

E – book dla ucznia

**Część 2.**

# LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE



# Spis treści

## Uwaga:

Treści rozszerzone zostały oznaczone przez: \*

## Ekonomia w praktyce

### Wstęp

#### 1. Masz pomysł – masz działalność

- 1.1. Pomysł na działalność
- 1.2. Osoba przedsiębiorcza, czyli moje miejsce w biznesie
- 1.3. Od koncepcji do działania – planowanie biznesu
- 1.4. Wybór formy działalności
- 1.5. Źródła finansowania

#### 2. Analiza rynku

- 2.1. Lokalizacja i obszar działania
- 2.2. Analiza otoczenia przedsiębiorstwa
- 2.3. Możliwości i zagrożenia

#### 3. Planowanie działalności

- 3.1. Istota planowania
- 3.2. Biznesplan
- 3.3. Analiza finansowa
- 3.4. Marketing

#### 4. Mój biznes

- 4.1. Podstawowe pojęcia
- 4.2. Procedura zakładania działalności

#### 5. Zarządzanie zespołem

- 5.1. Zasady organizacji pracy
- 5.2. Lider – szef, czy kolega
- 5.3. Współczesny menadżer
- 5.4. Praca w zespole
- 5.5. Etyka biznesu

#### 6. Realizowanie i kontrola działalności

- 6.1. Efektywność przedsięwzięcia

# Matematyka

## Wstęp

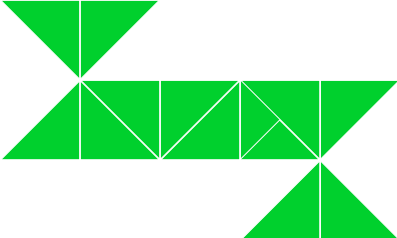
- 1 Układy równań pierwszego stopnia
  - 1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi
  - 1.2 Graficzna interpretacja układów równań
  - 1.3 Układy równań w kontekście praktycznym
- 2 Równania i nierówności kwadratowe
  - 2.1 Równania kwadratowe niezupełne
  - 2.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki
  - 2.3 \*Równania kwadratowe z parametrem
  - 2.4 Nierówności kwadratowe
  - 2.5 \*Układy równań, z których jedno jest stopnia drugiego
- 3 Funkcja kwadratowa
  - 3.1 Jednomian kwadratowy
  - 3.2 Parabola w układzie współrzędnych
  - 3.3 Postacie trójmianu kwadratowego
  - 3.4 Rysowanie wykresów funkcji
  - 3.5 Własności funkcji kwadratowej
  - 3.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej
  - 3.7 Zadania praktyczne
- 4 Planimetria
  - 4.1 Kąt środkowy i wpisany
  - 4.2 Wzajemne położenie prostej i okręgu
  - 4.3 Wzajemne położenie dwóch okręgów
  - 4.4 Twierdzenie Talesa
  - 4.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne
  - 4.6 Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu\*
  - 4.7 Przystawanie i podobieństwo trójkątów
  - 4.8 Wielokąty
  - 4.9 Wielokąty foremne
  - 4.10 Pole koła i długość okręgu
- 5 Ciągi
  - 5.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów
  - 5.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności
  - 5.3 Ciąg geometryczny i jego własności
  - 5.4 Praktyczne zastosowanie ciągów ( procent prosty, składany)

## Bibliografia

Źródła internetowe:



# Ekonomia w praktyce



# Wstęp

## Drodzy Uczniowie,

Oddajemy w Państwa ręce podręcznik do Ekonomii w praktyce, będący wynikiem intensywnej pracy interdyscyplinarnego zespołu ekspertów. Proponowane opracowanie adresowane jest dla nauczycieli liceów ogólnokształcących i techników.

Niniejszy podręcznik napisany został w oparciu o nową podstawę programową kształcenia ogólnego, a także treści wykraczające poza nią. Założeniem autorów było stworzyć podręcznik, który w jak największym stopniu będzie w stanie zaspokoić potrzeby uczniów, umożliwiając im wszechstronny rozwój oraz indywidualizację kształcenia, a także przygotować do kolejnego etapu kształcenia. Dodatkowym elementem składającym się na innowacyjność prezentowanego opracowania jest opatrzenie każdego z rozdziałów przypisami, osławającymi uczniów z konstrukcją podręczników akademickich, a także pozwalającymi na samodzielne dotarcie do prezentowanych treści w materiałach źródłowych i poszerzenie własnej wiedzy stosownie do indywidualnych potrzeb i zainteresowań. Każdy rozdział zakończony jest przykładowymi tematami do dyskusji, które są nie tylko konkretnym pomysłem ułatwiającym przygotowanie i realizację lekcji, ale również sprawdzonym sposobem na wyróżnienie i utrwalenie nowo poznanego materiału. Podręcznik stanowi jeden z elementów interdyscyplinarnego programu nauczania, przygotowanego w ramach projektu „ACE – aktywna, kreatywna i przedsiębiorcza młodzież – Innowacyjne programy kształcenia w obrębie ekonomii i przedsiębiorczości”, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Zalecane jest równoległe realizowanie treści z matematyki i informatyki, które niejednokrotnie korespondować będą z aktualnie realizowanym materiałem.

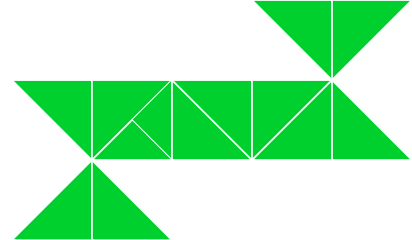
W sytuacji, gdy młodzi ludzie w każdej minucie poddawani są działaniom różnorodnych bodźców, a współczesny świat niesie ze sobą tyle ciekawych propozycji, jako nauczyciele nie możemy ignorować tych aspektów. Chcąc umożliwić uczniom, jak najpełniejszy rozwój na miarę ich możliwości i umiejętności, zgodny z ich uzdolnieniami i zainteresowaniami, jesteśmy zobligowani do stworzenia im możliwości do wszechstronnej, wieloaspektowej i krytycznej analizy prezentowanego materiału, aby umożliwić im stanie się w przyszłości jednostkami silnymi, samodzielnymi, samorealizującymi się i skłonny do samoaktualizacji.

Istotnym elementem prowadzenia zajęć z wykorzystaniem podręcznika będzie zachęcanie uczniów do rozwijania kreatywności i przedsiębiorczości, do podejmowania różnych inicjatyw, bowiem:

- ▶ **Ekonomia to nauka, która omawia rzeczy doskonale nam znane językiem, którego nie jesteśmy w stanie zrozumieć.**

Dick Armeý

Autorzy mają nadzieję, że oddane Państwu opracowanie spełni swoją rolę i będzie jednym z wielu elementów przybliżających i wspierających kształtowanie postawy przedsiębiorczej uczniów.



# 1. Masz pomysł – masz działalność

## 1.1. Pomysł na działalność

- **Wygrywa ten, kto ma jasno określony cel i nieodparte pragnienie, aby go osiągnąć.**

*Napoleon Hill*

Przyjemnie byłoby pracować „u siebie” dodatkowo na własny rachunek. Wiele osób myśli o założeniu własnej działalności.

**Do głównych powodów założenia i prowadzenie własnej działalności gospodarczej należy zaliczyć:**

1. brak pracy,
2. brak satysfakcji z pracy (wyzysk, zła atmosfera, nieznośny szef),
3. niskie wynagrodzenie,
4. dążenie do niezależności finansowej,
5. chęć sprawdzenia się,
6. fantastyczny pomysł na biznes.

**Gdzie można znaleźć pomysł na biznes** – odpowiedź brzmi WSZĘDZIE. Przede wszystkim:

1. W codziennych czynnościach, zainteresowaniach, pasjach, w posiadanych umiejętnościach.
2. Rozejrzyj się wokoło, w najbliższym otoczeniu, czy nie brakuje jakiegoś sklepu, punktu usługowego.
3. Ile i jakie firmy znajdują się w okolicy.
4. Wykorzystaj słabość konkurencji. Czerp korzyści z błędów innych przedsiębiorców.
5. Jakie znasz dobrze prosperujące działalności.
6. Korzystaj z Internetu, serwisów z ogłoszeniami, np. mam biznes, pomysł na biznes, szukam inwestora, sprzedam biznes.
7. Zainteresuj się e-biznesem.
8. Zainteresuj się franchisingiem. Franchising podaje gotowy i wypraktykowany sposób na biznes.
9. Ucz się na błędach innych (konkurencji, kolegów po fachu) wykorzystując doświadczenia innych.

**Pieniądze to nie wszystko**

Na sukces składa się wiele elementów. Pomysł na biznes to pierwszy krok do otwarcia własnej działalności gospodarczej. Koncepcja biznesowa, determinacja w realizacji, gotowość do poświęceń, uczenie na błędach są równie ważne w osiągnięciu sukcesu.

## Powody, dla których warto założyć własną działalność:

1. **Stajesz się niezależny** – to Ty decydujesz jak poprowadzisz swoją działalność, jesteś sterem żeglarzem okrętem, tzn. nie masz szefa, nienormowany czas pracy.
2. **Pieniądze** – własna działalność to możliwość ponadprzeciętnych dochodów, pracując w korporacji Twoje pomysły idą na konto pracodawcy, do „wspólnego worka”.
3. **Satysfakcja** – tworzysz biznes, obserwujesz jak się rozwija, odnosisz satysfakcję, jak działalność osiąga sukcesy.
4. **Działasz z pasją** – w myśl powiedzenia; „znajdź pracę, którą lubisz, a nie będziesz pracował do końca życia”. Gdy prowadzisz biznes, który związany jest z Twoimi zainteresowaniami to w zasadzie nie pracujesz, bo robisz to, co lubisz i na czym się doskonale znasz, a co najważniejsze wykonywane zajęcie sprawia Ci frajdę i satysfakcję. Rozwijasz swoje pasje i zarabiasz pieniądze.
5. **Możesz zarabiać 24 godziny na dobę**- wykorzystując potęgę Internetu, dobierając odpowiednie systemy, strategię możemy być aktywni w sieci 24 godz. na dobę.
6. **Rozwijasz się** – pracując na „etacie” jesteś zorientowany na część działalności pracodawcy. Prowadząc własny biznes musisz się rozwijać we wszystkich kierunkach.
7. **Możesz zostać rentierem** – jeśli działalność będzie generowała zyski, można pomyśleć o budowie kapitału na przyszłość. Sam decydujesz, kiedy przechodzisz na emeryturę. Formę można przekazać komuś z rodziny, i dalej czerpać korzyści finansowe.
8. **Podatki działają na Twoją korzyść** – można wykorzystać przepisy podatkowe i skorzystać z różnych ulg niedostępnych dla pracowników etatowych.

## 1.2. Osoba przedsiębiorcza, czyli moje miejsce w biznesie

Przedsiębiorczość można odnieść do każdej ludzkiej działalności i wszystkich ludzi ją podejmujących. Przedsiębiorczość jest specyficzną postawą człowieka wobec otaczającego go świata i ludzi. Wyraża się twórczym i aktywnym dążeniem do ulepszania rzeczywistości i gotowości do podejmowania nowych działań lub rozszerzania dotychczasowych (A. Wiatrak, 2003). Niezależnie od warunków, jakie stwarza otoczenie, osoba przedsiębiorcza potrafi dostrzec i zaspokoić potrzeby swoje i swoich bliskich. To gotowość do podejmowania i rozwiązywania w sposób twórczy problemów, umiejętność wykorzystania pojawiających się szans oraz elastyczne przystosowywanie się do zmiennych warunków funkcjonowania.

Postawa przedsiębiorcza charakteryzuje się inicjatywnością, aktywnością, niezależnością i innowacyjnością jest napędem, motorem w osiągnięciu wyznaczonych celów.

Poznając mocne i słabe strony w świadomy sposób kształtujemy własną osobowość, zyskujemy w kontaktach z nimi, gdy jesteśmy bardziej tolerancyjnymi dla otoczenia. Znając typy osobowości ludzi, z którymi żyjemy, rozmawiamy i tymi, którymi chcemy zaoferować biznes, możemy ich po prostu lepiej rozumieć. Każdy typ osobowości ma swoje mocne i słabe strony.

Osobowość społeczna jest to wypadkowa różnych czynników kulturowych. Niektóre z nich oddziałują mocniej, inne słabiej, ale wszystkie wpływają w istotny sposób na kształt osobowości. Każdy z nas jest inny, niepowtarzalny pomimo tego, jako populacja ludzka wykazujemy wiele cech wspólnych, które możemy pogrupować (w oparciu o różne kryteria np. sposób reagowania, mówienia, odczuwania, radzenia sobie z porażką), na jednostki o podobnym typie osobowości, zbliżonym syndromie cech psychospołecznych.

**Nie ma typów lepszych i gorszych ludzie są różni. Trzeba umieć wykorzystywać swoje mocne strony.**

Zainteresowanie różnymi obliczami natury ludzkiej sięga starożytności. Hipokrates (ok. 460-377r. p.n.e.) sprowadził naturę człowieka do odpowiednich proporcji czterech płynów ustrojowych (krew, flegma, żółć żółta i czarna). Wyróżnił 4 typy temperamentu: typ flegmatyka, choleryka, melancholika i sangwinika. Dokonał również dokładnego opisu typologii, który jest obecnie również użyteczny.<sup>1</sup>

**Flegmatyk** (gr. φλεγμα – śluz) to człowiek odznaczający się mało dynamicznym usposobieniem, powolny, nieulegający gwałtownym emocjom, słabo reagujący na podniety, bodźce, niedążący do żadnych zmian

1. Strelau, J., 1998, *Psychologia temperamentu*, Warszawa, ss. 26-32.

w życiu, zadowolony z tego, co osiągnął do tej pory. Wytrwały w działaniu i konsekwentny w uczuciach.

**Choleryk** (gr. chole – żółć, stąd «żółć go zalewa») człowiek pobudliwy, wybuchowy, o silnych i szybko powstających reakcjach uczuciowych, odznaczający się dużą energią życiową, brakiem opanowania. Reakcje choleryka są szybkie, często nieprzemyślane, niewspółmierne do bodźca. Często żałują wypowiedzianych słów. Charakteryzuje go silne przeżywanie emocji, duża energia życiowa i aktywność. Nastawieni są na działania i kierowanie. Wśród ludzi wzbudzają zaufanie i respekt, często pracują dla potrzeb grupy. W działaniu są szybcy, preferują pracę, którą mogą sami zorganizować. Lubią przewodzić i organizować pracę innym.

**Melancholik** (gr. mélanos – czarny + chole – żółć; prawdopodobnie stąd m.in. «czarne myśli») człowiek o usposobieniu łagodnym, biernym, którego cechuje brak impulsywności, powolnych, słabych, lecz długotrwałych reakcjach uczuciowych. Wykazuje pesymistyczne, lękowe, negatywne podejściu do przyszłości, życia, samego siebie, jak również do codziennych spraw. W działaniu melancholik jest niewytrwały, ma trudności z podejmowaniem decyzji, brakuje jej wiary w siebie. Cechuje się apatią, skłonnościami do depresji, przewlekłymi stanami przygnębienia i małą ruchliwością. Jest wrażliwy na krytykę, obraźliwy, nerwowy i skłonny do zadumy, spokojny, wyciszony, powściągliwy i mało elastyczny w zachowaniu. Lubi marzyć, oddawać się zadumie.

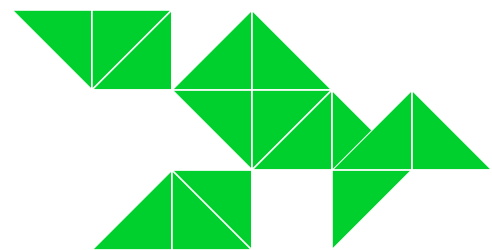
**Sangwinik** - (łac. sanguis – krew) to człowiek o żywym, pogodnym, optymistycznym, uczuciowym, aktywnym usposobieniu, wrażliwy. Jest to osoba otwarta na relacje interpersonalne, towarzyska, beztraska. Lubi być w centrum zainteresowania, władczą i dominującą, czasem dumna i spoglądająca na innych „z góry”. Jest emocjonalna i spontaniczna, ma duże poczucie humoru, potrafi przyciągać do siebie ludzi. Tryska energią i entuzjazmem, jest twórcza, lubi komplementy, szybko przeprosza. Łatwo dostosowuje się do zmiennych warunków życia, jest odporny na trudności.

Znajomość typów osobowości decyduje o skuteczności naszej pracy. Niewątpliwie każdy z nas jest inny niepowtarzalny, ale mimo ludzie wykazują wiele cech wspólnych, które można pogrupować właśnie w następujące kategorie:

- ▶ sposób reagowania,
- ▶ sposób ubierania się
- ▶ sposób mówienia,
- ▶ analizowania sytuacji
- ▶ działania w sytuacji stresującej,
- ▶ formą spędzania wolnego czasu.

Ludzie są „mieszaniłą” różnych typów osobowości, ale zawsze jeden typ jest dominujący. Każda osobowość ma swoje słabe i mocne strony. Możemy to dostrzec zarówno w życiu prywatnym i zawodowym. Znajomość typów osobowości, a dokładnie określenie, który typ dominuje może być przydatną umiejętnością w kontaktach z innymi ludźmi np. współpracownikami, kontrahentami, czy klientami.

W tabeli podano kilka przydatnych wskazówek jak zachowywać się w kontaktach zawodowych z ludźmi odznaczającymi się poszczególnymi typami osobowości





**Tabela 1. Typy osobowości**

TYP OSOBOWOŚCI	Jak NALEŻY postępować	Jak NIE NALEŻY postępować
<p><b>Sangwinik</b> Należy go obdarzyć uwagą i podziwem. Współpracując z nim można wykorzystać jego naturalne zdolności w łatwym nawiązywaniu kontaktu z innymi oraz wielką kreatywność. Słowa, które najłatwiej docierają do sangwinika to: kolorowo, wesoło, bezpłatnie, zabawnie.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zostaw trochę czasu na nawiązanie relacji towarzyskich;</li> <li>• Rozmawiaj o ludziach, którzy mogą wzbudzić ich zainteresowanie;</li> <li>• Pytaj o ich opinie oraz obserwacje dotyczące ludzi;</li> <li>• Przedstawiaj pomysły, które można przełożyć na konkretne działania</li> <li>• Nie spiesz się</li> <li>• Przedstaw się jako osoba wesoła, rezolutna, towarzyska</li> <li>• Przedstaw opinie ludzi wpływowych, uznawanych za autorytety</li> <li>• Zaoferuj pozytywne wzmocnienia dla ich chęci podjęcia ryzyka</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nie formalizuj</li> <li>• Przedstawiaj sprawę w sposób efektowny, zajmujący</li> <li>• Nie bądź lakoniczny i małomówny</li> <li>• W celu uzasadnienia nie sięgaj do liczb i oderwanych pojęć</li> <li>• Nie pozostawiaj decyzji zawieszonych w powietrzu</li> <li>• Nie przedstawiaj się jako osoba nastawiona jedynie na ce</li> <li>• Nie daj się wciągnąć w jego wizje, ponieważ możesz stracić swój czas</li> <li>• Nie traktuj ich z góry</li> <li>• Nie bądź zasadniczy</li> </ul>
<p><b>Melancholik</b> Ciągłe dąży do doskonałości. Mocne strony to: dokładność, dbałość o szczegóły, sprawiedliwość, zorganizowanie, estetyka, działa według planu. Kluczowymi słowami dla melancholików są: "szczegółowe", "intelektualne", "wrażliwe", "systematyczne", "zorganizowane".</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Przygotuj się bardzo starannie</li> <li>• Przyjmij podejście bezpośrednie i prostolinijne, skup się na sprawie</li> <li>• Stosuj podejście intelektualne</li> <li>• Przedstaw konkrety i dotrzyj słowa</li> <li>• Nie spiesz się</li> <li>• Bądź wytrwały</li> <li>• Naszkicuj planowe podejście do wdrażania działań według rozpisanego terminarza; zapewnij, że nie będzie żadnych niespodzianek</li> <li>• Jeśli się nie zgadzasz – uzasadnij faktami i liczbami</li> <li>• Daj im czas, aby mogli wszystko przemyśleć i przeanalizować</li> <li>• Staraj się, aby dowody na poparcie twojego stanowiska były spójne i oparte na faktach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nie bądź niezorganizowany, ani bałaganiarski</li> <li>• Nie bądź zbyt swobodny w zachowaniu</li> <li>• Nie przyspieszaj procesu podejmowania decyzji</li> <li>• Nie bądź beztronski wobec wymagań</li> <li>• Rozpoczętą sprawę zawsze doprowadź do końca</li> <li>• Nie sprawiaj wrażenia osoby wahającej się</li> <li>• Nie pozostawiaj rzeczy własnemu biegowi</li> <li>• Nie próbuj się przypochlebiać</li> <li>• Nie używaj niesprawdzonych opinii i przypuszczeń jako dowodu</li> <li>• Nie stosuj manipulacji ani "sztuczek"- Nie naciskaj oraz nie dawaj niewykonalnych terminów</li> </ul>
<p><b>Choleryk</b> Cechuje go działanie, osiągnięcie wyznaczonych celów. Doskonale sobie radzi w sytuacjach trudnych. Nie potrafi przyznać się do błędów. Ma skłonności do manipulowania ludźmi. Mocne strony to: zdecydowanie, aktywność, umiejętność szybkiego rozwiązywania problemów. Szybko podejmuje decyzje. Słabe strony to: arogancja, nerwowość, zbyt duża pewność siebie, upór. Dla choleryka ważne są następujące słowa: praktyczne, porywające, odważne, śmiałe.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bądź konkretny i zwięzły.</li> <li>• Miej jasno wyznaczone cele oraz argumenty na ich poparcie.</li> <li>• Przedstawiaj fakty logicznie, sprawnie zaplanuj prezentację.</li> <li>• Zadawaj szczegółowe pytania.</li> <li>• Dostarcz alternatyw, aby mogli sami dokonać wyboru.</li> <li>• Przedstawiaj fakty świadczące o prawdopodobieństwie osiągnięcia sukcesu.</li> <li>• Jeśli nie zgadzasz się podkreślaj, że nie zgadzasz się z faktami, a nie z osobą.</li> <li>• Motywuj i perswaduj poprzez odwoływanie się do celów i wyników.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nie przeskakuj z tematu na temat, nie marnuj ich czasu.</li> <li>• Nie bądź niezorganizowany i bałaganiarski.</li> <li>• Nie pozostawiaj luk i niedopowiedzeń, jeśli nie chcesz zostać niemile zaskoczony ich reakcją.</li> <li>• Nie zadawaj pytań retorycznych lub nieużytecznych.</li> <li>• Nie przychodź z gotowymi decyzjami i nie decyduj za nich.</li> <li>• Nie staraj się kierować rozmową.</li> </ul>
<p><b>Flegmatyk</b> Jest niezauważany i niedoceniany, potrzebuje szacunku. Mocne stron to: bezkonfliktowość, opanowanie, rozwaga, stabilność, uprzejmość. Doskonały słuchacz, sprawdza się w mediacjach. Słabymi stronami są: niezdecydowanie, odwlekanie decyzji, niezaangażowanie, niechęć do zmian. W rozmowie z flegmatykiem należy postugiwać się zwrotami: łatwe w użyciu, proste w obsłudze, nie wymagające wysiłku.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wspieraj ich wizje, marzenia i zamiary</li> <li>• Zostaw trochę czasu na nawiązanie relacji towarzyskich</li> <li>• Rozmawiaj o ludziach, którzy mogą wzbudzić ich zainteresowanie</li> <li>• Pytaj o ich opinie oraz obserwacje dotyczące ludzi</li> <li>• Przedstawiaj pomysły, które można przełożyć na konkretne działania</li> <li>• Nie spiesz się</li> <li>• Przedstaw się jako osoba wesoła, rezolutna, towarzyska</li> <li>• Przedstaw opinie ludzi wpływowych, uznawanych za autorytety</li> <li>• Zaoferuj pozytywne wzmocnienia dla ich chęci podjęcia ryzyka</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nie formalizuj</li> <li>• Przedstawiaj sprawę w sposób efektowny, zajmujący</li> <li>• Nie bądź lakoniczny i małomówny</li> <li>• W celu uzasadnienia nie sięgaj do liczb i oderwanych pojęć</li> <li>• Nie pozostawiaj decyzji zawieszonych w powietrzu</li> <li>• Nie przedstawiaj się jako osoba nastawiona jedynie na cel</li> <li>• Nie daj się wciągnąć w jego wizje, ponieważ możesz stracić swój czas</li> <li>• Nie traktuj ich z góry</li> <li>• Nie bądź zasadniczy</li> </ul>

## Czy przedsiębiorcy lubią ryzyko?

Rozpoczęcie własnej działalności oznacza konieczność działania w warunkach niepewności. Przedsiębiorca musi sobie z tą niepewnością radzić. Aby utrzymać się na rynku i dokonywać trafnych wyborów musi właściwie ocenić ryzyko i unikać działań niosących ze sobą zbyt wysokie ryzyko. Aby dowiedzieć się, jaka jest skłonność do podejmowania ryzyka wśród przedsiębiorców przeprowadzono badanie. Porównano w nim dwie grupy – menedżerów pracujących w różnych organizacjach i przedsiębiorców. Badanie polegało na metaanalizie - zestawiono ze sobą wyniki wielu badań dotyczących tego samego problemu i oceniono w sposób ilościowy jego powtarzalność (Stewart, Roth, 2001). Zauważono, że skłonność do podejmowania ryzyka u osób prowadzących własną firmę jest delikatnie wyższa niż u menedżerów. Różnica, jaką ustalono, nie okazała się tak duża, jak można było przypuszczać na podstawie powszechnych opinii. Różnica pomiędzy tym jak większość spostrzega przedsiębiorców a wynikiem metaanalizy, może wynikać z tego, że w większości badań ocena ryzyka opiera się na ocenie hipotetycznych działań. Ponadto istotne znaczenie może mieć rodzaj ryzyka.

Można wyróżnić ryzyko losowe, kiedy rezultat ryzykownej sytuacji nie zależy od decydenta, a od czynników całkowicie losowych np. sytuacji makroekonomicznej w kraju; oraz ryzyko kontrolowane, w którym osoba podejmująca decyzję ma wpływ na rezultaty sytuacji, przykładem jest sytuacja ubiegania się o dofinansowanie działalności. Jeżeli bieg zdarzeń jest zależny od osoby, czyli kiedy sytuacja jest kontrolowalna to osoba powinna nie tylko dokonać właściwej oceny ryzyka, ale także określić co zrobić, jak wpłynąć na tę sytuację by osiągnąć pożądane rezultaty. Osoba starająca się o dofinansowanie, musi tak opracować swój biznes plan, by szanse na jego otrzymanie były możliwie jak największe.

Osoby prowadzące własną firmę oceniają ryzyko z tym związane, jako podlegające ich kontroli, w odróżnieniu od ryzyka występującego w hazardzie, które całkowicie pozostaje poza kontrolą (Z. Shapira, 1994, za: T. Zaleśkiewicz, 2004). W badaniu zaobserwowano, że sposobem uzyskania poczucia wpływu na sytuację wśród menedżerów jest przygotowanie się na ewentualne trudności i problemy, analizują oni informacje napływające z rynku oraz planują przyszłe działania. Przedsiębiorcy charakteryzują się wewnętrznym poczuciem kontroli. Można przewidywać, że będą więc bardziej skłonni zaryzykować, gdy ocenią iż mogą w dużym stopniu kontrolować działanie. Natomiast, gdy wpływ na sytuację będą miały przypadkowe czynniki, przedsiębiorca prawdopodobnie się w nią nie zaangażuje.

## 1.3. Od koncepcji do działania – planowanie biznesu

### Cechy skutecznego menadżera

Zarządzanie zespołem ludzi wymaga umiejętności szybkiego podejmowania decyzji, prawidłowego zarządzania emocjami, stawiania celów, motywowania oraz asertywności.

#### **Osoba zarządzająca (lider) powinien odznaczać się następującymi cechami:**

1. wysokim poczuciem własnej wartości,
2. asertywnością,
3. empatią,
4. dyrektywnością,
5. samodyscypliną,
6. umiejętnością zarządzania emocjami,
7. umiejętnością rozładowywania konfliktów,
8. umiejętnością wyznaczanie celów,
9. umiejętnością motywowania,
10. odpornością na stres.

Menedżer musi być pewien swoich umiejętności, spójny wewnętrznie. Powinien w sposób jasny i klarowny wyrazić swoją opinię zarówno pozytywną jak i negatywną. Wyrażając opinie negatywną (krytykę) należy podkreślić, że uwagi ukierunkowane są na sposób działania a nie krytykę osoby. Umiejętność wczuwania się, zrozumienie problemów i zachowań pracowników, pozwala na korygowanie polityki kadrowej, odpowiedni dobór osób do zadań. Powinien odznaczać się zdolnością do zarządzania, podejmowania niestandardo-

wych decyzji, stawiać wymagania i egzekwować je. Samodyscyplina to cecha, pozwalająca osiągać cele, zdobywać sukcesy i realizować plany. Dzięki umiejętności zarządzania emocjami dobry menedżer potrafi skutecznie negocjować, rozładowywać sytuacje konfliktowe, przewodzić grupie ludzi pod presją czasu, podejmować trudne i ryzykowne wyzwania i podołać im w zaplanowanym czasie. Skuteczne zarządzanie emocjami pozwala na zapanowanie nad kryzysem w firmie i panowanie nad nastrojami w grupie. Umiejętność rozładowywania konfliktów związana jest z budowaniem dobrej atmosfery w grupie, otwierającej przestrzeń do skutecznej współpracy nawet w sytuacji po powstaniu napięcia lub ostrego konfliktu. Umiejętność rozładowywania konfliktów związana jest z empatią i umiejętnościami negocjacyjnymi. Zadaniem menedżera jest wyznaczanie i realizacja celów. Dobry lider powinien także wiedzieć jak motywować pracowników, w jaki sposób wzbudzić entuzjazm i chęć do wykonywania zadań. W pracy menedżera stres jest codziennością, dlatego nie może on mieć wpływu na sposób działania i proces podejmowania decyzji. Menedżer, powinien być osobą odporną na stres.

## Zarządzanie przedsiębiorstwem

Przedsiębiorcy by utrzymać się na rynku muszą nauczyć się zarządzać przedsiębiorstwem. Działania menedżerów powinny być przemyślane, oparte na faktach, na określonym planie działania. Prawidłowe zarządzanie to także jego rozwój. Nie wolno liczyć na „szczęśliwy przypadek”. Wszelkie działania menedżerów powinny być przemyślane i zaplanowane. Planowanie to świadome ustalenie kierunków działania i podejmowanie decyzji opartych na celach, faktach i dobrze przemyślanych ocenach (C. Barrow i P. Barrow, 1992).

Zasady planowania są to normy i reguły postępowania w tworzeniu planów oraz ich realizacji. Zróżnicowanie zasad planowania zależy od wielkości zasięgu działania, charakteru, struktury organizacyjnej podmiotu. Zasady planowania są zróżnicowane i zależą od rodzaju prognozowanego planu. Wyróżniamy **planowanie**: strategiczne, taktyczne, operacyjne, długookresowe, krótkoterminowe. **Plan strategiczny** to zbiór decyzji określających cele i ich zmiany wynikające z konieczności przystosowania się do zmian w otoczeniu, zasoby niezbędne do osiągnięcia założonych celów oraz sposoby ich pozyskania, rozmieszczenia i użytkowania (J.A.F. Stoner i Ch. Wankel, 1996). **Plan taktyczny** to zbiór decyzji określających cele pośrednie względem celów sformułowanych przez plan strategiczny (A.K. Koźmiński i W. Piotrowski, 1996). **Plan operacyjny** to zbiór decyzji określających konkretne zadania i działania konieczne do poprawnego ich wykonywania w przewidzianym ściśle czasie oraz warunki, które muszą być dotrzymane przy realizacji zadań (A.M. Zawiślak, 1978). Ważna jest **strategia** przedsiębiorstwa. Strategia to koncepcja prowadzenia działań. To także długofalowy plan określający kierunek działań, metod i narzędzi ich wdrażania. Jest to wyznacznik podejmowanych decyzji merytorycznych, organizacyjnych i finansowych. Określa specyfikę działania.

**Zarządzanie strategiczne** to kierowanie rozwojem organizacji w długim czasie, nastawione na wykorzystanie szans i unikanie zagrożeń pojawiających się w otoczeniu. Jest to ciągły proces osiągania zamierzonych celów, polegający na użyciu właściwych środków w konkretnym czasie i miejscu przy uwzględnieniu istniejących ograniczeń.

Tabela 2. Cechy planów strategicznych, operacyjnych i taktycznych

CECHY	PLAN		
	STRATEGICZNY	TAKTYCZNY	OPERACYJNY
Zakres	jeden główny aspekt	duża liczba pól	pojedyncze działanie lub zadania
Złożoność	bardzo dużo zmiennych	wiele zmiennych	mała liczba zmiennych
Cel planowania	misja organizacji	doprowadzenie do pożądanego rezultatu w krótkim czasie	wykonanie zadania
Charakter czynności planistycznych	twórczy	bilansujący i alokacyjny	odtwórczy postępowanie według wytycznych
Agregacja informacji	wysoka	niska	niska

**Planowanie strategiczne** jest integralną częścią zarządzania, musi uwzględniać ograniczenia takie jak: bariery finansowe, ograniczenia zasobowe, niedostateczna ilość informacji, sprzeczne interesy grup, brak kompetencji, czy działania konkurencji. Planowanie strategiczne to proces, w którym przedsiębiorstwo określa miejsce, jakie chce zajmować w przyszłości oraz sposoby, jakie wykorzysta by wyznaczony cel osiągnąć. Źródło całościowego obrazu i analizy organizacji oraz związanego z nią otoczenia.

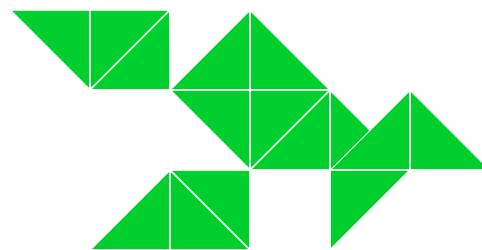
**Planowanie taktyczne** określa zadania ogólne dla całej organizacji. Konkretyzuje cele i kierunki działania ustalone w planie strategicznym. W razie potrzeby aktualizuje je, modeluje i dostosowuje do warunków panujących w otoczeniu. Formułowany jest najczęściej na okres jednego roku. Wskazane jest by zawierał część techniczną i finansową.

**Planowanie operacyjne.** Podstawowym elementem właściwej organizacji pracy i zapewnienie prawidłowego funkcjonowania jest planowanie operacyjne. Wynika ono z planu taktycznego i obejmuje krótkie odcinki czasowe np. kwartał, miesiąc. Planowanie operacyjne posługuje się konkretnymi zadaniami, które są przeznaczone do realizacji. Zadanie te powierzone konkretnym osobom, wykonawcom. Planowanie operacyjne nazywa się także planowaniem bieżącym lub wykonawczym.



## TEMATY DO DYSKUSJI

1. Zastanów się, jaki rodzaj działalności chciałbyś prowadzić- określ ideę własnej działalności i uzasadnij, dlaczego chciałbyś się nią zająć.
2. Czy wolontariat może stanowić źródło inspiracji i doświadczenia dla przyszłej działalności?- odpowiedź uzasadnij.
3. Wymień i scharakteryzuj cechy osoby przedsiębiorczej.
4. Jakie zasoby mogą być/ są przydatne w prowadzeniu działalności gospodarczej?
5. Czym są i jakie znasz umiejętności obywatelskie? Czy mogą być one przydatne w prowadzeniu własnej działalności?
6. Wiedząc, na czym polega proces planowania, w grupach 2-4 osobowych, spróbujcie sformułować zasady planowania.
7. Wyjaśnij korzyści wynikające z planowania działań.



## 1.4. Wybór formy działalności

Decydując się na prowadzenie własnej działalności gospodarczej należy zastanowić się na odpowiednią do potrzeb formą prawną naszego przedsięwzięcia.

Przedsiębiorstwa, funkcjonujące na rynku można podzielić na następujące kategorie:

- ▶ Przedsiębiorstwa państwowe;
- ▶ Spółdzielnie;
- ▶ Spółki;
- ▶ Jednoosobowa działalność gospodarcza.

### Schemat 1. Rodzaje przedsiębiorstw

Przedsiębiorstwa				
Spółki		Przedsiębiorstwa państwowe	Spółdzielnie	Jednoosobowa działalność gospodarcza
Osobowe	Kapitałowe	Cywilna		
Jawna	z ograniczoną odpowiedzialnością			
Partnerska	Akcyjna			
Komandytowa				
Komandytowo-akcyjna				

Źródło: Opracowanie własne, za: Kodeks cywilny, Kodeks spółek handlowych, Ustawa o przedsiębiorstwach państwowych, Prawo spółdzielcze.

### Przedsiębiorstwa państwowe

Przedsiębiorstwo państwowe jest samodzielnym, samorządnym i samofinansującym się przedsiębiorcą posiadającym osobowość prawną. Działa ono zawsze w pewnym, z góry określonym celu. Najbardziej znanym przykładem takiego właśnie przedsiębiorstwa państwowego jest Poczta Polska<sup>2</sup>.

Przedsiębiorstwa państwowe tworzą: naczelne oraz centralne organy administracji państwowej oraz Narodowy Bank Polski i banki państwowe. Organami przedsiębiorstwa państwowego są: ogólne zebranie pracowników (delegatów), rada pracownicza i dyrektor przedsiębiorstwa<sup>3</sup>.

### Spółdzielnie

**Spółdzielnia** jest dobrowolnym zrzeszeniem nieograniczonej liczby osób, o zmiennym składzie osobowym i zmiennym funduszu udziałowym, które w interesie swoich członków prowadzi wspólną działalność gospodarczą. Spółdzielnia może prowadzić działalność społeczną i oświatowo-kulturalną na rzecz swoich członków i ich środowiska<sup>4</sup> ().

Osoby zamierzające założyć spółdzielnię (założyciele) uchwalają statut spółdzielni, potwierdzając jego przyjęcie przez złożenie pod nim swoich podpisów, oraz dokonują wyboru organów spółdzielni, których wybór należy w myśl statutu do kompetencji walnego zgromadzenia, lub komisji organizacyjnej w składzie, co najmniej trzech osób. Spółdzielnia podlega obowiązkowi wpisu do Krajowego Rejestru Sądowego.

**Członkiem spółdzielni** może być każda osoba fizyczna o pełnej zdolności do czynności prawnych, która odpowiada wymogom określonym w statucie. Warunkiem przyjęcia na członka jest złożenie deklaracji.

2. Wykaz przedsiębiorstw państwowych według stanu na dzień 31.12.2012 r., <http://nadzor.msp.gov.pl/portal/nad/import/11/>, 10.03.2013.

3. Ustawa z dnia 25 września 1981 r. o przedsiębiorstwach państwowych, (t.j. Dz. U. 2002 nr 112 poz. 981)

4. Ustawa z dnia 16 września 1982 r. Prawo spółdzielcze, (t.j. Dz. U. 2003 nr 188 poz. 1848)

Deklaracja powinna być złożona pod nieważnością w formie pisemnej. Podpisana przez przystępującego do spółdzielni deklaracja powinna zawierać jego imię i nazwisko oraz miejsce zamieszkania, a jeżeli przystępujący jest osobą prawną - jej nazwę i siedzibę, ilość zadeklarowanych udziałów, dane dotyczące wkładów, jeżeli statut ich wnoszenie przewiduje, a także inne dane przewidziane w statucie.

### Organami spółdzielni są:

- ▶ walne zgromadzenie lub zebrania grup członkowskich - najwyższym organem spółdzielni.
- ▶ rada nadzorcza - sprawuje kontrolę i nadzór nad działalnością spółdzielni.
- ▶ zarząd - kieruje działalnością spółdzielni oraz reprezentuje ją na zewnątrz.

### Jednoosobowa działalność gospodarcza

Jedną z form prowadzenia aktywności gospodarczej jest jednoosobowa działalność gospodarcza, prowadzona przez osobę fizyczną, która w największym stopniu umożliwia samodzielne działanie i daje możliwość zarządzania przedsiębiorstwem.

Osoba fizyczna, prowadząc działalność w tej formie indywidualnie zaciąga zobowiązania w swoim imieniu a także na swoją rzecz. Jednocześnie działalność gospodarcza jest prowadzona i reprezentowana przez właściciela. Za wszelkie zobowiązania przedsiębiorca odpowiada w sposób wyłączny i bez żadnych ograniczeń zarówno majątkiem przedsiębiorstwa, jak majątkiem osobistym (W. Nowakowski, 2011).

**Tabela 3. Zalety i wady prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej**

Zalety prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej	Wady prowadzenia jednoosobowej działalności gospodarczej
<ol style="list-style-type: none"><li>1. zadowolenie z tworzenia nowych rzeczy i poczucie realizacji podjętego celu,</li><li>2. gwarancja zatrudnienia - dopóki firma będzie istniała, to nikt nas z niej nie wyrzuci,</li><li>3. autonomia i elastyczność w wyborze sposobu wykonywania określonych i wymaganych przez charakter pracy działań,</li><li>4. większa satysfakcja niż wówczas, gdy pracuje się dla kogoś niż dla siebie.</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. ryzyko niepowodzenia przedsięwzięcia i konieczność nieustannego zabiegania o utrzymanie odpowiedniego poziomu sprzedaży usług/produktów,</li><li>2. konieczność pracy w wymiarze wyższym niż etat czyli 8 godzin dziennie,</li><li>3. konieczność prowadzenia dodatkowej dokumentacji podatkowej, ZUS</li><li>4. konieczność stałego monitorowania zmian przepisów kodeksu pracy, zasad higieny pracy i bezpieczeństwa,</li><li>5. podjęcie odpowiedzialności finansowej i prawnej, zarówno za siebie, jak i za pracowników.</li></ol>

Źródło: [www.twoja-firma.pl/artykuly/2,zalety-i-wady-prowadzenia-wlasnej-firmy.html](http://www.twoja-firma.pl/artykuly/2,zalety-i-wady-prowadzenia-wlasnej-firmy.html), 7.03.2013.

### Spółka cywilna

Spółka cywilna stanowi najpopularniejszą formę prowadzenia działalności gospodarczej, której wykonywanie reguluje Kodeks Cywilny<sup>5</sup>.

Zgodnie z ustawową definicją, umowa spółki cywilnej może łączyć wyłącznie przedsiębiorców i musi mieć na celu osiągnięcie określonego celu gospodarczego. Umowa spółki cywilnej może być zawarta w celu prowadzenia każdej dopuszczalnej prawem działalności gospodarczej. Umowa spółki powinna być stwierdzona pismem. Niezachowanie takiej formy nie pociąga za sobą żadnych ujemnych skutków w zakresie powstania spółki, skutkuje jedynie ograniczeniami w zakresie dowodzenia faktu zawarcia umowy czy też jej treści. Umowa spółki powinna szczegółowo wskazywać wspólny cel gospodarczy, a także zawierać określenie sposobu działania każdego ze współników dla osiągnięcia zamierzonego celu (W. Nowakowski, 2011).

### Umowa spółki cywilnej w szczególności powinna określać:

- ▶ imiona i nazwiska współników,
- ▶ miejsce i zakres działalności,
- ▶ obszar działania,
- ▶ wysokość wnoszonych kapitałów,
- ▶ zakres odpowiedzialności współników,

5. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. - Kodeks cywilny (Dz. U. nr 16 poz. 93 ze zm.) - dalej cytowana jako: KC

- ▶ uczestnictwo w zyskach i stratach spółki,
- ▶ czas trwania spółki,
- ▶ sposób rozwiązania spółki,
- ▶ spółka cywilna nie posiada osobowości prawnej.

Wkład wspólnika może polegać na wniesieniu do spółki własności lub innych praw albo na świadczeniu usług. Domniemywa się, że wkłady wspólników mają jednakową wartość. Wspólnik nie może rozporządzać udziałem we wspólnym majątku wspólników ani udziałem w poszczególnych składnikach tego majątku.

### W czasie trwania spółki :

- ▶ wspólnik nie może domagać się podziału wspólnego majątku wspólników,
- ▶ wierzyciel wspólnika nie może żądać zaspokojenia z jego udziału we wspólnym majątku wspólników ani z udziału w poszczególnych składnikach tego majątku.

Za zobowiązania spółki wspólnicy odpowiedzialni są solidarnie.

Każdy wspólnik jest uprawniony i zobowiązany do prowadzenia spraw spółki i może bez uprzedniej uchwały wspólników:

- ▶ prowadzić sprawy, które nie przekraczają zakresu zwykłych czynności spółki - jeżeli jednak przed zakończeniem takiej sprawy chociażby jeden z pozostałych wspólników sprzeciwi się jej prowadzeniu, potrzebna jest uchwała wspólników,
- ▶ wykonać czynność nagłą, której zaniechanie mogłoby narazić spółkę na niepowetowane straty.

W braku odmiennej umowy lub uchwały wspólników każdy wspólnik jest umocowany do reprezentowania spółki w takich granicach, w jakich jest uprawniony do prowadzenia jej spraw.

Każdy wspólnik jest uprawniony do równego udziału w zyskach i w tym samym stosunku uczestniczy w stratach, bez względu na rodzaj i wartość wkładu. W umowie spółki można inaczej ustalić stosunek udziału w zyskach i stratach, można nawet zwolnić niektórych wspólników od udziału w stratach. Natomiast nie można wyłączyć wspólnika od udziału w zyskach.

Ustalony w umowie stosunek udziału wspólnika w zyskach odnosi się w razie wątpliwości także do udziału w stratach.

## Spółki osobowe i kapitałowe

Tworzenie, organizację, funkcjonowanie, rozwiązywanie, łączenie, podział i przekształcanie spółek osobowych i kapitałowych reguluje Kodeks spółek handlowych<sup>6</sup>.

Podstawowe kryterium odróżniające spółki osobowe od kapitałowych to fakt, że w spółkach osobowych wspólnicy angażują zarówno swój majątek jak i osobistą pracę, a w spółce kapitałowej wspólnicy są wyłączeni z osobistej odpowiedzialności za zobowiązania spółki.

Spółki osobowe to:	Spółki kapitałowe to :
<ul style="list-style-type: none"> <li>• spółka jawna,</li> <li>• spółka partnerska,</li> <li>• spółka komandytowa,</li> <li>• spółka komandytowo- akcyjna.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• spółka z ograniczoną odpowiedzialnością,</li> <li>• spółka akcyjna.</li> </ul>

## Spółki osobowe

**Spółką jawną<sup>7</sup>** jest spółka osobowa, która prowadzi przedsiębiorstwo pod własną firmą. Firma spółki jawnej powinna zawierać nazwiska lub firmy (nazwy) wszystkich wspólników albo nazwisko albo firmę (nazwę) jednego albo kilku wspólników oraz dodatkowe oznaczenie „spółka jawna”. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp. j.”

6. Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych (Dz. U. nr 94 poz. 1037 ze zm.) - dalej cytowana jako: KSH.

7. art. 22-85 KSH

**Spółką partnerską**<sup>8</sup> jest spółka osobowa, utworzona przez wspólników (partnerów) w celu wykonywania wolnego zawodu w spółce prowadzącej przedsiębiorstwo pod własną firmą. Spółka może być zawiązana w celu wykonywania więcej niż jednego wolnego zawodu. Partnerami w spółce mogą być wyłącznie osoby fizyczne, uprawnione do wykonywania następujących zawodów: adwokata, aptekarza, architekta, inżyniera budownictwa, biegłego rewidenta, brokera ubezpieczeniowego, doradcy podatkowego, maklera papierów wartościowych, doradcy inwestycyjnego, księgowego, lekarza, lekarza dentysty, lekarza weterynarii, notariusza, pielęgniarki, położnej, radcy prawnego, rzecznika patentowego, rzeczoznawcy majątkowego i tłumacza przysięgłego.

Firma spółki partnerskiej powinna zawierać nazwisko- co najmniej jednego partnera, dodatkowe oznaczenie „i partner” bądź „i partnerzy” albo „spółka partnerska” oraz określenie wolnego zawodu wykonywanego w spółce. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp.p.”

**Spółką komandytową**<sup>9</sup> jest spółka osobowa, mająca na celu prowadzenie przedsiębiorstwa pod własną firmą, w której wobec wierzycieli za zobowiązania spółki, co najmniej jeden wspólnik odpowiada bez ograniczenia (komplementariusz), a odpowiedzialność co najmniej jednego wspólnika (komandytariusza) jest ograniczona.

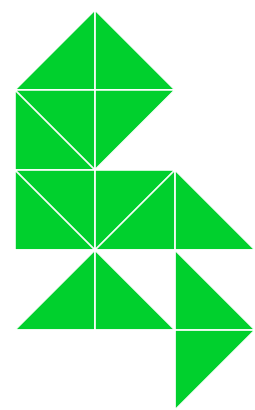
Firma spółki komandytowej powinna zawierać nazwisko jednego lub kilku komplementariuszy oraz dodatkowe oznaczenie „spółka komandytowa”. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „sp.k.”. Jeżeli komplementariuszem jest osoba prawna, firma spółki komandytowej powinna zawierać pełne brzmienie firmy (nazwy) tej osoby prawnej z dodatkowym oznaczeniem „spółka komandytowa”. Nie wyklucza to zamieszczenia nazwiska komplementariusza, który jest osobą fizyczną. Nazwisko komandytariusza nie może być zamieszczane w firmie spółki.

**Spółką komandytowo-akcyjną**<sup>10</sup> jest spółka osobowa mająca na celu prowadzenie przedsiębiorstwa pod własną firmą, w której wobec wierzycieli za zobowiązania spółki, co najmniej jeden wspólnik odpowiada bez ograniczenia (komplementariusz), a co najmniej jeden wspólnik jest akcjonariuszem. Firma spółki komandytowo-akcyjnej powinna zawierać nazwiska jednego lub kilku komplementariuszy oraz dodatkowe oznaczenie „spółka komandytowo-akcyjna”. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „S.K.A.” Jeżeli komplementariuszem jest osoba prawna, firma spółki komandytowo-akcyjnej powinna zawierać pełne brzmienie firmy (nazwy) tej osoby prawnej z dodatkowym oznaczeniem „spółka komandytowo-akcyjna”. Nie wyklucza to zamieszczenia nazwiska komplementariusza, który jest osobą fizyczną. Nazwisko albo firma (nazwa) akcjonariusza nie może być zamieszczane w firmie spółki.

8. art. 86-101 KSH

9. art. 102-124 KSH

10. art. 125 - 150 KSH





**Tabela 4. Charakterystyka porównawcza spółek osobowych**

Kryterium	spółka jawna	spółka partnerska	spółka komandytowa	spółka komandytowo-akcyjna
<b>Dokument założycielski</b>	Umowa spółki powinna być zawarta na piśmie pod rygorem nieważności	Umowa spółki powinna być zawarta na piśmie pod rygorem nieważności	Umowa spółki powinna być zawarta w formie aktu notarialnego	Statut spółki powinien być sporządzony w formie aktu notarialnego
<b>Min. wysokość kapitału zakładowego</b>	Nieokreślona	Nieokreślona	Nieokreślona	50 000 zł
<b>Odpowiedzialność za zobowiązania</b>	Każdy wspólnik odpowiada za zobowiązania spółki bez ograniczenia całym swoim majątkiem solidarnie z pozostałymi wspólnikami oraz ze spółką.	Partner nie ponosi odpowiedzialności za zobowiązania spółki : powstałe w związku z wykonywaniem przez pozostałych partnerów wolnego zawodu w spółce, będące następstwem działań lub zaniechań osób zatrudnionych przez spółkę na podstawie umowy o pracę lub innego stosunku prawnego, które podlegały kierownictwu innego partnera przy świadczeniu usług związanych z przedmiotem działalności spółki.	Komandytariusz odpowiada za zobowiązania spółki wobec jej wierzycieli tylko do wysokości sumy komandytowej.	Co najmniej jeden wspólnik –komplementariusz – za zobowiązania spółki co odpowiada bez ograniczenia Akcjonariusz nie odpowiada za zobowiązania spółki.
<b>Prowadzenie spraw i reprezentacja</b>	Każdy wspólnik ma prawo reprezentować spółkę. Każdy wspólnik ma prawo i obowiązek prowadzenia spraw spółki.	Każdy partner ma prawo reprezentować spółkę samodzielnie, chyba że umowa spółki stanowi inaczej. Umowa spółki partnerskiej może przewidywać, że prowadzenie spraw i reprezentowanie spółki powierza się zarządowi	Spółkę reprezentują komplementariusze, których z mocy umowy spółki albo prawo-mocnego orzeczenia sądu nie pozbawiono prawa reprezentowania spółki. Komandytariusz może reprezentować spółkę jedynie jako pełnomocnik. Komandytariusz nie ma prawa ani obowiązku prowadzenia spraw spółki, chyba że umowa spółki stanowi inaczej.	Spółkę reprezentują komplementariusze, których z mocy statutu lub prawomocnego orzeczenia sądu nie pozbawiono prawa reprezentowania spółki. W spółce można ustanowić radę nadzorczą - jeżeli liczba akcjonariuszy przekracza dwadzieścia pięć osób, ustanowienie rady nadzorczej jest obowiązkowe. Rada nadzorcza sprawuje stały nadzór nad działalnością spółki we wszystkich dziedzinach jej działalności. Akcjonariusz może reprezentować spółkę jedynie jako pełnomocnik. Każdy komplementariusz ma prawo i obowiązek prowadzenia spraw spółki.
<b>Podział zysku i strat</b>	Każdy wspólnik ma prawo do równego udziału w zyskach i uczestniczy w stratach w tym samym stosunku bez względu na rodzaj i wartość wkładu. Określony w umowie spółki udział wspólnika w zysku odnosi się, w razie wątpliwości, także do jego udziału w stratach. Umowa spółki może zwolnić wspólnika od udziału w stratach.	Każdy wspólnik ma prawo do równego udziału w zyskach i uczestniczy w stratach w tym samym stosunku bez względu na rodzaj i wartość wkładu. Określony w umowie spółki udział wspólnika w zysku odnosi się, w razie wątpliwości, także do jego udziału w stratach. Umowa spółki może zwolnić wspólnika od udziału w stratach.	Komandytariusz uczestniczy w zysku spółki proporcjonalnie do jego wkładu rzeczywiście wniesionego do spółki, chyba że umowa spółki stanowi inaczej. Zysk przypadający komandytariuszowi za dany rok obrotowy jest przeznaczany w pierwszej kolejności na uzupełnienie jego wkładu rzeczywiście wniesionego do wartości umówionego wkładu. W razie wątpliwości komandytariusz uczestniczy w stracie jedynie do wartości umówionego wkładu.	Komplementariusz oraz akcjonariusz uczestniczą w zysku spółki proporcjonalnie do ich wkładów wniesionych do spółki, chyba że statut stanowi inaczej.

## Spółki kapitałowe

**Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością**<sup>11</sup> może być utworzona przez jedną albo więcej osób w każdym celu prawnie dopuszczalnym. Firma spółki może być obrana dowolnie; powinna jednak zawierać dodatkowe oznaczenie „spółka z ograniczoną odpowiedzialnością”. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „spółka z o.o.” lub „sp. z o.o.”.

Zawiązać **spółkę akcyjną**<sup>12</sup> może jedna albo więcej osób. Spółka akcyjna nie może być zawiązana wyłącznie przez jednoosobową spółkę z ograniczoną odpowiedzialnością. Firma spółki może być obrana dowolnie, powinna zawierać dodatkowe oznaczenie „spółka akcyjna”. Dopuszczalne jest używanie w obrocie skrótu „S.A.”

Tabela 5. Charakterystyka porównawcza spółek kapitałowych

Kryterium	Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością	Spółka akcyjna
<b>Dokument założycielski</b>	Umowa spółki powinna być zawarta w formie aktu notarialnego	Statut spółki powinien być sporządzony w formie aktu notarialnego
<b>Minimalna wysokość kapitału zakładowego</b>	Kapitał zakładowy spółki powinien wynosić co najmniej 5 000 złotych. Wartość nominalna udziału nie może być niższa niż 50 złotych .Kapitał zakładowy spółki dzieli się na udziały o równej albo nierównej wartości nominalnej.	Kapitał zakładowy spółki powinien wynosić co najmniej 100 000 złotych. Wartość nominalna akcji nie może być niższa niż 1 grosz Statut spółki może określać minimalną lub maksymalną wysokość kapitału zakładowego. Kapitał zakładowy spółki dzieli się na akcje o równej wartości nominalnej.
<b>Odpowiedzialność za zobowiązania</b>	Za zobowiązania spółki odpowiada spółka całym swoim majątkiem Jeżeli egzekucja przeciwko spółce okazała się bezskuteczna, członkowie zarządu odpowiadają solidarnie za jej zobowiązania.	Za zobowiązania spółki odpowiada spółka całym swoim majątkiem Akcjonariusze nie odpowiadają za zobowiązania spółki.
<b>Prowadzenie spraw i reprezentacja</b>	Walne zgromadzenie akcjonariuszy – organ uchwałodawczy Zarząd – organ zarządzający Umowa spółki może ustanowić radę nadzorczą lub komisję rewizyjną albo oba te organy. W spółkach, w których kapitał zakładowy przewyższa kwotę 500 000 złotych, a wspólników jest więcej niż dwudziestu pięciu, powinna być ustanowiona rada nadzorcza lub komisja rewizyjna.	Walne zgromadzenie akcjonariuszy – organ uchwałodawczy Rada nadzorcza – organ nadzorujący Zarząd – organ zarządzający
<b>Podział zysku i strat</b>	Wspólnik ma prawo do udziału w zysku wynikającym z rocznego sprawozdania finansowego i przeznaczonym do podziału uchwałą zgromadzenia wspólników. Jeżeli umowa spółki nie stanowi inaczej, zysk przypadający wspólnikom dzieli się w stosunku do udziałów.	Akcjonariusze mają prawo do udziału w zysku wykazanym w sprawozdaniu finansowym, zbadanym przez biegłego rewidenta, który został przeznaczony przez walne zgromadzenie do wypłaty akcjonariuszom.

Źródło: Kodeks spółek handlowych

## Podmioty ekonomii społecznej

W ramach ekonomii społecznej wyodrębnić można zbiór instytucji nazywany przedsiębiorstwami ekonomii społecznej (PES) lub po prostu przedsiębiorstwami społecznymi. Przedsiębiorstwo społeczne może być zdefiniowane, jako prywatna, autonomiczna organizacja dostarczająca produktów lub usług na rzecz szerszej społeczności (*community*), której założycielem albo zarządzającym jest grupa obywateli i w której zakres korzyści materialnych podlega ograniczeniom. Przedsiębiorstwo społeczne przywiązuje dużą wagę do swej autonomii i gotowość do przyjmowania ekonomicznego ryzyka związanego z prowadzoną w sposób ciągły działalnością społeczno – ekonomiczną (J. Wygnański, 2009).

11. Art. 151-300 KSH.

12. Art. 301-490 KSH.

## Stowarzyszenie

Stowarzyszenie jest dobrowolnym, samorządnym, trwałym zrzeszeniem o celach niezarobkowych<sup>13</sup>.

### Stowarzyszenie:

- ▶ samodzielnie określa swoje cele, programy działania i struktury organizacyjne,
- ▶ uchwała akty wewnętrzne dotyczące jego działalności,
- ▶ opiera swoją działalność na pracy społecznej członków.

Stowarzyszenie mogą założyć osoby pełnoletnie, które posiadają pełną zdolność do czynności prawnych. Osoby małoletnie (czyli od 16 do 18 lat), chociaż nie mogą samodzielnie zakładać stowarzyszenia, mogą do nich należeć. Mogą samodzielnie wybierać władze stowarzyszenia uczestnicząc w walnym zgromadzeniu członków stowarzyszenia.

**Tworzenie stowarzyszeń przyjmujących zasadę bezwzględnego posłuszeństwa ich członków wobec władz stowarzyszenia jest zakazane.**

**Stowarzyszenie zwykłe** może utworzyć, co najmniej trzech obywateli, którzy wspólnie chcą prowadzić działalność. Stowarzyszenie takie nie ma możliwości tworzenia oddziałów, zrzeszania osób prawnych, łączenia się w związki stowarzyszeń, prowadzenia działalności gospodarczej, korzystania z ofiarności publicznej, przyjmowania darowizn, dotacji, spadków i zapisów.

Środki na działalność mogą pochodzić wyłącznie ze składek członkowskich. Aby utworzyć stowarzyszenie zwykłe, założyciele muszą uzgodnić regulamin działalności, wskazać siedzibę oraz osobę do reprezentacji. Komplet dokumentów należy złożyć do starosty powiatu właściwego ze względu na siedzibę organizacji. W ciągu 30 dni od daty złożenia wniosku stowarzyszenie zwykłe może rozpocząć działalność, o ile starosta powiatu nie zakaze jego działalności (P. Szczyrski, 2009), natomiast nie może:

- ▶ powoływać terenowych jednostek organizacyjnych,
- ▶ łączyć się w związki stowarzyszeń,
- ▶ zrzeszać osób prawnych,
- ▶ prowadzić działalności gospodarczej,
- ▶ przyjmować darowizn, spadków i zapisów oraz otrzymywać dotacji, a także
- ▶ korzystać z ofiarności publicznej.

**Stowarzyszenie rejestrowe** może utworzyć co najmniej piętnaście osób posiadających pełną zdolność do czynności prawnych i nie pozbawionych praw publicznych. Osoby te uchwalają statut stowarzyszenia i wybierają komitet założycielski. Statut stowarzyszenia określa w szczególności:

- ▶ nazwę stowarzyszenia, odróżniającą je od innych stowarzyszeń, organizacji i instytucji,
- ▶ teren działania i siedzibę stowarzyszenia,
- ▶ cele i sposoby ich realizacji,
- ▶ sposób nabywania i utraty członkostwa, przyczyny utraty członkostwa oraz prawa i obowiązki członków,
- ▶ władze stowarzyszenia, tryb dokonywania ich wyboru, uzupełniania składu oraz ich kompetencje,
- ▶ sposób reprezentowania stowarzyszenia oraz zaciągania zobowiązań majątkowych, a także warunki ważności jego uchwał,
- ▶ sposób uzyskiwania środków finansowych oraz ustanawiania składek członkowskich,
- ▶ zasady dokonywania zmian statutu,
- ▶ sposób rozwiązania się stowarzyszenia.

Stowarzyszenie podlega wpisowi do KRS i z chwilą wpisu uzyskuje osobowość prawną. Komitet założycielski składa do sądu rejestrowego wnioski o rejestrację wraz ze statutem, listą założycieli, zawierającą imiona i nazwiska, datę i miejsce urodzenia, miejsce zamieszkania oraz własnoręczne podpisy założycieli, protokół z wyboru komitetu założycielskiego, a także informację o adresie tymczasowej siedziby stowarzyszenia.

Najwyższą władzą stowarzyszenia jest walne zebranie członków. W sprawach, w których statut nie określa

13. Ustawa z dnia 7 kwietnia 1989 r. Prawo o stowarzyszeniach (t.j. Dz. U. 2001 nr 79, poz. 855)

właściwości władz stowarzyszenia, podejmowanie uchwał należy do walnego zebrania członków. Stowarzyszenie jest obowiązane posiadać zarząd i organ kontroli wewnętrznej.

Nadzór nad działalnością stowarzyszeń należy do:

- ▶ wojewody właściwego ze względu na siedzibę stowarzyszenia w zakresie nadzoru nad działalnością stowarzyszeń jednostek samorządu terytorialnego,
- ▶ starosty właściwego ze względu na siedzibę stowarzyszenia w zakresie nadzoru nad innymi niż wymienionymi wyżej stowarzyszeniami.

Organ nadzorujący ma prawo:

- ▶ żądać dostarczenia przez zarząd stowarzyszenia, w wyznaczonym terminie, odpisów uchwał walnego zebrania członków (zebrania delegatów),
- ▶ żądać od władz stowarzyszenia niezbędnych wyjaśnień.

Majątek stowarzyszenia powstaje ze składek członkowskich, darowizn, spadków, zapisów, dochodów z własnej działalności, dochodów z majątku stowarzyszenia oraz ofiarności publicznej. Stowarzyszenie może prowadzić działalność gospodarczą. Dochód z działalności gospodarczej stowarzyszenia służy realizacji celów statutowych i nie może być przeznaczony do podziału między jego członków.

## Fundacja

Podstawą prawną działania fundacji jest ustawa o fundacjach<sup>14</sup>). Fundacja może być ustanowiona dla realizacji zgodnych z podstawowymi interesami Rzeczypospolitej Polskiej celów społecznie lub gospodarczo użytecznych, w szczególności, takich jak: ochrona zdrowia, rozwój gospodarki i nauki, oświata i wychowanie, kultura i sztuka, opieka i pomoc społeczna, ochrona środowiska oraz opieka nad zabytkami.

Fundację mogą ustanowić osoby fizyczne niezależnie od ich obywatelstwa i miejsca zamieszkania, bądź osoby prawne mające siedzibę w Polsce lub za granicą. Oświadczenie woli o ustanowieniu fundacji powinno być złożone w formie aktu notarialnego.

Fundator ustala statut fundacji, określający jej nazwę, siedzibę i majątek, cele zasady, formy i zakres działalności fundacji, skład i organizację zarządu, sposób powoływania oraz obowiązki i uprawnienia tego organu i jego członków. Statut może zawierać również inne postanowienia, w szczególności dotyczące prowadzenia przez fundację działalności gospodarczej, dopuszczalności i warunków jej połączenia z inną fundacją, zmiany celu lub statutu, a także przewidywać tworzenie obok zarządu innych organów fundacji.

Fundacja uzyskuje osobowość prawną z chwilą wpisania do Krajowego Rejestru Sądowego.

Działalnością fundacji kieruje jej zarząd, który również reprezentuje fundację na zewnątrz. Fundacja może prowadzić działalność gospodarczą w rozmiarach służących realizacji celów, przy czym postanowienie o prowadzeniu działalności gospodarczej musi być zawarte w statucie i uwidocznione w rejestrze.

## Spółdzielnie socjalne

Przedmiotem działalności spółdzielni socjalnej jest prowadzenie wspólnego przedsiębiorstwa w oparciu o osobistą pracę członków. Spółdzielnia socjalna działa na rzecz:

- ▶ społecznej reintegracji jej członków przez co należy rozumieć działania mające na celu odbudowanie i podtrzymanie umiejętności uczestniczenia w życiu społeczności lokalnej i pełnienia ról społecznych w miejscu pracy, zamieszkania lub pobytu,
- ▶ zawodowej reintegracji jej członków przez co należy rozumieć działania mające na celu odbudowanie i podtrzymanie zdolności do samodzielnego świadczenia pracy na rynku pracy

Spółdzielnia socjalna może prowadzić działalność społeczną i oświatowo kulturalną na rzecz swoich członków oraz ich środowiska lokalnego, a także działalność społecznie użyteczną w sferze zadań publicznych określonych w ustawie o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie<sup>15</sup>.

14. Ustawa z dnia 6 kwietnia 1984 r. o fundacjach (t.j. Dz. U. 1991 nr 46 poz. 203)

15. Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie (t.j. Dz. U. 2010 r. Nr 234 poz. 1536 ze zm.)

## Spółdzielnię socjalną mogą założyć m.in.:

- ▶ osoby bezrobotne
- ▶ osoby niepełnosprawne

Ponadto członkami spółdzielni socjalnej mogą zostać również inne osoby, nie należące do grup zagrożonych wykluczeniem, o ile liczba tych osób nie stanowi więcej niż 50% ogólnej liczby założycieli. Liczba założycieli spółdzielni socjalnej nie może być mniejsza niż pięć, jeżeli założycielami są osoby fizyczne, i dwa, jeżeli założycielami są osoby prawne. Spółdzielnia socjalna liczy nie mniej niż pięciu i nie więcej niż pięćdziesięciu członków.

## 1.5. Źródła finansowania

Praktyka gospodarcza przewiduje wiele możliwości finansowania działalności firmy, które różnią się przed wszystkim źródłem pochodzenia funduszy, kosztem pozyskania kapitału oraz pozycją prawną kapitałodawcy (M. Ciechan-Kujawa, 2007).

### Schemat 2. Wybrane wewnętrzne i zewnętrzne formy finansowanie przedsiębiorstwa

Wewnętrzny	Kapitał	
	Zewnętrzny własny	Zewnętrzny obcy
Kapitał pochodzący z wypracowanych zysków	Kapitał pozyskiwany w różny sposób w zależności od formy prawnej przedsiębiorstwa	Kapitał pozyskany na rynku finansowym
Akumulowany zysk	Emisja akcji	Kredyty i pożyczki
Odpisy amortyzacyjne	Subwencje i dotację	Faktoring
Rezerwy	Venture capital	Leasing

Źródło: Ciechan-Kujawa M., *Biznes plan*, Toruń 2007.

## Kredyt

Ustawa prawo bankowe<sup>16</sup> definiuje umowę kredytową, jako zobowiązanie się banku do oddania w dyspozycję kredytobiorcy, na czas oznaczony w umowie, określonej kwoty środków pieniężnych, z przeznaczeniem na ustalony cel, a kredytobiorca zobowiązuje się do korzystania z niej na warunkach określonych w umowie, do zwrotu kwoty wykorzystanego kredytu wraz z odsetkami w umownym terminie spłaty oraz do wpłaty prowizji od udzielonego kredytu.

Bank uzależnia przyznanie kredytu od zdolności kredytowej kredytobiorcy. Przez zdolność kredytową rozumie się zdolność do spłaty zaciągniętego kredytu wraz z odsetkami w terminach określonych w umowie. Kredytobiorca jest obowiązany przedłożyć na żądanie banku dokumenty i informacje niezbędne do dokonania oceny tej zdolności.

**Umowa kredytu** powinna być zawarta na piśmie i określać w szczególności:

- ▶ strony umowy,
- ▶ kwotę i walutę kredytu,
- ▶ cel, na który kredyt został udzielony,
- ▶ zasady i termin spłaty kredytu,
- ▶ wysokość oprocentowania kredytu i warunki jego zmiany,
- ▶ sposób zabezpieczenia spłaty kredytu,
- ▶ zakres uprawnień banku związanych z kontrolą wykorzystania i spłaty kredytu,
- ▶ terminy i sposób postawienia do dyspozycji kredytobiorcy środków pieniężnych,
- ▶ wysokość prowizji, jeżeli umowa ją przewiduje,

16. Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. - Prawo bankowe (t. j. Dz. U. 2012 nr 0 poz. 1376)

- ▶ warunki dokonywania zmian i rozwiązania umowy.

W czasie obowiązywania umowy kredytu kredytobiorca jest obowiązany przedstawić – na żądanie banku – informacje i dokumenty niezbędne do oceny jego sytuacji finansowej gospodarczej oraz umożliwiające kontrolę wykorzystania i spłaty kredytu.

W przypadku niedotrzymania przez kredytobiorcę warunków udzielenia kredytu albo w razie utraty przez kredytobiorcę zdolności kredytowej bank może obniżyć kwotę przyznanego kredytu albo wypowiedzieć umowę kredytu.

## **Rodzaje kredytów bankowych**

### **Podział ze względu na przedmiot kredytu:**

kredyt dla osób indywidualnych - przeznaczony na zakup dóbr i usług konsumpcyjnych. Najczęściej jest to kredyt gotówkowy, ratalny i w formie salda debetowego na rachunku oszczędnościowo-rozliczeniowym, np. kredyty mieszkaniowe, samochodowe, na zakup papierów wartościowych, studenckie,

- ▶ kredyt dla przedsiębiorstw- finansujący działalność gospodarczą.
- ▶ Podział ze względu na okres kredytowania:
- ▶ kredyt krótkoterminowy- okres kredytowania nie przekracza najczęściej jednego roku,
- ▶ kredyt średnioterminowy- w tym przypadku termin kredytowania wynosi od jednego do trzech (lub pięciu) lat,
- ▶ kredyt długoterminowy- jest udzielany na okres przekraczający trzy (pięć) lat.

### **Podział w oparciu o walutę, w której udzielany jest kredyt:**

- ▶ kredyt w walucie krajowej- udzielany w złotych polskich,
- ▶ kredyt dewizowy- realizowany jest w walutach obcych,
- ▶ kredyt denominowany- udzielany jest w walucie zagranicznej, natomiast wypłata następuje w walucie krajowej, jako równowartość kredytu według kursu obowiązującego w dniu wypłaty.

### **Podział ze względu na sposób przekazywania środków pieniężnych:**

- ▶ kredyt gotówkowy, zapewniający kredytobiorcy otrzymanie kwoty kredytu bezpośrednio z kasy banku lub przełanie jej na jego rachunek,
- ▶ kredyt bezgotówkowy, w którym to kwota kredytu zostaje przełana przez bank na rachunek kontrahenta kredytobiorcy lub dostawcy dóbr i usług, których to zakup został sfinansowany.

### **Podział ze względu na przeznaczenie kredytu:**

- ▶ kredyt w rachunku bieżącym nierozzerwalnie wiąże się z koniecznością prowadzenia przez bank kredytujący rachunku bieżącego kredytobiorcy. Podstawowym celem kredytu w rachunku bieżącym jest utrzymanie bieżącej płynności przedsiębiorstwa,
- ▶ kredyt w rachunku kredytowym zostaje uruchamiany przez założenie kredytobiorcy wyodrębnionego rachunku bankowego, który służy do ewidencjonowania przebiegu wykorzystania i spłaty tego zaciągniętego zobowiązania,
- ▶ kredyt inwestycyjny jest to usługa, która daje możliwość finansowania nakładów gospodarczych mających na celu stworzenie bądź to nowego przedsiębiorstwa, bądź powiększenie już istniejącego majątku trwałego. Generalizując, w ofercie bankowej ten kredyt dostępny jest pod trzema postaciami:
- ▶ kredytu na wyposażenie, przeznaczonego na modernizację, czy też zakup sprzętu, nabycie lub budowę majątku trwałego,
- ▶ kredytu na restrukturyzację, wykorzystywanego na przebudowę struktury gospodarczej przedsiębiorstwa celem odzyskania równowagi finansowej,
- ▶ kredytu przeznaczonego na zakup czy budowę obiektów przemysłowych i rolnych.

### **Podział ze względu na sposób spłaty kredytu:**

- ▶ kredyt o stałych bądź zmiennych ratach kapitałowych,
- ▶ kredyt o stałej lub zmiennej stopie procentowej,
- ▶ kredyt, w którym odsetki płacone są „z góry” (tzw. odsetki dyskontowe) bądź „dołu”, o ustalonych ratach w trakcie trwania umowy kredytowej,
- ▶ kredyt annuitetowy, w którym łączne spłaty kapitału i odsetek są jednakowe.

## Podział z uwzględnieniem sposobu wykorzystania kredytu:

kredyt jednorazowy w całości wykorzystywany w jednym, określonym w umowie terminie,

kredyt wykorzystywany w transzach, czyli częściach, w których środki finansowe stawiane są do dyspozycji.

## Podział w oparciu o sposób zabezpieczenia spłaty kredytu:

- ▶ Kredyt lombardowy występuje wtedy, gdy umowa kredytowa została zabezpieczony zastawem. Cechą charakterystyczną tego kredytu jest fakt, iż przedmiot zastawu powinien znajdować się w posiadaniu banku.
- ▶ Kredyt hipoteczny ma charakter inwestycyjny i udzielany jest pod zabezpieczenie hipoteczne, gwarantując bankowi zwrot należności nawet wtedy, gdy nieruchomość zmieni właściciela. (J. Grzywacz, Warszawa 2003)

## Pożyczka

Przez umowę **pożyczki** dający pożyczkę zobowiązuje się przenieść na własność biorącego, określoną ilość pieniędzy albo rzeczy oznaczonych tylko co do gatunku, a biorący zobowiązuje się zwrócić tę samą ilość pieniędzy albo tę samą ilość rzeczy tego samego gatunku i tej samej jakości (art. 720 KC).

Tabela 6. Porównanie kredytu bankowego i pożyczki bankowej

Kryterium	Kredyt	Pożyczka
Prawo do środków pieniężnych	do dyspozycji kredytobiorcy stawiana jest określona kwota środków pieniężnych w postaci bezgotówkowego pieniądza bankowego	Na pożyczkobiorcę przenoszona jest własność określonej ilości pieniędzy
Cel i przeznaczenie	Dokładnie sprecyzowany we wniosku kredytowym i umowie	Brak wymogu sprecyzowania celu
Zdolność kredytowa	Wymóg posiadania zdolności kredytowej	Brak wymogu posiadania zdolności kredytowej
Wykorzystanie środków	Na zasadach i warunkach wynikających z umowy	Brak wymogu od określenia sposobu wykorzystania środków
Odpłatność	Odpłatny	Może być nieodpłatny
Spłata kapitału	W ratach kapitałowych	Zazwyczaj jednorazowo

Źródło: L. Pawłowicz(red.), *Ekonomika przedsiębiorstw. Zagadnienia wybrane*, Gdańska 2001.

## Venture capital

Venture capital jest jednym z nowoczesnych źródeł finansowania działalności przedsiębiorstw. Można go zdefiniować jak kapitał własny, wnoszony na ograniczony okres przez inwestorów zewnętrznych do przedsiębiorstw dysponujących innowacyjnym produktem, metoda produkcji bądź usługą, które nie zostały zweryfikowane jeszcze przez rynek, a więc stwarzają wysokie ryzyko niepowodzenia inwestycji, ale jednocześnie w przypadku sukcesu przedsięwzięcia, wspomaganego w zarządzaniu przez inwestorów, zapewniają znaczny przyrost wartości zainwestowanego kapitału, który jest realizowany poprzez sprzedaż udziałów (J. Węclawski, 1997).

## Leasing

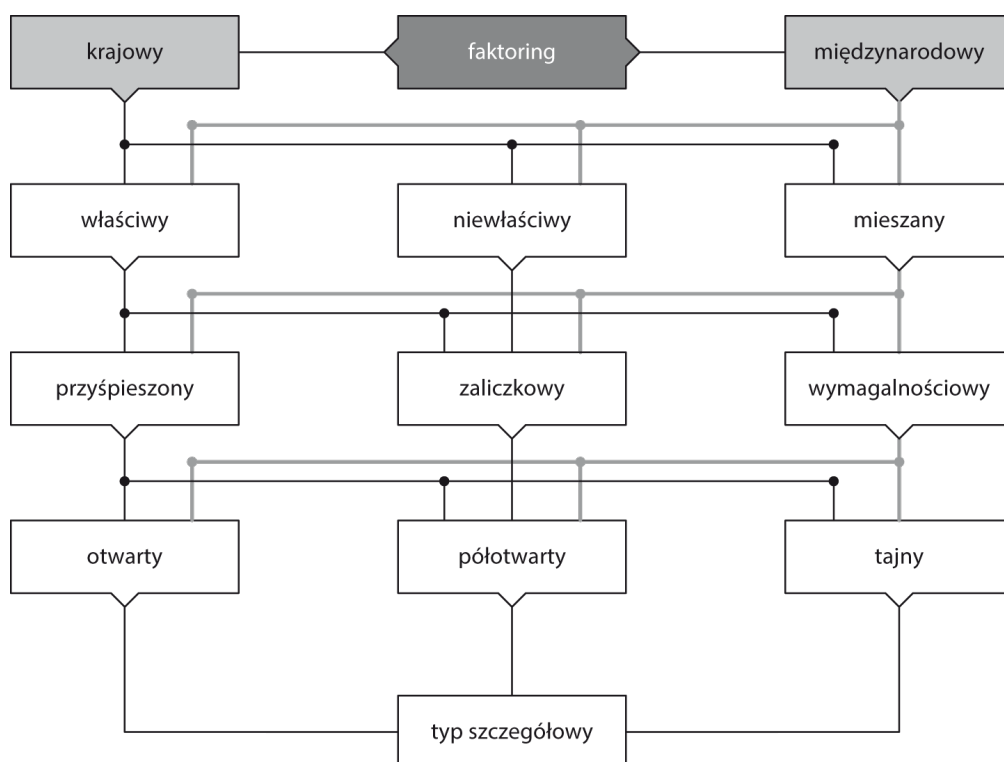
Przez umowę leasingu finansujący zobowiązuje się, w zakresie działalności swego przedsiębiorstwa, nabyć rzecz od oznaczonego zbywcy na warunkach określonych w tej umowie i oddać tę rzecz korzystającemu do używania albo używania i pobierania pożytków przez czas oznaczony, a korzystający zobowiązuje się zapłacić finansującemu w uzgodnionych ratach wynagrodzenie pieniężne, równe co najmniej cenie lub wynagrodzeniu z tytułu nabycia rzeczy przez finansującego (art. 709 KC).

## Faktoring

Faktoring określany jest, jako rodzaj działalności polegającej na bezpośrednim zakupie przez banki lub instytucje finansowe wierzytelności klientów, przypadających z tytułu dostawy towarów czy usług dla odbiorców, z jednoczesnym świadczeniem na rzecz klientów co najmniej dwóch usług spośród wymienionych: inkasowych, księgowych, doradczych, marketingowych. Istotą faktoringu jest zatem krótkoterminowe finansowanie dostaw towarów przez podmiot, który pośredniczy w procesie rozliczeń finansowych pomiędzy dostawcą a odbiorcą (M. Tokarski, 2005).

Faktoring jest to transakcja, w której przedsiębiorca przenosi, bądź może przenieść wierzytelności na instytucję finansową, albo pożyczka pieniędzy pod zastaw wierzytelności jako zabezpieczenie dla tej pożyczki. W obu tych przypadkach firma zyskuje gotówkę, nie czekając aż należności zostaną ściągnięte od dłużnika (B. Kłosowska, 1996).

### Schemat 3. Rodzaje faktoringu



Źródło: Tokarski M., Faktoring w małych i średnich przedsiębiorstwach, Kraków 2005.

## Fundusze europejskie

Środki finansowe Unii Europejskiej gromadzone są przez państwa członkowskie i przekazywane do unijnego budżetu. Według prawa środki te stanowią zasoby własne Unii Europejskiej. Na co Unia Europejska przeznacza zebrane środki? W głównej mierze na realizację wspólnej polityki rolnej (w tym rybactwa i rybołówstwa), a także polityki spójności<sup>17</sup>, które mają pomóc w podniesieniu konkurencyjności Unii Europejskiej oraz wpływając pozytywnie na rozwój m.in. rolnictwa, kultury, infrastruktury, szkolnictwa, wymiaru bezpieczeństwa<sup>18</sup>.

17. Polityka spójności ma na celu wspieranie działań prowadzących do wyrównania warunków ekonomicznych i społecznych we wszystkich regionach Unii Europejskiej. W szczególności Unia Europejska zmierza do zmniejszenia różnic w poziomie rozwoju regionów oraz likwidacji zacofania najmniej uprzywilejowanych regionów i wysp, w tym obszarów wiejskich.

18. <http://www.funduszeuropejskie.gov.pl/OrganizacjaFunduszyEuropejskich/Strony/czysafundusze.aspx>, 20.03.2013.



**Szerzej o Funduszach europejskich  
zobacz na stronie:  
[www.funduszeuropejskie.gov.pl](http://www.funduszeuropejskie.gov.pl)**

### **Dotacja z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki**

Osoby zamierzające założyć działalność gospodarczą, mogą starać się jej dofinansowanie korzystając z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, którego elementem jest Działanie 6.2 – „Wsparcie oraz promocja przedsiębiorczości i samozatrudnienia”. Priorytetowym celem tego programu jest promocja, a także wsparcie inicjatyw i działań dążących do tworzenia miejsc pracy oraz budowania postaw kreatywnych, służących nie tylko rozwojowi przedsiębiorczości, ale i samozatrudnienia. Wsparcie z Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki obejmuje szereg działań i instrumentów dających możliwość skorzystania z:

- ▶ doradztwa i szkoleń umożliwiających zdobycie wiedzy i umiejętności potrzebnych do założenia i prowadzenia działalności gospodarczej,
- ▶ przyznania środków finansowych na rozwój przedsiębiorczości do wys. do 40 tys. zł.
- ▶ wsparcia pomostowego w okresie pierwszych 6 do 12 miesięcy od rozpoczęcia działalności gospodarczej, obejmującego finansowe wsparcie pomostowe wypłacane miesięcznie w kwocie nie większej niż równowartość minimalnego wynagrodzenia obowiązującego na dzień wypłacenia dotacji, połączone z doradztwem oraz pomocą w efektywnym wykorzystaniu dotacji

**Szerzej o Programie Operacyjnym  
Kapitał Ludzki  
zobacz na stronie:  
[www.efs.gov.pl](http://www.efs.gov.pl)**

### **Dotacja z Programu Innowacyjna Gospodarka**

Głównym celem Programu Innowacyjna Gospodarka jest stymulowanie rozwoju polskiej gospodarki w oparciu o innowacyjne przedsięwzięcia. Cele szczegółowe tego programu to:

- ▶ zwiększenie innowacyjności przedsiębiorstw,
- ▶ wzrost konkurencyjności polskiej nauki,
- ▶ zwiększenie roli nauki w rozwoju gospodarczym,
- ▶ zwiększenie udziału innowacyjnych produktów polskiej gospodarki w rynku międzynarodowym
- ▶ tworzenie trwałych i lepszych miejsc pracy
- ▶ wzrost wykorzystania technologii informacyjnych i komunikacyjnych w gospodarce.

Program Innowacyjna Gospodarka to dziewięć osi priorytetowych, z których każda koncentruje się na dofinansowaniu pewnych typów projektów realizując tym samym wyznaczone cele szczegółowe Programu<sup>19</sup>.

Jednym z celów ósmej osi priorytetowej Program Innowacyjna Gospodarka jest stymulowanie rozwoju gospodarki elektronicznej poprzez wspieranie tworzenia nowych, innowacyjnych e-usług, innowacyjnych rozwiązań elektronicznego biznesu oraz zmniejszanie technologicznych, ekonomicznych i mentalnych barier wykorzystywania e-usług w społeczeństwie, czyli tego co popularnie nazywamy e-biznesem.

**E-biznes** to nic innego jak prowadzenie biznesu opierającego się na rozwiązaniach teleinformatycznych, w szczególności aplikacjach internetowych.

Najczęściej spotykanymi i najbardziej popularnymi e-usługami są<sup>20</sup>:

- ▶ tworzenie witryn internetowych,
  - ▶ np. [www.html.pl](http://www.html.pl),

19. Szerzej zobacz: [www.poig.gov.pl](http://www.poig.gov.pl).

20. R. Flis, J. Szut, B. Mazurek-Kucharska, J. Kuciński, E-usługi – definicja i przykłady, [http://www.web.gov.pl/g2/big/2009\\_12/e128419bc4aca1881822862d-9da143f5.pdf](http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/e128419bc4aca1881822862d-9da143f5.pdf), 20.03.2013.

- ▶ zdalne dostarczanie oraz aktualizacja oprogramowania,
  - ▶ np. [www.dobreprogramy.pl](http://www.dobreprogramy.pl), [www.programosy.pl](http://www.programosy.pl), [www.eprogramy.org](http://www.eprogramy.org), [www.pobieralnia.pl](http://www.pobieralnia.pl);
- ▶ zdalne zarządzanie systemami,
  - ▶ np. [www.calltech.com.pl](http://www.calltech.com.pl), [www.elzab.com.pl](http://www.elzab.com.pl),
- ▶ hurtownie danych on-line, umożliwiające elektroniczne przechowywanie i wyszukiwanie konkretnych danych
  - ▶ np. [www.chomik.pl](http://www.chomik.pl),
- ▶ dostarczanie on-line przestrzeni na dysku na żądanie,
  - ▶ np. [www.msejf.pl](http://www.msejf.pl), [www.bekaper.pl](http://www.bekaper.pl),
- ▶ zdalne testowanie i konserwacja hardware i oprogramowania,
  - ▶ np. [www.hddlif.com](http://www.hddlif.com), [www.memtest86.com](http://www.memtest86.com), [www.crystalmark.info](http://www.crystalmark.info), [www.zurawek.com](http://www.zurawek.com), [www.ccleaner.com](http://www.ccleaner.com),
- ▶ uzyskiwanie dostępu i pobieranie muzyki na komputery i telefony komórkowe,
  - ▶ np. [www.emusic.com](http://www.emusic.com), [www.mp3.pl](http://www.mp3.pl), [www.soho.pl](http://www.soho.pl), [www.lastfm.com](http://www.lastfm.com),
- ▶ uzyskiwanie dostępu i pobieranie sygnałów dźwiękowych, urywków nagrań, dzwonek i innych dźwięków,
  - ▶ np. [www.papla.pl](http://www.papla.pl), [www.dzwonki-na-telefon.pl](http://www.dzwonki-na-telefon.pl), [www.dzwonki.pl](http://www.dzwonki.pl), [www.wapster.pl](http://www.wapster.pl),
- ▶ uzyskiwanie dostępu i pobieranie filmów,
  - ▶ np. [www.kinomaniak.info](http://www.kinomaniak.info), [www.youtube.pl](http://www.youtube.pl)
- ▶ pobieranie gier na komputery i telefony komórkowe,
  - ▶ np. [www.komorki.aeri.pl](http://www.komorki.aeri.pl), [www.gryzonie.pl](http://www.gryzonie.pl), [www.gryjava.e-gry.ne](http://www.gryjava.e-gry.ne), [www.mobilnehity.pl](http://www.mobilnehity.pl), [www.pobieralnia.pl](http://www.pobieralnia.pl),
- ▶ uzyskiwanie dostępu do automatycznych gier on-line, które wymagają użycia Internetu lub innych podobnych sieci elektronicznych, gdy gracze są od siebie oddaleni,
  - ▶ np. [www.gry-online.pl](http://www.gry-online.pl), [www.gryonline.wp.pl](http://www.gryonline.wp.pl), [www.gryonline.boja.pl](http://www.gryonline.boja.pl),
- ▶ uzyskiwanie dostępu i pobieranie motywów pulpitów,
  - ▶ np. [www.eprogramy.org](http://www.eprogramy.org), [www.bitfone.dmkhosting.com](http://www.bitfone.dmkhosting.com), [www.tapety4U.webpark.pl](http://www.tapety4U.webpark.pl),
- ▶ dostarczanie książek w formie cyfrowej i innych publikacji elektronicznych,
  - ▶ np. [www.ebook.pl](http://www.ebook.pl), [www.bookini.pl](http://www.bookini.pl), [www.iik.pl](http://www.iik.pl), [www.ebook.kuponline.pl](http://www.ebook.kuponline.pl), [www.audioteka.pl](http://www.audioteka.pl), [www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl),
- ▶ prenumerata gazet i czasopism on-line,
  - ▶ np. [www.witryna.czasopism.pl](http://www.witryna.czasopism.pl), [www.top-kiosk.pl](http://www.top-kiosk.pl), [www.prasa.partnerzy.netpress.pl](http://www.prasa.partnerzy.netpress.pl),
- ▶ zdalne dzienniki logowania i statystyki odwiedzania stron internetowych,
  - ▶ np. [www.home.pl](http://www.home.pl), [www.stat24.com](http://www.stat24.com), [www.7point.pl](http://www.7point.pl), [www.stat.4u.pl](http://www.stat.4u.pl), [www.linker.pl](http://www.linker.pl), [www.freestat.pl](http://www.freestat.pl), [www.trafiq.pl](http://www.trafiq.pl);
- ▶ wiadomości, informacje o sytuacji na drogach oraz prognozy pogody on-line (także web-serwisy),
  - ▶ np. [www.nadrogach.pap.pl](http://www.nadrogach.pap.pl), [www.motofirma.pl](http://www.motofirma.pl), [www.gddkia.gov.pl](http://www.gddkia.gov.pl), [www.pogoda.onet.pl](http://www.pogoda.onet.pl), [www.twojapogoda.pl](http://www.twojapogoda.pl), [www.new.meteo.pl](http://www.new.meteo.pl), [www.pogodynka.pl](http://www.pogodynka.pl), [www.imgw.pl](http://www.imgw.pl);
- ▶ informacje generowane automatycznie on-line przez oprogramowanie po wprowadzeniu przez klienta określonych danych, takich jak dane prawne lub finansowe (w szczególności stale uaktualniane kursy giełdowe)
  - ▶ np. [www.inwestycje.pl](http://www.inwestycje.pl), [www.gpw.pl](http://www.gpw.pl), [www.pl.saxobank.com](http://www.pl.saxobank.com),
- ▶ dostarczanie przestrzeni reklamowej, szczególnie banerów reklamowych na stronach lub witrynach internetowych,
  - ▶ np. [www.reklamania.pl](http://www.reklamania.pl), [www.adwords.google.com](http://www.adwords.google.com), [www.blogvertising.pl](http://www.blogvertising.pl),
- ▶ wyszukiwarki i katalogi internetowe,
  - ▶ np. [www.google.pl](http://www.google.pl), [www.ask.pl](http://www.ask.pl), [www.netsprint.pl](http://www.netsprint.pl), [www.szukacz.pl](http://www.szukacz.pl),
- ▶ automatyczna instalacja on-line zabezpieczeń typu firewall,
  - ▶ np. [www.pctools.com](http://www.pctools.com), [www.zonealarm.com](http://www.zonealarm.com), [www.ashampoo.com](http://www.ashampoo.com);
- ▶ dostarczanie informacji politycznych, kulturalnych, artystycznych, sportowych, naukowych, rozrywkowych itp.,
  - ▶ np. [www.se.pl](http://www.se.pl), [www.fakty.interia.pl](http://www.fakty.interia.pl), [www.gazeta.pl](http://www.gazeta.pl), [www.news.portalisko.pl](http://www.news.portalisko.pl), [www.polityka.pl](http://www.polityka.pl), [www.lubin.on-line.pl](http://www.lubin.on-line.pl), [www.mmWarszawa.pl](http://www.mmWarszawa.pl), [www.cojestgrane.pl](http://www.cojestgrane.pl), [www.labforculture.org](http://www.labforculture.org), [www.filmweb.pl](http://www.filmweb.pl), [www.machina.pl](http://www.machina.pl), [www.bulgaricus.com](http://www.bulgaricus.com), [www.sport.pl](http://www.sport.pl), [www.sport.onet.pl](http://www.sport.onet.pl), [www.sports.pl](http://www.sports.pl), [www.dzienniksport.com](http://www.dzienniksport.com), [www.nauka.hotnews.pl](http://www.nauka.hotnews.pl), [www.nauka.gildia.pl](http://www.nauka.gildia.pl), [www.nauka.pl](http://www.nauka.pl);

- ▶ systemy on-line ocen: polityków, nauczycieli, lekarzy, filmów, książek,
  - ▶ np. [www.dobrzypolitycy.pl](http://www.dobrzypolitycy.pl), [www.sondawyborcza.pl](http://www.sondawyborcza.pl), [www.ocen.pl](http://www.ocen.pl), [www.obelfrach.pl](http://www.obelfrach.pl), [www.konsylium24.pl](http://www.konsylium24.pl), [www.rankinglekarzy.pl](http://www.rankinglekarzy.pl), [www.filmweb.pl](http://www.filmweb.pl), [www.filmus.pl](http://www.filmus.pl), [www.wik.com.pl](http://www.wik.com.pl),
- ▶ fora dyskusyjne,
  - ▶ np. [www.forum.gazeta.pl](http://www.forum.gazeta.pl), [www.forumowisko.pl](http://www.forumowisko.pl), [www.tygodnikforum.pl](http://www.tygodnikforum.pl),
- ▶ systemy generujące fora i sondy na stronie klienta,
  - ▶ np. [www.fora.pl](http://www.fora.pl), [www.pun.pl](http://www.pun.pl), [www.iq24.pl](http://www.iq24.pl), [www.sonda.pl](http://www.sonda.pl), [www.99polls.com](http://www.99polls.com), [www.poll daddy.com](http://www.poll daddy.com),
- ▶ automatyczne biura przyjmowania zamówień taksówek,
  - ▶ np. [www.wawataxi.pl](http://www.wawataxi.pl), [www.onlinetaxi.eu](http://www.onlinetaxi.eu),
- ▶ usługi dla nowożeńców,
  - ▶ np. [www.netwesele.pl](http://www.netwesele.pl), [www.slub.biznesport.pl](http://www.slub.biznesport.pl),
- ▶ dostarczanie przepisów kulinarnych,
  - ▶ np. [www.KochaniePrzezGotowanie.pl](http://www.KochaniePrzezGotowanie.pl), [www.unclebens.pl](http://www.unclebens.pl), [www.smaczny.pl](http://www.smaczny.pl), [www.dobrakuchnia.com](http://www.dobrakuchnia.com), [www.przepisy.org](http://www.przepisy.org), [www.cprzepis1.pl](http://www.cprzepis1.pl),
- ▶ porównywarki cenowe wraz z opiniami klientów,
  - ▶ np. [www.skapiec.pl](http://www.skapiec.pl), [www.nokaut.pl](http://www.nokaut.pl), [www.cokupic.pl](http://www.cokupic.pl), [www.poile.pl](http://www.poile.pl), [www.cenohit.pl](http://www.cenohit.pl), [www.ceneo.pl](http://www.ceneo.pl), [www.oferciak.pl](http://www.oferciak.pl),
- ▶ porady w doborze ubezpieczenia (kalkulatory, porównywarki)
  - ▶ np. [www.cuk.com.pl](http://www.cuk.com.pl), [www.ipolisa.pl](http://www.ipolisa.pl), [www.wygodnie.pl](http://www.wygodnie.pl), [www.auto-motor-i-sport.pl](http://www.auto-motor-i-sport.pl), [www.ikonto.com.pl](http://www.ikonto.com.pl),
- ▶ sprzedaż ubezpieczeń,
  - ▶ np. [www.allianzdirect.pl](http://www.allianzdirect.pl), [www.ubezpieczeniaonline.pl](http://www.ubezpieczeniaonline.pl), [www.wygodnie.pl](http://www.wygodnie.pl),
- ▶ branżowe e-oferty pracy,
  - ▶ np. [www.pracuj.pl](http://www.pracuj.pl), [www.Praca.Allegro.pl](http://www.Praca.Allegro.pl), [www.infopraca.pl](http://www.infopraca.pl), [www.praca.monsterpolska.pl](http://www.praca.monsterpolska.pl), [www.jobs4it.pl](http://www.jobs4it.pl), [www.job.org.pl](http://www.job.org.pl), [www.job.com](http://www.job.com), [www.jobpilot.pl](http://www.jobpilot.pl),
- ▶ e-zdrowie, w tym e-konsultacje medyczne, e-opieka medyczna, elektroniczne recepty, informacje medyczne dla lekarzy i pacjentów, informatory o jednostkach medycznych, kontrola stanu zdrowia pacjenta, usługi skierowane bezpośrednio do pacjentów (elektroniczne konta zdrowotne, medyczne portale informacyjne i edukacyjne, apteki internetowe, BMI (Body Mass Index), rejestracja online:
  - ▶ np. [www.imed24.pl](http://www.imed24.pl), [www.emanus.pl](http://www.emanus.pl), [www.doz.pl](http://www.doz.pl), [www.fabrykadiet.pl](http://www.fabrykadiet.pl), [www.pulsmed.com.pl](http://www.pulsmed.com.pl), [www.bmi.pasiasty.pl](http://www.bmi.pasiasty.pl), [www.synaptis.eu](http://www.synaptis.eu), [www.medicalonline.pl](http://www.medicalonline.pl), [www.pfm.pl](http://www.pfm.pl), [www.telemedycyna.krakow.pl](http://www.telemedycyna.krakow.pl), [www.telemedycyna.wlkp.pl](http://www.telemedycyna.wlkp.pl),
- ▶ e-usługi związane z bankowością, inwestowaniem elektronicznym (w tym papiery wartościowe, fundusze inwestycyjne), doradztwem finansowym (w tym oferty dotyczące kredytów, lokat, ubezpieczeń, inwestycji), aukcjami kredytowymi (kredytobiorca jest inicjatorem, a banki przedstawiają oferty), zarządzaniem własnymi finansami, dokonywaniem płatności elektronicznych,
  - ▶ np. [www.mBank.pl](http://www.mBank.pl), [www.Inteligo.pl](http://www.Inteligo.pl), [www.toyotabank.pl](http://www.toyotabank.pl), [www.kokos.pl](http://www.kokos.pl), [www.xelion.pl](http://www.xelion.pl), [www.opiekuninwestora.pl](http://www.opiekuninwestora.pl), [www.inwestycje.pl](http://www.inwestycje.pl), [www.Investors.pl](http://www.Investors.pl), [www.przelewy24.pl](http://www.przelewy24.pl), [www.paypal.pl](http://www.paypal.pl), [www.openfinance.pl](http://www.openfinance.pl), [www.invigo.pl](http://www.invigo.pl),
- ▶ e-learning , czyli automatyczne nauczanie na odległość,
  - ▶ np. [www.prestin.pl](http://www.prestin.pl), [www.edulandia.pl](http://www.edulandia.pl), [www.supermemo.net.pl](http://www.supermemo.net.pl), [www.kursy-online.pl](http://www.kursy-online.pl), [www.kursy-online.4system.com](http://www.kursy-online.4system.com), [www.eskk.pl](http://www.eskk.pl), [www.Profeo.pl](http://www.Profeo.pl), [www.menedzer.pl](http://www.menedzer.pl), [www.szkoła-online.pl](http://www.szkoła-online.pl), [www.pou.pl](http://www.pou.pl), [www.studiaonline.info](http://www.studiaonline.info),
- ▶ e-usługi związane z przemysłem turystycznym,
  - ▶ np. [www.eturystyka.org](http://www.eturystyka.org), [www.done.pl](http://www.done.pl), [www.Cosinus.pl/Turystyka](http://www.Cosinus.pl/Turystyka), [www.e-turystyka.net](http://www.e-turystyka.net), [www.bilety.eturystyka.org](http://www.bilety.eturystyka.org), [www.cyberpodroze.pl](http://www.cyberpodroze.pl), [www.booking.com/Hotele](http://www.booking.com/Hotele), [www.Hotels.com/PL](http://www.Hotels.com/PL), [www.hotel.pl](http://www.hotel.pl),
- ▶ e-handel, w tym aukcje i sklepy,
  - ▶ np. [www.fruli.pl](http://www.fruli.pl), [www.allegro.pl](http://www.allegro.pl), [www.swistak.pl](http://www.swistak.pl), [www.ebay.pl](http://www.ebay.pl), [www.aukcje.org](http://www.aukcje.org), [www.podbij.pl](http://www.podbij.pl), [www.sprzedam.pl](http://www.sprzedam.pl), [www.zakupy.pl](http://www.zakupy.pl), [www.pinia.pl](http://www.pinia.pl), [www.zakupyprzezinternet.info](http://www.zakupyprzezinternet.info),
- ▶ e-logistyka,
  - ▶ np. [www.e-logistyka.pl](http://www.e-logistyka.pl), [www.lcs.pl](http://www.lcs.pl), [www.2msystem.pl](http://www.2msystem.pl), [www.dcl.pl](http://www.dcl.pl), [www.exepol.eu](http://www.exepol.eu),
- ▶ e-radio,
  - ▶ np. [www.tuba.fm](http://www.tuba.fm), [www.nadaje.com](http://www.nadaje.com), [www.dbbroadcast.com](http://www.dbbroadcast.com), [www.live365.com](http://www.live365.com), [www.polskastacja.pl](http://www.polskastacja.pl),

- ▶ e-telewizja,
  - ▶ np. [www.totaltv.biz](http://www.totaltv.biz), [www.megawypas.pl](http://www.megawypas.pl), [www.telewizja-przez-internet.pl](http://www.telewizja-przez-internet.pl),
- ▶ Serwisy społecznościowe inaczej web. 2.0, w tym tematyczne i hobbystyczne,
  - ▶ np. [www.nasza-klasa.pl](http://www.nasza-klasa.pl), [www.tripy.pl](http://www.tripy.pl), [www.profeo.pl](http://www.profeo.pl), [www.szafa.pl](http://www.szafa.pl), [www.grono.net](http://www.grono.net), [www.wawka.pl](http://www.wawka.pl), [www.epuls.pl](http://www.epuls.pl), [www.wikipedia.pl](http://www.wikipedia.pl), [www.youtube.pl](http://www.youtube.pl), [www.facebook.pl](http://www.facebook.pl),
- ▶ Serwisy randkowe,
  - ▶ np. [www.sympatia.pl](http://www.sympatia.pl), [www.fotoflirt.pl](http://www.fotoflirt.pl), [www.moje-randki.pl](http://www.moje-randki.pl);
- ▶ ogłoszenia w Internecie,
  - ▶ np. [www.olx.pl](http://www.olx.pl), [www.Favore.pl](http://www.Favore.pl), [www.ojej.pl](http://www.ojej.pl), [www.i-Bazar.pl](http://www.i-Bazar.pl).

Zanim zapadnie decyzja o założeniu e-biznesu , potrzebne są przemyślane odpowiedzi na kilka podstawowych pytań:

- ▶ Jaki mam pomysł na swój e-biznes?
- ▶ Jakie produkty będę oferował?
- ▶ Czy istnieją już e-biznes podobny do tego, który pragnę otworzyć, a jeśli tak, to w czym mój będzie się od nich odróżniał?
- ▶ Kim będą odbiorcy moich towarów i w jaki sposób przekonam ich do realizacji zakupów?
- ▶ W jaki sposób pozyskam dostawców oferowanych przez mnie towarów?
- ▶ Jeśli przyszły e-przedsiębiorca uzyskał odpowiedzi na powyższe pytania, które pokrótce

określają zakres i strategię biznesową, konieczne jest nie tylko zapoznanie się przepisami prawnymi, które będą regulować funkcjonowanie e-biznes, ale przede wszystkim założenie działalności gospodarczej<sup>21</sup>.

**Szerzej o Programie Innowacyjna  
Gospodarka zobacz na stronie:  
[www.poig.gov.pl](http://www.poig.gov.pl)**

## **Dotacja z Funduszu Pracy**

Osobom bezrobotnym mogą być przyznane jednorazowo środki z Funduszu Pracy na podjęcie działalności gospodarczej, w tym na pokrycie kosztów pomocy prawnej, konsultacji oraz doradztwa, związanych z podjęciem przez niego planowanej działalności<sup>22</sup>.

Bezrobotny zamierzający podjąć działalność gospodarczą, może złożyć do starosty właściwego ze względu na miejsce zamieszkania lub pobytu, albo ze względu na miejsce prowadzenia działalności, wniosek o dofinansowanie.

### We wniosku należy określić:

- ▶ kwotę wnioskowanej pomocy,
- ▶ rodzaj działalności gospodarczej, którą wnioskodawca zamierza podjąć,
- ▶ ponadto dokonać kalkulacja kosztów związanych z rozpoczęciem działalności,
- ▶ wskazać źródła ich finansowania,
- ▶ działania podjęte w związku z podjęciem działalności.

Dodatkowo we wniosku należy :

- ▶ przedstawić specyfikację i harmonogram zakupów w ramach wnioskowanej dotacji
- ▶ wskazać formę zabezpieczenia zwrotu refundacji (weksel z poręczeniem wekslowym, gwarancję bankową, zastaw na prawach lub rzeczach, blokadę rachunku bankowego, akt notarialny o poddaniu się egzekucji przez dłużnika)

Przyznanie dofinansowania jest dokonywane na podstawie umowy zawartej przez Urząd Pracy z bezrobotnym.

21. K. Trzeciak, Rozpoczęcie sprzedaży w Internecie, [http://www.web.gov.pl/g2/big/2012\\_12/a595cf7ca3ff930ea4ae9b23bd92bd8b.pdf](http://www.web.gov.pl/g2/big/2012_12/a595cf7ca3ff930ea4ae9b23bd92bd8b.pdf), 20.03.2013; P.Wagłowski

Prawne aspekty prowadzenia e-biznesu, [http://www.web.gov.pl/g2/big/2009\\_12/cf917750d5daa7ec3cf21f4ac404efff.pdf](http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/cf917750d5daa7ec3cf21f4ac404efff.pdf), 20.03.2013.

22. Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy( t.j. Dz. U. 2008 nr 69 poz. 415)

Wysokość przyznanej dotacji określona w umowie nie może być wyższą niż 6-krotność wysokości przeciętnego wynagrodzenia w poprzednim kwartale, które obowiązuje od pierwszego dnia następnego miesiąca po ogłoszeniu przez Prezesa GUS w Monitorze Polskim. Aktualna wysokość dotacji z Powiatowego Urzędu Pracy to 21.061 zł.

Osoba zainteresowana dotacją **dotatkowo składa oświadczenie**, że nie podejmie zatrudnienia w okresie 12 miesięcy po dniu rozpoczęcia prowadzenia działalności.

Starosta w trakcie trwania umowy o dofinansowanie dokonuje oceny prawidłowości wykonania umowy<sup>23</sup>.

## Biznes plan, czyli jak zaplanować efekty finansowe przedsięwzięcia

Istotą biznes planu jest sformułowanie zamierzeń na bliższą lub dalszą przyszłość, z ustaleniem zadania podstawowego (konkretnego przedsięwzięcia, interesu) lub zestawu zadań do wykonania, celów, środków i sposobów (metod) działania (A. Korczyn, 2009).

Biznesplan jest to element planowania strategicznego. Jest to podstawowe narzędzie planistyczne w organizacji, wykorzystywane m. in. przy ocenie opłacalności przedsięwzięć gospodarczych.

**Biznesplan ma odpowiadać na  
podstawowe pytania  
KTO? CO? JAK? ZA ILE?**

Najogólniej rzecz ujmując, można stwierdzić, iż jest to średnioterminowy kompleksowy spis celów oraz zadań, jakie stawia przed sobą przedsiębiorstwo, ujęty w formie pisemnej. Fundamentem budowy biznes planu jest określenie jego celów, które jednocześnie stają się zasadami sporządzania biznes planu.

**Tabela 7. Cele sporządzania biznesplanu**

Wewnętrzne	Zewnętrzne
przewodnik dla działań strategicznych i operacyjnych firmy	
zdefiniowanie słabych i silnych strony działalności gospodarczej	element komunikacji przedsiębiorstwa z otoczeniem m. in. z bankami, inwestorami, instytucjami państwowymi w celu pozyskania źródeł finansowania inwestycji
wytacza cele, metody działań	
przedstawia analizę stanu obecnego firmy	

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Ciechan-Kujawa M., *Biznes plan, Toruń 2007* i Korczyn A., *Jak opracować biznes plan?, Skierniewice 2009*.

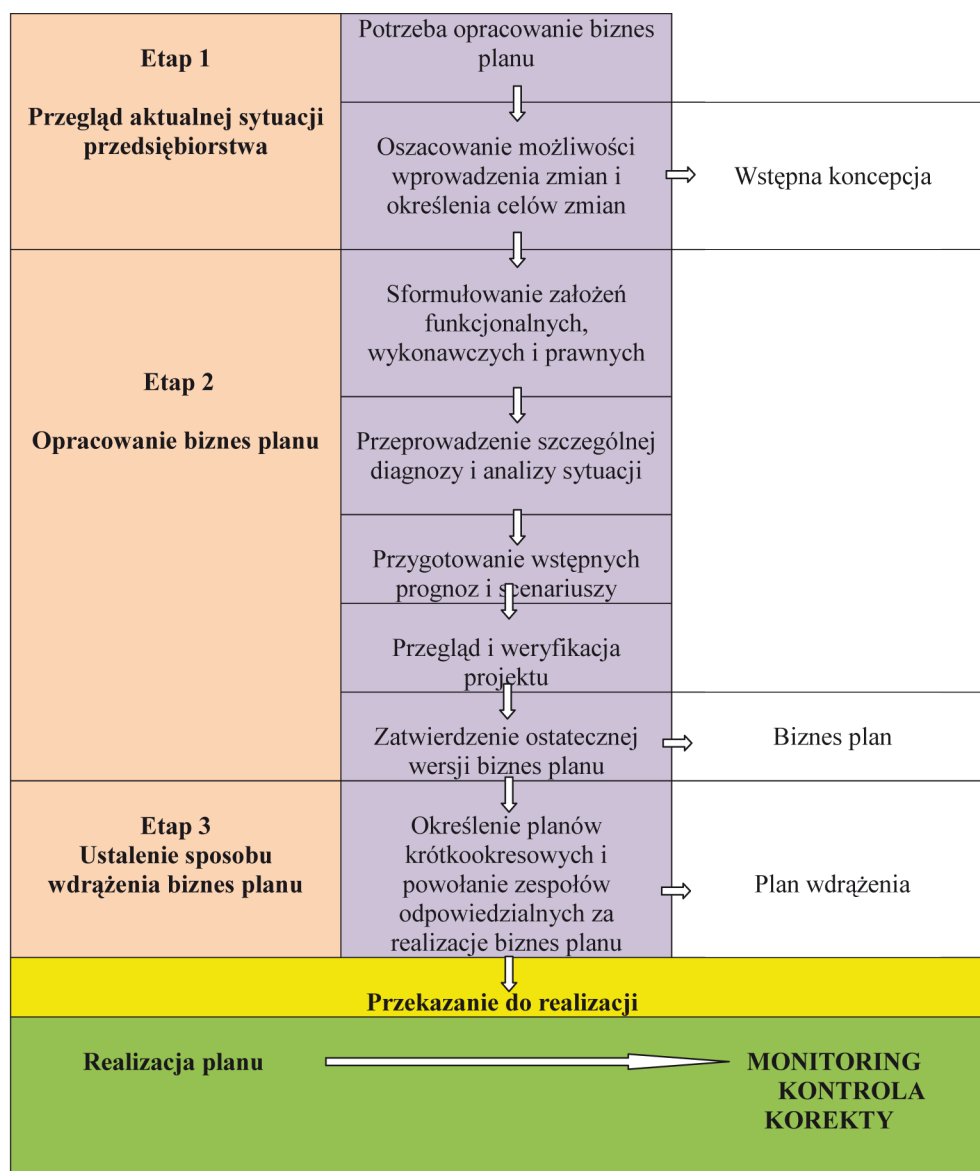
## Zasady konstrukcji biznesplanu

Konieczność opracowania biznes planu w przedsiębiorstwie może wynikać z różnych czynników, które prowadzą do uruchomienia procesu planowania biznesowego, składającego się z trzech kluczowych elementów:

- ▶ Przeglądu aktualnej sytuacji przedsiębiorstwa,
- ▶ Opracowania biznes planu,
- ▶ Ustalenia sposobu wdrożenia biznes planu.

23. Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 23 kwietnia 2012 r. w sprawie dokonywania z Funduszu Pracy refundacji kosztów wyposażenia lub doposażenia stanowiska pracy dla skierowanego bezrobotnego oraz przyznawania środków na podjęcie działalności gospodarczej (Dz.U. 2012 nr 0 poz. 457)

#### Schemat 4. Procedura i etapy opracowania biznes planu



Źródło: Ciechan-Kujawa M., *Biznes plan*, Toruń 2007.

Cechą charakterystyczną biznes planu jest jego konstrukcja, składająca się z czterech podstawowych części (E. Filar, J. Skrzypek, 2002):

**Wprowadzenia** – na które składa się:

- ▶ streszczenie – krótko informuje o treści biznes planu;
- ▶ ogólna charakterystyka przedsięwzięcia/przedsiębiorstwa – przedstawia przedsiębiorstwo i cele, jakie przedsiębiorca chce osiągnąć.

**Planu strategicznego** – składającego się z:

- ▶ analizy strategicznej – obejmującej analizę mikrootoczenia i otoczenia konkurencyjnego, analizę przedsiębiorstwa, analizę przewidywanych zmian elementów otoczenia i zasobów organizacji oraz analizę celów i oczekiwań stron zainteresowanych;
- ▶ określenia misji i wizji przedsiębiorstwa – czyli wskazanie klientów, produktów i usług, pola działania, techniki, pomysł na przetrwanie, publicznego wizerunku.

**Planów szczegółowych**, obejmujących:

- ▶ plan marketingowy- wskazanie kluczowych kryteriów strategii marketingowej, polityki cenowej, działań w zakresie dystrybucji, reklamy i promocji a także prognozy sprzedaży,
- ▶ plan działalności operacyjnej- opisuje proces i technologię wytworzenia wyrobu/usługi, infrastruktury

ture techniczną, konieczne inwestycje, zakupy materiałów i usług, zdolności wytwórcze, kosztorys produkcji i **usług**, oddziaływanie na środowisko,

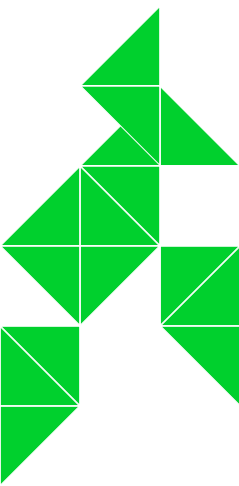
- ▶ plan organizacji i zarządzania – obejmuje swoim zakresem wskazanie posiadanych zasobów ludzkich i kosztów zatrudnienia, zasad, metod zarządzania w przedsiębiorstwie, harmonogramu głównych zamierzeń,
- ▶ plan finansowy- informuje o bieżącej kondycji finansowej przedsiębiorstwa, ustala szansę osiągnięcia zamierzonego wyniku finansowego, wyjaśnia zależności pomiędzy kosztami, określa rentowność zamierzonej działalności oraz wskazuje źródła pozyskania kapitału (M., Ciechan-Kujawa, 2007).

**Załączników** – które stanowią element szerszego przedstawienia kluczowych treści istotnych z punktu widzenia osoby piszącej biznes plan, będą to w szczególności: schematy organizacyjne, ekspertyzy, pozwolenia, koncesję, fotografie, rysunki, CV kadry kierowniczej i pracowników, itp.



## TEMATY DO DYSKUSJI

1. Określ etapy realizacji zaplanowanego przedsięwzięcia, rozbijając je na etapy, ze wskazaniem zadań częściowych.
2. Określić i uzasadnić formę działalności przedsięwzięcia.
3. Wskaż zasady prowadzenia e-biznesu
4. Wymień źródła finansowania z UE
5. Przygotuj curriculum vitae i list motywacyjny – z jakich elementów składają się te dokumenty?.
6. Opisz przygotowania pracownika do rozmowy kwalifikacyjnej.
7. Opisz cechy dobrego pracownika.
8. Wyjaśnij, co powinien zrobić pracodawca, aby zatrudnić pracownika.



## **Bibliografia:**

- Barowicz M., *Jak prowadzić działalność gospodarczą?*, Warszawa 2008.
- Barrow C., Barrow P., *Business plan*, Warszawa 1992
- Ciechan-Kujawa M., *Biznes plan*, Toruń 2007.
- Filar E., Skrzypek J., *Biznes plan*, Warszawa 2002.
- Grzywacz J., *Podstawy bankowości*, Warszawa 2003.
- Grzywacz J., *Współpraca przedsiębiorstwa z bankiem*, Warszawa 2003.
- Heropolitańska I., Jagodzińska-Serafin E., Kruglak., J., Ryżewska S., *Kredyty, pożyczki i gwarancje bankowe*, Warszawa 1999.
- Juraszek-Kopacz B., Piekut D. (red.), *Ekonomia społeczna i biznes – partnerstwo sukcesu*, Warszawa 2008.
- Kłosowska B., *Obsługa bankowa przedsiębiorstw*, Toruń 1996.
- Korczyn A., *Jak opracować biznes plan?*, Skierniewice 2009.
- Koźmiński A.K., Piotrowski W., *Zarządzanie. Teoria i praktyka*, Warszawa 1996.
- Nowakowski W., *Prawne aspekty działalności gospodarczej*, Szczecin 2011.
- Pawłowicz L. (red.), *Ekonomika przedsiębiorstw. Zagadnienia wybrane*, Gdańsk 2001.
- Powałowski A. (red.) *Prawo gospodarcze publiczne*, Warszawa 2012.
- Sieradzka M., *Swoboda działalności gospodarczej*. Komentarz, publ. elektroniczna, System Informacji Prawnej LEX, 2010
- Snażyk Z., Szafranski A., *Publiczne prawo gospodarcze*, Warszawa 2012,
- Stoner J.A.F., Wankel Ch., *Kierowanie*, Warszawa 1996
- Strzyczkowski K., *Prawo gospodarcze publiczne*, Warszawa 2010.
- Szczyrski P., *Jak założyć stowarzyszenie? Jak założyć fundację? Jak zostać z OPP?*, Szczecin 2009.
- Tokarski M., *Factoring w małych i średnich przedsiębiorstwach*, Kraków 2005.
- Węclawski J., *Venture capital, Nowy instrument finansowanie przedsiębiorstw*, Warszawa 1997.
- Wiatrak A., *Pojęcie przedsiębiorczości jej cele i rodzaje* [w:] *Uwarunkowania rozwoju przedsiębiorczości – szanse i bariery*, Tarnobrzeg 2003.
- Wygnański J., *O ekonomii - podstawowe pojęcia, instytucje i kompetencje*, Szczecin 2009.
- Zaleśkiewicz, T., *Przedsiębiorczość i podejmowanie ryzyka*, [w:] T. Tyszka (red.), *Psychologia ekonomiczna*, Gdańsk 2004.
- Zawiślak A.M. *Organizacja i planowanie. Ujęcie systemowe*, Warszawa 1978.

## **Akty prawne**

- Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 23 kwietnia 2012 r. w sprawie dokonywania z Funduszu Pracy refundacji kosztów wyposażenia lub doposażenia stanowiska pracy dla skierowanego bezrobotnego oraz przyznawania środków na podjęcie działalności gospodarczej (Dz. U. 2012 nr 0 poz. 457 ze zm.)
- Ustawa z dnia 15 września 2000 r. Kodeks spółek handlowych (Dz. U. z 2000 r. Nr 94, poz. 1037 ze zm.)
- Ustawa z dnia 16 września 1982 r., Prawo spółdzielcze (t.j. Dz. U. 2003 Nr 188 poz. 1848)
- Ustawa z dnia 20 kwietnia 2004 r. o promocji zatrudnienia i instytucjach rynku pracy (t.j. Dz.U. 2008 Nr 69 poz. 415)



Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny (Dz. U. Nr 16, poz. 93 ze zm.)

Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie (t.j. Dz. U. z 2010 r. Nr 234, poz. 1536 ze zm.)

Ustawa z dnia 25 września 1981 r. o przedsiębiorstwach państwowych (t.j. Dz. U. 2002 Nr 112 poz. 98)

Ustawa z dnia 27 kwietnia 2006 r. o spółdzielniach socjalnych (Dz. U. z 2006 r. Nr 94, poz. 651 ze zm.)

Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r. - Prawo bankowe (t.j. Dz. U. 2012 Nr 0, poz. 1376)

Ustawa z dnia 6 kwietnia 1984 r. o fundacjach (t.j. Dz. U. 1991 Nr 46 poz. 203)

Ustawa z dnia 7 kwietnia 1989 r. Prawo o stowarzyszeniach (t.j. Dz. U. 2001 Nr 79, poz. 855)

## **Netografia:**

Wagłowski P., *Prawne aspekty prowadzenia e-biznesu*, [http://www.web.gov.pl/g2/big/2009\\_12/cf917750d5daa-7ec3cf21f4ac404efff.pdf](http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/cf917750d5daa-7ec3cf21f4ac404efff.pdf), 20.03.2013.

Centrum Innowacji i Transferu Technologii, *Przewodnik krok po kroku do własnej firmy*, [http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki\\_do\\_pobrania/publikacje/layout\\_zmiana\\_wysylka.pdf](http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki_do_pobrania/publikacje/layout_zmiana_wysylka.pdf), 8.03.2013.

Flis R., Szut J., Mazurek-Kucharska B., Kuciński J., *E-usługi – definicja i przykłady*, [http://www.web.gov.pl/g2/big/2009\\_12/e128419bc4aca1881822862d9da143f5.pdf](http://www.web.gov.pl/g2/big/2009_12/e128419bc4aca1881822862d9da143f5.pdf), 20.03.2013.

Huczko P., *Jak założyć własną firmę?* [www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna-firme.html](http://www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna-firme.html), 7.03.2013.

Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, *Jak zostać i pozostać przedsiębiorcą?* [www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/](http://www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/), 7.03.2013.

Trzeciak K., *Rozpoczęcie sprzedaży w Internecie*, [http://www.web.gov.pl/g2/big/2012\\_12/a595cf7ca3f-f930ea4ae9b23bd92bd8b.pdf](http://www.web.gov.pl/g2/big/2012_12/a595cf7ca3f-f930ea4ae9b23bd92bd8b.pdf), 20.03.2013.

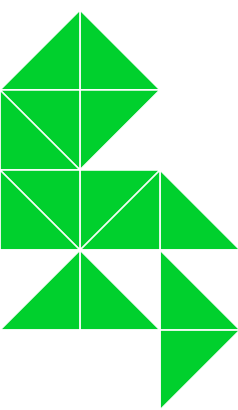
Noworudzki G., *Jak znaleźć pomysł na biznes*, <http://4business4you.com/biznes/wlasna-firma/jak-znalezc-pomysl-na-biznes/>, 17.03.2013.

Noworudzki G. *8 powodów dla których warto założyć własną firmę*: <http://4business4you.com/biznes/wlasna-firma/8-powodow-dla-ktorych-warto-zalozyc-wlasna-firme/> 17.03.2013

<http://urząd.nf.pl/Artykul/11539/11-cech-dobrego-i-skutecznego-menedzera/personel-w-urzedzie-zaradzanie-pracownikami-menedzer-urząd/#artTresc> 17.03.2013

[http://www.wse.waw.pl/aa%20materialy%20dydaktyczne/E\\_Ekonomika%20i%20organizacja%20przedsiębiorstw\\_Ryzlak.pdf](http://www.wse.waw.pl/aa%20materialy%20dydaktyczne/E_Ekonomika%20i%20organizacja%20przedsiębiorstw_Ryzlak.pdf) 18.03.2013

[www.biznes-rodzina.pl/index.php/artykuly/sprzedaz/272-typy-osobowoci](http://www.biznes-rodzina.pl/index.php/artykuly/sprzedaz/272-typy-osobowoci) 01.03.2013



## 2. Analiza rynku

### 2.1. Lokalizacja i obszar działania

Przedsiębiorstwo działa na rynku. Z kolei **rynek** jest to ogół stosunków wymiennych między sprzedającymi, reprezentującymi podaż produktów, a kupującymi zgłaszającymi zapotrzebowanie, czyli reprezentującymi popyt na produkty (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004). Rynek jest grupowaniem uczestników (sprzedających i kupujących), miejscem komunikowania się i zawierania transakcji kupna-sprzedaży. Nie oznacza to, że musi dojść do bezpośredniego spotkania sprzedawcy i kupującego w określonym miejscu czasie (np. sklepie). Obecnie partnerzy zawierający transakcję mogą nie znać się osobiście i nigdy nie spotkać, a jednak dokonać wymiany. Znaczna część transakcji jest bowiem zawierana za pośrednictwem sprzedaży wysyłkowej, telefonicznej, internetowej.

**Podstawowymi elementami rynku są popyt, podaż, cena.**

**Popyt** jest to zapotrzebowanie na dobra i usługi poparte posiadanymi środkami finansowymi. Stronę popytu tworzą kupujący, Źródłem popytu są potrzeby, ale to, że człowiek odczuwa jakąś potrzebę nie oznacza, że zgłasza on popyt na potrzeby ją zaspokajające. Taka potrzeba może być zaspokojona np. we własnym zakresie (uprawa warzyw na działce). W większości wypadków jednak potrzeby są zaspokajane w wyniku nabywania dóbr i usług wytwarzanych przez innych i kupowanych na rynku.

Ilość dóbr i usług zaoferowanych na dany rynek do sprzedaży określona jest jako **podaż**. Stronę podaży tworzą producenci i sprzedawcy.

Relacje między popytem a podażą reguluje cena. **Cena** jest to wartość towaru wyrażona w jednostkach pieniężnych. Zgodnie z **prawem popytu** im wyższa jest cena danego produktu, tym mniejsze są ilości dokonywanych zakupów, natomiast niższym cenom towarzyszy wzrost wielkości popytu. **Prawo podaży** mówi o tym, że im wyższa jest cena rynkowa produktu, tym większe jego ilości są oferowane do sprzedaży. Sprzedawcy są bowiem zainteresowani sprzedażą jak największej ilości produktów, gdyż przynosi to im większy zysk (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Istotnym problemem do rozwiązania jest wybór lokalizacji i obszaru działania przedsiębiorstwa. Po przeprowadzeniu badań rynkowych, które są niezbędne przy podjęciu takiej decyzji, należy ustalić najważniejsze kryteria wpływające na wybór lokalizacji.

**Czynniki, które należałoby wziąć pod uwagę przy podejmowaniu decyzji, gdzie prowadzić działalność** (C. Barrow, P. Barrow, R. Brown, 2001):

1. Czy udało Ci się ustalić konkretny rynek zbytu na wybrany przez Ciebie rodzaj działalności? Jeśli sprzedajesz produkt lub usługę skierowaną do określonej grupy społeczno-ekonomicznej, przeanalizuj cechy demograficzne wybranego rejonu. Czy znajduje się tam wystarczająca liczba klientów z odpowiednich grup wiekowych lub określonych dochodach. Czy liczba takich osób rośnie czy raczej spada?

2. Jeśli potrzebujesz wykwalifikowanych pracowników, to czy zdołasz ich znaleźć bez większych trudności?
3. Czy wybrana lokalizacja zapewni Ci dostęp do dodatkowych usług, które będą konieczne do sprawnego funkcjonowania biznesu?
4. Na ile dostępne są nieprzetworzone materiały, składniki i inne zapasy?
5. Jaki jest koszt wynajmu i usług komunalnych w porównaniu z innymi rejonami?
6. Czy wybrane miejsce ma dogodne warunki komunikacyjne? Jak daleko znajdują się najbliższa linia kolejowa i lotnisko?
7. Czy wiesz coś na temat ewentualnych zmian, które mogłyby wpłynąć na kondycję Twojego biznesu, np. nowa droga szybkiego ruchu przechodząca przez centrum miasta, zmiany w usługach transportowych, likwidacja dużego zakładu pracy?
8. Czy w najbliższym sąsiedztwie działa jakiś przedsiębiorca, który może stanowić dla Ciebie konkurencję? Czy będzie miało to korzystny czy raczej negatywny wpływ na Twoją działalność?
9. Czy wybrana przez Ciebie lokalizacja będzie sprzyjała wykreowaniu korzystnego wizerunku na rynku? Na przykład projektant luksusowej odzieży może być mało wiarygodny prowadząc działalność w rejonie słynącym przede wszystkim z przemysłu ciężkiego i wyjątkowego zanieczyszczenia środowiska.
10. Czy określony rejon jest ogólnie traktowany jako rozwojowy, czy wprost przeciwnie? Czy sprzyja inicjatywom gospodarczym?
11. Czy będziesz w stanie bez problem docierać do wybranego miejsca: Czy możesz powiedzieć to samo o swoich najważniejszych pracownikach?

Wykorzystując powyższe kryteria, można szybko wykluczyć większość nieodpowiednich miejsc. Inne jednak będą wymagały kilkakrotnych odwiedzin o różnych porach dnia i tygodnia, zanim podejmie się decyzję, że nie są to miejsca, których szukamy!

#### **Należy pamiętać o kilku istotnych problemach:**

1. Niemal każda korzyść wiąże się z określonymi kosztami i stwierdzenie to jest szczególnie aktualne w odniesieniu do lokalizacji. Należy pamiętać o tym, aby skrupulatnie ocenić koszty związane z każdą rozważaną lokalizacją w stosunku do potencjalnych korzyści. Oszczędność wynikająca z niższych kosztów najmu może okazać się pozorna, jeśli wybierając gorszą lokalizację straci się na wynikach sprzedaży. Z drugiej jednak strony nie należy wybierać kosztownego lokalu, dopóki nie ma się pewności, że przyniesie on wysokie zyski. Wyższe koszty niekoniecznie muszą oznaczać większe korzyści.
2. Przy wyborze lokalizacji należy kierować się typem wybranej przez siebie działalności. Nie przyjmuje się żadnej lokalizacji jako „pewnik”. Na przykład zaadoptowanie na księgarnię nieużywanej części sklepu muzycznego prowadzonego przez przyjaciela może wydać się niezłym pomysłem ze względu na zerowe koszty najmu, ale błąd takiego typu rozumowania polega na tym, że można otworzyć firmę w miejscu, które zupełnie się do tego nie nadaje. Fakt, że od początku ktoś wie, jaki rodzaj działalności chce prowadzić wcale nie oznacza, że powinno się podchodzić w ten sam sposób do kwestii wyboru lokalizacji. Należy wybrać możliwie najlepsze miejsce – czyli takie, które przyniesie największy zysk (C. Barrow, P. Barrow, R. Brown, 2001).

„Darmowe” lokale w praktyce mogą okazać się niezwykle kosztowne, jeśli nie są dostosowane do określonego typu działalności. Z drugiej strony – jeśli mamy już z góry upatrzoną lokalizację, być może należy przemyśleć rodzaj działalności najbardziej odpowiedni dla tego miejsca. Takiej decyzji również nie powinno się podejmować bez dokładnego przemyślenia wszystkich „za” i „przeciw”. Jaki typ działalności zapewnia najbardziej optymalne i dochodowe wykorzystanie danej powierzchni?

Jeśli chodzi o **wybór lokalu** na działalność gospodarczą należy wziąć pod uwagę następujące kwestie: (C. Barrow, P. Barrow, R. Brown, 2001).

1. **Wybrany lokal może być wykorzystywany na wybrany rodzaj działalności?** Niektóre z nich kategorii użytkowania lokali to: handel, działalność biurowa, przemysł lekki, przemysł ogólny, ponadto można wyróżnić wiele innych kategorii. Jeśli wybrana działalność różni się od tej, którą prowadził poprzedni najemca, niewykluczone, że należy zwrócić się do władz lokalnych o zmianę sposobu użytkowania pomieszczenia. Istnieje mnóstwo przepisów regulujących użytkowanie lokali przeznaczonych na działalność gospodarczą. W tej kwestii należy skontaktować się z odpowiednim wydziałem urzędu miasta, aby upewnić się, że planowane działania nie naruszają którejs z aktualnie obowiązujących norm.
2. **Czy planowanie będą jakieś zmiany strukturalne w obrębie wykorzystywania lokalu?** Jeśli tak, jakie będą potrzebne w tym celu odpowiednie pozwolenia budowlane i upewnić się, że plany są zgodne z prze-

pisami budowlanymi. W obu przypadkach należy uzbroić się w cierpliwość i pamiętać o uwzględnieniu kosztów tych przedsięwzięć w prognozach przepływu gotówki. Na przykład przy otwieraniu restauracji pełny projekt lokalu trzeba złożyć do wydziału architektury w urzędzie miasta lub gminy. Musi tam się znaleźć wszystko: wentylacja, klimatyzacja, burzenie ścian, stawianie ścian, projekt kuchni, drogi ewakuacyjne, toalety itp. (bez systemu wentylacji straż pożarna nie zgodzi się na uruchomienie lokalu).

3. **Czy wybrany lokal ma odpowiednią powierzchnię.** Warto pomyśleć o tym, aby nie wydawać zbędnych środków na wynajem lub kupno lokalu, którego metraż będzie przekraczał rzeczywiste potrzeby firmy. Jeśli lokal okaże się zbyt mały, trzeba będzie ponownie rozpoznać czasochłonny proces poszukiwania nowej lokalizacji, a to może wiązać się ze sporymi kosztami lub może okazać się zgubne dla firmy. Na przykład otwarcie przedszkola musi spełniać określone wymogi:

- ▶ przedszkole nie może mieć szamba, musi mieć kanalizację miejską;
- ▶ musi być miejsce na parking;
- ▶ schody – szerokość minimum 1,20 m;
- ▶ pomieszczenia dla dzieci – minimum 3 m wysokości;
- ▶ trzeba mieć miejsce na wentylację mechaniczną;
- ▶ gdy w kranach miejskich wodociągów woda nie spełnia norm dla przedszkola, trzeba zamówić stację oczyszczania i ozonowania wody;
- ▶ inne to: przeróbki łazienek, bo muszą być kabiny, wszystkie meble atestowane, drzwi przeciwpożarowe, żeby dojazd był z innej strony;
- ▶ uzgodnienia ze strażą pożarną, z sanepidem, z udziałem energetycznym o większy przydział prądu i inne.

Metodą prób i błędów należy ustalić idealną powierzchnię lokalu, która będzie łatwa do zaaranżowania, ekonomiczna pod względem wykonywanej pracy, estetyczna oraz wygodna dla personelu, jak i klientów.

4. **Czy wybrany lokal spełnia wszystkie normy bezpieczeństwa i higieny pracy i jest zgodny z przepisami dotyczącymi ochrony przeciwpożarowej?** W tej sprawie warto skontaktować się z odpowiednimi instytucjami, w których można uzyskać informacje na temat aktualnie obowiązujących przepisów. To np. Główny Inspektorat Pracy, Główny Inspektorat Sanitarny, Główny Urząd Nadzoru Budowlanego, Komenda Główna Państwowej Straży Pożarnej.

5. **Jeśli planuje się prowadzić firmę w domu, również należy upewnić się czy działalność jest zgodna i obowiązującymi przepisami i czy nie będzie uciążliwa dla sąsiadów.** Prowadzenie działalności w miejscu zamieszkania może być przychylnie traktowane przez przedstawicieli banków finansujących przedsięwzięcie, ponieważ znacznie ogranicza ryzyko związane z najtrudniejszym, początkowym okresem działalności. Natomiast w oczach przedstawicieli funduszy **venture capital** takie rozwiązanie świadczyłoby o tym, że przedsięwzięcie nie jest warte zachodu.

6. **Istotne jest czy lokal kupić, czy raczej dogodniej byłby najem.** Natychmiastowy zakup pomieszczeń na działalność gospodarczą ma sens wówczas, gdy firma zdobyła już pewną pozycję na rynku, ma określone perspektywy i może traktować tę inwestycję w kategoriach majątkowych. Natomiast w przypadku firmy, która dopiero wchodzi na rynek, spłata kredytu wraz z odsetkami może wynosić więcej. W wyborze i określeniu lokalizacji pomocnym może być Internet.

Jednym z najważniejszych elementów, jaki należy wziąć pod uwagę jest **konkurencja**. Powstaje ona wtedy, gdy wielu producentów jednocześnie wprowadza na rynek i oferuje na nim produkty zaspokajające te same potrzeby.<sup>1</sup>

**Konkurencja** – to rywalizacja o fundusze nabywcze kupujących poprzez przedstawienie oferty w sposób bardziej atrakcyjny od innych (np. z punktu widzenia ceny lub jakości) (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

**Konkurenci bezpośredni** obsługują tę samą grupę nabywców oferując produkty zaspokajające te same potrzeby w podobny sposób (np. Mc Donalds i Burger King).

**Sprzedawcy substytutów** zaspokajają tę samą potrzebę, co firma, choć za pomocą innych produktów, (np. konkurentem dla producenta tapet ściennych jest producent farb, dla producenta masła – producent margaryny).

**Konkurenci potencjalni** – to podmioty, które aktualnie, nie są konkurentami przedsiębiorstwa, ale mogą się nimi stać w określonych okolicznościach, np. kiedy rozszerzą swoją ofertę (np. dla producenta mebli

1. <http://www.przepisnabiznes.pl/dzialalnosc-gospodarcza/wybor-lokalu.html> (15.03.2013)

kuchennych firma produkująca meble pokojowe w danej chwili jest potencjalnym konkurentem, ale stanie się bezpośrednim konkurentem wtedy, gdy zacznie produkować meble kuchenne).

Każdy z trzech rodzajów konkurentów może rywalizować o klienta za pomocą dwóch sposobów:

- ▶ ceny,
- ▶ działań pozacenowych.

**Konkurencja cenowa** – przybiera z reguły formę oferowania produktów po cenie niższej niż konkurenci. To najłatwiejszy sposób konkurowania, ale też niosący ze sobą bardzo duże ryzyko. W przypadku, kiedy konkurenci zaczną stosować podobną formę konkurencji, może to doprowadzić do wojny cenowej. W konsekwencji obniżają się ceny na całym rynku, co powoduje zmniejszenie zysku przedsiębiorstw, a nawet straty.

**Konkurencja pozacenowa** – jest odmienną formą konkurowania (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004). Polega na wykorzystywaniu, jako źródła przewagi nad konkurentami instrumentów związanych z:

- ▶ produktem – jego cechy użytkowe, jakość, marka, opakowanie, serwis gwarancji;
- ▶ dystrybucją – miejsce i sposoby sprzedaży, dostępność produktu;
- ▶ promocją – większa częstotliwość stosowania, różnorodność stosowanych form.

Czasami na rynku pojawia się **konkurencja nieuczciwa**, związana z nieuczciwymi metodami postępowania, np. podrabianie oryginalnych produktów, marek, opakowań, stosowanej nieuczciwej reklamy upowszechnianie negatywnych opinii o konkurentach i ich produktach. Nieuczciwa konkurencja narusza normy etyczne i podlega karom przewidzianym w obowiązującym ustawodawstwie, np. ustawie o zwalczaniu nieuczciwej konkurencji.

## ▶ CIEKAWOSTKA!

### Czy przedsiębiorcy myślą, „co by było gdyby”?

Wyobraźmy sobie przedsiębiorcę, który stoi przed wyborem, z którym dostawcą podjąć współpracę. Gdy już podjął decyzję i nawiązał współpracę z jednym z nich, to czy zastanawia się potem, „co by było gdybym wybrał kogoś innego? Czy produkcja przebiegałaby sprawniej? Czy dzięki temu firma szybciej by się rozwijała?”.

Dokonywanie wyboru zawsze wiąże się z przyjęciem jednej propozycji, a odrzuceniem pozostałych. Wyobrażanie sobie, że jednak dokonujemy innego wyboru powoduje, że w umyśle powstaje zazwyczaj cały scenariusz, w którym wszystko toczy się dla nas korzystnie. Prowadzi to do zmian w nastroju i w sposobie myślenia (zob. Roesse, 1997, za: T. Zaleśkiewicz, 2004). Nastrój się obniża i wzrasta żal, a to z kolei powoduje, że osoba zaczyna źle oceniać własne możliwości i umiejętności. Pojawiają się w niej wątpliwości. Negatywne emocje powodują także, że dane przedsięwzięcie może się wydawać bardziej ryzykowne. Jednak są i dobre strony myślenia „co by było gdyby”.

Rozpatrywanie własnej decyzji z różnych stron pozwala uzyskać szerszy ogląd i często prowadzi do wyłapania błędów w podejmowaniu decyzji. Wyobraźmy sobie osobę, która chciała zainwestować swoje pieniądze w akcje, ale ostatecznie zrezygnowała z tego. Po jakimś czasie dowiaduje się, że kursy cen idą w górę. Osoba ta, na pewno doszła do wniosku, że przegapiła dobrą okazję. Jej nastrój pewnie też będzie gorszy, lecz w przyszłości może zachować się już inaczej i potraktuje inwestowanie w akcje, jako dobry sposób na osiągnięcie zysków.

Dla przedsiębiorców kluczowe jest utrzymanie wysokiej samooceny oraz pozostanie bardzo aktywnym i optymistycznym, co do przyszłości. Dlatego też nie skupiają się oni na tym, „co by było gdyby”. Oczywiście nie znaczy to, że unikają refleksji na temat własnych porażek. Osoby prowadzące własną firmę są nawet bardziej niż inni skłonne do tego by się do niej przyznać i analizować przyczyny, poszukując ich w sobie. Umiejętność radzenia sobie z porażkami jest bardzo ważna, szczególnie w biznesie, w którym zdarzają się one dosyć często.

Aby dowiedzieć się jak osoby prowadzące własną firmę interpretują przyczyny swoich porażek i jak na nie reagują, grupie przedsiębiorców zadano serię pytań (Cardon, McGrath, 1999, za: T. Zaleśkiewicz, 2004). Analiza uzyskanych informacji pozwoliła stwierdzić, że przedsiębiorcy uznają, iż przyczyną ich niepowodzeń jest niedostateczny wysiłek, Porażka według nich nie wynika z braku zdolności. Starają się oni wyciągnąć z niej wartościową naukę, tak by nie popełnić tego samego błędu w przyszłości. Co więcej porażka staje się dla nich bodźcem motywującym do efektywniejszego działania. Można więc powiedzieć, że przedsiębiorcy traktują porażkę jako naturalny element związany z zawodową aktywnością, a kiedy już zdarzy im się jej doświadczyć to konstruktywnie ją wykorzystują

## Analiza rynku i branży

**Analiza rynku** obejmuje czynności związane z badaniem rynku i opracowaniem zebranych informacji, dlatego powinna być wykonana na samym początku. Na tym etapie weryfikowane są bowiem wstępne założenia dotyczące celowości całego przedsięwzięcia.

Analiza rynku powinna dać odpowiedź na pytanie, czy oferowany przez firmę produkt/usługa znajdą nabywców na rynku, a precyzyjniej – czy – biorąc pod uwagę istnienie konkurencji – na rynku istnieją potencjalni nabywcy danego produktu/usługi, ilu ich jest i na ilu z nich można liczyć.

Jeżeli badania wykażą, że popyt na dany produkt lub usługę jest zbyt mały lub konkurenci dysponują poważną przewagą, wówczas należy gruntownie zmodyfikować wstępne założenia dotyczące projektowania przedsięwzięcia (produktu, usługi, rynku, ceny lub zaniechać dalszych prac.

Jeśli zaś okaże się, że istnieje miejsce na rynku, należy przystąpić do dalszych czynności planistycznych i weryfikacyjnych.

W przypadku analizy rynku chodzi o upewnienie się, czy na rynku są nabywcy, czy potrzebują danych produktów lub usług oraz z jaką konkurencją należy się liczyć. Oszacowanie popytu na dany produkt lub usługę oraz analiza konkurencji pozwolą dokonać prognozy sprzedaży.

Analiza rynku powinna więc zawierać takie elementy, jak (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010):

1. Identyfikacja rynku do celowego.
2. Cechy standardowego odbiorcy – lub w przypadku firm już istniejących, działających poza masowym rynkiem konsumpcyjnym – charakterystyka odbiorców.
3. Analiza potencjalnego popytu.
4. Analiza konkurencji.
5. Szacunek sprzedaży.

1. Identyfikacja rynku docelowego powinna obejmować:
  - ▶ charakterystykę rynku;
  - ▶ segmentację rynku;
  - ▶ charakterystykę wybranych segmentów.
2. Cechy standardowego odbiorcy – lub w przypadku firm już istniejących, działających poza masowym rynkiem konsumpcyjnym – charakterystyka odbiorców.
3. Analiza potencjalnego popytu powinna określać:
  - ▶ szacunki popytu;
  - ▶ czynniki wpływające na popyt.
4. Analiza konkurencji z uwzględnieniem:
  - ▶ najważniejszych konkurentów – analiza silnych i słabych stron;
  - ▶ możliwości pojawienia się nowych konkurentów;
  - ▶ oraz możliwości pojawienia się substytutów.
5. Szacunek sprzedaży.

Tabela 8 zawiera wszystkie niezbędne informacje dotyczące analizy rynku.

Ważnym zagadnieniem jest **ukazanie rynku docelowego**. W tym celu niezbędne jest udzielenie odpowiedzi na następujące pytanie:

- ▶ Kim są potencjalni klienci?
- ▶ Jakie są ich potrzeby?
- ▶ Czy istnieje na danym rynku konkurencja?
- ▶ Jakimi motywami kierują się konsumenci dążąc do zaspokojenia potrzeb?
- ▶ Jaki jest wpływ czynników: ekonomicznych, socjologicznych i kulturowych na decyzję zakupu?
- ▶ Jaka jest reakcja nabywców na bodźce zewnętrzne (np. na reklamę)?
- ▶ Jak przebiega proces dokonywania zakupów i jakie funkcje pełnią w nich członkowie rodziny (kto jest inicjatorem, kto doradcą, kto ostatecznym decydującym, a kto zaopatrzeniowcem?)

**Tabela 8. Informacje dotyczące analizy rynku**

Problemy i pytania, na które powinny odpowiadać informacje dotyczące analizy rynku	Techniki i narzędzia do wykorzystania: istotne czynności do wykonania
Jakimi najważniejszymi cechami charakteryzuje się rynek produktów/usług istotnych z punktu widzenia przedsiębiorstwa?	Samodzielne przeprowadzenie badań (ankiet, wywiadów, obserwacji itp.) konsumentów.
Jakie są najważniejsze kryteria segmentacji tego rynku?	Wywiady ze specjalistami z danej dziedziny (sprzedawcami w sklepach, przedstawicielami handlu hurtowego, przedstawicielami konkurentów).
Dlaczego te a nie inne kryteria odgrywają najważniejszą rolę?	Analiza danych statystycznych.
Które z segmentów są interesujące z punktu widzenia przedsiębiorstwa i dlaczego?	Konfrontowanie danych statystycznych z wynikami badań preferencji nabywców.
Jakie są cechy charakterystyczne dla tych segmentów? Które z tych cech są szczególnie istotne z punktu widzenia realizacji przedsięwzięcia? Jakie są perspektywy dla tych segmentów?	Analiza prasowych źródeł wtórnych.
Kim jest standardowy odbiorca produktów/usług w tym segmencie, jakie są jego najważniejsze cechy?	Analiza informacji będących w posiadaniu instytucji branżowych oraz w – określonych przypadkach – danych z instytucji naukowo-badawczych.
Ilu takich odbiorców znajduje się zasięgu działania przedsięwzięcia?	Analiza danych publikowanych przez konkurentów.
Czy istnieją duzi odbiorcy, którzy już dziś deklarują zakup produktów/usług powstającej firmy, ilu ich jest, jakie są ich cechy i na jakie zamówienie można liczyć?	Badania własne (wywiady, obserwacja) konkurentów.
Jakie jest nasilenie konkurencji w omawianym segmencie, ilu jest konkurentów i jakie są ich cechy?	W określonych przypadkach – zakup informacji o strukturze rynku i konkurentach u podmiotów trzecich (zlecenie badań lub wykorzystanie istniejącej bazy danych).
Kto będzie bezpośrednim konkurentem dla przedsięwzięcia; jakie są cechy charakterystyczne najważniejszych konkurentów? Jakie są możliwości konkurowania z tymi firmami? Jak mogą być pojawienia się na rynku nowego konkurenta?	Literatura z zakresu planowania i tworzenia biznesplanów, a także prowadzenia badań marketingowych.
Czy istnieje groźba pojawienia się nowych konkurentów? (jak silne są bariery wejścia do sektora)? Czy rysuje się groźba ze strony substytutów?	
Jakie czynniki niezależne od firmy mogą mieć wpływ na wielkość sprzedaży (np. sezonowość popytu) i jak mogą być wykorzystywane/neutralizowane? Jaka jest planowana sprzedaż w pierwszym roku działalności?	

Źródło: J. Piaseczny, *Problemy i metody*, Warszawa 2002, s. 110-111.

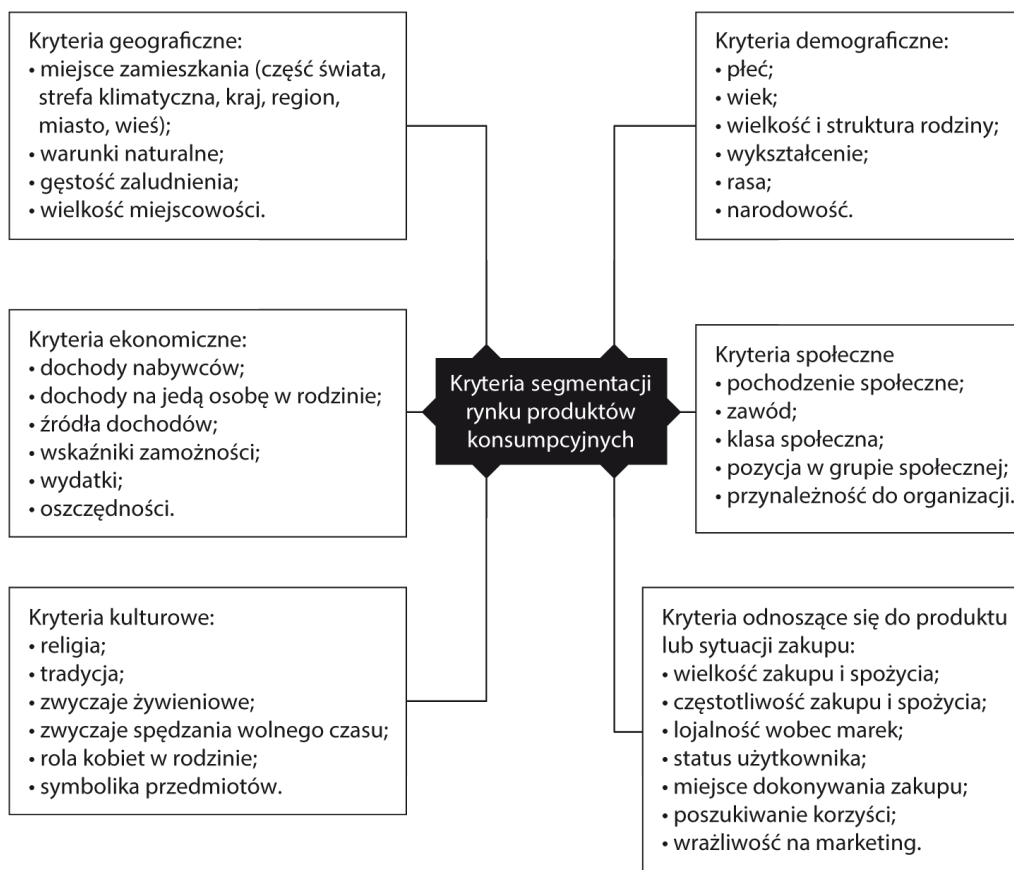
**Segmentacja** rynku jest podstawą podjęcia decyzji o wyborze docelowego rynku działań przez przedsiębiorstwo.

Proces segmentacji rynku polega na podziale zróżnicowanej masy klientów na jednorodne (homogeniczne) grupy o podobnych potrzebach i oczekiwaniach. Grupy te określa się mianem segmentów. Dla przedsiębiorstwa ważne jest określenie grupy konsumentów, do których kieruje swoje produkty. Segmentacja rynku jest ważnym i istotnym elementem w walce o pozyskanie nowych klientów na konkurencyjnym rynku.

Poszczególne segmenty rynku skupiają odbiorców o podobnych cechach. Konsumentów należących do jednego segmentu są do siebie podobni, natomiast należący do różnych segmentów różnią się od siebie.

Cechy, na podstawie których wyodrębnia się segmenty rynku nazywamy kryteriami segmentacji. Można je podzielić na dwie grupy (Rysunek 1):

- ▶ kryteria odnoszące się do konsumenta (geograficzne, demograficzne, ekonomiczne, społeczne, kulturowe);
- ▶ kryteria odnoszące się do produktu lub sytuacji zakupu.



**Rysunek 1. Kryteria segmentacji rynku produktów konsumpcyjnych**

Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, *Podstawy marketingu*, Difin, Warszawa 2004, s.46.

W przypadku nabywców instytucjonalnych kryteriami segmentacji mogą być:

- ▶ liczba zatrudnionych;
- ▶ wielkość obrotów;
- ▶ powierzchnia punktów sprzedaży;
- ▶ branża;
- ▶ lokalizacja;
- ▶ obszar prowadzonej działalności.

Segmentacja rynku nie jest pojedynczą czynnością. Jest procesem złożonym z kilku działań, a jego realizacja wymaga określonego czasu. Można wyodrębnić następujące etapy segmentacji:

- ▶ wybór kryteriów segmentacji polegający na podjęciu decyzji, które kryteria będą brane pod uwagę, np. wiek, lojalność wobec marki;
- ▶ określenie wariantów wybranych kryteriów, np. dla wieku określenie przedziałów wiekowych (do 20 lat, 21–30 lat itp.), a dla lojalności – wyróżnienie nabywców lojalnych i nielojalnych;
- ▶ grupowanie konsumentów ze względu na podobieństwo ich cech;
- ▶ charakterystyka wyodrębnionych segmentów z punktu widzenia innych cech (analiza, jakimi cechami i zachowaniami charakteryzuje się segment osób w wieku do 20 lat);
- ▶ określenie wielkości wyodrębnionych segmentów na podstawie danych statystycznych.

Jeżeli wiadomo, jakie segmenty istnieją na rynku i jak są obsługiwane przez konkurencję, należy zdecydować się, który (lub które) z nich chcemy obsługiwać. To najważniejsza decyzja, gdyż złe określenie segmentu to ryzyko, że produkt nie znajdzie nabywców. Segmentacja powinna chronić firmę przed stosowaniem środków oddziaływania wobec osób, których nie interesuje produkt (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).



**Najlepszy segment to taki, który spełnia następujące warunki:** (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010)

- ▶ jest **pojemny**, czyli odpowiednio duży, co oznacza, że umożliwia osiągnięcie zakładanych celów sprzedażowych;
- ▶ jest **dostępny**, czyli firma musi mieć możliwość wejścia do niego i działania na nim;
- ▶ jest **przyszłościowy**, czyli przewiduje się jego rozwój;
- ▶ jest **mało atrakcyjny dla konkurentów**, czyli nie zachęca ich do działania;
- ▶ jest **opłacalny**, czyli umożliwia realizację celów firmy.

Często okazuje się, że wielkość (liczba nabywców) nie gwarantuje opłacalności, bo choć jest ich wielu, to kupują tak małe ilości produktów i tak rzadko, że jest to niezyskowne dla przedsiębiorstwa.

Najbardziej opłacalni są nabywcy kupujący często i dużo produktu. To oni są dla przedsiębiorstw najważniejsi. W marketingu znana jest **reguła „80/20”**, według której 20% nabywców regularnie i często dokonując zakupów decyduje o 80% obrotów. Prawdopodobnie ta występuje w pewnych przybliżonych granicach (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Na podstawie oceny **atrakcyjności** segmentów rynku wybierany jest **rynek docelowy**, czyli taki, na którym firma będzie prowadzić działalność.

**Rynek docelowy** – to grupa lub grupy konsumentów, do których firma adresuje swoją ofertę. Rynku docelowego nie można utożsamiać z rynkiem geograficznym, gdzie zazwyczaj podobni z punktu widzenia potrzeb i preferencji konsumenci zamieszkują różne regiony.

Atrakcyjność rynku zależy w dużym stopniu od możliwości osiągnięcia przewagi konkurencyjnej. Często związane jest to z poszukiwaniem **nisz rynkowych**.

**Nisza rynkowa** – wąska grupa nabywców, szukających ściśle określonych korzyści.

Nisza rynkowa powstaje wówczas, gdy na jakimś obszarze segmentu rynku nie ma ani jednej firmy oferującej pożądaną produkt, albo konkurenci oferują produkty o niskiej niezadowalającej jakości. Z reguły nabywcy są skłonni zapłacić wyższą cenę za specyficzny produkt zaspokajający ich potrzeby. Dla przedsiębiorstwa nisza oznacza znalezienie takiego miejsca na rynku, które zapewnia osiąganie zysku, a przy tym jest pomijane przez konkurentów (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

Przedsiębiorstwo wybierając rynek docelowy musi ocenić jego wielkość w przyszłości, perspektywy rozwoju oraz jego atrakcyjność dla przedsiębiorstwa.

Działania przedsiębiorcy muszą być skierowane na rynek. Należy sprzedawać te towary i usługi, na które jest największy popyt, poznać wielkość luki rynkowej, czyli niezajętej części rynku.

**Analizę rynku** można przeprowadzić metodami: (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010).

- ▶ bezpośredniego sondażu rynku (ankieta, wywiad, eksperyment rynkowy, badania panelowe, badania motywacyjne) lub
- ▶ statystycznymi – opierając się na danych z ubiegłych okresów.

Metody bezpośredniego badania rynku są bardzo pracochłonne, a zatem kosztowne. Proste i tańsze są metody statystyczne, jednak dostarczają tylko danych szacunkowych.

**W analizie rynku trzeba uwzględnić wiele czynników**, do których należy:

- ▶ określenie wielkości sprzedaży konkurentów;
- ▶ średnie wydatki klientów na zakup danego produktu;
- ▶ ceny rynkowe;
- ▶ częstotliwość zakupu;
- ▶ jak kształtują się te wielkości w czasie.

Te dane można znaleźć w roczniku statystycznym lub w Internecie. Wszystko, co można kupić i sprzedać jest produktem.

Wśród bezpośrednich metod analizy rynku najbardziej popularne są **badania ankietowe**. Dzięki nim można sporządzić „portret typowego nabywcy” produktu. Porównując „portret typowego nabywcy” z rynkiem geograficznym można ustalić „rynek nabywczy”, czyli liczbę osób, która skłonna jest kupić produkt. Dane te można przeliczyć na koszty, jakie można uzyskać ze sprzedaży produktu.

Pomnóż liczbę potencjalnych nabywców przez ich miesięczne wydatki na zakup danego produktu, a otrzymasz „rynek produktu”. Nie zapomnij jednak, że na rynku mogą już działać inne firmy, które stanowią dla Ciebie konkurencję. Jej znajomość jest konieczna do określenia opłacalności przedsięwzięcia. Jeśli ustalisz w przybliżeniu obroty Twoich konkurentów możesz poprzez porównanie ich z rynkiem produktu określić „lukę rynkową”.

W ocenie segmentu firma powinna starannie ocenić bariery wejścia na rynek, unikać segmentów, na których trwa walka konkurencyjna. Firmy nie powinny starać się pozyskiwać tych segmentów, którym nie są w stanie zaoferować niczego szczególnie wyróżniającego się na tle konkurentów.

Bardzo ważnym zagadnieniem jest określenie rozmiarów branży w kontekście wytwarzania przez nią wyrobów i usług. Oszacowania jej rozmiaru dokonuje się na podstawie wielkości sprzedaży produkcji, wyrażonej wartościowo lub w jednostkach naturalnych. Niezbędne są też dane publikowane w statystyce i dokumentach oficjalnych oraz wyniki rozmów przeprowadzony z ekspertami. Na podstawie tych informacji wyznacza się roczne wskaźniki wzrostu branży, które można porównać z projektowanymi wskaźnikami wzrostu przedsiębiorstwa w ujęciu rocznym. Powyższe informacje pozwalają na oszacowanie perspektyw rozwojowych i prawdopodobnej ewolucji branży, w której działa przedsiębiorstwo.:(A. Tokarski, M. Tokarski,J. Wójcik, 2010).

### **Charakterystyka branży powinna także uwzględnić:**

- ▶ listę wiodących firm w branży z uzasadnieniem ich pozycji;
- ▶ miejsce firmy w branży, mierzone, między innymi, udziałem wielkości sprzedaży produkcji firmy w sprzedaży całej branży, udziałem wielkości zatrudnienia przedsiębiorstwa w zatrudnieniu całej branży, przy czym oceny miejsca firmy w branży należy też dokonać z punktu widzenia klientów firmy i konkurencji;
- ▶ cechy konkurencyjności firmy, które charakteryzują słabe i mocne strony przedsiębiorstwa w stosunku do innych firm w branży.

Przedsiębiorstwa konkurujące na rynku rywalizują między sobą o fundusze nabywcze. Należy zatem sprecyzować, czyje są to fundusze i kto jest zaangażowany w decyzję zakupu. Może to być nabywca (klient) albo konsument.

Nabywca (klient) to osoba dokonująca zakupu produktu w celu zaspokojenia potrzeb własnych i/lub innych członków swojego gospodarstwa domowego.

Konsument to osoba wykorzystująca (konsumująca) produkt.

Możliwe są przy tym trzy sytuacje: (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

- ▶ w przypadku części produktów nabywca jest jednocześnie konsumentem kupowanego produktu – kupuje wyłącznie dla siebie;
- ▶ niekiedy grono konsumentów obejmuje nabywcę oraz dodatkowe osoby – klient kupuje dla siebie i swojej rodziny;
- ▶ czasami nabywca nie jest w ogóle konsumentem – klient dokonuje zakupu produktu wyłącznie dla innych.

Dodatkowo można wyróżnić dwie grupy nabywców:

- ▶ **indywidualnych** – czyli osoby nabywające dobra materialne i usługi w celu zaspokojenia własnych potrzeb osobistych, wspólnych potrzeb gospodarstwa domowego lub osobistych potrzeb innych członków rodziny;
- ▶ **instytucjonalnych** – czyli organizuje nabywające dobra materialne i usługi w celu zaspokojenia potrzeb wynikających z przedmiotu ich działalności, np. przedsiębiorstwa produkcyjne, przedsiębiorstwa handlu hurtowego i detalicznego, jednostki budżetowe oraz organizacje instytucje niedochodowe.

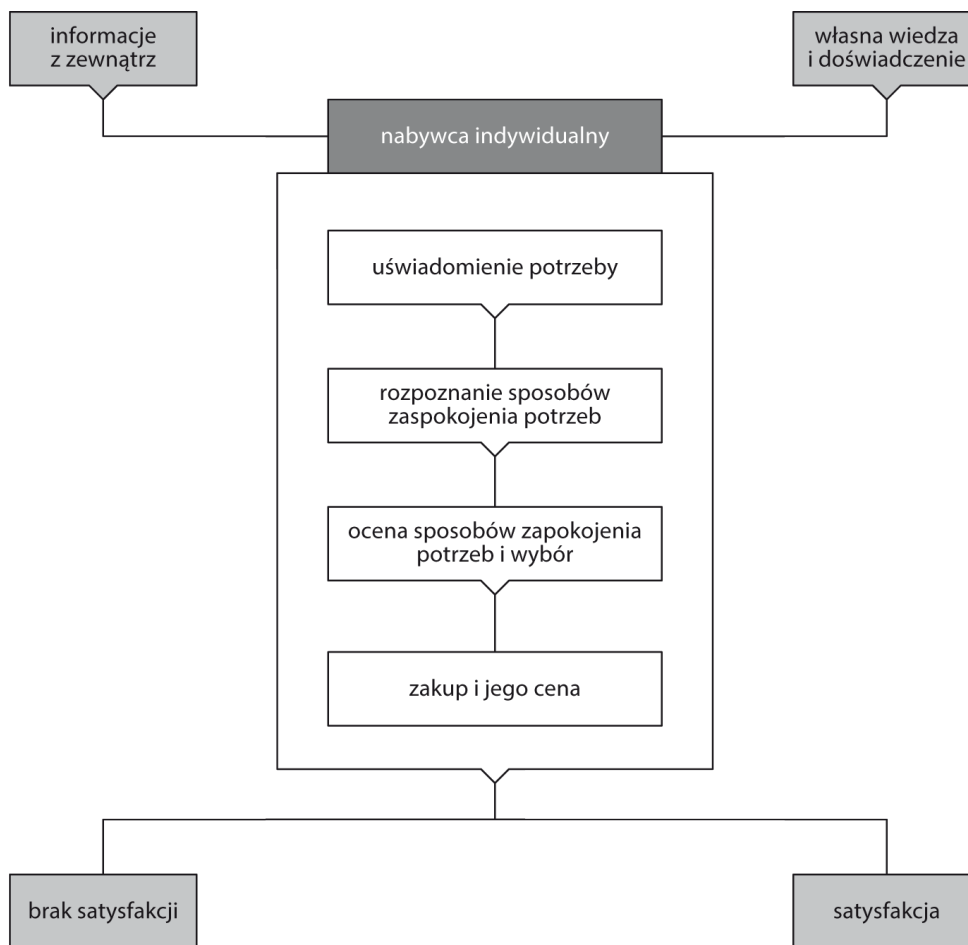
Proces postępowania nabywców na rynku związany jest z dokonywaniem przez niego zakupów. Przebiega on różnie, w zależności od tego, czy są to nabywcy indywidualni czy instytucjonalni.

Decyzje nabywcy indywidualnego mogą przybierać formę:

- ▶ **decyzji nawykowych** – związanych z częstym powtarzaniem decyzji wielokrotnie już podejmowanych, np. zakup codziennej gazety, czyli produkty często kupowane o niewielkiej wartości;
- ▶ **decyzji nierutynowych** – dotyczących produktów znanych i już wcześniej kupowanych, nie systematycznie, o nieco wyższych cenach, np. zakup spodni jeansowych;

- ▶ **decyzji rozważnych** – dotyczących produktów kupowanych bardzo rzadko, o wysokiej cenie i dużym znaczeniu, np. zakup samochodu;
- ▶ **decyzji impulsywnych** – związanych z produktem, których zakup nie jest wcześniej planowany przez konsumenta, ale jest wywołany oddziaływaniem jakiegoś bodźca np. zapachu czy promocji.

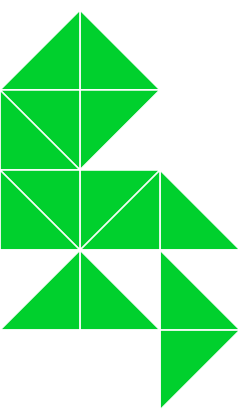
Proces podejmowania decyzji o zakupie składa się z kilku etapów (Rysunek 2).



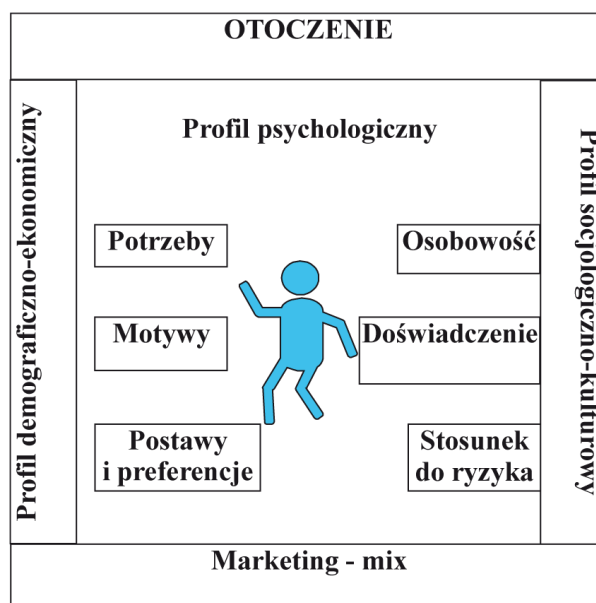
**Rysunek 2. Proces postępowania nabywców indywidualnych na rynku**

Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, *Podstawy marketingu*, Difin, Warszawa 2004, s. 37.

W wyniku tego procesu nabywca zaspokaja lub nieistniejącą potrzebę. Jeżeli zostanie ona zaspokojona w sposób zgodny z oczekiwaniem pojawi się odczucie satysfakcji. Jeżeli zaś oczekiwania będą wyższe niż rezultaty działania, to wynikiem procesu będzie brak satysfakcji określony, jako dysonans pozakupowy (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).



Na proces postępowania konsumentów na rynku wpływa wiele czynności (Rysunek 3)



Rysunek 3. Czynniki kształtujące postępowanie konsumentów na rynku

Źródło: A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Difin, Warszawa 2004, s. 40.

**Czynniki wewnętrzne**, tzw. profil psychologiczny konsumenta, które związane są oddziaływaniem elementów o charakterze psychologicznym, wpływających z wnętrza człowieka.

**Czynniki zewnętrzne**, dotyczące oddziaływania elementów, które mają swoje źródła poza organizmem człowieka i obejmują:

- ▶ czynniki o charakterze socjologicznymi kulturowym, wynikające z życia w określonym społeczeństwie, tworzące tzw. profil socjologiczno-kulturowy konsumenta;
- ▶ czynniki charakteryzujące konsumenta pod względem cech demograficznych i ekonomicznych, tworzące tzw. profil demograficzno-ekonomiczny konsumenta, np. płeć, wiek, wykształcenie, miejsce zamieszkania, dochody, wydatki;
- ▶ czynniki związane z marketingiem – mix stosowanym na rynku przez różne firmy;
  - produkt, który pasuje nabywcy lub nie;
  - cena, która jest akceptowana lub nie;
  - dystrybucja, która umożliwia zakup lub nie;
  - promocja, która pobudza do zakupu lub nie;–
- ▶ czynniki związane z otoczeniem, w którym funkcjonuje konsument.

Na sposób postępowania konsumenta na rynku mają wpływ czynniki składające się na profil psychologiczny konsumenta:

- ▶ **Potrzeby** – to odczucia braku czegoś wynikające z dostrzegania różnicy między istniejącym stanem rzeczy a stanem pożądanym (oczekiwanym) (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004). Największe znaczenie ma podział na:
  - **potrzeby podstawowe**, które wynikają z biologicznego istnienia człowieka, np. zaspokajanie głodu, pragnienia, ubrania, mieszkania;
  - **potrzeby wyższego rzędu**, które są efektem rozwoju cywilizacyjnego i mają dla życia człowieka znaczenie uzupełniające, np. potrzeby związane z oświatą, kulturą, rozrywką.

Źródła ich powstawania są różne: fizyczny brak produktu, uzyskanie informacji o nowym produkcie, ujawnienie się nowych potrzeb, zmiana sytuacji materialnej czy zmiana oczekiwań w stosunku do produktu.

- ▶ **Motywy**, czyli dążenia do zaspokojenia potrzeb. Motywy mogą mieć różnorodny charakter:
  - racjonalny wtedy, gdy dążąc do zaspokojenia potrzeby człowiek kieruje się ceną produktu, jego trwałością, wydajnością, przydatnością, wygodą użytkownika czy dokonywania zakupu;

- emocjonalny wtedy, gdy zaspokajając potrzeby zwraca się uwagę na estetykę produktów, np. forma, kolor, kształt, materiał lub ich znaczenie symboliczne, np. chęć wyróżnienia się wśród innych;
  - moralny wtedy, gdy dążąc do zaspokojenia potrzeby uwzględnia się zgodność z normami etycznymi i prawnymi, pochodzenie produktu, ekologię, wartości humanitarne.
- ▶ **Postawy i preferencje** – przychylnie, neutralne lub niechętnie nastawienia do osób, przedmiotów lub działań;
  - ▶ **Osobowość** – zbiór cech psychicznych i mechanizmów wewnętrznych, które odróżniają ludzi. Za pomocą cech osobowości można opisać zachowanie człowieka. Osobowość człowieka tworzą: cechy dziedziczne, temperament, stopień inteligencji, poziom pewności siebie.
  - ▶ **Doświadczenie** – związane z procesem uczenia się i zmieniające się wraz z wiekiem;
  - ▶ **Skłonność do ryzyka**, które jest rodzajem niepewności, z którą konsument ma do czynienia, gdy nie może przewidzieć konsekwencji swoich działań. Minimalizowanie ryzyka lub jego likwidacja może przebiegać za pomocą różnych środków i działań: kupowanie produktów dobrze znanych marek, z gwarancją, zbieranie informacji o przedmiocie zakupu. Są też jednak skłonni do kupowania innowacyjnych, nowatorskich produktów.

## 2.2. Analiza otoczenia przedsiębiorstwa

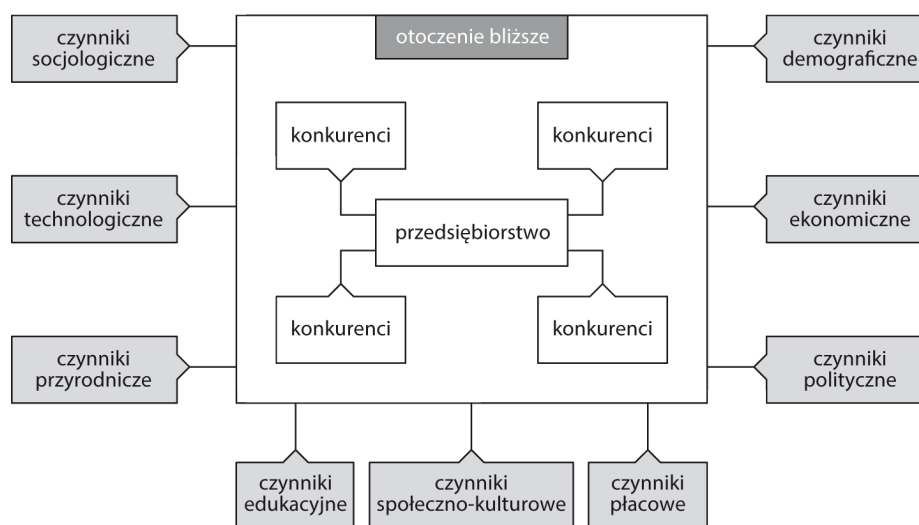
Żadne przedsiębiorstwo nie działa w poróżni, ale w określonym otoczeniu rynkowym. Analiza otoczenia umożliwia podejmowanie właściwych decyzji, które przyczyniają się do osiągnięcia sukcesu rynkowego.

„Aby zilustrować znaczenie otoczenia dla organizacji, rozważmy analogię z pływakiem przepływającym przez rzekę. Przed wypłynięciem musi on ocenić szybkość prądu, przeszkody, a także odległość. Jeśli oceni te elementy właściwie, dotrze do wybranego miejsca na drugim brzegu rzeki. Jeśli jednak zrozumie je niewłaściwie, może dotrzeć zbyt daleko, w dół lub w górę od wybranego miejsca na brzegu. Organizacja przypomina pływaka, otoczenie zaś rzekę. Tak więc jak pływak musi zrozumieć warunki panujące w wodzie, tak organizacja musi zrozumieć podstawowe elementy swego otoczenia, aby mogła wśród nich prawidłowo manewrować” (Rocky W. Griffin, 2007).

Otoczenie rynkowe przedsiębiorstwa jest to ogół czynników wpływających na zdolność przedsiębiorstwa do zaspokajania potrzeb nabywców w sposób umożliwiający mu osiągnięcie zysku.

Otoczenie przedsiębiorstwa można podzielić na dwie części:

- ▶ otoczenie bliższe, które tworzą formalnie równorzędne podmioty rynkowe, z którymi przedsiębiorstwo wchodzi na rynku w różnorodne relacje;
- ▶ otoczenie dalsze tworzą niezależne od przedsiębiorstwa czynniki wpływające na działania wszystkich podmiotów funkcjonujących w otoczeniu bliższym.



Rysunek 4. Schemat otoczenia rynkowego przedsiębiorstwa

Źródło: Opracowanie własne na podstawie A. Nowacka, R. Nowacki, Podstawy marketingu, Warszawa 2004, s. 19.

Charakterystyka otoczenia bliższego przedsiębiorstwa obejmuje także podmioty jak: (A. Nowacka, R. Nowacki, 2004).

- ▶ Dostawcy – zaopatrują przedsiębiorstwo w dobra związane z podstawowym obszarem działalności np. maszyny, urządzenia, surowiec, materiały, produkty do dalszej odsprzedaży;
- ▶ Pośrednicy – wspierają przedsiębiorstwo w procesie dystrybucji orz świadczą na jego rzecz usługi, np. hurtownicy, detaliści, przedsiębiorstwa transportowe, agencje badawcze, reklamowe, banki, instytucje ubezpieczeniowe;
- ▶ Konkurenci – rywalizują z przedsiębiorstwem na rynku i decydują o jego pozycji; są głównym źródłem zagrożenia na rynku, a swoimi działaniami mobilizują firmę do efektywnego działania;
- ▶ Nabywcy – są końcowymi odbiorcami oferty przedsiębiorstwa.

Otoczenie dalsze przedsiębiorstwa obejmuje czynniki takie jak ujęto w Tabeli 9.

**Tabela 9. Charakterystyka otoczenia dalszego przedsiębiorstwa**

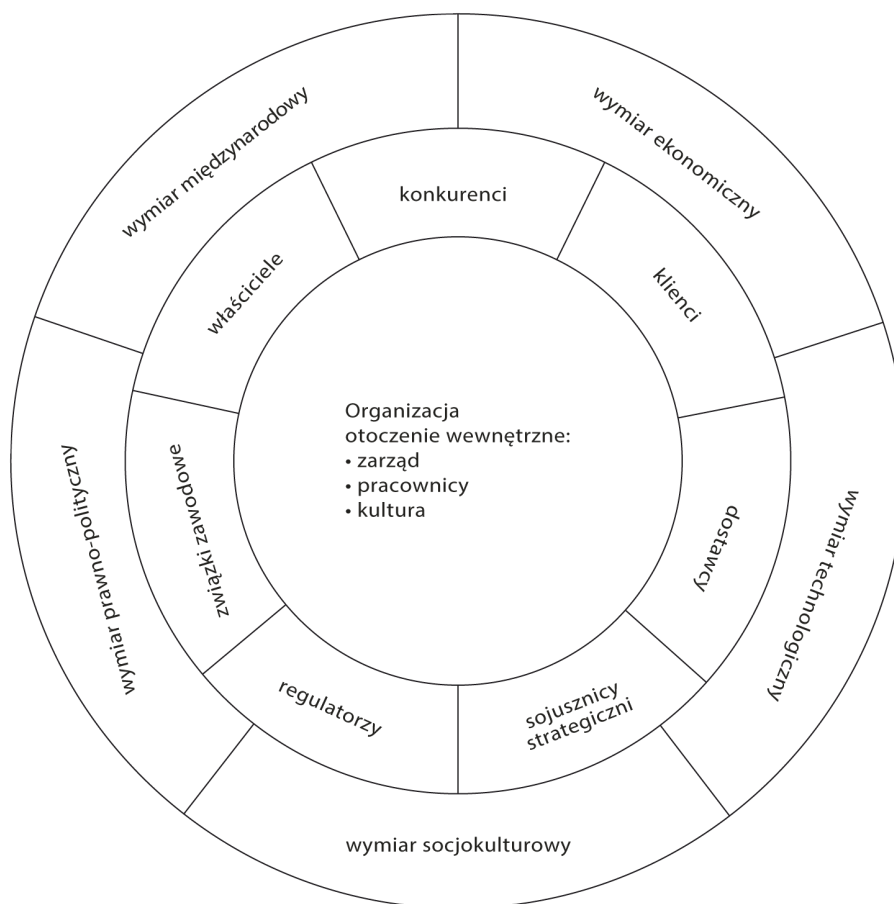
Rodzaj czynników	Charakterystyka
Demograficzne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wielkość i struktura ludności według wieku i płci;</li> <li>• struktura wykształcenia (podstawowe, zawodowe, średnie, wyższe);</li> <li>• struktura gospodarstw domowych (ich wielkość, rodzaj);</li> <li>• okresowe wyże lub niże demograficzne;</li> <li>• migracja ludności w skali krajowej i międzynarodowej;</li> <li>• gęstość zaludnienia (rozkład aglomeracji miejskich).</li> </ul>
Ekonomiczne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• poziom i dynamika PKB ogółem i na 1 mieszkańca;</li> <li>• ogólny poziom i struktura zamożności społeczeństwa (bieżące dochody, oszczędności, zadłużenia);</li> <li>• polityka pieniężna państwa i system podatkowy;</li> <li>• poziom cen;</li> <li>• koniunktura gospodarcza (stopa wzrostu, stopa inflacji, rozmiar bezrobocia).</li> </ul>
Polityczne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• stabilność systemu politycznego w danym społeczeństwie;</li> <li>• układ partii politycznych;</li> <li>• wojny i ruchy narodowowyzwoleńcze;</li> <li>• zagrożenia terroryzmem.</li> </ul>
Prawne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Regulacje prawne wpływające na ograniczenie swobody działalności przedsiębiorstw dotyczące: <ul style="list-style-type: none"> <li>• ochrony przed nieuczciwą konkurencją (np. ustawa o zwalczaniu nieuczciwej konkurencji);</li> <li>• sposobów reklamowania się (np. ustawa o radiofonii i telewizji);</li> <li>• koncesjonowania i otrzymywania zezwoleń (np. sprzedaż materiałów pirotechnicznych, leków, alkoholu, wyrobów tytoniowych);</li> <li>• zapewnienie bezpieczeństwa sprzedawanych produktów (np. atesty, zgodność z obowiązującymi normami);</li> <li>• ochrony interesów konsumentów;</li> <li>• ochrony środowiska naturalnego.</li> </ul> </li> </ul>
Społeczno-kulturowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• religia, kultura i tradycja (np. obdarowywanie się prezentami z okazji świąt);</li> <li>• wartości i normy społeczne (np. stosunek do własnego zdrowia i wolnego czasu);</li> <li>• odchodzenie od tradycyjnego modelu rodziny (np. zmiana modelu 2 + 2 na 2 + 1);</li> <li>• ewolucja roli kobiet (np. rosnąca aktywność zawodowa kobiet);</li> <li>• wzory zachowań (np. wzory dokonywania zakupów);</li> <li>• działania subkultur młodzieżowych (np. skinii, szalikowcy).</li> </ul>
Technologiczne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• poziom rozwoju naukowego (np. wiedza o technologiach produkcji – know – how);</li> <li>• poziom rozwoju technicznego danego kraju (np. zaawansowanie techniczne maszyn i urządzeń);</li> <li>• rozwój infrastruktury telekomunikacyjnej (np. telefonizacja, Internet).</li> </ul>
Naturalne (przyrodnicze)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• klimat;</li> <li>• charakter, jakość i dostępność zasobów naturalnych;</li> <li>• położenie geograficzne;</li> <li>• klęski żywiołowe.</li> </ul>
Edukacyjne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ogólny poziom wykształcenia w społeczeństwie;</li> <li>• system edukacyjny (np. sieć i struktura szkół).</li> </ul>
Socjologiczne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• struktura klasowa społeczeństwa (np. wyodrębnienie klasy średniej, biznesmenów);</li> <li>• charakter i rozwój organizacji społecznych (np. istnienie organizacji charytatywnych, konsumenckich, ekologicznych).</li> </ul>

Każde przedsiębiorstwo podejmując decyzje rynkowe musi analizować wszystkie elementy swojego otoczenia w sposób ciągły i kompleksowy oraz uwzględniać istniejące pomiędzy nimi zależności.

Analiza otoczenia powinna być przeprowadzona z dwóch punktów widzenia:

- ▶ szans (sprzyjających warunków działania dla przedsiębiorstwa);
- ▶ zagrożeń.

Otoczenie podmiotu gospodarczego przedstawia rysunek 5.



**Rysunek 5. Organizacja i jej otoczenie**

Źródło: A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, *Biznesplan po polsku*, CeDeWu.pl, Warszawa 2010, s. 89.

Otoczenie zewnętrzne to wszystko to, co z zewnątrz organizacji może na nią wpływać. Otoczenie zewnętrzne składa się z dwóch warstw: otoczenia ogólnego i otoczenia celowego.

Otoczenie wewnętrzne organizacji składa się z warunków i sił wewnątrz organizacji. Jego główne składowe obejmują zarząd, pracowników i kulturę organizacji.

## ▶ Misja przedsiębiorstwa

To określenie istoty działalności przedsiębiorstwa ze względu na jego rolę i zasadnicze funkcje spełniane na rzecz otoczenia. Określenie misji może dotyczyć stanu istniejącego (czym jest dane przedsiębiorstwo?) lub wyrażać dążenia przedsiębiorstwa (czym powinno być?). W drugim ujęciu poprawnie zdefiniowana misja stanowi najważniejszy, kierunkowy cel działalności, stanowiący punkt odniesienia dla wyznaczania celów niższego rzędu oraz kształtowania strategii przedsiębiorstwa. Podstawę definiowania misji tworzą takie elementy, jak: historia firmy i jej dotychczasowe osiągnięcia, podstawowe wartości uznawane przez jej właścicieli i zarząd, możliwości i zagrożenia wynikające z analizy zmian zachodzących w otoczeniu gospodarczym, kompetencje firmy wynikające z jej wielkości, struktury zgromadzonych zasobów oraz nabytego doświadczenia, a także oczekiwania społeczne, których spełnianie wpływa na ukształtowanie się korzystnego image przedsiębiorstwa (za: J. Altkorn, T. Kramera, 1998, s. 159).

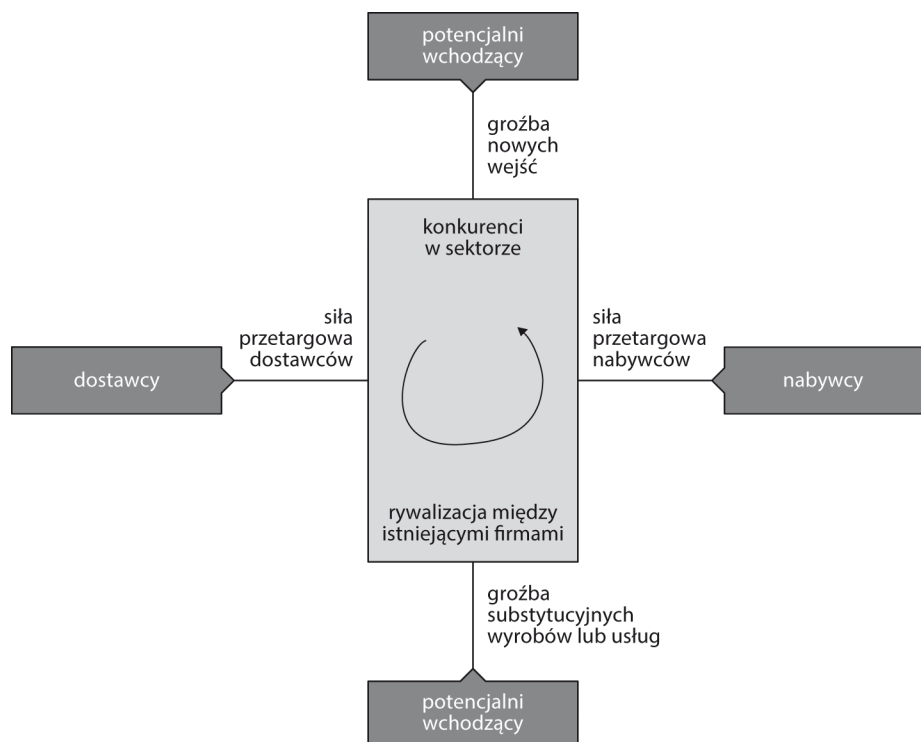
## Analiza 5 sił Portera

M. E. Porter, jako jeden z najwybitniejszych specjalistów od strategii konkurencji, zaproponował logiczną i prostą analizę sektora działalności na podstawie pięciu czynników tj. sił, które wyznaczają natężenie konkurencji w danym sektorze oraz jego rentowność, jak również finansową atrakcyjność dla inwestorów. Do czynników tych należą (M. Porter, 1999):

- ▶ siła przetargowa dostawców;
- ▶ siła przetargowa nabywców;
- ▶ natężenie konkurencji między przedsiębiorstwami w sektorze,;
- ▶ groźba nowych wejść;
- ▶ groźba pojawienia się substytutów.

Możliwości rozwojowe i atrakcyjność sektora są tym mniejsze, im silniejsza jest presja na sektor ze strony dostawców i odbiorców, im większe są możliwości pojawienia się na rynku substytutów lub wejścia do sektora nowych producentów, a także im ostrzejsza jest walka między konkurentami wewnątrz sektora.

Zależności zachodzące pomiędzy wymienionymi czynnikami tj. siłami konkurencyjnymi przedstawia Rysunek 6.



Rysunek 6. Model „pięciu sił” M. E. Portera

Źródło: M. Porter, *Strategia konkurencji. Metody analizy sektorów i konkurentów*, PWE, Warszawa 1999, s. 22.

Przed przystąpieniem do analizy każdej z pięciu sił konkurencji należy określić najważniejsze parametry atrakcyjności ekonomicznej sektora. Atrakcyjność ekonomiczną sektora określają przede wszystkim trzy parametry (A. Tokarski, M. Tokarski, J. Wójcik, 2010):

- ▶ obecna wielkość sektora;
- ▶ przyszła wielkość sektora i spodziewana dynamika sprzedaży w poszczególnych latach;
- ▶ obecna i przewidywana rentowność sektora.

Uproszczona metoda oparta na modelu „pięciu sił”, polega na udzieleniu odpowiedzi na następujące pytania (G. Gierszewska, M. Romanowska, 2001):

- ▶ Ilu konkurentów jest wewnątrz sektora i jakie są ich udziały w rynku?
- ▶ Jakie grupy strategiczne są w sektorze i jakie skupiają przedsiębiorstwa?
- ▶ Jakie kategorie dostawców są w sektorze i jaką mają siłę oddziaływania na badany sektor? Gdzie znajduje się strategiczny dostawca?



- ▶ Jakie są segmenty odbiorców i jaki mają udział w powstawaniu zysku? Którzy odbiorcy mają podstawowe znaczenie dla przedsiębiorstwa? Jak należy przewidywać szanse i zagrożenia związane z popytową stroną sektora?
- ▶ Jak duża jest groźba pojawienia się nowych producentów w sektorze?
- ▶ Jak duża jest groźba pojawienia się substytutów w sektorze i jakie to będą substytuty?

Na podstawie analiz wykonanej prezentowaną metodą można sformułować ogólną ocenę atrakcyjności danego sektora. Wyniki tej analizy mogą być także bardzo pomocne przy przeprowadzaniu analizy szans i zagrożeń oraz mocnych i słabych stron firmy metodą SWOT.

## 2.3. Możliwości i zagrożenia

Szanse i zagrożenia są niezależne od firmy. Te czynniki wynikają z otoczenia, w którym firma zamierza działać. Żadna firma nie jest w stanie przewidzieć dokładnie wszystkich możliwości i zagrożeń, które pochodzą z rynku, jednakże przedsiębiorstwo powinno umieć reagować na zmianę tego otoczenia. Przykładowe możliwości i zagrożenia przedstawia tabela 10.

**Tabela 10. Potencjalne możliwości i zagrożenia**

Możliwości	Zagrożenia
1. Rosnący popyt na produkty.	1. Malejący popyt na produkty.
2. Ograniczona liczba firm konkurencyjnych.	2. Duża liczba firm konkurencyjnych.
3. Bariery wejścia na rynek dla konkurencji.	3. Brak barier wejścia na rynek dla konkurentów.
4. Pojawienie się nowych grup klientów.	4. Rosnące koszty surowców.
5. Wejście na nowe rynki.	5. Brak ulg inwestycyjnych.
6. Dostępność tanich surowców.	6. Segment rynku bardzo atrakcyjny dla konkurentów.
7. Atrakcyjny system ulg inwestycyjnych.	7. Wąski rynek działania.
8. Niskie wynagrodzenia pracowników.	8. Rosnące koszty wynagrodzeń.
9. Wąski segment rynku, nieatrakcyjny dla konkurentów.	9. Mało lojalności nabywcej.
10. Możliwość poszerzenia asortymentu.	10. Kryzys gospodarczy w kraju.
11. Możliwość podjęcia produkcji wyrobów komplementarnych.	11. Wzrost sprzedaży substytutów.
12. Wysoki poziom lojalności nabywców.	12. Niekorzystne rozwiązania systemowe.
13. Ożywienie gospodarcze w kraju.	13. Podatność firmy na recesję i wahania koniunktury.
14. Szybki wzrost rynku.	14. Zmiana potrzeb i gustów nabywców.
15. Ograniczona rywalizacja w sektorze.	15. Niekorzystne zmiany demograficzne.

Źródło: Opracowanie własne.

W rzeczywistości otoczenie tworzy przedsiębiorstwom niejednakowe warunki, zależnie od regionu, branży, sektora, wielkości tych przedsiębiorstw, ich formy własności i wielu innych czynników.

### ▶ **Przykład 1. (G. Gierszewska, M. Romanowska, 2000)**

Dwa zakłady mleczarskie – w Suwałkach i Radomiu, o podobnej wielkości i zbliżonym profilu produkcji, inaczej będą odczytywały makrootoczenie. Bliskość granicy państwa daje zakładom mleczarskim w Suwałkach możliwości eksportu wyrobów na rynek litewski i białoruski, dlatego też polityka zagraniczna rządu w stosunku do krajów wschodnich może stanowić dla nich istotną szansę lub zagrożenie. Wysokie bezrobocie i niskie zarobki w województwie suwalskim powodują zaś niższe koszty robocizny i dają możliwość selekcji pracowników. Sytuację tych dwóch zakładów różnicuje również stan środowiska przyrodniczego i związana z tym jakość podstawowego surowca – mleka, a także stosunek władz lokalnych do przedsiębiorców, istnienie lokalnych funduszy, działalność organizacji regionalnych itp.

Szczególnie duży wpływ na tworzenie szans i zagrożeń w makroskali ma przynależność do branży. Polityka rządu, może różnicować warunki działalności przedsiębiorstw. Branże priorytetowe dla gospodarki mogą liczyć na preferencyjne kredyty, zamówienia rządowe, cła ochronne i inne udogodnienia systemowe oraz finansowe.

**Otoczenie ekonomiczne** przedsiębiorstwa jest wyznaczone przez kondycję gospodarki. Najważniejsze jej wskaźniki to:

- ▶ Stopa wzrostu ekonomicznego, która ma bezpośredni wpływ na wielkość oraz charakter szans i zagrożeń dla przedsiębiorstwa. Wzrost ekonomiczny w całej gospodarce niesie ze sobą wzrost wydatków konsumentów, co stwarza szanse rozwoju przedsiębiorstwa, oraz osłabia walkę konkurencyjną w obrębie poszczególnych branż. Recesja w gospodarce przynosi skutki przeciwne: spadek popytu, wzrost wagi konkurencyjnej, często bankructwa najsłabszych firm. Recesja prowadzi również do wojen cenowych w gałęziach przemysłu znajdujących się w fazie działalności.
- ▶ Wysokość wskaźnika stopy procentowej w gospodarce determinuje poziom popytu na produkty przedsiębiorstwa. W gospodarce rynkowej typowym zachowaniem konsumenta jest pożyczanie pieniędzy na zakup towarów. Przykładem może być rynek handlu nieruchomościami, gdzie wysokość zastawu hipotecznego wprost oddziałują na popyt. Podobnie jest to widoczne na rynku samochodowym czy wyposażenia inwestycyjnego. Stopa procentowa determinuje poziom inwestycji w przedsiębiorstwie. Zagrożeniem dla rozwojowych, ekspansywnych strategii organizacyjnych jest wzrost stopy procentowej, szansą natomiast – jej obniżenie.
- ▶ Wahania kursów walut w stosunku do dolara czy euro kształtują konkurencyjność na rynkach światowych. Jeśli wartość dolara jest porównywalnie niska w stosunku do innych walut światowych, to produkt wytworzony w Stanach Zjednoczonych jest relatywnie tani, w stosunku do wyprodukowanych w innych krajach i konkurencyjny na rynku światowych, nawet jeśli został wyprodukowany po relatywnie wyższych kosztach.
- ▶ Stopa inflacji. Inflacja może destabilizować gospodarkę, ograniczać tempo wzrostu ekonomicznego, powodując wzrost stopy procentowej i wahania kursów wymiany walut. Jeśli inflacja jest wysoka to inwestowanie staje się ryzykowne.

**Analiza konkurencji** pozwala ocenić sytuację przedsiębiorstwa, warunki jego funkcjonowania i rozwoju w określonym otoczeniu konkurencyjnym, ograniczonym jednak przez M. Portera do pojedynczego sektora, czyli węższej rozumianego rynku, na którym działa grupa przedsiębiorstw oferujących wyroby lub usługi o podobnym przeznaczeniu (substytuty). Atrakcyjność sektora dla przedsiębiorstw, które w nim działają lub zamierzają działać, jest zależna od natężenia pięciu sił napędowych konkurencji wewnątrz sektora. Są to (J. Targalski, A. Francik 2009):

- ▶ **Groźba wejścia do sektora nowych konkurentów.** Atrakcyjność sektora dostrzegana jest nie tylko przez przedsiębiorców, którzy już w nim działają, ale także przez innych, potencjalnych przedsiębiorców. Dla tych wewnątrz sektora stanowią oni zagrożenie, bo mogą zdecydować się na wejście, wnosząc nieszablonowe pomysły i nowe zasoby, na tyle znaczące, że będą wystarczające do przełamania istniejących barier wejścia i uzyskania korzystnej pozycji konkurencyjnej. Aby chronić się przed zagrożeniem, przedsiębiorcy zajmujący już pewną pozycję w sektorze tworzą lub powiększają bariery wejścia dla potencjalnych przedsiębiorców, Powiększają rozmiary działalności, aby wykorzystać ekonomię skali. Różnicują produkty, chcąc podnieść wymagania kapitałowe, koszty startu i rozruchu oraz wymogi czasowe dla nowo wchodzących. Uzależniają od siebie nabywców przez szkolenia, dodatkowe wyposażenie, pomoc techniczną itp. Starają się wzmocnić bariery od nich niezależne, do których należy np. polityka państwa (wymóg posiadania licencji, spełnienia norm bezpieczeństwa czy wymogów ochrony środowiska). Konkurenci w sektorze starają się „wyprzedzać” innych, podejmując różnorodne działania w zakresie oferowanych produktów, np. nowe wzory, oferowanych cen, kampanii reklamowych lub promocyjnych.
- ▶ Kluczowe znaczenie dla przedsiębiorcy ma **zagrożenie wejściem do sektora nowych firm**, zachęconych jego atrakcyjnością. Nowo wchodzące firmy wnoszą do sektora nowy potencjał, nowe pomysły biznesowe i nowe strategie konkurowania, potrzebne do uzyskania udziału w rynku. Stanowią tym samym zagrożenie dla firm już obecnych w sektorze, zmuszają je do reakcji obronnej i kreowania nowych strategii konkurencji.
- ▶ **Groźba pojawienia się wyrobów lub usług substytucyjnych**, tzn. spełniających takie same funkcje, jak wyroby danego sektora (np. okna drewniane, plastikowe, aluminiowe). Występowanie tej groźby oznacza, że firmy w sektorze muszą konkurować nie tylko ze sobą, ale też z firmami konkurencyjnych sektorów. Wprowadzane substytuty do danego sektora powodują spadek cen, a w konsekwencji i zysków, co czyni sektor mniej atrakcyjnym.

- ▶ Kolejny czynnik to **siła przetargowa nabywców**, która może zmuszać przedsiębiorców w sektorze do obniżek cen, zwiększenia zakresu usług czy podniesienia jakości wyrobów. Szczególnie nabywcy, którzy zakupują duże ilości produktów są w stanie wywierać skuteczny nacisk na sprzedawców. Także ci, którzy bardziej selektywnie lokują swoje zamówienia – ze względu na ich wysokie koszty – są obiektem szczególnych zabiegów ze strony sprzedawców. Siła nabywców wzrasta też, gdy wyroby sektora są znormalizowane lub mało zróżnicowane, co ułatwia im zakup u dowolnego sprzedawcy. Podobnie nabywcy dysponującym pełną informacją o popycie, występujących na rynku cenach czy ponoszonych przez dostawców **kosztach** zyskują większą siłę przetargową. Dla firm działających w sektorze, gdzie występują takie zjawiska, bardzo ważnym problemem jest więc ostrożny dobór nabywców, tak aby w miarę możliwości zniwelować ich siłę przetargową.
- ▶ **Siła przetargowa dostawców**. Stwarza ona dla sektora zagrożenia przeciwne do tych, jakie wywołuje siła przetargowa nabywców, a więc możliwość podwyżek cen ograniczenia zakresu usług lub obniżenia jakości wyrobów. Dostawcy wykorzystują swą siłę przetargową szczególnie wtedy, gdy są bardziej skoncentrowani niż nabywcy, a łącząc się w grupy, są nawet w stanie zagrozić niektórym nabywcom przejściem prowadzonej przez nich działalności. Siła przetargowa dostawców występuje wyraźnie w sektorach, w których nie muszą oni konkurować z wyrobami substytucyjnymi oraz wtedy, gdy ewentualna zmiana dostawcy może się okazać zbyt kosztowna dla nabywcy (J. Targalski, A. Francik, 2009).

Pozycję konkurencyjną przedsiębiorstwo może sobie zapewnić tylko w procesie ciągłej budowy przewagi konkurencyjnej, która polega na zdolności do nieustannego dodawania przez przedsiębiorstwo wartości, uznawanych zarówno przez klientów, jak i przez właścicieli przedsiębiorstwa.

Przewaga rynkowa ma różne źródła, wpływają na nią też różne czynniki. Znaczący small businessu uważają, że w takich firmach można budować przewagę konkurencyjną, zwracając uwagę na cztery główne źródła. Należą do nich:

- ▶ skupienie na kliencie;
- ▶ dbałość o jakość;
- ▶ koncentracja na innowacjach;
- ▶ staranna obsługa.

Służy temu zarządzanie relacjami z klientami.

## Zarządzanie relacjami z klientami

**Zarządzanie relacjami z klientami CRM** (ang. *CustomerRelationship Management*) – to zestaw procedur i narzędzi istotnych w zarządzaniu kontaktami z klientami.

**CRM**, jako przyjęta strategia działania koncentruje się na wspieraniu czynności marketingowych, procesu sprzedaży oraz wszelkich działań związanych z obsługą klienta poprzez skierowanie uwagi wyłącznie na potrzeby konsumenta, ze szczególnym uwzględnieniem wykształconych kulturowo wzorców. Dotyczy wszystkich tych aspektów zarządzania, które mają na celu zaspokojenie potrzeb klientów. W tym wypadku największy nacisk położony jest na wykorzystanie i udoskonalenie cyklu życia konsumenta. Głównym zadaniem CRM jest więc bezpośrednio bieżące kreowanie lojalności klientów poprzez efektywne zaspokajanie ich indywidualnych potrzeb, zaś pośrednio pozyskiwanie coraz to nowych konsumentów

## Zalety

Koncepcja CRM istnieje w świecie biznesu przez długi czas, ale w ostatnich latach wykorzystanie CRM wzrosło ze względu na lepszy dostęp do technologii i integracji danych. Firmy powinny przeanalizować rozwiązania CRM w celu utrzymania istniejących klientów i służyć ich unikalnym potrzebom. Jeśli firmy koncentrują się na dostarczaniu wysokiej, jakości usług, które są dostosowane do tych klientów, a następnie, będą budować lojalność, co z kolei będzie skutkowało zwiększeniem przychodów firm.

W rezultacie, rozwiązania CRM pozwalają firmom na zwiększenie przychodów poprzez przechwytywanie nowych klientów, utrzymanie istniejących, a to wszystko dzięki lepszemu zarządzaniu ich działalnością.

## Zastosowanie

- ▶ W systemie informatycznym odnotowano kupno usługi lub towaru;
- ▶ Niezapłacenie rachunku w odpowiednim terminie powoduje podjęcie akcji wysłania ponaglenia;
- ▶ Jeśli system nie odnotuje wpływu pieniędzy w odpowiednim czasie spróbuje podjąć próbę przypomnienia klientowi o tym fakcie np. automatycznie drukując korespondencję do wysyłki, wysyłając SMS itp.;
- ▶ Jeśli okaże się, że np. ponaglenie nie przyniosło skutku, system „klasy CRM” może dodać takiego klienta do kolejki rozmów telefonicznych pracownika firmy lub powiadomić prawnika firmy z prośbą wszczęcia postępowania sądowego;
- ▶ Automatyzacja wysyłania kartek urodzinowych dla klientów firmy, ofert handlowych (często sprofilowanych dzięki danym wcześniej zebranych w CRM).

Po dokonaniu klasyfikacji klientów i produktów na odpowiednie grupy, przedsiębiorstwo w stosunku do nich podejmuje odpowiednią decyzję. I tak, wskazuje się na następujące, możliwe do realizacji (najkorzystniejsze), alternatywne rozstrzygnięcia:

- ▶ Przekonanie nieopłacalnych klientów do rezygnacji z dalszej współpracy lub przekonanie ich do zakupu produktów wysoko opłacalnych dla przedsiębiorstwa.

## Związek z klientem

Wszystkie relacje związane z danym klientem określamy mianem **związku**. Składa się z **epizodów**, które dzieli się na:

- ▶ Transakcje finansowo-usługowe;
- ▶ Kontakty, rozmowy.



## TEMATY DO DYSKUSJI

1. Wyjaśnij mechanizmy rządzące rynkiem, w kontekście wyboru przedsięwzięcia czy znalezienia dla niego odpowiedniej lokalizacji.
2. Zbierz informacje o rynku w kontekście wybranego przedsięwzięcia i zaprezentuj je w kontekście możliwości i zagrożeń.
3. Omów i uzasadnij rolę Internetu w określaniu lokalizacji przedsiębiorstwa.
4. Jakie czynniki należałoby wziąć pod uwagę przy podejmowaniu decyzji, gdzie prowadzić działalność?
5. Jakimi kryteriami należy się kierować przy wyborze rynku docelowego?
6. Jakie czynniki kształtują postępowanie konsumenta na rynku?
7. Jakie czynniki należy wziąć pod uwagę przy określaniu otoczenia dalszego przedsiębiorstwa i jakie podmioty przy określaniu otoczenia bliższego?
8. Od czego zależy atrakcyjność ekonomiczna sektora, w którym chciałbyś prowadzić działalność?
9. Jakie znaczenie dla przedsiębiorcy ma CRM?

## **Bibliografia:**

Altkorn, J., Kramera, T., *Leksykon marketingu*. Warszawa 1998.

Barrow C., Barrow P., Brown R., *Biznes plan w małej firmie*, Gliwice 2001.

Gierszewska G., Romanowska M., *Analiza strategiczna przedsiębiorstwa*, Warszawa 2001.

Nowacka A., Nowacki R., *Podstawy marketingu*, Warszawa 2004.

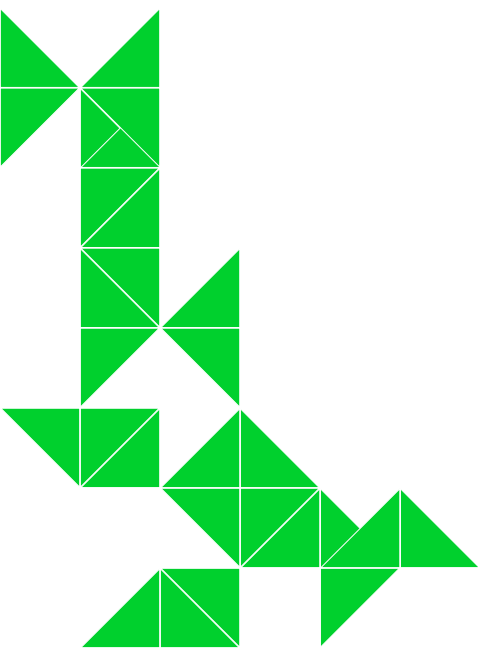
Porter M. *Strategia konkurencji. Metody analizy sektorów i konkurentów*, Warszawa 1999.

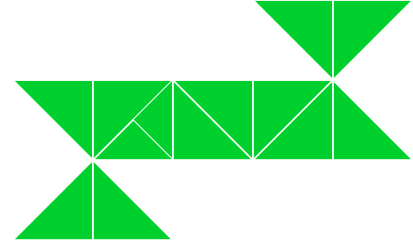
Rocky W. Griffin, *Podstawy zarządzania organizacjami*, Warszawa 2007.

Targalski J., Francik A. (red. nauk.), *Przedsiębiorczość i zarządzanie firmą. Teoria i praktyka*, Warszawa 2009.

Tokarski A., Tokarski M., Wójcik J., *Biznesplan po polsku*, Warszawa 2010.

Zaleśkiewicz, T., *Przedsiębiorczość i podejmowanie ryzyka*, [w:] T. Tyszka (red.), *Psychologia ekonomiczna*. Gdańsk 2004.





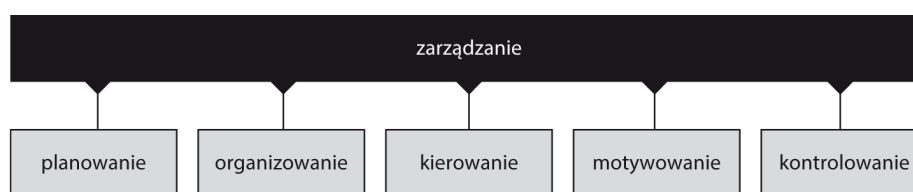
## 3. Planowanie działalności

### 3.1. Istota planowania

- ▶ **Za każdym razem, kiedy widzisz biznes, który odnosi sukces, oznacza to, że ktoś kiedyś podjął odważną decyzję”**

*Peter Drucker*

Planowanie to wybór celów, określenie sposobów ich osiągnięcia, precyzowanie stosownych zadań i terminów ich wykonania oraz uruchomienie niezbędnych do tego zasobów – ludzkich, rzeczowych i finansowych. W efekcie powstaje plan działalności przedsiębiorstwa. Plan powinien mieć formę pisemną, gdyż wtedy możemy dokonać porównania przyjętych założeń z faktycznymi osiągnięciami oraz mamy możliwość wprowadzenia korekt i poprawek.



**Schemat 5. Funkcje zarządzania**

Źródło: Opracowanie własne.

Poprzez planowanie przedsiębiorstwo zmniejsza ryzyko związane z prowadzoną działalnością. Jasno określone zadania i cele ułatwiają realizację tych zadań oraz pomagają w podejmowaniu decyzji.

Według kryterium charakteru możemy wyróżnić: planowanie strategiczne, taktyczne oraz operatywne (P. Banaszyk, R. Fimińska-Banaszyk, A. Stańda, 1997) .

**Planowanie strategiczne** – obejmuje okres, co najmniej kilkuletni. Jest planem przyszłości, dzięki któremu o wiele łatwiej wytyczyć ścieżki postępowania i realizacji celu. Określa priorytety działania firmy i jest planem kompleksowym. Planowanie strategiczne:

1. udziela odpowiedzi na takie pytania, jak: „czym się zajmujemy i czym się powinniśmy zajmować”, „kim są, a kim powinni być nasi klienci?”.

2. tworzy ramy dla planowania taktycznego i operacyjnego oraz podstawy codziennych decyzji. Wobec konieczności podjęcia takiej decyzji, kierownik może zapytać: „który z możliwych kierunków działania będzie najlepiej odpowiadać naszej strategii?”.
3. wiąże się z dłuższym okresem niż inne rodzaje planowania.
4. ułatwia koncentrację energii i zasobów organizacji na najważniejszych działaniach.
5. jest działalnością najwyższego szczebla w tym znaczeniu, że musi w nim czynnie uczestniczyć kierownictwo naczelne, gdyż tylko ono ma dostateczne zasoby wiedzy i doświadczenia, aby uwzględnić wszystkie aspekty funkcjonowania danej organizacji. Jego zaangażowanie jest ponadto konieczne dla wywołania i podtrzymania zaangażowania na niższych szczeblach.

**Planowanie taktyczne** - obejmuje szeroki zakres działań podmiotu gospodarczego i z reguły nie jest adresowane do szczegółowego wykonawcy, gdyż określa zadanie w formie ogólnej dla całej jednostki gospodarczej. Planowanie to dotyczy zwykle okresu około jednego roku. W planie taktycznym można wyodrębnić część techniczną, która określa czynniki rzeczowe biorące udział w działalności gospodarczej jednostki organizacyjnej oraz część finansową, określającą nakłady pieniężne i wynik finansowy działalności. Planowanie taktyczne, mające charakter problemowy, może częściowo wchodzić do planu funkcjonalnego jednostki prowadzącej działalność gospodarczą (np. w skład biznesplanu) lub może stanowić podstawę jego sporządzenia lub uzasadnienia merytorycznego.

**Planowanie operacyjne** - ma charakter planowania wykonawczego w porównaniu z planowaniem strategicznym. Polega na określeniu celów pośrednich w stosunku do celów określonych w planowaniu strategicznym. Planowanie operacyjne uwzględnia:

1. pojedyncze zdarzenia lub działania,
2. małą liczbę zmiennych,
3. osiągnięcie założonych celów i wykonania zadań,
4. bilansujący i odtwórczy charakter czynności planistycznych,
5. małą agregację informacji,
6. krótki horyzont planowania.

**Plan operacyjny** jest zbiorem decyzji określających konkretne zadania i działania konieczne do poprawnego ich wykonania w przewidzianym ściśle czasie oraz warunki, które muszą być dotrzymane przez realizację poszczególnych zadań i czynności (technologiczne, ekonomiczne, organizacyjne), a także warunki zewnętrzne (np. ochrony środowiska).

Przedmiotem planowania operacyjnego są wszystkie decyzje, które w różnych obszarach działania przedsiębiorstwa muszą być podejmowane na bieżąco, aby terminowo i skutecznie realizować strategię oraz zapewnić przetrwanie i rozwój firmy. W planowaniu operacyjnym wyróżniamy; planowanie marketingowe, planowanie sprzedaży, planowanie działalności podstawowej, planowanie zaopatrzenia, planowanie zatrudnienia, planowanie kosztów, planowanie finansowe itp. Planowanie strategiczne szkicuje perspektywy rozwoju, a planowanie operacyjne określa konkretne sposoby realizacji tych zamierzeń.

Opracowanie dobrego planu wymaga znajomości i stosowania następujących zasad planowania:

1. **zasady realności planu**, czyli określenie realnych możliwości wykonywania zadań. Nie należy tworzyć planu opartego na marzeniach, wykraczającego poza możliwości wykonawcze przedsiębiorstwa.
2. **zasady wariantowych rozwiązań**, polega na dochodzeniu do celów za pomocą różnych, wariantowych rozwiązań. Musimy mieć nie tylko plan A, ale również alternatywę czyli plan B lub nawet C.
3. **zasada koncentracji**, to umiejętne połączenie celów i środków.
4. **zasada gospodarności** oznacza uzyskiwanie najlepszych efektów przy jak najmniejszych kosztach i środkach,
5. **zasada elastyczności planowania** to przewidywanie zmiany warunków rynku i dostosowywanie się do tych zmian,
6. **zasada podstawowego ogniwa** polega na określeniu najważniejszych zadań decydujących o wynikach.

Plan opracowany zgodnie z zasadami planowania uwzględnia możliwości potencjalnego przedsiębiorcy, czas na rozwój firmy, spodziewane, zyski, straty, inwestycje. W małej firmie osoba sporządzająca plan jest właściciel lub menedżer, niejednokrotnie to ta sama osoba. Błędem jest, jeśli mała firma lub osoba, która zamierza założyć firmę, wyznaczając datę rozpoczęcia działalności nie ma wyraźnie wytyczonych etapów postępowania. Decydując się na założenie firmy najpierw należy zaplanować działania najlepiej na parę lat do przodu.

## 3.2. Biznesplan

Podstawą każdego działania jest idea- pomysł, który powinien być dobrze przemyślany i skrupulatnie zaplanowany. Podstawą odniesienia sukcesu jest dokładne przeanalizowanie produktu lub usługi, którą chcemy wprowadzić na rynek oraz ocena naszych możliwości. Plan przedsięwzięcia gospodarczego nazywany jest biznesplanem.

**Biznesplan**<sup>1</sup>- narzędzie planistyczne wykorzystywane przy ocenie opłacalności przedsięwzięć gospodarczych. Sporządzany na potrzeby wewnętrzne firmy, jest także narzędziem komunikacji zewnętrznej – m.in. w celu pozyskania źródeł finansowania inwestycji. Kompleksowy spis celów oraz zadań, jakie stawia się przed przedsiębiorstwem. Jego elementami są m.in. analiza finansowa, analiza rynku, analiza SWOT.

Biznesplan ustalany jest indywidualnie dla każdej działalności, jego zawartość jest elastyczna. Znaczenie przy pisaniu biznesplanu ma również adresat, czyli instytucja dla której go przygotowujemy. Biznesplan powinien być napisany w sposób czytelny, prosty i przemyślany. Informacje zawarte w nim powinny być rzetelne i obiektywne. Istotą biznesplanu jest określenie celów oraz ustalenie sposobów, metod i środków ich osiągnięcia (Z. Pawlak, 2002). W firmie pełni on trzy podstawowe **funkcje**:

- ▶ służy do rozwijania pomysłów związanych z prowadzeniem przedsiębiorstwa; dzięki temu popełnia się błędy na papierze, a nie w praktyce,
- ▶ służy do oceny działalności przedsiębiorstwa po okresie, na jaki był stworzony; uważna obserwacja i analiza wskażą, na ile założenia biznes planu były realne, jakie są osiągnięcia i w których punktach firma odeszła od jego założeń,
- ▶ służy, jako podstawa wniosku kredytowego oraz ważny dokument przy rozmowach biznesowych (np. przy poszukiwaniu inwestora).

Tabela 11. Struktura biznesplanu

Elementy biznesplanu	Charakterystyka
Strona tytułowa	Adresat (np. bank), określenie przedsięwzięcia, lokalizacja przedsięwzięcia, koszt przedsięwzięcia, planowana wysokość kredytu, inne źródła finansowania, wnioskodawca, adres wnioskodawcy, imię i nazwisko szefa, odpowiedzialna osoba za przedsięwzięcie i jej adres, autor biznesplanu, pieczęcie i podpisy.
Streszczenie, czyli krótki opis przedsięwzięcia	Nazywane podsumowaniem menedżerskim i ma za zadanie wzbudzić zainteresowanie osób podejmujących decyzje oraz zachęcać do dalszej lektury. Powinno zawierać krótki przegląd najważniejszych elementów biznesplanu.
Charakterystyka przedsiębiorstwa	Obejmuje krótką historię biznesu lub przedsięwzięcia, jej cele, misję, status prawny, wielkość, sytuację na rynku, konkurencyjność ofert, wartość majątku, źródła jego pochodzenia, kondycję finansową i inne istotne informacje, np. dotyczące jakości produktu oraz działań chroniących środowisko.
Charakterystyka produktu lub usługi	Opis produktu pokazujący techniczne cechy produktu wytwarzanego przez naszą firmę, jego unikalność oraz potrzebę wprowadzenia.
Zasoby ludzkie/Personel	Opisuje umiejętności pracowników, wykształcenie, obowiązki osób zarządzających działalnością, stosunki własnościowe oraz sposób podziału własności, role osób w zespole, opis systemu motywacji itp. Może również zawierać wykaz i charakterystykę doradców biznesu.
Plan marketingowy	Obejmuje analizę rynku, identyfikację klientów, lokalizację, dystrybucję, promocję oraz politykę cenową.
Plan organizacyjny	Pracownicy – opis planowego zatrudnienia, zasady wynagradzania pracowników, tryb i koszty szkolenia. Dostawcy – wytypowanie firm współpracujących i określenie sposobów nawiązania z nimi współpracy. Księgowość – określenie decyzji o rodzaju prowadzonej księgowości.
Harmonogram realizacji	Obejmuje opis czynności niezbędnych do realizacji przedsięwzięcia, kolejność i czas trwania poszczególnych czynności, osoby odpowiedzialne za wdrożenie i sfinalizowanie poszczególnych działań.
Analiza ryzyka	Szanse i zagrożenia, działania podejmowane w celu eliminacji zagrożeń oraz wykorzystania szans.
Analiza ekonomiczno-finansowa	To fundament biznesplanu i punkt jego wyjścia, obejmuje analizę finansową przedsięwzięcia tj. kapitał własny i obcy, przychody, koszty, zysk, bilans, rachunek zysków i strat, analizę wskaźnikową, rachunek przepływów środków pieniężnych (cashflow).

Załączniki: Szczegółowe tabelaryczne zestawienia i wyliczenia, schematy, wykresy.

Źródło: Opracowanie na podstawie A. Rozłucka, *Mam biznes*, [www.mambiznes.pl/artykuly/czytaj/id/50](http://www.mambiznes.pl/artykuly/czytaj/id/50).



Mimo, że opracowanie biznesplanu jest czasochłonne i pracochłonne nie ma wątpliwości, że warto go opracować rozpoczynając przygodę z biznesem. Pisząc biznesplan zwiększamy możliwość osiągnięcia sukcesu, a nasze pomysły nabierają realnego kształtu. Błędy popełnione w biznesplanie na papierze możemy zawsze skorygować, natomiast nie zawsze da się naprawić błędy popełnione w rzeczywistości.

### 3.3. Analiza finansowa

Celem przedsiębiorstwa jest osiągnięcie przez niego zysków poprzez efektywne zarządzanie. Aby realizować ten cel, niezbędne są informacje pozyskiwane z działu księgowości. Firmy sporządzają dokumentację, w której przedstawiona jest ich sytuacja majątkowa i finansowa. Do najważniejszych dokumentów firmy należą bilans oraz rachunek zysków i strat (W. Gos, 2011).

#### Bilans

Bilans to dwustronne zestawienie wartości środków gospodarczych, czyli aktywów oraz źródeł ich pochodzenia, czyli pasywów sporządzony w określonej formie i na określony dzień (B. Gierusz, 2011).

#### Prawidłowo sporządzony bilans zawiera:

Słowo bilans.

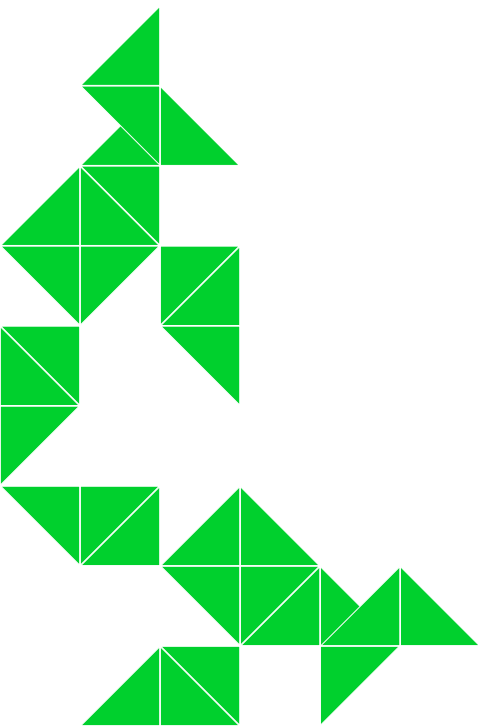
Oznaczenie momentu bilansowego, czyli daty, na którą bilans jest sporządzony.

Dokładne oznaczenie podmiotu, dla którego jest sporządzany.

Wyszczególnienie nazw i wartości poszczególnych grup aktywów i pasywów.

Podpis osoby odpowiedzialnej za prowadzenie dokumentacji finansowej przedsiębiorstwa oraz podpis kierownika jednostki.

Datę sporządzania bilansu.



**Tabela 12. Podstawowe składniki bilansu**

AKTYWA	PASywa
<b>Aktywa trwałe</b>	<b>Kapitał własny</b>
<p>I. Rzeczowe aktywa trwałe Środki trwałe- maszyny, urządzenia, grunty, środki transportu.</p> <p>II. Wartości niematerialne prawne Niematerialne składniki majątku np. licencje, znaki towarowe, prawa autorskie.</p> <p>III. Należności długoterminowe Środki pieniężne, różnego rodzaju pożyczki i kredyty o terminie spłaty przekraczającym rok.</p> <p>IV. Inwestycje długoterminowe Różnego rodzaju aktywa finansowe, nieruchomości i wartości niematerialne i prawne, które nie są użytkowane przez jednostkę, lecz zostały nabyte w celu osiągnięcia korzyści ekonomicznych wynikających ze wzrostu ich wartości np. akcje, obligacje, nieruchomości.</p>	<p>Kapitał podstawowy Równowartość środków wniesionych bezterminowo do jednostki przez jej właścicieli, pochodzących ze źródeł zewnętrznych. Wniesienie wkładów kapitałowych przez właścicieli jest warunkiem powstania jednostki i uruchomienia przez nią działalności.</p> <p>Kapitał zapasowy Jeden z kapitałów własnych jednostki, przeznaczony przede wszystkim na pokrycie strat. Zasady jego tworzenia określone są, w zależności od formy prawnej jednostki, w ustawie, umowie spółki lub jej statucie. Głównym jego źródłem są odpisy z wygospodarowanego zysku.</p> <p>Zysk/strata z lat ubiegłych Wynik finansowy, czyli wyrażony w pieniądzu rezultat działalności gospodarczej, który nie został rozliczony w poprzednich latach.</p> <p>Zysk/strata netto Wynik finansowy z danego roku obrotowego.</p>
<b>Aktywa obrotowe</b>	<b>Kapitał obcy</b>
<p>Zapasy Zapasy obejmują materiały, surowce, produkcję w toku, produkty gotowe, towary oraz zaliczki na poczet przyszłych dostaw, wszystkich wymienionych rodzajów zapasów.</p> <p>Należności krótkoterminowe Do należności krótkoterminowych zalicza się wszystkie należności z tytułu dostaw i usług oraz inne należności wymagalne w okresie krótszym niż 12 miesięcy od dnia bilansowego.</p> <p>Inwestycje krótkoterminowe W bilansie wykazuje się tu między innymi środki pieniężne w kasie oraz na rachunkach bankowych jak również inne odpowiedniki pieniężne takie jak weksle i чеки. W pozycji tej ujęte są również inwestycje firmy w krótkoterminowe papiery wartościowe jak również akcje i papiery dłużne o okresie zapadalności powyżej roku, jeśli firma zakupiła je z zamiarem dalszej odsprzedaży w krótkim czasie (poniżej 12 miesięcy).</p>	<p>Rezerwy na zobowiązania tworzy się, aby uwzględnić w sprawozdaniu finansowym koszty, które dotyczą danego roku obrachunkowego, ale jeszcze nie powstały, można je jednak przewidzieć z dużym prawdopodobieństwem oraz oszacować ich wielkość. Rezerwy tworzy się np. z tytułu oczekiwanych strat wynikających ze zwrotów gwarancyjnych towarów i produktów, strat wynikających z udzielonych poręczeń i operacji kredytowych lub skutków toczącego się postępowania sądowego.</p> <p>Zobowiązania długoterminowe Zobowiązania długoterminowe obejmują zobowiązania o terminie zapadalności powyżej 12 miesięcy. Zalicza się tu przede wszystkim długoterminowe kredyty i pożyczki, obligacje i inne zobowiązania z tytułu emisji długoterminowych dłużnych papierów wartościowych.</p> <p>Zobowiązania krótkoterminowe Zobowiązania o terminie spłaty poniżej jednego roku zaliczane są do zobowiązań krótkoterminowych. Jest to obszerna grupa obejmująca zobowiązania z tytułu dostaw i usług, z tytułu wynagrodzeń, podatków, ceł, ubezpieczeń, kredytów i pożyczek, z tytułu emisji krótkoterminowych papierów wartościowych, zobowiązań wekslowych, otrzymanych zaliczek na dostawy oraz innych zobowiązań</p>

Źródło: Opracowanie własne.

## Aktywa w bilansie

Aktywa to zasoby majątkowe o wiarygodnie określonej wartości, powstałe w wyniku przeszłych zdarzeń i mające spowodować w przyszłości wpływ do jednostki korzyści ekonomicznych. Ich podstawowy podział to podział na **aktywa trwałe** i **aktywa obrotowe**. Głównym kryterium tego jest czas, przez jaki firma planuje wykorzystywać dane składniki. Ogólnie przyjętą graniczną długością okresu, od którego zależy klasyfikacja aktywów do jednej z grup jest 12 miesięcy (A. Rutkowski, 2003).

## Pasywa w bilansie

Pasywa to inaczej źródła finansowania majątku. Ich podstawowy podział to podział na własne źródła finansowania - kapitał własny oraz obce źródła finansowania - zobowiązania (kapitał obcy). Zobowiązania dzielą się tak jak aktywa na długo i krótkoterminowe zależnie od tego, czy zostaną spłacone w ciągu 12 miesięcy czy później<sup>2</sup>.

## Rachunek zysków i strat

Rachunek zysków i strat to część sprawozdania finansowego, w której znajduje się zestawienie wszystkich przychodów oraz kosztów danej spółki wynikających z jej działalności.

## Przychody

Przychody to uzyskany lub należny wpływ wartości, korzyści materialnych w ramach prowadzonej działalności gospodarczej<sup>3</sup>. W rachunkowości przychody to przyływy aktywów albo inne zwiększenie aktywów danego podmiotu lub zmniejszenie jego zobowiązań (lub kombinacja powyższych) wynikające z dostarczenia lub produkcji dóbr, świadczenia usług lub innych czynności będących podstawową działalnością danego podmiotu. (B. Gierusz, 2011).

W rachunku zysków i strat końcowy wynik finansowy oblicza się globalnie, a procedura jego ustalania jest następująca:

## Ustalanie wyniku finansowego

(+) Przychody z działalności podstawowej (statutowej) (-) Koszty działalności podstawowej
= Wynik operacji sprzedaży (zysk lub strata)
(+) Przychody z pozostałej działalności operacyjnej (-) Koszty pozostałej działalności operacyjnej
= Wynik operacyjny (zysk lub strata)
(+) Przychody działalności finansowej (-) Koszty działalności finansowej
= Wynik działalności gospodarczej (zysk lub strata)
(+) Zyski nadzwyczajne (-) Straty nadzwyczajne
= Wynik brutto (zysk lub strata)
(-) Obowiązkowe obciążenia wyniku finansowego
= Wynik netto (zysk lub strata)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie ustawy o rachunkowości

## Koszty

**W związku z prowadzoną działalnością gospodarczą przedsiębiorstwo ponosi koszty. Koszty dzielimy na<sup>4</sup>:**

- ▶ **koszty stałe** –koszty przedsiębiorstwa, których nie da się zmienić w krótkim okresie bez wprowadzenia radykalnych zmian w firmie, a ich wysokość nie zależy od wielkości produkcji. Przykładem kosztów stałych jest amortyzacja budynków fabrycznych lub koszt ich dzierżawy.
- ▶ **koszty zmienne** –koszty, jakie przedsiębiorca ponosi na działania związane bezpośrednio z produkcją. Poziom tych nakładów zależny jest wprost od wielkości produkcji, czyli, że w przypadku

2. [www.druki.gofin.pl/wzor,788,556,bilans-uproszczony.html](http://www.druki.gofin.pl/wzor,788,556,bilans-uproszczony.html), 02.02.2013.

3. Ustawa z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych (t.j. Dz. U. 2012 nr 0 poz. 361) – dalej cytowana jako: PDOFU

4. [www.pl.wikipedia.org/wiki/Koszty\\_rachunkowe](http://www.pl.wikipedia.org/wiki/Koszty_rachunkowe), 26-03-2013

zwiększenia produkcji koszty zmienne rosną, zmniejszają się natomiast wraz ze spadkiem produkcji. Koszty zmienne wynoszą zero, gdy przedsiębiorca nic nie produkuje. Do kosztów zmiennych związanych z produkcją zaliczamy nakłady na surowce, towar, roboczogodziny itp. oraz energia lub paliwo.

**Koszty całkowite = koszty stałe + koszty zmienne**

**Koszty jednostkowe = koszty całkowite/ ilość wyprodukowanych sztuk**

W rachunkowości przedsiębiorstwa przychody i koszty pokazane są w rachunku zysków i strat. Dzięki niemu można obliczyć zysk netto, który jest różnica pomiędzy przychodami a kosztami.

## Wskaźniki analizy finansowej

Oceny działalności przedsiębiorstwa możemy dokonać stosując różnego rodzaju wskaźniki. Do oceny efektów finansowych działalności przedsiębiorstwa stosuje się wskaźniki rentowności inaczej zyskowności.

1. Wskaźnik rentowności sprzedaży – określa ile zysku generuje firma z 1 zł przychodu netto.

**ROS = zysk netto/sprzedaż netto\*100 %**

Im jest on wyższy, tym wyższa jest efektywność dochodów, co oznacza, że dla osiągnięcia określonej kwoty zysku przedsiębiorstwo musi zrealizować niższą sprzedaż niż wówczas, gdy rentowność sprzedaży byłaby niższa.

2. Wskaźnik rentowności aktywów – określa ile zysku netto przyniosły aktywa o wartości 1 zł

**ROA= zysk netto/ aktywa \* 100 %**

Im wyższy poziom rentowności aktywów, tym lepsza sytuacja finansowa przedsiębiorstwa. Wielkością ROA zainteresowani są szczególnie kredytodawcy firmy, gdyż stanowi on cenne źródło informacji o zdolności majątku do przynoszenia dochodów, będących źródłem rat i odsetek od zaciągniętych kredytów. Banki oczekują, aby wskaźnik ten osiągał poziom 2-6 proc., przy czym w małych firmach powinien on być wyższy niż w dużych. Niski poziom wskaźnika na tle przedsiębiorstw z tej samej branży oznacza zazwyczaj niewykorzystanie pełnych mocy wytwórczych firmy.

3. Wskaźnik rentowności kapitałów własnych –pokazuje, jaki zysk generuje zaangażowany kapitał własny.

**ROE = zysk netto / kapitał własny \* 100%**

Wzrastający poziom tego wskaźnika świadczy o wyższej efektywności zaangażowanego kapitału. Jest to sygnał dla udziałowców, że przedsiębiorstwo właściwie wykorzystuje posiadane zasoby. Dlatego właśnie w przypadku nowej emisji udziałów (akcji) należy zwrócić szczególną uwagę na poziom tego wskaźnika oraz jego zmiany w czasie. Trzeba jednak pamiętać, że wielkość tego wskaźnika będzie podlegała znacznym zaburzeniom, szczególnie tuż po przeprowadzeniu nowej emisji akcji (wówczas w mianowniku będzie już zawarta wielkość „świeżego” kapitału, który nie został jeszcze wykorzystany w działalności przedsiębiorstwa).

**Rentowność** inaczej dochodowość, opłacalność, zyskowność - to zdolność kapitału do wytworzenia dochodu i jest mierzona różnymi wskaźnikami. Liczy się ją, jako stosunek wyniku finansowego przedsiębiorstwa do ogółu kosztów uzyskania przychodu.

**Próg rentowności (BEP -ang. breakeven point)** jest odzwierciedleniem sytuacji, w której przychody ze sprzedaży pokrywają koszty stałe i zmienne przedsiębiorstwa<sup>5</sup>, informuje nas, kiedy sprzedaż zacznie przynosić zyski. Nazywany też **punktem krytycznym** ze względu na jego wagę dla rachunku ekonomicznego przedsiębiorstwa. Wskaźnik BEP możemy wyliczyć stosując metodę ilościową i wartościową.

BEP ilościowy – pokazuje, przy jakiej ilości wyprodukowanych towarów przychody zrównoważą się z kosztami.

**BEP ilościowy = koszty stałe /cena – koszty jednostkowe zmienne**

BEP wartościowy – informuje, przy jakiej cenie sprzedaży przedsiębiorstwo zacznie przynosić zyski.

**BEP wartościowy = koszty stałe/ cena – koszty jednostkowe zmienne.**

### 3.4. Marketing

W zarządzaniu własną firmą bardzo ważna jest wiedza o tym, co robić i jak to robić by osiągnąć zysk, czyli wiedza z zakresu podstawowych zasad marketingu. Znajomość marketingu we współczesnym świecie stała się kluczem do sukcesu. Sukces działalności gospodarczej opartej na marketingowym sposobie myślenia, to dostarczenie klientowi tego, czego pragnie w odpowiedniej cenie, ilości i jakości. Dla wszelkich działań marketingowych punktem wyjścia jest zawsze człowiek-konsument. Człowiek odczuwając potrzeby dąży do ich zaspokojenia w drodze zakupu produktów czy usług. Ważne znaczenie mają także osiągnięte dochody oraz ceny produktów. Nie mniejszy wpływ na decyzje zakupów ma najbliższe otoczenie, rodzina, przyjaciele czy grupa, w której się znajdujemy. Nabywca ulega presji otoczenia, która lansuje określony styl życia. Zadaniem marketingu jest poznanie motywacji zakupu nabywców oraz pobudzenie a nawet tworzenie w nich potrzeby zakupu danego dobra czy usługi. Dla przedsiębiorstwa najważniejszym celem jest «stworzenie klienta», który zdecyduje o przyszłości przedsiębiorstwa i jego podstawach egzystencji (E. Michalski, 2009).

**Marketing** (wg Kotlera) to proces zarządczy, którego celem jest wymiana produktów na konkurencyjnym rynku, zapewniająca wzajemne korzyści sprzedającym i kupującym.

Marketing to również nowoczesny styl myślenia ekonomicznego o sposobie prowadzenia rynkowej działalności gospodarczej. Działalność gospodarcza nastawiona jest na osiągnięcie maksymalnego zysku. Można to zadanie zrealizować, jeżeli działalność ukierunkowana jest na klienta (nabywcę, odbiorcę, użytkownika, konsumenta). Temu właśnie sprzyja marketing, który obejmuje działania rozpoczynające i kończące się na kliencie, ustalając i zaspokajając jego potrzeby. Działania marketingowe zmierzają do zaspokojenia potrzeb konsumentów i tym samym osiągnięcia celów przedsiębiorstwa.

Działania marketingowe służą temu, by (J. Altkorna 2003):

- ▶ pozyskać nowych klientów,
- ▶ sprawić, by klienci więcej kupowali,
- ▶ sprawić, by klienci częściej kupowali.

Do podstawowych działań marketingu należą:

- ▶ określenie potrzeb,
- ▶ kształtowanie produktu,
- ▶ tworzenie i utrzymywanie popytu,
- ▶ ustalenie polityki rynkowej,
- ▶ finansowanie obrotu towarowego,
- ▶ działanie związane z fizycznym ruchem towaru.

Marketing zajmuje się w ogólnym rozumieniu, potrzebami konsumentkimi pod różnymi kątami. Na przestrzeni lat i rozwoju technologicznego powstało mnóstwo nowych metod marketingowych (J. Penc, 1995).

Rodzaje metod marketingowych:

- ▶ bezpośredni, zwany medialnym,
- ▶ internetowy, który korzysta z sieci internetowej,
- ▶ młodzieżowy, wychodzący naprzeciw potrzebom dzieci i młodzieży,
- ▶ mobilny, związany m.in. z telefonią komórkową, czyli bardzo nowoczesnym medium informacji,
- ▶ polityczny, który przedstawia metody zdobywania poparcia i budowania wizerunku kandydatów i partii,
- ▶ niestandardowy, który wykorzystuje różne techniki niekonwencjonalne, czasami nawet kontrowersyjne,
- ▶ szeptany, związany z buzz marketing i marketingiem plotki,
- ▶ wirusowy, który ma za zadanie rozpowszechnić się w codziennych sytuacjach,
- ▶ e-mail marketing, związany z pocztą elektroniczną,
- ▶ afiliacyjny, wykorzystujący sieci afiliacyjne i programy partnerskie,
- ▶ mix, czyli słynne formuły i koncepcje 4P, 7P i 4C.

## ▶ Marketing wewnętrzny

Koncepcja marketingu wewnętrznego powstała, gdyż dostrzeżono jak ważną rolę pełni pracownik w tworzeniu więzi z klientem (Tansuhaj, Randall, McCullough, 1988; Gronroos, 1984, za: K. Przybyłowski, S.W. Hartley, R.A. Kerin, W. Rudelius, 1998).

Koncepcja ta dotyczy przedsiębiorstw, które dostarczają swoim klientom usługi. Stanowi ona, iż zanim organizacja rozpocznie marketing skierowany do klientów, powinna skoncentrować się na swoich pracownikach. Jeśli do pracowników zostaną skierowane działania podobne do działań marketingowych, wykształcą oni w sobie orientację rynkową. W koncepcji tej podkreśla się, że rozwój pracowników poprzez proces rekrutacji, szkolenia, komunikację i administrację, to najbardziej istotne aspekty na drodze do sukcesu w branży usługowej (np. Kelly, 1992, Heskett, 1987, za: K. Przybyłowski, S.W. Hartley, R.A. Kerin, W. Rudelius, 1998).

## Marketing strategiczny

Marketing strategiczny jest procesem formułowania strategii marketingowej w ramach zarządzania strategicznego i stanowi część składową tego zarządzania. Na marketing strategiczny składa strategiczne planowanie rynkowe oraz projektowanie strategii marketingowych. (J.J. Lambin, 2001) Koncepcję marketingu strategicznego kształtują realia rynkowe firmy, takie jak:

- ▶ zmienność otoczenia makroekonomicznego i światowego;
- ▶ globalizacja;
- ▶ gwałtowny rozwój technologii;
- ▶ zmienność zachowań konsumentów na rynku;
- ▶ wahania koniunktury.

## Marketing partnerski

Marketing partnerski (*relationship marketing*) jego podstawą jest utrzymanie bezpośrednich kontaktów pomiędzy sprzedającym a nabywcą. W ramach koncepcji marketingu partnerskiego w działaniach rynkowych kontakty bezpośrednie stanowią istotny warunek odniesienia sukcesu i są rozpatrywane jako długookresowy proces budowania trwałych powiązań z nabywcami. Ważną cechą charakterystyczną marketingu partnerskiego jest odejście od wymiany koncentrującej się wyłącznie na danej transakcji na rzecz wymiany opartej na ścisłej współpracy sprzedającego z nabywcą. (K. Fonfara, *Marketing partnerski na rynku przedsiębiorstw*, 1999)

Skuteczność działania danej firmy zależy nie tylko od jej kontaktów z nabywcami. Koncepcja marketingu partnerskiego przyjmuje się, iż realizacja celów firmy wymaga również aktywności na 6 różnych rynkach, tj. rynku nabywców, rynku dostawców, rynku wewnętrznym, rynku potencjalnych pracowników firmy (rynek pracy), rynku podmiotów opiniotwórczych oraz rynku wpływowych organizacji.

## Marketing mix

Marketing mix to specyficzna kompozycja marketingowa, na którą składają się poszczególne, zależne od siebie elementy, które jako zintegrowany system mogą oddziaływać na różnego rodzaju zjawiska rynkowe. Wyróżnia się kilka koncepcji marketingu mix: 4P, 4C, marketing mix dla usług, 7P.

### Koncepcja 4P - zaproponowana przez McCarthy'ego<sup>6</sup>:

1. **Produkt** (ang. product) – ważna jest jakość produktu, marka, opakowanie, gwarancja, jego postrzeganie przez konsumentów oraz czy zaspokaja potrzeby klientów. Produkt musi spełniać określone funkcje oraz jest rozpatrywany pod różnymi aspektami, np. rynkowym, cyklu życia, technologicznym.
2. **Cena** (ang. price) – jest wydatkiem, który musi być poniesiony przez konsumentów, aby nabyć produkt, natomiast dla producenta jest wynagrodzeniem za poniesione nakłady. Charakteryzuje się ją pod kątem polityki cenowej, wskaźnika elastyczności cenowej popytu, progów rentowności, rabatów i warunków płatności.
3. **Dystrybucja** (ang. place) – zajmuje się sposobem rozmieszczenia produktów na rynku w celu ich sprzedaży. Ważne są kanały dystrybucyjne, czyli układy wzajemnie zależnych organizacji zaangażowanych w sprzedaż produktu.
4. **Promocja** (ang. promotion) – zaliczamy do niej: reklamę, public relations, sponsorowanie, sprzedaż osobistą, kampanie, techniki marketingowe.

## Rozszerzona formuła 7P

5. **Ludzie** (ang. people) – personel i klienci.
6. **Proces** (ang. process) – cała procedura marketingowa: od zainteresowania klienta aż do obsługi posprzedażowej.
7. **Świadectwo materialne** (ang. physical evidence) – elementy, które świadczą o jakości produktu lub usługi, np. logo, wyposażenie, budynki.

**Koncepcja 4C** – występują te same elementy, co w formule 4P, ale z punktu widzenia klienta. Strategie marketingu „pull” i „push”<sup>7</sup>.

**Strategia „pull”** zakłada oddziaływanie bezpośrednio na nabywcę poprzez stosowanie inwazyjnych działań promocyjnych. Przekaz reklamowy atakuje odbiorcę, który nie ma możliwości podjęcia decyzji o tym, czy chce się z nim zapoznać. Przykładem takiego przekazu są bannery.

**Strategia „push”** polega na wzbudzeniu u odbiorcy potrzeby lub chęci do dobrowolnego zapoznania się z przekazem reklamowym. Narzędzia stosowane w ramach tej strategii nie są inwazyjne, a konsument sięga po nie z własnej, nieprzymuszonej woli. Przykładem takiego narzędzia jest newsletter<sup>8</sup>. Użytkownik, który chce go otrzymywać, dobrowolnie podaje swoje dane osobowe, aby subskrybować wysyłkę elektroniczną, która zawiera treści komercyjne, a często też treści merytoryczne.

## Promocja a reklama

Jednym z elementów marketingu mix jest promocja. Jest ona pojęciem szerszym niż reklama. Prócz reklamy ma za zadanie przedstawienie i utrwalenie w umyśle potencjalnych klientów pozytywnego i niezapomnianego obrazu firmy. Firma wchodząca na rynek swe działania rozpoczyna od promocji znaku firmy, prezentuje we wszystkich mediach swoje osiągnięcia. Reklama produktu danej firmy rozpoczyna się znacznie później. Niewielkie firmy, których fundusze na reklamę są niewielkie muszą dokładnie przemyśleć swoją kampanię reklamową.

Tabela 13. Narzędzia promocji

Reklama	Sprzedaż osobista	Promocje sprzedaży	Public relations PR
reklama w środkach masowego przekazu np. prasa, radio, telewizja, kino	telesprzedaż	próbki produktów	wywiady w środkach masowego przekazu
reklama w internecie	prezentacja na targach, wystawach	kupony	wykłady, seminaria,
np. e-mailing	telemarketing	rabaty ilościowe	konferencje
bilboardy, lighboardy, plakaty	sprzedaż wysyłkowa	premie	wydawnictwa propagandowe
oraz reklama pneumatyczna	sprzedaż w domu klienta	okresowe obniżki cen	relacje prasowe
wydawnictwa reklamowe	sprzedaż z wykorzystaniem	konkursy, gry,	sponsoring
np. ulotki, foldery, prospekty	przedstawicieli firmy np. kon-	loterie promocyjne	lobbing
reklama pocztowa	sultantów i akwizytorów	karty stałego klienta	finasowanie akcji
		upominki	charytatywnych

Źródło: Opracowanie własne.

**Reklama**, jako główny element promocji stanowi również część składową marketingu. Celem reklamy jest przyciągnięcie konsumenta do przedsiębiorstwa (A. Komosa, 2002). Nie może jednak zbyt odstępować od celów, jakie chce osiągnąć dana organizacja na rynku. A więc cele reklamy muszą być dopasowane do strategii danego biznesu.

Cele działań reklamowych:

- ▶ **uświadomienie marki** – cel ten jest do osiągnięcia, gdy reklama jest zbudowana na zasadzie luźnej i przyjaznej pogawędki z odbiorcą.
- ▶ **wybudowanie w kliencie poczucia lojalności wobec marki** – lojalny klient staje się odporny na działania konkurencji, reklamy konkurencji nie przemawiają do niego. Oprócz tego, lojalny klient poszerza grono klientów przedsiębiorcy przez to, że opowiada o swoim zadowoleniu ze współpracy z organizacją.

7. [www.portalwiedzy.onet.pl](http://portalwiedzy.onet.pl), 25.03.2013.

8. [www.pl.wikipedia.org/wiki/Newsletter](http://www.pl.wikipedia.org/wiki/Newsletter), 25.03.2013.

- ▶ **edukacja klienta** – polega na uświadamianiu odpowiedniej grupy ludzi jak posługiwać się i po co są dane towary bądź usługi.
- ▶ **walka z konkurencją** – ten cel jest oczywisty, przedsiębiorcy przeznaczają ogromne kwoty pieniędzy po to, by uniemożliwić nowym firmom wejście na rynek, jak również osłabić pozycję już istniejących przedsiębiorstw.
- ▶ **tworzenie image przedsiębiorstwa** – duże przedsiębiorstwa produkują czasem tysiące różnych towarów, dlatego też postawili na to, by jedynie sama marka była doskonale znana.

Skuteczność każdej reklamy możemy zbadać stosując model **AIDA** (E. Michalski, 2009).

**Tabela 14. Model skuteczności działań promocyjnych AIDA**

A	Attention	zwrócenie uwagi – o co chodzi?
I	Interest	wzbudzenie zainteresowania – chcę wiedzieć więcej!
D	Desire	chęć zakupu – chcę to mieć!
A	Action	akcja, działanie – planuję zakup. kupuję

Źródło: Opracowanie własne.

## Marka przedsiębiorstwa

Zarządzając przedsiębiorstwem musimy pamiętać o budowaniu marki firmy, czyli dobrego wizerunku firmy. Ważny jest wybór odpowiedniego znaku firmowego oraz dobór właściwych kolorów. Klient często kojarzy daną firmę z konkretnym znakiem lub kolorem np. Play – kolor fioletowy, Orange – pomarańczowy, Plus- zielony, T-mobile – różowy. Właściwe dobranie kolorów do charakteru produktu lub usługi oraz do typu odbiorców to połowa sukcesu. Projektant musi zdawać sobie sprawę z istnienia ogromnych różnic w postrzeganiu znaczenia barw, nie tylko w ogólny i szeroko przyjęty sposób, ale także w sposób subiektywny i uzależniony od rodzaju specjalizacji firmy lub wyrobu. Ta sama barwa w odczuciach osoby pracującej np. w banku może mieć inny wydźwięk niż u osoby pracującej w przychodni lekarskiej. Nie bez znaczenia jest fakt, iż jaskrawoczerwone oznaczenia mają karetki pogotowia, a w stonowanych i bladych odcieniach niebieskiego są najczęściej ulotki reklamowe firm zajmujących się finansami. Warto dodać, że każdy kolor może być interpretowany w podwójny sposób — negatywny i pozytywny. Używając barw w sposób nieświadomy i nieprzemysłany, łatwo o pomyłkę i narażenie się na niemałe straty, np. barwa zielona symbolizuje naturę, ekologię, witalność, młodość, ale może również oznaczać szaleństwo i nieporządek (A. Putowska, 2002). Kreując wizerunek firmy, produktu, usługi, procesu lub osoby, staramy się zadziwić ich wyjątkowymi właściwościami.

Podstawowym celem budowania marki jest zakodowanie w ogólnej świadomości pożądanego wizerunku firmy, produktu, usługi, procesu czy osoby. Najpopularniejsze marki mają zwykle proste, konsekwentnie promowane przez lata przesłanie. Najznakomitsze z nich są łatwo rozpoznawalne przez konsumentów, a swój sukces opierają na charakterystycznych, niepowtarzalnych cechach, co określa się, jako budowanie marki poprzez wartości. Marki światowej sławy nie wymagają promocji, wypracowały bowiem już dawno w świadomości klientów określone skojarzenia. Podobnie jak ludzie, produkty mają szczególne właściwości, które określają ich osobowość: coca-cola jest orzeźwiająca i dostępna dla wszystkich, frytki McDonalda bez względu na porę są zawsze świeżo usmażone, Rolex, wprawdzie kosztowny, niezmiennie zachwyca klasą i niezawodnością.

Jak inni postrzegają człowieka, który jeździ nowym Volkswagenem Beetle, nosi garnitur kupiony w Marks & Spencer czy zegarek marki Swatch? Co pomyślą o osobie ubranej w garnitur od Armaniego, buty od Prady, z Rolexem na ręku? Czy podobnie odbierają go, gdy założy dżinsy firmy Levi's, w ręku trzyma coca-colę lub hamburgera z McDonalda? Jak postrzegane są przez nas te osoby zależy w dużej mierze od tego, jakie skojarzenia budzą w nas marki poszczególnych producentów.

Przypisywanie kolorów do określonych branż lub produktów zawodzi czasami z marketingowego punktu widzenia. Czasami bardziej opłaca się złamać zasady, oczywiście w sposób kontrolowany i bardzo przemysłany, aby zwrócić na siebie uwagę i znacząco odróżnić się od konkurencji.





## TEMATY DO DISKUSJI

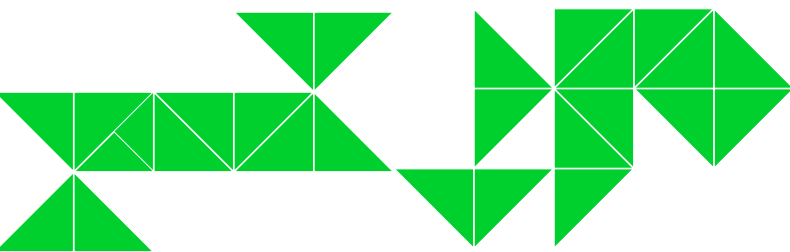
1. Znając cele działalności reklamowej, wskaż zależności między potrzebami konsumenta a marketingiem.
2. Wymień i opisz zagrożenia płynące z marketingu.
3. Wyliczy wybrane wskaźniki rentowności – ROA i ROS.
4. Przedstaw rolę marketingu w budowaniu marki, np. Coca-Cola, IBM.
5. Omów znaczenie i rolę kolorów w reklamie

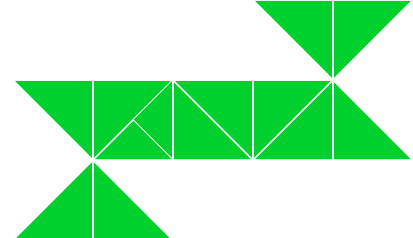
### **Bibliografia:**

- Komosa A., *Szkolny słownik ekonomiczny*, Ekonomik 2002.
- Rutkowski A., *Zarządzanie Finansami*, Warszawa 2003.
- Gierusz B., *Podręcznik samodzielnej nauki księgowania*, Gdańsk 2011.
- Michalski E., *Marketing. Podręcznik akademicki*, Warszawa 2009.
- Altkorna J., *Podstawy marketingu*, Kraków 2003.
- Penc J., *Strategie zarządzania*, Warszawa 1995.
- Sarzyńska-Putowska J., *Komunikacja wizualna - wybrane zagadnienia*, Kraków 2002.
- Pawlak Z., *Biznesplan – zastosowania i przykłady*, Warszawa 2002.
- Przybyłowski, K., Hartley, S. W., Kerin R.A., Rudelius, W., *Marketing*. Kraków 1998.
- Banaszyk P., Fimińska-Banaszyk R., Stańda A., *Zasady zarządzania w przedsiębiorstwie*, Poznań 1997.
- Gos W., *Bilans, znaczenie, koncepcje sporządzenia, formy prezentacji*, Warszawa 2011.
- Fonfara K., *Marketing partnerski na rynku przedsiębiorstw*, Warszawa 1999
- Lambin J.J., *Strategiczne zarządzanie marketingowe*, Warszawa 2001

### **Netografia:**

- [www.pl.wikipedia.org/wiki/Biznesplan](http://www.pl.wikipedia.org/wiki/Biznesplan), 06.02.2013.
- [www.druki.gofin.pl/wzor,788,556,bilans-uproszczony.html](http://www.druki.gofin.pl/wzor,788,556,bilans-uproszczony.html), 02.02.2013.
- [www.slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html](http://www.slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html), 26.03.2013.
- [www.slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html](http://www.slownikekonomiczny.pl/Poj%C4%99cia-mikroekonomia/prog-rentownoci-ang-break-even-point.html), 26.03.2013.
- [www.portalwiedzy.onet.pl](http://www.portalwiedzy.onet.pl), 25.03.2013.
- [www.pl.wikipedia.org/wiki/Newsletter](http://www.pl.wikipedia.org/wiki/Newsletter), 25.03.2013.
- [www.mfiles.pl/pl/index.php/Marketing\\_mix](http://www.mfiles.pl/pl/index.php/Marketing_mix), 20-04-2013
- [www.mfiles.pl/pl/index.php/Plan](http://www.mfiles.pl/pl/index.php/Plan), 20-03-2013





## 4. Mój biznes

### 4.1. Podstawowe pojęcia

#### Kto to jest przedsiębiorca?

Przedsiębiorcą jest osoba fizyczna, osoba prawna i jednostka organizacyjna, prowadząca we własnym imieniu działalność gospodarczą lub zawodową<sup>1</sup>.

#### Co to jest przedsiębiorstwo?

Przedsiębiorstwo jest zorganizowanym zespołem składników niematerialnych i materialnych przeznaczonym do prowadzenia działalności gospodarczej. Obejmuje ono w szczególności (art. 551 KC):

- ▶ oznaczenie indywidualizujące przedsiębiorstwo lub jego wyodrębnione części (nazwa przedsiębiorstwa),
- ▶ własność nieruchomości lub ruchomości, w tym urządzeń, materiałów, towarów i wyrobów, oraz inne prawa rzeczowe do nieruchomości lub ruchomości,
- ▶ prawa wynikające z umów najmu i dzierżawy nieruchomości lub ruchomości oraz prawa do korzystania z nieruchomości lub ruchomości wynikające z innych stosunków prawnych,
- ▶ wierzytelności, prawa z papierów wartościowych i środki pieniężne.

Najprostszą formą prowadzenia działalności gospodarczej jest przedsiębiorstwo jednego właściciela będącego osobą fizyczną – czyli jednoosobowa działalność gospodarcza, potocznie zwana firmą.

#### Co to jest działalność gospodarcza?

**Działalność gospodarcza** jest to zarobkowa działalność wytwórcza, budowlana, handlowa, usługowa oraz poszukiwanie, rozpoznawanie i wydobywanie kopalin ze złóż, a także działalność zawodowa, wykonywana w sposób zorganizowany i ciągły.

Podstawy prawne zakładania działalności gospodarczej określone zostały Ustawą o swobodzie działalności gospodarczej<sup>2</sup> oraz Kodeksem cywilnym.

1. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny (Dz. U. Nr 16, poz. 93 ze zm.) - dalej cytowana jako: KC.

2. Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej (t.j. Dz. U. z 2010 r. Nr 220, poz. 1447)

## Fundamentalne cechy jednoosobowej działalności gospodarczej:

- ▶ prowadzona i reprezentowana przez jednego właściciela (przedsiębiorcę),
- ▶ właściciel odpowiada za wszystkie zobowiązania swojej firmy całym majątkiem, bez żadnych ograniczeń,
- ▶ założenie jej nie jest obwarowane jakimikolwiek wymaganiami kapitałowymi,
- ▶ dla jej utworzenia wystarcza wpis do CEiDG.

## 4.2. Procedura zakładania działalności

### Rejestracja działalności gospodarczej

Pierwszym korkiem do uruchomienia własnej firmy jest dokonanie jej rejestracji w odpowiednim, dla wybranej formy prawnej rejestrze:

w Centralnej Ewidencji i Informacji o Działalności Gospodarczej (CEiDG) - wpisowi podlegają przedsiębiorcy będący osobami fizycznymi, w tym wspólnicy spółki cywilnej (Dz. U. 2004 Nr 173 poz. 1807).

w Krajowym Rejestrze Sądowym (KRS) – wpisowi podlegają m.in. spółki prawa handlowego, przedsiębiorstwa państwowe, podmioty ekonomii społecznej<sup>3</sup>.

Pamiętając i mając na uwadze fakt, iż najprostszą i najpopularniejszą formą prowadzenia działalności gospodarczej to jednoosobowa działalność gospodarcza zajmiemy się procedurą jej uruchomienia krok po kroku.

### Wniosek o wpis do CEiDG

Aby zarejestrować działalność gospodarczą, jako osoba fizyczna mamy do wyboru kilka trybów postępowania:

- ▶ Zalogowanie się do CEiDG, wypełnienie wniosku on-line i złożenie (podpisanie) go elektronicznie.
- ▶ Bez logowania się do CEiDG, przygotowanie wniosku on-line i podpisanie go w dowolnej gminie.
- ▶ Pobranie i złożenie wniosku papierowego w gminie. Gmina przekształca go na wniosek elektroniczny.
- ▶ Przesłanie wniosku listem poleconym do wybranej gminy. Podpis musi być notarialnie potwierdzony.

Tym samym wiem już, że wniosek o wpis do rejestru CEiDG możemy złożyć:

- ▶ Osobiście w urzędzie gminy lub miasta.
- ▶ Korespondencyjne, wysyłając podpisany wniosek do właściwego urzędu gminy lub miasta.
- ▶ Elektronicznie – za pośrednictwem strony [www.firma.gov.pl](http://www.firma.gov.pl).

### Wpisowi do CEiDG podlegają następujące informacje:

- ▶ firma przedsiębiorcy oraz jego numer PESEL,;
- ▶ data urodzenia przedsiębiorcy;
- ▶ numer identyfikacyjny REGON przedsiębiorcy, o ile taki posiada;
- ▶ numer identyfikacji podatkowej (NIP);
- ▶ informacja o obywatelstwie polskim przedsiębiorcy, o ile takie posiada, i innych obywatelstwach przedsiębiorcy;
- ▶ oznaczenie miejsca zamieszkania i adresu zamieszkania przedsiębiorcy, adres do doręczeń przedsiębiorcy oraz adresy, pod którymi jest wykonywana działalność gospodarcza, w tym adres głównego miejsca wykonywania działalności i oddziału, jeżeli został utworzony; dane te są zgodne z oznaczeniami kodowymi przyjętymi w krajowym rejestrze urzędowym podziału terytorialnego kraju, o ile to w danym przypadku możliwe;
- ▶ adres poczty elektronicznej przedsiębiorcy oraz jego strony internetowej, o ile przedsiębiorca takie posiada i zgłosił te informacje we wniosku o wpis do CEiDG;
- ▶ data rozpoczęcia wykonywania działalności gospodarczej;
- ▶ określenie przedmiotów wykonywanej działalności gospodarczej, zgodnie z Polską Klasyfikacją Działalności (PKD);
- ▶ informację o istnieniu lub ustaniu małżeńskiej wspólności majątkowej;

3. Ustawa z dnia 20 sierpnia 1997 r. o Krajowym Rejestrze Sądowym (t.j. Dz. U. 2007 nr 168 poz. 1186)

- ▶ numer identyfikacji podatkowej (NIP) oraz numer identyfikacyjny REGON spółek cywilnych, jeżeli przedsiębiorca zawarł umowy takich spółek;
- ▶ dane pełnomocnika upoważnionego do prowadzenia spraw przedsiębiorcy, wraz ze wskazaniem zakresu spraw, które obejmuje dane pełnomocnictwo, o ile przedsiębiorca udzielił pełnomocnictwa i zgłosił informację o jego udzieleniu we wniosku o wpis do CEIDG;
- ▶ informacja o zawieszeniu i wznowieniu wykonywania działalności gospodarczej;
- ▶ informacja o ograniczeniu lub utracie zdolności do czynności prawnych oraz ustanowieniu kurateli lub opieki;
- ▶ informacja o ogłoszeniu upadłości z możliwością zawarcia układu, o ogłoszeniu upadłości obejmującej likwidację majątku dłużnika, zmianie postanowienia o ogłoszeniu upadłości z możliwością zawarcia układu na postanowienie o ogłoszeniu upadłości obejmującej likwidację majątku dłużnika i zakończeniu tego postępowania;
- ▶ informacja o wszczęciu postępowania naprawczego;
- ▶ informacja o przekształceniu przedsiębiorcy będącego osobą fizyczną wykonującą we własnym imieniu działalność gospodarczą w jednoosobową spółkę kapitałową;
- ▶ informacja o zakazie prowadzenia działalności gospodarczej;
- ▶ informacja o zakazie wykonywania określonego zawodu, którego wykonywanie przez przedsiębiorcę podlega wpisowi do CEIDG;
- ▶ informacja o zakazie prowadzenia działalności związanej z wychowaniem, leczeniem, edukacją małoletnich lub z opieką nad nimi;
- ▶ informacja o wykreśleniu wpisu w CEIDG.

Wraz z wnioskiem o wpis do CEIDG składa się oświadczenie o braku orzeczonych – wobec osoby, której wpis dotyczy – zakazów, pod rygorem odpowiedzialności karnej za złożenie fałszywego oświadczenia.

**Infolinia CEIDG**  
**dla osób zakładających działalność**  
**801 055 088**

Wpis jest dokonany z chwilą zamieszczenia danych w CEIDG, nie później niż następnego dnia roboczego po dniu wpływu do CEIDG wniosku.

Zaświadczeniem o wpisie w CEIDG jest wydruk ze strony internetowej CEIDG.

Wpis do CEIDG jest dokonywany, jeżeli wniosek jest złożony przez osobę uprawnioną i jest poprawny.

#### **W sytuacji, gdy wniosek o wpis w CEIDG zawiera błędy:**

- ▶ gdy został złożony on-line – system CEIDG poinformuje niezwłocznie o niepoprawności wniosku,
- ▶ gdy został złożony w urzędzie gminy lub miasta – organ gminy niezwłocznie wzywa do skorygowania lub uzupełnienia wniosku w terminie 7 dni roboczych.

**Rejestracja w CEIDG jest wolna od opłat**

Przedsiębiorca może podjąć działalność gospodarczą w dniu złożenia wniosku o wpis do CEIDG. Jednakże przedsiębiorca ma prawo we wniosku o wpis do CEIDG określić późniejszy dzień podjęcia działalności gospodarczej niż dzień złożenia wniosku. Data rozpoczęcia działalności gospodarczej nie może być wcześniejsza niż dzień złożenia (podpisania) wniosku o wpis do CEIDG.

#### **CEIDG przesyła odpowiednie dane zawarte we wniosku o wpis do CEIDG niezbędne dla:**

- ▶ uzyskania, zmiany albo skreślenia wpisu w krajowym rejestrze urzędowym podmiotów gospodarki narodowej (REGON),
- ▶ zgłoszenia identyfikacyjnego albo aktualizacyjnego,
- ▶ zgłoszenia płatnika składek,
- ▶ złożenia oświadczenia o wyborze formy opodatkowania podatkiem dochodowym od osób fizycznych albo wniosku o zastosowanie opodatkowania w formie karty podatkowej,

- ▶ zgłoszenia rejestracyjnego lub aktualizacyjnego, o których mowa w przepisach o podatku od towarów i usług, do właściwego naczelnika urzędu skarbowego wskazanego przez przedsiębiorcę, a po uzyskaniu informacji o nadanym numerze identyfikacji podatkowej (NIP) do:
  - Głównego Urzędu Statystycznego,
  - Zakładu Ubezpieczeń Społecznych albo Kasy Rolniczego Ubezpieczenia Społecznego wraz z informacją o dokonaniu wpisu do CEIDG i nadanym numerze NIP.

## **Obowiązki wobec ZUS**

Po dokonaniu wpisu do CEIDG w terminie 7 dni należy zgłosić się do oddziału ZUS w celu wyboru formy ubezpieczenia i złożyć druk:

- ▶ ZUS ZUA– gdy zarejestrowana działalność będzie naszym jedynym źródłem dochodu.
- ▶ ZUS ZZA- gdy jesteśmy zatrudnieni na umowę o pracę i dodatkowo założyliśmy działalność gospodarczą.

## **Obowiązki wobec Państwowej Inspekcji Pracy**

Po dokonaniu wpisu do CEIDG w terminie 30 dni należy zgłosić się do Państwowej Inspekcji Pracy zawiadomienie o facie zatrudnienia pracowników w związku z założoną działalnością. W takim zawiadomieniu, na piśmie wskazujemy miejsce, rodzaj i zakres prowadzonej działalności gospodarczej.

## **Zatrudnienie pracownika**

Nabór pracowników prowadzi pracodawca. Stosownie do swoich potrzeb określa, ile osób, o jakich cechach (w szczególności dotyczących wykształcenia, umiejętności, doświadczenia zawodowego) i na jakie stanowisko potrzebuje. Poniżej przedstawiono najważniejsze zagadnienia dotyczące przygotowania się do procesu rekrutacji przez osoby poszukujące zatrudnienia.

Każda osoba poszukująca pracy powinna mieć przygotowane CV. Jest to podstawowy dokument zawierający informacje dla pracodawcy o potencjalnym kandydacie dotyczące wykształcenia, przebiegu kariery zawodowej, umiejętności.

### **CV powinno zawierać:**

- ▶ imię nazwisko, adres i dane kontaktowe (telefon, email),
- ▶ informacje o posiadanym wykształceniu,
- ▶ doświadczenie zawodowe,
- ▶ znajomość języków,
- ▶ dodatkowe umiejętności, przebyte kursy, uzyskane certyfikaty,
- ▶ zainteresowania, hobby,
- ▶ klauzulę wyrażającą zgodę na przetwarzanie danych osobowych zawartych w CV na cele związane z procesem rekrutacji.

Podstawowym dokumentem aplikacyjnym jest CV lub życiorys. Zdarza się, że pracodawcy wymagają od kandydatów także listu motywacyjnego. Jednakże to nie wszystkie dokumenty jakie mogą być potrzebne w poszukiwaniach pracy. W ogłoszeniach o pracę często konieczne jest wypełnienie formularza aplikacyjnego (w formie papierowej lub online), zawierające pytania i informacje potrzebne z punktu widzenia pracodawcy. Pozwala to lepiej zorganizować, ujednoclić proces rekrutacji nowych pracowników, tworząc jednocześnie bazę interesujących pracodawcę danych.

Powołując się w CV na przebyte kursy, posiadane certyfikaty należy przygotować je na rozmowę kwalifikacyjną, do wglądu dla osoby prowadzącej rekrutację. Nie wysyłamy ich razem z CV.

List motywacyjny nie jest podaniem o pracę. Ma zachęcić pracodawcę do zapoznania się z daną kandydaturą, zachęcić do przeczytania CV kandydata i zaproszenia na rozmowę kwalifikacyjną. Jest formą odpowiedzi na ogłoszenie o pracy, dlatego powinien być adresowany do konkretnego pracodawcy.

Przed przystąpieniem do jego napisania należy przemyśleć dlaczego chcesz pracować u danego pracodawcy oraz dlaczego należy zatrudnić akurat Koniecznie trzeba sprawdzić, o jakie stanowisko się ubiegamy i określić swoje możliwości podjęcia pracy.

Celem listu jest zaprezentowanie siebie jako najlepszego, optymalnego kandydata na dane stanowisko. Trzeba jednak pisać prawdę, być wiarygodnym i przekonującym.

List powinien być napisany na komputerze (chyba że w ogłoszeniu pracodawca określił własnoręczną formę pisemną) krótko i zwięźle, nie dłuższy niż kartka A4. Czytelność zapewni jedna ze standardowych czcionek (np. Times New Roman) w rozmiarze od 12-14 punktów, nadto treść powinna być podzielona akapitami. List nie może powielać informacji zawartych w CV. Prezentowane informacje powinny być konkretne i poparte faktami.

Z treści listu powinno jednocześnie wynikać skąd kandydat dowiedział się ofercie.

Zapraszając kandydatów na rozmowę kwalifikacyjną pracodawca chce poznać przyszłych pracowników. Rozmowa służy weryfikacji informacji zawartych w dokumentach aplikacyjnych, czy posiadane kwalifikacje, doświadczenie są prawdziwe. Podczas rozmowy osobą rekrutująca może jednocześnie zbadać umiejętności interpersonalne potencjalnego pracownika, np. odporność na stres, zdolności komunikacyjne, asertywność.

### 1. Zebranie informacji o firmie i stanowisku

Należy zebrać informacje dotyczące firmy i stanowiska na które aplikujemy. Kandydat powinien wiedzieć od kiedy firma istnieje i czym się zajmuje, jaką ma pozycję na rynku i czy ma szanse rozwoju. Pozwoli to określić zakres wiedzy i umiejętności które są potrzebne na danym stanowisku, jakie cechy psychologiczne mogą być preferowane.

### 2. Zebranie i zestawienie najważniejszych informacji o swojej osobie

Ważne jest by móc bez problemu podczas rozmowy odpowiedzieć na pytania dotyczące samego siebie. Należy zastanowić się jakie cechy będą przydatne w pracy o którą aplikujemy. Przygotowując sobie te elementy nie będą zaskoczeniem ewentualne pytania dotyczące np. mocnych czy słabych stron. Wcześniejsze przygotowanie i płynna odpowiedź zwiększy szanse na zatrudnienie zapobiegając jednocześnie stresowi związanemu z tym pytaniem.

### 3. Opracowanie przykładowej listy pytań, które na pewno się pojawią.

#### Przykładowe pytania, które mogą zostać zadane podczas rozmowy ze strony prowadzącego nabór

- a) Jakie są Pana/i mocne strony, cechy?
- b) Jakie są Pana/i słabe strony, cechy?
- c) Dlaczego chciałbyś pracować w naszej firmie?
- d) Dlaczego miałbym Pana/ią zatrudnić?
- e) Co chciałby Pan/i robić za 5, 10 lat?
- f) Co Pan/i wie o naszej firmie?
- g) Proszę wskazać 5 cech pasujących do Pana/i charakteru.
- h) Czy woli Pan/i pracować w grupie, czy indywidualnie?
- i) Jakie zadania sprawiły Panu/i najwięcej, a jakie najmniej satysfakcji?
- j) Jakie są Pana/i oczekiwania finansowe?

### 4. Przygotowanie pytań, na które my chcielibyśmy uzyskać odpowiedzi?

Zwiększymy swoje szanse na zatrudnienie wykazując zainteresowanie przyszłą pracą, np. pytając o to jak przebiega proces szkolenia, wdrożenia na nowe stanowisko. Należy jednak pamiętać o zasadzie, że nie powinno się zadawać pytań na które odpowiedzi są ogólnodostępne, np. na stronie internetowej firmy. W ten sposób wykażemy się brakiem odpowiedniego przygotowania do rozmowy kwalifikacyjnej (patrz pkt. 1).

### 5. Ocena czasu dotarcia do pracodawcy – punktualność

Bardzo ważna jest punktualność. Jeżeli kandydat spóźnia się na rozmowę kwalifikacyjną, to świadczy to o braku właściwego zorganizowania, czy wręcz lekceważącym stosunku do nowego pracodawcy. Pozwala to jednocześnie wysunąć wniosek, że skoro kandydat spóźnił się na rozmowę, to będzie się spóźniał do pracy. Często spóźnienie przekreśla szanse kandydata na zatrudnienie w danej firmie, czy nawet pozbawia możliwości rozmowy.

### 6. Właściwy ubiór

Pierwsze wrażenie jest ogromnie ważne. Ubranie może również świadczyć o szacunku do rozmówcy, osoby

prowadzącej nabór. Na rozmowę kwalifikacyjną należy wybrać taki strój, który pasuje do danego zawodu lub branży. W razie wątpliwości lepiej ubrać się tradycyjnie, klasycznie niż swobodnie. Standardem dla mężczyzny jest ciemny garnitur, koszula i krawat. Ubiór powinien być czysty i schludny, buty wypastowane.

Kobiety nie powinny ubierać się wyzywająco, odkrywając znacznie swoje ciało – nie powinny odsłaniać swojego brzucha, dekoltu, zakładać przezroczystych bluzek i zbyt krótkich spódnic kończących się 30 centymetrów nad kolanem.

Włosy powinny być świeżo umyte włosy, schludnie upięte, a paznokcie pomalowane przezroczystym, lub w stonowanym odcieniu, lakierem. W przygotowaniu makijażu na rozmowę lepiej zastosować zasadę „lepiej mniej niż więcej”, zachowując umiar. Nie powinno się używać zbyt mocnych perfum.

### **Jakich pytań nie zadawać i jakich tematów nie poruszać**

- a) Dotyczących podstawowej działalności przedsiębiorcy np. Czym zajmuje się Państwa przedsiębiorstwo?
- b) Komplementy względem osoby rekrutującej, np. Ładnie Pani w tym żakiecie.
- c) Negatywnych kwestii o byłym pracodawcy, oczerniania, w tym ewentualnego wypowiedzenia przez niego umowy o pracę.
- d) Szczegółowe kwestie dotyczące poprzedniego pracodawcy, tajemnic zakładu.
- e) Słabe strony, cechy, chyba że zostanie zadane pytanie, a odpowiedź powinna być bardzo zwięzła.
- f) Polityka, religia, życie prywatne.
- g) Zarobki i inne świadczenia związane z pracą, o ile nie padnie stosowne pytanie.

Więcej informacji na temat procesu rekrutacji, przygotowania do rozmowy kwalifikacyjnej można znaleźć na stronach wortal<sup>4</sup> poświęconych pracy<sup>5</sup>.

### **Umowa o pracę**

**Umowę o pracę**, zgodnie z obowiązującym prawem, możemy zawrzeć:

- ▶ na czas nieokreślony,
- ▶ na czas określony,
- ▶ na okres próbny - nieprzekraczający 3 miesięcy,
- ▶ na czas zastępstwa nieobecnego pracownika,
- ▶ na czas wykonania określonej pracy.

Umowa o pracę określa strony umowy, rodzaj umowy, datę jej zawarcia oraz warunki pracy i płacy, w szczególności:

- ▶ rodzaj pracy,
- ▶ miejsce wykonywania pracy,
- ▶ wynagrodzenie za pracę odpowiadające rodzajowi pracy, ze wskazaniem składników wynagrodzenia,
- ▶ wymiar czasu pracy,
- ▶ termin rozpoczęcia pracy.

Umowę o pracę zawiera się na piśmie. Jeżeli umowa o pracę nie została zawarta z zachowaniem formy pisemnej, pracodawca powinien, najpóźniej w dniu rozpoczęcia pracy przez pracownika, potwierdzić pracownikowi na piśmie ustalenia co do stron umowy, rodzaju umowy oraz jej warunków.

**Prawa i obowiązki pracownika i pracodawcy** to ogół norm określających zasady, których należy przestrzegać w miejscu pracy, celem osiągnięcia założonych efektów.

4. wortal - portal wertykalny (ang. vertical portal) portal wyspecjalizowany, publikujący informacje z jednej dziedziny, tematycznie do siebie zbliżone, np. dotyczące muzyki, filmu, programów komputerowych, motoryzacji, pracy; w przeciwstawienie do zwykłego portalu, obejmującego szeroki zakres tematyczny (horyzontalnego)

5. Zob. pracuj.pl; monsterpolska.pl; gazetapraca.pl; praca.money.pl; praca.wp.pl

**Tabela 15. Prawa i obowiązki pracownika i pracodawcy**

Prawa pracownika	Prawa pracodawcy
<ul style="list-style-type: none"> <li>• prawo do swobodnie wybranej pracy;</li> <li>• równe traktowania mężczyzn i kobiet w zatrudnieniu;</li> <li>• godziwe wynagrodzenia za pracę;</li> <li>• jednakowego wynagrodzenia za jednakową pracę lub za pracę o jednakowej wartości;</li> <li>• prawo do corocznego, nieprzerwanego, płatnego urlopu wypoczynkowego;</li> <li>• w celu reprezentacji i obrony swoich praw i interesów, może tworzyć organizację i przystępować do tych organizacji;</li> <li>• zachowuje prawo do wynagrodzenia za czas urlopu szkoleniowego oraz za czas zwolnienia z całości lub części dnia pracy;</li> <li>• przysługuje w każdym tygodniu prawo do co najmniej 35 godzin nieprzerwanego odpoczynku, obejmującego co najmniej 11 godzin nie-przerwanego odpoczynku dobowego;</li> <li>• jeżeli dobowy wymiar czasu pracy pracownika wynosi co najmniej 6 godzin, pracownik ma prawo do przerwy w pracy trwającej co najmniej 15 minut, wliczanej do czasu pracy.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• w celu reprezentacji i obrony swoich praw i interesów, może tworzyć organizację i przystępować do tych organizacji;</li> <li>• może rozwiązać umowę o pracę bez wypowiedzenia z winy pracownika;</li> <li>• może na czas przestoju powierzyć pracownikowi inną odpowiednią pracę, za której wykonanie przysługuje wynagrodzenie przewidziane za tę pracę;</li> <li>• może stosować karę upomnienia i nagany za nieprzestrzeganie przez pracownika ustalonej organizacji i porządku w procesie pracy, przepisów bezpieczeństwa i higieny pracy, przepisów przeciwpożarowych, a także przyjętego sposobu potwierdzania przybycia i obecności w pracy oraz usprawiedliwiania nieobecności w pracy;</li> <li>• za nieprzestrzeganie przez pracownika przepisów bezpieczeństwa i higieny pracy lub przepisów przeciwpożarowych, opuszczenie pracy bez usprawiedliwienia, stawienie się do pracy w stanie nietrzeźwości lub spożywanie alkoholu w czasie pracy – pracodawca może również stosować karę pieniężną;</li> <li>• może wprowadzić jedną przerwę w pracy nie wliczaną do czasu pracy, w wymiarze nie przekraczającym 60 minut, przeznaczoną na spożycie posiłku lub załatwienie spraw osobistych;</li> <li>• może na piśmie wniosek pracownika ustalić indywidualny rozkład jego czasu pracy w ramach systemu czasu pracy, którym pracownik jest objęty;</li> <li>• zobowiązać pracownika do pozostawania poza normalnymi godzinami pracy w gotowości do wykonywania pracy wynikającej z umowy o pracę w zakładzie pracy lub w innym miejscu wyznaczonym przez pracodawcę (dyżur);</li> <li>• może odwołać pracownika z urlopu tylko wówczas, gdy jego obecności w zakładzie wymagają okoliczności nieprzewidziane w chwili rozpoczynania urlopu;</li> <li>• na piśmie wniosek pracownika pracodawca może udzielić mu urlopu bezpłatnego.</li> </ul>
Obowiązki pracownika	Obowiązki pracodawcy
<ul style="list-style-type: none"> <li>• zobowiązanie się do wykonywania pracy określonego rodzaju na rzecz pracodawcy i pod jego kierownictwem oraz w miejscu i czasie wyznaczonym przez pracodawcę;</li> <li>• przestrzegania czasu pracy ustalonego w zakładzie;</li> <li>• przestrzegania regulaminu pracy;</li> <li>• przestrzegania przepisów oraz zasad bezpieczeństwa i higieny pracy;</li> <li>• dbać o dobro zakładu pracy, ochrony jego mienia oraz zachowania w tajemnicy informacji, których ujawnienie mogłoby narazić pracodawcę na szkodę;</li> <li>• przestrzegania w zakładzie zasad współżycia społecznego;</li> <li>• jeżeli pracodawca zawarł z pracownikiem umowę o zakazie konkurencji nie może prowadzić działalności konkurencyjnej wobec pracodawcy ani też świadczyć pracy w ramach stosunku pracy lub na innej podstawie na rzecz podmiotu prowadzącego taką działalność.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• zaznajamiać pracowników podejmujących pracę z zakresem ich obowiązków, sposobem wykonywania pracy na wyznaczonych stanowiskach oraz ich podstawowymi uprawnieniami;</li> <li>• organizować pracę w sposób zapewniający pełne wykorzystanie czasu pracy, jak również osiągnięcie przez pracowników, przy wykorzystaniu ich uzdolnień i kwalifikacji, wysokiej wydajności i należytej jakości pracy;</li> <li>• organizować pracę w sposób zapewniający zmniejszenie uciążliwości pracy, zwłaszcza pracy monotonicznej i pracy w ustalonym z góry tempie;</li> <li>• przeciwdziałać dyskryminacji w zatrudnieniu, w szczególności ze względu na płeć, wiek, niepełnosprawność, rasę, religię, narodowość, przekonania polityczne, przynależność związkową, pochodzenie etniczne, wyznanie, orientację seksualną, a także ze względu na zatrudnienie na czas określony lub nie określony albo w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy;</li> <li>• zapewniać bezpieczne i higieniczne warunki pracy oraz prowadzić systematyczne szkolenie pracowników w zakresie bezpieczeństwa i higieny pracy;</li> <li>• terminowo i prawidłowo wypłacać wynagrodzenie;</li> <li>• ułatwiać pracownikom podnoszenie kwalifikacji zawodowych;</li> <li>• stwarzać pracownikom podejmującym zatrudnienie po ukończeniu szkoły prowadzącej kształcenie zawodowe lub szkoły wyższej warunki sprzyjające przystosowaniu się do należytego wykonywania pracy;</li> <li>• zaspokajać w miarę posiadanych środków socjalne potrzeby pracowników;</li> <li>• stosować obiektywne i sprawiedliwe kryteria oceny pracowników oraz wyników ich pracy;</li> <li>• prowadzić dokumentację w sprawach związanych ze stosunkiem pracy oraz akta osobowe pracowników;</li> <li>• przechowywać dokumentację w sprawach związanych ze stosunkiem pracy oraz akta osobowe pracowników w warunkach niegroźących uszkodzeniem lub zniszczeniem;</li> <li>• wpływać na kształtowanie w zakładzie pracy zasad współżycia społecznego;</li> <li>• informować pracowników w sposób przyjęty u danego pracodawcy o możliwości zatrudnienia w pełnym lub w niepełnym wymiarze czasu pracy, a pracowników zatrudnionych na czas określony – o wolnych miejscach pracy;</li> <li>• przeciwdziałać mobbingowi;</li> <li>• w związku z rozwiązaniem lub wygaśnięciem stosunku pracy pracodawca jest obowiązany niezwłocznie wydać pracownikowi świadectwo pracy;</li> <li>• pokryć koszty poniesione przez pracownika w bezpośrednim związku z odwołaniem go z urlopu;</li> <li>• zatrudniając pracownicę w porze nocnej jest obowiązany na okres jej ciąży zmienić rozkład czasu pracy w sposób umożliwiający wykonywanie pracy po-za porą nocną, a jeżeli jest to niemożliwe lub niecelowe, przenieść pracownicę do innej pracy, której wykonywanie nie wymaga pracy w porze nocnej;</li> <li>• zatrudniając pracownicę w ciąży lub karmiącą dziecko piersią jest obowiązany dostosować warunki pracy tak ograniczyć czas pracy, aby wyeliminować zagrożenia dla zdrowia lub bezpieczeństwa pracownicy;</li> <li>• nie może wypowiedzieć ani rozwiązać umowy o pracę w okresie od dnia złożenia przez pracownika wniosku o udzielenie urlopu wychowawczego do dnia zakończenia tego urlopu;</li> <li>• zapewnić młodocianym pracownikom opiekę i pomoc, niezbędną dla ich przystosowania się do właściwego wykonywania pracy.</li> </ul>

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Ustawa Kodeks pracy.



Organem powołanym do sprawowania nadzoru i kontroli przestrzegania prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, a także przepisów dotyczących legalności zatrudnienia i innej pracy zarobkowej jest **Państwowa Inspekcja Pracy**<sup>6</sup>.

Do **zadań Państwowej Inspekcji Pracy** należy:

- ▶ nadzór i kontrola przestrzegania przepisów prawa pracy, w szczególności przepisów i zasad bezpieczeństwa i higieny pracy, przepisów dotyczących stosunku pracy, wynagrodzenia za pracę i innych świadczeń wynikających ze stosunku pracy, czasu pracy, urlopów, uprawnień pracowników związanych z rodzicielstwem, zatrudniania młodocianych i osób niepełnosprawnych,
- ▶ kontrola legalności zatrudnienia, innej pracy zarobkowej, wykonywania
- ▶ działalności,
- ▶ kontrola legalności zatrudnienia, innej pracy zarobkowej oraz wykonywania
- ▶ pracy przez cudzoziemców,
- ▶ kontrola wyrobów wprowadzonych do obrotu lub oddanych do użytku pod względem spełniania przez nie zasadniczych lub innych wymagań dotyczących bezpieczeństwa i higieny pracy, określonych w odrębnych przepisach,
- ▶ podejmowanie działań polegających na zapobieganiu i ograniczaniu zagrożeń w środowisku pracy
- ▶ współdziałanie z organami ochrony środowiska w zakresie kontroli przestrzegania przez pracodawców przepisów o przeciwdziałaniu zagrożeniom dla środowiska,
- ▶ opiniowanie projektów aktów prawnych z zakresu prawa pracy,
- ▶ prawo wnoszenia powództw, a za zgodą osoby zainteresowanej – uczestnictwo w postępowaniu przed sądem pracy, w sprawach o ustalenie istnienia stosunku pracy.

Państwowa Inspekcja Pracy **udziela bezpłatnie porad** w zakresie prawa pracy<sup>7</sup>.

### **Zatrudnienie niepracownicze**

Umowy o pracę to nie jedyne formy podejmowania pracy zarobkowej. Kodeks cywilny<sup>8</sup> i przepisy wykonawcze do Kodeksu Pracy dają możliwość zatrudnienia w oparciu o: umowę zlecenie, umowę o dzieło, umowę agencyjną oraz umowę o pracę nakładczą<sup>9</sup>

6. Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 404, poz. 769.).

7. [http://www.bip.pip.gov.pl/pl/bip/porady\\_wszystkie](http://www.bip.pip.gov.pl/pl/bip/porady_wszystkie), 10.03.2013.

8. Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. - Kodeks cywilny (Dz. U. z 1964, nr 16, poz. 93 ze zm.).

9. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 31 grudnia 1975 r. w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą. (Dz. U z 1976 r, Nr 3, poz.19)

Kluczowe elementy rozróżniające te poszczególne typy umów zawarte zostały w poniższej tabeli:

**Tabela 16. Porównanie umów cywilnoprawnych**

Kryteria	Umowa zlecenia	Umowa o dzieło	Umowa agencyjna	Umowa o pracę nakładczą
Podstawa prawna	art. 734 -751 KC	art. 627- 646 KC	art. 758 -764 KC	Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą
Przedmiot umowy	dokonania określonej czynności prawnej dla dającego zlecenie	zobowiązanie do wykonania oznaczonego dzieła	zobowiązanie do stałego pośrednictwa lub przedstawicielstwa.	wykonanie pracy zgodnie z warunkami umowy zleconej przez nakładcę
Trwałość umowy	zlecenie wykonane w konkretnym czasie lub bezterminowo	charakter jednorazowy	charakter ciągły	charakter ciągły
Strony umowy	zleceniodawca i zleceniobiorca	przyjmujący zamówienie (wykonawca) i zamawiający	przyjmujący zlecenie (agent) i dający zlecenie - strony umowy muszą być przedsiębiorcami	nakładca i wykonawca
Sposób wykonywania pracy/usługi	zleceniobiorca zobowiązuje się do wykonywania powtarzalnych czynności, a nie do osiągnięcia rezultatu	przyjmujący zamówienie zobowiązuje się do osiągnięcia rezultatu	pośredniczenie lub zawieranie umów oznaczonego rodzaju na rzecz dającego zlecenie lub w jego imieniu	wykonawca zobowiązuje się do osiągnięcia rezultatu wynikającego z zawartej umowy
Charakter wykonania pracy/usługi	zleceniobiorca powinien wykonywać pracę osobiście, może powierzyć wykonanie zlecenia osobie trzeciej tylko wtedy, gdy to wynika z umowy lub ze zwyczaju albo gdy jest do tego zmuszony przez okoliczności	przyjmujący zlecenie może powierzyć wykonanie zlecenia osobie trzeciej tylko wtedy, gdy to wynika z umowy lub ze zwyczaju albo gdy jest do tego zmuszony przez okoliczności	agent może powierzyć wykonywanie zlecenia osobie trzeciej tylko za pisemną zgodą dającego zlecenie	wykonawca nie musi wykonać pracy nakładczą osobiście
Formy umowy	ustna, pisemna lub w sposób dorozumiany (np. poprzez dopuszczenie wykonywania przedmiotu zlecenia)	może być zawarta w każdej formie	może być zawarta w formie dowolnej, w sytuacji gdy wprowadza odpowiedzialność agenta za wykonanie zobowiązania przez klienta powinna być zawarta w formie pisemnej	powinna być zawarta w formie pisemnej
Rodzaj odpowiedzialności	zleceniobiorca nie jest odpowiedzialny za ostateczny efekt, wykonując zlecenie musi działać z należytą starannością	zgodnie z zasadami rękojmi za wady	agent ponosi ryzyko niepowodzenia podjętych działań	wykonawca odpowiada za efekt pracy
Rozwiązanie umowy	dopuszczalność wypowiedzenia w każdym terminie	dopuszczalność wypowiedzenia w każdym terminie	szczegółowo określony tryb i terminy wypowiedzenia wynikający z ustawy	dopuszczalność rozwiązania w każdym czasie na mocy porozumienia stron lub za wypowiedzeniem

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Kodeks cywilny i Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie uprawnień pracowniczych osób wykonujących pracę nakładczą.



## TEMATY DO DISKUSJI

1. Jak przygotować dobre curriculum vitae i list motywacyjny?
2. Wymień rodzaje umów o pracę i wskaż na ich różnice
3. Wskaż obowiązki pracodawcy

### Akty prawne:

Ustawa z dnia 2 lipca 2004 r. o swobodzie działalności gospodarczej, (t.j. Dz. U. z 2010 r. Nr 220, poz. 1447)

Ustawa z dnia 20 sierpnia 1997 r. o Krajowym Rejestrze Sądowym, (t.j. Dz. U. z 2007 Nr 168 poz. 1186)

Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r. Kodeks cywilny, (Dz. U. Nr 16, poz. 93 ze zm.)

Ustawa z dnia 13 kwietnia 2007 r. o Państwowej Inspekcji Pracy, (t.j. Dz. U. 2007 Nr 168 poz. 1186)

### Netografia:

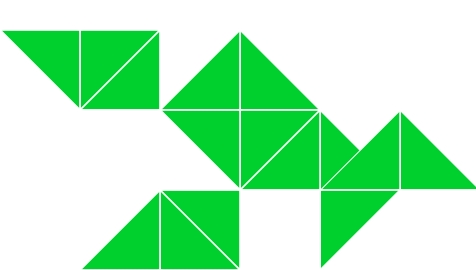
Huczko P., Jak założyć własną firmę? [www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna-firme.html](http://www.zakladam-firme.wieszjak.pl/jak-zalozyc/209930,Jak-zalozyc-wlasna-firme.html), 7.03.2013.

Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości , Jak zostać i pozostać przedsiębiorcą? [www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/](http://www.parp.gov.pl/files/e-book/#/1/), 7.03.2013.

Centrum Innowacji i Transferu Technologii, Przewodnik krok po kroku do własnej firmy, [http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki\\_do\\_pobrania/publikacje/layout\\_zmiana\\_wysylka.pdf](http://www.uwm.edu.pl/pa/fileadmin/pliki_do_pobrania/publikacje/layout_zmiana_wysylka.pdf), 8.03.2013.

### Przydatne strony:

- ▶ [www.firma.gov.pl](http://www.firma.gov.pl)
- ▶ [www.zus.pl](http://www.zus.pl)
- ▶ [www.pip.gov.pl](http://www.pip.gov.pl)
- ▶ [www.twoja-firma.pl](http://www.twoja-firma.pl)



## 5. Zarządzanie zespołem

### ► Zarządzanie jest to sztuka kierowania ludzką aktywnością

*Jean Paul Getty*

Niezmiernie ważną rolę w rozwoju wielu dziedzin życia, odgrywa umiejętne zarządzanie ich zasobami.

Pojęcie zarządzania, nie doczekało się jednoznacznej teoretycznej wykładni i jest wielorako rozumiane. W takim najbardziej bliskim nam pojmowaniu, **zarządzanie** stanowi złożony, wielostronny proces sterowania całokształtem działalności firmy, jej rozwojem i sposobami zachowania się w otoczeniu. Niewątpliwie jest wielką sztuką, której trzeba się stale uczyć – podobnie jak sztuki skutecznego komunikowania – ponieważ zmienia się nie tylko sama firma. Zmieniają się też systemy, znajdujące się z nią w ciągłej interakcji (J. Penc, 2005).

Ten skomplikowany proces, na który składa się zatrudnianie ludzi i konieczność zastosowania różnych technik (np. produkcyjnych) sprawia, iż zarządzanie staje się coraz bardziej złożone. W większości przedsiębiorstw właściciele kapitału (akcjonariusze) powierzają zarządzanie zakładem wyspecjalizowanej kadrze kierowniczej, czyli **menadżerom** (więcej na ten temat w podrozdziale 5.3.), co powoduje często oddzielenie i rozróżnienie funkcji bycia właścicielem firmy od funkcji zarządzającego firmą. Menadżer – jako osoba uprawniona do wydawania poleceń i wskazówek innym, uzyskuje w pewnym znaczeniu władzę, która jest podstawowym warunkiem zarządzania. W odniesieniu do tego można stwierdzić, że **zarządzanie** – to wykonywanie władzy w stosunku do ludzi, rzeczy i kapitału. Kierownik – menadżer wydając polecenia pracownikom, dąży do jakiegoś pożądanego celu przedsiębiorstwa, właśnie za pośrednictwem swoich podwładnych. W odniesieniu do tego **zarządzanie** – to osiąganie konkretnych celów poprzez ludzi. Ponieważ kierując firmą i wydając stosowne polecenia podejmuje się jakieś decyzje (jest decyzyjny), **zarządzanie** utożsamia się także z procesem podejmowania decyzji. Poza tym można powiedzieć, że na ten złożony proces, jakim jest zarządzanie, poza planowaniem, decydowaniem, organizowaniem i strukturą organizacyjną, składa się także motywowanie, informacja i komunikowanie, kontrolowanie, oraz – co jest bardzo istotne – **zarządzanie zespołem ludzi** (B. Piasecki, 1998).

Najbardziej znany we Francji specjalista i autor dzieł na temat zarządzania ludźmi, oraz badacz rozwoju zasobów ludzkich w zarządzaniu

J.M. Perretti postrzega ludzi – pracowników, jako zasoby, które należy optymalizować, a nie jako źródło kosztów, które trzeba minimalizować. Co więcej – uważa, że funkcja personalna w przedsiębiorstwie, przeszła najbardziej spektakularną i najbardziej trwałą ewolucję na przestrzeni lat w dobrym tego słowa znaczeniu.

Tak więc czynnik ludzki w przedsiębiorstwie, stanowi niezmiernie ważny majątek finansowy lub produkcyjny, a dobrze realizowana praktyka zarządzania ludźmi, może w rezultacie prowadzić do wzrostu produktywności, obniżki kosztów, **fluktuacji** pracowników (przemieszczanie się pracowników, a dokładniej ich przychodzenie

i odchodzenie z pracy w określonym czasie), a nawet do poprawy relacji międzyludzkich. Ponadto dzięki niej firma – w procesie rekrutacji – stawiać będzie na wysoko kwalifikowany personel, zwłaszcza w wysoce konkurencyjnym rynku pracy (B. Piasecki, 1998).

Był wiceprezesem portalu Pracuj.pl, jest jego współzałożycielem. Razem ze swoimi wspólnikami współtworzył firmę, która dziś jest największym polskim portalem rekrutacyjnym. Kierował trzema międzynarodowymi projektami zorientowanymi na rozwój narzędzi wspomagających zarządzanie ludźmi.

Zarządzanie zespołem nie jest prostą sprawą. R. Szczepanik porównał ten proces do budowy domu twierdząc, że etap tworzenia zespołu odpowiada rysowaniu projektu i stawianiu fundamentów. Jeżeli zostanie to źle zaplanowane i niezauważone w porę, to wszystko, co zostanie zrobione później, będzie błędne. Dom trzeba będzie przebudować, albo rozburzyć go aż po piwnice. Z konstruowaniem zespołu jest podobnie – jeżeli źle dobierzemy członków tego zespołu, to pomimo najlepszego ich szkolenia i optymalnego motywowania, rezultaty mogą być mierne. Jeżeli natomiast źle zostanie zaplanowana kultura pracy zespołowej i kultura organizacyjna zespołu, jej zmiana zajmie szereg lat (R. Szczepanik, 2010).

## 5.1. Zasady organizacji pracy

► **Człowiek własną pracą i wysiłkiem do wszystkiego dojść może.**

*Adam Mickiewicz*

Czym tak naprawdę jest praca i do czego ta ludzka forma działania jest człowiekowi potrzebna?

**Praca** to pewna celowa działalność człowieka – zbiorowa lub jednostkowa – zmierzająca do uzyskania jakiegoś wytworu materialnego, bądź niematerialnego. Całemu procesowi pracy (na który składają się sama praca, przedmiot pracy i narzędzia pracy) towarzyszy na ogół przekonanie o jej pożytku (W. Okoń, 2001).

Praca odgrywa doniosłą rolę w życiu człowieka i w życiu społeczności, w której człowiek przebywa. Spełnia ona trzy podstawowe, a za razem współzależne od siebie funkcje:

- ▶ Jest czynnikiem tworzenia produktu społecznego – **funkcja ekonomiczna**.
- ▶ Jest środkiem uzyskiwania dochodów – **funkcja dochodowa**.
- ▶ Jest środkiem zaspakajania aspiracji społecznych i zawodowych – **funkcja społeczna** (W. Pomykało, 1995).

Jak zatem tą pracę zorganizować, aby przyniosła szereg korzyści dla człowieka?

Polski filozof, logik i etyk, twórca etyki niezależnej. Nauczyciel i pedagog

T. Kotarbiński definiuje **organizację**, jako pewną całość, której wszystkie składniki przyczyniają się do powstania tej całości. Innymi słowy, **organizacja** – to pewien uporządkowany układ powiązanych wzajemnie elementów, które tworzą całość dającą się wyodrębnić z otoczenia.

Pojęciem pokrewnym do *organizacji*, jest **struktura organizacyjna**, którą tworzą wyodrębnione stanowiska pracy, połączone różnymi więziami organizacyjnymi, oraz **zasady organizacji pracy**. Zasady te, to pewne reguły, których stosowanie zapewnia skuteczność działania organizacyjnego.

Wyróżnić można kilka zasad, które składają się na organizację pracy:

- ▶ **Zasada ekonomicznego działania** – polega na dążeniu do osiągnięcia korzystnego efektu pracy, przy danym nakładzie sił i środków (**zasada efektywności**) oraz do osiągnięcia założonego efektu pracy najmniejszym nakładzie sił i środków.
- ▶ **Zasada optymalnego wyniku działania** – oznacza, że przy zwiększeniu środków bądź nakładów pracy nie dopuszcza się do przekroczenia momentu, w którym zaczyna maleć wynik działania.
- ▶ **Zasada podziału pracy** – dotyczy rozłożenia pracy na elementy proste i powierzenie ich wykonania specjalistom, co stwarza możliwość zwiększenia wyniku działania.
- ▶ **Zasada koncentracji pracy** – oznacza powierzenie jednorodnych funkcji tym samym, dobrze przygotowanym wykonawcom, co przynosi oszczędność środków i energii.
- ▶ **Zasada harmonii** – polega na odpowiednim doborze materiałów, maszyn i narzędzi oraz skoordynowaniu działań w czasie tak, aby uzyskać najlepsze wyniki.
- ▶ **Zasada ciągłości pracy** – polega na utrzymaniu względnie równomiernego tempa pracy, co daje wysoką wydajność.
- ▶ **Zasada kompleksowego działania** – oznacza, że każdy fragment pracy musi być rozpatrywany w powiązaniu z pozostałymi.
- ▶ **Zasada identyfikacji pracy** – polega na zmierzaniu do uzyskania lepszych wyników ilościowych i jakościowych, poprzez usprawnienie techniczne i organizacyjne.
- ▶ **Zasada indywidualizacji** – to przydzielanie pracy według indywidualnych sprawności, możliwości, predyspozycji i zainteresowań (M. Wiszniewska, 2013).

Z organizacją pracy wiąże się także **proces rekrutacji**. Każde zatrudnianie nowego pracownika wymaga przeprowadzenia przez firmę takiej rekrutacji, która jest złożonym, wieloetapowym procesem – często rozłożonym w czasie. Celem procesu rekrutacji jest wyłonienie spośród kandydatów na określone stanowisko takiej osoby, która możliwie najdokładniej spełni oczekiwania firmy. Proces rekrutacji pracowników, w zależności od tego, jakie jest źródło pozyskania kandydatów na dane stanowisko, może przybrać formę rekrutacji **wewnętrznej** (kiedy wolne stanowisko przeznaczane jest dla pracownika już zatrudnionego, lecz np. na niższym stanowisku) **zewnętrznej** (stanowisko przeznaczone jest dla kandydata spoza firmy) lub **mieszanej**. Proces rekrutacji w różnych przedsiębiorstwach może przebiegać inaczej, jednak da się w nim wyróżnić pewne wspólne, podstawowe **etapy rekrutacji pracowników**:

- ▶ Określenie kompetencji potrzebnych na danym stanowisku, które stanowią będą wyznacznik oczekiwania wobec pracownika.
- ▶ Sformułowanie ogłoszenia rekrutacyjnego, które nakreśli zadania na danym stanowisku, oraz oczekiwane przez firmę kompetencje.
- ▶ Wybór nośnika ogłoszenia rekrutacyjnego, czyli publikacja ogłoszenia w wybranych serwisach i prasie i uruchomienie wszystkich dostępnych firmie kanałów rekrutacji.
- ▶ Analiza CV kandydatów, jako pierwszy etap selekcji w procesie rekrutacji, czyli odrzucenie tych kandydatów, którzy nie spełniają minimum oczekiwanego przez firmę.
- ▶ Kontakt firmy z wybranymi osobami, czyli z kandydatami, którzy przeszli pozytywnie proces selekcji. Oni otrzymują zaproszenie na spotkanie rekrutacyjne, które może zostać poprzedzone rekrutacyjną rozmową telefoniczną.
- ▶ Istotny element procesu rekrutacji, czyli podejmowanie decyzji przez osoby odpowiedzialne za zatrudnienie nowego pracownika – selekcja kandydatów na podstawie zebranych danych z CV, wywiadu, referencji.
- ▶ Udzielanie informacji zwrotnej kandydatom odrzuconym i złożenia oferty pracy wybranemu kandydatowi (ten etap procesu rekrutacji również może obejmować kilka spotkań lub rozmów).
- ▶ Proces zatrudniania, czyli przekazania przyszłemu pracownikowi wszystkich niezbędnych do zawarcia umowy o pracę danych (Blog infoPraca, 20.03.2013).

Osoby, które zawodowo zajmują się wyszukiwaniem wybitnych specjalistów na określone stanowiska pracy, to **headhunterzy** (L. Wiśniakowska, 2007).

Najczęściej są to pracownicy dużych korporacji lub agencji pośrednictwa pracy. Ich zadaniem jest identyfikacja szczególnie cenionych na rynku specjalistów i nawiązanie z nimi kontaktu w celu skłonienia ich do zmiany pracodawcy. Proces rekrutacji prowadzony przez „łowców głów” jest poufny<sup>1</sup>.

1. <http://pl.wikipedia.org/wiki/Headhunter> (09.05.2013)

Headhunterzy działają szczególnie aktywnie w branżach wymagających dużej wiedzy, specjalizacji i doświadczenia, a więc tam, gdzie dobrych pracowników jest niewielu (w handlu, finansach, marketingu, prawie, w reklamie i public relations, a także w branżach inżynierskich). Szczególną kategorią osób, na którą headhunterzy polują, są **menedżerowie**<sup>2</sup>. Ich rekrutacja przebiega nieco inaczej, niż szukanie wąsko wyspecjalizowanych pracowników. Menedżerowie to bardzo specyficzna grupa ludzi, dla których szczególnie ważna jest potrzeba rozwoju, sukcesu, tworzenia czegoś nowego, przekształcania rzeczywistości. Konwersacja z headhunterem to nie jest zwykła rozmowa kwalifikacyjna. Headhunter dysponuje dużo szerszym wachlarzem narzędzi diagnostycznych, niż potencjalny – nawet bardzo dobrze przygotowany – pracodawca. W trakcie rozmowy headhunter diagnozuje cechy rozmówcy, typ jego osobowości oraz temperament. Sprawdza jego predyspozycje, motywacje i kwalifikacje. Często zaskakuje przygotowanymi materiałami i prosi potencjalnego pracownika o ustosunkowanie się do różnych kwestii<sup>3</sup>.

Profesjonalny headhunter jest najczęściej osobą, która doskonale zna się na branży do której rekrutuje. Rekrutacja przez headhunting jest kosztowna, dlatego też stosuje się ją na wysokich, dobrze opłacanych stanowiskach specjalistycznych. Headhunterzy są w stanie dotrzeć do kandydatów na wiele różnych sposobów, wykorzystując w tym celu np.: serwisy społecznościowe, Internet, kontakty biznesowe, bazy danych CV i nierzadko podstęp, a także inne metody, które uzależnione są od tego, kogo headhunter poszukuje<sup>4</sup>.

Przy organizacji pracy niezmiernie ważne są także przyjmowane **style kierowania zespołem ludzi**, jakie preferuje menadżer, oraz ich efektywność. Wyróżnić można między innymi trzy podstawowe style kierowania pracą grupy: **autokratyczny, demokratyczny i liberalny**<sup>5</sup>.

**Styl autokratyczny** zakłada, że przeciętny człowiek ma chwiejny stosunek do pracy i powierzanych mu obowiązków, od których najczęściej się uchyla. Brakuje mu poczucia odpowiedzialności, dąży do minimalizacji wysiłku wkładanego w pracę. W związku z tym kadry kierownicze – menadżerowie, powinni być surowi i wymagający, gdyż tylko taka postawa zapewni realizację stawianych zadań. Autokratyczny styl kierowania prowadzi do bardzo wysokiej wydajności i efektywności pracy w danej grupie roboczej. Jednak jej jakość jest niska, podobnie jak niska jest motywacja do pracy. Taki styl kierowania zespołem daje najlepsze rezultaty w sytuacjach zagrożenia i presji czasowej (np. obronność kraju, w czasie klęsk żywiołowych) oraz gdy pracownicy nie mają stosownych kwalifikacji zawodowych, a także boją się podejmować indywidualną odpowiedzialność.

**Styl demokratyczny** natomiast zakłada, że przeciętny pracownik z chęcią przystępuje do realizacji powierzanych mu obowiązków i zadań. Menadżer potrafi być twórczy i odpowiedzialny, a podwładni mają więc prawo do udziału w podejmowaniu decyzji. Menadżer określa jedynie cel działania, który pracownicy realizują wybierając sposób, który uznają za najbardziej odpowiedni. Demokratyczny styl kierowania zespołem – w przeciwieństwie do stylu autokratycznego – sprzyja lepszej jakości pracy i motywacji do podejmowania zadań. Efektywność jednak jest znacznie mniejsza. Stosowanie demokratycznego stylu kierowania jest właściwe w odniesieniu do pracowników wysoko wykwalifikowanych, posiadających dużą potrzebę niezależności i swobody działania.

**Styl liberalny** zakłada pozostawienie pracownikom niemalże całkowitej swobody w podejmowaniu decyzji, czyli w wyborze celów zawodowych i sposobów ich realizacji. Przyjęcie takiego stylu kierowania ludźmi, prowadzi do nieefektywnej pracy zespołu, a jej wyniki są bardzo niskiej jakości.

Wybór określonego stylu kierowania ludźmi, zależy od kadry kierowniczej (W. Cwalina, J. Sobek, 2013).

Właściwa organizacja pracy może być swoistym kluczem do sukcesu, pośrednio poprzez efektywną pracę poszczególnych zespołów. Poza tym umiejętna organizacja pracy, stwarza warunki do efektywnego wykorzystania czasu (organizacja pracy i zarządzanie czasem mają wiele wspólnego). Nawet nieznaczące błędy w organizacji pracy, mogą mieć istotny wpływ na zmniejszenie jej efektywności. Tutaj także znaczącą rolę odgrywają liderzy poszczególnych zespołów.

2. więcej o menedżerach zob. w rozdziale 5.3 niniejszego podręcznika

3. P. Pacuła, *Headhunting: daj się złapać łowcy głów*, <http://menstream.pl/wiadomosci-kariera/headhunting-daj-sie-zlapac-lowcy-glow,0,649763.html> (09.05.2013)

4. <http://kariera.infopraca.pl/2011/06/headhunter-%E2%80%93-kto-to-taki/> (09.05.2013)

5. W. Cwalina, J. Sobek, *Psychologia organizacji i zarządzania – przywództwo, konflikty, negocjacje, motywacja do pracy, systemy zarządzania*, [http://nop.ciop.pl/m5-2/m5-2\\_1.htm](http://nop.ciop.pl/m5-2/m5-2_1.htm), 21.03.2013.

## 5.2. Lider – szef, czy kolega

- ▶ **Liderem jest ten, kto widzi więcej niż inni, patrzy dalej niż inni i kto dostrzega rzeczy, zanim zobaczą je inni.**

*LeRoy Eims*

Osiągnięcie szeroko rozumianego sukcesu, jest marzeniem niemalże każdego człowieka. W sposób szczególnie dostrzegalne jest to w świecie biznesu. Sukces i powodzenie w dużej mierze zależą od tych pracowników, którzy kierują ludźmi.

Kierowników nastawionych do wypełniania swoich obowiązków w sposób wybitnie nowatorski nazywa się **liderami**. Piastujący formalnie stanowisko kierownicze lub też nie lider, jest podatny na nowe wizje, jest empatyczny i emocjonalnie nastawiony na ludzkie potrzeby, oczekiwania i nastroje. Fascynują go wielkie innowacje oraz dalekosiężne plany. Liderzy bardziej cenią sobie przebywanie w świecie myśli, teorii i **imaginacji** (zdolność do tworzenia obrazów za pomocą wyobraźni), niż paranie się konkretami codziennej krzątania. Liderzy są skłonni do eksperymentowania, elastyczności – prezentują postawę marzycielską i niekonwencjonalną w poczynaniach. Przede wszystkim są twórczy i oryginalni – wrogo nastawieni do rutyny. Liderzy w rozwiązywanie istniejących problemów wkładają mnóstwo serca i emocji w przeciwieństwie np. do menadżerów, o których więcej w kolejnym podrozdziale (W. Pomykało, 1995).

Czym zatem charakteryzuje się **lider**?

Ludzi w naturalny sposób przyciągają osoby  **pewne siebie**, co jest charakterystyczne dla ludzi z pozytywnym nastawieniem. Pewność siebie dodaje sił. Dobry przywódca potrafi sprawić, by ludzie byli go pewni, a wielki przywódca, by byli pewni siebie. Poza pewnością siebie – **siła charakteru**. Cechy składające się na właściwy charakter to między innymi uczciwość, integralność, chęć uczenia się, zdobywania wiedzy i nabywania nowych umiejętności, a także niezawodność, wytrwałość, sumienność i hołdowanie etyce pracy. Zazwyczaj słowa człowieka o właściwym charakterze, zgadzają się z jego czynami.

Wybitnych liderów zawsze cechuje **samodyscyplina**, zarówno emocjonalna jak i ta związana z czasem. Osoby zdyscyplinowane mają świadomość, że ponoszą odpowiedzialność za swoje reakcje emocjonalne, nieustannie się rozwijają i ciągle dążą do doskonałości, intensywnie wykorzystując własny czas. Poza tym liderzy powinni posiadać umiejętność **skutecznego porozumiewania się**, ponieważ dobra komunikacja, to początek pozytywnego – wzajemnego oddziaływania na siebie (O. Rzycka. 2013).

Lider zespołu w pewnym sensie ma **prawo do bycia nieco przed i nad zespołem**. Nad – ponieważ musi obserwować komunikację między członkami zespołu, przed– gdyż musi wyczuć, kiedy pojawiają się ewentualne trudności mogące zaważyć na dalszej współpracy całego zespołu. Lider dobrze kierujący zespołem posiada pewien zestaw cech, które decydują m.in. o szacunku w grupie, zdolności do motywacji członków zespołu, oraz o dalekowzroczności w przypadku nowych wyzwań. Te cechy to m.in.:

- ▶ **Konsekwencja.**
- ▶ **Decyzyjność i elastyczność** (wspomniane w przypadku omawiania procesu zarządzania zespołem).
- ▶ **Otwartość.**
- ▶ **Szacunek dla innych.**
- ▶ **Przedsiębiorczość.**

Dobry lider zna członków zespołu nieco lepiej, niż oni siebie nawzajem. Zauważa ewentualne konflikty i dba o realizację postawionych celów, utrzymując tym samym wysoki stopień motywacji. Potrafi zweryfikować stadium rozwoju zespołu oraz zdecydować o podjęciu kolejnych kroków we współpracy z zespołem.

Lider doskonały, czyli taki, który mógłby stać się modelowym przykładem dla dzisiejszych nowoczesnych liderów, posiada pewne cechy, na które zwrócili uwagę dwaj profesjonalni trenerzy z wieloletnim doświadczeniem **A. Leigh i M. Maynard**.

Australijski polityk,  
profesor ekonomii

Światowej sławy trener wykonawczy,  
pracował z wieloma osobami w celu  
poprawienia ich umiejętności  
przywódczych i komunikacyjnych



Tak więc doskonały lider, łączy w sobie takie cechy, jak: **wnikliwość** (czyli umiejętność komunikacji interpersonalnej), **inicjatywa**, **inspiracja** (przekonanie o sukcesie), **zaangażowanie** (zaproszenie do wspólnej pracy, a tym samym do osiągnięcia sukcesu), **improwizacja** (kreatywne i elastyczne działania), **indywidualizm** (pewność siebie i asertywność) oraz **orientacja na zadanie**, czyli umiejętność testowania i kontrolowania statusu zadania (J. Józwiak, 2013).

Lider – podobnie jak menadżer, to jednostka przywódcza, która kieruje zespołem ludzi. W odniesieniu do tego **przywództwo** należy rozumieć, jako proces komunikacyjny, który pomaga grupom organizować się w taki sposób, aby osiągać zakładane i pożądane cele (S. Morreale, B. Spitzberg, J. Barge, 2007).

### 5.3. Współczesny menadżer

- ▶ **Menedżerowie muszą być nie tylko decydentami, lecz także inspiratorami zdolnymi do motywowania ludzi”.**

Lee Iacocca

W skutecznym kierowaniu zespołem kluczową rolę odgrywają sprawnie prowadzone działy personalne, a w szczególności ich **menadżerowie** (S. Witkowski, T. Listwan, 2008).

W języku angielskim *manager* oznacza administratora, dyrektora, kierownika, zarządzającego, przełożonego. Są oni zwierzchnikami konkretnego zespołu ludzkiego, a ich rola sprowadza się do „nadzorowania” procesu osiągania przez zespół założonych celów, które są stawiane przez kogoś „trzeciego”, lub też sami menadżerowie uczestniczą w ich formułowaniu. Menadżerowie kierują pracą innych, udzielają wskazówek, podpowiadają, instruują i nauczają. Są odpowiedzialni za wszelkie poczynania całego zespołu.

Menadżerowie zajmują różne stanowiska. Na szczycie „piramidy” znajdują się menadżerzy najwyższego szczebla, tzw. *executives*, a więc prezesi, wiceprezesi, dyrektorzy, którzy kierują pracą innych menadżerów. Na średnim szczeblu zarządzania, działają menadżerowie, którymi są zastępcy dyrektorów lub kierowników dużych działów oraz główni inżynierowie, ekonomiści, księgowi. Podlegają oni menadżerom najwyższego szczebla. Najliczniejszą grupę stanowią menadżerowie szczebla najniższego (pierwszego) i najczęściej są nimi kierownicy działów, kierujący pracą szeregowych pracowników.

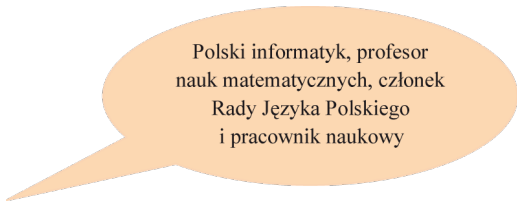
Menadżerowie realizują tzw. **funkcje zarządzania**, które w kolejności są następujące:

- ▶ **Planowanie** (wyznaczanie celu globalnego i celów szczegółowych).
- ▶ **Organizowanie** (określanie kto i co powinien robić, aby osiągnąć cel).
- ▶ **Kierowanie** (przewodzenie, inicjowanie i motywowanie do podejmowania stosownych działań).
- ▶ **Kontrolowanie** działań.

Kierujący zespołem menadżerowie mają do spełnienia również określone role, a mianowicie: **interpersonalne, informujące i decyzyjne** (wspomniane już wcześniej). Muszą wykazać się także pewnymi umiejętnościami, które **R. L. Katz** określił, jako:

Nauczyciel,  
menadżer

- ▶ **Umiejętności techniczne** – rozumiane, jak pewna zdolność do posługiwania się narzędziami, metodami i technologią w określonej specjalności.
- ▶ **Umiejętności społeczne** – czyli umiejętność współpracy indywidualnie i z poszczególnymi grupami.
- ▶ **Umiejętności koncepcyjne** – czyli zdolność menadżera do koordynacji działań poszczególnych grup, a także integrowanie wszystkich dziedzin, które realizowane są w jego polu działania (W. Pomykało, 1995).



Polski informatyk, profesor  
nauk matematycznych, członek  
Rady Języka Polskiego  
i pracownik naukowy

A. Blikle określił menadżera, jako tego, który pragnie budować swój zespół według nowoczesnych zasad oraz kształtować w nim postawy otwartości, życzliwości i wzajemnej współpracy. Powinien dbać o dobrą atmosferę w zespole i powinno mu zależeć na usuwaniu źródeł niechęci, zawiści i poczucia krzywdy (A. Blikle, 2000).

Można przypuszczać, że pewne wymagania stawiane „menadżerom jutra”, będą znacznie trudniejsze. Już nie tylko wyuczone, utrwalone i sprawdzone metody pracy, czy rozwinięte umiejętności, ale i nowe – wynikające chociażby ze zmiany organizacji albo wzrostu znaczenia przywódczej jego roli (J. Penc, 2005).



## TEMATY DO DISKUSJI

1. Dlaczego o zarządzaniu zespołem mówi się, że jest „sztuką”?
2. Jakie funkcje spełnia praca i którą z nich uznałbyś za najważniejszą?
3. Czy lider jest bardziej szefem, czy kolegą?
4. Jakie cechy powinien posiadać „nowoczesny menadżer”?
5. Opracuj proces rekrutacji do firmy, w której jesteś menadżerem.
6. Wybierając przedsięwzięcie, nad którym chcesz pracować określ rolę poszczególnych członków zespołu i ich zadania.

### 5.4. Praca w zespole

W zarządzaniu zespołem ważna jest praca zespołowa, która stanowi podstawową, a zarazem wyższą formę organizacji pracy. Polega na powierzeniu określonej grupie pracowników czynności lub operacji wydzielonych z procesów pracy<sup>6</sup>. Efektywność pracy zespołowej zależy w dużej mierze od lidera, jego umiejętności budowania zespołu oraz kierowania nim. Dobrze dobrany zespół, uzupełniające się kompetencje członków oraz odpowiedni podział zadań powodują tzw. **efekt synergii**<sup>7</sup>.



## Do zapamiętania

**Efekt synergii – to zasada, którą można potocznie zapisać jako ‘2+2=5’ czyli uzyskanie zwielokrotnionych korzyści dzięki umiejętnemu połączeniu części składowych całości**

6. [www.pl.wikipedia.org](http://www.pl.wikipedia.org), 15.03.2013.

7. [www.mfiles.pl](http://www.mfiles.pl), 15.03.2013.

Każda grupa aby właściwie funkcjonować musi być zintegrowana. Integracja może mieć charakter kulturowy lub normatywny. Aby grupa funkcjonowała właściwie powinna istnieć między nimi właściwa komunikacja. Skuteczność pracy zespołu jest największa, gdy między zachowaniami zadaniowymi i zespołowymi zachodzi czy istnieje właściwa proporcja a zachowania indywidualne są ograniczone do minimum

### Etapy rozwoju zespołu:

1. **etap formowania** - dominuje niepokój, poznawanie się członków zespołu, zależność od przywódcy zespołu, testowanie zadania;
2. **etap ścierania się** - dominuje atmosfera konfliktu, rodzi się emocjonalny opór wobec lidera, wobec stawianych zadań, metod, konflikt wobec wszystkiego;
3. **etap normowania się** - daje możliwość kształtowania, spójności grupy, norm i zasad współżycia, współdziałania, choć ciągle jeszcze na tym etapie występuje otwarta; i dynamiczna wymiana poglądów, wyodrębnia się tożsamość grupy, wsparcie;
4. **działanie** - wszystkiego rodzaju problemy interpersonalne zostały rozwiązane, cele i zadania zostały zaakceptowane, zespół podejmuje działanie.
5. **rozwiązanie zespołu** – etap ten występuje tylko wtedy, gdy zespół on powołany do konkretnego zadania

### Zalety pracy zespołowej:

1. działanie pracy zespołowej pozwala uzyskiwać lepsze rezultaty niż praca jednostek (synergiczny efekt działania zespołowego);
2. podniesienie wydajności pracy;
3. stworzenie warunków do wykorzystania indywidualnych umiejętności w interesie zespołu;
4. wykonywanie przez członka zespołu tego co jest dla niego odpowiednie, dzięki temu wzrasta zadowolenie z pracy;
5. zmniejsza się poczucie zależności od przełożonego;
6. wzmocnienie więzi pomiędzy poszczególnymi członkami zespołu (integracja), grupa staje się całością;
7. uaktywnienie procesu wzajemnej kontroli i samokontroli.

### Wady pracy zespołowej:

1. może prowadzić do konformizmu;
2. może pojawić się w zespole lider - samozwaniec wymuszający na członkach grupy przyjęcie postaw negatywnych;
3. zmusza do częściowej rezygnacji z własnych ambicji na rzecz norm i wartości funkcjonujących w zespole;
4. zespół potrzebuje więcej czasu na podjęcie decyzji lub rozwiązanie danego problemu niż indywidualny pracownik.

Aby grupa mogła sprawnie funkcjonować musi posiadać **lidera**, czyli osobę która przejmie przywództwo i będzie kierowała pracą. By dobrze kierować grupą lider powinien wyróżniać się wieloma istotnymi cechami.

Menedżer sprawujący pieczę nad ludźmi ma obowiązek cenić ich, za to kim są; wierzyć, że chcą dać z siebie wszystko; chwalić ich osiągnięcia i jako ich przywódca zgadzać się ponosić za nich odpowiedzialność. Najważniejszym zadaniem menedżera jest pozyskiwanie i utrzymywanie przy sobie wartościowych ludzi. Ludzie, jeśli mają przywódcę, który dostrzega ich wartości, mogą się rozwijać, doskonalić i zwiększać swą efektywność. Osoba która chce odnosić sukcesy jako lider, musi wychować innych liderów. Stworzyć zespół. Skala sukcesu lidera zależy od ludzi z jego najbliższego otoczenia, dlatego zadaniem lidera jest znaleźć najlepszych ludzi, by następnie uczynić z nich najlepszych przywódców, jakimi potrafią być. Bez sukcesorów nie ma sukcesu<sup>8</sup>.

W każdej grupie możemy wyodrębnić pewne charakterystyczne **role grupowe**<sup>9</sup>:

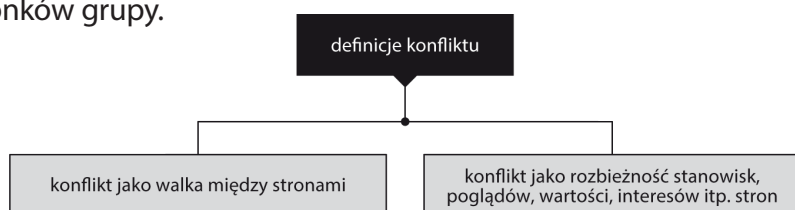
- ▶ błazna,
- ▶ kozła ofiarnego ( syndrom ofiary , w grupie spełnia rolę „bezpiecznika”, „zaworu bezpieczeństwa”),
- ▶ lidera zadaniowego,
- ▶ lidera sympatii,

8. [www.biurocentrum.pl/?strona=toptemat&action=pokaz&id=2799](http://www.biurocentrum.pl/?strona=toptemat&action=pokaz&id=2799) (20-04-2013)

9. por. K. Kalin, P. Muri, *Kierować sobą i innymi*, Kraków 1996

- ▶ dziecka grupowego,
- ▶ autsajdera,
- ▶ adwokata diabła (ciągła opozycja do grupy),
- ▶ komentatora,
- ▶ sumienia grupy.

W każdej grupie dochodzi do konfliktów. Zadaniem lidera grupy jest umiejętność zapobiegania konfliktom, a jeżeli już powstaną, to ich rozwiązywanie. Konflikt to sprzeczność interesów lub poglądów na dany temat członków grupy.



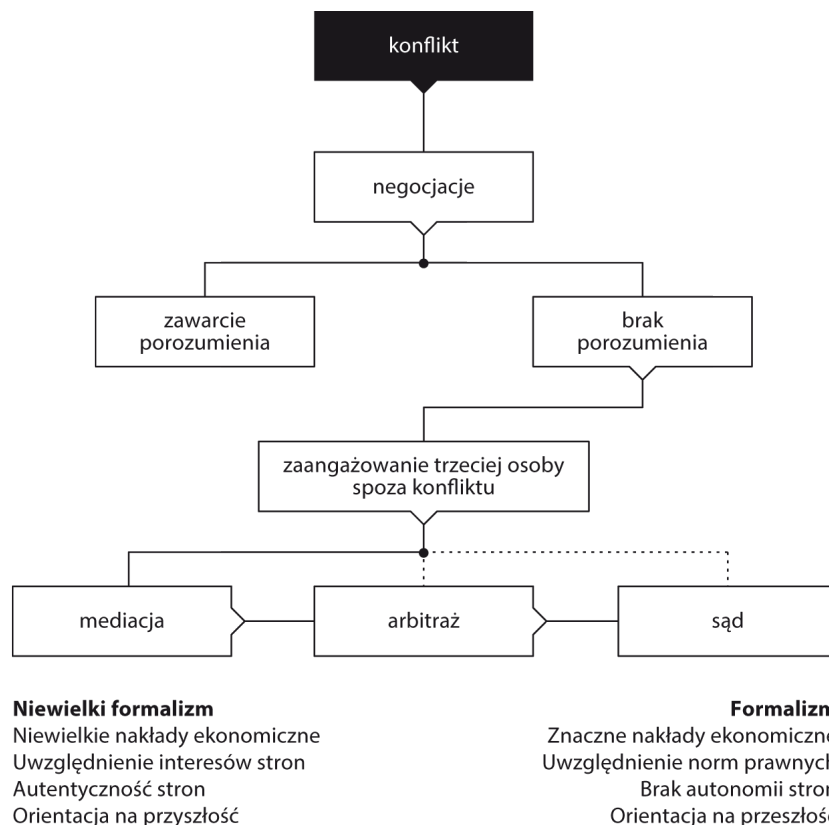
#### Schemat 1. Podział definicji konfliktu według kryterium przedmiotu

Źródło: A. Lewicka-Zelent, *Uwarunkowania gotowości nieletnich do zadośćuczynienia w paradygmacie sprawiedliwości naprawczej*, Lublin 2013, s. 70

#### Przyczyny powstawania konfliktów w zespole<sup>10</sup>:

1. Współzależność pracy w zespole:
  - ▶ różnice kompetencji poszczególnych członków zespołu,
  - ▶ różnice zadań w kwestiach istotnych dla zespołu,
  - ▶ ograniczenie możliwości zaspokojenia wszystkich oczekiwań np. co do pracy, urlopów, premii czy podwyżek,
  - ▶ poczucie niesprawiedliwości związane z zasadami rozdziału obowiązków i nagród,
2. Zła komunikacja:
  - ▶ utrudnienia w przepływie informacji,
  - ▶ niejasne polecenia,
  - ▶ brak okazji do wyjaśnienia wątpliwości,
  - ▶ nieefektywne zebrania zespołu,
3. Brak wzmocnień pozytywnych:
  - ▶ stałe podnoszenie wymagań bez doceniania sukcesów,
  - ▶ znacząca przewaga krytyki nad uznaniem,
  - ▶ brak wsparcia w sytuacji zmian i kryzysów,
4. Przewaga rywalizacji nad współpracą:
  - ▶ akceptowanie podziału na lepszych i gorszych,
  - ▶ siłowe rozwiązywanie konfliktów,
  - ▶ brak szacunku dla różnych opinii i interesów.

10. <http://www.pino.pl/article-view/id,755614,type,1,t,przyczyny-powstawania-konfliktow-i-sposoby-ich-rozwiazywania-w-zespole> (09.05.2013)



**Schemat 2. Pożądana kolejność stosowania metod dochodzenia do porozumienia**

Źródło: A. Lewicka-Zelent w oparciu o: Blankenburg E., Gottwald W., Stempel D.(red.), 1982, *Alternativen in der Ziviljustiz, Köln*, s. 292.

Wskazane metody rozwiązywania konfliktów (mediacja, negocjacje, arbitraż, sąd) wzajemnie uzupełniają się. Ze względu na pewne ich atrybuty, kolejność ich wykorzystywania w sytuacji zaistnienia konfliktu nie powinna być przypadkowa, ale oparta na pogłębionej analizie ich zalet i wad.

Konflikt może być źródłem korzystnych zmian dla zespołu, ponieważ podnosi motywację i zaangażowanie do pracy. Ważne jest aby lider efektywnie pokierował konfliktem.

## 5.5. Etyka biznesu

### Etyczne implikacje funkcjonowania przedsiębiorstw

Działalność człowieka we wszystkich jego przejawach można w zależności od przyjętego punktu widzenia rozpatrywać, jako działalność *dobrą* lub *złą*. Nadawanie sensu swoim działaniom i określanie ich, jako *dobre* lub jako *złe* nazywanym moralnością. **Moralność** jest pewnym zjawiskiem społecznym, które można określić, jako „...zbiór przekonań na temat dobra i zła, które żywi dana grupa lub jednostka względem ludzkich działań” (B. Przybył, J. Swianiewicz 2002). W tym ujęciu moralność jest pojęciem zakresowo różnym od etyki, która jest wypracowanym systemem osądów moralnych, opartym na określonej teorii dobra i zła. Moralność jest pojęciem pierwotnym w stosunku do etyki, która czerpie z moralności swoje refleksje i inspiracje. Współczesna **etyka to najogólniej rzecz ujmując teoria moralności, chociaż niekiedy oznacza również zespół norm i ocen moralnych charakterystycznych dla danego społeczeństwa lub grupy społecznej** (M. Godziek, 2005).

Obszarem rozważań etyki jest wiele zjawisk, a w szczególności pytanie o naturę dobra i zła. Cel tych rozważań jest dwojaki: ocenienie postępowania człowieka oraz odwołanie się do standardów moralnych (a co za tym idzie poszukiwanie skutecznych zasad postępowania moralnego w określonych sytuacjach). Do kluczowych

pojęć stosowanych przez naukę o moralności zaliczamy (B. Przybył, J. Swianiewicz 2002):

- ▶ **prawa** - uprawnienie do określonych działań,
- ▶ **obowiązki** – zobowiązanie do podejmowania określonych działań lub posłuszeństwo wobec przepisów prawnych,
- ▶ **normy moralne** – przyjęte, uniwersalne zasady zachowania, respektowane przez członków danej społeczności, często związane są z obowiązującym systemem religijnym (prawdomówność, szacunek dla innych ludzi, szczególnie starszych, troska o najbliższych, odpowiednie zachowanie w szkole, na ulicy, w urzędzie),
- ▶ **normy postępowania** - dopuszczone przez prawo zakres działań w danej społeczności,
- ▶ **normy prawne** - reguły zachowania, skonstruowane na podstawie przepisów prawa (obowiązek płacenia podatków, kodeksy, np. ruchu drogowego, postępowania administracyjnego, prawa i obowiązki ucznia),
- ▶ **sankcja moralna** – niekoniecznie zamierzona przez człowieka nagroda lub kara za czyn (kara za czyn niemoralny/haniebny, nagroda za czyn dobry),
- ▶ **obiektywizm moralny** – stanowisko głoszące, że wartości i normy moralne istnieją niezależnie od odbierającego je podmiotu,
- ▶ **subiektywizm moralny** – stanowisko, które uzależnia znaczenie sądów etycznych od indywidualnych emocji i gustów lub od społecznych warunków panujących a danej społeczności i w określonym czasie.

Za początek etyki biznesu uznaje się rok 1745, kiedy została wydana encyklika *Vixpervenit* dotycząca lichwy (Benedykt XIV, 1745). Przez wiele lat ten dział etyki rozwijał się, a w obecnym rozumieniu tego terminu - etykę w biznesie/ etyka biznesu cechują go dwie podstawowe tendencje. Pierwsza to rozszerzanie się etyki na różne dziedziny biznesu, takie jak: reklama i marketing, negocjacje, akwizycja czy sprzedaż obwoźna, proces rekrutacji personelu, ocenianie przedsiębiorstwa, pracowników i in. Drugą tendencją jest dostrzeżenie zjawiska długotrwałych korzyści organizacji (zysk) związanych z etycznym image. Stopniowo biznes staje się działalnością uzależnioną od społecznej akceptacji. Pojawiają się sformułowania: „przyjazny biznes”, „wspólnota w biznesie”, „etyczne postępowanie przedsiębiorstwa”, „kultura etyczna” czy „etyka po prostu się opłaca”. Powszechne staje się podejście uznające, że wartości etyczne nie są barierą dla rozwoju ekonomicznego, ale są fundamentem, bez którego nie może istnieć gospodarka wolnorynkowa.

**Moralność** jest zależna od społeczeństwa, jakie ją realizuje, jest bardzo zmienna i zależy od wielu czynników ekonomiczno-społecznych i psychologiczno-społecznych. Przyczyną rozchwiania moralności może być np.: transformacja ustrojowa i gospodarcza (zarzucenie starych wartości, niejasność nowych, relatywizm moralny), historia (liberum veto, zabory, komunizm), przenikanie gospodarki i polityki (brak wzorców), nadużywanie prawa (luki, opieszałość egzekwowania), trudności ekonomiczne (braki kapitału by sprostał konkurencji międzynarodowej, obniżanie standardów przez firmy zagraniczne by konkurować w warunkach lokalnych), brak lobby konsumentów, brak promowania wartości.

### **Etyczne aspekty relacji przedsiębiorstwo-konsument**

Zaufanie stanowi zasadniczą jakość zdrowych relacji pomiędzy ludźmi – odnosi się to również do relacji klient – przedsiębiorstwo. Przedsiębiorstwa muszą zdobywać zaufanie poprzez swoje postępowanie, musi zyskać na rynku wiarygodność. Wiarygodność to zespół czterech przenikających się i nieredukowalnych cech: **prawość, uczciwość, dotrzymanie obietnic, lojalność.**

Na gruncie tychże relacji pojawia się wiele problemów i trudności o charakterze etycznym i moralnym. Za najważniejsze zobowiązania przedsiębiorców wobec konsumentów uznać można:

- ▶ **uczciwe postępowanie** – przedsiębiorstwo przestrzega reguł zasad rynkowych bez oszukiwania, bez uchylania się od obowiązków, bądź innych form nieczystego postępowania,
- ▶ **uczciwą konkurencję** – przedsiębiorstwo powinno przestrzeganie praw (w szczególności sposób praw antymonopolowych i prawa o ochronie konkurencji) a pracownikom nie wolno angażować się w działania ograniczające konkurencję, naruszające prawa antymonopolowe lub prawo o ochronie konkurencji. Pracownicy i współpracownicy oraz właściciele zakładów nie mogą w sposób nieuczciwy wykorzystywać klientów, dostawców, konkurentów ani innych osób (manipulację, ukrywanie informacji, błędne przedstawianie faktów). Przedsiębiorstwo powinno traktować klientów w sposób

jednakowy. Wiarygodne przedsiębiorstwo działa wyłącznie w zalegalizowanych stowarzyszeniach, celach biznesowych, naukowych lub branżowych,

- ▶ **uczciwą reklamę** – przedsiębiorstwo zobowiązane jest do zapewnienia zgodności działań reklamowych i promocyjnych z obowiązującym prawem. Prezentacje produktów i ich porównania muszą być przedstawione w sposób uczciwy, całościowy, autentyczny i zgodny z prawdą, tak by dostarczyć odbiorcy możliwie pełnej wiedzy o produkcie, co umożliwić odbiorcy przekazu (reklamy, prezentacji, itp.) wyrobienie sobie własnej, obiektywnej opinii o wartości użytkowej produktu lub usługi.

### ▶ **Czego nie wolno stosować w reklamie**

Nakłaniać do rozwijania uzależnień, kłamać, atakować wprost inne towary lub usługi, naruszać dobre obyczaje, naruszać godność człowieka pod każdym względem, nakłaniać do przemocy, dyskryminować, wywoływać szkód w środowisku naturalnym.

Przedsiębiorca zobowiązany jest do przestrzegania następujących zasad etycznych:

- ▶ **dotrzymywać zobowiązań,**
- ▶ **zachować tajemnicę handlową i zasadę poufności** – podczas działań przedsiębiorstwa wszystkie informacje poufne pozyskane o klientach, współpracownikach lub konkurencji powinny być objęte tajemnicą a ich wykorzystanie powinno ograniczać się wyłącznie do działań przedsiębiorstwa bezpośrednio skierowanych do tychże podmiotów,
- ▶ **przestrzegać praw konsumenta.**

### ▶ **Czarny PR**

Działania nazywane potocznie w Polsce „czarnym PR” to planowe działania osób (nazywanych stroną pierwszą) pracujących na zlecenie instytucji/osoby (nazywanych stroną drugą), działających w złej wierze, z chęci wprowadzenia opinii publicznej w błąd albo zdyskredytowania opinii – czy to poprzez emitowanie za pomocą mediów lub innych grup opiniotwórczych nierzetelnych bądź kłamliwych informacji o stronie trzeciej lub poprzez różnorodne, naganne działania mające na celu albo odwrócenie uwagi albo powzięcie fałszywego przekonania przez dziennikarzy, opinie publiczną i zainteresowanie grupy, dotyczących strony drugiej. Działania takie z istoty swojej nie mają nic wspólnego z public relations (za: J. Kubek, 2005, s 57).

Nad bezpieczeństwem konsumenta oraz przestrzeganiem jego praw czuwa wiele organów (między innymi Urząd Ochrony Konkurencji Konsumentów, Federacja Konsumentów, Rzecznik Praw Konsumenta), istnieje też szereg uregulowań w polskim i unijnym prawodawstwie. W Polsce ochrona praw konsumentów zapisana jest w Konstytucji RP w artykule 76: *Władze publiczne chronią konsumentów, użytkowników i najemców przed działaniami zagrażającymi ich zdrowiu, prywatności i bezpieczeństwu oraz przed nieuczciwymi praktykami rynkowymi. Zakres tej ochrony określa ustawa.* Uregulowania prawne oraz właściwe organy nadzorcze mają za zadanie ochronę zbiorowych interesów konsumentów poprzez przeciwdziałanie nieuczciwym praktykom rynkowym oraz zwalczaniem niedozwolonych postanowień umownych. Do podstawowych praw konsumenta zaliczyć można: prawo do zwrotu zakupionego towaru, gwarancje, reklamacje, prawo do rzetelnej informacji o produkcie.

Decyzja konsumenta o zakupie danego produktu lub wybrania tej a nie innej usługi jest odpyskowana pewnymi psychologicznymi czynnikami, wśród których za najważniejszy uznać można faktyczną potrzebę posiadania danego produktu/usługi. Na wybór konsumenta składa się kilka elementów: cena towaru, jego jakość, jego marka, jego przydatność, możliwość wykorzystania, renoma firmy, wcześniejsze pozytywne doświadczenia zakupu tego typu produktu/usługi, perswazyjna reklama, naciski ze strony innych osób (np. dzieci), prestiż posiadania danego produktu/usługi, chęć posiadania. Wyznacznikiem zadowolenia klienta jest fakt, że zakupiony produkt/usługa odpowiada potrzebom, które leżały u podstaw decyzji o zakupie, stąd duża rola przedsiębiorstwa w rzetelnym informowaniu i cechach produktu/usługi. Rzetelność ta związana jest również z innymi działaniami o których mowa była powyżej – dotrzymywanie zobowiązań i przestrzeganie praw konsumenta.

Zagrożenia wynikające z nieprzestrzegania zasad etyki w relacjach biznesowych:

- ▶ osłabienie lub utrata dobrych relacji z klientami,
- ▶ utrata wiarygodności i zaufania klientów,
- ▶ nadszarpnięcie lub utrata reputacji,
- ▶ utrudnienie w realizacji ważnych celów między innymi poprzez brak zaufania i niewiarygodność przedsiębiorstwa.

### **Etyczne aspekty relacji przedsiębiorca państwo**

Oferowanie korzyści to jeden z przejawów **korupcji**, czyli zachowań lub sytuacji społecznych, w których doszło do naruszenia systemu wartości, akceptowanego przez dane społeczeństwo (np. złamanie zasady uczciwości, rzetelności, praworządności). Zgodnie z ustawą o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym **korupcja** to czyn polegający na obiecywaniu, proponowaniu, wręczaniu, żądaniu, przyjmowaniu przez jakąkolwiek osobę, bezpośrednio lub pośrednio, jakiegokolwiek nienależnej korzyści majątkowej, osobistej lub innej, dla niej samej lub jakiegokolwiek innej osoby. Korupcją jest również przyjmowanie propozycji lub obietnicy takich korzyści w zamian za działanie lub zaniechanie działania w wykonywaniu funkcji publicznej lub w toku działalności gospodarczej.

Aby uznać dane działanie za korupcję muszą spełnione być następujące warunki: wzajemna umowa stron („dający”, „otrzymujący”) oraz konkretne korzyści wynikające z tej transakcji. Do najczęstszych spotykanych form korupcji zaliczamy:

- ▶ przekupstwo (łapownictwo),
- ▶ protekcję, kumoterstwo oraz nepotyzm (czyli obsadzanie stanowisk publicznych członkami własnej rodziny),
- ▶ świadome, niezgodne z prawem dysponowanie środkami z budżetu państwa lub majątkiem, będącym dobrem publicznym,
- ▶ stronniczość w przyznawaniu uprawnień (np. przyznawanie koncesji),
- ▶ nieuczciwe rozstrzyganie kontraktów, zamówień publicznych, przetargów,
- ▶ uchylanie się przez osobę publiczną od płacenia zobowiązań wynikających z przepisów,
- ▶ kradzież dobra publicznego,
- ▶ defraudację, czyli wykorzystywanie publicznych pieniędzy lub majątku publicznego do własnych korzyści.

Ze zjawiskiem korupcji możemy spotkać się w różnych sferach życia publicznego:

- ▶ **korupcja polityczna** – na pograniczu polityki i biznesu. W zamian za poparcie konkretnego przedsiębiorstwa urzędnik państwowy jest „nagradzany” w jakiejś formie finansowej bądź niefinansowej (stanowisko pracy),
- ▶ **korupcja legislacyjna** - wpływanie na kształt ustawodawstwa prowadzące do tego, że parlamentarzysta otrzymuje dodatkowe dobra od osób zainteresowanych konkretnym brzmieniem ustawy, rozporządzenia,
- ▶ **korupcja gospodarcza** –zapewnienie przychylnych decyzje urzędników za pomocą przekupstwa,
- ▶ **korupcja administracyjna** – ta forma występuje w różnych działach administracji publicznej – oświacie, służbie zdrowia, opiece społecznej.

Innym zjawiskiem o nieetycznym wymiarze w zakresie relacji przedsiębiorstwo – Państwo są oszustwa podatkowe.

**Oszustwo podatkowe** - polega na wprowadzeniu w błąd organu podatkowego przez niezgodne z rzeczywistością przedstawienie lub zatajenie okoliczności mających wpływ na wysokość podatku. Oszustwa podatkowe mogą przybierać różne formy takie jak np. podrabianie towarów akcyzowych (alkohol i wyroby tytoniowe), wprowadzanie do obrotu paliw z zaniżoną akcyzą Zdecydowanie najpowszechniejsze są oszustwa podatkowe związane z zatrudnieniem pracowników (pracownicy tzw. szarej strefy), zaś kolejną istotną grupę stanowią oszustwa związane z ukrywaniem obrotu i/lub dochodu. Przepięstwa takie są przedmiotem zainteresowania organów ścigania i służb specjalnych.



Przykładem nieetycznego zachowania przedsiębiorstwa wobec Państwa jest działanie nazywane **kreatywną rachunkowością** (księgowością), które polega na innowacyjności w sposobach liczenia wartości prezentowanych w sprawozdaniach finansowych mieszczące się na granicy obowiązującego prawa lub wykraczające poza prawo. (Gabrusewicz). Jako przykłady kreatywnej rachunkowości wskazać można: ukrywanie zysku lub straty, ukrycie ryzyka finansowego, manipulowanie podstawowymi wskaźnikami.

Aby mówić o popełnieniu przestępstwa w postaci oszustwa podatkowego koniecznych jest zaistnienie kilka warunków następujące warunki:

- ▶ niezgodny ze stanem faktycznym sposób przedstawienia faktów,
- ▶ istotne znaczenie tego czynu,
- ▶ ukryty cel,
- ▶ brak jawności działania,
- ▶ działanie ze świadomym zamiar oszukania,
- ▶ strona poszkodowana podjęła jakieś działanie na podstawie fałszywych informacji (na podstawie błędnych danych jedna ze stron wyciągnęła nieprawdziwe wnioski).

Przestrzeganie norm prawnych obyczajowych i etycznych jest dla przedsiębiorstwa podstawą do osiągnięcia trwałego pozytywnego wizerunku i odbioru w swoich kontrahentów i współpracowników. Coraz częściej podejmowane są publiczne dyskusje wskazujące na ogromną rolę etyki w kontaktach i relacjach biznesowych. Możliwe, że w pierwszym odbiorze korzyści dla przedsiębiorstwa działającego etycznie nie są wyraźne i często na ich skutek należy poczekać kilka lat, jednak konsekwencją braku norm etycznych lub ich niewłaściwego stosowania są już o wiele lepiej widoczne – wprost mierzalne stratami finansowymi.

#### **Do konsekwencji nieetycznych zachowań należą między innymi:**

- ▶ utrata zaufania społecznego, w tym własnych pracowników,
- ▶ procesy sądowe z udziałem przedsiębiorstw i pracowników,
- ▶ utrata miejsc pracy,
- ▶ długoterminowe szkody lokalne: bezrobocie,
- ▶ utrata reputacji.

Aby można było mówić o etycznym podejściu do biznesu i prowadzenia działalności gospodarczej konieczne jest przyjęcie stanowiska, że maksymalizacja zysku nie jest najważniejszym celem biznesu, mimo iż zysk jest jego warunkiem koniecznym. Relacje zachodzące pomiędzy: przedsiębiorcą a pracownikami przedsiębiorstwa, przedsiębiorcą a klientem, przedsiębiorcą a państwem oraz przedsiębiorcą a społeczeństwem mają charakter etyczny i mimo, że można rozpatrywać je oddzielnie, nie należy jednak zapominać, że są one ze sobą powiązane i od siebie zależne.



## **TEMATY DO DYSKUSJI**

1. Wymień wartości, którymi kieruje się etyka w biznesie.
2. Wyjaśnij pojęcie mobbingu w odniesieniu do relacji w przedsiębiorstwie.
3. Opisz rolę zjawisk politycznych i ich wpływ na zachowania konsumenckie.
4. Znając predykatory zachowań konsumenckich określ jakich czynniki psychologiczne i społeczno-kulturowe kształtują zachowania konsumentów.
5. Zaprojektuj, zgodnie z zasadami etycznymi, działania marketingowe promujące wybrany produkt.
6. Przeanalizuj zachowania wybranego przedsiębiorstwa pod względem etycznym.
7. Wyjaśnij, na czym polega odpowiedzialność etyczna przedsiębiorcy wobec innych podmiotów.
8. Wiedząc, czego nie wolno stosować w reklamie, zaprojektuj i przeprowadź etyczne działania marketingowe.
9. Zaprojektuj kodeks etyczny, jaki będzie obowiązywał w grupie.

## **Bibliografia:**

Baggini J., Fost., *Przybornik etyka*, Warszawa 2012.

Blikle A., *Doktryna jakości*, „PC Kurier”, 2000, nr 8.

Ciupak-Zarzycja M., Rzaczkowska E., Kowalska M., Koziół M., Majewska K., Sroka R., Syczewska B., Majdrowiczka M., Tycner P., Tyczkowska-Kochańska K., *Firma = etyka, Przedsiębiorcy, dostawcy, społeczeństwo*, Warszawa 2009.

Czaplewski W., *Filozofia z przyległościami*, Bydgoszcz 2000.

Godziek M., *Etyka Przedsiębiorczości*, Chorzów 2005.

Kubek, J., *Z zagadnień filozofii zarządzania i etyki biznesu*. Gdańsk 2005.

Kunzmann P., Burkard F., Wiedmann F., *Atlas filozofii*, Warszawa 1999.

Lipman M., Sharp A., Oscanyan F., *Filozofia w szkole*, Warszawa 2008.

Morreale S., Spitzberg B., Barge J., *Komunikacja między ludźmi*, Warszawa 2007.

Okoń W., *Nowy słownik pedagogiczny*, Warszawa 2001.

Penc J., *Sztuka skutecznego zarządzania*, Karków 2005.

Piasecki B., *Ekonomika i zarządzanie małą firmą*, Warszawa-Łódź, 1998.

Pomykało W., *Encyklopedia biznesu Tom I i II*, Warszawa 1995

Przybył B., Swianiewicz J., *Krytyczne myślenie, Edukacja filozoficzna*, Kielce 2002.

Szczepanik R., *17 nieśmiertelnych błędów szefa*, Gliwice 2010.

Witkowski S., Listwa T., *Kompetencje a sukces zarządzania organizacją*, Warszawa 2008.

Wojtsiak J. *Pochwała ciekawości*, Kraków 2003.

## **Netografia:**

Gabrusewicz T, *Współczesne teorie rachunkowości*, [http://www.gabrusewicz.pl/uploads/wspolczesna\\_teorja\\_rachunkowosci.pdf](http://www.gabrusewicz.pl/uploads/wspolczesna_teorja_rachunkowosci.pdf), 29.04.2013

Cwalina W., Sobek J., *Psychologia organizacji i zarządzania – przywództwo, konflikty, negocjacje, motywacja do pracy, systemy zarządzania*, [http://nop.ciop.pl/m5-2/m5-2\\_1.htm](http://nop.ciop.pl/m5-2/m5-2_1.htm), 21.03.2013.

Jóźwiak J., *Lider zespołu – nowoczesny model kierowania grupą społeczną*, <http://www.alfabetsukcesu.pl/komunikacja/przywodztwo/lider-zespołu-nowoczesny-model-kierowania-grupa-społeczna>, 20.03.2013.

Pacula P., *Headhunting: daj się złapać łowcy głów*, <http://menstream.pl/wiadomosci-kariera/headhunting-daj-sie-zlapac-lowcy-glow,0,649763.html> 09.05.2013.

*Proces rekrutacji – etapy*, <http://weblog.infopraca.pl/2011/05/proces-rekrutacji-etapy/>. 20.03.2013.

Rzycka O., *Jakie są pożądane cechy lidera?* <http://manager.wieszjak.pl/przywodztwo-w-zespole/253397,2,Jakie-sa-pozadane-cechy-lidera.html>, 20.03.2013.

Wiszniewska M., *Istota i zasady organizacji pracy. Scenariusz lekcji z przedmiotu Ekonomia i organizacja przedsiębiorstw*, <http://www.edukacja.edux.pl/p-2179-istota-i-zasady-organizacji-pracy-scenariusz.php>, 20.03.2013.

<http://kariera.infopraca.pl/2011/06/headhunter-%E2%80%93-kto-to-taki/> 09.05.2013

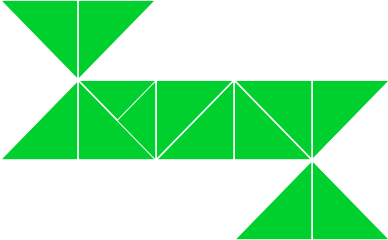
<http://pl.wikipedia.org/wiki/Headhunter> 09.05.2013

## **Akty prawne:**

Ustawa z dnia 9 czerwca 2006 r. o Centralnym Biurze Antykorupcyjnym (Dz. U. Nr 104, poz. 708, ze zm.)

## **Przydatne strony:**

[www.uokik.gov.pl](http://www.uokik.gov.pl), [www.federacja-konsumentow.org.pl](http://www.federacja-konsumentow.org.pl)



## 6. Realizowanie i kontrola działalności

### 6.1. Efektywność przedsięwzięcia

Budowanie sukcesu firmy jest trudnym i długotrwałym procesem, na który składają się z jednej strony wysiłki przedsiębiorcy, a z drugiej wewnętrzne i zewnętrzne czynniki powodzenia (niepowodzenia). Wszystkie są bardzo zróżnicowane, co wynika z odrębności indywidualnego charakteru każdego przedsiębiorstwa, odmienności rynku, na którym działa, specyficznych cech i potrzeb klientów oraz posiadanego przez przedsiębiorstwo potencjałów, pozwalającego je w pełni satysfakcjonować.

Uważa się, że zasadniczy wpływ na sukces firmy mają przedsiębiorcy wykorzystujący niedostrzegane przez innych szanse rynkowe i mobilizujący niedostępne dla innych zasoby. Wskazuje się przy tym na charakterystyczne cechy, takie jak (J. Targalski, A. Francik 2009):

- ▶ pewność siebie, wiara w sukces i przekonanie o możliwości jego osiągnięcia;
- ▶ wytrwałe dążenie do celu, ponawianie prób pomimo niepowodzeń, uczenie się na błędach;
- ▶ zdolności innowacyjne, niekoniecznie wynalazcze, ale pozwalające dostrzegać może możliwości, odkrywać nisze rynkowe, wprowadzać zmiany;
- ▶ zorientowanie na wyniki, na osiągnięcie sukcesu (powodzenia);
- ▶ skłonność do podejmowania skalkulowanego ryzyka;
- ▶ gotowość do poświęcenia czasu i umiejętności dla jednego przedsięwzięcia.

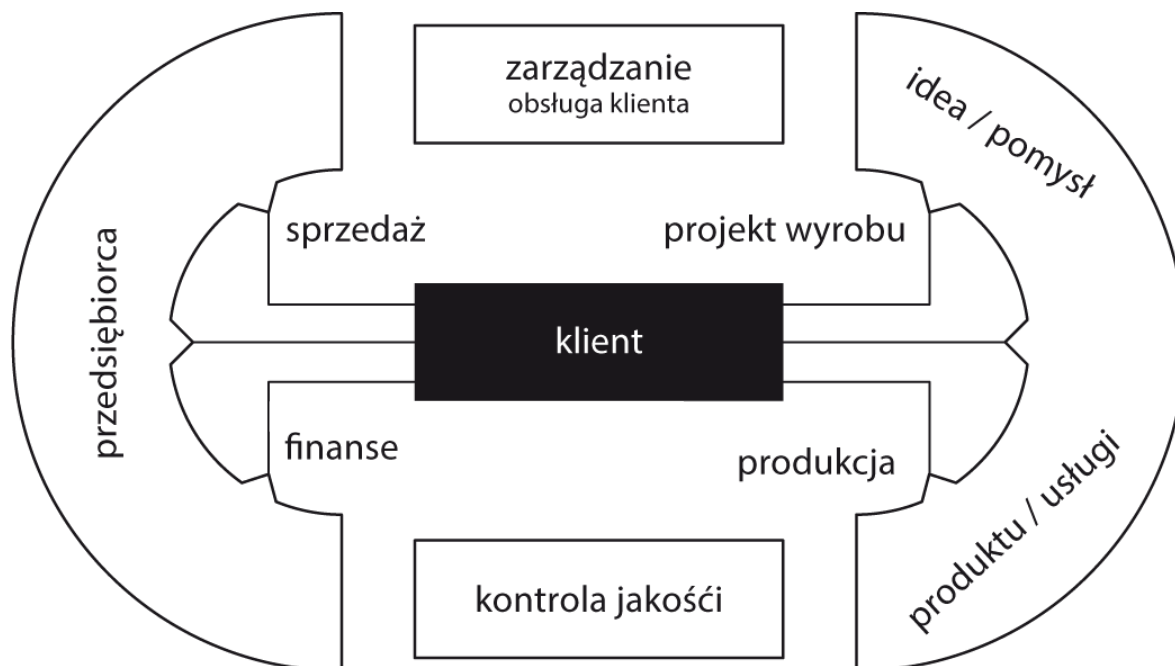
Obok cech osobowych równie ważna jest **profesjonalizacja zarządzania**. Proces zarządzania musi ulegać zmianie.

W miarę postępowania rozwoju firmy, stabilizacji rynkowej, większego doświadczenia i lepszej znajomości konkurencji rośnie jego rola i znaczenie. Tak ważna na początku idea produktu / usługi ustępuje miejsca idei profesjonalnego zarządzania. Firma wymaga coraz bardziej systematycznego planowania i skutecznych mechanizmów kontroli. Coraz bardziej złożony organizm firmy wymaga nowych, adekwatnych do poziomu rozwoju rozwiązań organizacyjno-prawnych.

Decyzje muszą być podejmowane coraz rozważniej i uwzględniać zarówno potencjał wewnętrzny, jak i zewnętrzne uwarunkowania zmiennego otoczenia. Przede wszystkim przedsiębiorca, który chce osiągnąć sukces, musi w procesie zarządzania skupić uwagę na kliencie i tych czynnikach, które mają wpływ na jego zadowolenie.

Do takich czynników zalicza się (J. Targalski, A. Francik 2009):

- ▶ projekt wyboru;
- ▶ sposób i jakość jego produkcji;
- ▶ finansowanie;
- ▶ sprzedaż;
- ▶ obsługę klienta.



**Rysunek 6. Czynniki sukcesu przedsiębiorstwa**

Źródło: J. Targalski, A. Francik (red. nauk.), *Przedsiębiorczość i zarządzanie firmą. Teoria i praktyka*, Warszawa 2009, s. 208.

Dzięki skupieniu uwagi na tych czynnikach oraz wykorzystaniu zasobów przedsiębiorstwa pierwotny pomysł na biznes można przeistoczyć w sukces. Zwłaszcza jeśli klient otrzyma właściwy produkt, o właściwej jakości i cenie, we właściwym miejscu i czasie.

Niekiedy te same czynniki, które są uznawane za sprzyjające powodzeniu, mogą wpływać na niepowodzenie firmy, np.:

- ▶ nietrafnie wybrany moment rozpoczęcia działalności;
- ▶ wadliwy produkt zaoferowany w niewłaściwym miejscu, po zbyt wysokiej lub zbyt niskiej cenie i bez potrzebnej mu promocji.

W większości przypadków przyczyny niepowodzenia firmy to będzie decyzja w kilku kluczowych obszarach, do których należą (J. Targalski, A. Francik 2009):

1. wybór rodzaju działalności i docelowego rynku;
2. lokalizacja działalności lub punktów sprzedaży;
3. dobór i zatrudnienie pracowników;
4. zarządzanie operacyjne i strategiczne.

Według badań przeprowadzonych na dużej grupie przedsiębiorstw wskazuje się na trzy główne grupy czynników powodzenia (J. Targalski, A. Francik 2009):

**Do grupy pierwszej** można zaliczyć takie czynniki jak:

- ▶ złe planowanie startu, a zwłaszcza przedwczesne wejście na rynek;
- ▶ wadliwy, nieudany lub nietrafny wybór wyrobu;
- ▶ niewłaściwie dobrana sieć lub strategia dystrybucji;
- ▶ niejasne zdefiniowanie misji przedsiębiorstwa, powodujące ciągłe zmiany jego profilu i brak stabilizacji;
- ▶ poleganie tylko na jednym odbiorcy.

**Do drugiej grupy czynników** należą czynniki finansowe:

- ▶ zbyt mały kapitał początkowy;
- ▶ zbyt szybkie i zbyt duże zadłużenie przedsiębiorstwa;

- ▶ złe relacje pomiędzy przedsiębiorcą a inwestorem strategicznym (różne cele, odmienna wizja biznesu, odmienne motywacje po obu stronach).

**Trzecią grupę** stanowią ogólne problemy zarządzania, w szczególności problemy zespołu zarządzającego i zasobów ludzkich. System selekcji zatrudnienia i awansowania, a także system zwalniania pracowników, oraz relacje interpersonalne między pracownikami wbrew pozorom nie są tylko sprawą wewnętrzną, mogą również przyciągać klientów lub przeciwnie – spowodować całkowitą ich utratę.

Odporność na niepowodzenia można powiększyć, dbając o dobrą znajomość rynku, sektora i branży, gromadząc wiedzę i doświadczenie, nadając przedsiębiorstwu jednoczesny profil zaspokajanych potrzeb, z wykorzystaniem zarówno wewnętrznego potencjału, jak też zewnętrznych uwarunkowań makroekonomicznych.

### **Ryzyko niepowodzenia można ograniczyć, zwracając uwagę na:**

- ▶ rolę zyskowności i przepływów pieniężnych;
- ▶ rolę zadłużenia;
- ▶ dostosowanie rozmiarów przedsiębiorstwa do wielkości kapitału początkowego i rozmiarów finansowania kredytem;
- ▶ szybkość zwrotu kapitału;
- ▶ znaczenie monitorowania wskaźników finansowych.

Istotne z punktu widzenia sukcesu przedsiębiorstwa jest właściwe stosowanie instrumentów promocyjnych.

### **Instrumenty promocji** pełnią dwie zasadnicze **funkcje** (L. Kuczevska, 2004):

- ▶ informacyjną, ponieważ umożliwiają komunikowanie się przedsiębiorstwa z rynkiem;
- ▶ wspierania procesów sprzedaży – zwiększają intensywność oddziaływania przedsiębiorstwa na rynek.

Istnieje wiele możliwości dotarcia do klienta, ale wybór metody zależy od możliwości finansowych oraz od charakteru prowadzonej działalności.

**Promocja** to zespół instrumentów za pomocą których przedsiębiorca komunikuje się z rynkiem, oraz wspiera sprzedaż swoich produktów. Promocja obejmuje zespół elementów o zróżnicowanej funkcji. Łącznie tworzą one kompozycję, na którą składa się promocja-mix:

- ▶ Reklama;
- ▶ Promocja dodatkowa;
- ▶ Public relations (PR);
- ▶ Aktywizacja (sprzedaż osobista);
- ▶ Marketing bezpośredni.

**Reklama** jest masową, odpłatną i bezosobową formą przedstawiania i popierania produktów, usług lub idei przez określonego nadawcę (L. Kuczevska, 2004):

### **Funkcje reklamy:**

- ▶ **informacyjna** – polegająca na informowaniu klienta o usługach oraz korzyściach, jakie otrzymuje, kupując tę reklamę;
- ▶ **przypominająca** – przypomina się klientom o produktach i marce firmy z nastawieniem na zdobywanie ich wierności i lojalności;
- ▶ **zachęcająca i nakłaniająca** – ma na celu nakłonić klienta do zakupu towaru lub usług.

Etapy oddziaływania reklamy na odbiorcę – model AIDA. Formuła ta jest wykorzystywana przy określeniu celów reklamy (B. Kozłicka, K. Osowska, 2010):

**ATTENTION** (zwrócenie uwagi) – etap 1

**INTEREST** (wywołanie zainteresowania) – etap 2

**DESIRE** (wzbudzenie chęci posiadania) – etap 3

**ACTION** (sprowokowanie odbiorcy do działania – zakup) – etap 4

Jeśli klient zauważy reklamę (**etap 1**) i wzbudzi ona jego zainteresowanie osiąga **etap 2**. Przykuć uwagę klienta może ciekawy materiał reklamowy, sposób jego zaprezentowania. Jeśli pod wpływem reklamy zainteresowany nią klient będzie rozważała chęć zakupu produktu, to przejdzie do **etapu 3**, jeśli skończy się to zakupem (**etap 4**), to reklama okazała się skuteczna.

By zminimalizować ryzyko przy tworzeniu przekazu reklamowego, po sprecyzowaniu segmentu odbiorców oraz określeniu motywów, jakie nimi kierują przy dokonywaniu zakupów, należy posłużyć się **metodą 5M**.

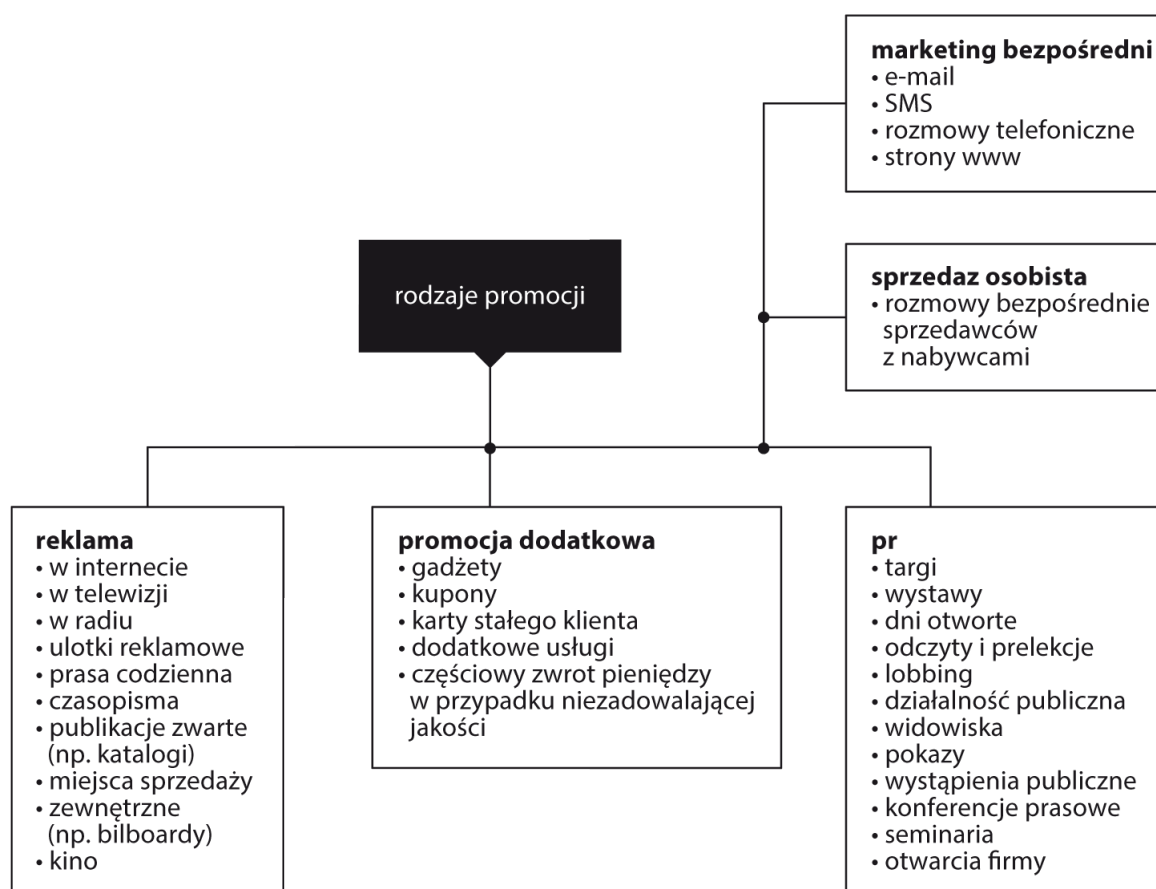
Sprowadza się ona do udzielenia odpowiedzi na 5 pytań:

- ▶ Gdzie się reklamować?
- ▶ Ile wydać?
- ▶ Jakie są cele przedsiębiorstwa?
- ▶ Co powinien zawierać przekaz?
- ▶ Jak mierzyć rezultaty?

**Działania podejmowane podczas opracowywania kampanii reklamowej to<sup>1</sup>:**

- ▶ analiza rynku (analiza produktów, badanie grupy konsumentów);
- ▶ stworzenie przekazu reklamowego (myśli przewodniej), hasła reklamowego;
- ▶ opis segmentu docelowego;
- ▶ charakterystyka celów reklamy;
- ▶ opracowanie oferty;
- ▶ wybór nośników reklamy;
- ▶ opracowanie budżetu reklamy;
- ▶ propozycja ceny skuteczności reklamy.

Ważnym elementem przekazu reklamowego jest hasło reklamowe.



**Rysunek 7. Rodzaje promocji**

Źródło: Opracowanie własne.

1. Zob. A. Bogacka-Gawrysiak, *Strategia Medialna w Reklamie (2M5), Cz. II*, [http://www.wsz-pou.edu.pl/magazyn/?strona=mag\\_repety62&nr=62&p=\(09.05.2013\)](http://www.wsz-pou.edu.pl/magazyn/?strona=mag_repety62&nr=62&p=(09.05.2013))

## Hasło reklamowe powinno być:

- ▶ oryginalne;
- ▶ krótkie;
- ▶ łatwo wpadać w ucho;
- ▶ wyróżniać przedsiębiorstwo od innych przedsiębiorstw;
- ▶ wziąć pod uwagę dbałość o klienta.

**Promocja dodatkowa** promocja sprzedaży, jest terminem stanowiącym zbiorcze określenie dla różnych instrumentów, nie mieszczących się w ramach innych środków komunikowania się przedsiębiorstwa z rynkiem. Obejmuje ona instrumenty tworzące dodatkowe i nadzwyczajne bodźce zwiększające stopień atrakcyjności produktu wobec nabywcy i podwyższające jego skłonność do zakupu (J. Altkorn, 1997). Uzyskane dzięki niej efekty sprzedażowe mają charakter krótkotrwały, ma jednak za zadanie wyróżnić i uatrakcyjnić produkt w konkretnym miejscu i czasie. Elementami **promocji dodatkowej** są różnego rodzaju bodźce ekonomiczne takie jak:

- ▶ gadzety reklamowe (długopisy, upominki);
- ▶ obniżki cen;
- ▶ bezpłatne próbki towaru;
- ▶ kupony;
- ▶ karty stałego klienta;
- ▶ zwrot pieniędzy w przypadku niezadowolającej jakości;
- ▶ loterie;
- ▶ gry.

**Public relations** (PR) – ma na celu stworzenie i utrzymanie życzliwych relacji pomiędzy firmą a otoczeniem. Kreowanie wizerunku firmy w ramach działań PR polega na przekazywaniu informacji na temat jej działalności możliwie największej grupie odbiorców, budowaniu jej wizerunku. W efekcie dobrych stosunków z otoczeniem, dochodzi do pośredniego wpływu na wzrost sprzedaży.

Do **najpopularniejszych środków PR** można zaliczyć:

- ▶ kontakty z prasą, radiem, telewizją;
- ▶ oddziaływanie na polityków i ośrodki opiniotwórcze w sprawie ustawodawstwa regulującego ważne sprawy dla firmy;
- ▶ specjalne wydarzenia: pokazy, wystąpienia publiczne, otwarcia, imprezy;
- ▶ organizacja dni otwartych firmy;
- ▶ organizacja odczytów i prelekcji;
- ▶ działalność publiczna, np. akcje dobroczynne;
- ▶ sponsorowanie imprez sportowych, kulturalnych itp.;
- ▶ lobbying, np. tworzenie środowiska poparcia dla inicjatyw rozwojowych, utrzymywanie kontaktów z ludźmi biznesu i kultury.

**Sprzedaż osobista** polega na bezpośrednich kontaktach między sprzedającymi i kupującymi. Sprzedawcy, wykorzystując ten instrument promocji:

- ▶ przekazują treści skłaniające do zakupu;
- ▶ mogą dobrze poznać postawy i motywy nabywców;
- ▶ utrzymywać stałe kontakty z klientami;
- ▶ pozyskiwać nowych nabywców.

**Marketing bezpośredni** to forma komunikowania się z pojedynczym klientem poprzez:

- ▶ możliwość przesyłania informacji za pomocą SMS-ów;
- ▶ wykorzystanie poczty e-mail do reklamy;
- ▶ telemarketing, czyli rozmowy reklamowe przez telefon;
- ▶ umieszczanie tablic interaktywnych, informacyjnych o produkcie lub usłudze w danym czasie, gdzie aktualizacja danych jest automatyczna.

## 6.2. Analiza SWOT

Analiza SWOT jest kompleksową metodą służącą do badania podmiotu gospodarczego, ponieważ uwzględnia elementy otoczenia zewnętrznego, makrootoczenia, na które przedsiębiorstwo nie ma wpływu, oraz

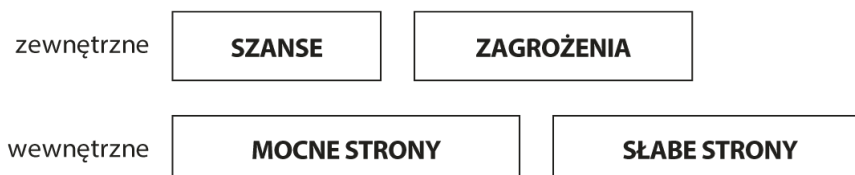
elementy otoczenia wewnętrznego, mikrootoczenia, na które przedsiębiorstwo oddziałują i ma wpływ w wyniku podejmowanych działań.

Nazwa **SWOT** pochodzi od słów angielskich (I. Penc-Pietrzak, 2003):

- ▶ **Strengths** – mocne strony organizacji wynikające z otoczenia wewnętrznego;
- ▶ **Weaknesses** – słabe strony organizacji wynikające z otoczenia wewnętrznego;
- ▶ **Opportunities** – szanse wynikające z otoczenia zewnętrznego;
- ▶ **Threats** – zagrożenia wynikające z otoczenia zewnętrznego.

Analiza ta umożliwia całościową ocenę zewnętrznych i wewnętrznych czynników określających potencjał rozwojowy przedsiębiorstwa.

Klasyfikację czynników wpływających na pozycję strategiczną przedsiębiorstwa w analizie SWOT przedstawia niniejszy rysunek.



**Rysunek 8. Klasyfikacja czynników w analizie SWOT**

Źródło: G. Gierszewska, M. Romanowska, *Analiza strategiczna przedsiębiorstwa*, Warszawa 2001, s. 210.

**Tabela 17. Analiza SWOT przedsiębiorstwa**

SILNE STRONY	SŁABE STRONY
<p>Poziom cen – dzięki największej sprzedaży detalicznej w Polsce północnej firma oferuje upusty cenowe, stosuje niską marżę.</p> <p>Polityka cenowa przyciąga klientów.</p> <p>Kwalifikacje zawodowe pracowników – pracownicy mają wysokie kwalifikacje, dużą wiedzę i umiejętności.</p> <p>Jakość produktu lub oferowanej usługi – produkt wytwarzany wg. najnowszych technologii, profesjonalność usług.</p> <p>Oryginalność produktu – produkt wyróżnia się na rynku tym, że jest mało znany, ekologiczny.</p> <p>Oryginalne opakowanie produktu – estetyka.</p> <p>Niezawodność produktu – mała ilość reklamacji.</p> <p>Lokalizacja punktów sprzedaży – usytuowanie w centrum miasta.</p> <p>Przepływ informacji – każdy punkt sprzedaży wyposażony jest w telefon, komputer, fax.</p>	<p>Reklama i promocja – brak odpowiedniej reklamy, badań marketingowych na rynku, nie stosuje się innych środków promocji.</p> <p>Wysokie koszty pracy – wysokie wymagania pracowników, a zwłaszcza obciążenia podatkowe, ZUS.</p> <p>Małe doświadczenie w danej branży – firma od roku funkcjonuje na rynku.</p> <p>Wysokie koszty wynajmu lokali handlowych – lokale znajdują się w centrum miast co podraża koszty wynajmu.</p> <p>Niedoświadczona kadra kierownicza – staż w branży kadry kierowniczej to średnio 3 lata, małe doświadczenie w zakresie kierowania przedsiębiorstwem.</p> <p>Brak usług – brak kompleksowej obsługi, np. sprzedaż wraz z montażem powoduje niezadowolenie klientów, a czasami rezygnację z zakupu.</p> <p>Sezonowość – duża rozpiętość przychodów w poszczególnych miesiącach roku, np. najniższy okres sprzedaży to miesiące letnie, wzrost obserwuje się w miesiącach zimowych.</p> <p>Zadłużenie kredytem bankowym – comiesięczna spłata raty kredytu zaciągniętego na rozpoczęcie działalności gospodarczej.</p>
SZANSE	ZAGROŻENIA
<p>Ewolucja postaw klientów – klienci poszukują produktów naturalnych, ekologicznych.</p> <p>Wykorzystanie niszy rynkowej – tworzenie nowych punktów sprzedaży w miastach i miejscowościach, w których tego typu działalności nikt nie prowadzi.</p> <p>Atrakcyjny system ulg inwestycyjnych – państwo stwarza warunki do prowadzenia tego typu działalności wprowadzając ulgi inwestycyjne, i inne form dofinansowania, np. subwencje, dotacje.</p> <p>Niskie koszty wchodzenia na nowe rynki zbytu – przedsiębiorstwo posiada dobre zaplecze transportowe.</p> <p>Poszerzenie asortymentu – istnieją możliwości wprowadzenia nowych produktów przy wykorzystaniu dotychczasowego potencjału przedsiębiorstwa.</p>	<p>Mała siła nabywcza społeczeństwa – cena produktu jest zbyt wysoka dla przeciętnego konsumenta.</p> <p>Konkurencja – główną konkurencję stanowią wyroby, których produkcja nie wymaga wysokich nakładów technologicznych.</p> <p>Kryzys gospodarczy w kraju – wzrost bezrobocia, wzrost poziomu inflacji, zmniejszająca się liczba ludności kraju w wyniku procesów migracyjnych wpływa na zmniejszenie popytu konsumenckiego.</p> <p>Rosnące koszty wynagrodzeń – w wyniku zmian w systemie ubezpieczeń społecznych, np. wzrost składek na ubezpieczenie rentowe.</p> <p>Pojawienie się atrakcyjnych substytutów – dzięki postępowi technicznemu pojawienie się na rynku coraz więcej substytutów, tańszych bardziej dostępnych dla klientów.</p>

Źródło: Opracowanie własne.



Najbardziej istotne są dla przedsiębiorstwa te atuty, które ważne są dla jego klientów. Po ustaleniu mocnych stron przedsiębiorstwa należy porównać je z atutami konkurentów.

Analiza słabości pozwoli ustalić, gdzie leżą słabe punkty, które mogą podważyć możliwości zrealizowania przez firmę przedsięwzięcia.

Każdy człowiek pragnie osiągnąć sukces, zrealizować cel i dąży do doskonałości w życiu prywatnym jak i zawodowym. Dlatego pogłębiaamy wiedzę, zdobywamy nowe doświadczenia, wyznaczamy sobie cele.

### **CEL = OSIĄGNIĘTY EFEKT**

Cechy celu przydatne (ważne) przy jego określaniu: *(można przedstawić to w formie rysunku diagramu)*

- konkretny,
- szczegółowy
- realny
- określony w czasie- wykonywany w określonym czasie
- akceptowalny (powinien wyzwalać wymagany poziom motywacji adekwatny do naszych możliwości)
- sprawdzalny
- zrozumiały
- spójny wewnętrznie
- elastyczny (modyfikowany)

Analiza SWOT pozwala usystematyzować wiedzę, obrazuje nowe możliwości lub zagrożenia, uwypukla pewne kwestie a przede wszystkim:

- ▶ racjonalizuje pomysły,
- ▶ „nakazuje” zapoznać się z otoczeniem,
- ▶ ocenia obecne trendy,
- ▶ ocenia mocne i słabe strony (swoich, przedsięwzięcia)
- ▶ weryfikacja założeń projektowych, celu.

Warto w tym momencie również wspomnieć o zasadzie Pareto (P. Kotler, 1994). Zasada ta mówi, że 80% efektów generowanych jest przez 20% nakładów. W związku z tym należy skupić się na rzeczach najważniejszych. Czasami nie warto być najlepszym we wszystkim. W praktyce jest to prawie niemożliwe. Dlatego tak ważne jest poznanie i ocena swoich mocnych stron, uświadomienie sobie w czym jesteśmy dobrzy, co sprawia nam satysfakcję.

### **Jak stworzyć analizę SWOT według osób?**

Dla analityków, osób które dogłębnie chcą zbadać temat, przeanalizować wszystkie „za i przeciw” uwzględniając dużą ilość czasu do dyspozycji- poprzez uzupełnienie klasycznej tabeli, tj. należy wypisać mocne i słabe strony oraz szanse i zagrożenia

Dla osób bardziej energicznych, lubiących szybkie działanie pracę zespołową- należy wykorzystać „burzę mózgów”, wszystkie osoby tworzące zespół wypowiadają się na dany temat. Stosując ten sposób w pierwszej kolejności zapisujemy wszystkie pomysły, następnie je weryfikujemy, analizujemy ich sensowność.

Czasami warto złamać reguły i dokonać podziału tylko na dwie grupy: czynników mających pozytywny i negatywny wpływ na nasze przedsięwzięcie. Nie będzie to klasyczna analiza SWOT, ale pozwoli nam uzmysłować sobie możliwości osiągnięcia założonego celu.

### **Ważne elementy które należy wziąć pod uwagę przy określeniu celu: dla nauczyciela**

- 1. Określaj cele w sposób pozytywny** – zapisuj to, co chcesz mieć/osiągnąć a nie to, czego nie chcesz. Pamiętaj, że nasz umysł przyciąga to, o czym najczęściej myślimy, a podświadomość nie rozumie zaprzeczeń. Jeśli będziesz myślał Nie chcę tej choroby to tylko będziesz przyciągał więcej choroby!
- 2. Napisz cel w czasie teraźniejszym** – podświadomość nie zna przyszłości, jest tylko TERAZ.
- 3. Umieszczaj cele w kontekście** – Kiedy, gdzie, z kim chcesz osiągnąć ten cel? Zobacz, usłysz, poczuj przedsmak tego, co się wydarzy. Zobacz swoje otoczenie, ludzi, wszystko co jest powiązane z celem.
- 4. Zapisuj jak najwięcej szczegółów** - jeśli np. chcesz mieć samochód - określ jaki będzie miał kolor, jaki dźwięk będzie wydawał silnik, jaka marka, model, wyposażenie.
- 5. Wybieraj cele zależne od Ciebie** – czy sam jesteś w stanie go osiągnąć? Od kogo zależy wynik? Pamiętaj, że

w im większym procencie cel zależy od Ciebie, tym większe prawdopodobieństwo że go osiągniesz!

6. **Sprawdź jakimi zasobami dysponujesz** – znając własne zasoby (możliwości, umiejętności, kapitał, wiedzę, itd) łatwiej osiągniesz cel, będziesz wiedział co jest Tobie potrzebne do osiągnięcia celu, skąd będziesz czerpał zasoby.
7. **Jaka jest wielkość celu?** – każdy cel powinien mieć odpowiednią wielkość. Jeśli jest zbyt duży - podziel go na kawałki. Ustal dla każdego z nich osobną datę osiągnięcia.
8. **Cel powinien być ekologiczny** – zastanów się, czy jest on zgodny z Twoimi wartościami? Czy nie zaburzy on czegoś w Twoim życiu? Jak będzie się miał do innych ludzi - rodziny, przyjaciół, znajomych z pracy? Czy na pewno im nie zaszkodzi?
9. **Brak sprzeczności** – zbadaj spójność na poziomie świadomym i podświadomym w stosunku do celu. Wyobraź sobie że już osiągnąłeś swój cel i sprawdź jak się z nim czujesz (pozwól wyrazić się Twojej podświadomości, język emocji, uczuć, ciała), jakie są konsekwencje osiągnięcia celu
10. **Oznaki osiągnięcia celu** – skąd będziesz wiedział, czy osiągnąłeś cel? Zastanów się, co się zmieni, w jaki sposób poznasz że już masz to, czego pragniesz. Jak uczysz zdobycie celu?

### 6.3. Masz biznes – co dalej?

Przedsiębiorstwa, które rozpoczynają działalność i te już funkcjonujące na rynku są pod wieloma względami unikatowe. Dotyczy to małych biznesów. Różnią się one:

- ▶ rodzajem i specyfiką podejmowania działalności;
- ▶ klientelą, do której adresuje działalność, czyli rynkiem;
- ▶ poziomem innowacyjności.

Istnieją jednocześnie pewne prawidłowości ich rozwoju, przechodzą one przez określone fazy, napotykają określone problemy i wyzwania, których rozstrzygnięcie wymaga:

- ▶ wiedzy;
- ▶ kwalifikacji;
- ▶ kapitału.

Można wytypować pięć faz rozwoju małego biznesu (J. Targalski, A. Francik, 2009):

1. powstanie (założenie przedsiębiorstwa);
2. przetrwanie na rynku;
3. sukces:
  - z nastawieniem na eksploatację (konsumpcję);
  - z aktywnym nastawieniem na wzrost;
4. dynamiczny wzrost (ekspansja);
5. dojrzałość.

Przedsiębiorstwa przechodzą przeobrażenia. Wewnętrzne uwarunkowania i czynniki zewnętrzne powodują, że:

- ▶ zmienia się rola i poziom zaangażowania właściciela oraz styl zarządzania;
- ▶ kształtuje się coraz bardziej złożona struktura organizacyjna;
- ▶ rośnie lub maleje stopień formalizacji systemu zarządzania;
- ▶ przyjmowane są różne cele strategiczne;
- ▶ a w wyższych fazach strategię zarządzania.

Wśród czynników, które stymulują szybszy rozwój firmy, prowadząc do sukcesu, oraz czynników, których wystąpienie może przyczynić się do niepowodzenia lub upadku cztery odnoszą się do właściciela, a cztery do przedsiębiorstwa.

**Do właściciela odnoszą się** (J. Targalski, A. Francik, 2009):

- 1) cele własne przedsiębiorcy i ich ewentualna identyfikacja z celami firmy;
- 2) zdolność właściciela do wykonywania tak ważnych zadań jak:
  - ▶ marketing;
  - ▶ wdrażanie innowacji;
  - ▶ wytwarzanie (wykonawstwo);
  - ▶ zarządzanie dystrybucją itp.
- 3) zdolności, umiejętności i postawy kierownicze właściciela takie jak:

- ▶ gotowość do delegowania uprawnień;
  - ▶ kierowanie działaniami grupy pracowników;
- 4) zdolność do strategicznego patrzenia w przyszłość i dopasowania sił i słabości firmy do własnych celów.

Do przedsiębiorstwa odnoszą się (J. Targalski, A. Francik, 2009):

- 1) zasoby finansowe – w tym gotówka i zdolność kredytowa;
- 2) zasoby ludzkie – liczba i kwalifikacje, szczególnie na poziomie zarządu i kierownictwa;
- 3) system zarządzania – system informacyjny oraz system planowania i kontroli;
- 4) silne strony przedsiębiorstwa (zasoby biznesowe), w tym:
  - ▶ stosunki z dostawcami odbiorcami;
  - ▶ udział w rynku;
  - ▶ możliwości produkcji i kanały dystrybucji;
  - ▶ technologia i reputacja;
  - ▶ wszystko to, co daje firmie pozycję konkurencyjną w branży i na rynku.

W różnych okresach (fazach) działalności przedsiębiorstwa czynniki te mają różne znaczenie i natężenie. Zdolności operacyjne właściciela mają ogromne znaczenie w początkowej fazie istnienia firmy, natomiast w okresie późniejszym wzrasta rola zdolności strategicznych właściciela. Podobnie wzrasta znaczenie zasobów ludzkich, a maleje znaczenie zasobów biznesowych.

Przedsiębiorcy w początkowych fazach rozwoju wybierają zwykle jedną z dwóch strategicznych możliwości:

- ▶ specjalizację;
- ▶ lub dywersyfikację.

**Specjalizacja** polega na skoncentrowaniu się przedsiębiorstwa na jednym rodzaju działalności i na rynkowym wyeksponowaniu odmienności firmy od innych (J. Targalski, A. Francik, 2009). Zalecana jest ona szczególnie młodym firmom, które nie osiągnęły jeszcze przewagi konkurencyjnej.

**Dywersyfikacja** polega na koncentrowaniu działalności przedsiębiorstwa na dwu lub więcej dziedzinach (J. Targalski, A. Francik, 2009).

Strategie specjalizacji i dywersyfikacji mogą być realizowane:

- ▶ **metodą rozwoju wewnętrznego**, która wymaga skupienia się na zarządzaniu wewnętrznymi procesami wzrostu (inwestycje wewnętrzne) lub;
- ▶ **metodą rozwoju zewnętrznego**, polegającą na łączeniu się z innymi firmami (fuzje przedsiębiorstw) lub nabywaniu przedsiębiorstw.

W praktyce nabywania szczególne znaczenie ma analiza przedsiębiorstwa.

**Tabela 18 Analiza przeglądowa przedsiębiorstwa**

---

1. Dane ogólne	<ul style="list-style-type: none"><li>• rodzaje przedsiębiorstwa;</li><li>• strategie;</li><li>• wiek – dotychczasowy rozwój;</li><li>• trendy.</li></ul>
2. Produkt	<ul style="list-style-type: none"><li>• specyfikacja techniczna;</li><li>• wielkość produkcji;</li><li>• ceny;</li><li>• wartość dodana.</li></ul>
3. Zespół menedżerski	<ul style="list-style-type: none"><li>• główne stanowiska, wykształcenie, kariera, umiejętności;</li><li>• struktura organizacji;</li><li>• charakterystyka zespołu.</li></ul>
4. Pozycja na rynku	<ul style="list-style-type: none"><li>• rozmiar rynku;</li><li>• wzrost rynku i czynniki wzrostu;</li><li>• segmentacja rynku;</li><li>• identyfikacja klientów i relacje z klientami;</li><li>• kanały dystrybucji;</li><li>• udziały w rynku;</li><li>• czynniki wyróżniające; cena, jakość, marka itp.</li></ul>
5. Analiza konkurencji	<ul style="list-style-type: none"><li>• bariery wejścia na rynek i wyjścia z rynku;</li><li>• czynniki konkurencyjne;</li><li>• zagrożenie substytucją;</li><li>• siła dostawców;</li><li>• siła nabywców;</li><li>• trendy: technologiczne, ekonomiczne, fiskalne.</li></ul>
6. Działalność operacyjna	<ul style="list-style-type: none"><li>• wielkość zatrudnienia i struktura zatrudnienia;</li><li>• proces wytwórczy i system planowania;</li><li>• zdolności produkcyjne;</li><li>• zaopatrzenie;</li><li>• kontrola jakości;</li><li>• wyposażenie w środki trwałe;</li><li>• badania i rozwój.</li></ul>
7. Finanse	<ul style="list-style-type: none"><li>• zyskowność sprzedaży;</li><li>• wsparcie i płynność finansowa;</li><li>• przepływ funduszy;</li><li>• aktywa.</li></ul>
8. Wycena wartości	<ul style="list-style-type: none"><li>• wartość w czasie;</li><li>• analiza efektywności inwestycji.</li></ul>
9. Ryzyko rzeczywiste	<ul style="list-style-type: none"><li>• w sektorze;</li><li>• ryzyko technologiczne;</li><li>• ryzyko finansowe;</li><li>• wiarygodność przedsiębiorstwa;</li><li>• relacje dostawcy – pracownicy – odbiorcy.</li></ul>
10. Sprzedający (właściciel)	<ul style="list-style-type: none"><li>• sprzedaż;</li><li>• wartość (cena) realistyczna;</li><li>• zastrzeżenia, koncesje, ograniczenia;</li><li>• wartość, która może być dodana.</li></ul>

---

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: J. Targalski, A. Francik (red. nauk.), *Przedsiębiorczość i zarządzanie firmą. Teoria i praktyka*, Warszawa 2009, s. 254-255.

Z nabyciem przedsiębiorstwa wiążą się zarówno korzyści, jak i zagrożenia.

**Korzyści** to np.:

- ▶ nabycie nowych technologii, nowych wyrobów i nowych rynków;
- ▶ obniżka kosztów prowadzenia działalności gospodarczej na większą skalę;
- ▶ ograniczenie konkurencji.

## Zagrożenia to np.:

- ▶ przestarzałe technologie;
- ▶ mała rentowność;
- ▶ ukryte zobowiązania (zadłużenie);
- ▶ silna konkurencja.

## ▶ Siedem śmiertelnych chorób

W. Edwards Deming wymienia siedem śmiertelnych chorób, które mogą niszczyć kondycję przedsiębiorstwa:

**Pierwszą** patologią biznesu, którą odnotował, jest oportunizm – brak stałości celu, długofalowych planów, jakichkolwiek wielkich idei sukcesu rynkowego.

**Drugą** chorobą jest presja na doraźne zyski, czyli zbyt duża koncentracja na osiągnięcie szybkich zysków.

**Trzecią** jest ocena wyników na podstawie liczb. Niszczy to ducha pracy zespołowej, wzmacnia rywalizację, pozostawia pracowników w goryczy, przygnębionych i pokonanych.

**Czwartą** chorobą jest karuzela menedżerów, którzy dziś są, jutro odchodzą.

**Piątą** to prowadzenie firmy na podstawie statystyk sprawozdawczości. Najważniejszy czynnik – zadowolony klient – pozostaje często nieznanym i niepoznawalnym.

**Szóstą** to wysokie koszty medyczne związane z nienależytą uwagą poświęconą tematowi zdrowia i bezpieczeństwa pracy w organizacji.

**Siódmą** to nadmierne koszty z tytułu odszkodowań, rekompensaty szkód w procesach wygranych przez pracowników skarżącego (za: S. Young, 2005, s. 135-136).

Źródło: S. Young, . *Etyczny kapitalizm*. Wrocław 2005.

## TEMATY DO DISKUSJI

1. Przygotuj prezentację, w której przedstawione zostaną efekty pracy przedsięwzięcia ze wskazaniem jego mocnych i słabych stron.
2. Oceń możliwości realizacji podobnego przedsięwzięcia na gruncie realnej polityki rynkowej.
3. Dokonaj analizy aktualnych zjawisk politycznych i określ ich rolę dla prowadzonego przedsięwzięcia.
4. Dokonaj analizy rynku wybranej działalności w perspektywie 2-letniej, ze wskazaniem możliwości rozszerzenia działalności na inne obszary/ formy działalności.

## Bibliografia:

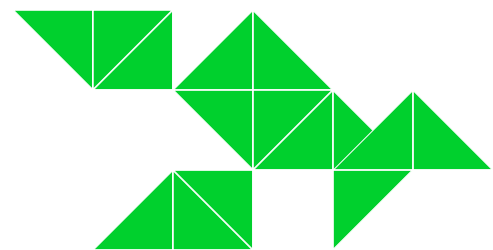
Kotler P., *Marketing. Analiza, planowanie, wdrożenie i kontrola*, Warszawa 1994.

Koźmiński A.K., Piotrowski W., *Zarządzanie - teoria i praktyka*, Warszawa 1996.

Machaczka J., *Podstawy zarządzania*, Kraków 2001.

Stabryła A., *Podstawy zarządzania firmą*, Warszawa 1995.

Young, S., *Etyczny kapitalizm*. Wrocław 2005.



---

# Matematyka

# Wstęp

Drogi Uczniu!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?“, dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do większości zadań znajdują się na końcu podręcznika. Jest tam również umieszczony indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

# 1 Układy równań pierwszego stopnia

## 1.1 Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać układy równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników
- nazywać układy równań w zależności od liczby rozwiązań (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny)

Podobnie jak w przypadku równań, mamy do czynienia z trzema rodzajami układów:

- oznaczony;
- nieoznaczony;
- sprzeczny.

➡ Układ równań **oznaczony** ma **jedno rozwiązanie**.

### Przykład 1

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczoną wartość  $x = 2$  do pierwszego równania:

$$2 + y = 3$$

$$y = 1$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Układ równań **nieoznaczony** ma **nieskończenie wiele** rozwiązań.

### Przykład 2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$$

$$0 = 0$$



➔ Układ równań **sprzeczny nie ma rozwiązania**.

### Przykład 3

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

$$0 = -1$$

Istnieje kilka sposobów na znalezienie rozwiązania układu równań.

Zanim wybierzemy metodę rozwiązania układu, w pierwszej kolejności należy go uprościć (jeżeli jeszcze nie jest w postaci uproszczonej) do postaci:

$$\begin{cases} ax + by = A \\ cx + dy = B \end{cases}$$

### Przykład 4<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{2-y}{4} + 6 & / \cdot 4 \leftarrow \text{Tu musimy najpierw pomnożyć przez wspólny mianownik (4).} \\ 6(x-1) - 2x + 4 = y - 8 & \leftarrow \text{Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{3x}{2} = 4 \cdot \frac{2-y}{4} + 4 \cdot 6 \\ 6x - 6 - 2x + 4 = y - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3x = 2 - y + 24 \leftarrow \text{Wykonujemy wszelkie możliwe działania po obu stronach.} \\ 4x - 2 = y - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 26 - y \\ 4x - 2 = y - 8 \end{cases} \leftarrow \text{Przenosimy wyrażenia z „x” i z „y” na lewo, a liczby na prawo.}$$

$$\begin{cases} 6x + y = 26 \\ 4x - y = -8 + 2 \leftarrow \text{Wykonujemy końcowe obliczenia.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + y = 26 \\ 4x - y = -6 \end{cases}$$

➔ KRÓTKIE PRZYPOMNIENIE Z GIMNAZJUM.

➔ METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

**METODA PODSTAWIANIA**

Przykład 5<sup>2</sup>

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą 2x (bo ma najmniejszą wartość) w pierwszym równaniu. Przekształcimy więc pierwsze równanie do postaci x=...

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenie z drugą niewiadomą (4y) na prawo (pamiętajmy o zamianie znaku, zgodnie z zasadami przekształcania równań).

$$\begin{cases} 2x = 10 - 4y \\ -3x - 5y = -13 \end{cases} \quad /: 2$$

Aby uzyskać postać x=... musimy pozbyć się liczby 2 stojącej przed x. W tym celu, całe równanie należy podzielić przez liczbę przy x (2). Pamiętajmy, aby podzielić przez 2 wszystkie wyrażenia po prawej stronie.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -3x - 5y = -13 \end{cases}$$

W przykładzie uzyskaliśmy postać:  $x = 5 - 2y$ . Uzyskane wyrażenie (5 - 2y) zapisujemy więc w miejscu niewiadomej x w drugim równaniu (Pamiętajmy, aby wyrażenie to zapisać w nawiasie).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -3(5 - 2y) - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + 6y - 5y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ -15 + y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = -13 + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Obliczamy uzyskane równanie, zgodnie z zasadami liczenia równań, bo mamy tu już równanie z jedną niewiadomą (y).

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy obliczony wcześniej  $y=2$ , do wcześniej wyprowadzonej postaci:  $x = 5 - 2y$ . Po podstawieniu obliczamy drugą niewiadomą ( $x$ ).

$$\begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy wartości obu niewiadomych.

## METODA PRZECIWNYCH WPÓŁCZYNNIKÓW

### Przykład 6<sup>3</sup>

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Tu wybieramy niewiadomą  $x$  (bo ma najmniejszą wartość w obu równaniach).

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością dla 2 i 3 jest 6. Żeby to uzyskać, pierwsze równanie należy pomnożyć przez 3 a drugie przez 2 - w ten sposób w obu uzyskamy wartość 6.

Ponadto w obu równaniach wartości mają ten sam znak, dlatego jedną z liczb przez które będziemy mnożyć (2 lub 3), należy zapisać ze znakiem „-” (tu wybraliśmy liczbę 2 i zapisaaliśmy mnożenie równania drugiego przez: -2).

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 & \cdot 3 \\ 3x - 5y = -7 & \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases}$$

Równania otrzymane, po wykonaniu mnożenia, przez liczby określone w poprzednim kroku.

$$\begin{cases} 6x + 12y = 30 \\ -6x + 10y = 14 \end{cases} +$$

Rysujemy kreskę i zapisujemy znak +, tak jakbyśmy dodawali w słupku.

$$\boxed{6x - 6x} + 12y + 10y = 30 + 14$$

Równanie otrzymane w wyniku dodania do siebie dwóch równań.

Wyrażenia z „x” skracają się do „0”

$$12y + 10y = 30 + 14$$

Obliczamy uzyskane równanie.

$$22y = 44$$

$$y = 2$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 2x + 4 \cdot 2 &= 10 \\ 2x + 8 &= 10 \\ 2x &= 10 - 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Wybraliśmy pierwsze równanie i podstawiamy do niego za y liczbę 2 (bo uzyskaliśmy wcześniej wynik  $y=2$ ).

Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

## 1.2 Graficzna interpretacja układów równań

**Teraz nauczę się** wykorzystywać interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

**Przykład 1<sup>4</sup>**

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Przenosimy wyrażenia z „x” na prawo.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \\ -y = -3x + 8 \end{cases}$$

Dzielimy oba równania przez liczbę przy „y” (pierwsze przez 2, drugie przez -1).

$$\begin{cases} 2y = -4x + 14 \quad / \div 2 \\ -y = -3x + 8 \quad / \div (-1) \end{cases}$$

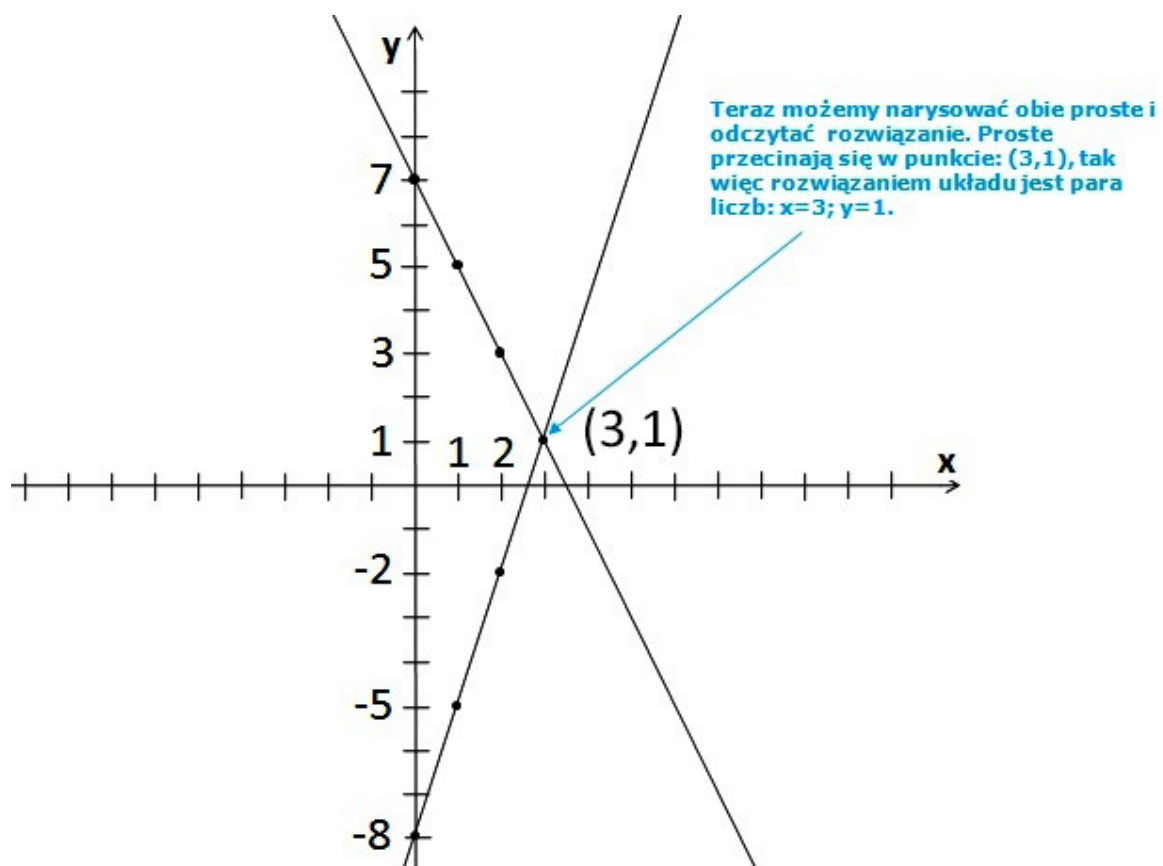
$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

Rysujemy wykresy obu funkcji. W tym celu, tak jak dla wszystkich funkcji, możemy stworzyć tabelki pomocnicze, w których zapiszemy współrzędne trzech punktów dla każdej funkcji. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty obu funkcji i łączymy je prostymi. Po narysowaniu wykresów funkcji w tym samym układzie współrzędnych, odczytujemy punkt przecięcia obu prostych. Współrzędne tego punktu  $(x, y)$ , to nasze rozwiązanie.

$y = -2x + 7$	x	0	1	2
	y	7	5	3
$y = 3x - 8$	x	0	1	2
	y	-8	-5	-2

Przypomnienie: wartości x wybieramy sami.

Przypomnienie: wartości y obliczamy ze wzoru funkcji, podstawiając wybrane przez nas wartości x.



Ostatecznie zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

## ZADANIA

**1.1.1** Rozwiąż każdy z podanych układów równań metodą podstawiania, przeciwnych współczynników lub metodą graficzną. Nazwij każdy z powyższych układów (oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). Narysuj po jednym przykładzie układu oznaczonego, nieoznaczonego i sprzecznego w układzie współrzędnych. Wyciągnij odpowiednie wnioski.

a) 
$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 4x - y = 18 \\ 5x + 2\frac{1}{2}y = 30 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6,3 \\ 2x + 5y = 8,6 \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} 3x - 0,2y = 35 \\ 2,5x - 5y = 5 \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} - 2y = 5 \\ x - \frac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$$

i) 
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3(2x - y) - 4(1 - x) = 3y - 1 \end{cases}$$

j) 
$$\begin{cases} 1 - 0,3(y - 2) = \frac{x+1}{5} \\ \frac{y-3}{4} = \frac{4x+9}{20} - 1,5 \end{cases}$$

k) 
$$\begin{cases} 3(x - y) + 4x = 8 \\ 3(x - 5y) = 5 - 9y \end{cases}$$

l) 
$$\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$$

m) 
$$\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-2y) = -7x - 2 \\ 5(x+1) - 2(3-y) = -4(x+2) \end{cases}$$

n) 
$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x+1 \\ \frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y+1 \end{cases}$$

**1.1.3.** Rozwiąż poniższe układy równań metodą graficzną.

a) 
$$\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ 10x - 5y = 30 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x + y = -(x-8) - 2 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ -5x + 15y = -10 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$$

## 1.3 Układy równań w kontekście praktycznym

Teraz nauczę się rozwiązywać zadania praktyczne z wykorzystaniem układów równań.

### Przykład 1

Obserwator z odległości 100 m zauważył, że samochód wyjechał z podwórka z prędkością początkową  $10 \frac{m}{s}$  i poruszał się z przyspieszeniem  $1 \frac{m}{s^2}$ . Po jakim czasie pojazd osiągnie prędkość  $20 \frac{m}{s}$  i w jakiej odległości będzie znajdował się wtedy od obserwatora.

### Rozwiązanie

Mamy dane:

$$v_0 = 10 \frac{m}{s}, v = 20 \frac{m}{s}, a = 1 \frac{m}{s^2}, s_0 = 100 \text{ m}$$

Szukamy:  $t, s$

Układamy układ równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego  $\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$

**Odpowiedź:**  $t = 10 \text{ s}, s = 250 \text{ m}$

### Przykład 2

Kasia postanowiła napełnić swój basen wodą. Pierwszego dnia woda wpływała do basenu pierwszą rurą przez 2 godziny, a następnie drugą rurą przez 1 godzinę. W basenie znalazło się  $120 \text{ m}^3$  wody. Drugiego dnia woda napełniała basen, lecąc z obu rur jednocześnie przez 3 godziny, i woda wypełniła dwa razy większą objętość jak pierwszego dnia. Jaka jest przepustowość każdej z rur w ciągu jednej godziny?

### Odpowiedź:

$v_1$  – objętość pierwszej rury

$v_2$  – objętość drugiej rury

$p_1$  – przepustowość pierwszej rury

$p_2$  – przepustowość drugiej rury

$t_1$  – czas napełniania przez pierwszą rurę

$t_2$  – czas napełniania przez drugą rurę

$$v = p \cdot t$$

Otrzymujemy dwa równania i rozwiązujemy układ równań:

$$p_1 \cdot 2 + p_2 = 120$$

$$(p_1 + p_2) \cdot 3 = 240$$

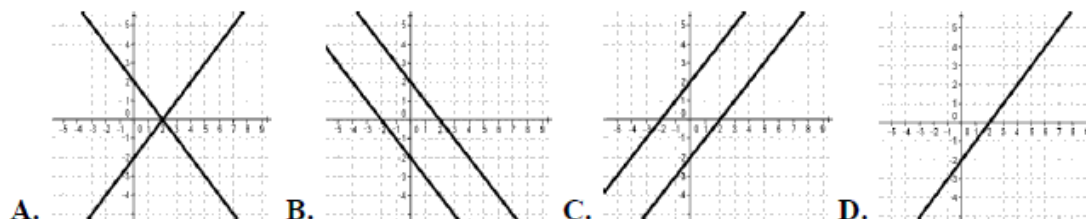
**Odpowiedź:** Przepustowość obu rur jest jednakowa i wynosi  $40 \text{ m}^3$

## ZADANIA

- 1.1.3** W chwili, gdy pociąg jadący ruchem jednostajnym z prędkością  $20 \frac{m}{s}$  przejeżdżał obok stojącego samochodu, pojazd ruszył z przyspieszeniem  $2 \frac{m}{s^2}$  w pogoni za pociągiem. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością samochód dogoni pociąg?
- 1.1.4** Z balkonu znajdującego się na wysokości 50 m spadła doniczka z kwiatem. Po jakim czasie i z jaką szybkością doniczka uderzy o podłoże?
- 1.1.5** Samolot podczas lądowania z szybkością  $200 \frac{m}{s}$ , wyhamował na drodze 1000 m.  
Z jakim opóźnieniem lądował samolot?
- 1.1.6** Barman chce przyrządzić 7 litrów koktajlu z przecieru truskawkowego w cenie 30 zł za litr oraz śmietanki w cenie 16 zł za litr. W jakim stosunku powinien zmiksować składniki, aby koszt 1 litra koktajlu był równy 20 zł?
- 1.1.7** Stefan mówi do Jana: „Gdy Ci dam jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę, a gdy Ty dasz mi dwa złote, to będę miał dwa razy tyle złotych, co Ty”. Ile pieniędzy miał Stefan, a ile Jan?
- 1.1.8** Za pewną liczbę długopisów w cenie 3 zł za sztukę i pewną liczbę ołówków w cenie 2 zł za sztukę, zapłacono 24 zł. Ołówków i długopisów było razem 11. Ile kupiono długopisów, a ile ołówków?
- 1.1.9** Państwo Wodzińscy zużyli w marcu  $6 m^3$  wody zimnej i  $7 m^3$  wody ciepłej. Zapłacili za to 54 zł. W kwietniu za zużycie  $7 m^3$  wody zimnej i  $6 m^3$  wody ciepłej zapłacili 50 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztuje  $1 m^3$  wody zimnej, a ile ciepłej?

## CZY ZDAM MATURE Z MATEMATYKI?

- 1.<sup>5</sup>** Interpretację geometryczną układu równań  $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$  przedstawiono na rysunku:



- 2.<sup>6</sup>** Układ równań  $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$  ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli:
- a)  $a = -1$    b)  $a = 0$    c)  $a = 2$    d)  $a = 3$

5 Zadanie 1: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf>, 18.02.2013.

6 Zadanie 2: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf), 18.02.2013.



3.<sup>7</sup> Oblicz współrzędne punktu wspólnego prostych o równaniach:

$$y = -2x - \frac{1}{4} \text{ i } 4x - 4y + 5 = 0$$

4. Rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$  jest para liczb:

- a)  $x = 1, y = -1$       b)  $x = -1, y = 1$       c)  $x = -1, y = -1$       d)  $x = 1, y = 1$

5.<sup>8</sup> Aby układ  $\begin{cases} ay - 3x = -2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$  był układem nieoznaczonym, należy w miejsce  $a$  wstawić:

- a) 10      b) -5      c) 5      d) -6

6. W klasach I i II było razem 66 uczniów. W wycieczce szkolnej wzięło udział 80% uczniów klasy I i 75% uczniów klasy II, co stanowiło razem 51 osób. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia  $x$  – liczba uczniów klasy I,  $y$  – liczba uczniów klasy II, to treść zadania opisuje układ równań:

- a)  $\begin{cases} x + y = 66 \\ 80x + 75y = 51 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0,08x + 0,075y = 51 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x + y = 66 \\ 0,80x + 0,75y = 51 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x + y = 51 \\ 0,8x + 0,75y = 66 \end{cases}$

7. Suma dwóch liczb wynosi 4, a ich różnica wynosi 2. Iloczyn równa się:

- a) 3      b) 4      c) 6      d) 8

8. W sklepie są wafle po 8 zł i po 12 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 11 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

9. Obwód prostokąta jest równy 26, a jego pole 42. Wyznacz długości boków tego prostokąta.

7 Zadanie 3, 4: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf), 18.02.2013.

8 Zadanie 5, 6, 7, 8, 9: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

## 2 Równania i nierówności kwadratowe

### 2.1 Równania kwadratowe niezupełne

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe niezupełne.

➔ Równanie  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem drugiego stopnia).

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego  $b$  lub  $c$  są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Przykłady równań kwadratowych:

- $3x^2 = 1$ , bo można przeszkalić do postaci:  $3x^2 - 1 = 0$ , gdzie  $a = 3, b = 0, c = -1$
- $5x^2 + 3x + 7 = 0$ , gdzie  $a = 5, b = 3, c = 7$
- $8x = 3x^2 + 1$ , bo można przeszkalić do postaci  $3x^2 - 8x + 1 = 0$ , gdzie  $a = 3, b = -8, c = 1$
- $x^2 + 5x = 0$ , gdzie  $a = 1, b = 5, c = 0$

#### Przykład 1

Rozwiążmy równanie typu  $ax^2 + c = 0$ , gdy  $a \neq 0, b = 0$  i  $c \neq 0$

- $x^2 - 16 = 0$   
 $x^2 = 16$   
 $x = 4$  lub  $x = -4$
- $-3x^2 - 6 = 0$   
 $-3x^2 = 6 / \div (-3)$   
 $x^2 = -2$  sprzeczność (równanie nie ma rozwiązań)
- $(x - 2)^2 = 4(1 - x)$   
 $x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$   
 $x^2 = 0$   
 $x = 0$

## Przykład 2

Rozwiążmy równanie typu  $ax^2 + bx = 0$ , gdy  $a \neq 0, b \neq 0$  i  $c = 0$

➤  $5x^2 - 3x = 0$

$$x(5x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{3}{5}$$

➤  $-5x - 4x^2 = 0$

$$-x(5 + 4x) = 0$$

$$-x = 0 \text{ lub } 5 + 4x = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 4x = -5$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -\frac{5}{4}$$

## ZADANIA

### 2.4.1 Rozwiąż równania:

a)  $-x^2 + 16 = 0$

b)  $-\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$

c)  $2x^2 + 8 = 0$

d)  $2x^2 - 5x = 0$

e)  $-3x^2 + 6x = 0$

f)  $-x^2 - 2 = 0$

g)  $x(x - 3) = 0$

h)  $(x + 2)(x - 4) = 0$

i)  $\frac{1}{2}x^2 = 0$

j)  $5x^2 - 7x = 0$

k)  $-3x^2 + 1 = 0$

l)  $5x^2 = 1$

m)  $-x^2 - 3 = 0$

n)  $9x^2 + \frac{x}{3} = 0$

o)  $x^2 = (1 - x)(1 + x)$

## 2.2 Trójmian kwadratowy i jego pierwiastki

### Teraz nauczę się:

- obliczać wyróżnik trójmianu i jego pierwiastki;
- określać liczbę rozwiązań równania na podstawie obliczonego wyróżnika;
- rozwiązywać równania kwadratowe zupełne

➔ Rozwiążmy równanie typu  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdzie  $a \neq 0$ .

Aby rozwiązać równanie  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), najpierw obliczamy wartość wyrażenia  $\Delta = b^2 - 4ac$

- jeśli  $\Delta > 0$ , to równanie ma dwa rozwiązania:  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
- jeśli  $\Delta = 0$ , to równanie ma jedno rozwiązanie:  $x = \frac{-b}{2a}$ ;
- jeśli  $\Delta < 0$ , to równanie nie ma rozwiązań.

Uwaga: Symbole  $\Delta$  i  $\delta$  to greckie litery, pierwsza z nich to wielka, a druga – mała litera delta. Z symbolem  $\delta$  spotkałeś się na pewno przy oznaczaniu kątów.

### Przykład 1

➤  $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-13) - 7}{2 \cdot 6} = \frac{13 - 7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-13) + 7}{2 \cdot 6} = \frac{13 + 7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{5}{3}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

### Przykład 2

➤  $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -23$$

Równanie nie ma rozwiązań.

### Przykład 3

➤  $6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{4}{2 \cdot 6} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

## ➔ Rozwiązywanie równań, prowadzące do równań kwadratowych.

Równanie typu  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  nazywamy **równaniem dwukwadratowym**.

### Przykład 4

$$x^4 + 6x^2 + 5 = 0$$

$$(x^2)^2 + 6x^2 + 5 = 0$$

podstawiam  $x^2 = t$  w celu sprowadzenia do równania kwadratowego, bo takie już potrafimy rozwiązywać

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

$$a = 1, b = 6, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$\Delta > 0$  – wyznaczamy dwa miejsca zerowe

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_2 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Wracamy do podstawienia  $x^2 = t$

$$x^2 = -5 \vee x^2 = -1$$

$$x \in \emptyset \quad x \in \emptyset$$

Rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (zbiór rozwiązań =  $\emptyset$ )

### Przykład 5

Rozwiąż równania:

a)  $5x - \frac{15}{x} = 10$

## Rozwiązanie

Założenie:  $x \neq 0$

$$Df : x \in \mathbb{R} / \{0\}$$

$$5x - \frac{15}{x} = 10 / \cdot x$$

$$5x^2 - 15 = 10x$$

$$5x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)$$

$$\Delta = 400$$

$$\sqrt{\Delta} = 20$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 20}{10} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 20}{10} = 3$$

$$\text{b) } \frac{8}{4-x} = \frac{x}{x-4}$$

Założenie:

$$4-x \neq 0 \text{ i } x-4 \neq 0$$

$$x \neq 4 \text{ i } x \neq 4$$

$$Df : x \in \mathbb{R} / \{4\}$$

$$8 \cdot (x-4) = (4-x) \cdot x$$

$$8x - 32 = 4x - x^2$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 144$$

$$\sqrt{\Delta} = 12$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 12}{2} = -8$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

$x_2 \notin Df$ , stąd rozwiązaniem jest  $x_1 = -8$

## ZADANIA

### 2.2.1. Rozwiąż równania:

a)  $-x^2 - 2 = 0$

b)  $x\sqrt{3} - \sqrt{2}x^2 = 0$

c)  $x(x-3) = 0$

d)  $(x-4)(x+2) = 0$

e)  $(x-2)^2 - 9 = 0$

f)  $16 - (x+3)^2 = 0$

g)  $(3x+2)^2 = 25$

h)  $x^2 + 6x + 5 = 0$

i)  $x^2 - 10x + 25 = 0$

j)  $x^2 + 2x - 120 = 0$

k)  $12x^2 + 7x - 12 = 0$

l)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

m)  $9x^2 - 24x - 20 = 0$

n)  $-3x^2 + 1,5x + 54 = 0$

### 2.2.2 Rozwiąż równania:

a)  $(3x-2)^2 + 2 = 6$

b)  $3(4x-1)^2 + 1 = 28$

c)  $2(5x-2)^2 + 5 = 13$

d)  $x(3x-5) = 12$

e)  $(2x-5)^2 + (x+4)^2 = 41$

f)  $\frac{x(x-2)}{5} - 3x = 2x^2 + \frac{x(x+1)}{3}$

g)  $(x-2)(x+5) - (x-7)(x+1) = (x+2)(x-3)$

h)  $3x^2 - 6x - 24 = 0$

i)  $4x^2 - 20x + 25 = 0$

j)  $x^2 - 2x + 4 = 0$

k)  $4x^2 - 4x - 1 = 0$

l)  $3x^2 + 2x + 2 = 3x + 4x^2 - 3$

### 2.2.3 Rozwiąż równania:

a)  $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x+3}{x-1} = 0$

b)  $\frac{5x+7}{x-1} = 3x+2$

c)  $\frac{x+1}{4x} = \frac{1}{x-1}$

d)  $\frac{2x-3}{6x} = \frac{2}{2x+3}$

e)  $\frac{5-x}{5x} = \frac{2}{5x}$

f)  $\frac{3x-1}{2x} = \frac{-3}{3x-1}$

### 2.2.4 Rozwiąż równania:

a)  $x^4 - 4 = 0$

b)  $x^4 - 4x^2 = 0$

c)  $x^4 - x^2 - 2 = 0$

d)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

e)  $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

f)  $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

g)  $x^4 - x^2 + 1 = 0$

(Wskazówka: podstawiamy zmienną pomocniczą  $x^2 = t$ , dzięki czemu otrzymujemy równanie kwadratowe)

## 2.3 \*Równania kwadratowe z parametrem

Teraz nauczę się rozwiązywać równania kwadratowe z parametrem.

### ➔ TWIERDZENIE<sup>9</sup>

➔ Jeżeli równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$ , ( $a \neq 0$ ) ma rozwiązania  $x_1, x_2$ , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### ➔ Dowód

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta}) \cdot (-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4a^2)}{4a^2} = \frac{4a^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

### ➔ UWAGA!

**Wzory Viete'a** mają szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.

Rozwiązując równania kwadratowe z parametrem, musisz uświadomić sobie kilka faktów:

#### Jeżeli...

- $\Delta < 0$  – to równanie nie ma pierwiastków,
- $\Delta = 0$  – to równanie ma jeden pierwiastek,
- $\Delta \geq 0$  – to równanie ma dwa pierwiastki,
- $\Delta > 0$  – to równanie ma dwa różne pierwiastki.

#### Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki takie, że:

- $x_1 \cdot x_2 < 0$  – to są one różnych znaków,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$  – to mają one takie same znaki,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$  i  $x_1 + x_2 > 0$  – to są one dodatnie,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$  i  $x_1 + x_2 < 0$  – to są one ujemne.

### Przykład 1

Nie rozwiązując równania, znajdź miejsca zerowe funkcji  $y = x^2 + 5x + 6$

<sup>9</sup> [http://pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka\\_dla\\_liceum/Funkcja\\_kwadratowa/Wzory\\_Viete'a](http://pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a), 18.02.2013.



Wzory Viete'a stanowią pewne ułatwienie w wyszukiwaniu pierwiastków. Podstawmy wartości  $a$ ,  $b$ ,  $c$  do wzorów:

$$x_1 + x_2 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

Teraz zadajemy sobie pytanie: „Sumą jakich liczb jest liczba  $-5$ , a iloczynem liczba  $6$ ?”. Odpowiedź nasuwa nam się sama: liczb  $-2$  i  $-3$ .

Rozwiązaniami są więc:  $x_1 = -2$  i  $x_2 = -3$

Oczywiście trudniej nam odgadnąć takie rozwiązanie w pamięci. Warto także wspomnieć, że taka metoda odgadywania rozwiązań jest możliwa tylko w wypadku całkowitych pierwiastków o małej wartości. Niemniej skraca nam to czas ich szukania.

**2.3.1** Przekształć podane wyrażenia tak, aby można było skorzystać ze wzorów Viete'a oraz zastosuj je, aby uzyskać:

- a) kwadrat sumy pierwiastków
- b) sumę kwadratów pierwiastków
- c) sumę odwrotności kwadratów pierwiastków
- d) kwadrat różnicy pierwiastków
- e) sumę sześciątów pierwiastków

**2.3.2** Oblicz:

- a) sumę odwrotności rozwiązań równania  $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$
- b) sumę kwadratów rozwiązań równania  $x^2 - 300x - 200 = 0$
- c) sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania  $-x^2 - x + 1 = 0$

### Przykład 2

Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + mx - m = 0$  ma:

- a) dwa różne pierwiastki

### Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy  $\Delta > 0$

Z założenia  $m^2 + 4m > 0$

otrzymujemy rozwiązanie:  $m \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

- b) jeden pierwiastek

## Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy  $\Delta = 0$

Z założenia  $m^2 + 4m = 0$

otrzymujemy rozwiązanie:  $m = -4, m = 0$

c) nie ma pierwiastków

## Rozwiązanie

Założenie: Równanie kwadratowe nie ma pierwiastków, gdy  $\Delta < 0$

Z założenia  $m^2 + 4m < 0$

otrzymujemy rozwiązanie:  $m \in (-4; 0)$

## ZADANIA

**2.3.3** Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  dane równanie ma jeden pierwiastek, który jest liczbą ujemną:

a)  $-2x^2 + 3m - 1 = 0$                       b)  $m^2 + 2x + m = 0$

**2.3.4** Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + mx - m + 1 = 0$  ma dwa różne, dodatnie rozwiązania.

**2.3.5** Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$  ma dwa rozwiązania o różnych znakach.

**2.3.6** Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $(m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$  ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest liczbą ujemną.

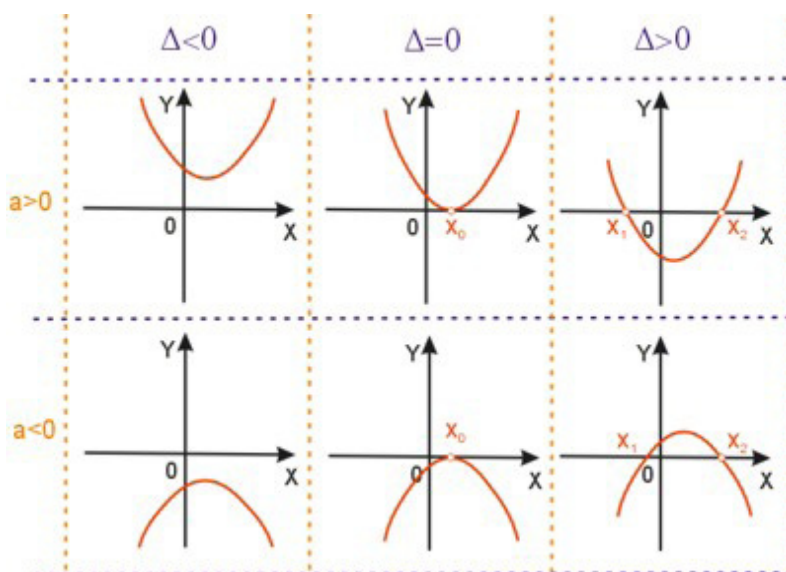
**2.3.7** Dla jakich wartości parametru  $m$  suma kwadratów pierwiastków równania  $x^2 + (m-3)x + m - 5 = 0$  jest najmniejsza.

## 2.4 Nierówności kwadratowe

Teraz nauczę się:

- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z parametrem;
- interpretować graficznie zbiór rozwiązań nierówności

➔ Rozwiązywanie nierówności kwadratowej najłatwiej oprzeć o **wykresy zmienności trójmianu kwadratowego**. Wszystkie możliwości zmienności wykresu trójmianu kwadratowego w zależności od współczynnika  $a$  oraz wyróżnika trójmianu kwadratowego (delt) zostały pokazane na poniższym schemacie:



Nierówności kwadratowe rozwiązujemy według następującego schematu :

### Przykład 1<sup>10</sup>

$$2x^2 + 2x - 12 \geq 0$$

➔ **Krok 1.** Wyzn **Tu nie możemy wykorzystać żadnego wzoru skróconego mnożenia. Obliczamy miejsca zerowe korzystając ze wzorów:** adratowe.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 10}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

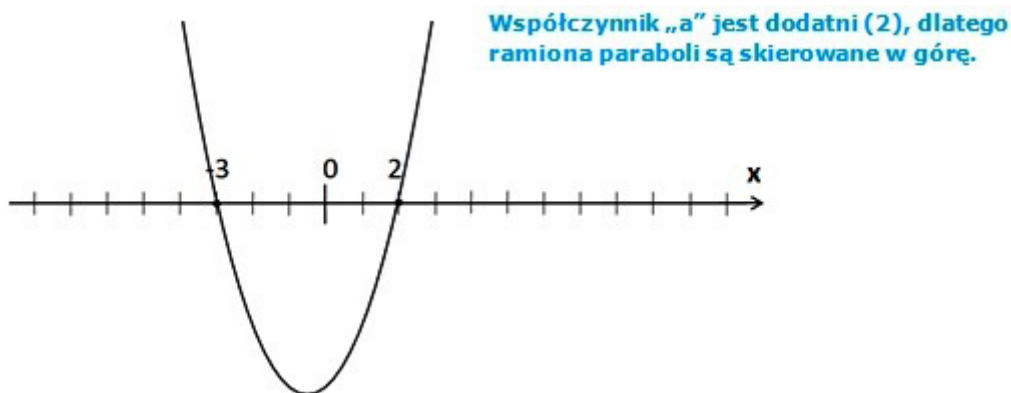
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

➔ **Krok 2.** Zaznaczamy rozwiązania na osi i odczytujemy przedziały.

- Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, co zależy od znaku nierówności).

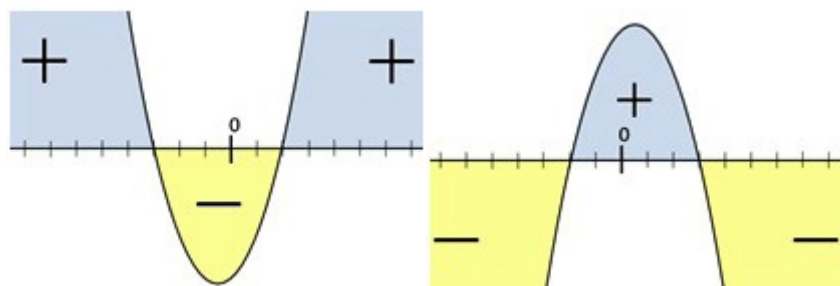


- Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istotny jest jedynie kierunek ramion paraboli.



- ➔ **Krok 3.** Zakreślamy odpowiedni obszar. Ten krok często sprawia wiele trudności. Zaczynamy od tego, że parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę).

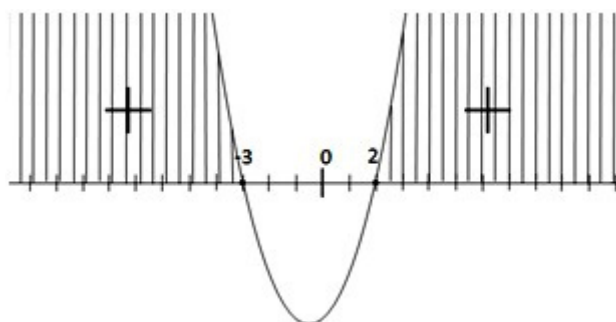
Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków:



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy” ( $<$ ) lub „mniejszy lub równy” ( $\leq$ ), zakreślamy obszar ujemny.

Gdy mamy znak nierówności „większy” ( $>$ ) lub „większy lub równy” ( $\geq$ ), zakreślamy obszar dodatni.

W rozpatrywanym przez nas przykładzie mamy do czynienia ze znakiem:  $\geq$ , dlatego zakreślimy obszar dodatni.

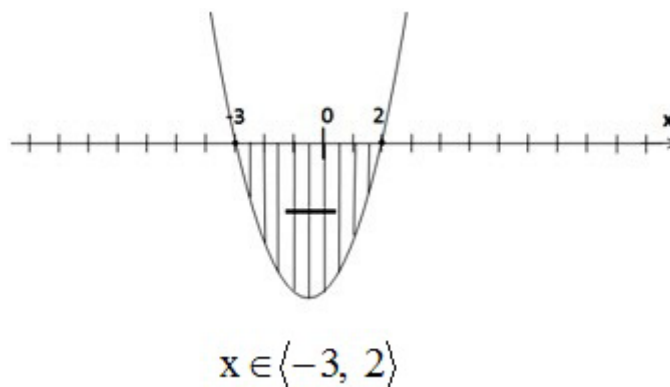


➔ **Krok 4.** Odczytujemy rozwiązanie. Są nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$$x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Gdyby znak nierówności był skierowany w drugą stronę ( $\leq$ ), wtedy zakolorowany byłby obszar ujemny i rozwiązaniem byłby jeden przedział:



## INNE PRZYPADKI NIERÓWNOŚCI....

Większość nierówności, z jakimi będziecie mieli do czynienia, to przypadki z dwoma miejscami zerowymi.

Równania kwadratowe mogą mieć również jedno miejsce zerowe lub nie mieć go wcale.

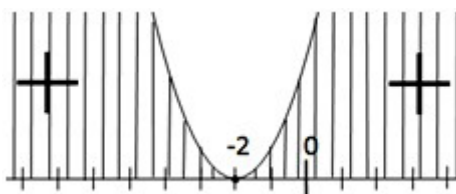
Przeanalizujemy wszystkie ewentualności, jakie mogą się pojawić, dla wszystkich czterech znaków nierówności.

➤ Z jednym miejscem zerowym

### - GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

#### Przykłady

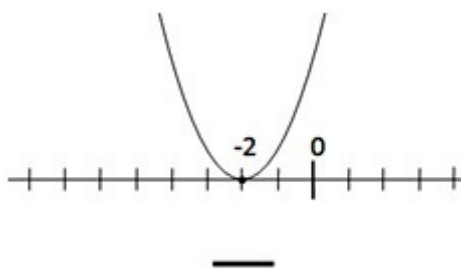
➔ Znak nierówności  $\geq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się nad osią, czyli w obszarze dodatnim, oprócz miejsca zerowego. Znak nierówności (większe lub równe) sprawia, że miejsce zerowe także należy do rozwiązania.

$$x \in \mathbb{R}$$

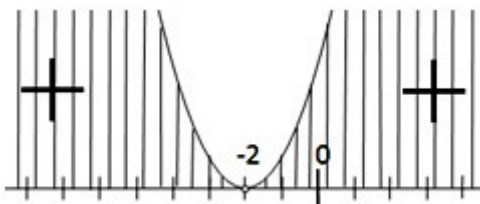
➔ Znak nierówności  $\leq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba:  $-2$ ). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości mniejsze lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się pod osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek ( $-2$ ).

$$x = -2$$

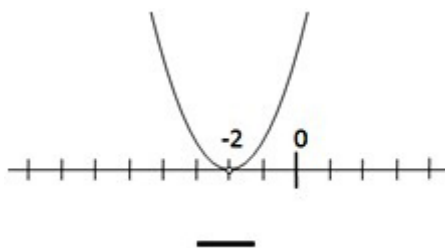
➔ Znak nierówności  $>$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę:  $-2$ ). Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim (nad osią), oprócz jednego punktu dla  $x = -2$ , który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, liczba  $-2$  do niego nie należy.

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

➔ Znak nierówności  $<$



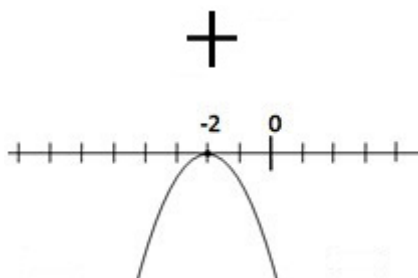
Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli pod osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, a dla tego punktu wartość wynosi zero).

$$x \in \emptyset$$

## - GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W DÓŁ

### Przykłady:

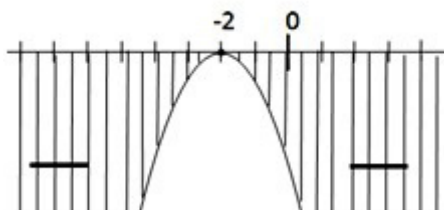
➔ Znak nierówności  $\geq$



Rozwiązaniem jest jedna liczba (tu liczba:  $-2$ ). Ze względu na znak nierówności rozwiązaniem mają być wartości większe lub równe zero (czyli części paraboli znajdujące się nad osią lub na osi). Tylko jedna liczba spełnia ten warunek ( $-2$ ).

$$x = -2$$

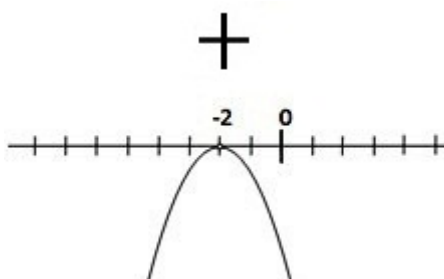
➔ Znak nierówności  $\leq$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się pod osią, czyli w obszarze ujemnym, oprócz miejsca zerowego. Wartości mają być mniejsze lub równe zero, co sprawia, że punkt, dla którego wartość wynosi zero ( $-2$ ), także należy do rozwiązania.

$$x \in \mathbb{R}$$

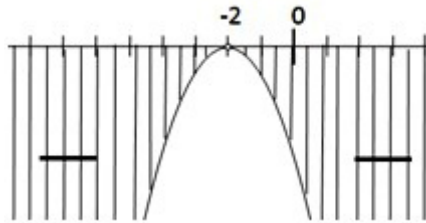
➔ Znak nierówności  $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pust. Nie ma liczby, dla której istnieją punkty paraboli nad osią (punkt na osi się nie liczy, ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości większe od zera, a dla punktu na osi wartość wynosi zero).

$$x \in \emptyset$$

➔ Znak nierówności  $<$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę:  $-2$ ). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla  $x = -2$ , który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba  $-2$  do niego nie należy.

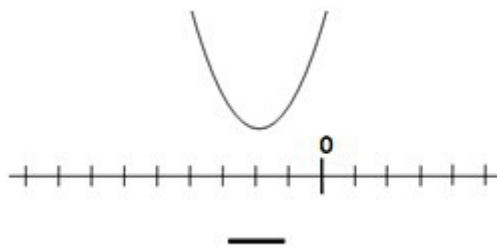
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

➤ Bez miejsc zerowych

### - GDY RAMIONA PARABOLI SĄ SKIEROWANE W GÓRĘ

Przykłady:

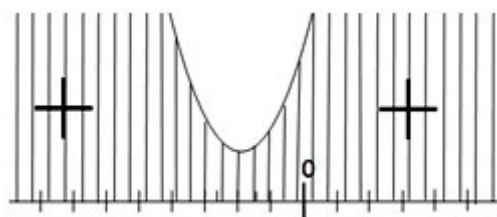
➔ Znak nierówności  $\leq$  lub  $<$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

$$x \in \emptyset$$

➔ Znak nierówności  $\geq$  lub  $>$



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze dodatnim.

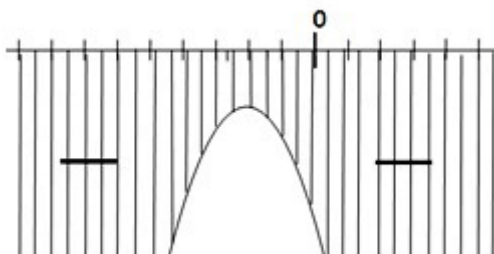
$$x \in \mathbb{R}$$

- gdy ramiona paraboli są skierowane w dół

Przykłady:

➔ Znak nierówności  $\leq$  lub  $<$

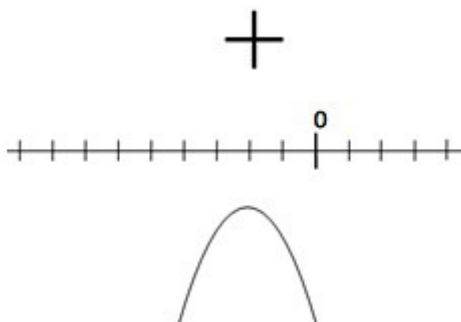




Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$$x \in \mathbb{R}$$

➔ Znak nierówności  $\geq$  lub  $>$



Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym.

$$x \in \emptyset$$

## ZADANIA

**2.4.1** Rozwiąż nierówności:

a)  $x(x-2) > 0$

b)  $x(x+4) < 0$

c)  $(x-7)(x+6) \geq 0$

d)  $2x^2 - 8x \leq 0$

e)  $x^2 - 16 > 0$

f)  $x^2 \leq 4$

g)  $8x^2 \geq 24$

h)  $48 < x^2$

i)  $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

j)  $x^2 + 12x + 24 > 0$

k)  $x^2 + 12x + 24 < 0$

l)  $x^2 < 4(x+1)$

m)  $(2x-6)^2 \leq 4x-13$

n)  $(2x-6)x \geq 0$

o)  $(x-1)(x+3) > 0$

p)  $(2-x)(2x-3) \leq 0$

q)  $-3x^2 - 8x > 0$

r)  $6x - 2x^2 \leq 0$

s)  $3x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \leq 0$

t)  $(x-3)(3x-4) - (x-3)(x+2) > 0$

u)  $(x+5)^2 + (x+5)(x-3) \leq 0$

v)  $(3x-4)(x+2) > (x+2)(x-1)$

w)  $(4x-5)(x+4) > (x+4)^2$

x)  $9x^2 + 6x + 4 < 3$

y)  $-\frac{3}{4}x^2 + x + 4 \leq 10$

z)  $-\frac{3}{4}x^2 + x + 4 \leq 10$

**2.4.2** Znajdź wszystkie liczby całkowite  $x$  spełniające nierówność:

a)  $(x-1,2)(x-3,4) < 0$

b)  $-x^2 + 3,6x \geq 0$

c)  $x^2 - 6,25 < 0$

d)  $2x^2 - 0,6x - 16,2 < 0$

**2.4.3** Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności:

a)  $x^2 - 1 < 0, x^2 + 3x \leq 0$

b)  $9x^2 + 9x + 2 < 0, x^2 - 9x + 2 < 0$

c)  $x^2 \geq 9; (x+7)(x-3)(5x+1) > 0$

## CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

**1.<sup>11</sup>** Liczby  $x_1, x_2$  są różnymi rozwiązaniami równania  $2x^2 + 3x - 7 = 0$ . Suma  $x_1 + x_2$  jest równa:

a)  $-\frac{7}{2}$

b)  $-\frac{7}{2} \frac{7}{2}$

c)  $-\frac{3}{2}$

d)  $-\frac{3}{4}$

**2.<sup>12</sup>** Rozwiąż nierówność:  $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ .

**3.** Zbiorem rozwiązań nierówności  $x^2 < 4$  jest:

a)  $(-2;2)$

b)  $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$

c)  $(-\infty;2)$

d)  $<-2;2>$

**4.** Uzasadnij, że równanie  $x^2 + (b-2)x - 2b = 0$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $b$  ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

**5.<sup>13</sup>** Rozwiąż nierówność  $x^2 - 9 < 0$ .

**6.<sup>14</sup>** Zbiorem rozwiązań nierówności  $x(x+6) < 0$  jest:

a)  $(-6;0)$

b)  $(0;6)$

c)  $(-\infty;-6) \cup (0;\infty)$

d)  $(-\infty;0) \cup (6;\infty)$

11 Zadanie 1: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura2012/matm\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 19.02.2013.

12 Zadanie 2, 3, 4: <http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php> arkusze, 19.02.2013.

13 Zadanie 5: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf>, 19.02.2013.

14 Zadanie 6: [http://www.cke.home.pl/dokumenty sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 19.02.2013.

7. Rozwiąż nierówność  $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ .

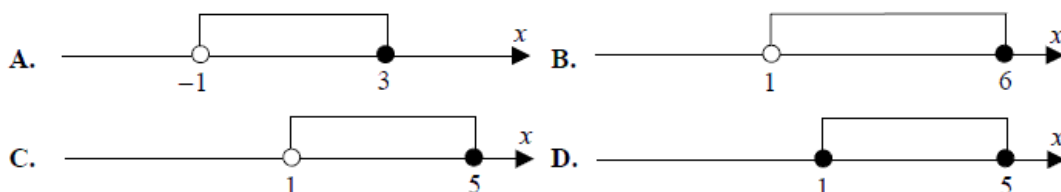
8.<sup>15</sup> Rozwiąż nierówność  $x^2 - 3x - 10 < 0$ .

9.<sup>16</sup> Liczba wszystkich rozwiązań równania  $(2x - 3)(x^2 - x) = 0$  jest równa:

- a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3

10. Rozwiąż nierówność  $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$ .

11.<sup>17</sup> Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności:  $3(x - 1)(x - 5) \leq 0$  i  $x > 1$ .



12. Rozwiąż nierówność  $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$ .

13.<sup>18</sup> Do zbioru rozwiązań nierówności  $(x - 2)(x + 3) < 0$  należy liczba:

- a) 9                      b) 7                      c) 4                      d) 1

14. Rozwiąż nierówność:  $x^2 - x - 2 \leq 0$ .

15.<sup>19</sup> Suma kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby od niej o 3 mniejszej jest równa 17. Znajdź te liczby.

16. Wartość  $k$ , dla której jeden z pierwiastków równania  $x^2 + 9x + k = 0$  jest równy  $-3$  wynosi:

- a)  $-6$                       b)  $-18$                       c)  $18$                       d)  $6$

17. Równanie  $2x^2 - 4x - 3 = 0$ :

- a) nie ma rozwiązań,                      b) ma jedno rozwiązanie,  
c) ma dwa rozwiązania,                      d) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

18. Rozwiązaniem równania  $2(x - 2)^2 = (x - 2)(x + 3)$  jest:

- a)  $x = -2$  i  $x = -1$                       b)  $x = 7$                       c)  $x = 2$  i  $x = 7$                       d)  $x = 1$  i  $x = 2$

15. Zadanie 8: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf), 19.02.2013.

16. Zadanie 9: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszecho2012.pdf>, 19.02.2013.

17. Zadanie 11, 12: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf), 19.02.2013

18. Zadanie 13,14: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf), 19.02.2013.

19. Zadania 15-26: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.



Przenosimy wszystko na lewą stronę i otrzymujemy:

$$2x^2 + 18x + 36 = 0 / : 2$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Obliczamy  $\Delta = 9$ , a następnie miejsca zerowe trójmianu kwadratowego:  $x_1 = -6, x_2 = -3$

Podstawiając wyliczone  $x_1$  i  $x_2$  do drugiego równania wyjściowego, otrzymujemy:

$$y_1 = 2x_1 + 11 = -1$$

$$y_2 = 2x_2 + 11 = 5$$

Rozwiązaniem tego układu są więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Ten sam układ równań możemy rozwiązać metodą graficzną. Należy wtedy narysować wykresy funkcji:  $y = 2x^2 + 20x + 47$  i  $y = 2x + 1$  w jednym układzie współrzędnych. Miejsca przecięcia tych wykresów są rozwiązaniami tego układu.

## ZADANIA

**2.5.1** Rozwiąż układy równań metodą algebraiczną:

a) 
$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - x - 6 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -x - y + 4 = 0 \\ x^2 - y = x \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} y = -x - 7 \\ -y = -x^2 + x + 7,25 \end{cases}$$

## CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

- 1.**<sup>20</sup> Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.
- 2.**<sup>21</sup> Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrowkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

20 Zadanie 1: [http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 20.02.2013.

21 Zadanie 2: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf), 20.02.2013.

- 3.<sup>22</sup>** W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię  $240 \text{ m}^2$ . Basen w drugim hotelu ma powierzchnię  $350 \text{ m}^2$  oraz jest o  $5 \text{ m}$  dłuższy i  $2 \text{ m}$  szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.
- 4.<sup>23</sup>** Turysta pokonał pieszo trasę o długości  $30 \text{ km}$  z miejscowości  $A$  do miejscowości  $B$  ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o  $9 \text{ km/h}$  większą i przybyłby do celu o  $3$  godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.
- 5.<sup>24</sup>** Z miast  $A$  i  $B$ , odległych o  $330 \text{ km}$ , wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta  $A$  wyjechał  $20$  minut wcześniej i jechał z prędkością o  $9 \text{ km/h}$  mniejszą niż samochód jadący z miasta  $B$ . Samochody te minęły się w odległości  $168 \text{ km}$ , licząc od miasta  $A$ . Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.
- 6.<sup>25</sup>** Miasto  $A$  i miasto  $B$  łączy linia kolejowa o długości  $210 \text{ km}$ . Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o  $24 \text{ km/h}$  większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o  $1$  godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz, w jakim czasie pociąg pospieszny pokona tę trasę.
- 7.<sup>26</sup>** Koszt wynajmu autokaru wynosi  $1440 \text{ zł}$ . Na wycieczkę pojechało o  $3$  uczniów mniej niż planowano. Co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o  $2 \text{ zł}$ . Oblicz:
- ilu uczniów pojechało na wycieczkę,
  - jaki był całkowity koszt wycieczki dla jednego uczestnika.
- 8.** Asia rozwiązywała przed maturą zadania testowe z matematyki (codziennie taką samą liczbę zadań) i w sumie rozwiązała ich  $448$ . Jeśli rozwiązywałaby codziennie o  $4$  zadania więcej, to rozwiązywałaby te zadania o  $2$  dni krócej. Oblicz, przez ile dni Asia rozwiązywała zadania przed maturą i ile zadań rozwiązywała każdego dnia.

22 Zadanie 3: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf), 20.02.2013.

23 Zadanie 4: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf>, 20.02.2013.

24 Zadanie 5: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf>, 20.02.2013.

25 Zadanie 6: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf), 20.02.2013.

26 Zadanie 7, 8: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

# 3 Funkcja kwadratowa

To już potrafię:

- zaznaczyć w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych;
- odczytać współrzędne danych punktów;
- odczytać z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero;
- odczytać i zinterpretować informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym);
- obliczać wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznaczyć punkty należące do jej wykresu

## 3.1 Jednomian kwadratowy

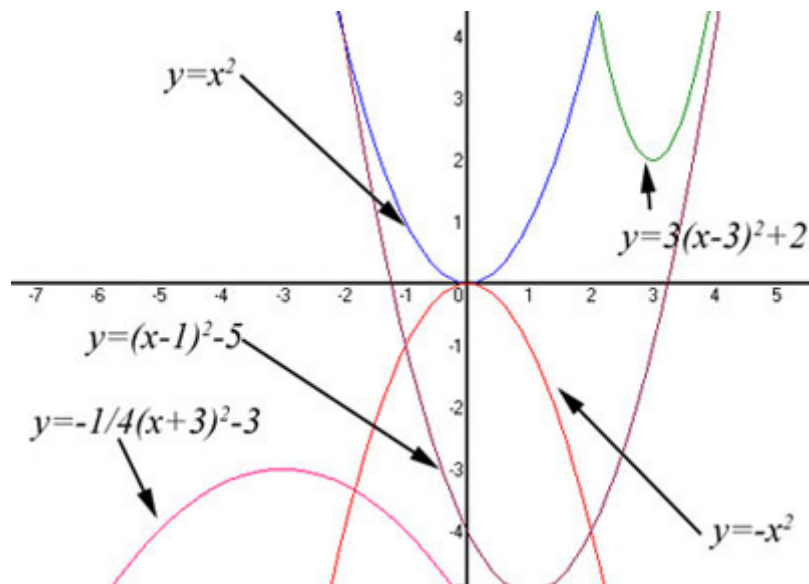
Teraz nauczę się szkicować wykres jednomianu na podstawie wzoru.

➔ Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci  $y = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c$  są danymi liczbami rzeczywistymi i  $a \neq 0$ , nazywamy **funkcją kwadratową**, **trójmianem kwadratowym** lub **funkcją drugiego stopnia**<sup>27</sup>.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

➔ Gdy współczynnik  $a$  jest dodatni, to ramiona paraboli są skierowane do góry.

➔ Gdy współczynnik  $a$  jest ujemny, to ramiona paraboli są skierowane w dół.



Przykłady funkcji kwadratowych:

$$y = 5x^2 + 9x - 4$$

$$y = -x^2 - x$$

$$y = 2x^2 - 7$$

$$y = x^2$$

Szczególnym przypadkiem trójmianu kwadratowego jest **jednomian drugiego stopnia** (kwadratowy).

Jest to funkcja w postaci  $y = ax^2$ . Jest to więc przypadek, w którym  $a \neq 0$  i  $b = c = 0$ .

### Przykład 1

Sporządźmy wykres kilku funkcji:

$$y = x^2$$

$$y = -x^2$$

$$y = 2x^2$$

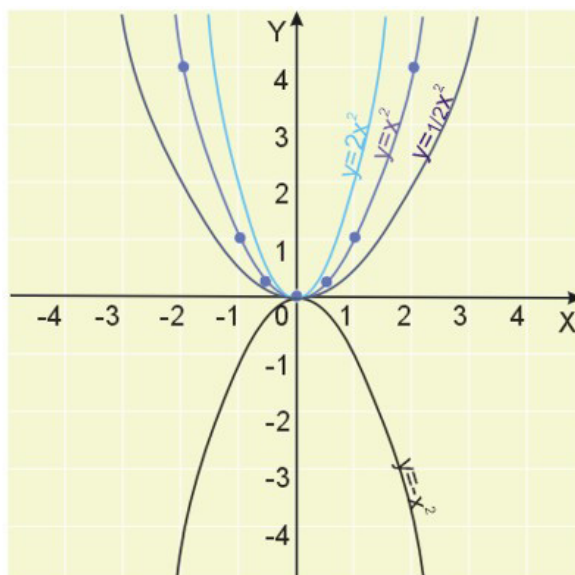
$$y = \frac{1}{2}x^2, \text{ gdzie } a \text{ jest dowolną liczbą.}$$

Sporządźmy tabelkę zmienności funkcji.

$x$	-2	-1	0	1/2	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1/4	1	4
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1/4	-1	-4
$y = 2x^2$	8	2	0	1/2	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1/2	0	1/8	1/2	2



Na jednym układzie współrzędnych wykreślamy wykresy wszystkich funkcji.



Możemy teraz określić podstawowe własności wykresu oraz samej funkcji (jednomianu kwadratowego).

- Wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa, którą nazywamy **parabolą**. Parabola ma dwa ramiona, które mogą być skierowane w górę, gdy współczynnik  $a > 0$ , oraz skierowane w dół, kiedy współczynnik  $a < 0$ .
- Im większy jest współczynnik  $a$ , tym parabola jest „węższa”.
- Parabola posiada jeden wierzchołek w punkcie  $(0,0)$ .
- **Dziedziną** jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- **Zbiorem wartości** jednomianu kwadratowego jest zbiór  $(-\infty;0)$ , gdy  $a > 0$ , oraz  $(-\infty;0)$ , gdy  $a < 0$ .
- Oś OY jest osią symetrii paraboli, a punkt przecięcia się tej osi z parabolą jest wierzchołkiem paraboli.
- Monotoniczność jednomianu kwadratowego: funkcja maleje w przedziale  $(-\infty;0)$  i rośnie w przedziale  $(0;+\infty)$ , gdy  $a > 0$ , oraz rośnie w przedziale  $(-\infty;0)$  i maleje w przedziale  $(0;+\infty)$ , gdy  $a < 0$ .
- Gdy  $a < 0$ , funkcja osiąga wartość największą (maksimum) w punkcie  $x = 0$ , natomiast dla  $a > 0$  funkcja osiąga wartość najmniejszą (minimum) w punkcie  $x = 0$ .
- Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe  $x_0 = 0$ .

## ZADANIA

**3.1.1** Sporządź tabelkę wartości funkcji i narysuj wykres funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = 3x^2$

b)  $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

c)  $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

**3.1.2** sprawdź, czy punkt  $K$  należy do paraboli  $y = 4x^2$ .

a)  $K = (4,32)$

b)  $K = (-2,16)$

c)  $K = \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$

d)  $K = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

**3.1.3** Omów następujące własności:

- ramiona skierowane w dół/górę
- oś symetrii
- współrzędne wierzchołka
- monotoniczność
- wartość najmniejsza/ największa jednomianów określonych wzorami:

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

b)  $f(x) = -x^2$

c)  $f(x) = 2x^2$

d)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$

## 3.2 Parabola w układzie współrzędnych

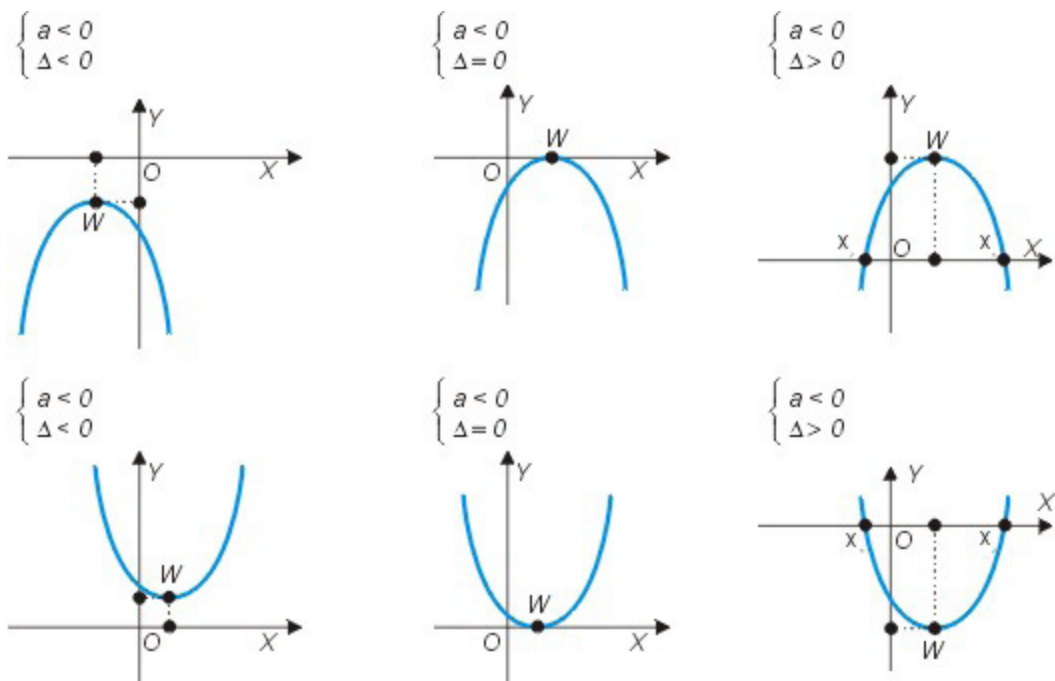
**Teraz naucz się** interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej.

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola**, której położenie w układzie współrzędnych zależy od wartości współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Położenie paraboli w układzie współrzędnych zależy od:

- ➔ 1. znaku współczynnika  $a$ , który warunkuje skierowanie ramion paraboli,
- 2. wartości wyróżnika  $\Delta$ , która warunkuje ilość punktów przecięcia paraboli z osią  $OX$  :
  - $\frac{3}{4}$  dla  $\Delta < 0$  parabola leży pod ( $a < 0$ ) lub nad ( $a > 0$ ) osią  $OX$ , nie ma z osią  $OX$  punktów wspólnych,
  - $\frac{3}{4}$  dla  $\Delta = 0$  parabola jest styczna do osi  $OX$ ,
  - $\frac{3}{4}$  dla  $\Delta > 0$  parabola przecina oś  $OX$  w dwóch punktach.

Różne możliwości położenia paraboli w układzie współrzędnych przedstawia rysunek:



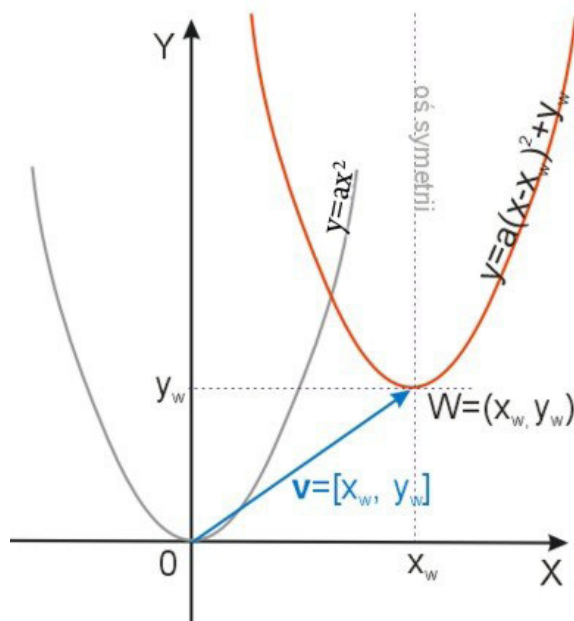
Wykres funkcji  $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w$  jest parabolą, która powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $y = ax^2$  o wektor  $\vec{v} = [x_w, y_w]$ , przy czym

$$x_w = -\frac{b}{2a}, y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

➔ **Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:**

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w -$$

W przypadku dodatniego współczynnika  $a$ , mamy:

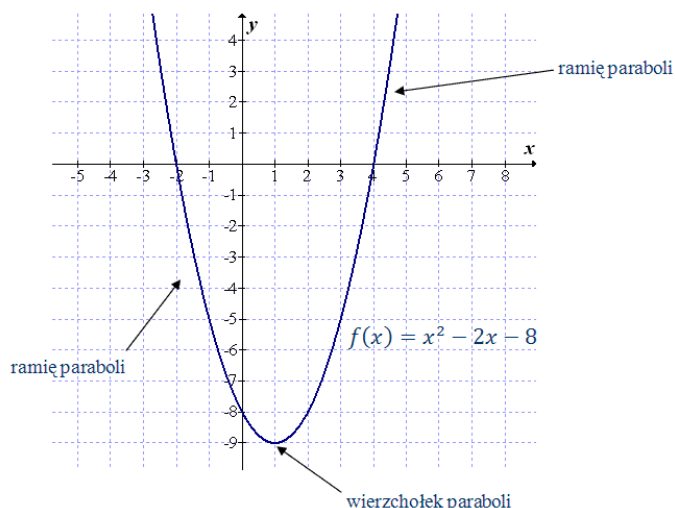


Podsumowując cechy wykresu i funkcji kwadratowej:

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.
- Ramiona paraboli skierowane są w górę, jeżeli  $a > 0$ , w dół w przypadku gdy  $a < 0$ .

- Współrzędne wierzchołka paraboli:  $W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .
- Wykres funkcji kwadratowej nie ma miejsc zerowych, jeżeli  $\Delta > 0$ .
- Wykres funkcji kwadratowej ma jedno miejsce zerowe równe  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , jeżeli  $\Delta = 0$ .
- Wykres funkcji kwadratowej ma dwa miejsca zerowe równe  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ , jeżeli  $\Delta > 0$ .
- Parabola ma jedną oś symetrii o równaniu  $x = -\frac{b}{2a}$ .
- Funkcja przyjmuje minimum dla  $a > 0$  w punkcie  $x = -\frac{b}{2a}$  równe  $y = -\frac{\Delta}{4a}$ .
- Funkcja przyjmuje maksimum dla  $a < 0$  w punkcie  $x = -\frac{b}{2a}$  równe  $y = -\frac{\Delta}{4a}$ .
- Gdy  $a > 0$ , funkcja maleje w przedziale  $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$  i rośnie w przedziale  $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$ .
- Gdy  $a < 0$ , funkcja rośnie w przedziale  $x = (-\infty; -\frac{b}{2a})$  i maleje w przedziale  $y = (-\frac{b}{2a}; +\infty)$ .

## ZADANIA



**3.2.1** Omów własności funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  (wykres funkcji powyżej).

- a) Dziedzina:...
- b) Zbiór wartości: ZW =...
- c) Miejsca zerowe:...
- d) Współrzędne wierzchołka: W =...
- e) Oś symetrii, to:...
- f) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy  $x \in \dots$
- g) Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy  $x \in \dots$
- h) Punkt przecięcia z osią  $y$ -ów ma współrzędne:...
- i) Monotoniczność:
  - funkcja jest rosnąca w przedziale...
  - funkcja jest malejąca w przedziale...

**3.2.2** Naszkicuj wykres jednomianu funkcji  $f(x)$ , a następnie przesuń równolegle wykres danego jednomianu stopnia drugiego o podany obok wektor. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji w postaci kanonicznej. Podaj dziedzinę, zbiór wartości, czy są miejsca zerowe (jeśli tak, to ile: jedno/dwa), współrzędne wierzchołka i przedziały monotoniczności nowo powstałej funkcji.

a)  $y = x^2, \vec{u} = [0,3]$       b)  $y = -x^2, \vec{u} = [-1,0]$       c)  $y = 2x^2, \vec{u} = [-3,2]$

## 3.3 Postacie trójmianu kwadratowego

### Teraz naucz się:

- zapisywać trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej;
- rozwiązywać proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu  $x^3 = -8$ ;
- korzystać z własności postaci iloczynowej przy rozwiązywaniu równań typu  $x(x+1)(x-7)=0$ ;
- zapisywać funkcję kwadratową w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej

### Postać iloczynowa trójmianu kwadratowego

#### ➔ TWIERDZENIE<sup>28</sup>

Dany jest trójmian kwadratowy  $ax^2 + bx + c$  o współczynnikach rzeczywistych, gdzie  $x_1$  i  $x_2$  są rozwiązaniami trójmianu:

1. Jeżeli  $\Delta > 0$ , to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2. Jeżeli  $\Delta = 0$ , to postać iloczynowa trójmianu kwadratowego wyraża się wzorem:

$$y = a(x - x_0)^2$$

3. Jeżeli  $\Delta < 0$ , to trójmian kwadratowy nie ma postaci iloczynowej.

#### Przykład 1

Wypisz rozwiązania równania:  $(x - 3)(x + 2) = 0$

Patrząc na taki przykład, możemy od razu podać pierwiastki. Jeśli podstawimy pod  $x$  3, to pierwszy nawias się „wyzeruje”. Iloczyn jakiegokolwiek liczby przez 0 daje nam 0.

Jeśli podstawimy pod drugi  $x$  liczbę 2, to ten nawias także nam się wyzeruje. Rozwiązaniami są więc wartości:  $x = 3$  i  $x = -2$ .

#### Przykład 2

Zapisz w postaci iloczynowej równanie:  $x^2 + 4x - 5 = 0$

Postępujemy analogicznie jak w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$\Delta > 0$ , więc korzystamy ze wzoru:  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Widzimy, że  $a = 1$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

### Przykład 3

Zapisz w postaci iloczynowej równanie:  $2x^2 - 4x + 2 = 0$

#### Sposób I

Zauważmy, że podane wyrażenie można zwinąć ze wzoru skróconego mnożenia, wtedy otrzymujemy  $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$ , stąd  $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}$ , stąd otrzymujemy rozwiązanie  $x = 1$ , a następnie zapisujemy w postaci iloczynowej korzystając ze wzoru

$$y = a(x - x_0)^2$$

**Odpowiedź:**  $2(x - 1)^2 = 0$

#### Sposób II

Policzymy deltę.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$x_0 = 1$$

$\Delta = 0$  – korzystamy więc ze wzoru:  $y = a(x - x_0)^2$

$a$  jest równe 2.

Ostatecznie dostajemy:  $2(x - 1)^2 = 0$

### Przykład 4

Napisz wzór równania, którego rozwiązaniami są liczby  $-3$  i  $7$ .

Jak już wiesz, w postaci iloczynowej widać od razu rozwiązania. Jeśli chcemy ułożyć równanie, które będzie miało takie pierwiastki, wystarczy, że podstawimy te wartości do wzoru.

$$(x - (-3))(x - 7) = 0$$

$$(x + 3)(x - 7) = 0$$

Możemy już taką postać pozostawić, jednak wymnóżmy wartości w nawiasach przez siebie i stwórzmy w ten sposób trójmian kwadratowy:

$$x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

W ten sposób ułożyliśmy równanie, którego rozwiązaniami są liczby  $-3$  i  $7$ . Można to sprawdzić poprzez policzenie delty i pierwiastków (sprawdź!).

## ZADANIA

**3.3.1** Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

a)  $12x^2 + 11x + 2 = 0$

b)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

c)  $2x^2 - 3x + 4 = 0$

d)  $-7x^2 + 10x - 4 = 0$

e)  $5x^2 - 3x = 0$

f)  $9x^2 - 8 = 0$

g)  $2x^2 - 3x - 2 = 0$

h)  $-x^2 + x + 6 = 0$

i)  $3x^2 - 5x + 4 = 0$

j)  $-4x^2 + 2x - 1 = 0$

k)  $10 - 2x^2 = 0$

l)  $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$

**3.3.2** Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego

a)  $(x - 3)(x - 30) = 0$

b)  $2(x - 2)(x + 5) = 0$

c)  $\frac{11}{3}(x + 15)(x + 27) = 0$

d)  $4x(x + 6) = 0$

e)  $-2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$

f)  $-2(x + 1)(x + 1 - \sqrt{2}) = 0$

g)  $(x + 2 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{2}) = 0$

h)  $(2x - 3)(2x - 3) = 0$

**3.3.3** Oblicz współczynniki  $b$  i  $c$  trójmianu kwadratowego  $x^2 + bx + c = 0$ , mając dane pierwiastki:

a)  $3$  i  $5$

b)  $4$  i  $-9$

c)  $\frac{1}{3}$  i  $7$

d)  $\frac{2}{7}$  i  $-\frac{3}{5}$

e)  $\sqrt{2}$  i  $1 + \sqrt{2}$

f)  $1 + \sqrt{7}$  i  $1 - \sqrt{7}$

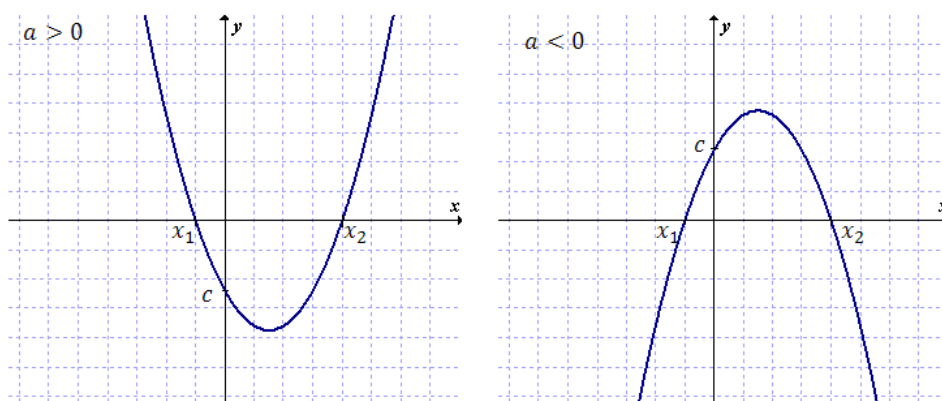
➡ Postać ogólna funkcji kwadratowej

$f(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c$  są współczynnikami liczbowymi i  $a \neq 0$ , nazywamy **postacią ogólną funkcji kwadratowej**.

Mając dany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, możemy odczytać następujące informacje:

- czy ramiona paraboli są skierowane do góry ( $a > 0$ ), czy do dołu ( $a < 0$ ),
- punkt przecięcia paraboli z osią OY ( $0, c$ ).

## Przykład



Na powyższych wykresach zaznaczono również miejsca zerowe obu funkcji kwadratowych (oznaczone symbolami  $x_1$  oraz  $x_2$ ). Dysponując wzorem ogólnym funkcji kwadratowej, możemy łatwo obliczyć miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$ . Wystarczy najpierw obliczyć deltę, korzystając ze wzoru:

➔  $\Delta = b^2 - 4ac$

Jeżeli delta wyszła większa od zera, to miejsca zerowe istnieją i możemy je obliczyć korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chcąc policzyć współrzędne wierzchołka  $W$  funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej, skorzystamy ze wzorów:

$$W = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

➔ Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x - p)^2 + q$ , gdzie  $a, p, q$  są współczynnikami liczbowymi i  $a \neq 0$ , nazywamy **postacią kanoniczną funkcji kwadratowej**.

Współczynniki  $p$  i  $q$  to współrzędne **wierzchołka paraboli**, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Oznaczmy ten wierzchołek przez  $W = (p, q)$ . Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej, to możemy obliczyć współrzędne  $p$  i  $q$  ze wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$



**Zaletą postaci kanonicznej** jest to, że widać z niej od razu współrzędne wierzchołka paraboli.

Dodatkowo po współczynniku  $a$  możemy określić, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ( $a > 0$ ), czy do dołu ( $a < 0$ ).

➔ Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  (gdy  $\Delta > 0$ ) i  $f(x) = a(x - x_0)^2$  ( $\Delta = 0$ ) nazywamy **postacią iloczynową funkcji kwadratowej**.

W powyższym wzorze  $a$  jest współczynnikiem liczbowym, takim że  $a \neq 0$ . Literki  $x_0, x_1, x_2$  są miejscami zerowymi funkcji  $f(x)$ .

### Uwaga!

Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to postać iloczynowa nie istnieje.

Jeżeli znamy postać ogólną funkcji kwadratowej ( $\Delta > 0$ ), to możemy obliczyć miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$ , korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeśli  $\Delta = 0$ , to miejsce zerowe obliczamy ze wzoru  $x_0 = -\frac{b}{2a}$

**Zaletą postaci iloczynowej** jest to, że widać z niej od razu miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Po współczynniku  $a$  możemy określić również, czy ramiona paraboli są skierowane do góry ( $a > 0$ ), czy do dołu ( $a < 0$ ).

### Reasumując

Dla  $a \neq 0$  trójmian kwadratowy może być przedstawiony w następujących postaciach:

<b>Postać ogólna</b>	$y = ax^2 + bx + c$		
<b>Postać kanoniczna</b>	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ lub $y = a(x - p)^2 + q$ gdzie $p = -\frac{b}{2a}$ , $q = -\frac{\Delta}{4a}$		
<b>Postać iloczynowa</b>	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	Brak postaci iloczynowej	$y = a(x - x_0)^2$	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

## ZADANIA

**3.3.4** Wyznacz te wartości parametrów  $a$ ,  $b$  i  $c$ , dla których  $f(x) = g(x)$ :

a)  $f(x) = ax^2 - 7x + c$  i  $g(x) = -2x^2 + bx - 5$

b)  $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 2c$  i  $g(x) = ax^2 - 4bx + \frac{3}{4}$

**3.3.5** Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej, podaj wartości współczynników  $a$ ,  $b$  i  $c$ :

a)  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16$

b)  $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - \frac{1}{8}$

c)  $f(x) = -3(x + 4)^2 - 1$

d)  $f(x) = 2(x - 2)(x - 3)$

e)  $f(x) = 3x(2 - 3x) + 5$

f)  $f(x) = (1 - x)(3 - x) + 6 - 2x$

g)  $f(x) = -2(x - 3)^2 + 18$

h)  $f(x) = 3(x + 2)^2 - 6$

i)  $f(x) = 2(x - 1)(x + 10)$

j)  $f(x) = 2(x - 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$

**3.3.6** Znajdź wartości  $p$ ,  $q$  i  $a$ :

a)  $2x^2 + 20x + 50 = 2(x + p)^2$

b)  $3x^2 - 18x + 20 = 3(x + p)^2 + q$

c)  $3x^2 - 15x + 25 = a(x + p)^2 + q$

d)  $5x^2 + 12x - 6 = a(x + p)^2 + q$

**3.3.7** Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, każdy z trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej:

a)  $f(x) = 4x^2 + 6x + 3$

b)  $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

d)  $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

e)  $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

f)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2$

g)  $f(x) = -2x^2 + 16x - 22$

h)  $f(x) = 2(x - 1)(x + 10)$

i)  $f(x) = 3x(2 - 3x) + 5$

j)  $f(x) = 4(x + 5)x$

**3.3.8** Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a)  $f(x) = 3x^2 + x + 5$

b)  $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$

c)  $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$

d)  $f(x) = -2x^2 + 6x + 5$

**3.3.9** Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, podaj miejsca zerowe tej funkcji:

a)  $f(x) = 2(x - 1)(x + 10)$

b)  $f(x) = -3(x - 2)(x + 5)$

c)  $f(x) = 4(x + 5)x$

d)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 6)$

**3.3.10** Znając współczynnik  $a$  oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, podaj jej postać iloczynową:

a)  $a = \sqrt{2}, x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{2}$

b)  $a = -3, x_1 = -2, x_2 = 0$

c)  $a = 7, x_0 = 9$

d)  $a = \frac{1}{2}, x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{5}$

**3.3.11** Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj postać kanoniczną tej funkcji:

a)  $f(x) = (x-1)(x+5)$

b)  $f(x) = -(x-6)(x+4)$

c)  $f(x) = 2(x+1)(x+5)$

d)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x+6)(x-26)$

**3.3.12** Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe):

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b)  $f(x) = x^2 + 5x + 6$

c)  $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

d)  $f(x) = 9x^2 + 6x - 1$

e)  $f(x) = -3x^2 + 5$

f)  $f(x) = -2x^2 + x + 1$

g)  $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

h)  $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$

## 3.4 Rysowanie wykresów funkcji<sup>29</sup>

### Teraz nauczę się

- szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.

Jak już wspominaliśmy w powyższym temacie, wykres funkcji kwadratowej ma kształt paraboli.

➔ Poniżej przedstawimy dwa sposoby rysowania wykresów.

#### Sposób I:

Rysujemy wykres funkcji, bazując na kilku kluczowych punktach:

- 1) wierzchołek paraboli,
- 2) punkty przecięcia z osią  $OX$  (punkty dla miejsc zerowych),
- 3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

#### UWAGA:

Gdy funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

Bezpośrednio wszystkie wymienione elementy możemy obliczyć, mając do dyspozycji postać ogólną. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety.

### Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać ogólna.

Obliczamy po kolei wymienione elementy. Następnie zaznaczamy wszystkie uzyskane punkty w układzie współrzędnych i od ręki łączymy je linią w kształcie paraboli.

$$y = -x^2 - 2x + 8 \quad a = -1, b = -2, c = 8$$

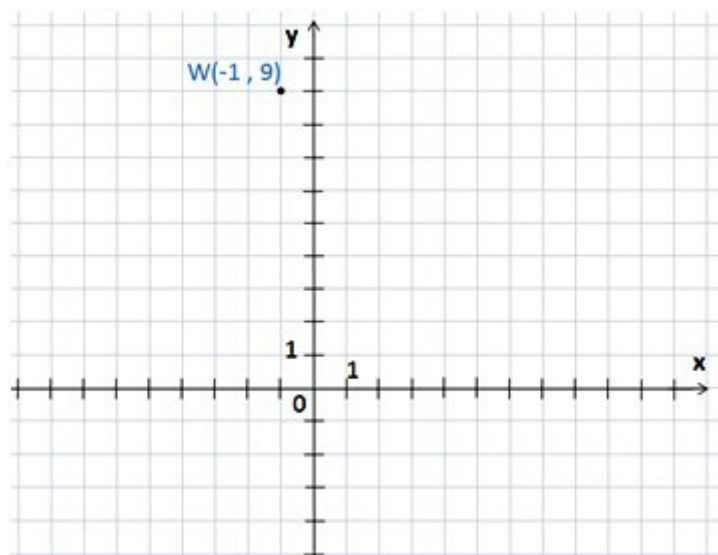
1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1, 9)$$



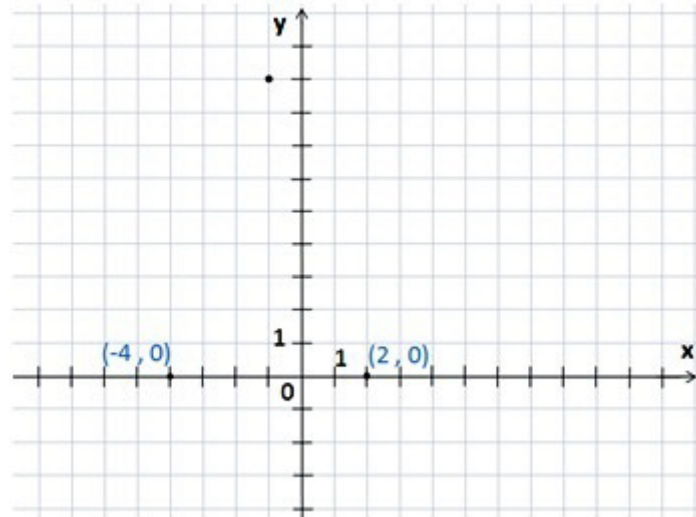
2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

**UWAGA:** Gdyby funkcja miała ujemny wyróżnik, wtedy nie byłoby miejsc zerowych i ten punkt musielibyśmy pominąć. Gdyby funkcja miała jedno miejsce zerowe, byłby nim wierzchołek paraboli, który został obliczony w pierwszym punkcie, więc obliczanie go po raz drugi nie miałoby sensu i również ten punkt należałoby pominąć. W obu ewentualnościach oprócz wierzchołka obliczamy po dwa punkty, dla argumentów (x) po obu stronach wierzchołka (punkt 3).

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 + 6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 - 6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$(-4, 0); (2, 0)$$



### 3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:

Punkt na lewo od miejsc zerowych:

Wybraliśmy argument  $-5$ .

**Podstawiamy argument  $-5$  do wzoru funkcji i obliczamy wartość ( $y$ ):**

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(-5)^2 - 2 \cdot (-5) + 8 = -25 + 10 + 8 = -7$$

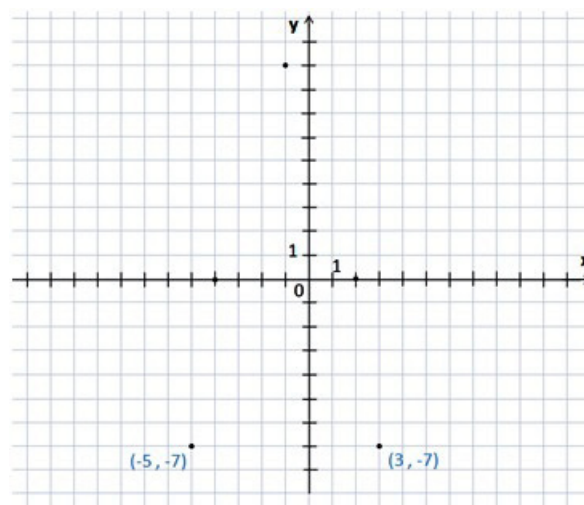
Współrzędne punktu:  $(-5, -7)$

Punkt na prawo od miejsc zerowych:

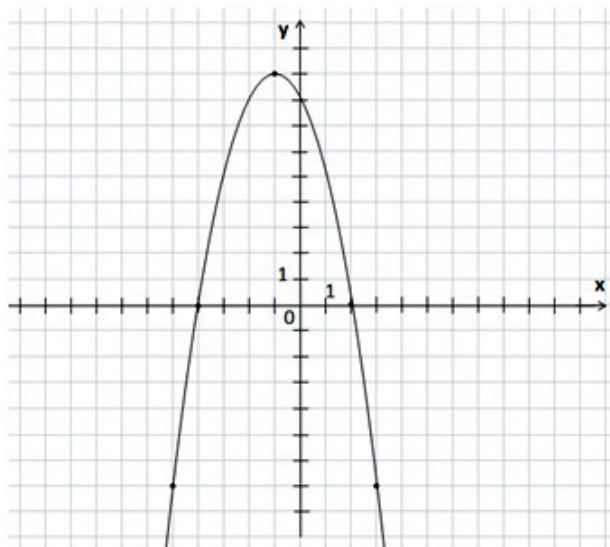
**Podstawiamy argument  $3$  do wzoru funkcji i obliczamy wartość ( $y$ ):**

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -3^2 - 2 \cdot 3 + 8 = -9 - 6 + 8 = -7$$

Współrzędne punktu:  $(3, -7)$



Teraz możemy połączyć punkty linią w kształcie paraboli:



### Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać iloczynowa.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

#### Różnice:

1) wierzchołek paraboli

Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią  $Ox$  (punkty dla miejsc zerowych)

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.

#### Przykład:

$$y = 2(x - 1)(x + 3)$$

**UWAGA – liczby zapisane w nawisach to miejsca zerowe ale ze zmienionym znakiem!**

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

$$(1, 0); (-3, 0)$$

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci iloczynowej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

### Rysowanie wykresu funkcji kwadratowej – postać kanoniczna.

Dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów.

## RÓŻNICE:

1) wierzchołek paraboli

Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru.

Przykład 1

$$y = 2(x + 5)^2 + 2$$

$$W = (-5, 2)$$

**UWAGA** – współrzędna „p” będzie miała przeciwny znak, do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q” się nie zmienia:  
 $x = -5$   
 $y = 2$

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych)

Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie – korzystając z tej postaci – obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo

Możemy je obliczyć bezpośrednio z postaci kanonicznej, ale dla ułatwienia obliczeń zalecamy skorzystanie z postaci ogólnej.

### ➔ Sposób II:

Tym sposobem posługujemy się, korzystając wyłącznie z postaci kanonicznej!

### Przykład 2

$$y = -2(x + 1)^2 - 3$$

Rysowanie wykresu funkcji tym sposobem składa się z dwóch podstawowych kroków:

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołków).

W naszym przykładzie eliminujemy więc:

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$
$$y = -2x^2$$

Otrzymujemy w ten sposób najprostszą przypadłość funkcji kwadratowej. Wykres funkcji kwadratowej, składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych.

$$W = (0, 0)$$

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych:

Wybraliśmy:

$$x = -2$$

$$y = -2 \cdot (-2)^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

$$(-2, -8)$$

$$x = -1$$

$$y = -2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$(-1, -2)$$

$$x = 1$$

$$y = -2 \cdot 1^2 = -2 \cdot 1 = -2$$

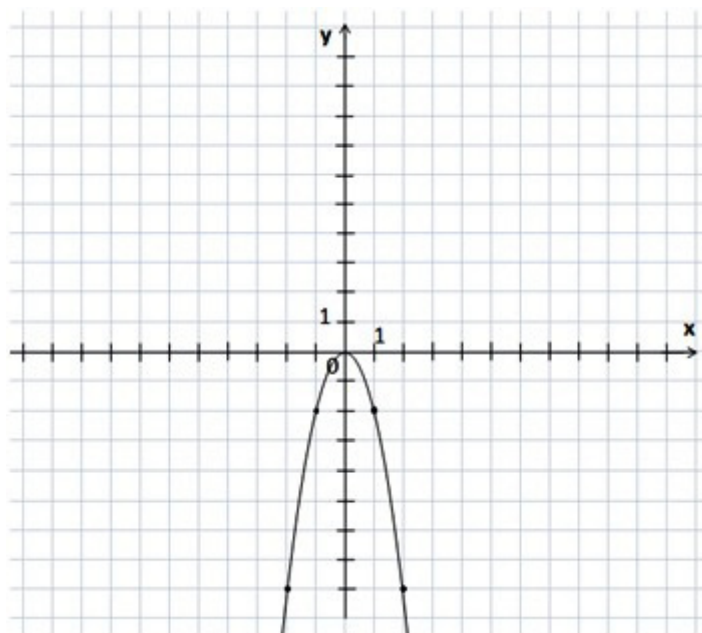
$$(1, -2)$$

$$x = 2$$

$$y = -2 \cdot 2^2 = -2 \cdot 4 = -8$$

$$(2, -8)$$

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:



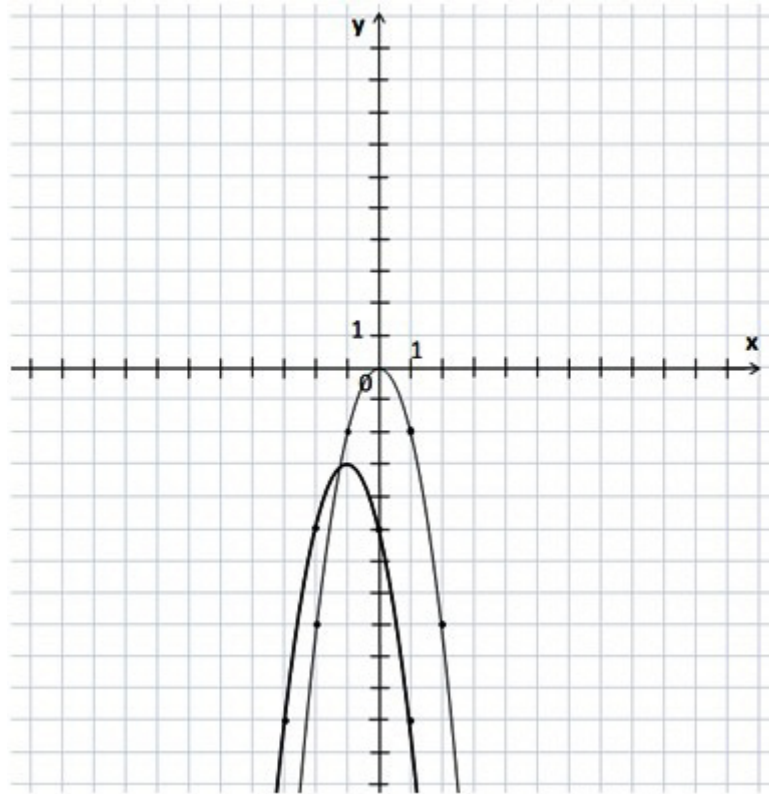
1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor.

$$y = -2(x + 1)^2 - 3$$

Wektor przesunięcia:

$$[-1, -3] \quad \text{Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.}$$





## ZADANIA

**3.4.1** Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji kwadratowej  $f$  z osiami układu współrzędnych, jeśli:

a)  $f(x) = 3x^2 - 3$       b)  $f(x) = x^2 + 8$       c)  $f(x) = x^2 - 4x + 4$       d)  $f(x) = x^2 - 6x - 16$

**3.4.2** Oblicz:

- współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osiami układu współrzędnych
- współrzędne wierzchołka paraboli
- miejsca zerowe (o ile istnieją),

a następnie naskicuj wykres funkcji  $f$ , jeśli:

a)  $f(x) = x^2 - 9$       b)  $f(x) = x^2 + 6x$       c)  $f(x) = x^2 - 4x + 4$       d)  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

## 3.5 Własności funkcji kwadratowej

### Teraz nauczę się:

- odczytywać z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
- wyznaczać wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

### MINIMUM I MAKSYMUM FUNKCJI KWADRATOWEJ

Konkretna funkcja kwadratowa może mieć albo minimum, albo maksimum.

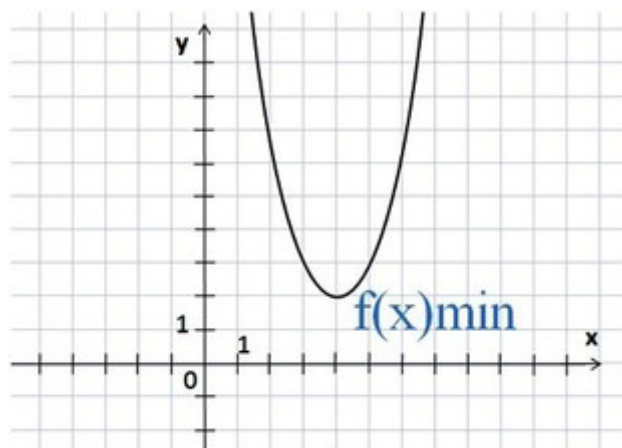
Przypominamy:

Minimalną wartość funkcji oznaczamy:  $f(x)_{\min}$  lub  $y_{\min}$ . Maksymalną wartość oznaczamy:

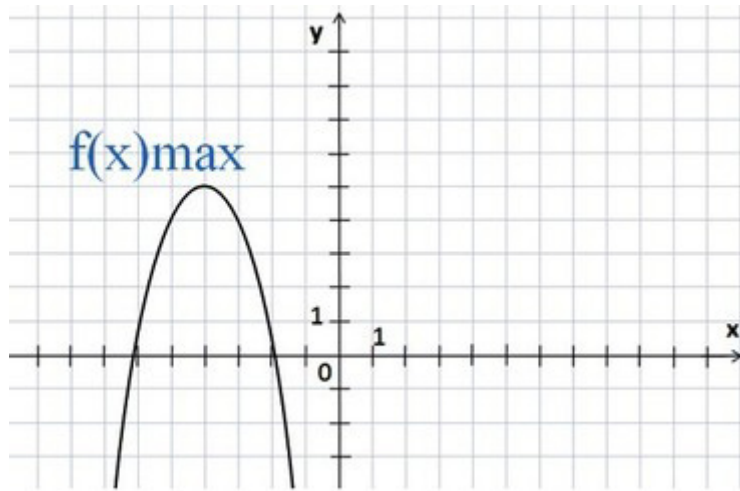
$f(x)_{\max}$  lub  $y_{\max}$ .

W celu wyznaczenia minimum lub maksimum funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, że będzie znajdowało się w punkcie wierzchołka paraboli. Wiemy już, jak obliczyć współrzędne wierzchołka. Oprócz tego musimy ustalić, czy mamy do czynienia z maksimum czy minimum:

– gdy ramiona paraboli unoszą się do góry, punkt wierzchołka jest punktem najniższym położonym, dlatego mamy do czynienia z minimum



– gdy ramiona paraboli opadają w dół, punkt wierzchołka jest punktem najwyższym położonym, dlatego mamy do czynienia z maksimum



Nie musimy rysować wykresu funkcji. Wystarczy spojrzeć na współczynnik „ $a$ ” funkcji kwadratowej.

Przypominamy: ramiona paraboli będą skierowane w górę, gdy  $a > 0$ , w dół,

gdy  $a < 0$ .

### Przykład 1

$$y = -3x^2 + 6x - 8$$

Współczynnik „ $a$ ” funkcji ma wartość  $-3$  ( $a < 0$ ). Ramiona funkcji będą skierowane w dół, czyli mamy do czynienia z maksimum.

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = 36 - 96 = 60$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-60}{4 \cdot (-3)} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Zapisujemy więc:

$$f(x)_{\max} = 5 \text{ dla } x = 1$$

## ➡ DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

### ➤ Dziedzina

Dziedziną funkcji kwadratowej (chyba, że w zdaniu zostanie narzucona inna) jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Dla dowolnej funkcji kwadratowej zapisujemy więc:

$$D = \mathbb{R}.$$

### ➤ Zbiór wartości

Jest ściśle powiązany z wartością wierzchołka ( $q$ ) oraz kierunkiem ramion paraboli.

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością w punkcie wierzchołka ( $q$ ):

$$ZW = (-\infty, q]$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w górę, wtedy zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością w punkcie wierzchołka ( $q$ ) a nieskończonością:

$$ZW = [q, \infty)$$

### Przykład 2

$$y = -2x^2 - 4x + 5$$

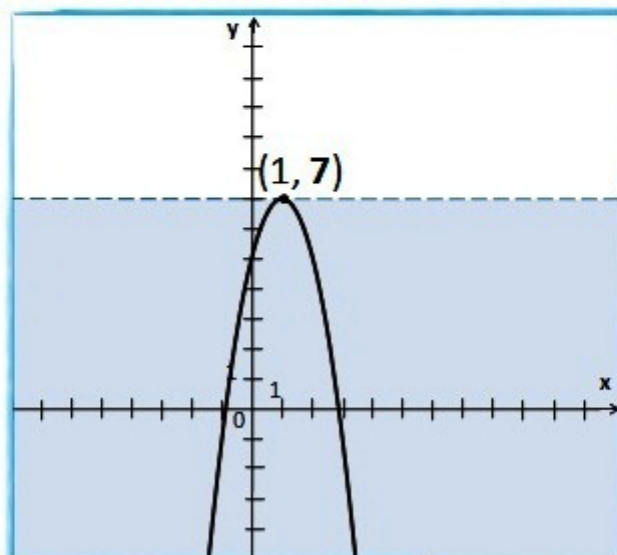
Obliczamy współrzędną „ $q$ ” wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-56}{4 \cdot (-2)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Ponieważ współczynnik „ $a$ ” jest ujemny ( $-2$ ), ramiona paraboli są skierowane w dół, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy minus nieskończonością a wartością  $q$ .

$$ZW = (-\infty, 7]$$



### Przykład 3

$$y = 2x^2 + 4x - 2$$

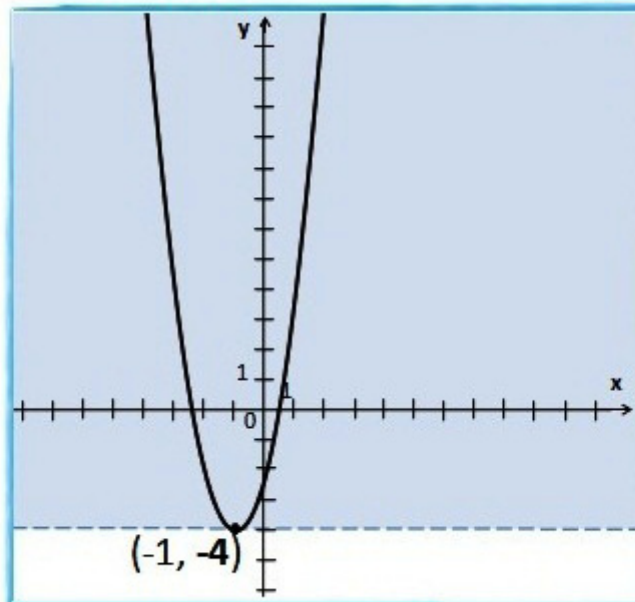
Obliczamy współrzędną „ $q$ ” wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 + 16 = 32$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-32}{4 \cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4$$

Ponieważ współczynnik „ $a$ ” jest dodatni ( $2$ ), ramiona paraboli są skierowane w górę, dlatego zbiór wartości będzie się zawierał pomiędzy wartością  $q$  a nieskończonością.

$$ZW = \langle -4, \infty \rangle$$



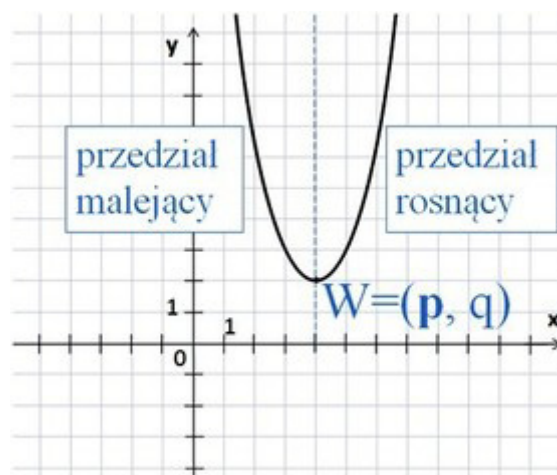
## ➔ PRZEDZIAŁY MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Podobnie jak w wypadku ustalania zbioru wartości oraz maksimum lub minimum funkcji kwadratowej, kluczowym elementem potrzebnym do określenia przedziałów monotoniczności jest wierzchołek funkcji.

Ponieważ przedziały monotoniczności są określane dla argumentów (oś  $Ox$ ), istotna jest pierwsza współrzędna wierzchołka ( $p$ ).

