ZADANIE
Dla I klasy liceum
z B19

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B19-9	7.2	średniotrudne	4	5

2. Treść zadania

Zapewne nieraz znajdowałeś się w sytuacji, gdy miałeś wokół siebie rozległy widok na okolicę. Widziałeś wtedy daleko linię horyzontu i miałeś wrażenie, że jesteś w środku wielkiego koła. Może zastanawiałeś się czy da się zmierzyć jak daleko jesteś od linii horyzontu. Ponieważ Ziemia jest kulą, więc linia łącząca Cię z horyzontem jest styczną prowadzoną od twego oka do powierzchni tej kuli.

A. Rozważ koło o środku O i promieniu R i punkt A poza tym kołem. Z punktu A poprowadź styczną do okręgu w punkcie B oraz sieczną przechodzącą przez O i przecinającą okrąg w punktach K i L (por. rys). Wykaż, że $|AB|^2 = |AK| \cdot |AL|$.

B. Zakładając, że masz 160 cm wzrostu oblicz twą odległość od linii horyzontu w niezabudowanym terenie. Przyjmij w rachunkach, że promień Ziemi równa się 6400 km.

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

A. Niech $s = |AB|$, $h = |AK|$ i $2R + h = |AL|$. Ponieważ ΔABO jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy
$$|AB|^2 + |BO|^2 = |AO|^2.$$
Zatem
$$s^2 + R^2 = (h + R)^2,$$
skąd po zastosowaniu wzorów uproszczonego mnożenia dostajemy
$$s^2 = h^2 + 2hR.$$
Czyli
$$s^2 = h(h + 2R)$$
. Zgodnie z oznaczeniami
$$|AB|^2 = |AK| \cdot |AL|.$$

B. Ze wzoru uzyskanego w podpunkcie A obliczamy odległość s, przyjmując, że $h = 160$ cm i $R = 6400$ km. Po uzgodnieniu jednostek dostajemy
$$s^2 = 256 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 64 \cdot 10^2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} = 256 \cdot 10^{-8} + 2048 \cdot 10^{-2}.$$
Stąd $s \approx 4,525$ km.

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Odpowiedź. W terenie płaskim niezabudowanym linia horyzontu odległa jest od osoby o wysokości 160 cm wzrostu o 4 km 525 m.

Uwaga. W związku z faktem, że wzrost człowieka w stosunku do promienia Ziemi jest niewielki można niekiedy zaniedbać składnik h^2 w sumie z podpunktu A i przyjąć, że $s \approx \sqrt{2hR}$. W zadaniu w B otrzymamy dokładnie to samo przybliżenie.

4. Schemat oceniania

podpunkt	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	analiza tematu zadania (sporządzenie rysunku)	1
	skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa	1
B	dostrzeżenie możliwości skorzystania z podpunktu A	1
	przeprowadzenie obliczeń	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, zadanie dodatkowe

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA
IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY