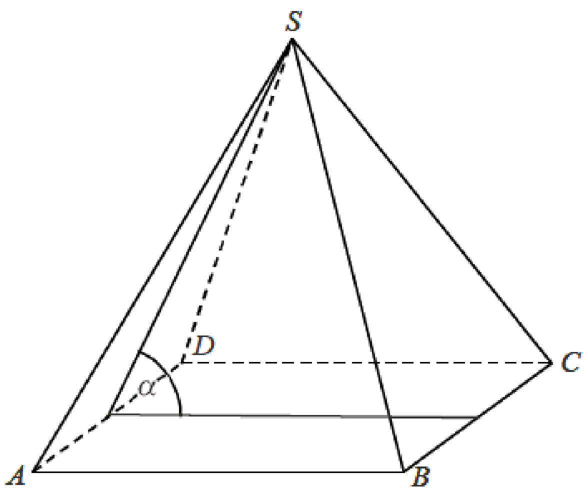
4.[52:] Objętość sześcianu, w którym przekątna ściany bocznej ma długość $\frac{\sqrt{2}}{4}$, jest równa

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 16 d) 64

5.[53] Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

a) 512 b) 384 c) 96 d) 16

6. **(4 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



51 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

52 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 04.03.2013.

53 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 04.03.2013.

7.[54] Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

a) 96π b) 48π c) 32π d) 8π

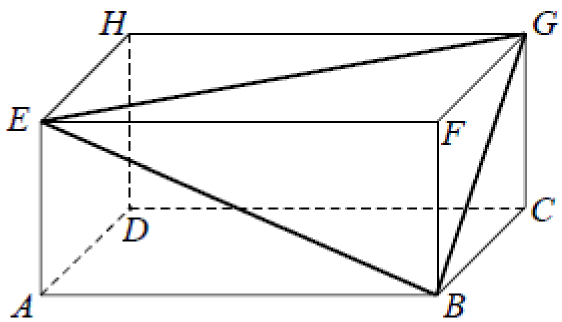
8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to:

a) $r+h=a$ b) $h-r=\frac{a}{2}$ c) $r-h=\frac{a}{2}$ d) $r^2+h^2=a^2$

9.[55] Objętość sześcianu jest równa 27. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$

10.[56] W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



a) AB b) BG c) GE d) EB

11. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) 9 d) $3\sqrt{3}$

12. Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa:

a) 124π b) 96π c) 64π d) 32π

13.[57] Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe:

a) 94 b) 60 c) 47 d) 20

54 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 04.03.2013.

55 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

56 Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf, 04.03.2013.

57 Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.

14. Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

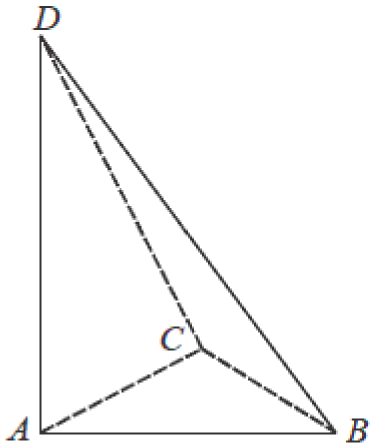
a) 11

b) 18

c) 27

d) 34

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $AD = 12$, $BC = 6$, $BD = CD = 13$.



15.[58] Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są równe 2. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

a) $\sqrt{3}+12$ b) $2\left(\sqrt{3}+6\right)$ c) $2\sqrt{3}+4$ d) $\sqrt{6}+12$

16. Przekątna prostopadłościanu o długości 6 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przekątna podstawy ma długość 3. Jaka jest miara kąta α?

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

17. Producent chce wyprodukować puszkę w kształcie walca o pojemności 3000 m^3 i wysokości 2 dm. Promień podstawy puszki w zaokrągleniu do części dziesiątych wynosi:

a) 6,8 cm b) 6,9 cm c) 7,0 cm d) 7,1 cm

18. Pewien ostrosłup ma 70 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 138 b) 140 c) 69 d) 70

19. Pole powierzchni kuli o objętości 288π wynosi:

a) 144π b) 36π c) 576π d) 452,16

20. Krople deszczu mają zwykle kształt kuli o średnicy 2 mm. Wskaz, ile kropel deszczu napełni szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 8 cm:

a) 108000 b) 432000 c) 54000 d) 162000

21. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest półkolem o promieniu $r = 10$ cm. Pole podstawy stożka wynosi:

a) 100π cm^2 b) 100 cm^2 c) 25π cm^2 d) 25 cm^2

58 Zadania 15-23: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.

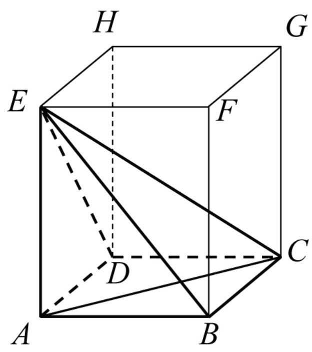
22. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 4 cm i 5 cm. Objętość walca jest równa:

a) $15\pi\ cm^3$ b) $20\pi\ cm^3$ c) $25\pi\ cm^3$ d) $30\pi\ cm^3$

23. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Objętość stożka jest równa 9π. Tworząca l stożka ma długość:

a) $l = 3\sqrt{2}$ b) $l = 6$ c) $l = 3\sqrt{3}$ d) $l = 7$

24.[59] **(4 pkt)** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



25.[60] **(5 pkt)** Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

26.[61] **(5 pkt)** Krawędź sześcianu jest o 4 krótsza od jego przekątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

27.[62] **(2 pkt)** Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

28. **(5 pkt)** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $tg\alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

29.[63] **(2 pkt)** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

30.[64] ***(4 pkt)*** Zbiornik ma kształt walca z obu stron zakończonego półkulami. Oblicz ile litrów płynu wypełni ten zbiornik, jeśli pole powierzchni całkowitej zbiornika jest równe $3\pi\ m^2$, a wysokość walca jest równa 2 metry.

---

59 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 09.03.2013.

60 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

61 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 09.03.2013.

62 Zadania 27, 28: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 09.03.2013.

63 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.

64 Zadania 30–33: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

31. **(5 pkt)** Pomarańcza ma 5 cm średnicy, a jej skórka ma 5 mm grubości. Wyciśnięty sok stanowi 75% objętości obranej pomarańczy. Ile pomarańczy należy wycisnąć, aby napełnić półlitrowe naczynie? W tym zadaniu przyjmij $\pi = 3$.

32. **(5 pkt)** Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 3 dm $\times$ 0,5 m i wysokości 40 cm, wypełnionego wodą o $^3/_4$ wysokości, wrzucono dwie sześcienne kostki o krawędzi 10 cm. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

33. **(2 pkt.)** Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 360 cm^2, a pole powierzchni bocznej wynosi 240 cm^2, wyznacz tangens kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy. Odpowiedź: $tg\alpha = \sqrt{3}$.

5 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

5.1 Średnia arytmetyczna, średnia ważona

Teraz nauczę się:

- Obliczać średnią arytmetyczną i ważoną zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Jeśli przeprowadzasz ankietę, zbierasz dane, dotyczące np. natężenia ruchu w naszym mieście, lub nauczyciele robią zestawienia z testów badających wiedzę swoich uczniów, to po zdobyciu tych informacji potrzebujesz wyciągnąć wnioski, na podstawie których można będzie odpowiedzieć sobie na pewne pytania.

Grupa badanych pewnej populacji nazywa się próbą statystyczną, którą bada się pod kątem pewnej cechy.

Statystyka opisowa – nauka zajmująca się gromadzeniem danych, porządkowaniem ich, analizą i wyciąganiem wniosków.

Dane statystyczne możemy mieć przedstawione w postaci tabel, diagramów, wykresów, ale wcześniej są przedstawiane w postaci skończonego zbioru liczb.

Ze średnią arytmetyczną najczęściej spotykamy się w szkole, kiedy liczymy sobie średnią ocen z danego przedmiotu czy średnią ocen na świadectwie.

Średnią arytmetyczną danego zbioru liczb liczymy dodając do siebie wszystkie liczby należące do zbioru, a następnie dzielimy otrzymaną sumę przez ilość liczb w zbiorze.

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Przykład 1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $1, 8, 12, 6, -4, 2, 5, 5, 11, 9$.

$$\bar{x} = \frac{1 + 8 + 12 + 6 - 4 + 2 + 5 + 5 + 11 + 9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna dla tego zestawu liczb wynosi $5{,}5$.

Przykład 2

Średnia arytmetyczna liczb: 4, 2, 2, 6, x, 8 jest równa 5. Oblicz x.

$$\bar{x} = \frac{4 + 2 + 2 + 6 + x + 8}{6} = 5$$

$$\frac{22 + x}{6} = 5$$

$$22 + x = 30 \ \Rightarrow x = 8$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 8.

Przykład 3[65]

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Jaka jest cena szóstej akcji?

Obliczamy najpierw łączny koszt wszystkich akcji:

$$6 \cdot 500 = 3000$$

Za 5 akcji zapłacono 2300 zł, więc jeśli od ceny wszystkich akcji odejmiemy cenę 5 akcji, to otrzymamy cenę szóstej akcji.

$$3000 - 2300 = 700\ zł$$

Odpowiedź: Cena szóstej akcji wynosi 700 zł.

Przykład 4

Tabelka przedstawia stan wypożyczania książek przez uczniów klasy I C z biblioteki szkolnej.

Liczba uczniów	10	8	5	4	3
Liczba przeczytanych książek	9	33	6	12	0

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 9 + 8 \cdot 33 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 0}{30} = \frac{90 + 264 + 30 + 48}{30} = \frac{432}{30} = 14{,}4$$

Odpowiedź: W klasie I C średnio na jednego ucznia przypada 14,4 książki.

65 Arkusz maturalny CKE, Matura z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, 26.03.2013.

Średnia ważona

Średnią ważoną stosujemy, gdy poszczególne wartości mają przyporządkowane wagi.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie), to liczba

Przykład 5

Oblicz średnią ważoną liczb $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, jeśli liczby parzyste mają wagę 4 a nieparzyste 6.

$$\overline{x_w} = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 6 + 6\cdot 4 + 7\cdot 6 + 8\cdot 4 + 9\cdot 6 + 10\cdot 4}{6+4+6+4+6+4+6+4+6+4}$$

$$\overline{x_w} = \frac{6+8+18+16+30+24+42+32+54+40}{50} = \frac{270}{50} = 5{,}4$$

Odpowiedź: Średnia ważona jest równa 5,4.

Przykład 6

Oceny uzyskane w semestrze przez pewnego ucznia z matematyki wraz z ich wagami zostały zestawione w tabeli.Obliczmy średnią tego ucznia.

Ocena	3	1	2	5	4	6	3	4	4
Waga	1	1	1	4	3	5	1	3	3

$$.\overline{x_w} = \frac{3\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+5\cdot4+4\cdot3+6\cdot5+3\cdot1+4\cdot3+4\cdot3}{1+1+1+4+3+5+1+3+3} = \frac{3+1+2+20+12+30+3+12+12}{22} = \frac{95}{22} = 4{,}31$$

Odpowiedź: Średnia ocen wynosi 3,41.

ZADANIA

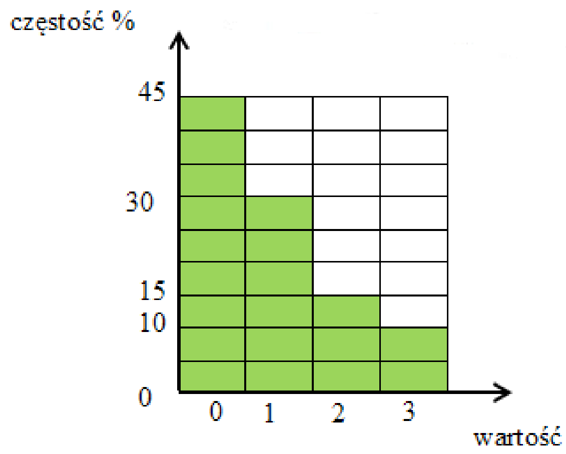
5.1.1 Oblicz średnią ważoną danych z tabeli:

Wartość	3	4	5	7
Waga	2	1	4	3

5.1.2 Dla jakiej wartości x średnia arytmetyczna dziesięciu liczb $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$ jest równa 3?

5.1.3 Średnia wzrostu 9 osób wynosi $170\ cm$. Jaka będzie średnia wzrostu tej grupy, jeśli dołączy do nich osoba o wzroście $190\ cm$?

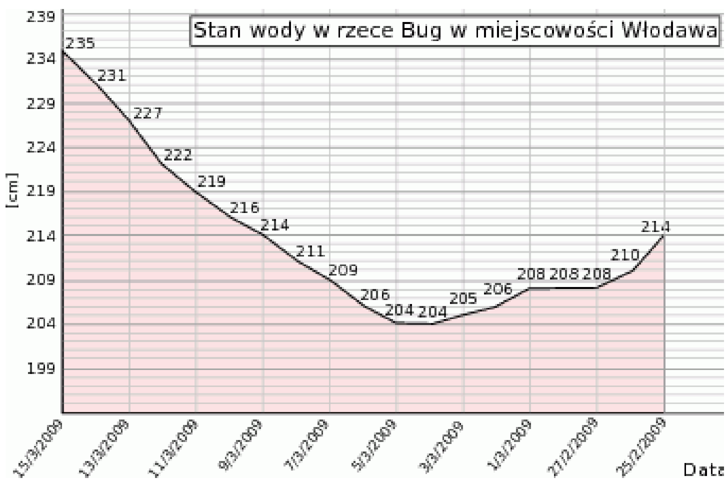
5.1.4 Oblicz średnią arytmetyczną danych przedstawionych na poniższym diagramie:



5.1.5 Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 $zł$. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie wynagrodzenie w firmie jest o 2% wyższe niż poprzednio?

5.1.6 Średnia arytmetyczna liczb $a, b, c, d, 22$ jest równa 14. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d?

5.1.7 Na podanym wykresie przedstawiono stan wody w rzece Bug od 25 lutego do 15 marca 2009 roku.



Rysunek 5-1. Stan wody w rzece Bug w miejscowości Włodawa

a) W których dniach stan wody w rzece nie przekraczał 207 cm?

b) Jaki był średni stan wody w rzece w dniach 1-10 marca 2009?

c) O ile procent podniósł się stan wody w rzece między 6 a 12 marca? Wynik podaj z dokładnością do jednego punktu procentowego.

5.1.8 Na koniec semestru otrzymasz piątkę, jeśli zdobędziesz średnio co najmniej 70 punktów z pięciu sprawdzianów. Ania otrzymała średnio 68 pkt. z czterech sprawdzianów. Jaką minimalną ilość punktów musi dostać z piątego sprawdzianu, aby na semestr otrzymać piątkę?

5.1.9 Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci wynosi 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek babci, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 31 lat. Ile lat ma babcia?

5.2 Mediana, dominanta

Teraz nauczę się:

- Obliczać medianę i dominantę zestawu danych.

Mediana zestawu liczb

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznacza uporządkowany rosnąco (lub malejąco) ciąg liczb.

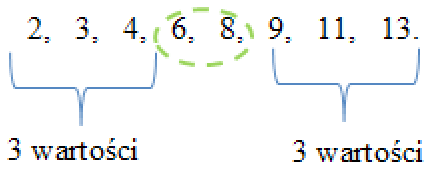
- Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.
- Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Mediana jest to wartość środkowa występująca w uporządkowanym zestawie danych.

Przykład 1

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13.

W tym przykładzie grupa danych jest liczbą parzystą, więc nie istnieje jedna wielkość środkowa. Mamy dwie takie wartości.



To, że mamy dwie wielkości środkowe, nie oznacza jednak, że mamy dwie mediany. W takim wypadku medianę otrzymujemy, obliczając średnią arytmetyczną dwóch wyznaczonych liczb.

$$M = \frac{6+8}{2} = 7$$

Odpowiedź: Mediana zestawu liczb wynosi 7.

Przykład 2

Oblicz medianę zestawu danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Mamy podany uszeregowany ciąg danych: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Składa się z 9 wartości. Dokładnie pośrodku znajduje się wartość piąta (ponieważ mamy cztery wartości na lewo od niej i cztery na prawo):

$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8}_{4\text{ wartości}},\ 10,\ \underbrace{12,\ 14,\ 16,\ 18}_{4\text{ wartości}}$$

Odpowiedź: Mediana wynosi 10.

Przykład 3

Poniżej przedstawiona jest liczba 100 ankietowanych dzieci.

Liczba osób	0	1	2	3	4	5
Liczba ankietowanych	15	34	27	15	7	2

Mamy do czynienia z parzystą liczbą wartości (100).

W szeregu 100 liczb liczbami środkowymi będą 50 i 51. Należy ustalić, jaką wartość mają te dwie liczby.

Z tabeli wynika:

- liczby od 1 do 15 mają wartość 0
- liczby od 16 do 49 $(15 + 34 = 49)$ mają wartość 1
- liczby od 50 do 76 $(49 + 27 = 76)$ mają wartość 2

Dalej nie musimy sprawdzać, bo ustaliliśmy wartość obu liczb:

- wartość liczby 50 wynosi 2
- wartość liczby 51 wynosi 2

Stąd mediana jest równa 2.

Dominanta

Dominanta (moda) jest to wartość, która w zebranych danych statystycznych pojawia się najczęściej. Oznaczamy ją symbolem D.

Gdy mamy kilka wielkości, które pojawiają się z tą samą największą liczbą razy, mamy do czynienia z kilkoma dominantami.

Przykład 4

Podaj dominantę z następujących liczb: $1, 3, 5, 0, 2, 5, 6, 1, 0, 4, 5, 4, 0, 0, 0, 7, 0$.

Liczba	0	1	2	3	4	5	6	7
Częstość	6	2	1	1	2	3	1	1

Najczęściej występuje liczba 0.

ZADANIA

5.2.1 Korzystając z danych: $3, 4, 1, 8, 15, 6, 4, 3, 12, 7, 22, 4, 1, 0, 6, 5, 9,$ określ medianę.

5.2.2 Podaj dominantę z następujących liczb:

a) $7, -2, 4, 7, 0, 7, 4,$

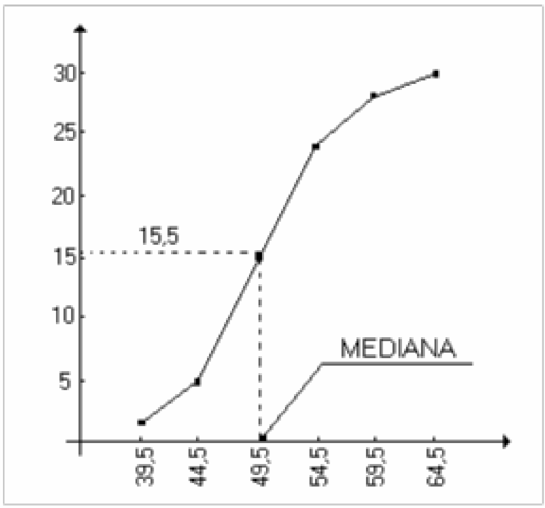
b) $1, 5, 6, 1, 6, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 5, 2, 2, 1.$

5.2.3 W tabeli przedstawiono wyniki egzaminu dla 100 studentów. Podaj dominantę.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Liczba studentów	22	25	12	25	10	6

5.2.4 Wyniki konkursu z matematyki podano w punktach: 94, 92, 90, 90, 86, 86, 86, 72. Oblicz medianę tego zestawu danych.

5.2.5 W tabeli przedstawiono wagi uczniów pewnej klasy. Podaj medianę dla tej klasy. Narysuj wykres ilustrujący dane zawarte w tabeli.



5.3 Wariancja, odchylenie standardowe

Teraz nauczę się:

- Obliczać wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadkach danych odpowiednio pogrupowanych);
- Interpretować te parametry dla danych empirycznych.

Odchylenie standardowe zestawu liczb σ (*sigma*)

Wartość odchylenia standardowego mówi nam, jak bardzo zróżnicowane są dane statystyczne. Im większa jest wartość odchylenie, tym dane są bardziej rozproszone wokół średniej.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ, którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Wariancja to kwadrat odchylenia standardowego.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Rozstęp (R) jest to różnica między największą a najmniejszą z liczb.

Przykład 1

Każdy z 6 zawodników podczas treningu oddał z pistoletu po 10 strzałów do tarczy. Po zsumowaniu punktów każdego zawodnika otrzymano następujące wyniki: 99, 96, 92, 98, 94, 97. Oblicz rozstęp wyników, średni wynik oraz odchylenie standardowe i wariancję.

Obliczmy najpierw rozstęp danych:

Wartość max – 99

Wartość min – 32

$R = 99 - 92 = 7$

Obliczmy teraz średnią wyników

$$\bar{x} = \frac{99 + 96 + 92 + 98 + 94 + 97}{6} = \frac{576}{6} = 96$$

Odchylenie standardowe liczymy, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(99 - 96)^2 + (96 - 96)^2 + (92 - 96)^2 + (98 - 96)^2 + (94 - 96)^2 + (97 - 96)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 16 + 4 + 4 + 1}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}38$$

Wariancja wynosi $\sigma^2 = 2{,}37^2 = 5{,}67$

ZADANIA

5.3.1 Oblicz wariancję danych ze zbioru $A = \{4, 5, 8, 9,\ 14\}$.

5.3.2 Średnia arytmetyczna trzech liczb a, b, c jest równa 2. Wariancja tych liczb wynosi 3. Oblicz sumę kwadratów liczb a, b i c.

5.3.3 Oblicz z dokładnością do 0,1 odchylenie standardowe następujących danych:

a) $-2;\ 0;\ 1;\ 4;\ 7;\ 14.$

b)

Wartość	-3	-1	0	4	6
Liczebność	10	6	4	2	4

5.3.4 Trzech sędziów oceniło zawodnika, przyznając punkty: 2, 3, 7. Ile wynosi odchylenie standardowe od średniej arytmetycznej zestawu tych punktów?

5.3.5 Troje przyjaciół ma wzrost równy odpowiednio 140 cm, 150 cm i 160 cm. Oblicz odchylenie standardowe od średniej wzrostu z dokładnością do części tysięcznych.

5.4 Zastosowanie statystyki w praktyce

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wiedzę z zakresu statystyki w sytuacjach praktycznych.

ZADANIA

5.4.1 Czterech pracowników brygady zarobiło w lutym po 1300 zł, a ich szef 2000 zł. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$ płac i odchylenie standardowe σ od niej. Wyniki zaokrąglij do 1 grosza.

