ZADANIE
Dla I klasy liceum
z B15

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B15-3	3.2 roz.	b. trudne	9	15

2. Treść zadania

Rozważmy równanie $ax = x + a$, gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą.

A. Rozwiąż w zależności od a dane równanie.

B. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, przy których liczba 17 spełnia dane równanie.

C. Dla jakich wartości liczby a rozwiązaniem równania są liczby dodatnie?

D. Wyznacz te wartości parametru a, przy których dane równanie ma tylko rozwiązania będące liczbami całkowitymi.

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

A. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Równanie $ax = x + a$, równoważne jest równaniu $x(a-1) = a$. Jeżeli $a = 1$, to równanie jest sprzeczne, bo $0 \neq 1$. Załóżmy, że $a \neq 1$. Wtedy otrzymujemy, że $x = \frac{a}{a-1}$.

Odpowiedź. Dla $a = 1$ równanie nie posiada rozwiązania. Natomiast dla każdej liczby rzeczywistej $a \neq 1$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = \frac{a}{a-1}$.

B. Jeżeli liczba 17 jest rozwiązaniem równania, to zgodnie z podpunktem A zachodzi równość $17 = \frac{a}{a-1}$, skąd $a = \frac{17}{16}$.

Odpowiedź. Jedynie dla $a = \frac{17}{16}$ rozwiązaniem rozważanego równania jest liczba 17.

C. Aby rozwiązaniem rozważanego równania były liczby dodatnie należy rozwiązać nierówność

$$\frac{a}{a-1} > 0.$$

Z własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych wiadomo, że iloraz dwu liczb jest dodatni, gdy obie liczby są tego samego znaku, tzn.

$$a > 0 \text{ i } a-1 > 0 \quad \text{lub} \quad a < 0 \text{ i } a-1 < 0.$$

Stąd $a > 1$ lub $a < 0$.

Odpowiedź. Rozważane równanie posiada dodatnie rozwiązanie dla $a > 1$ lub $a < 0$.

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

D. Z podpunktu A wiadomo, że rozwiązanie równania jest dla $a \neq 1$ postaci $x = \frac{a}{a-1}$. Aby liczba ta była całkowita potrzeba aby liczba $a-1$ była dzielnikiem liczby a. Ponieważ

$$x = \frac{a}{a-1} = \frac{a-1+1}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}.$$

Zatem zachodzą tylko dwie możliwości $a-1=1$ lub $a-1=-1$. Ostatecznie $a=2$ lub $a=0$.

Odpowiedź. Równanie to ma całkowite rozwiązanie tylko dla $a=2$ lub $a=0$.

4. Schemat oceniania

podpunkt	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	rozwiązanie równania dla $a = 1$	1
	rozwiązanie równania dla $a \neq 1$	1
	sformułowanie warunków	1
B	wyznaczenie wartości parametru	1
	sformułowanie warunków	1
C	rozwiązanie nierówności	1
	sformułowanie warunków	1
D	sformułowanie dodatkowego warunku	1
	rozwiązanie równania	0,5
	udzielenie odpowiedzi	0,5

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, zadanie dodatkowe, zadanie projektowe materiały na MOODL-a

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA
IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY