

ZADANIE

Dla I klasy liceum z B19

1. Metryczka zadania

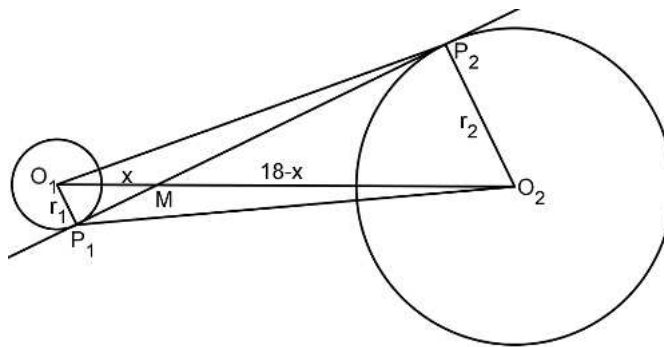
Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B19-8	7.2, 7.3	trudne	8	12

2. Treść zadania

Do dwóch okręgów o promieniach $r_1 = 4$ cm i $r_2 = 8$ cm poprowadzono wspólną styczną P_1P_2 , która przecina odcinek O_1O_2 łączący środki danych okręgów. Wiedząc, że $|O_1O_2| = 18$ cm, oblicz pole czworokąta $O_1P_1O_2P_2$.

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

Oznaczmy przez M punkt przecięcia odcinków O_1O_2 i P_1P_2 i niech x oznacza długość $|O_1M|$. Wtedy $|O_2M| = 18 - x$. Sytuację tę przedstawia rysunek.



Z podobieństwa trójkątów $\triangle O_1P_1M$ i $\triangle O_2P_2M$ dostajemy równanie

$$\frac{x}{4} = \frac{18-x}{8},$$

skąd $x = 6$ i $|MO_2| = 12$. Z trójkąta prostokątnego $\triangle MO_1P_1$ mamy

$$|P_1M| = \sqrt{|MO_1|^2 - |O_1P_1|^2} = 2\sqrt{5}.$$

Podobnie z trójkąta prostokątnego $\triangle MO_2P_2$ mamy

$$|P_2M| = \sqrt{|MO_2|^2 - |O_2P_2|^2} = 4\sqrt{5}.$$

Zatem $|P_1P_2| = 6\sqrt{5}$.

Zauważmy, że pole czworokąta $O_1P_1O_2P_2$ jest sumą pól dwóch trójkątów prostokątnych $\triangle O_1P_1P_2$ i $\triangle O_2P_1P_2$.

Zatem

$$P_{\triangle O_1P_1P_2} = \frac{1}{2} |O_1P_1| \cdot |P_1P_2| = 12\sqrt{5},$$

$$P_{\Delta O_2 P_1 P_2} = \frac{1}{2} |O_2 P_1| \cdot |P_1 P_2| = 24\sqrt{5}.$$

Wynika stąd, że $P_{O_1 P_1 O_2 P_2} = 36\sqrt{5}$.

Odpowiedź. Pole szukanego czworokąta wynosi $36\sqrt{5}$ cm .

4. Schemat oceniania

podpunkt	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
	analiza tematu zadania (zapisanie danych i szukanych, sporządzenie rysunku)	1
	skorzystanie z twierdzenia o podobieństwie – napisanie równania	1
	rozwiązanie równania	1
	skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa	1
	wyznaczenie długości potrzebnych odcinków	1
	zauważenie zależności pomiędzy polem czworokąta, a polami trójkątów prostokątnych	1
	wyliczenie pola czworokąta	1
	sformułowanie odpowiedzi	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, materiały do MOODL-a