5.4.2 Obliczymy odchylenie standardowe i wariancję dla zestawu danych: $1, 3, 5, 5, 11$.

5.4.3 Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba osób	11	14
Średnia ocen	4,0	3,8
Odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe dla całej klasy. Wyniki podaj z zaokrągleniem do jednego miejsca po przecinku.

5.4.4 Wagi ośmiu klaczy urodzonych w pewnym gospodarstwie wynoszą: 38 kg, 40 kg, 42 kg, 42 kg, 45 kg, 48 kg, 50 kg, 51 kg. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

5.4.5 Właściciel sklepu może zamówić puszki z ananasami u dwóch różnych dostawców A i B. Poniższe tabelki przedstawiają wyniki badania masy produktu bez zalewy w 10 losowo wybranych puszkach od obydwu dostawców:

	DOSTAWCA A				DOSTAWCA B			
Masa produktu bez zalewy (g)	120	130	135	140	125	135	140	145
Liczba puszek	1	4	2	3	3	2	4	1

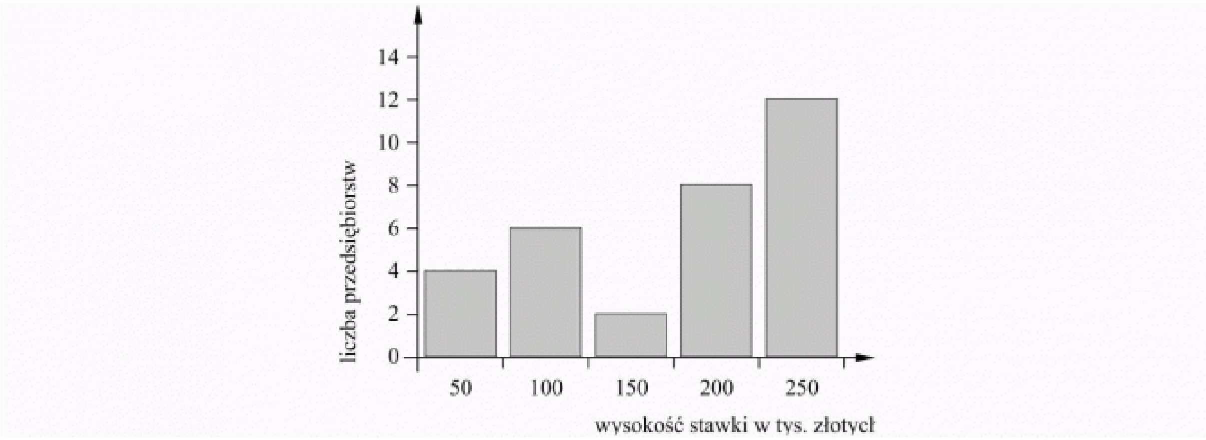
Oblicz rozstęp i wariancję mas produktu bez zalewy od dostawcy A i B. Oceń, u którego z dostawców powinien zamawiać towar właściciel sklepu.

5.4.6 Diagram przedstawia liczbę przedsiębiorstw w pewnej gminie, płacących podatek roczny w określonej wysokości. Oblicz:

a) średnią stawkę podatku rocznego przypadającego na przedsiębiorstwa z tego zestawienia,

b) podatek dominujący,

c) wysokość podatku, którego nie przekracza połowa przedsiębiorstw,



Rysunek 5-2. Liczba przedsiębiorstw w gminie płacących podatek roczny w określonej wysokości

5.4.7 W pewnej firmie średnia płaca pracowników produkujących wynosi 2819 zł, zaś średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 2483 zł. Średnia płaca wszystkich pracowników firmy jest równa 2723 zł. Oblicz, jaki procent pracowników produkcyjnych stanowią pozostali pracownicy tej firmy.

5.5 Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych.

Naukę elementów rachunku prawdopodobieństwa należy rozpocząć od wprowadzenia podstawowych pojęć.

Doświadczenie losowe – w praktyce każde doświadczenie, które może być wielokrotnie powtarzane i którego wyniku nie możemy przewidzieć (np. rzut monetą).

Zdarzenie elementarne – jest to każdy wynik doświadczenia losowego (np. przy rzucie symetryczną kostką do gry może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6).

Zbiór zdarzeń elementarnych – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia (np. przy jednokrotnym rzucie kostką do gry $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać literką Ω (czyt. *Omega*).

Zdarzenie losowe – dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek $\{2, 4, 6\}$).

Zdarzenie losowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \ldots$

Zdarzenia losowe dzielimy na:

- Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – zdarzenie elementarne, które spełnia warunki zdarzenia losowego (np. w rzucie kostką wyrzucono parzystą liczbę oczek).
- Zdarzenia pewne – zdarzenie elementarne, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór zdarzeń elementarnych (np. w rzucie kostką do gry wypadła liczba oczek większa od 0, ale mniejsza lub równa 6).
- Zdarzenia niemożliwe – zdarzenie elementarne, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne (np. w rzucie sześcienną kostka do gry wypadła siódemka).

Bardzo istotne jest, ile elementów zawiera zbiór. Wartość ta jest nazywana mocą zbioru.

Np. moc zbioru A – $\bar{\bar{A}}$

Przykład 1

Rzucamy trzy razy monetą.

a) Wypisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia losowego.

b) Wypisz zbiór sprzyjający zdarzeniu – wypadł co najwyżej jeden orzeł.

a)

R – wypadła reszka

O – wypadł orzeł

W tym doświadczeniu losowym można otrzymać następujące wyniki:

$A=\{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ (O,O,R)\ (O,R,O)\ (R,O,O)\ (O,O,O)\}$

Wszystkich możliwych wyników jest 8, więc $\overline{\overline{\Omega}} = 8$.

b)

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadł co najwyżej jeden orzeł.

$B = \{(R,R,R)\ (O,R,R)\ (R,O,R)\ (R,R,O)\ \}$

Wszystkich możliwych wyników jest 4, więc $\overline{\overline{B}} = 4$.

ZADANIA

5.5.1 Losujesz dwie niepowtarzające się cyfry ze zbioru $\{1,2,3,4\}$ i tworzysz z nich liczbę.

a) Napisz zbiór wszystkich wyników tego doświadczenia. Ile ich jest?

b) Wylosowałeś cyfry, które dały liczbę parzystą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają temu zdarzeniu losowemu. Ile ich jest?

5.5.2 Rzucamy monetą, a następnie sześcienną kostką do gry (o ściankach z numerami: 2, 4, 6, 8, 10, 12).

a) Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

b) Podaj przykład zdarzenia pewnego A i zdarzenia niemożliwego B.

5.5.3 Rzucono dwiema zwykłymi sześciennymi kostkami do gry. Zdarzenie A – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest mniejsza od 2, zdarzenie B – suma wyrzuconych oczek na obydwu kostkach jest większa lub równa 2. Jakimi zdarzeniami są zdarzenia A i B.

5.5.4 W urnie są trzy kule: biała, zielona i niebieska. Losujemu kolejno dwie kule bez zwracania. Wybisz zbiór zdarzeń elemnetarnych tego doświadczenia losowego.

5.6 Własności prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Korzystać z własności prawdopodobieństwa.

Zdarzenia losowe opisywaliśmy jako pewne podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Omówimy teraz niektóre pojęcia, które związane są z własnościami tych zbiorów.

Zdarzenia przeciwne

Zdarzenie przeciwne jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych przestrzeni, które nie sprzyjają danemu zdarzeniu. Zdarzenie przeciwne oznaczamy tą samą literą, co dane zdarzenie, ale ze znakiem prim.

$\boldsymbol{A}$ – dane zdarzenie

$\boldsymbol{A'}$ – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

Przykład 1

Rzucamy jeden raz kostką do gry. Doświadczenie A – polega na wyrzuceniu 1, 3 lub 4.