Drugą potrzebną informacją, jest kierunek ramion paraboli:

**Gdy ramiona paraboli są skierowane w górę.**



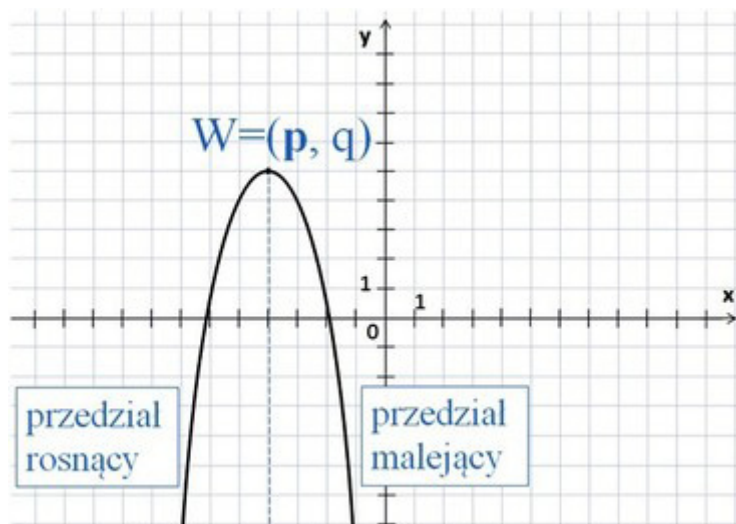
**Funkcja jest rosnąca w przedziale od „ $p$ ” do nieskończoności.**

$$f(x) \nearrow \text{ w przedziale } \langle p, \infty \rangle$$

**Funkcja jest malejąca w przedziale od minus nieskończoności do „ $p$ ”.**

$$f(x) \searrow \text{ w przedziale } \langle -\infty, p \rangle$$

Gdy ramiona funkcji są skierowane w dół.



Funkcja jest rosnąca w przedziale od minus nieskończoności do „p”.

$$f(x) \nearrow \text{ w przedziale } (-\infty, p)$$

Funkcja jest malejąca w przedziale od „p” do nieskończoności.

$$f(x) \searrow \text{ w przedziale } (p, \infty)$$

$$y = 3x^2 - 12x + 8$$

Obliczamy współrzędną „p” wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Współczynnik „a” funkcji jest dodatni (3), więc ramiona będą skierowane w górę. W związku z tym przedziały monotoniczności są następujące:

$$f(x) \nearrow \text{ w przedziale } (2, \infty)$$

$$f(x) \searrow \text{ w przedziale } (-\infty, 2)$$

Określ monotoniczność funkcji kwadratowej  $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$p = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$f(x) \uparrow: (-\infty, 2)$$

$$f(x) \downarrow: (2, \infty)$$

## Reasumując

### Własności funkcji kwadratowej

	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina	$D = R$	
Zbiór wartości	$Y = \left( -\frac{\Delta}{4a}, \infty \right)$	$Y = \left( -\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right)$
Największa wartość funkcji	Nie istnieje	$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ , dla $x = -\frac{b}{2a}$
Najmniejsza wartość funkcji	$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ , dla $x = -\frac{b}{2a}$	Nie istnieje
Monotoniczność	malejąca dla $x \in \left( -\infty, -\frac{b}{2a} \right)$ , rosnąca dla $x \in \left( -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$	rosnąca dla $x \in \left( -\infty, -\frac{b}{2a} \right)$ , malejąca dla $x \in \left( -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$
Miejsca zerowe	$\Delta < 0$ nie istnieją $\Delta = 0$ jedno $x_0 = -\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$ dwa $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ , $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	
Parametr	$a < 0$	$a < 0$
Ramiona paraboli	Skierowane do góry	Skierowane w dół
Oś symetrii paraboli	$x = -\frac{b}{2a}$	
Współrzędne wierzchołka paraboli	$x_w = -\frac{b}{2a}$ , $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$	

## ZADANIA

**3.5.1** Narysuj wykresy funkcji kwadratowej:

a)  $y = x^2 - 4$

b)  $y = x^2 - 6x$

c)  $y = -2x^2 + 4x$

d)  $y = x^2 - 4x + 5$

e)  $y = -2x^2 + 6x + 7$

**3.5.2** Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej i na jego podstawie określ:

- zbiór wartości
- miejsca zerowe

- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne
- przedziały, w których funkcja jest rosnąca, a w których malejąca
- wartość największą lub najmniejszą,

dla następujących funkcji:

- |                         |                          |                            |
|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 4$     | b) $f(x) = -x^2 + 6x$    | c) $f(x) = (x-3)^2 - 4$    |
| d) $f(x) = -(x-1)(x+5)$ | e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ | f) $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$ |

**3.5.3** Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

- |                       |                         |                        |
|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $y = x^2 - 4x + 3$ | b) $y = -2x^2 - 8x - 5$ | c) $y = x^2 - 6x + 10$ |
|-----------------------|-------------------------|------------------------|

**3.5.4** Ile punktów wspólnych ma wykres funkcji kwadratowej  $y = 2x^2 + 4x - 1$  z prostymi:

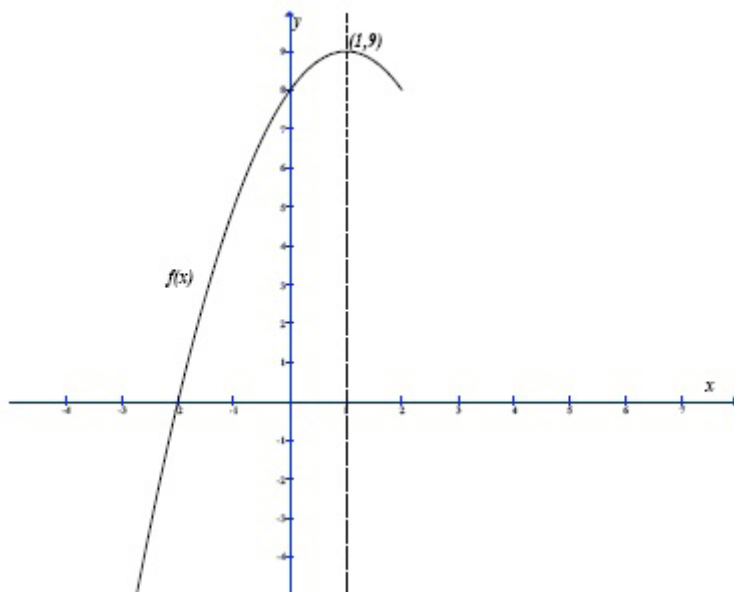
- |             |             |             |            |
|-------------|-------------|-------------|------------|
| a) $y = -5$ | b) $y = -3$ | c) $y = -1$ | d) $y = 2$ |
|-------------|-------------|-------------|------------|

**3.5.5** Wyznacz równanie osi symetrii paraboli, określonej równaniem:  $y = -x^2 + 6x - 7$ .

**3.5.6** Dana jest funkcja  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ .

- a) Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej zbiór wartości.
- b) Podaj rozwiązanie nierówności:  $f(x) \geq 0$ .

**3.5.7** Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej  $f(x)$  wskaż, które zdanie jest prawdziwe:



- a) miejscami zerowymi funkcji są liczby:  $-2$  oraz  $4$
- b) funkcja jest rosnąca w przedziale  $(-2, 4)$



c) funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla  $x < 1$

d) zbiorem wartości funkcji jest przedział  $(-1, 9)$

**3.5.8** Wyznacz najmniejszą lub największą wartość funkcji:

a)  $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b)  $f(x) = (x - 3)(x + 4)$

c)  $f(x) = -3x(x - 2)$

d)  $f(x) = 2(x - 2)(x + 4) - 5$

**3.5.9** Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a)  $f(x) = -x^2 - 3x + 10, x \in \langle -1, 2 \rangle$

b)  $f(x) = 2x^2 - x + 1, x \in \langle -2, 5 \rangle$

c)  $f(x) = -2x^2 + x - 1, x \in \langle 0, 2 \rangle$

**3.5.10** Oblicz najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

a)  $f(x) = x^2 - 9, x \in \langle -2, 2 \rangle$

b)  $f(x) = -x^2 + 5x, x \in \langle 3, 7 \rangle$

c)  $f(x) = x^2 - 5x - 6, x \in \langle -4, 1 \rangle$

d)  $f(x) = x^2 - 4x + 4, x \in \langle -4, 1 \rangle$

## 3.6 Przesuwanie wykresów funkcji kwadratowej

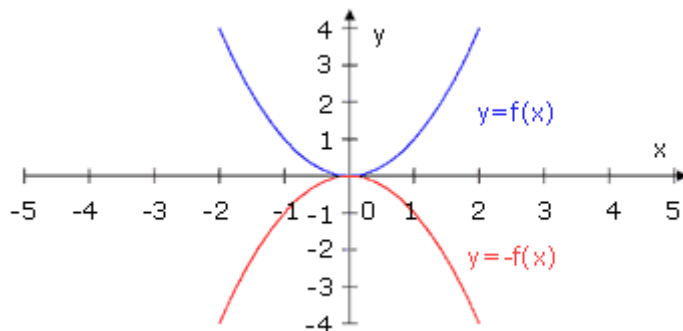
**Teraz nauczę się:**

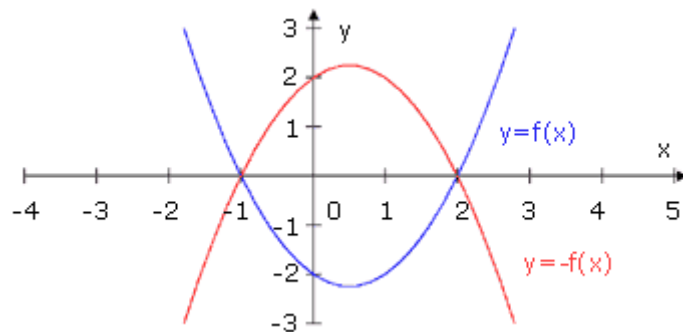
- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykresy funkcji  $y = f(x + a), y = f(x) + a, y = -f(x), y = f(-x)$ ;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

➡  $x \rightarrow y = -f(x)$

**Wykres funkcji  $y = -f(x)$  jest symetryczny do wykresu funkcji  $y = f(x)$  względem osi  $OX$ .**

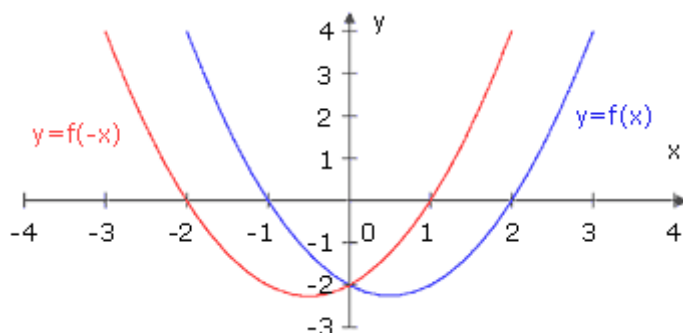
**Przykłady**





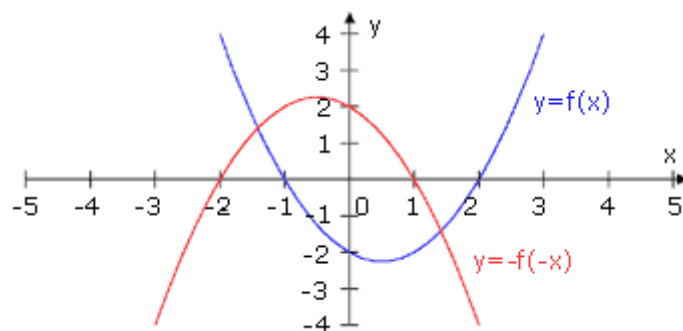
➔  $x \rightarrow y = f(-x)$

Wykres funkcji  $y = f(-x)$  jest symetryczny do wykresu funkcji  $y = f(x)$  względem osi OY.



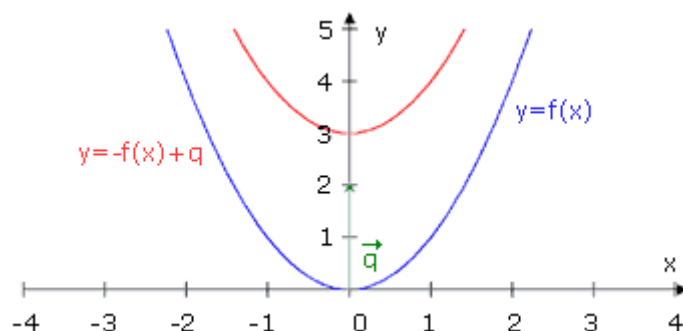
➔  $x \rightarrow y = -f(-x)$

Wykres funkcji  $y = -f(-x)$  powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $y = f(x)$  przez symetrię względem początku układu współrzędnych, czyli punktu (0, 0).



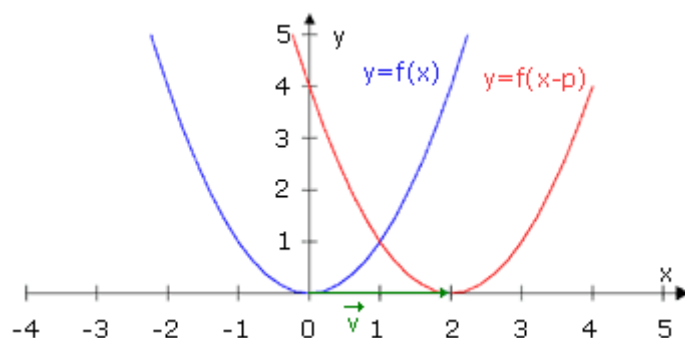
➔  $x \rightarrow y = f(x) + q$

Wykres funkcji  $y = f(x) + q$  powstaje w wyniku przesunięcia wykresu  $y = f(x)$  wzdłuż osi OY o  $|q|$  jednostek w kierunku zgodnym ze znakiem  $q$  (o wektor  $[0, q]$ ).



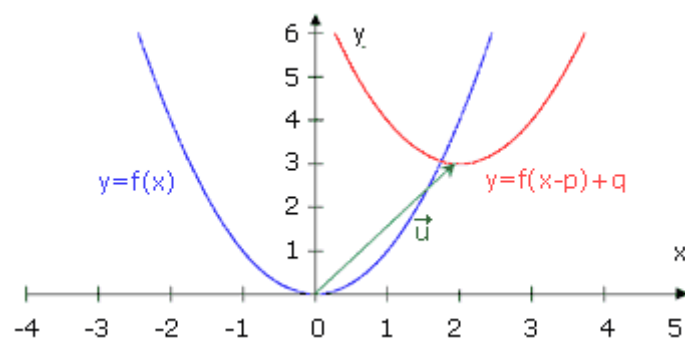
➔  $x \rightarrow y = f(x - p)$

Wykres funkcji  $y = f(x - p)$  otrzymujemy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $y = f(x)$  wzdłuż osi OX o wektor  $\vec{v} = [p, 0]$



➔  $x \rightarrow y = f(x - p) + q$

Wykres funkcji  $y = f(x - p) + q$  otrzymujemy w wyniku przesunięcia wykresu  $y = f(x)$  o wektor  $\vec{u} = [p, q]$

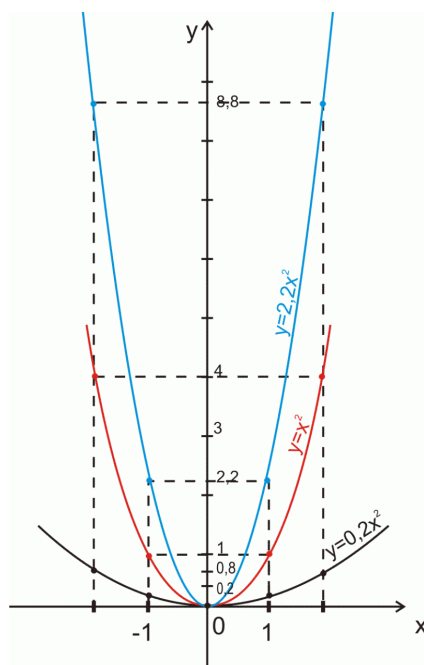


➔  $x \rightarrow y = k \cdot f(x)$

Wykres funkcji  $y = k \cdot f(x)$  powstaje z wykresu  $y = f(x)$  w wyniku  $k$ -krotnego zbliżenia się lub oddalania od osi OY.

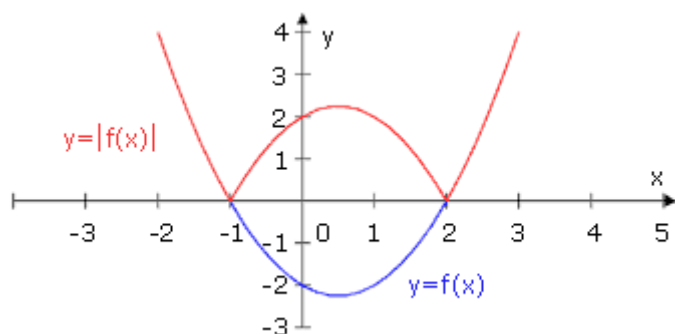
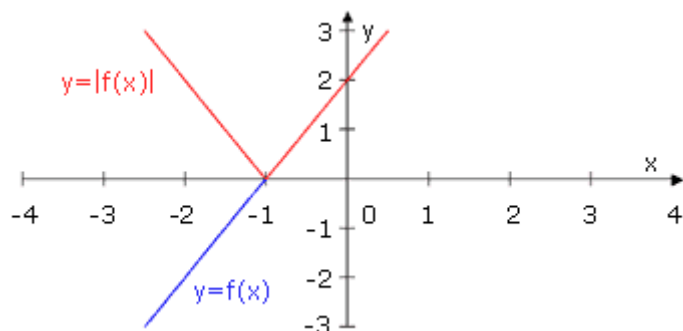
Dla  $k > 1$  wykres funkcji  $f(x)$  zbliżył się  $k$ -krotnie do osi OY („rozciągnął się” wzdłuż osi OY).

Dla  $k \in (0,1)$  wykres funkcji  $f(x)$  oddalił się  $k$ -krotnie od osi OY („ściągnął się” wzdłuż osi OY).



➔ \*\*\* $x \rightarrow y = |f(x)|$

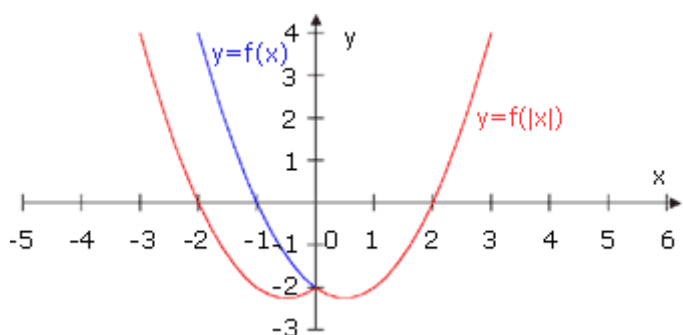
Aby otrzymać wykres funkcji  $y = |f(x)|$ , należy część wykresu  $y = f(x)$  – leżącą nad osią OX lub na niej – pozostawić bez zmian, natomiast część wykresu leżącą pod osią OX odbić symetrycznie względem osi OX.



➔ \*\*\*  $x \rightarrow y = f(|x|)$

Aby otrzymać wykres funkcji  $y = f(|x|)$ , należy:

- dla  $x \geq 0$  część wykresu  $y = f(x)$  pozostawić bez zmian
- otrzymaną część wykresu przekształcić przez symetrię względem osi OY – otrzymujemy w ten sposób wykres szukanej funkcji dla  $x < 0$ .

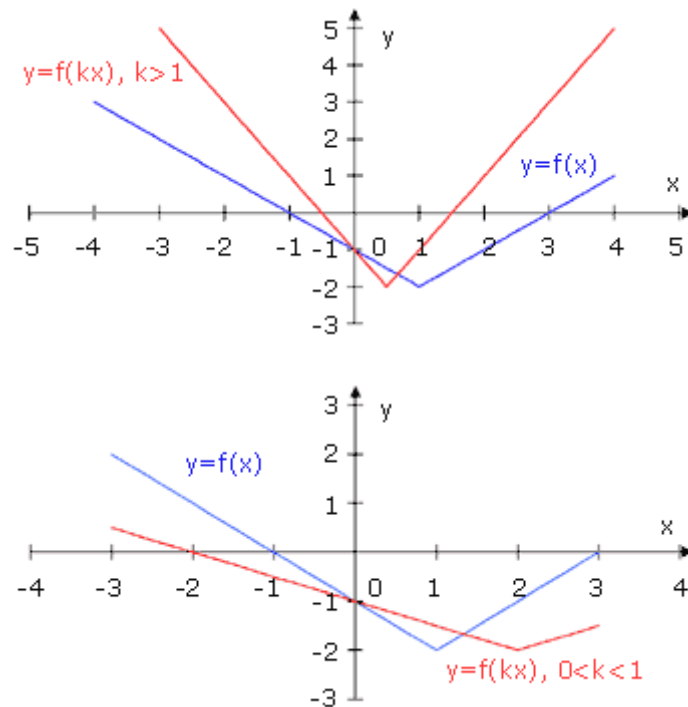


➔ \*\*\* $x \rightarrow y = f(k \cdot x)$

Wykres funkcji  $y = f(k \cdot x)$  powstaje w wyniku k-krotnego „ściągania” lub „rozciągania” wykresu funkcji  $y = f(x)$  wzdłuż osi OX.

Dla  $k > 1$  wykres funkcji  $y = f(x)$  „ściąga się” wzdłuż osi OX.

Dla  $k \in (0,1)$  wykres funkcji  $y = f(x)$  „rozciąga się” wzdłuż osi OX.



**3.6.1** Przesuwając wykres funkcji określonej wzorem  $g(x) = ax^2, x \in R, (a \neq 0)$  o  $p$  jednostek wzdłuż osi OX i  $q$  jednostek wzdłuż osi OY, otrzymujemy wykres funkcji  $f$ . Uzupełnij tabelkę według znajdujących się w niej danych.

Wzór funkcji $g$	Przesunięcie wzdłuż osi OX $p$	Przesunięcie wzdłuż osi OY $q$	Postać kanoniczna wzoru funkcji $f$	Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji $f$
$g(x) = -6x^2$	4 jednostki w lewo	5 jednostek w dół	$f(x) = -6(x + 4)^2 - 5$	$W = (-4, -5)$
			$f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 4$	
$g(x) = 10x^2$				$W = (3, 0)$
	2 jednostki w prawo		$f(x) = 5(x - 2)^2 - 7$	
$g(x) = \frac{2}{3}x^2$		1 jednostka w dół		$W = (0, -1)$

**3.6.2** Narysuj wykres funkcji  $y = x^2$ , a następnie przekształć go tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a)  $y = (x - 3)^2$

b)  $y = (x + 1)^2$

c)  $y = x^2 + 4$

d)  $y = x^2 - 3$

e)  $y = (x + 1)^2 - 1,6$

f)  $y = -x^2 - 3\frac{1}{3}$

**3.6.3** Wykres funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = -2x^2$  przesunięto wzdłuż osi  $OX$  o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi  $OY$  o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji  $g$ .

- a) Podaj zbiór wartości funkcji  $g$ .
- b) Funkcja  $g$  określona jest wzorem  $g(x) = -2x^2 + bx + c$ . Oblicz  $b$  i  $c$ .

**3.6.4** Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem podanej funkcji? Określ przedziały monotoniczności tej funkcji.

- a)  $y = x^2 - 5$
- b)  $y = -0,3x^2 + 12$
- c)  $y = 1,4(x - 48)^2$
- d)  $y = -35(x + 1,2)^2$
- e)  $y = 15(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}$

**3.6.5** Naskicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ, ile punktów wspólnych ma podana parabola i prosta.

- a)  $y = -5x^2 + 7$  i  $y = 3$
- b)  $y = 0,6x^2 - 5$  i  $y = 10$
- c)  $y = -0,1(x - 3)^2$  i  $y = -4$
- d)  $y = 15(x + 2)^2 + 4$  i  $y = -1$
- e)  $y = -3,2(x - 5)^2 - 1$  i  $y = -11$
- f)  $y = 33(x + 7)^2 + 21$  i  $y = 20$

**3.6.6** Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku  $W$ , przechodząca przez punkt  $P$ :

- a)  $W = (-1, -1), p = (3, 3)$
- b)  $W = (-8, 7), p = (1, 6)$
- c)  $W = (3, 2), p = (-5, 10)$

**3.6.7** Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$  względem:

- a) osi  $OX$
- b) osi  $OY$
- c) punktu  $(0, 0)$

**3.6.8** Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f(x) = (x + 1)(x - 3)$  względem:

- a) osi  $OX$
- b) osi  $OY$
- c) punktu  $(0, 0)$

Naskicuj te wykresy.

**3.6.9** Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f(x) = x^2 - x - 6$  względem:

- a) osi  $OX$
- b) osi  $OY$
- c) punktu  $(0, 0)$

Naskicuj te wykresy.

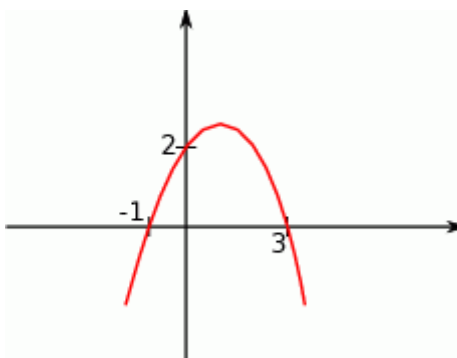
**3.6.10** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o podanych własnościach:

- a) zbiorem wartości funkcji jest przedział  $\langle 3, \infty \rangle$ , wykres przechodzi przez punkt  $P = (-1, 5)$  i ma oś symetrii o równaniu  $x = 1$ ,
- b) zbiorem wartości funkcji jest przedział  $\langle -4, \infty \rangle$ , jednym z miejsc zerowych jest  $x = 1$  i wykres ma oś symetrii o równaniu  $x = -1$ ,
- c) zbiorem wartości funkcji jest przedział  $\langle 4, \infty \rangle$ , wykres ma oś symetrii o równaniu  $x = 2$  i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 6.

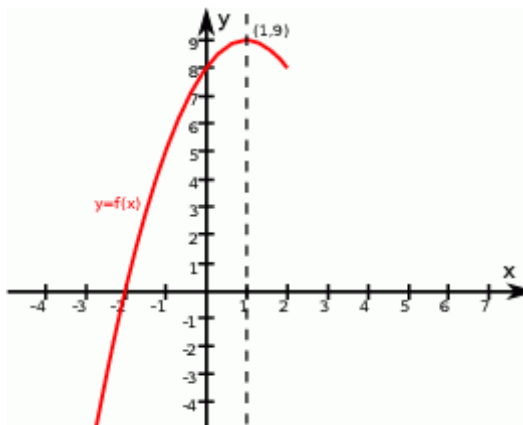
**3.6.11** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 149. Znajdź te liczby.

**3.6.12** Rozwiąż równanie  $f(x-1) = 4$ , jeżeli  $f(x) = x^2 + x - 2$

**3.6.13** Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej podaj jej wzór.



**3.6.14** Dorysuj brakującą część wykresu. Znajdź wzór funkcji kwadratowej o podanym wykresie. Zapisz go w postaci ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.



## 3.7 Zadania praktyczne

Teraz nauczę się wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

### ZADANIA

- 3.7.1** Z dwóch miast A i B, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.
- 3.6.2** Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.
- 3.6.3** Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrowkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.
- 3.6.4** Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm, a od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.
- 3.6.5** Pole trójkąta prostokątnego jest równe  $60 \text{ cm}^2$ . Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.
- 3.6.6** Do zbiornika o pojemności  $700 \text{ m}^3$  można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o  $5 \text{ m}^3$  wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzona przez obie rury jednocześnie.

### CZY ZDAM MATURE Z MATEMATYKI?

1.<sup>30</sup> Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej  $y = -3(x - 7)(x + 2)$  są

a)  $x = 7, x = -2$

b)  $x = -7, x = -2$

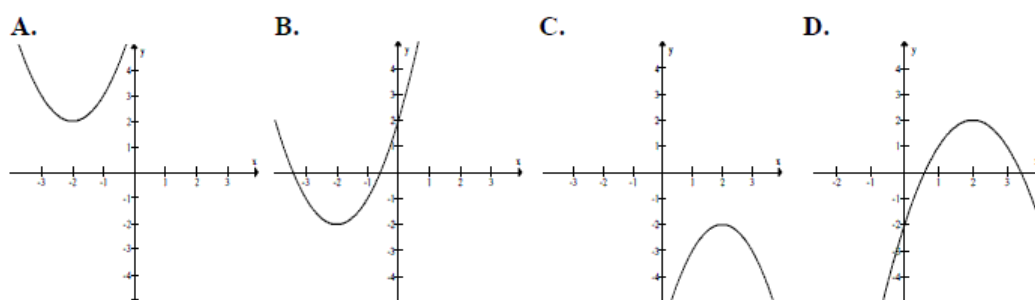
c)  $x = 7, x = 2$

d)  $x = -7, x = 2$

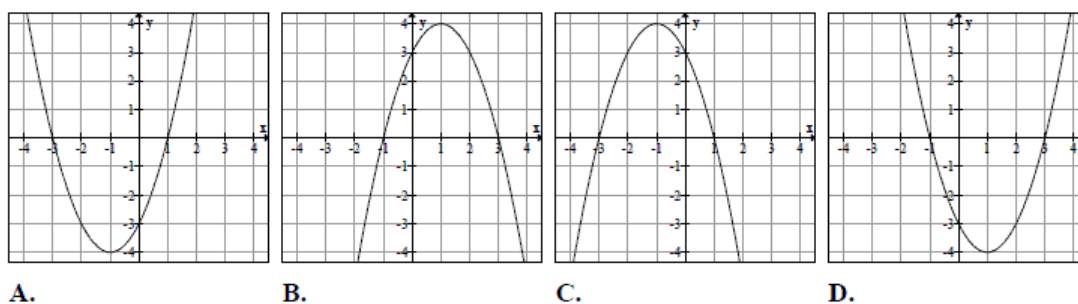




8. Funkcja  $f$ , określona wzorem  $f(x) = x^2 - 3x - 4$ , przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:
- a)  $(-\infty, \frac{3}{2})$                       b)  $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$                       c)  $(-1, 4)$                       d)  $(-4, 1)$
9. Funkcja  $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$  jest malejąca w przedziale:
- a)  $(2, \infty)$                       b)  $(-\infty, 2)$                       c)  $(-\infty, 1)$                       d)  $(1, +\infty)$
- 10.<sup>34</sup> Dana jest parabola o równaniu  $y = x^2 + 8x - 14$ . Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa:
- a)  $x = -8$                       b)  $x = -4$                       c)  $x = 4$                       d)  $x = 8$
11. Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest  $(-2, +\infty)$ .



12. Wykaż, że jeżeli  $c < 0$ , to trójmian kwadratowy  $y = x^2 + bx + c$  ma dwa różne miejsca zerowe.
- 13.<sup>35</sup> Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji  $y = x^2 + 2x - 3$ . Wskaż ten rysunek.



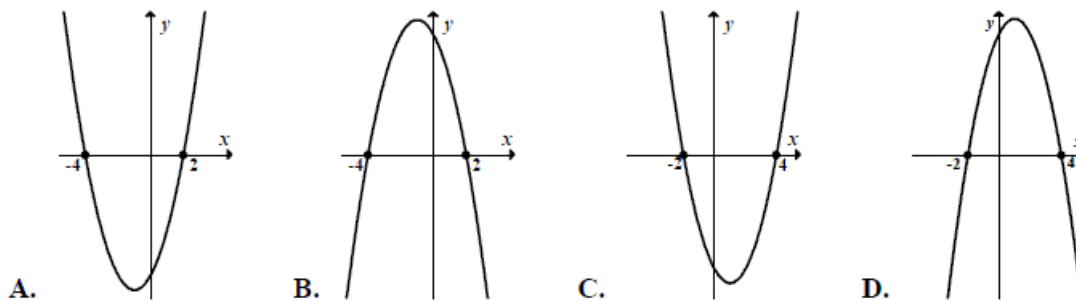
14. Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ , jest punkt o współrzędnych:
- a)  $(0, 2)$                       b)  $(0, -2)$                       c)  $(-2, 0)$                       d)  $(2, 0)$

34 Zadanie 10, 11, 12: [http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 22.02.2013.

35 Zadanie 13, 14: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf), 22.02.2013.

15.<sup>36</sup> Oblicz największą wartość funkcji  $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$  w przedziale  $\langle -2, 3 \rangle$ .

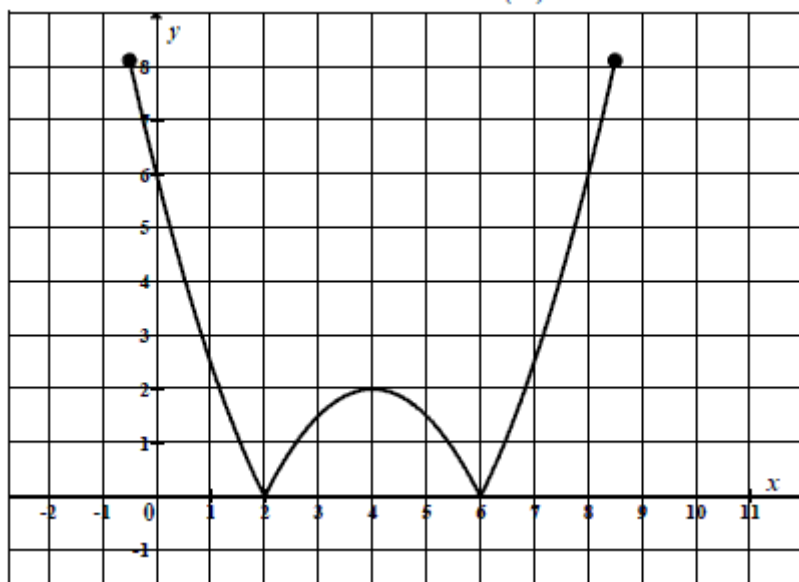
16.<sup>37</sup> Dane są funkcje liniowe  $f(x) = x - 2$  oraz  $g(x) = x + 4$  określone dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ . Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ :



17.<sup>38</sup> Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = -3x^2 + 3$  jest parabola o wierzchołku w punkcie:

- a) (3,0)                      b) (0,3)                      c) (-3,0)                      d) (0,-3)

18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji  $y = f(x)$ .



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

- a)  $f(x) = 0$                       b)  $f(x) = 1$                       c)  $f(x) = 2$                       d)  $f(x) = 3$

19.<sup>39</sup> Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji  $f(x) = x^2 - 10x + 9$  w przedziale  $\langle 3, 7 \rangle$ .

20. Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4 \text{ i } x + y = 10$$

36 Zadanie 15: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszecho2012.pdf>, 22.02.2013.  
 37 Zadanie 16: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf), 22.02.2013.  
 38 Zadanie 17, 18: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf), 22.02.2013.  
 39 Zadania 19- 35: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

21. Wyznacz wartość liczby  $m$  tak, aby funkcja  $f(x) = (m^2 - 7m)x + 5m$  miała dokładnie jedno miejsce zerowe  $x = -1$

22. Wzór w postaci funkcji kanonicznej  $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ , to:

a)  $y = \frac{3}{4} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

b)  $y = \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

c)  $y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

d)  $y = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{8}$

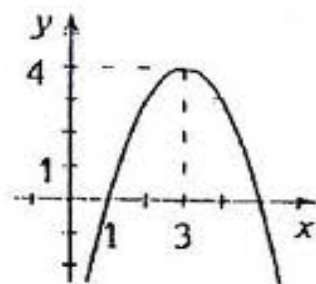
23. Funkcję kwadratową, przedstawioną na rysunku, opisuje wzór:

a)  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

b)  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c)  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d)  $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



24. Zbiorem wartości funkcji  $y = x^2 - 6x + 11$ , jest:

a)  $(-\infty, 2)$

b)  $(-\infty, 3)$

c)  $(3, \infty)$

d)  $(2, \infty)$

25. Funkcja  $f(x) = x^2 + bx + c$  osiąga wartość najmniejszą równą 4 dla  $x = 2$ , jeśli:

a)  $b = -4, c = 8$

b)  $b = 4, c = -8$

c)  $b = -4, c = -8$

d)  $b = 4, c = 8$

26. Wykresy funkcji  $f(x) = 9 - x^2$  i  $g(x) = x^2 - 9$ :

a) są symetryczne względem osi OX

b) są symetryczne względem osi OY

c) są symetryczne względem osi OX i OY

d) nie są symetryczne

27. Funkcja jest określona wzorem  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ . Ile miejsc zerowych ma funkcja  $f$ ?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

28. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej  $f$  jest przedział  $(-\infty, 2>$ . Funkcja  $f$  ma wzór:

a)  $f(x) = -(x-3)^2 + 2$

b)  $f(x) = x^2 + 2$

c)  $f(x) = (x+1)^2 - 2$

d)  $f(x) = -(x+2)^2$

28. Liczba punktów wspólnych prostej  $y = -x$  z wykresem funkcji  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ , wynosi:

a) 1

b) 2

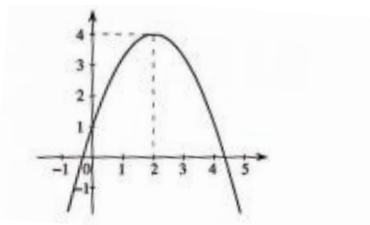
c) 0

d) 3

29. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej  $f$  są liczby  $-6$  oraz  $1$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{3 \cdot f(94)}{f(-24)}$ .

**Odpowiedź:** 62

30. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej  $f$  określ jej wzór:



31. Największa wartość funkcji kwadratowej  $f$  jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji.

a) Napisz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej.

b) Dla jakich wartości  $x$  wykres funkcji  $f$  leży powyżej wykresu funkcji określonej wzorem  $y = x + 4$

32. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $x^2 + y^2$ , jeśli  $x + y = 4$ .

33. Wykaż, że wykresy funkcji kwadratowych podanych równaniami:  $y = x^2 + 2x - 8$  oraz  $y = x^2 + 6x - 4$  mają tylko jeden punkt wspólny. Wyznacz jego współrzędne.

34. Wartością największą funkcji kwadratowej  $y = x^2 + 2x - 3$ , określonej w przedziale  $\langle -3, 2 \rangle$ , jest liczba:

a)  $-4$

b)  $5$

c)  $0$

d)  $6$

35. Funkcja kwadratowa  $y = x^2 - 9$  przyjmuje wartości nieujemne dla:

a)  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

b)  $x \in (-3, 3)$

c)  $x \in \langle -3, 3 \rangle$

d)  $x \in (-\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, \infty)$

## 4 Planimetria

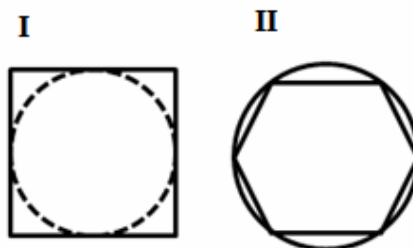
### To już potrafię:

- korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
- rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznawać styczną do okręgu;
- korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
- rozpoznawać kąty środkowe;
- obliczać długość okręgu i łuku okręgu;
- obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
- stosować twierdzenie Pitagorasa;
- korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i w trapezach;
- obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów;
- zamieniać jednostki pola;
- obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;
- obliczać stosunek pól wielokątów podobnych;
- rozpoznawać wielokąty przystające i podobne;
- stosować cechy przystawiania trójkątów;
- korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych;
- rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu;
- narysować pary figur symetrycznych;
- rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii;
- wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury;
- rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
- konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ , okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
- rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Informacja do zadań 1 i 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.



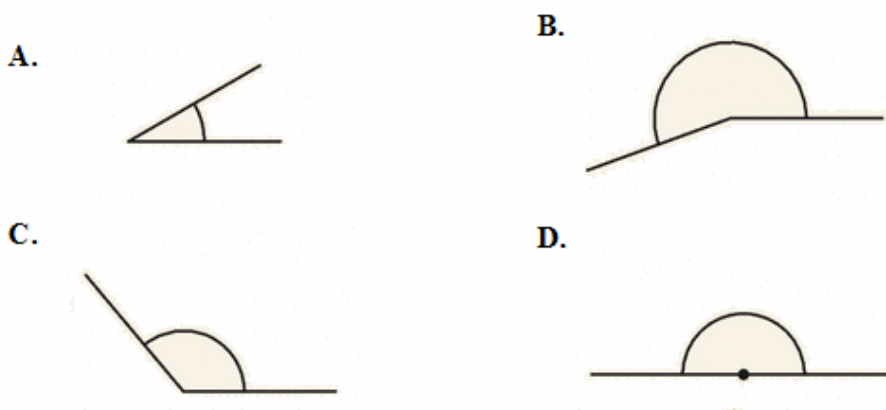
**Zad. 1** Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości  $4\sqrt{2}$  m?

- a) 4 m                      b) 2 m                      c) 5,6 m                      d) 2,8 m

**Zad. 2** Jaki jest obwód sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

- a) 16 m                      b) 24 m                      c)  $12\sqrt{3}$  m                      d)  $6\sqrt{3}$  m

**Zad. 3** Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły:

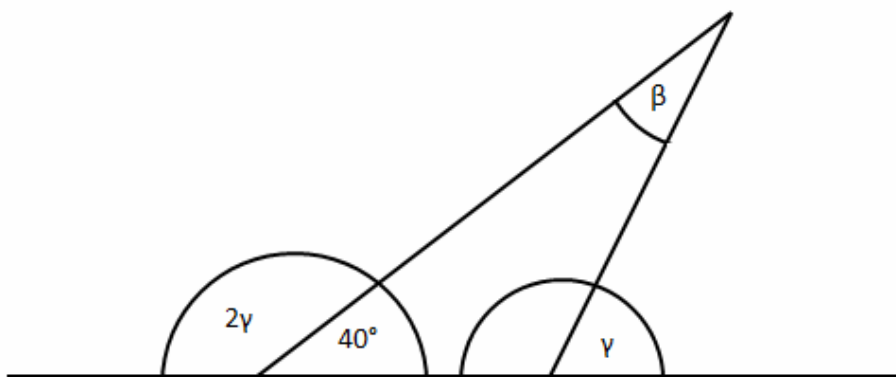


**Zad. 4** Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

- a) BARDZO ATRAKCYJNE CENY                      b) OBNIŻKA CEN  
c) CENY PROMOCYJNE                      d) PRZECENA TOWARÓW

**Zad. 5** Jaka miarę ma kąt  $\beta$

- a)  $50^\circ$ :
- b)  $35^\circ$
- c)  $30^\circ$
- d)  $40^\circ$



**Zad. 6** Miara kąta wpisanego opartego na  $\frac{1}{3}$  okręgu wynosi:

- a)  $90^\circ$
- b)  $60^\circ$
- c)  $120^\circ$
- d)  $80^\circ$

**Zad. 7** Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

- a)  $6\pi$
- b)  $18\pi$
- c)  $9\pi$
- d)  $12\pi$

**Zad. 8** W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

- a) przystające
- b) równoboczne
- c) podobne
- d) rozwartokątne

**Zad. 9** Pole kwadratu o przekątnej długości  $5\sqrt{6}$ , to:

- a) 25
- b) 50
- c) 75
- d) 15

**Zad. 10.**Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm, wynosi:

- a)  $24 \text{ cm}^2$
- b) 24 cm
- c) 10 cm
- d)  $12 \text{ cm}^2$

## ZADANIA OTWARTE

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi .....

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi .....

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na .....



Proste prostopadłe oznaczamy symbolem .....

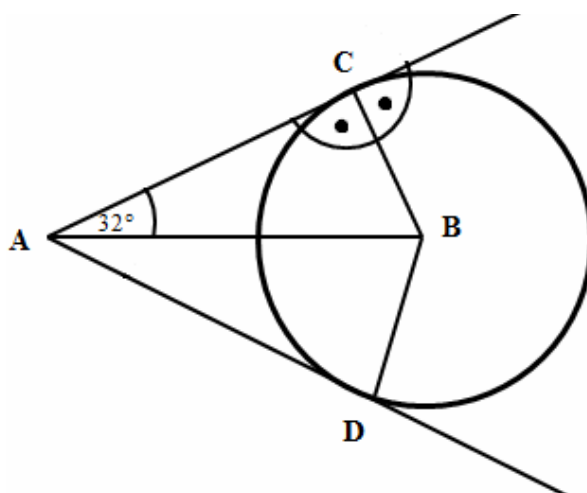
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach .....

Przez jeden punkt można poprowadzić ..... prostych.

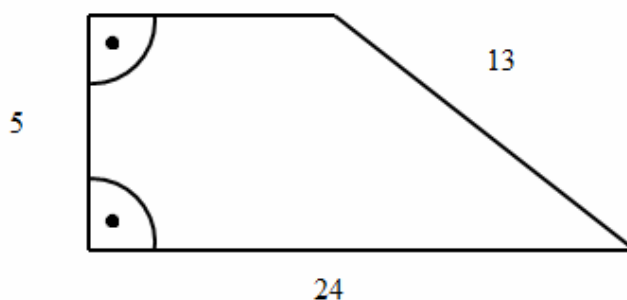
Miejsce przecięcia się dwóch prostych, to.....

Kąt o mierze  $180^\circ$  nazywamy kątem .....

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta  $ABCD$ .



3. Oblicz  $x$  i  $y$  wiedząc, że punkty  $A = (3x - 1; 2y)$  i  $B = (x + 2; 4y - 1)$  są symetryczne względem osi  $OX$ .
4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



5. Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

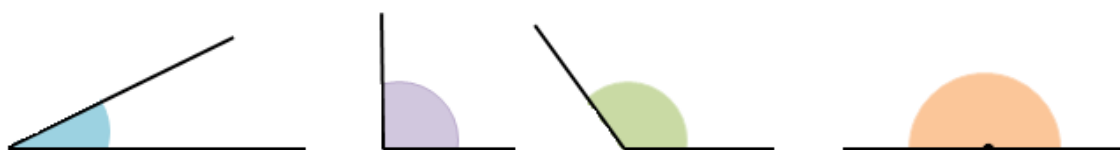
- ➡ „Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków”.
- ➡ **Planimetria** jest działem geometrii (słowo „geometria” pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

## 4.1 Kąt środkowy i wpisany

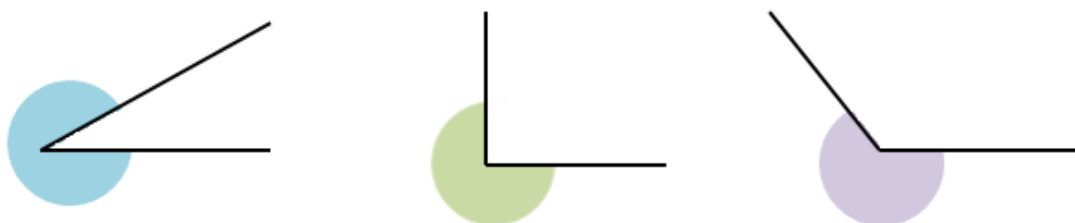
Teraz nauczę się stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na: **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe  $180^\circ$ ) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od  $180^\circ$ , ale mniejsze od  $360^\circ$ ).

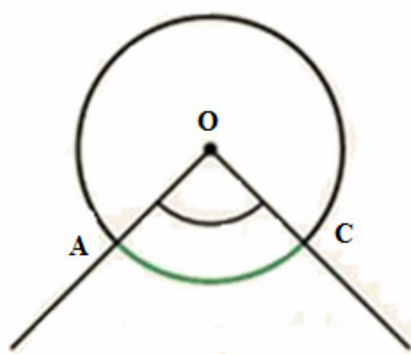
➔ **Kąty wypukłe:**



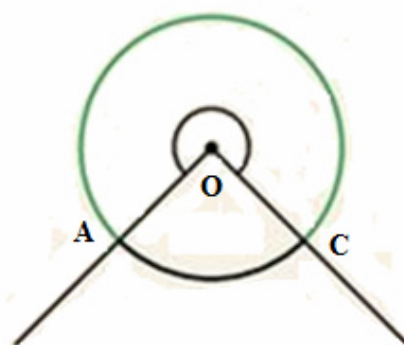
➔ **Kąty wklęsłe:**



Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.

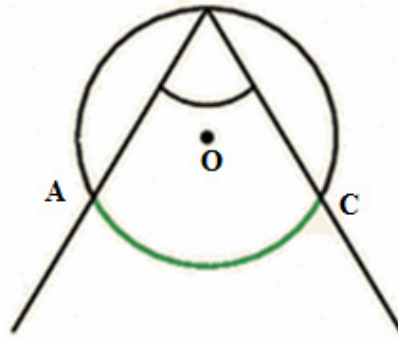


Kąt środkowy wypukły



Kąt środkowy wklęsły

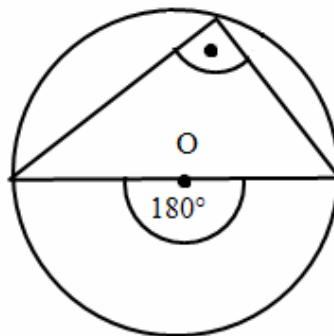
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.



Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.

### ➔ Własności kątów środkowych i wpisanych

- Jeżeli kąt wpisany i środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.
- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.



- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

### ➔ Kąt dopisany do okręgu

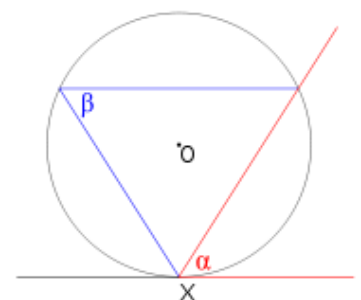
**Kąt dopisany do okręgu** w punkcie  $X$  należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie  $X$  oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie  $X$ .

Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

$\alpha$  – kąt dopisany

$\beta$  – kąt wpisany

$\alpha = \beta$



### Przykład 1

Na trójkącie  $ABC$  opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $A$ , jak na rysunku obok. Kąt dopisany  $\alpha = 50^\circ$ . Oblicz miarę kąta  $ACB$ .

Dorysujmy promienie  $OA$  i  $OB$ . Trójkąt  $AOB$  jest równoramienny, więc:

$$\sphericalangle OAB = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\sphericalangle AOB = 180^\circ - 2\sphericalangle OAB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

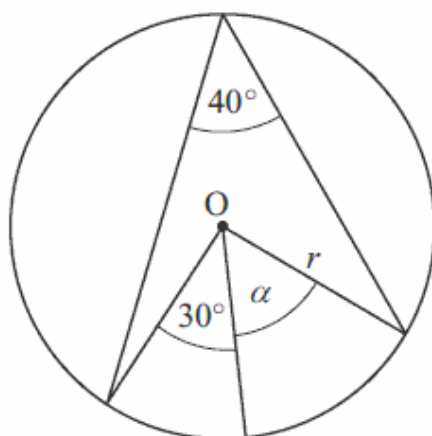
W takim razie z twierdzenie o kątach, wpisanym i środkowym, mamy:

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$$

$$\sphericalangle CAB = 180^\circ - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$$

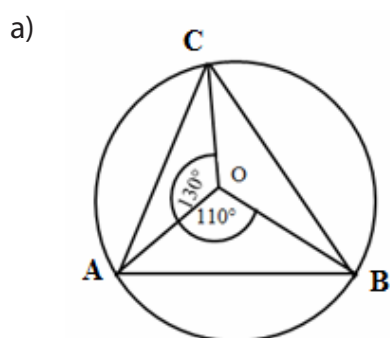
## ZADANIA

**4.1.1** Oblicz miarę kąta  $\alpha$ .

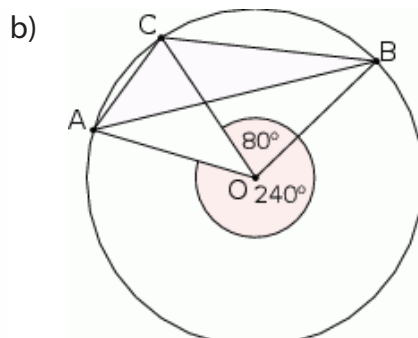


**4.1.2** Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta środkowego **ABS**.

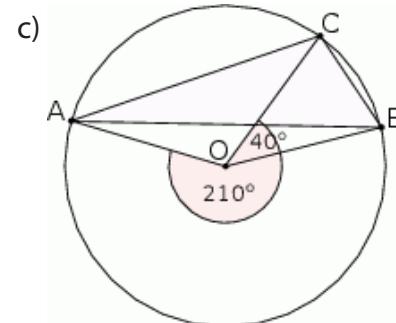
**4.1.3** Wyznacz miary kątów trójkąta **ABC**.



a)  $60^\circ, 65^\circ, 55^\circ$



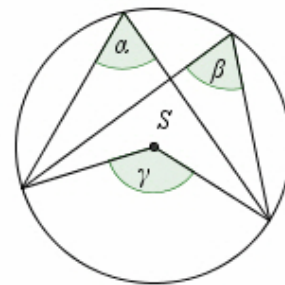
b)  $40^\circ, 20^\circ, 120^\circ$



c)  $20^\circ, 55^\circ, 105^\circ$

**4.1.4** Okrąg podzielono na trzy części w stosunku **2:3:3**. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

**4.1.5** Dany jest okrąg o środku w punkcie **S**. Miara kąta  $\alpha$  jest równa  $70^\circ$ . Ile wynosi suma miar kątów  $\alpha + \beta$ ?



**4.1.6** Wierzchołki trójkąta **ABC** leżą na okręgu, a środek **O** okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąt **ABO** ma miarę  $20^\circ$ , to jaką miarę ma kąt **ACB**?

**4.1.7** Ostrokątny trójkąt równoramienny **ABC** o podstawie **AB** jest wpisany w okrąg o środku **S**, przy czym kąt **SAB** ma miarę  $40^\circ$ . Oblicz miarę kąta **CAB**.

## 4.2 Wzajemne położenie prostej i okręgu

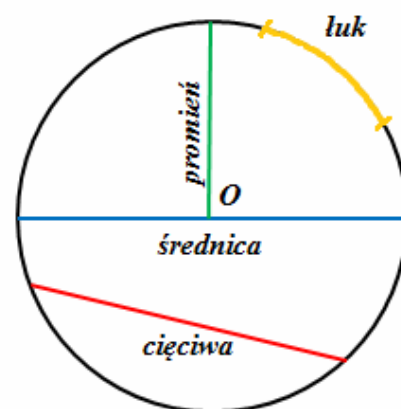
Teraz nauczę się korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych

➔ **Okręgiem** o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości  $r$  od środka  $O$ . Okrąg oznaczamy  $o(O, r)$ .

➔ **Promieniem** okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą  $r$ . Okrąg o promieniu  $r$  ma długość  $2\pi r$ .

➔ **Cięciwą** okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

➔ **Średnicą** okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.



**Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i okręgu:**

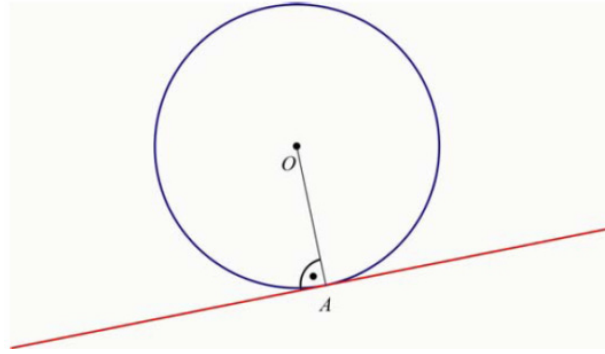
1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.

➔ **Definicja**

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

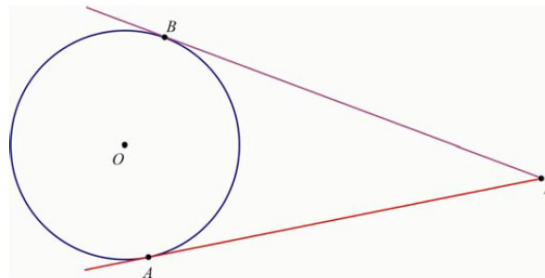
➔ **Twierdzenie 1.**

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

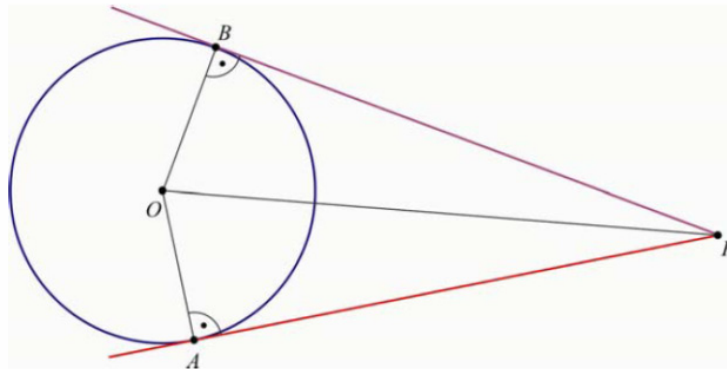


➔ **Twierdzenie 2.**

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.



**Dowód**

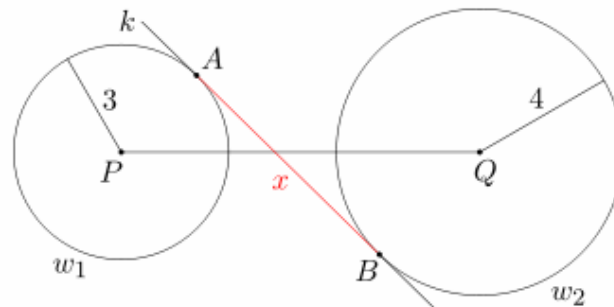


Trójkąty  $POA$  i  $POB$  są prostokątne. Półprosta  $PO$  jest dwusieczną kąta  $\sphericalangle APB$  (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem  $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$ . Oznacza to (suma kątów w trójkącie),

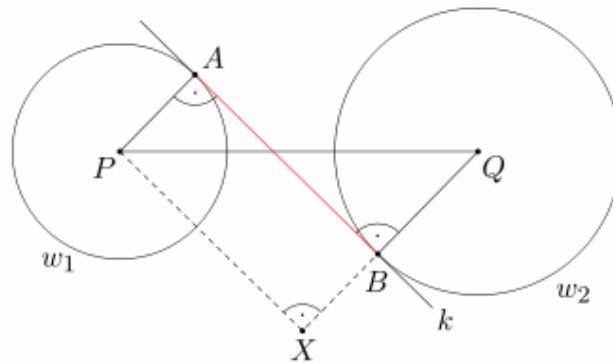
że również  $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$ . Ponadto  $AO = BO = r$ . Z cechy *kbk* wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że  $PA = PB$ .

## Przykład

Dany jest odcinek  $|PQ| = 10$  oraz okręgi: jeden o środku  $P$  i promieniu 3, a drugi o środku  $Q$  i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej  $k$ , która jest do nich styczna odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ . Oblicz długość odcinka  $AB$ .



Zaznaczamy na prostej  $BQ$ , lecz poza odcinkiem  $BQ$ , taki punkt  $X$ , aby długość odcinka  $BX$  była równa 3. Następnie uzasadnimy, że czworokąt  $ABXP$  jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $PQX$



Niech  $X$  będzie takim punktem leżącym na prostej  $BQ$ , poza odcinkiem  $BQ$ , że  $|BX| = 3$ . Proste  $AP$  i  $BX$  są prostopadłe do wspólnej prostej  $AB$ , więc  $AP \parallel BX$  są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt  $APXB$  jest równoległobokiem. A ponieważ w równoległoboku tym kąt  $\sphericalangle PAB = 90^\circ$ , więc równoległobok  $ABXP$  jest prostokątem.

Zatem trójkąt  $PXQ$  jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |AB|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4 + 3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

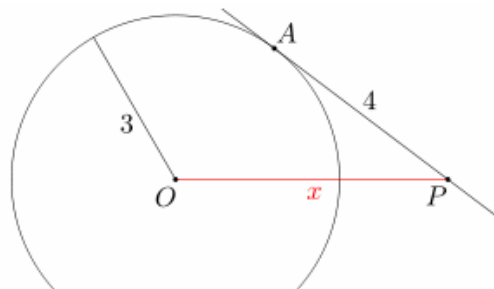
$$|AB| = \sqrt{51}$$

## ZADANIA

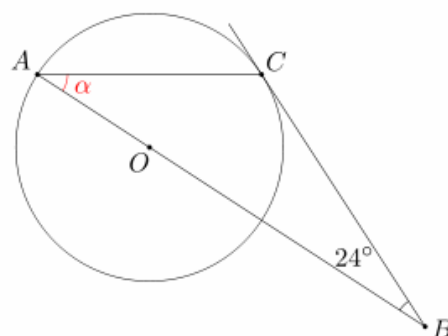
**4.2.1** Obwód okręgu jest równy  $8\pi$  cm. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

- a) nie mniejsza niż 4 cm                      b) nie większa niż 3 cm?

**4.2.2** Dany jest okrąg o środku  $O$  i promieniu 3. Przez punkt  $p$  leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie  $A$ . Wiedząc, że długość odcinka  $AP$  wynosi 4, oblicz długość odcinka  $OP$ .



**4.2.3** Dany jest okrąg o środku  $O$  oraz punkty  $A, C$  leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie  $C$  przecina prostą  $AO$  w punkcie  $B$ . Wiedząc, że miara kąta  $ABC$  wynosi  $24^\circ$ , oblicz miarę kąta  $CAB$ .



## 4.3 Wzajemne położenie dwóch okręgów

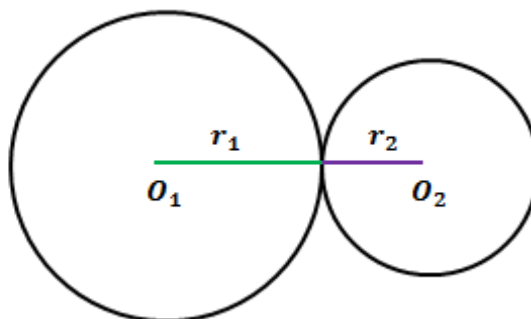
Teraz nauczę się korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)

Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

### ➔ Okręgi styczne zewnętrznie

**Okręgi styczne zewnętrznie** mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.

$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

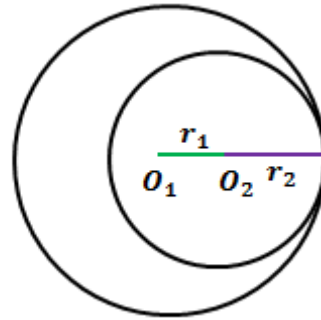


### ➔ Okręgi styczne wewnętrznie

**Okręgi styczne wewnętrznie** mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

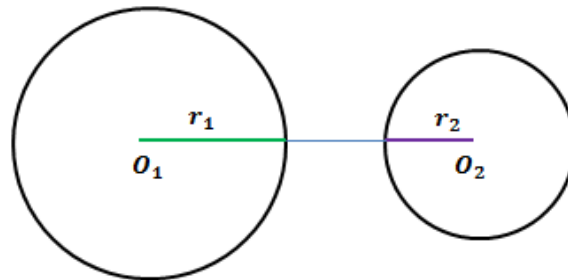


### Okręgi rozłączne

**Okręgi rozłączne** nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:

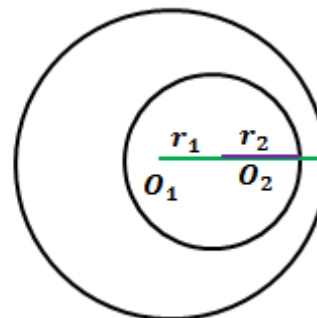
- Większa od sumy ich promieni

$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$



- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni

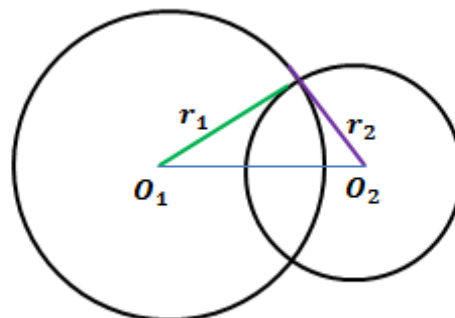
$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$



### ➔ Okręgi przecinające się

**Okręgi przecinające się** mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.

$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

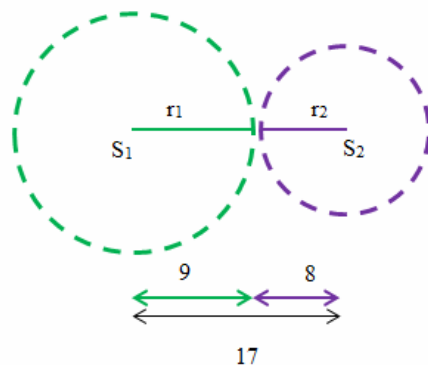


## Przykład

Dane są dwa okręgi o środkach  $S_1$  i  $S_2$  i promieniach odpowiednio równych  $r_1$  i  $r_2$ . Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli  $|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8$ .

Robimy rysunek poglądowy. Jeden okrąg ma promień  $r_1 = 9$ , a drugi  $r_2 = 8$ .

Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek  $|S_1S_2| = r_1 + r_2$ , więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.



## ZADANIA

**4.3.1** Określ wzajemne położenie okręgów  $\text{o}(\mathbf{O}_1, r_1)$  i  $\text{o}(\mathbf{O}_2, r_2)$ , jeśli  $|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2| = 12 \text{ cm}$  oraz:

- a)  $r_1 = 3 \text{ cm}, r_2 = 8 \text{ cm}$
- b)  $r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 7 \text{ cm}$
- c)  $r_1 = 9 \text{ cm}, r_2 = 7 \text{ cm}$
- d)  $r_1 = 22 \text{ cm}, r_2 = 10 \text{ cm}$

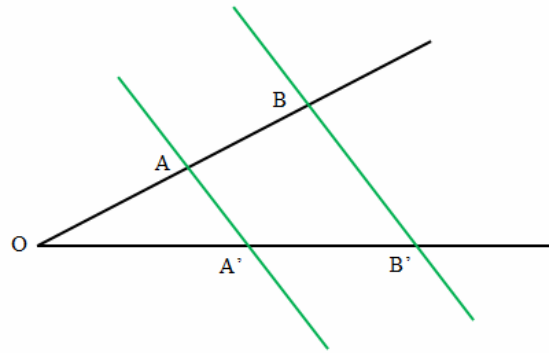
**4.3.2** Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach **10 cm** i **6 cm**, gdy:

- a) okręgi te są styczne zewnętrznie
- b) okręgi są styczne wewnętrznie
- c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego
- d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

## 4.4 Twierdzenie Talesa

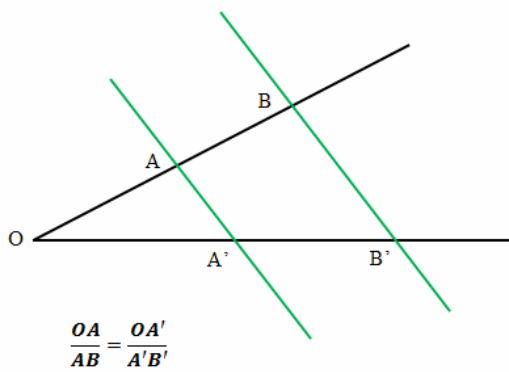
**Teraz naucz się** stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.

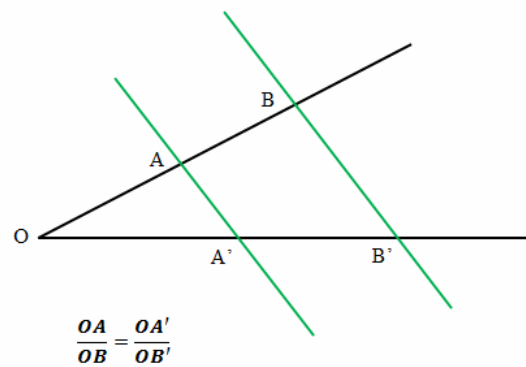


Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

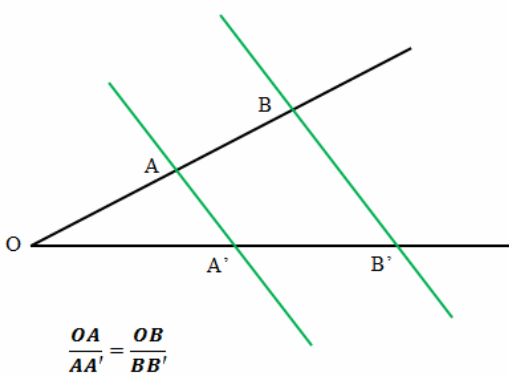
Przypadek 1



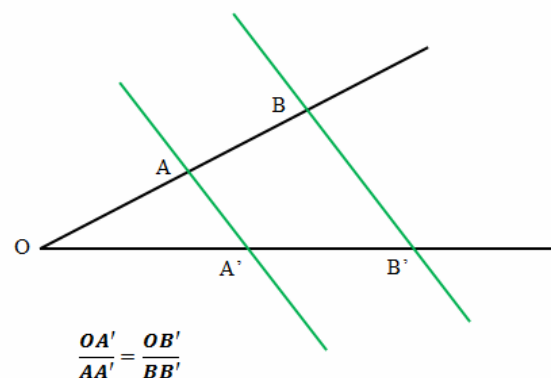
Przypadek 2



Przypadek 3

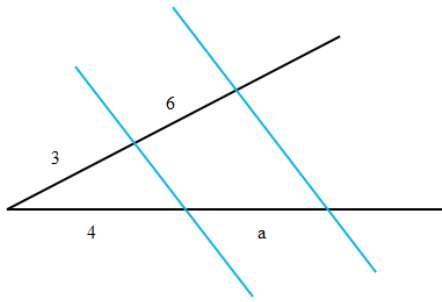


lub



### Przykład1

Oblicz długość odcinka  $a$ .



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

$$\text{Układamy proporcję: } \frac{3}{6} = \frac{4}{a}$$

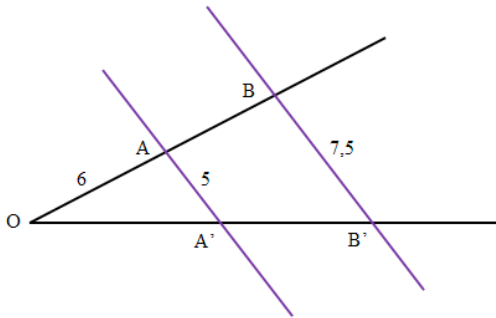
$$3a = 6 \cdot 4$$

$$3a = 24/:3$$

$$a = 8$$

## Przykład 2

Oblicz długość odcinka  $AB$ .



Obliczając długość odcinka  $AB$ , skorzystamy z przypadku 3.

$$\text{Układamy proporcję: } \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{6 + |AB|}{7,5}$$

$$5(6 + |AB|) = 6 \cdot 7,5$$

$$30 + 5|AB| = 45/-30$$

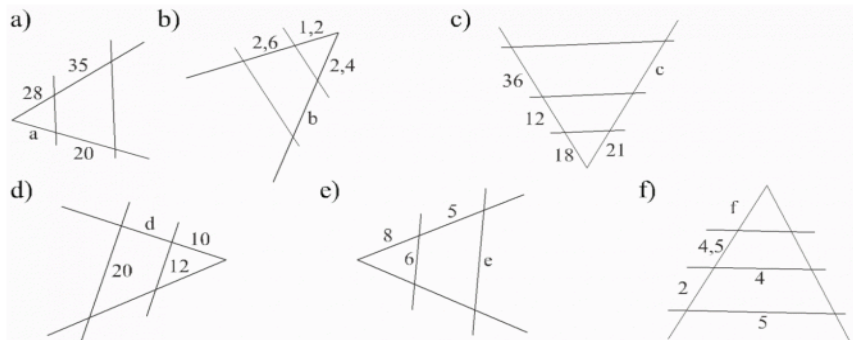
$$5|AB| = 15/:5$$

$$|AB| = 3$$

## ZADANIA

**4.4.1** Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:

Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



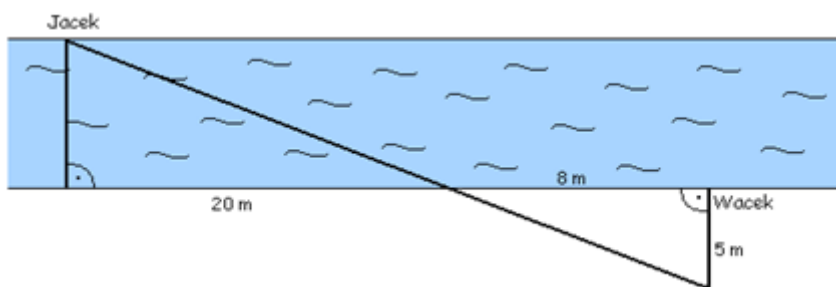
**4.4.2** W trapezie  $ABCD$ , gdzie  $AB \parallel CD$ , przedłużono boki  $AD$  i  $BC$  do przecięcia w punkcie  $S$ . Oblicz długość odcinka  $DS$  wiedząc, że jest on krótszy od odcinka  $CS$  o  $3 \text{ cm}$  i  $|AD| = 16 \text{ cm}$ , a  $|BC| = 24 \text{ cm}$ .

**4.4.3** W trapezie krótsza podstawa wynosi  $6$ , zaś ramiona mają długość  $4$  i  $5$ . Ramiona trapezu przedłużono tak, że powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości  $4$  zostało przedłużone o odcinek długości  $3$ .

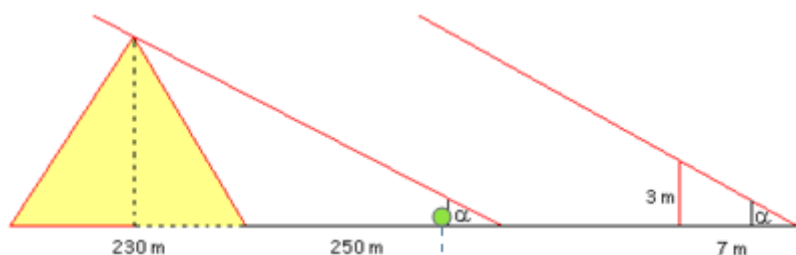
**4.4.4** W trójkąt równoramienny o podstawie **8 cm** wpisano kwadrat o boku równym **6 cm**, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

**4.4.5** Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

**4.4.6** Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



**4.4.7** Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



**4.4.8** Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

**4.4.9** W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości:  $AC = 2,4$  i  $CB = 7,2$  m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec dźwigni A podniesie się na wysokość 4 metrów.

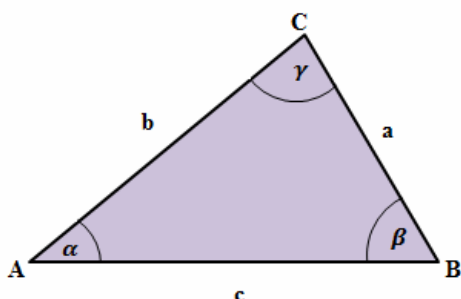
**4.4.10** Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm, a średnicę 2 cm?

## 4.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne

Teraz nauczę się:

- sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt;
- sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny;
- obliczać miary kątów i długości boków trójkąta;
- obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona;
- korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

➔ **Trójkąt** – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów  
w trójkącie jest  
równa  $180^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

➔ **Podział trójkątów**

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

➤ **Podział trójkątów ze względu na kąty:**

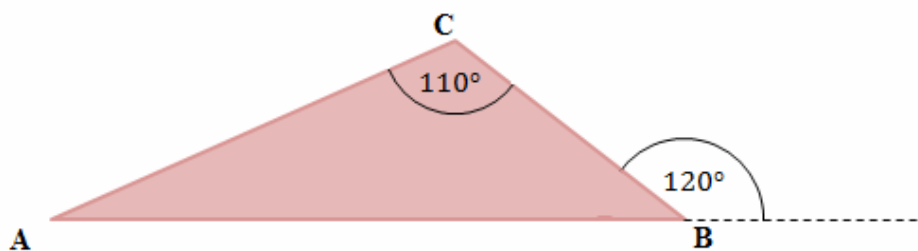
1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.
2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną**.
3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

➤ **Podział trójkątów ze względu na boki:**

1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę  $60^\circ$ .
2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.
3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

## Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę  $110^\circ$ , a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę  $120^\circ$ . Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



$$\sphericalangle B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

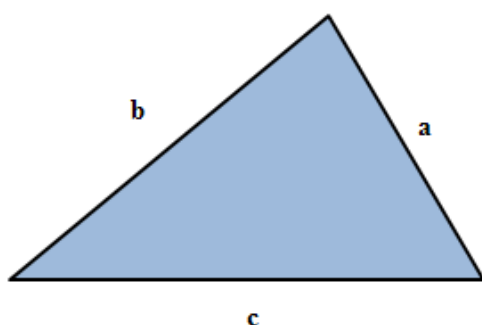
$$110^\circ + 60^\circ + \sphericalangle A = 180^\circ$$

$$170^\circ + \sphericalangle A = 180^\circ$$

$$\sphericalangle A = 180^\circ - 170^\circ$$

$$\sphericalangle A = 10^\circ$$

➔ Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

## Przykład 2

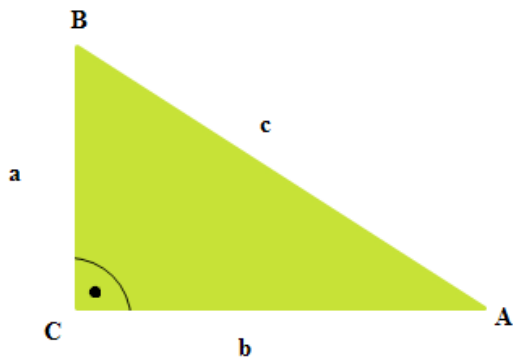
Sprawdź, czy odcinki o długościach 5, 6,  $3\sqrt{2}$  mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości. Należy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4,25 \approx 9,25 > 6$$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

➔ Twierdzenie Pitagorasa

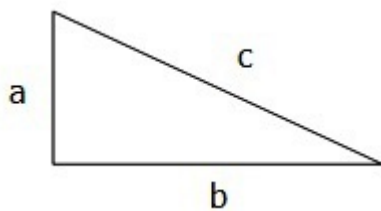


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

### Przykład 3

Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: 3 : 4, a przeciwprostokątna ma długość 15 cm.



$$a = ?$$

$$b = ?$$

$$c = 10 \text{ cm}$$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi 3 : 4, więc  $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ .

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to  $a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15 \text{ cm})^2$$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225 \text{ cm}^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225 \text{ cm}^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$b = \sqrt{144 \text{ cm}^2} = 12 \text{ cm}$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \Rightarrow a = \frac{3}{4} \cdot 12 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

**Odpowiedź:** Przyprostokątne mają długości 9 cm i 12 cm.

### ➡ Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.



#### Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a)  $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$                       b)  $2, \sqrt{10}, 4$

a)  $(\sqrt{24})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{21})^2$

$$24 = 3 + 21$$

$$24 = 24$$

$$L = P$$

Trójkąt jest prostokątny

b)  $4^2 = (\sqrt{10})^2 + 2^2$                        $4^2 = (\sqrt{10})^2 + 2^2$

$$16 = 10 + 4$$

$$16 \neq 14$$

$$L \neq P$$

Trójkąt nie jest prostokątny

#### Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską**.

Przykłady takich trójek:

$$3, 4, 5;$$

$$5, 12, 13;$$

$$40, 198, 202.$$

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne  $p$ ,  $q$  takie, że  $p > q > 0$ , i obliczamy  $a$ ,  $b$  i  $c$  według wzorów:

$$a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2$$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2$$

## Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

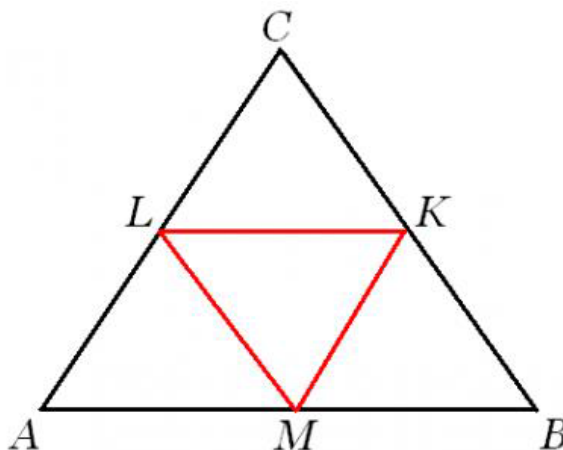
### ➔ Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$$AB \parallel LK \quad |LK| = \frac{1}{2} |AB|$$

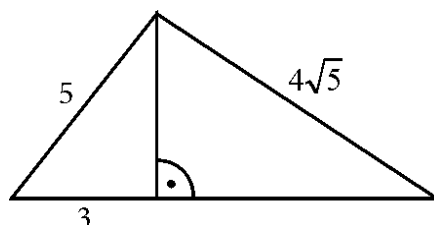
$$AC \parallel KM \quad |KM| = \frac{1}{2} |AC|$$

$$BC \parallel LM \quad |LM| = \frac{1}{2} |BC|$$



## ZADANIA

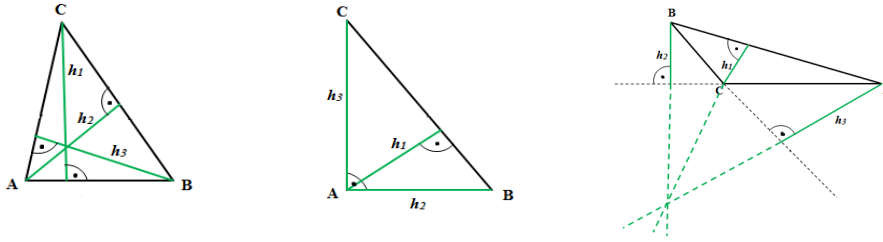
- 4.5.1** Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.
- 4.5.2** Jeden kąt trójkąta ma miarę  $26^\circ$ , a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi  $12^\circ$ . Wyznacz kąty tego trójkąta.
- 4.5.3** Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3:5:4.
- 4.5.4** W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.
- 4.5.5** W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.
- 4.5.6** Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:



- 4.5.7** Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach długości:  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 4$ ,  $|AC| = 5$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AC$ , punkt  $N$  – środkiem boku  $BC$ . Obliczyć obwód trapezu  $ABNM$ .

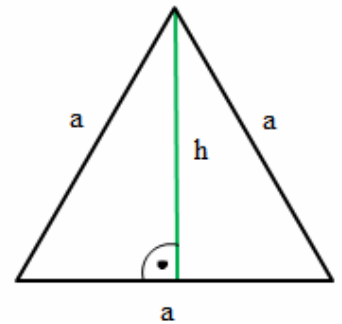
## ➔ Wysokości i środki w trójkącie

**Wysokość trójkąta** to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.



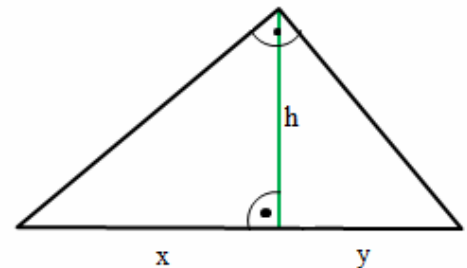
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



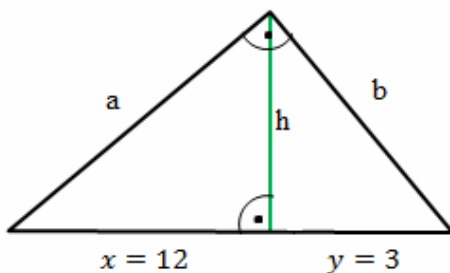
Wysokość trójkąta o boku  $a$  jest równa  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

W **trójkącie prostokątnym** wysokość  $h$ , poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki  $x, y$ , dla których  $h = \sqrt{x \cdot y}$



### Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 3 cm i 12 cm. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.



$a, b$  – szukane długości przyprostokątnych

$h$  – wysokość

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej  $a$

$$a^2 = x^2 + h^2$$

$$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

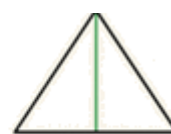
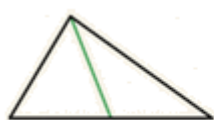
Podobnie liczymy długość przyprostokątnej  $b$

$$b^2 = y^2 + h^2$$

$$b^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

Wysokość trójkąta ma długość 6 cm, a przyprostokątne  $6\sqrt{5}$  cm i  $3\sqrt{5}$  cm.

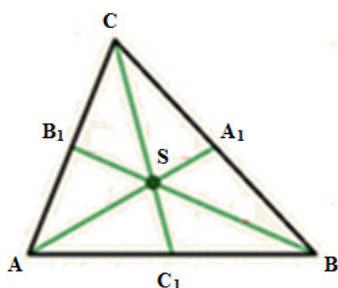
➔ **Środkową trójkąta** nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

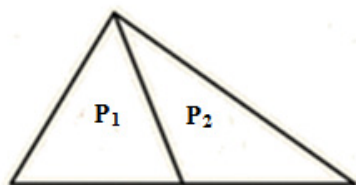


Środek ciężkości  $S$  dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

➔ Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie  $p = \frac{a+b+c}{2}$  jest połową obwodu trójkąta.

### Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości 3, 5, 6.

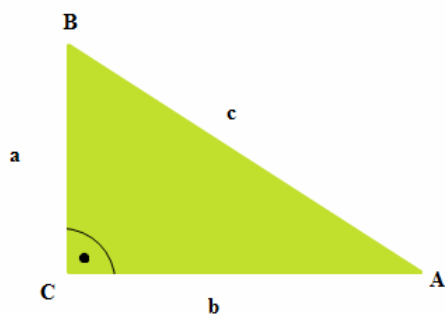
Liczymy najpierw ile wynosi połowa obwodu trójkąta  $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

**Odpowiedź:** Pole trójkąta o bokach 3, 5, 6 wynosi  $2\sqrt{14}$ .

### ➔ Twierdzenie

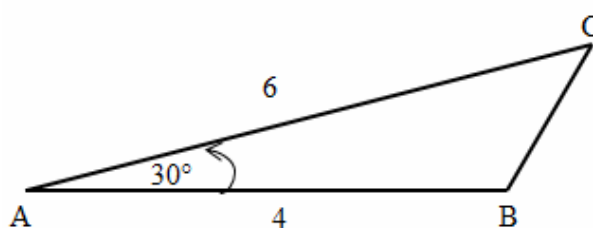
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin|\sphericalangle BCA|$$

### Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

**Odpowiedź:** Pole trójkąta wynosi  $6j^2$ .

## ZADANIA

- 4.5.8** W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.
- 4.5.9** W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
- 4.5.10** Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że  $|AB| = 4$  i  $|BC| = 2\sqrt{3}$ .
- 4.5.11** Oblicz pole trójkąta ABC jeśli  $|AC| = 4$ ,  $|AB| = 7$ ,  $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ .
- 4.5.12** Oblicz pole trójkąta o bokach  $12$  i  $9\sqrt{2}$  oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze  $30^\circ$ .
- 4.5.13** W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono prostą prostopadłą do boku AB, przecinającą bok AC w punkcie E i bok AB w punkcie F. Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu C. Wiedząc, że  $|EC| = 3|FD| = 1$ , oblicz sinus kąta CAB.

## 4.6 Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu\*

Teraz nauczę się stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu

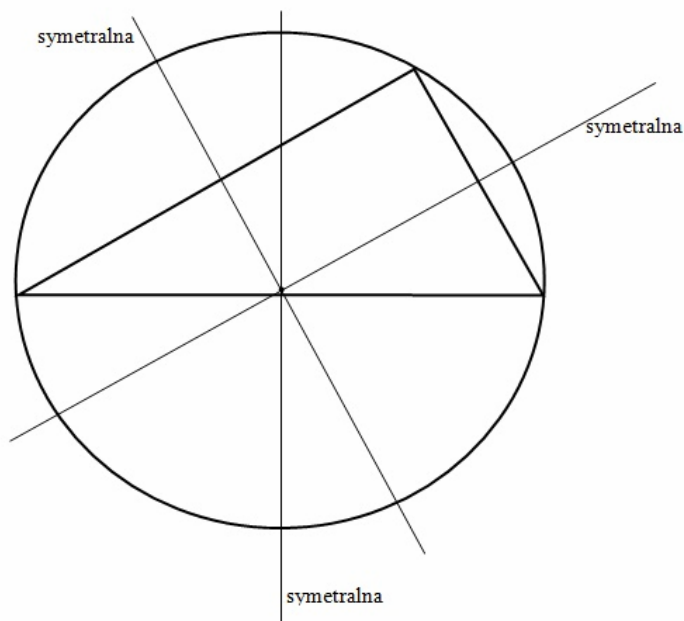
### ➔ Okrąg opisany na trójkącie

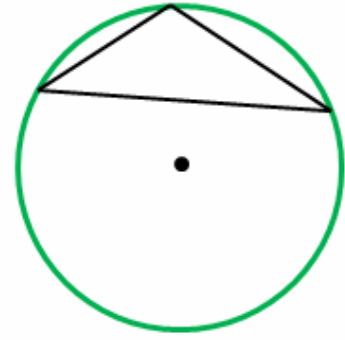
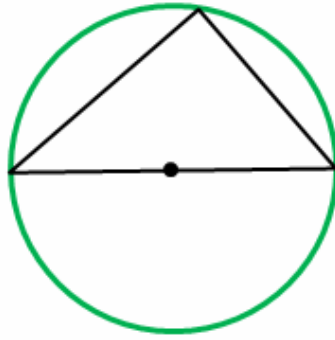
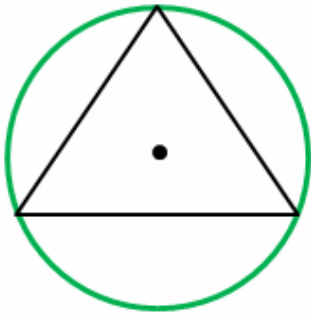
Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

**Symetralna** to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

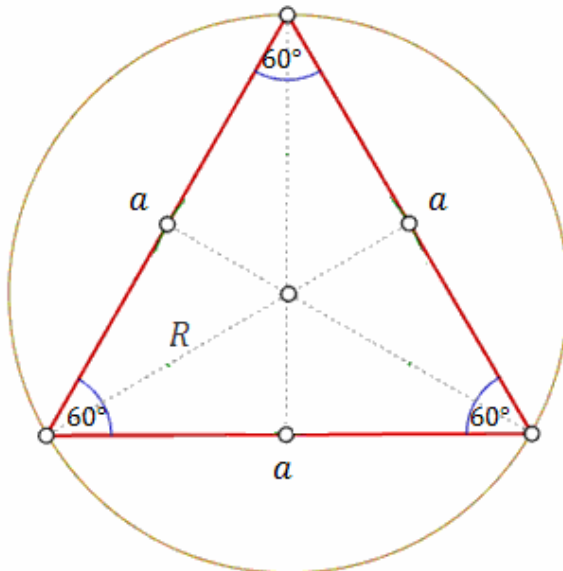




- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

## ➔ OKRĘGI OPISANE NA WYBRANYCH TRÓJKĄTACH

### ➔ Trójkąt równoboczny



$R$  – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

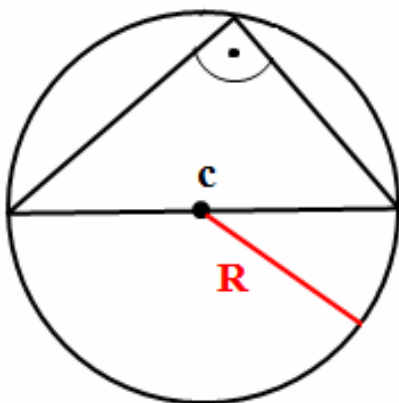
$h$  – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

### ➔ Trójkąt prostokątny



$c$  – przeciwprostokątna

$h$  – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$R = \frac{1}{2}c$$

### Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku  $a = 12$  cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru  $R = \frac{2}{3}h$ .

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , skoro  $a = 12$  cm, to:

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{więc } R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

**Odpowiedź:** Promień okręgu ma długość  $R = 4\sqrt{3}$ .

### Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi  $2R$ .

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$$

$$(2R)^2 = 16 + 100$$

$$4R^2 = 116 / :4$$

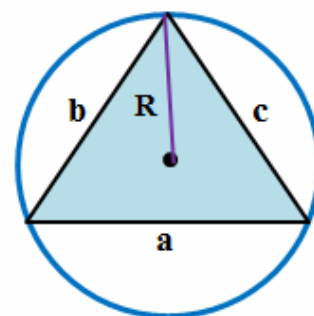
$$R^2 = 29 \Rightarrow R = \sqrt{29}$$

**Odpowiedź:** Promień okręgu ma długość  $R = \sqrt{29}$ .

### ➡ Pole trójkąta wpisanego w okrąg

Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.

➡ Pole trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  wpisanego w okrąg o promieniu  $R$  wynosi  $P = \frac{abc}{4R}$

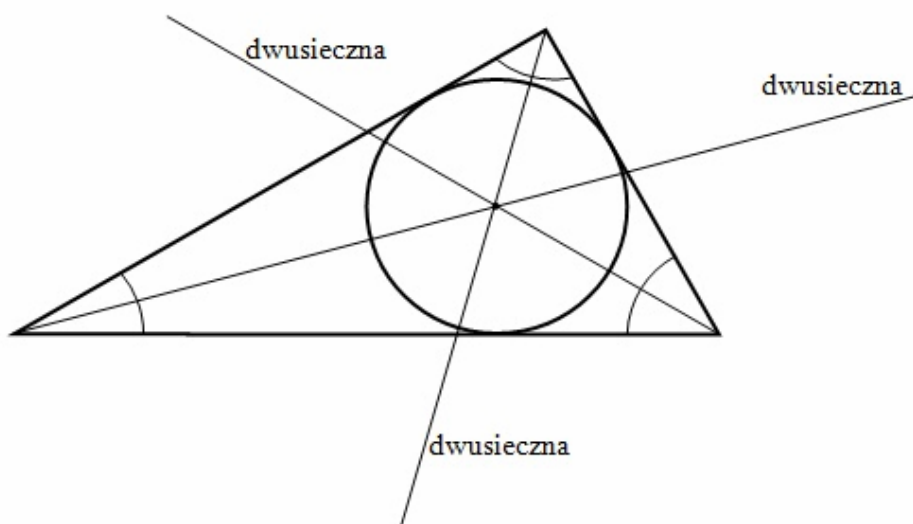




## ZADANIA

- 4.6.1** Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.
- 4.6.2** Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi  $25\pi \text{ cm}^2$ . Oblicz pole tego trójkąta.
- 4.6.3** Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:
- równobocznym, o boku o długości 8 cm.
  - prostokątnym, o przyprostokątnych 12 cm i 18 cm.
- 4.6.4** Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy  $13\frac{13}{24}$ . Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

### ➔ Okrąg wpisany w trójkąt



Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta.

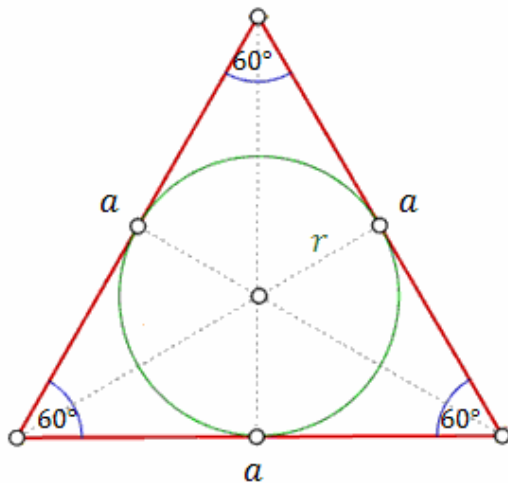
**Dwusieczna** kąta to półprosta, która ma początek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa kąty o równych miarach.

Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

## ➔ Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

### Trójkąt równoboczny



$r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

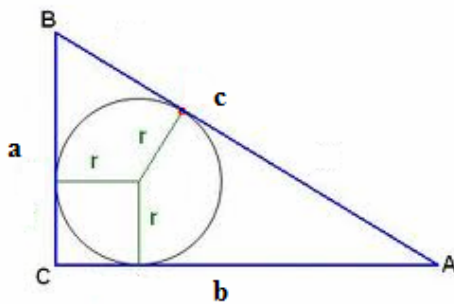
$h$  – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

### Trójkąt prostokątny



$a, b$  – przyprostokątne

$c$  – przeciwprostokątna

$r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

### Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku  $a = 8$  cm.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru  $r = \frac{1}{3}h$ .

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , skoro  $a = 8$  cm, to:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{więc } r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku  $a = 8$  cm wynosi

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

### Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 3 cm i przeciwprostokątnej 5 cm.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$5^2 = 3^2 + a^2$$

$$25 = 9 + a^2$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru  $r = \frac{a+b+c}{2}$ , więc

$$r = \frac{4 + 3 - 5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość **1 cm**.

### ➔ Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  opisanego na okręgu o promieniu  $r$  jest równe

$$P = \frac{a + b + c}{2} \cdot r$$

## ZADANIA

- 4.6.5** Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
- 4.6.6** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:
- Pole koła opisanego na tym trójkącie.
  - Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.
  - Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.
- 4.6.7** Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.
- 4.6.8** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość **12 cm**. Kąty przy tej podstawie mają po **30°**. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 4.6.9** Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku **a** i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:
- $a = 4$
  - $a = 3\sqrt{6}$
  - $a = 6\sqrt{2}$
  - $a = 12$
- 4.6.10** W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

## 4.7 Przystawanie i podobieństwo trójkątów

Teraz nauczę się:

- rozpoznawać trójkąty przystające i podobne;
- wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów

Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.

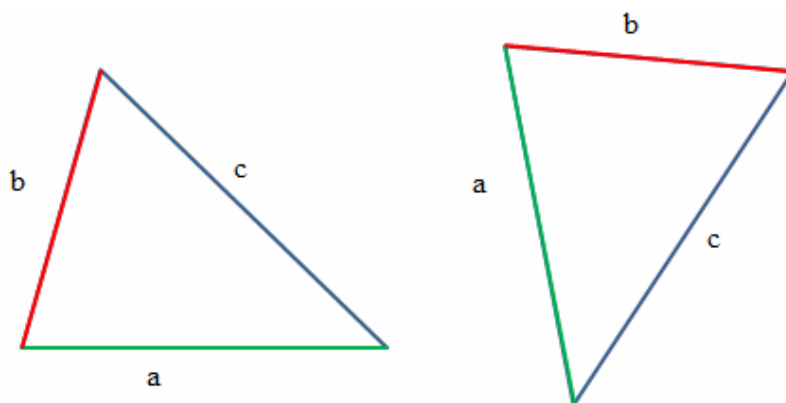
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem  $\equiv$ .

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

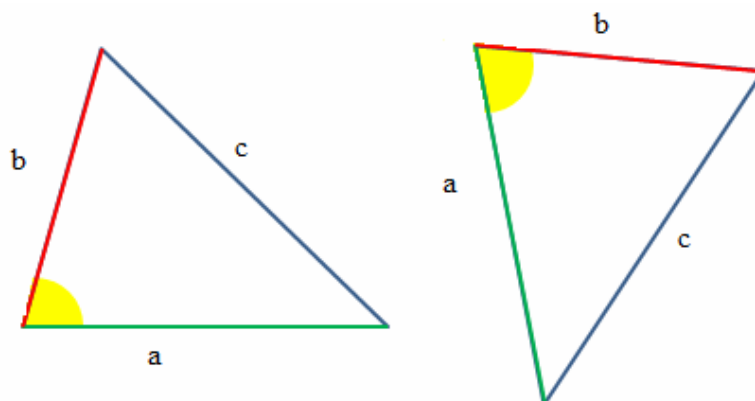
### ➔ I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



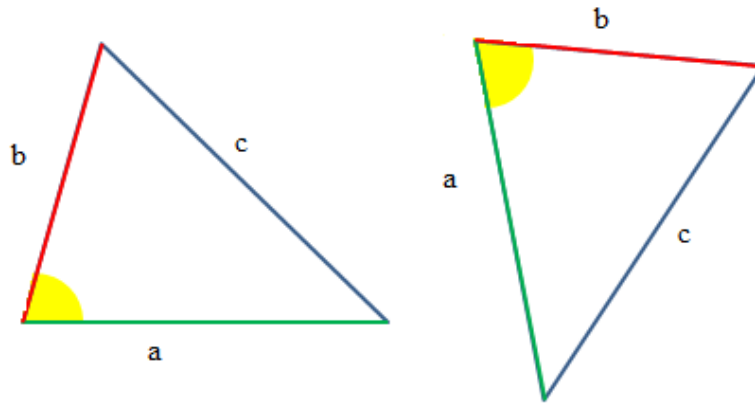
### ➔ II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



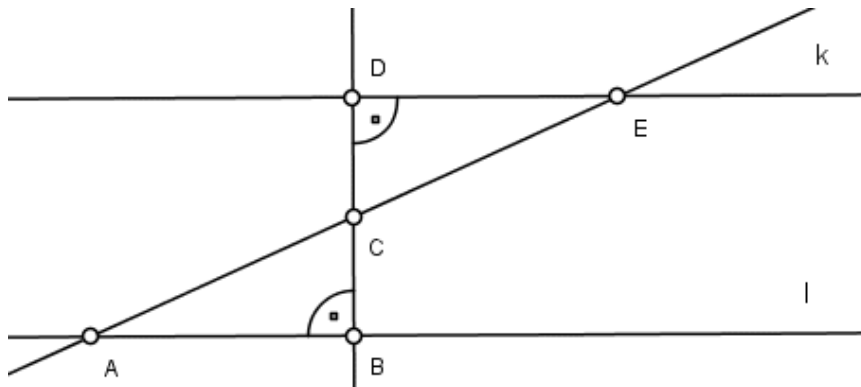
### III cecha przystawiania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



#### Przykład 1

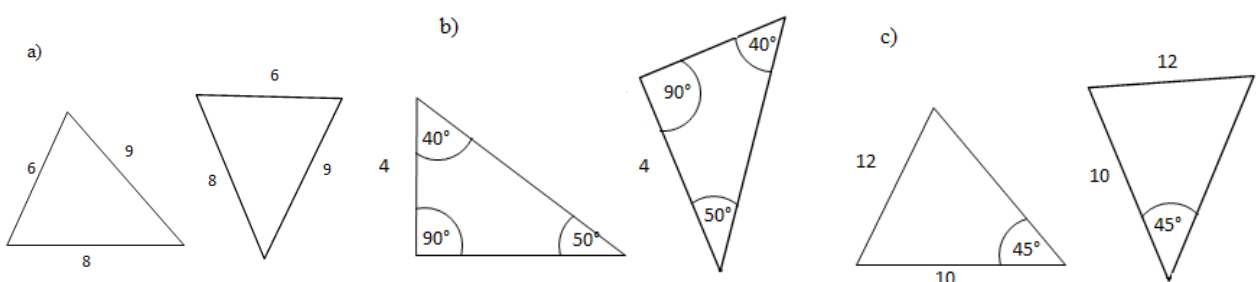
Proste  $k$  i  $l$  są równoległe. Punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $DB$ . Uzasadnij, że  $|DE| = |AB|$  i  $|AC| = |CE|$ .



Kąty  $BCA$  oraz  $DCE$  jako kąty wierzchołkowe mają równe miary.  $|DC| = |CB|$  ponieważ punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $BD$ . Wobec powyższych faktów, trójkąty  $ABC$  oraz  $DCE$  na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości  $|DE| = |AB|$  i  $|AC| = |CE|$ .

### ZADANIE

4.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.



## ➔ Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

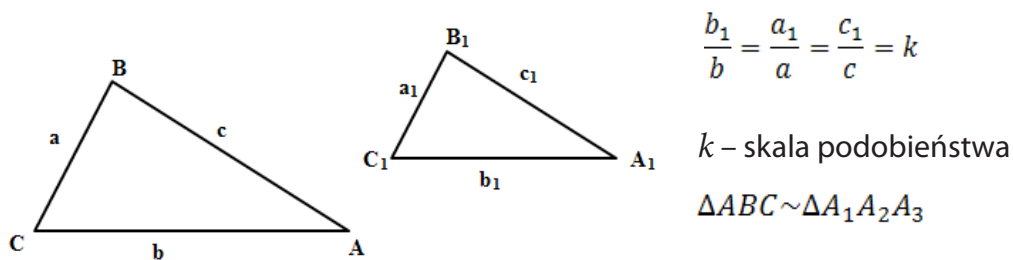
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem  $\sim$ .

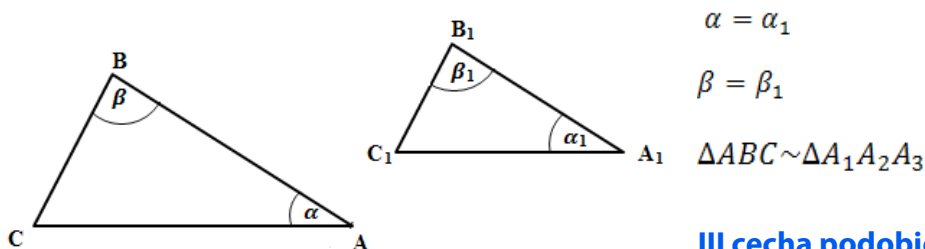
### I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



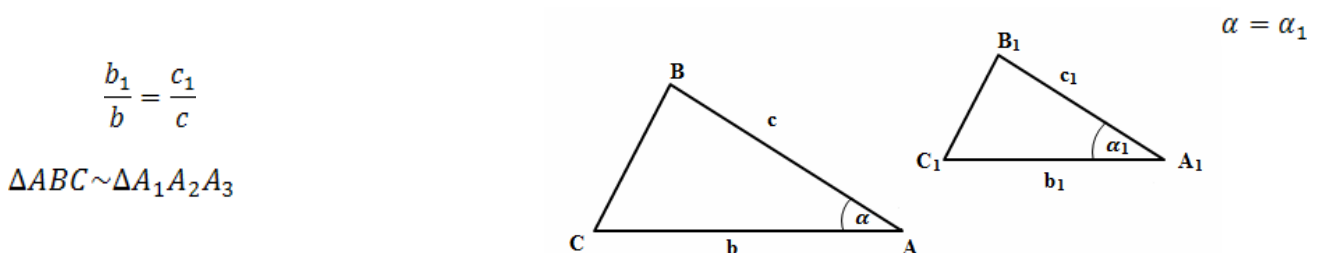
### II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



### III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

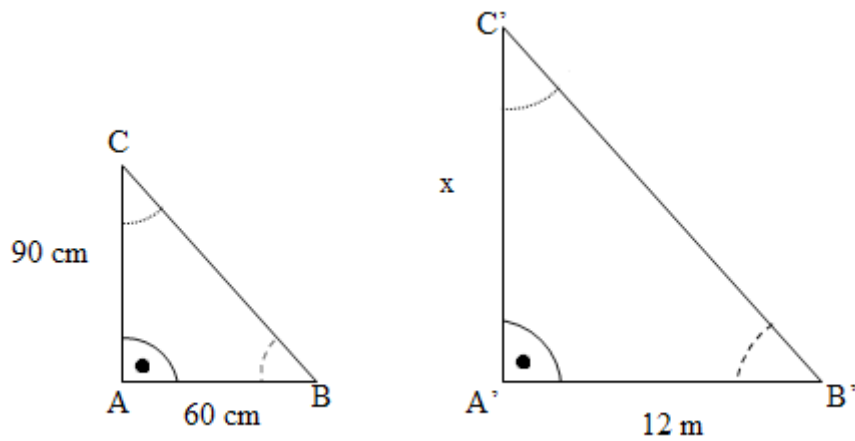
Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



### Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.

W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk)  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\frac{0,9}{0,6} = \frac{x}{12}$$

$$6x = 9 \cdot 12$$

$$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$$

**Odpowiedź:** Wieża ma wysokość 18 m.

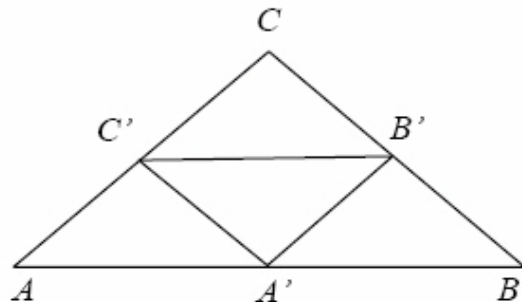
## ZADANIA

**4.7.2** Trójkąt **ABC** jest podobny do trójkąta **A'B'C'** w skali **k = 2**. Oblicz długości boków trójkąta **A'B'C'**, jeśli:  $|AB| = 5$ ,  $|BC| = 7$ ,  $|CA| = 4$ .

**4.7.3** Ramiona trapezu **ABCD** przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie **E**. Oblicz długość odcinka **DE**.

**4.7.4** Punkty **A', B', C'** są środkami boków trójkąta **ABC**. Pole trójkąta **A', B', C'** jest równe **4**. Oblicz pole trójkąta **ABC**.

**4.7.5** Trójkąt **ABC** jest podobny do trójkąta **A'B'C'**.  
Oblicz długość boku  $|A'C'|$ , jeżeli



**4.7.6** Trójkąty **ABC** i **A'B'C'** są podobne. Trójkąt **ABC** ma boki o długości **4 cm**, **6 cm** i **8 cm**. Obwód trójkąta **A'B'C'** wynosi **135 cm**. Oblicz długości boków trójkąta **A'B'C'**.

**4.7.7** Drzewo o wysokości **4 m** rzuca cień o długości **8 m**. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości **3 m**. Oblicz wysokość znaku drogowego.

## 4.8 Wielokąty

Teraz nauczę się:

- obliczać liczbę przekątnych wielokąta;
- obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta

➔ **Łamaną** nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.

➔ Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej**.



Łamana zwykajna zamknięta

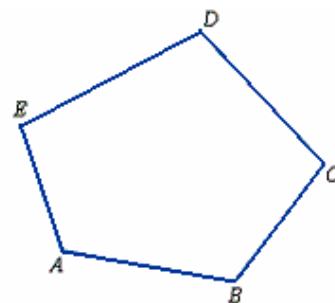


Łamana zwykajna otwarta

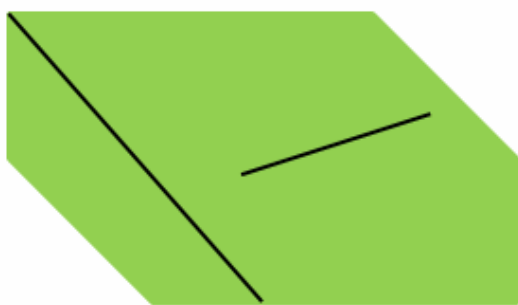
➔ **Wielokątem** nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwykajną zamkniętą wraz z tą łamaną.

Wielokąt o  $n$  bokach nazywamy również  $n$ -kątem.

Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.

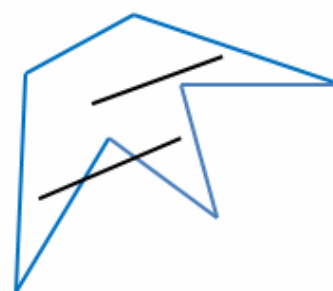


➔ **Przekątną wielokąta** nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.



**Wielokąt wypukły**

Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie



**Wielokąt wklęsły**

Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

**Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:**

$$\frac{(n-3)n}{2}$$



### Przykład 1

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta.

$$n = 17$$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3) \cdot 17}{2} = \frac{14 \cdot 17}{2} = 119$$

**Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:**

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

### Przykład 2

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

$$n = 17$$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3) \cdot 17}{2} = \frac{14 \cdot 17}{2} = 119$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = (17-2) \cdot 180^\circ = 15 \cdot 180^\circ = 2700^\circ$$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę”. To znaczy mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

### Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n”. Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \quad / \cdot 2$$

Obliczamy powstałe równanie:

$$(n-3)n = 108$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 441$$

$$\sqrt{\Delta} = 21$$

$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$  – nie spełnia warunków zadania – liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 21}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

**Odpowiedź:** Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

#### Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi  $1080^\circ$ . Jaki to wielokąt?

Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ /: 180^\circ$$

$$n - 2 = 6$$

$$n = 8$$

**Odpowiedź:** Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

#### ZADANIA

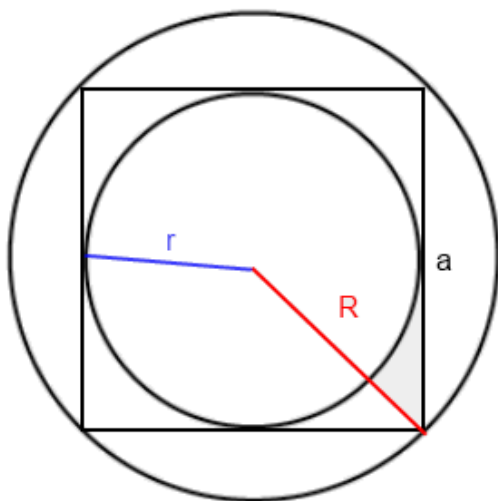
**4.8.1** Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

**4.8.2** Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi  $1620^\circ$ . Jaki to wielokąt?

#### ➡ Czworokąty

Na początek przypomniemy podstawowe wzory na pola czworokątów.

##### Kwadrat



$$P = a^2$$

$$P = 2R^2$$

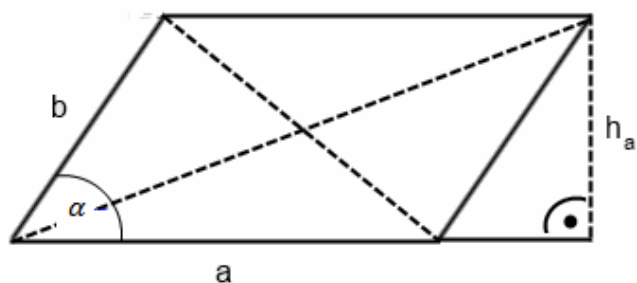
$$P = 4r^2$$

$d$  – przekątna

$$d = a\sqrt{2}$$

$$P = \frac{1}{2}d^2$$

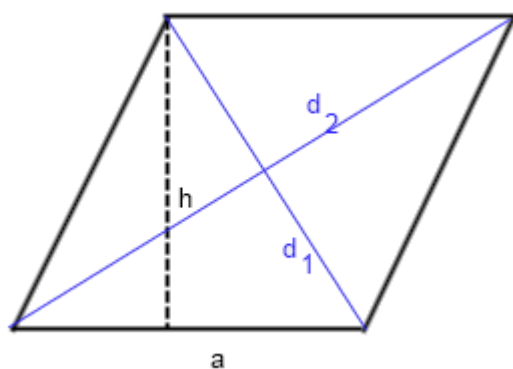
##### Równoległobok



$$P = a \cdot h_a$$

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

## Romb

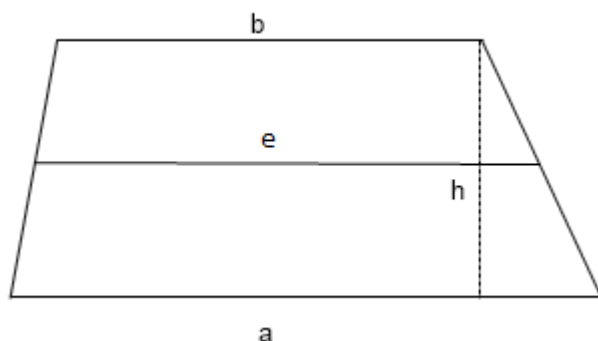


$$P = a \cdot h_a$$

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$P = a^2 \sin \alpha$$

## Trapez

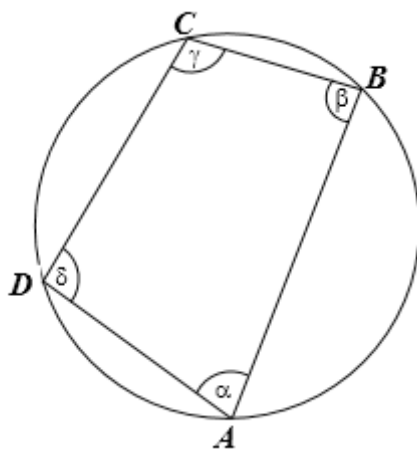


$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$e$  – odcinek łączący środki ramion trapezu

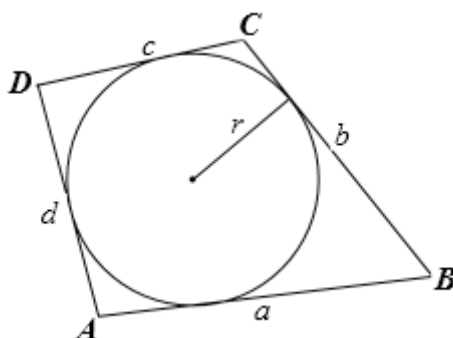
$$e = \frac{a+b}{2}$$

**Na czworokącie można opisać okrąg** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe  $180^\circ$ .



W **czworokąt wypukły można wpisać okrąg** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$



## ZADANIA

- 4.8.3** Oblicz pole równoległoboku o bokach **7 cm** i **12 cm**, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o  $60^\circ$ .
- 4.8.4** W rombie **ABCD** bok AB ma długość **20 cm**, a przekątna **BD** ma długość **24 cm**. Punkty **E, F, G, H** są kolejno środkami boków rombu.
- wykaż, że czworokąt **EFGH** jest prostokątem
  - oblicz pole tego prostokąta
- 4.8.5** W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą  $45^\circ$  i . Oblicz pole trapezu.
- 4.8.6** Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.
- 4.8.7** W trójkącie prostokątnym ABC dane są  $|AC| = 12$ ,  $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ . Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1:5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.
- 4.8.8** W czworokącie **ABCD** przekątne **AC** i **BD** przecinają się w punkcie **E**. Dane są pola trzech trójkątów :  $P_{BCE} = 15$ ,  $P_{ECD} = 5$ ,  $P_{AED} = 10$ . Oblicz pole czworokąta **ABCD**.

## 4.9 Wielokąty foremne

Teraz nauczę się obliczać:

- miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego;
- sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego;
- pola wielokątów foremnych

➔ **Wielokątem foremnym** nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.

Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.

Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o  $n$  bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

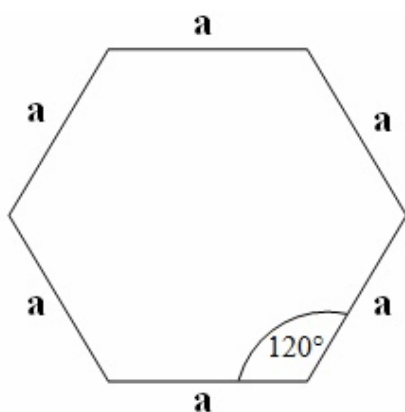
Suma miar kątów wewnętrznych  $n$ -kąta jest równa  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

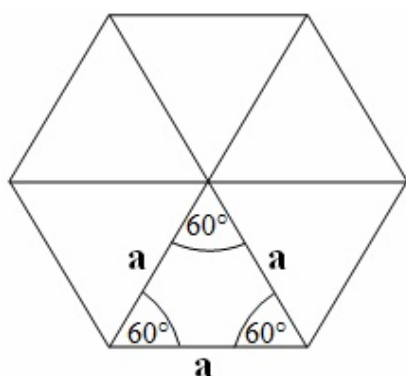
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

➔ Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny**.



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi  $720^\circ$ .

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę  $120^\circ$ .



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

➔ Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	Pole	Promień okręgu opisanego na wielokącie	Promień okręgu wpisanego w wielokąt
Trójkąt równoboczny	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

## ZADANIA

- 4.9.1** Wysokość trójkąta równobocznego jest równa **4,5 cm**. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.
- 4.9.2** W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.
- 4.9.3** Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód długości **10 cm**. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?
- 4.9.4** Pole kwadratu jest równe **8 cm<sup>2</sup>**. Oblicz promień koła:
- opisanego na kwadracie
  - wpisanego w kwadrat
- 4.9.5** W koło o polu **6,25π cm<sup>2</sup>** wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

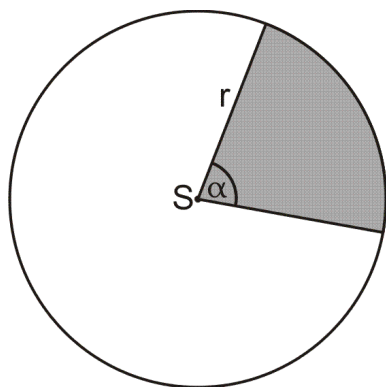
## 4.10 Pole koła i długość okręgu

Teraz nauczę się obliczać: pole koła i wycinka koła oraz długość okręgu

Dla danego koła o promieniu  $r$  możemy policzyć:

$$\text{pole: } P = \pi r^2$$

$$\text{oraz obwód: } L = 2\pi r$$



Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu  $r$ .

Kąt pełny ma  $360^\circ$ . Podzielmy całe koło na wycinki o kącie  $1^\circ$ . Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$$P = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie  $\alpha$  stopni będzie miał postać:

$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

### Przykład 1

Oblicz pole wycinka koła o promieniu  $r = 10$  i kącie równym  $60^\circ$ .

Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:

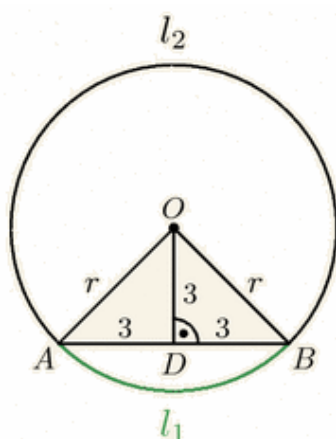
$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$$

Długość  $l$  łuku okręgu o promieniu  $r$ , odpowiadającego kątowi środkowemu o mierze  $\alpha$ , wyraża się wzorem:

$$l = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$$

## Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 6 cm odległą o 3 cm od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt  $AOB$  jest równoramienny. Odcinek  $OD$  jest jego wysokością i dzieli cięciwę  $AB$  o długości 6 cm na dwie równe części po 3 cm. Promień  $r$  liczymy z twierdzenia Pitagorasa.

$$3^2 + 3^2 = r^2 \Rightarrow 18 = r^2 \Rightarrow r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Suma kątów w trójkącie wynosi  $180^\circ$ . Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych  $ADO$  i  $DBO$  są równe  $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ .

$$\sphericalangle AOB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Długość łuku  $l_1$  wynosi:

$$l_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku  $l_1$ .

$$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{2} \pi \text{ cm.}$$

**Odpowiedź:** okrąg został podzielony na łuki o długościach  $1\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$  i  $4\frac{1}{2}\sqrt{2} \pi \text{ cm}$ .

## ZADANIA

**4.10.1** Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym  $60^\circ$  ma długość 2. Oblicz pole tego wycinka.

**4.10.2** Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu  $\frac{1}{9}\pi$  odpowiada kąt  $135^\circ$ .

**4.10.3** Promień koła jest równy 2 cm. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze  $30^\circ$ ?

**4.10.4** Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie  $60^\circ$ , jeżeli promień koła ma długość 6 cm.

**4.10.5** Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu **9 cm** i kącie **60°**.

**4.10.6** Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie **120°**, wynosi  $l = 8\pi \text{ cm}$ .

### CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

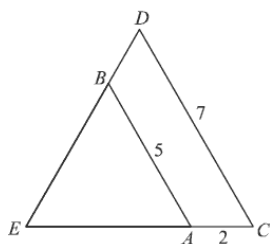
**1.<sup>40</sup>** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  dane są  $|AC| = |BC| = 5$  oraz wysokość  $|CD| = 2$ . Podstawa  $AB$  tego trójkąta ma długość:

- a) 6                      b)  $2\sqrt{2}$                       c)  $2\sqrt{29}$                       d) 14

**2.** W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

- a)  $16\sqrt{6}$                       b)  $14\sqrt{6}$                       c)  $12 + 4\sqrt{6}$                       d)  $12 + 2\sqrt{6}$

**3.** \*Odcinki  $AB$  i  $CD$  są równoległe i  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 2$ ,  $|CD| = 7$  (zobacz rysunek). Długość odcinka  $AE$  jest równa:

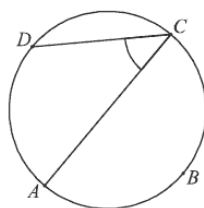


- a)  $\frac{10}{7}$                       b)  $\frac{14}{5}$                       c) 3                      d) 5

**4.** Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

- a) 25                      b) 50                      c) 75                      d) 100

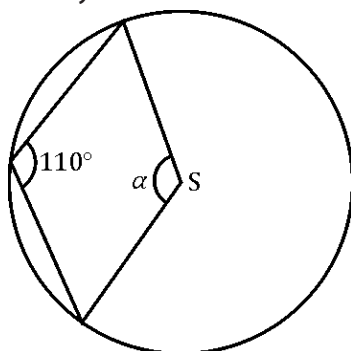
**5.** Punkty  $A, B, C, D$  dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego  $ACD$  jest równa:



- a)  $90^\circ$                       b)  $60^\circ$                       c)  $45^\circ$                       d)  $30^\circ$



6. W trójkącie  $ABC$  poprowadzono dwusieczne kątów  $A$  i  $B$ . Dwusieczne te przecinają się w punkcie  $P$ . Uzasadnij, że kąt  $APB$  jest rozwarty.



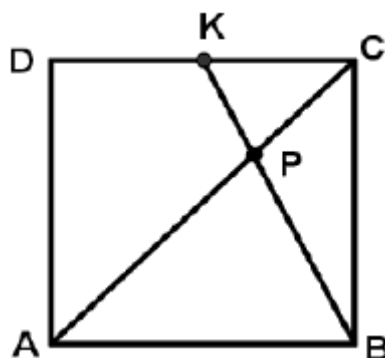
- 7.<sup>41</sup> Punkt  $S$  jest środkiem koła. Zatem miara kąta  $\alpha$  jest równa (patrz na rysunek):

a)  $70^\circ$                       b)  $220^\circ$                       c)  $140^\circ$                       d)  $250^\circ$

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe  $30^\circ$  i  $60^\circ$ . Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       b)  $\frac{1}{3}$                       c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       d)  $\frac{1}{2}$

9. Na boku  $DC$  kwadratu  $ABCD$  obrano punkt  $K$  tak, że  $|DK| = |KC|$  (zobacz rysunek). Przekątna  $AC$  kwadratu przecina odcinek  $BK$  w punkcie  $P$ . Uzasadnij, że pole trójkąta  $ABP$  jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta  $KCP$ .



- 10.<sup>42</sup> Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

a)  $36\pi$                       b)  $9\pi$                       c)  $18\sqrt{3}\pi$                       d)  $12\pi$

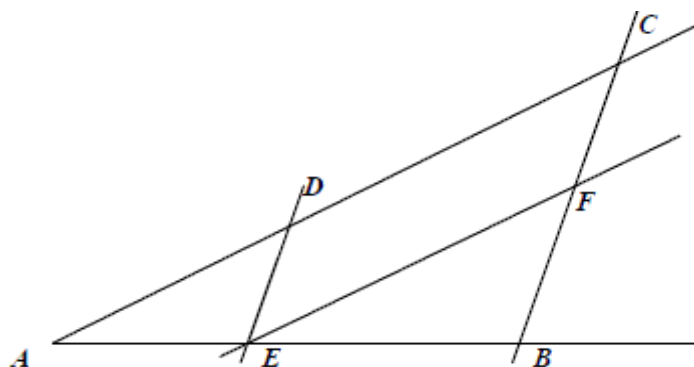
11. Odcinek o długości 2,4 m podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

a) 120 cm                      b) 0,72 m                      c) 480 mm                      d) 14 dm

41 Zadanie 7, 8, 9: <http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze>, 01.03.2013.

42 Zadania 10-13: <http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze>, 01.03.2013.

12. \*Proste  $DE$  i  $CB$  oraz  $EF$  i  $AC$  są równoległe. Oblicz długość odcinka  $EB$ , jeżeli  $AE = 2,5$ ,  $DE = 3$  oraz  $FB = 4$ .

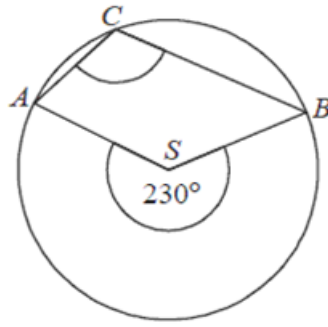


13. Wykaż, że wysokość  $CD$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  poprowadzona z wierzchołka  $C$  kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki  $AD$  i  $DB$ , których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio  $AC$  i  $BC$  tego trójkąta.
- 14.<sup>43</sup> W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:
- a)  $\frac{\sqrt{17}}{17}$                       b)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       c)  $\frac{4\sqrt{17}}{17}$                       d)  $\frac{1}{17}$
15. Długość promienia  $r$  okręgu opisanego na kwadracie jest równa  $2\sqrt{3}$ . Długość boku tego kwadratu ma wartość:
- a)  $4\sqrt{3}$                       b)  $2\sqrt{3}$                       c)  $4\sqrt{6}$                       d)  $2\sqrt{5}$
- 16.<sup>44</sup> Długość boku kwadratu  $k_2$  jest o 10% większa od długości boku kwadratu  $k_1$ . Wówczas pole kwadratu  $k_2$  jest większe od pola kwadratu  $k_1$ :
- a) o 10%                      b) o 110%                      c) o 21%                      d) o 121%
17. Przekątna  $AC$  prostokąta  $ABCD$  ma długość 14. Bok  $AB$  tego prostokąta ma długość 6. Długość boku  $BC$  jest równa:
- a) 8                      b)  $4\sqrt{10}$                       c)  $2\sqrt{58}$                       d) 10

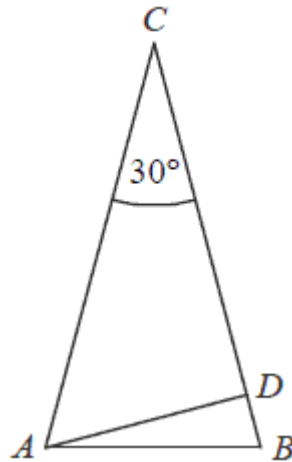
43 Zadanie 14, 15: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf>, 01.03.2013.

44 Zadania 16-21: [http://www.cke.home.pl/dokumenty sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 01.03.2013.

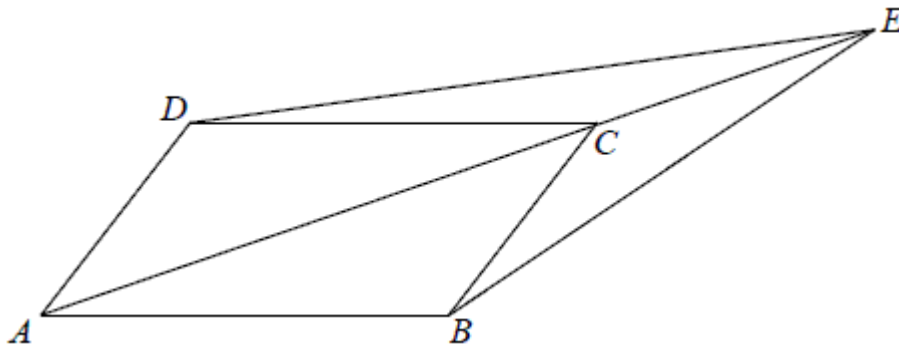
18. Punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  leżą na okręgu o środku  $S$  (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego  $ACB$  jest równa:



- a)  $65^\circ$                       b)  $100^\circ$                       c)  $115^\circ$                       d)  $130^\circ$
19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa  $24\sqrt{3}$ . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:
- a) 36                      b) 18                      c) 12                      d) 6
20. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  dane są  $|AC| = |BC| = 6$  i  $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$  (zobacz rysunek). Oblicz wysokość  $AD$  trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok  $BC$ .



21. Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Na przedłużeniu przekątnej  $AC$  wybrano punkt  $E$  tak, że  $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$ . Uzasadnij, że pole równoległoboku  $ABCD$  jest cztery razy większe od pola trójkąta  $DCE$ .



22.<sup>45</sup> Jeden kąt trójkąta ma miarę  $54^\circ$ . Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

- a)  $21^\circ$  i  $105^\circ$       b)  $11^\circ$  i  $66^\circ$       c)  $18^\circ$  i  $108^\circ$       d)  $16^\circ$  i  $96^\circ$

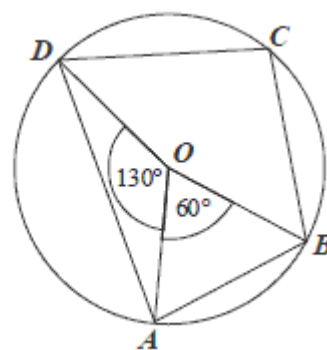
23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta a dłuższym bokiem ma miarę  $30^\circ$ . Dłuższy bok prostokąta ma długość:

- a)  $2\sqrt{3}$       b)  $4\sqrt{3}$       c)  $6\sqrt{3}$       d) 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

- a) 3 cm      b) 4 cm      c) 5 cm      d) 8 cm

25. Punkt  $O$  jest środkiem okręgu. Kąt wpisany  $BAD$  ma miarę:



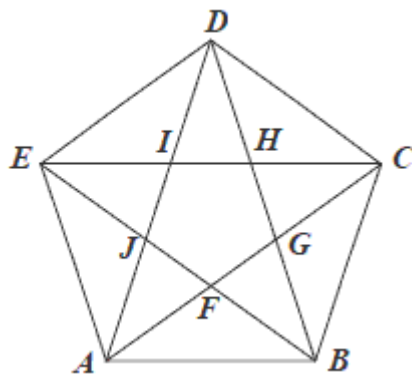
- a)  $150^\circ$       b)  $120^\circ$       c)  $115^\circ$       d)  $85^\circ$

26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę  $45^\circ$ , a jego pole jest równe  $50\sqrt{2}$ . Oblicz wysokość tego rombu.

27.<sup>46</sup> W trójkącie równoramiennym  $ABC$  dane są  $|AC| = |BC| = 5$  oraz wysokość  $|CD| = 2$ . Podstawa  $AB$  tego trójkąta ma długość:

- a) 6      b)  $2\sqrt{21}$       c)  $2\sqrt{29}$       d) 14

28. Pięciokąt  $ABCDE$  jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta  $ECD$ :



- A.  $\triangle ABF$   
 B.  $\triangle CAB$   
 C.  $\triangle IHD$   
 D.  $\triangle ABD$

45 Zadania 22-26: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf), 02.03.2013.

46 Zadania 27-31: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf>, 02.03.2013.

29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

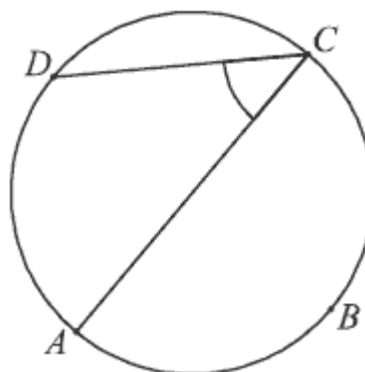
- a)  $16\sqrt{6}$                       b)  $14\sqrt{6}$                       c)  $12 + 4\sqrt{6}$                       d)  $12 + 2\sqrt{6}$

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

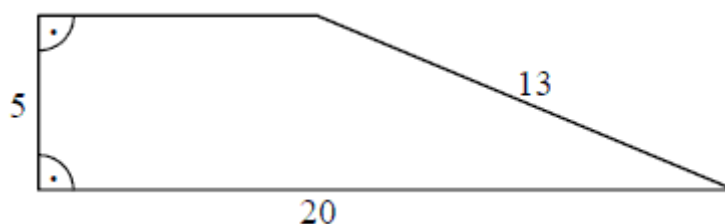
- a) 25                      b) 50                      c) 75                      d) 100

31. Punkty  $A, B, C, D$  dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego  $ACD$  jest równa:

- A.  $90^\circ$   
B.  $60^\circ$   
C.  $45^\circ$   
D.  $30^\circ$



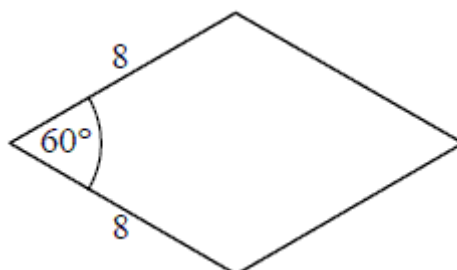
32.<sup>47</sup> Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.



Obwód tego trapezu jest równy:

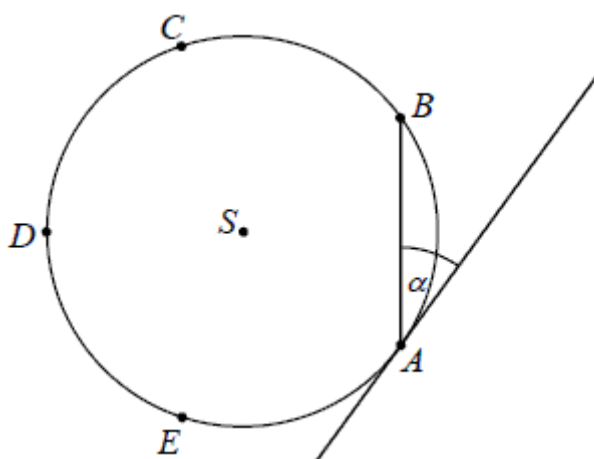
- a) 43                      b) 46                      c) 48                      d) 50

33. Bok rombu ma długość 8, a kąt ostry ma miarę  $60^\circ$ . Wysokość tego rombu jest więc równa:



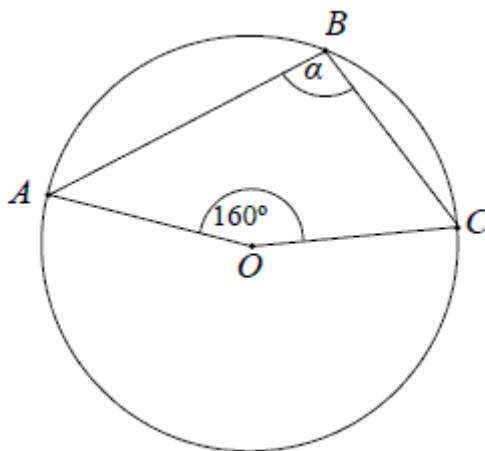
- a)  $2\sqrt{3}$                       b)  $2\sqrt{3}$                       c)  $6\sqrt{3}$                       d)  $8\sqrt{3}$

34. Punkty  $A, B, C, D$  i  $E$  leżą na okręgu o środku  $S$  i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek).



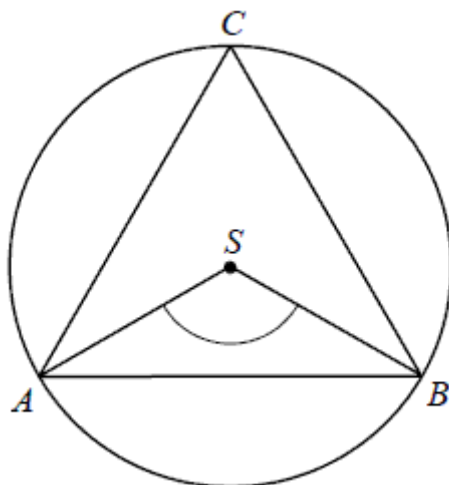
Wówczas miara kąta ostrego  $\alpha$  między cięciwą  $AB$  i styczną do tego okręgu w punkcie  $A$  jest równa:

- a)  $18^\circ$                       b)  $30^\circ$                       c)  $36^\circ$                       d)  $54^\circ$
35. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadłe do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.
- 36.<sup>48</sup> Punkt  $O$  jest środkiem okręgu. Kąt wpisany  $\alpha$  ma miarę:



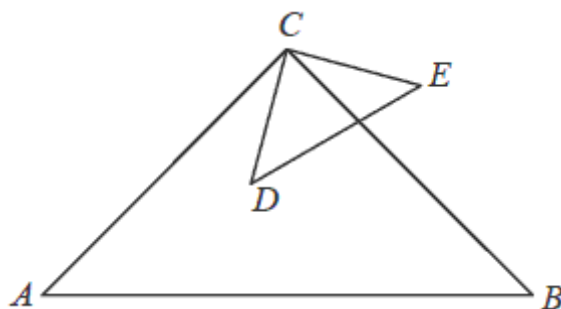
- a)  $80^\circ$                       b)  $100^\circ$                       c)  $110^\circ$                       d)  $120^\circ$
37. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym  $60^\circ$  jest równa:
- a)  $3\sqrt{3}$                       b) 3                      c)  $6\sqrt{3}$                       d) 6

38. Dany jest czworokąt  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ . Na boku  $BC$  wybrano taki punkt  $E$ , że  $|EC| = |CD|$  i  $|EB| = |BA|$ . Wykaż, że kąt  $AED$  jest prosty.
- 39.<sup>49</sup> Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:
- a) 7                      b) 14                      c) 21                      d) 28
40. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:
- a)  $4\sqrt{2}$                       b)  $2\sqrt{2}$                       c) 8                      d) 4
41. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:
- a) 3                      b) 4                      c)  $\sqrt{34}$                       d)  $\sqrt{61}$
42. Punkty  $A, B, C$ , leżące na okręgu o środku  $S$ , są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

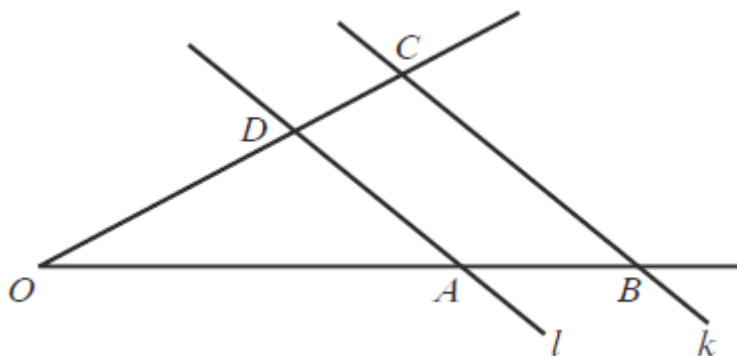


Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego  $ASB$  jest równa:

- a)  $120^\circ$                       b)  $90^\circ$                       c)  $60^\circ$                       d)  $30^\circ$
43. Trójkąty prostokątne równoramienne  $ABC$  i  $CDE$  są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku  $C$  jest prosty). Wykaż, że  $AD = BE$ .



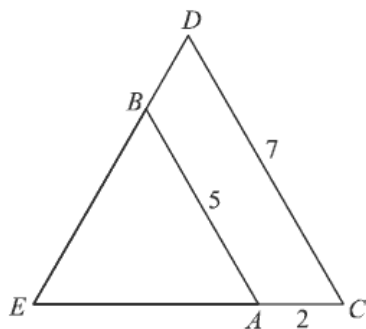
44. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.
- 45.<sup>50</sup> Na przeciwprostokątnej  $AB$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  obrano punkty  $D$  i  $E$  takie, że  $|AD| = |AC|$  oraz  $|BE| = |BC|$ . Wykaż, że kąt  $\sphericalangle DCE = 45^\circ$ .
46. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.
47. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:
- a)  $120^\circ$                       b)  $135^\circ$                       c)  $144^\circ$                       d)  $150^\circ$
48. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:
- a)  $6\sqrt{2}$                       b)  $3\sqrt{2}$                       c)  $3\sqrt{5}$                       d)  $5\sqrt{3}$
49. Długościami boków trójkąta mogą być:
- a)  $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$                       b) 6 mm; 0,1 dm; 12 cm  
c)  $4,2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$                       d) 2 dm; 4 cm; 0,07 m
50. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:
- a)  $50^\circ$                       b)  $80^\circ$                       c)  $40^\circ$                       d)  $70^\circ$
51. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o  $38^\circ$  większy od drugiego. Kąty te mają miary:
- a)  $71^\circ$  i  $109^\circ$                       b)  $38^\circ$  i  $142^\circ$                       c)  $26^\circ$  i  $64^\circ$                       d)  $38^\circ$  i  $76^\circ$
52. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:
- a)  $360^\circ$                       b)  $540^\circ$                       c)  $720^\circ$                       d)  $1080^\circ$
53. \*Proste  $l$  i  $k$  są równoległe oraz  $|OA| = 6$ ,  $|AB| = 10$ ,  $|OC| = 48$ . Odcinek  $OD$  ma długość:



- a) 12                      b) 18                      c)  $\frac{18}{5}$                       d)  $\frac{144}{5}$

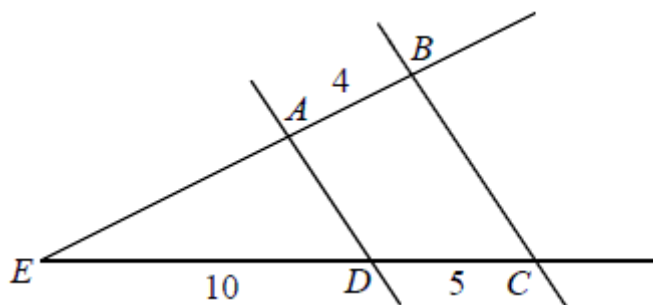


- 54.<sup>51</sup> \*Odcinki  $AB$  i  $CD$  są równoległe i  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 2$ ,  $|CD| = 7$  (zobacz rysunek). Długość odcinka  $AE$  jest równa:



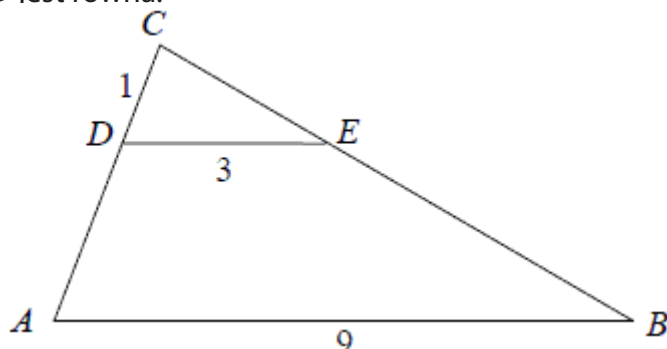
- a)  $\frac{10}{7}$       b)  $\frac{14}{5}$       c) 3      d) 5

- 55.<sup>52</sup> \*Proste  $AD$  i  $BC$  są równoległe. Długości odcinków  $ED$ ,  $DC$  oraz  $AB$  podane są na rysunku. Długość odcinka  $EA$  jest równa:



- a) 4      b) 8      c) 9      d) 10

- 56.<sup>53</sup> \*Odcinki  $AB$  i  $DE$  są równoległe. Długości odcinków  $CD$ ,  $DE$  i  $AB$  są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka  $AD$  jest równa:



- a) 2      b) 3      c) 5      d) 6

51 Zadanie 54: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf>, 04.03.2013

52 Zadanie 55: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf>,

53 Zadanie 56: [http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf), 04.03.2013.

# 5 Ciągi

## W liceum uczeń nauczy się:

- 1. Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.
- 2. Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.
- 3. Stosować wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu
- 4. arytmetycznego i geometrycznego.

## 5.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

### Teraz nauczę się wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby naturalne.

**Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy  $(a_n)$  lub  $(a_1, a_2, \dots)$ .**

**Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  i oznaczamy  $(a_n)$  lub  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .**

**Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.**

$a_n$  nazywamy  $n$ -tym wyrazem ciągu, a liczby  $(1, 2, 3, \dots, n)$  nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

### ➔ Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności.

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy  $a_{n+1} - a_n$ . Jeśli jest ona dodatnia, wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg  $(a_n)$  nazywamy **ciągami rosnącym**, jeżeli dla każdego  $n \in \mathbb{N}^+$  jest spełniona nierówność  $a_{n+1} > a_n$ .

Ciąg  $(a_n)$  nazywamy **ciągami malejącym**, jeżeli dla każdego  $n \in \mathbb{N}^+$  jest spełniona nierówność  $a_{n+1} < a_n$ .

Ciąg  $(a_n)$  nazywamy **ciągami stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_{n+1} = a_n$ .

### Przykłady:

$a_n = n + 3$ : 2, 5, 8, 11, 14, ... – ciąg rosnący

$a_n = n^2$ : 1, 4, 9, 16, 25, ... – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n$ : 3, 2, 1, 0, -1, ... – ciąg malejący

$a_n = -5n$ : -5, -10, -15, -20, -25, ... – ciąg malejący

## 5.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Teraz nauczę się:

- badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny;
- stosować wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Ciąg liczbowy  $(a_n)$  nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby  $r$ , zwanej różnicą ciągu.

$r = a_{n+1} - a_n$  nazywamy różnicą ciągu

$$a_{n+1} - a_n = r$$

### Przykłady ciągów arytmetycznych:

$a_1 = 5, r = 3$ ; 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

$a_1 = 6, r = -2$ ; 6, 4, 2, 0, -2, -4, ...

### Zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu :

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

### Suma $n$ -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{2a_1 + (n - 1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  zachodzi równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg arytmetyczny jest:

- **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia:  $a_{n+1} - a_n > 0$ ,
- **malejący**, gdy różnica ciągu jest ujemna:  $a_{n+1} - a_n < 0$ ,
- **stały**, gdy różnica ciągu jest równa 0:  $a_{n+1} - a_n = 0$ .

54

### Ciekawostka

W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych nazwany następnie jego imieniem:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

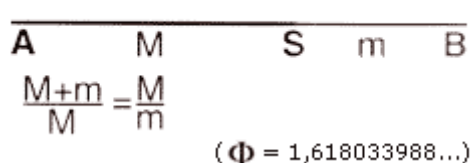
$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie  $n$  – należy do naturalnych oraz  $k_0 = 1$  i  $k_1 = 1$

Można pokazać, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1,6180339988\overline{8} \dots = \Phi$  gdzie  $\Phi$  jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym. Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba  $\Phi$ , jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd w opracowaniach często podaje się, że  $\Phi = 1,618$ .

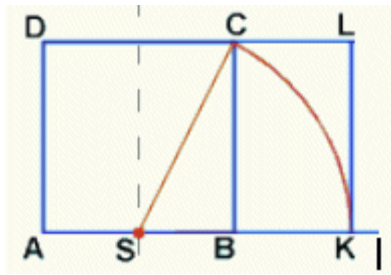
**Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:**

1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.

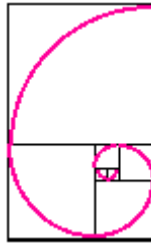
$$\Phi = \frac{M}{m}$$


$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m}$   
( $\Phi = 1,6180339988\dots$ )

2. Złoty podział prostokąta.



3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

## PRACA DLA CHĘTNYCH

Poszukaj dokładniejszych informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

## ZADANIA

**5.2.1** Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

- a) 1, 2, 3, 4, 5, ...      b) 2, 4, 8, 16, 32, ...      c) -2, -4, -6, -8, ...      d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

**5.2.2** Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

- a)  $a_n = 2n$       b)  $a_n = 3n - 1$       c)  $a_n = 2n + 1$   
d)  $a_n = 1 - n$       e)  $a_n = n^n$       f)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**5.2.3** Dany jest ciąg  $(a_n)$  o podanym wzorze:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}, \text{ dla } n \geq 1. \text{ Oblicz } a_3 \text{ i } a_4.$$

**5.2.4** Sprawdź, czy dany ciąg  $(a_n)$  jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

- a)  $a_n = 3 + n$       b)  $a_n = 2n - 1$       c)  $a_n = n^2 + 1$   
d)  $a_n = \frac{2}{3}n + 2$       e)  $a_n = \frac{2n}{n+1}$

**5.2.5** Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  wiedząc, że:

- a)  $a_2 = 5, a_6 = 15$

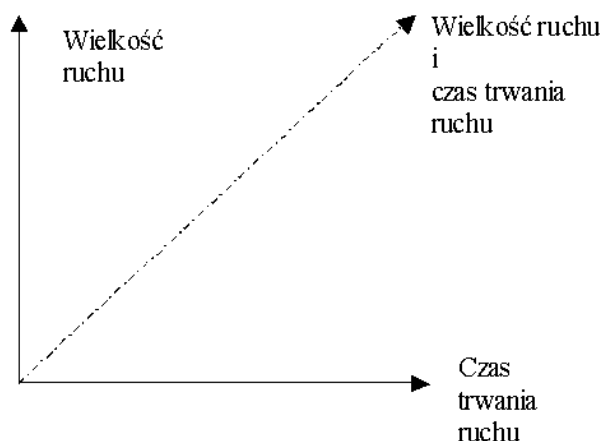


Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.

Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.

**Rysunek 27.** Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.



### 5.3 Ciąg geometryczny i jego własności

**Teraz nauczę się:**

- badać, czy dany ciąg jest geometryczny;
- stosować wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ciąg liczbowy  $(a_n)$  nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą  $q$ , zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą  $q$ , a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

➔ **Suma  $n$ -początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym  $a_1$  i ilorazie  $q$ , wyraża się wzorem:**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ dla } q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \text{ dla } q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  zachodzi równość:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

➔ **Monotoniczność ciągu geometrycznego**

**Ciąg jest rosnący** wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 > 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 < 0$$

**Ciąg jest malejący** wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 < 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 > 0$$

**Ciąg jest stały** wtedy, gdy:

$$q = 1 \text{ lub } a_1 = 0$$

Jeśli iloraz  $q$  jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny.

Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału  $(-1, 1)$ .

### Ciekawostka

#### Metody cenowe

➔ Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotne jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi  $\Phi$  i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby  $\Phi$  z przedziału  $\langle -3, 3 \rangle$ .



Tabela 3. Współczynniki złotego podziału<sup>55</sup>

Potęga $n$	$F^n$ – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	Ciąg zewnętrzny
2	2,618	
3	4,236	
-1	0,618	Ciąg wewnętrzny
-2	0,382	
-3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrótu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego, wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół) ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomów odwrótu Fibonacciego rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).



## ZADANIA

**5.3.1** Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a)  $3, 6, 12, \dots$       b)  $2, -6, 18, \dots$       c)  $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \dots$       d)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

**5.3.2** Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a)  $q = -2, a_3 = 0,5$       b)  $q = \frac{1}{3}, a_4 = -27$       c)  $q = -0,2, a_5 = -151,2$       d)  $q = -6, a_4 = 0,5$

**5.3.3** Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na  $n$ -ty wyraz wiedząc, że:

a)  $a_1 = 1, a_5 = 12,5$       b)  $a_1 = 16, a_7 = 256$       c)  $a_1 = -3, a_{10} = -81$       d)  $a_1 = 5, a_3 = 2,5$

**5.3.4** Wyznacz liczbę  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a)  $a_1 = 3, q = -2, a_n = 1536$       b)  $a_1 = -1, q = -20, a_n = -64000000$   
c)  $a_1 = 7, q = 0,5, a_n = \frac{7}{128}$       d)  $a_1 = 0,5, q = -4, a_n = 128$

**5.3.5** Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego ( $a_n$ ) wiedząc, że:

a)  $a_7 = 96, a_5 = 48$       b)  $a_3 = 12, a_6 = 24$       c)  $a_2 = 6, a_5 = -3$

**5.3.6** W ciągu geometrycznym ( $a_n$ ) mamy dane  $a_2 = -1, q = -2$ . Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

**5.3.7** Wyznacz  $x$ , wiedząc że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$$a_1 = 9, a_2 = x, a_3 = 1$$

**5.3.8** Sprawdź, czy ciąg ( $a_n$ ) jest geometryczny? Wyznacz  $q$ .

a)  $a_n = 2^{n+1}$       b)  $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$       c)  $a_n = 2n^2$

**5.3.9** Oblicz sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego ( $a_n$ ), jeśli:

a)  $a_1 = 8, 2a_5 = 3a_4, n = 6$       b)  $a_1 = 2, a_7 = 128, n = 8$

**5.3.10** Zbadaj monotoniczność ciągu ( $a_n$ ), określonego wzorem:

a)  $a_n = \frac{3 - 2n}{4n - 50}$       b)  $a_n = \frac{5n}{n+1}$       c)  $a_n = \frac{1}{3n^2 - 12n - 3}$       d)  $a_n = \frac{n^2 - 1}{n+7}$

**5.3.11** Ciąg ( $a_n$ ) jest określony wzorem  $a_n = 10^{n+2} - 2$ . Wykaż, że ciąg  $b_n = a_{n+1} - a_n$  jest ciągiem geometrycznym.

### 5.3.12 Znajdź sumę:

$$\text{a) } 1 + 6 + 21 + \dots + n(2^n - 1)$$

$$\text{b) } 3 + 27 + 135 + \dots + (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$(n - 1) \cdot 2^{n+1} - 0,5 \cdot (n^2 + n - 4)$$

$$(n - 1) \cdot 3^{n+1} + 3$$

**5.3.13** Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

## 5.4 Praktyczne zastosowanie ciągów ( procent prosty, składany)

**Teraz nauczę się** obliczać podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)

### ➔ Kapitalizacja odsetek<sup>56</sup>

**Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk.**

W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej – na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia 19-procentowego podatku od zysków kapitałowych, zwanego potocznie podatkiem Belki.

### ➔ Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota. Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001 — 31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0,8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004 — 31.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\text{oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0,81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 — brak wzoru na procent składany.



Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

## ZADANIA

**5.4.1** Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

**5.4.2** Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym z kapitalizacją odsetek:

co miesiąc

co kwartał

co pół roku

co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.

**5.4.3** Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

**5.4.4** Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000 zł.

a) Bank I oferuje 14% w stosunku rocznym z roczną kapitalizacją odsetek.

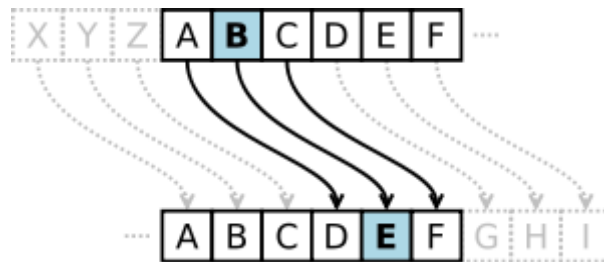
b) Bank II oferuje 10% w stosunku rocznym z kwartalną kapitalizacją odsetek.

c) Bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji. Zdecydujesz się na rok czy na dwa lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

- 5.4.5** Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.
- Oblicz, jaką kwotę (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdego naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.
  - O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.
- 5.4.6** Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95 zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).
- 5.4.7** Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?
- 5.4.8** W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?
- 5.4.9**<sup>57</sup> Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku. Bank zaproponował mu następujące oferty:
- oprocentowanie 6% w sali rocznej z odsetkami doliczanymi po roku,
  - oprocentowanie 3,8% w skali rocznej z odsetkami doliczanymi co kwartał.
  - Dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?
- 5.4.10** Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować w banku, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400\$.
- 5.4.5** Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyles w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5% w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.
- 5.4.5** Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł, oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:
- na koniec okresu rozliczeniowego
  - na początek okresu rozliczeniowego
  - Jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

## Ciekawostka

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: A A B C C D E E F G H I J K L L M N N O O P R S S T U W Y Z Z Z

Szyfr: C C D E E F G H I J K L L M N N O O P R S S T U W Y Z Z Z A A B

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŹ DĆFA, EKTRP ŚZŃM YŹSŁ L UAGWĘ INCJ

## PRACA DLA CHĘTNYCH

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza). Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

## CZY ZDAM MATURĘ Z MATEMATYKI?

- 1<sup>58</sup>** Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy  $20^\circ$ . Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:
- a)  $40^\circ$                       b)  $50^\circ$                       c)  $60^\circ$                       d)  $70^\circ$
- 2** Dany jest ciąg  $(a_n)$ , określony wzorem  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$  dla  $n \geq 1$ . Wówczas wyraz  $a_5$  tego ciągu jest równy:
- a)  $-\frac{3}{25}$                       b)  $\frac{3}{25}$                       c)  $-\frac{7}{25}$                       d)  $\frac{7}{25}$
- 3** Ciąg  $(9, x, 19)$  jest arytmetyczny, a ciąg  $(x, 42, y, z)$  jest geometryczny. Oblicz:  $x, y, z$ .
- 4<sup>59</sup>** Który wyraz ciągu  $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$  jest równy zero?
- a)  $a_9$                       b)  $a_{18}$                       c)  $a_{21}$                       d)  $a_{49}$
- 5** Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym  $a_n$  równym:
- a)  $a_n = 3 \cdot 2^n$                       b)  $a_n = \frac{4n^2 - 9}{3 + 2n}$                       c)  $a_n = \frac{n + 3}{2n + 2}$                       d)  $a_n = \frac{n^2 + 1}{3}$
- 6** Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.
- 7<sup>60</sup>** Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$  dla  $n \geq 1$ . Wówczas:
- a)  $a_2 = 64$                       b)  $a_2 = 0$                       c)  $a_2 = -64$                       d)  $a_2 = 128$
- 8** Liczby  $2; 2x-1; 0,5$  (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:
- a)  $x = 0$                       b)  $x = 0$  lub  $x = 1$                       c)  $x = 1$                       d)  $x = -1$
- 9** O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

58 Zadania 1-3: [http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura2012/matm\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 08.03.2013.

59 Zadania 4-6: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf>, 08.03.2013.

60 Zadania 7-9: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf>, 08.03.2013.





- 20** Ciąg  $(2\sqrt{2}, 4, a)$  jest geometryczny. Wówczas:
- a)  $a = 8\sqrt{2}$       b)  $a = 4\sqrt{2}$       c)  $a = 8 - 2\sqrt{2}$       d)  $a = 8 + 2\sqrt{2}$
- 21** Suma  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  jest określona wzorem  $S_n = n^2 - 2n$ . Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz tego ciągu.
- 22<sup>64</sup>** Liczby 12, 18,  $2x + 1$  są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:
- a)  $x = 11\frac{1}{2}$       b)  $x = 12$       c)  $x = 12\frac{1}{2}$       d)  $x = 13$
- 23** W ciągu arytmetycznym  $a_n$  dane są  $a_1 = 2$  i  $a_2 = 4$ . Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:
- a) 30      b) 110      c) 220      d) 2046
- 24** Ciąg  $(a_n)$  jest określony dla  $n \geq 1$  wzorem  $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$ . Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba  $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$ .
- 25<sup>65</sup>** Dany jest nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$ , w którym  $a_3 = 1$  i  $a_4 = \frac{2}{3}$ . Wtedy:
- a)  $a_1 = \frac{2}{3}$       b)  $a_1 = \frac{4}{9}$       c)  $a_1 = \frac{3}{2}$       d)  $a_1 = \frac{9}{4}$
- 26** Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  o wyrazach dodatnich. Wtedy:
- a)  $a_4 + a_1 = a_{10}$       b)  $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$       c)  $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$       d)  $a_5 + a_7 = 2a_8$
- 27** Liczby  $x, y, 19$  w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym  $x + y = 8$ . Oblicz:  $x$  i  $y$ .
- 28<sup>66</sup>** W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$  dane są:  $a_3 = 13$  i  $a_5 = 39$ . Wtedy wyraz  $a_1$  jest równy:
- a) 13      b) 0      c) -13      d) -26
- 29** W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  dane są:  $a_1 = 3$  i  $a_4 = 24$ . Iloraz tego ciągu jest równy:
- a) 8      b) 2      c)  $\frac{1}{8}$       d)  $-\frac{1}{2}$

64 Zadania 22-24: <http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszecho2012.pdf>, 09.03.2013.

65 Zadania 25-27: [http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf), 09.03.2013.

66 Zadanie 28, 29: [http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf), 10.03.2013.

- 30<sup>67</sup>** Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności  $102 \text{ dm}^3$  wypływa w pierwszej minucie  $5 \text{ dm}^3$  cieczy, a w każdej następnej o  $0,25 \text{ dm}^3$  mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?
- 31** Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:
- a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w poprzednim miesiącu.
- b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.
- Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.
- 32** Wyznacz liczbę składników w sumie  $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 151$  i wyznacz tę sumę.
- 33** Oblicz, dla jakiej wartości  $k$  liczby  $5, (k+1)^2, 2k + 9$  tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?
- 34** Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.
- a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?
- b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?
- 35** Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby  $x, y, z, t$ , aby liczby  $4, x, y, z, t, 8$  tworzyły ciąg geometryczny.
- 36** Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnicę tworzącą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.
- 37** Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

# Bibliografia

- 1 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.
- 2 Testy maturalne. Matematyka 2010, Wydawnictwo Aksjomat.
- 3 Kalina R., Szymański T., Zbiór zadań z matematyki, Wydawnictwo Sens.
- 4 Kłaczek K., Kurczab M., Świada E., Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.
- 5 Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., Arkusze egzaminacyjne, Wydawnictwo Szkolne Omega.
- 6 Cewe A., Nahorska H., Matura z matematyki od 2010 roku, Wydawnictwo Podkowa.
- 7 Gwizdak D., Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
- 8 Antek M., Belka K., Grabowski P., Prosto do matury, Wydawnictwo Nowa Era.
- 9 Jurczyszyn P., Wesołowski M., Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era.
- 10 Jenike M., Fizyka, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
- 11 Wojciechowska M., Unieszowska J., Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009, Operon.
- 12 Jaworski R., Fizyka. Matura 2012, Operon.
- 13 Fischer R. Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.
- 14 Nowakowski J., Borowski K., Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym, Wydawnictwo Difin.

# Źródła internetowe:

1. [www.matematykam.pl/metoda\\_podstawiania.html](http://www.matematykam.pl/metoda_podstawiania.html)
2. [www.matematykam.pl/metoda\\_przeciwnych\\_wsp.html](http://www.matematykam.pl/metoda_przeciwnych_wsp.html)
3. [www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf)
4. [www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf)
5. [www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf)
6. [pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka\\_dla\\_liceum/Funkcja\\_kwadratowa/Wzory\\_Viete'a](http://pl.wikibooks.org/wiki/Matematyka_dla_liceum/Funkcja_kwadratowa/Wzory_Viete'a)
7. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura2012/matm\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf)
8. [www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze](http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze)
9. [www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze](http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze)
10. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf)
11. [www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf)
12. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf)
13. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszeEcho2012.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszeEcho2012.pdf)
14. [www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf)
15. [www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf)
16. [www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf)
17. [www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf)
18. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf)
19. [www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf)
20. [www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf)
21. [www.matematykam.pl/wykres\\_funkcji\\_kwadratowej\\_parabola.html](http://www.matematykam.pl/wykres_funkcji_kwadratowej_parabola.html)
22. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura2012/matm\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf)
23. [www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze](http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze)
24. [www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf)
25. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf)
26. [www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf)

27. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf)
28. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf)
29. [www.cke.edu.pl/images/stories/00002011\\_matura/P/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf)
30. [www.cke.edu.pl/images/stories/001\\_Matura/matematyka\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf)
31. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura2012/matm\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf)
32. [www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze](http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze)
33. [www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze](http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze)
34. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf)
35. [www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf)
36. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf)
37. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf)
38. [www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf)
39. [www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf)
40. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf)
41. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf)
42. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf)
43. [www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf)
44. [www.bossa.pl](http://www.bossa.pl)
45. [www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc](http://www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc)
46. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura2012/matm\\_pp.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf)
47. [www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf)
48. [www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf)
49. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf)
50. [www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka\\_PP.pdf](http://www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf)
51. [www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012\\_matura\\_czerw\\_2012/matematyka/pp\\_matematyka.pdf](http://www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf)
52. [www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf)
53. [www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf)
54. [www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010\\_p.pdf](http://www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf)

© Copyright by

Stowarzyszenie POSTIS

Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o. o.  
Lublin 2013

Stowarzyszenie POSTIS

20-091 Lublin, ul. Fieldorfa 7/4

tel. +48 81 524 39 66; fax +48 81 524 39 66

www.postis.pl; e-mail: biuro@postis.pl

Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o. o.

20-086 Lublin, ul. Szewska 4 lok. 7

tel. +48 81 532 84 14; tel./fax +48 81 534 35 50; mobile +48 668 445 503

www.ptelublin.pl; e-mail: biuro@ptelublin.pl

Autorzy

Kinga Sarad-Dec, pedagog

Joanna Rusinkiewicz, pedagog

Milena Potręć, nauczyciel przedsiębiorczości

Anna Cudna, nauczyciel przedsiębiorczości

Michał Roman, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych

Magdalena Siroń, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych

Tomasz Banasiak, specjalista ds. Mediów

Grzegorz Kozak, specjalista ds. Mediów

Agnieszka Wróblewska, specjalista ds. Przedsiębiorczości

Kamila Niziołek-Duda, specjalista ds. Przedsiębiorczości

Zbigniew Biały, specjalista ds. Ekonomii

Ewa Oleksiejczuk, specjalista ds. Ekonomii

Agata Linkiewicz, specjalista ds. Matematyki

Anna Kwiecińska-Osuch, specjalista ds. Matematyki

Katarzyna Korona, doradca metodyczny

Dorota Ulikowska, doradca metodyczny

Agnieszka Lewicka-Zelent, koordynator merytoryczny

Skład i opracowanie typograficzne

Ewa Kutkowska

Andrzej Sokulski

Przygotowanie publikacji w wersji elektronicznej

Agencja ORPHA

www.orpha.pl

Systemy Wspomagania Nauczania Sp. z o. o.

www.swn.edu.pl