$A = \{1, 3, 4\}$

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A będzie zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu jednej z liczb: $2, 5, 6$.

$A' = \{2, 5, 6\}$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

Twierdzenie

Jeżeli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to zachodzą równości:

$\boldsymbol{A \cap A' = \emptyset}$

$\boldsymbol{A \cup A' = 1}$

$\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$

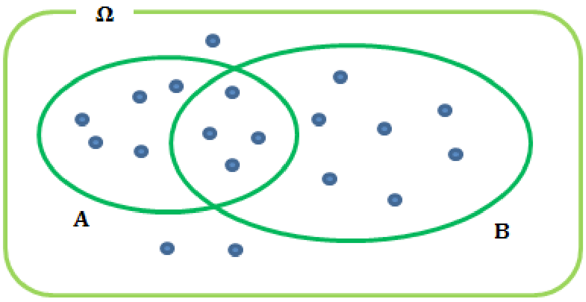
Przykład 2

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają te zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B. Aby obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$, należy ten zbiór wyznaczyć.



Rysunek 5-3. Prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń

$$P(A \cap B) = \frac{4}{19}$$

Przykład 3

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wypadły co najwyżej cztery oczka.

b) B – wypadła parzysta liczba oczek.

c) $P(A \cap B)$.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 6$

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{\overline{A}} = 4$

Zatem $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $B = \{2, 4, 6\}$

$\overline{\overline{B}} = 3$

Zatem $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

$\overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$$P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zdarzenia wykluczające się

Zdarzenia wykluczające się to zdarzenia, które nie mają części wspólnej.

Przykład 4

Wybieramy losowo literę alfabetu spośród liter: a, b, c, d, e, f, g, h. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu samogłoski, a zdarzenie losowe B na wylosowaniu litery g lub h.

$A = \{a, e\}$

$B = \{g, h\}$

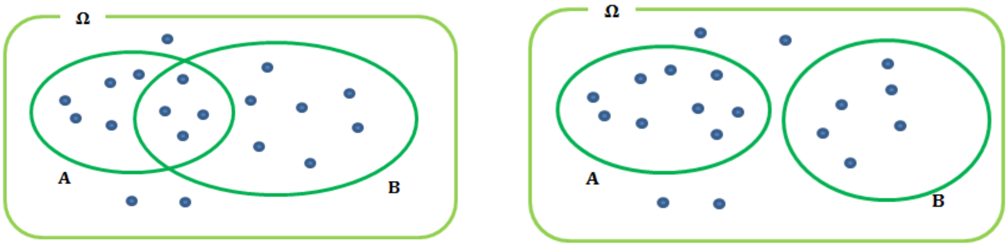
Zdarzenia nie mają żadnego wspólnego zdarzenia elementarnego, a więc wykluczają się. Prawdopodobieństwo części wspólnej dwóch wykluczających się zdarzeń wynosi 0.

$P(A \cap B) = 0$

Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Przykład 5

a) b)



Rysunek 5-4. Suma prawdopodobieństw zdarzeń

Na rysunkach powyżej przedstawiona została przestrzeń zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego.

Obliczymy teraz $P(A),\ P(B),\ P(A \cup B)$, a następnie sprawdzimy, czy $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

a) $P(A) = \dfrac{9}{19}$

$P(B) = \dfrac{11}{19}$

$P(A \cup B) = \dfrac{16}{19}$

$P(A) + P(B) = \dfrac{9}{19} + \dfrac{11}{19} = \dfrac{20}{19}$

Więc $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B) P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$

b) $P(A) = \dfrac{9}{19}$

$P(B) = \dfrac{6}{19}$

$P(A \cup B) = \dfrac{15}{19}$

$P(A) + P(B) = \dfrac{9}{19} + \dfrac{6}{19} = \dfrac{15}{19}$

Więc: $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

Łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Zależy to od tego, czy zdarzenia te się wykluczają, czy nie.

Twierdzenie

W doświadczeniu losowym dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

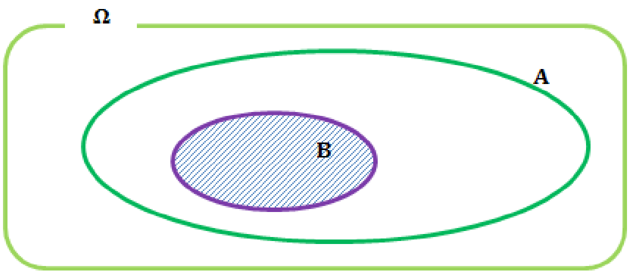
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Przykład 6

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $B \subset A$ oraz $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}3$. Oblicz $P(A \cup B)$.



Skoro $B \subset A$, to: $A \cup B = A$ i $A \cap B = B$

Z twierdzenia: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Skoro $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}3$ i $P(A \cap B) = 0{,}3$, to:

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(A \cup B) = 0{,}7$

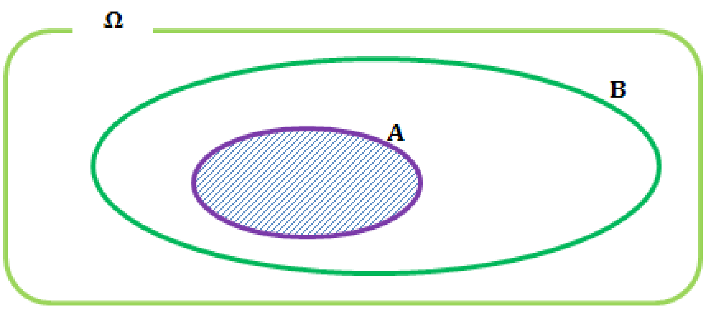
Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń

Prawdopodobieństwo różnicy dwóch zdarzeń obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Przykład 7

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy $B \setminus A$.



$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$

Korzystając z twierdzenia:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$

oraz $(B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset (B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$$P(B) = P(B \setminus A) \cup (B \cap A) = P(B \setminus A) + P(B \cap A) - P((B \setminus A) \cap (B \cap A))$$
$$= P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$

$0{,}7 = P(B \setminus A) + 0{,}3$

$P(B \setminus A) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$

Twierdzenie

Dla dowolnych zdarzeń $\boldsymbol{A}$ *i* $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{\Omega}$ zachodzą następujące własności:

$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbf{1}$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$**, gdy** $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{\Omega}$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

ZADANIA

5.6.1 Losujemy kulę ze zbioru 14 ponumerowanych kul. Zdarzenie losowe A polega na wylosowaniu kuli o numerze parzystym. Zdarzenie losowe B polega na wylosowaniu kuli o numerze większym lub równym 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego część wspólną zdarzeń A i B.

5.6.2 Oblicz prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych A i B oraz prawdopodobieństwo różnicy $B \setminus A$, jeżeli: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

5.6.3 Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B, wiedząc, że zdarzenia A i B się wykluczają oraz: $P(A) = \frac{1}{10}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

5.6.4 Jeżeli A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i $P(A) = 5 \cdot P(A')$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

5.6.5 A i B są takimi zdarzeniami losowanymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

5.6.6 O zdarzeniach losowych A i B wiemy, że: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \setminus B)$

5.7 Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia oznaczamy $P(A)$. W nawiasie zapisujemy symbol zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy iloraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A spełnia warunek: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego 0.

Przykład 1

Rzucamy dwoma identycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

Wyznaczmy najpierw zbiór Ω, czyli przestrzeń, która zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$

Wypiszmy teraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 10.

$A = \{(4,6)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$

$\bar{\bar{A}} = 6$

Więc prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi:

$$P(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ZADANIA

5.7.1 Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu w pierwszym i trzecim rzucie reszki.

5.7.2 W grze losowej losowane są kulki z trzech pojemników. W pierwszym znajdują się kulki ponumerowane od 1 do 7. W drugim znajdują się dwie kulki: biała i niebieska, a w ostatnim pojemniku znajduje się sześć kulek oznaczonych literami alfabetu: A, B, C, D, E, F. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania ciągu, w którym liczba jest parzysta, a litera alfabetu jest samogłoską.

5.7.3 Z tali 52 kart losujemy 3 karty. Ile możliwych ciągów kart możemy uzyskać? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy w tym samym rozdaniu jako pierwszą kartę damę pik, a jako drugą jakiegokolwiek króla?

5.7.4 Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 8 \leq 0$:

a) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma wynosi 8,

b) obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb pierwszych.

5.8 Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą drzewa

Teraz nauczę się:

- Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń za pomocą drzewek

Jeżeli doświadczenie losowe składa się z więcej niż jednego etapu, takich jak serie rzutów kostką lub monetą, zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa bywa skomplikowane. Przydatną wówczas jest tak zwana metoda drzew.

Drzewem nazywamy graf ilustrujący przebieg doświadczenia losowego, na którym każdej krawędzi przyporządkowuje się prawdopodobieństwo.

Przykład 1

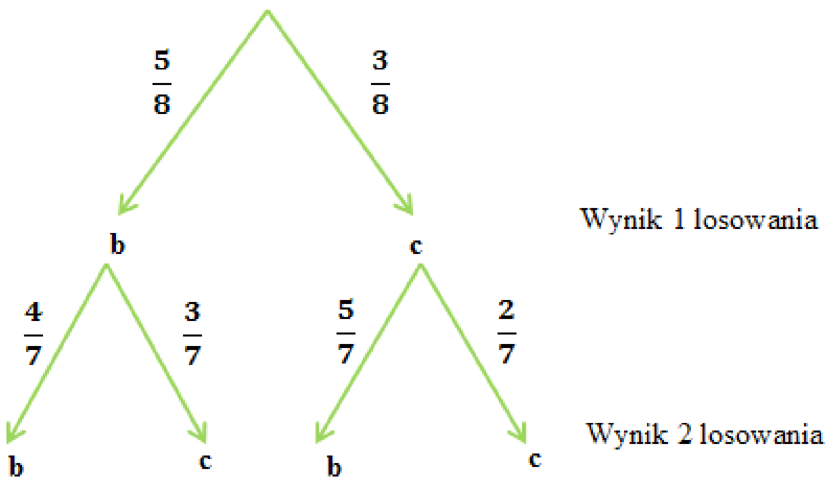
W urnie jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jedną kulę i, bez zwracania, losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A – wylosowano dwie kule białe.

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów.

Niech b – oznacza kulę białą, a c – kulę czarną.

Budujemy drzewo dla naszego doświadczenia losowego.



Pierwsze losowanie daje nam dwie możliwości, wypadnie kula biała lub kula czarna.

W drugim losowaniu mamy te same możliwości. Osobno rysujemy je dla obu wyników, wynikających z losowania pierwszego.

Reguła iloczynów

Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź.

Reguła sum

Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych według reguły iloczynów dla tych gałęzi.

Więc:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych wynosi:
$P(\{(b,b)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej i czarnej wynosi:
$P(\{(b,c)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej i białej wynosi:

$$P(\{(c,b)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosi:

$$P(\{(c,c)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

a) A – wylosowano dwie kule białe

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

b) B – wylosowano dwie kule różnych kolorów

$$B = \{(b,c),(c,b\}$$

Obliczając prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystamy z reguły dodawania. Jeżeli zdarzeniu sprzyjają co najmniej dwa wyniki na drzewie, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest sumą prawdopodobieństw tych wyników.

$$P(B) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

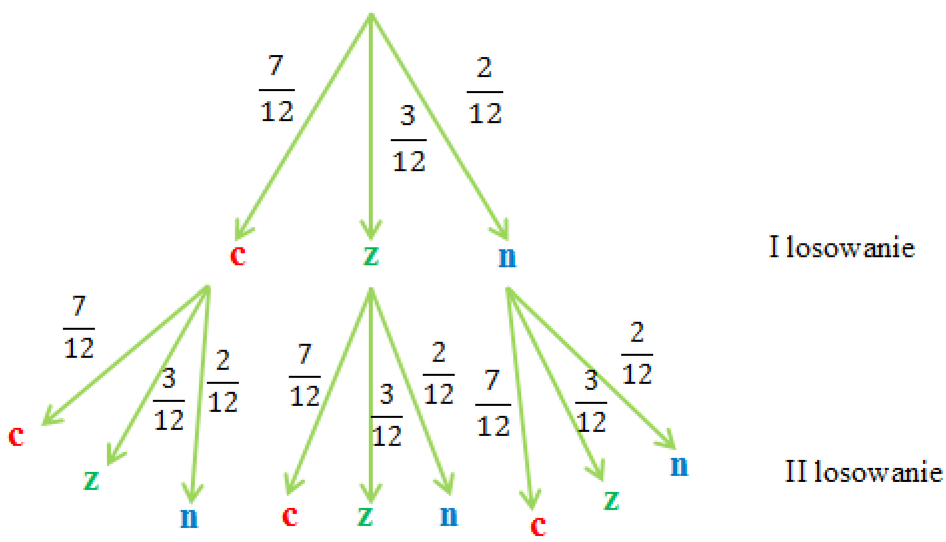
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $P(A) = \frac{5}{14}$, a prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w różnych kolorach wynosi $P(B) = \frac{15}{28}$.

Przykład 2

Mamy 12 kul: 2 niebieskie, 3 zielone, 7 czerwonych. Losujemy kolejno trzy kule (ze zwracaniem). Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

A – wylosowanie za drugim razem kuli koloru niebieskiego.

Budujemy drzewo naszego doświadczenia:



$$P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} = \frac{14}{144} + \frac{6}{144} + \frac{4}{144} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

5.8.1 W urnie są 3 kule zielone i 1 czerwona. Losujemy kolejno trzy kule (bez zwracania). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowania wszystkich kul zielonych.

b) wylosowania za trzecim razem kuli zielonej.

5.8.2 Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie dwóch czwórek.

5.8.3 Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na:

Zdarzenie A – polegające na tym, że co najmniej raz wypadł orzeł.

Zdarzenie B – polegające na tym, że tylko raz wypadł orzeł.

5.8.4 Gra polega na rzucaniu sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 oczek, to wygrywamy 10 złotych i możemy grać dalej, a jeśli wypadnie inna liczba oczek niż 6, to odpadamy z gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że jeżeli zagramy, wygramy 30 złotych.

5.8.5 Z zestawu tematów egzaminacyjnych, składającego się z 25 pytań z matematyki (10 dotyczy działań na liczbach, 9 geometrii, 6 rachunku prawdopodobieństwa), wyjęto losowo 1 zagadnienie i, nie oglądając go, odłożono na bok. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano temat z działań na liczbach.

5.8.6 W konkursie omnibus ustalono następujące reguły: dla 1. tury rozgrywek uczestnik losuje jedną z liter wyrazu omnibus i jeśli jest to spółgłoska, to losuje pytanie z urny, w której są 3 pytania z matematyki, 2 z literatury i 3 z muzyki. W przypadku wylosowania samogłoski, uczestnik losuje pytanie z urny, w której są 2 pytania z matematyki, 3 z historii i 3 z geografii. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane pytanie dotyczy matematyki.

5.9 Reguła mnożenia i dodawania

Teraz nauczę się:

- Stosować regułę mnożenia i dodawania.

Często mamy do czynienia ze zbiorami, dla których chcielibyśmy znać liczbę elementów. Wygodnie jest, gdy wszystkie elementy są wypisane i można je policzyć. Niekiedy jednak, mając pewien zbiór, budujemy z jego elementów nowe zbiory i chcemy poznać liczbę elementów w tych nowych zbiorach.

Zasada mnożenia

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ sposobów.

Zasada dodawania

Jeżeli wybór polega na jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_2 sposobów, …., n-tą na n_k sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ sposobów.

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób?

Jest 5 osób i pięć miejsc w kolejce. Pierwszą osobę można ustawić na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3 sposoby, czwartą na 2 sposoby, a piątą tylko na 1 sposób.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Odpowiedź: Pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

Przykład 2

Podczas egzaminu student wybiera 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?

Student pierwsze pytanie losuje spośród 6, drugie spośród 5, trzecie spośród 4 i czwarte pytanie spośród 3.

Zatem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Kolejność losowania poszczególnych pytań nie jest istotna, dlatego otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień czterech pytań: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360}{24} = 15$$

Odpowiedź: Student może wybrać pytania na 15 sposobów.

Przykład 3

Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ tak, aby cyfry w nich się nie powtarzały?

W tym przypadku nie wykorzystujemy wszystkich cyfr jednocześnie. Tworzymy liczby trzycyfrowe, mając do dyspozycji pięć cyfr. Kolejność wybieranych cyfr jest ważna.

Wśród tych cyfr nie ma zera, zatem każda z nich może być pierwszą cyfrą tworzonej liczby. Mamy 5 możliwych cyfr na pierwsze miejsce, 4 możliwe cyfry na drugim miejscu i 3 na trzecim miejscu.

Zatem liczba wszystkich możliwych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z podanych cyfr jest równa:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Odpowiedź: Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych.

ZADANIA

5.9.1 Pewna pani dekoruje stół na przyjęcie gości. Ma do wyboru 6 obrusów, 3 wazony i 2 świeczniki. Ile różnych dekoracji może uzyskać?

5.9.2 Ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych?

5.9.3 Z urny zwierającej 4 kule (biała, czarna, niebieska, zielona) losujemy trzy kule. Ile jest możliwych losowań, w których cyfry się nie powtarzają.

5.9.4 Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 4000 utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4.

5.9.5 Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy trzy cyfry. Ile liczb trzycyfrowych można w ten sposób utworzyć, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać,

b) cyfry nie mogą się powtarzać?

5.9.6 Na ile sposobów można ustawić w szeregu 3 chłopców i 2 dziewczynki, tak aby:

a) najpierw stały dziewczyny, a następnie chłopcy,

b) pierwsza stała dziewczyna,

c) pierwszy i drugi stał chłopiec,

d) żaden z dwóch chłopców nie stał obok siebie.

5.10 *Pojęcie silni

Teraz nauczę się:

- Stosować pojęcie silni do rozwiązywania problemów.

Definicja

Silnią liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$ nazywamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż $\boldsymbol{n}$. W notacji matematycznej $\boldsymbol{n}!$ czytamy, jako *„n silnia„*.

Oznaczenie symboliczne $n!$ wprowadził w 1808 roku francuski matematyk Christian Kramp.

Symbolicznie można zapisać:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Definicja

$$\boldsymbol{n}! = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{dla\ n = 0} \\ \boldsymbol{n(n-1)!} & \boldsymbol{dla\ n \geq 1} \end{cases}$$

Przykład 1

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Przykład 2

Oblicz $5! - 2! \cdot 3!$

$5! - 2! \cdot 3! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 120 - 12 = 108$

Przykład 3

Oblicz $\frac{12!}{10! \cdot 5!}$

$12!$ możemy zapisać jako $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 10! \cdot 11 \cdot 12$

Przykład 4

Doprowadź wyrażenie $\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!}$ do najprostszej postaci.

Rozpiszmy najpierw $(2n+2)!$

$(2n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$

oraz $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

Wracamy do przykładu, i otrzymujemy:

$$\frac{n! \cdot (2n+2)!}{(2n)! \cdot (n+2)!} = \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$$
$$= \frac{(2n+1) \cdot 2(n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)}$$

ZADANIA

5.10.1 Oblicz:

a) $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ b) $\frac{12!}{11!\cdot 4!}$ c) $\frac{9!\cdot 7!}{(6!)^3}$

5.10.2 Uprość:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} =$ b) $\frac{(n+2)!}{n!} =$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} =$

d) $\frac{n!}{(n-3)!} =$ e) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!} =$ f) $\frac{(3n-2)!}{(3n)!} =$

5.11 *Kombinatoryka

Teraz nauczę się:

- Wykorzystywać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: „ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?",„Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 24 osobowej?" itp.

Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami.

Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \le n)$ nazywamy każdy $k-$ elementowy podzbiór tego zbioru.

Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Przykład 1

Oblicz:

a) $C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$

b) $C_7^3 \cdot C_4^2 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2} 35\cdot 6 = 210$

Przykład 2

Na ile sposobów z grupy 12 osób można wybrać trzech przedstawicieli?

Wybierając przedstawicieli tej grupy tworzymy 3-osobowy podzbiór.

Jest to 3-elementowa kombinacja ze zbioru 12-elementowego.

Więc:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{9!\cdot 2\cdot 3\cdot} = 220$$

Odpowiedź: z grupy 12 osób, trzech przedstawicieli można wybrać na 220 sposobów.

Przykład 3

Obliczmy teraz trzy przykłady:

a) C_n^0

b) C_n^n

c) C_n^1

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!} = n$$

Wniosek

Jeżeli $n \in N$, to:

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1, \qquad C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = n}$$

ZADANIA

5.11.1 Oblicz:

a) C_8^2 b) $C_{10}^3 \cdot C_6^1$ c) $\frac{C_{12}^3}{C_{14}^5}$ d) $C_{25}^{23} + C_{25}^{24}$

5.11.2 W klasie jest 10 dziewcząt i 14 capisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i trzy trójki.

Wariacje

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Przykład 4

W finale konkursu matematycznego bierze udział 10 uczestników. Ile jest możliwości zajęcia przez nich trzech pierwszych miejsc, jeżeli uwzględniamy kolejność (I, II i III miejsce)?

$$V_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=8\cdot 9\cdot 10=720$$

Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 720.

Przykład 5

Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:

$$V_{10}^{4}=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=5040$$

Odpowiedź: Istnieje 5040 czterocyfrowych kodów o różnych cyfrach.

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k –wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Liczba k –wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{V_n^k=n^k}$$

Przykład 6

Ile słów sześcioliterowych (z sensem lub bez) można utworzyć z liter $\{A,\ B,\ C\}$? Na każde z 6 miejsc możemy wybrać jedną z 3 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$V_3^6=3^6=729$$

Odpowiedź: Można utworzyć 729 wyrazów.

Przykład 7

Wypełniając test składający się z 10 pytań, można zakreślić tylko jedną z trzech odpowiedzi. Na ile sposobów można rozwiązać ten test?

Przyjmijmy, że pierwsza odpowiedź to „A”, druga „B”, a trzecia „C”.

Będą to 10-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru 3-elementowego $\{A,B,C\}$.

$$V_3^{10}=3^{10}=59049$$

Odpowiedź: Test można rozwiązać na 59049 sposoby.

ZADANIA

5.11.5 Na ile sposobów można ustawić pięcioosobową kolejkę, wybierając ludzi spośród 10 osób?

5.11.6 Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5?

5.11.7 Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $\{A, B, C, D\}$?

5.11.8 Budynek składa się z 4 pięter. Do windy wchodzi na parterze 6 osób. Na ile sposobów mogą oni opuścić windę na kolejnych piętrach?

CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

Zadania zamknięte

1.[66] Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa:

a) 100

b) 99

c) 90

d) 19

2. Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa:

a) 400 zł b) 500 zł c) 600 zł d) 700 zł

3.[67] W loterii liczbowej wylosowano dziesięć liczb: 4, 3, 3, 3, 4, 6, 1, 5, 1, 6. Mediana tych danych jest równa

a) 5 b) 3,6 c) 3,5 d) 3

4. **(1 pkt)** Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfra jedności należy do zbioru A {2, 4, 5, 7}, cyfra dziesiątek do zbioru $B = \{6, 7, 8\}$, a cyfra setek do zbioru $C = \{2, 4, 5, 6\}$, jest:

a) 48 b) 36 c) 24 d) 12

66 Zadania 1, 2: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.

67 Zadania 3, 4: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.

5.[68] Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawione są w tabeli:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	7	6	4	2

Mediana ocen ze sprawdzianu jest równa:

a) 3,5 b) 3, c) 4 d) 4,5

6. W pudełku są 4 kule białe i x kul czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{5}$, gdy:

a) $x = 6$ b) $x = 8$ c) $x = 10$ d) $x = 12$

7.[69] Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

a) $\frac{4}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{2}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

8. W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

a) 1 b) 14 c) 7 d) 8

9.[70] Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Mediana zarobków tych 6 osób jest równa:

a) 3400 zł b) 3500 zł c) 6000 zł d) 7000 zł

10. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4. Wówczas:

a) $p < \frac{1}{5}$ b) $p = \frac{1}{5}$ c) $p = \frac{1}{4}$ d) $p > \frac{1}{4}$

11.[71] W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa:

a) 3 b) 3,5 c) 4 d) 5

12. Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi, B' jest zdarzeniem przeciwnym do B, $P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,12 b) 0,18 c) 0,6 d) 0,9

68 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 08.03.2013.
69 Zadania 7, 8: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.
70 Zadania 9, 10: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 08.03.2013.
71 Zadania 11, 12: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.

13.[72] Tabela przedstawia zestawienie liczby błędów popełnionych przez zdających część teoretyczną egzaminu na prawo jazdy.

Liczba błędów	0	1	2	x
Liczba zdających	8	4	10	8

Średnia arytmetyczna liczby tych błędów popełnionych przez jednego zdającego jest równa 1,6. Wynika stąd, że:

a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ d) $x = 6$

14. O zdarzeniach A oraz B zawartych w Ω wiadomo, że $P(A) = \frac{5}{6}, P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Wtedy:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ b) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ c) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ d) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

15.[73] Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{18}$

16. Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?". Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

17.[74] Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy:

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

18.[75] Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy?

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

72 Zadania 13, 14: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
73 Zadania 15, 16: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.
74 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 09.03.2013.
75 Zadanie 18: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

19.

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	15	17	19	15	19	15

Podaj medianę i dominantę rzutu kostką.

ZADANIA OTWARTE

1.[76] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

2.[77] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5} losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania, tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba jest mniejsza od 432.

3.[78] **(4 pkt)** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednej reszki czy wyrzucenie orła w co drugim rzucie?

4.[79] **(2 pkt)** Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości, średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

5.[80] **(2 pkt)** Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

6.[81] **(4pkt)** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki: (1) liczba jest podzielna przez 25, (2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste, (3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

7.[82] **(2 pkt)** Ze zbioru liczb {1 ,2, 3,..., 7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

---

76 www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 10.03.2013.

77 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

78 www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze, 10.03.2013.

79 www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 10.03.2013.

80 Zadania 5, 6: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 10.03.2013

81 www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 10.03.2013.

82 www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 10.03.2013.

8.[83] **(4 pkt)** Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

9.[84] **(4 pkt)** W grupie 200 osób 65% uczy się języka angielskiego, 47% uczy się języka rosyjskiego, a 30% uczy się obu tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z tej grupy osoba nie uczy się żadnego z wymienionych języków.

10. **(2 pkt)** Doświadczenie polega na rzucie dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek będzie większa od 7, ale nie przekroczy 11.

11. **(2 pkt)** Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 6.

12. **(2 pkt)** Z liczb dwucyfrowych wybrano jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 5?

13. **(4 pkt)** W urnie A jest 5 kul białych i 3 czarne, w urnie B są 4 kule białe i 6 czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej z urn. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyjmiemy kule w jednym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

14. **(4 pkt)** W urnie jest 7 kul białych i 3 czarne. Losujemy z tej urny jedną kulę, a następnie z pozostałych znowu jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ten sposób wyjmiemy kule w różnych kolorach. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

15. **(5 pkt)** W urnie jest 5 kul białych, 8 zielonych i n niebieskich. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej lub niebieskiej jest równe $\frac{3}{4}$. Wyznacz liczbę n. Odpowiedź: $n = 7$.

16. **(2 pkt)** W urnie jest 16 kul białych, 14 kul zielonych, 6 niebieskich i 4 żółte. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, ęe będzie to kula zielona lub żółta.

17. **(6 pkt)** W urnie znajdują się kule białe, czerwone i zielone. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej jest trzykrotnie większe od prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej lub zielonej. Wiedząc, że co czwarta kula jest biała, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej.

83 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 10.03.2013.
84 Zadania 9–17: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*.
2. Testy maturalne. *Matematyka 2010*, Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań*.
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*. Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*. Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe

1. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29
2. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o
3. www.math.edu.pl/symetria
4. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram
5. www.violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd
6. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom
7. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski
8. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
9. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
10. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
11. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
12. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
13. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
14. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
15. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
16. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
20. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
21. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
22. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
23. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian
24. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu
25. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia
26. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
27. www.zadania.info
28. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf
29. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
30. www.matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum/funkcja_wymierna/39funkcja_fxa_x_homograficzna
31. www.megamatma.pl/uczniowie/gimnazjum/rownania/wielkosci-odwrotnie-proporcjonalne
32. www.matematykam.pl/funkcja_wykladnicza_-_wykres.html
33. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
34. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf

35. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
36. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
37. www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf
38. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
39. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
40. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php arkusze
41. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
42. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf

Stowarzyszenie POSTIS
20-091 Lublin, ul. Fieldorfa 7/4
tel. +48 81 524 39 66; fax +48 81 524 39 66
www.postis.pl; e-mail: biuro@postis.pl

Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o. o.
20-086 Lublin, ul. Szewska 4 lok. 7
tel. +48 81 532 84 14; tel./fax +48 81 534 35 50; mobile +48 668 445 503
www.pte.lublin.pl; e-mail: biuro@pte.lublin.pl

Autorzy
Kinga Sarad-Deć, pedagog
Joanna Rusinkiewicz, pedagog
Milena Potręć, nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna, nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak, specjalista ds. Mediów
Grzegorz Kozak, specjalista ds. Mediów
Agnieszka Wróblewska, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Zbigniew Biały, specjalista ds. Ekonomii
Ewa Oleksiejczuk, specjalista ds. Ekonomii
Agata Linkiewicz, specjalista ds. Matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch, specjalista ds. Matematyki
Katarzyna Korona, doradca metodyczny
Dorota Ulikowska, doradca metodyczny
Agnieszka Lewicka-Zelent, koordynator merytoryczny

Skład i opracowanie typograficzne
Ewa Kutkowska
Andrzej Sokulski

Przygotowanie publikacji w wersji elektronicznej
Agencja ORPHA
www.orpha.pl
Systemy Wspomagania Nauczania Sp. z o. o.
www.swn.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Postis
www.postis.pl

ace

PTE
Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY