ZADANIE
Dla I klasy liceum
z B19

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B19-2	7.3, 7.1 roz.	b. trudne	17	30

2. Treść zadania

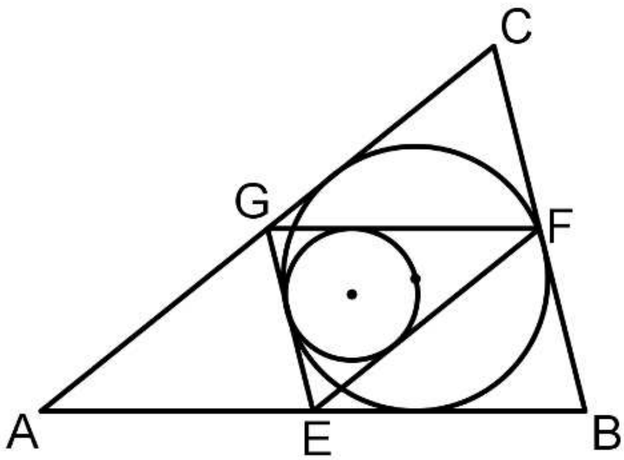
A. W trójkącie ΔABC punkty E, F i G są środkami odpowiednio boku AB, BC i CA. Oblicz, jaką częścią pola trójkąta ΔABC jest pole trójkąta ΔEFG. Czy taką samą częścią pola koła wpisanego w trójkąt ΔABC jest pole koła wpisanego w trójkąt ΔEFG?

B. Sprawdź, czy proporcje znalezione w podpunkcie A ulegają zmianie, gdy zamiast trójkąta rozważymy kwadrat $ABCD$ o boku długości a.

C. Niech $ABCD$ będzie rombem o boku długości a, w który wpisano koło oraz połączono środki kolejnych boków rombu. Jaki wniosek dotyczący możliwości wpisania koła w powstały czworokąt możesz sformułować?

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

A. Rysunek przedstawia sytuację opisaną w zadaniu.



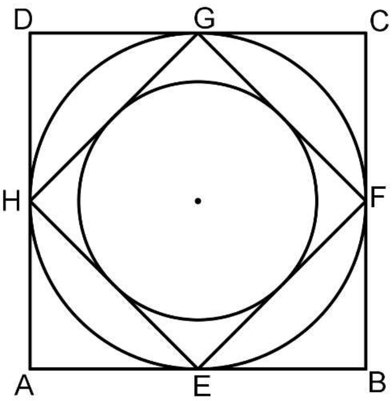
Zauważmy, że odcinki łączące środki dwóch boków trójkąta są równoległe do pozostałych boków trójkąta i równe odpowiednio ich połowom. Zatem trójkąt ΔEFG jest podobny do trójkąta ΔABC w skali $\frac{1}{2}$. Zatem $\frac{P_{\Delta EFG}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$. Niech r oznacza promień koła wpisanego w trójkąt ABC, a r_1 promień koła wpisanego w trójkąt EFG. Ponieważ wiadomo, że $r = \frac{2P_{\Delta ABC}}{|AB|+|BC|+|CA|}$ i $P_{\Delta ABC} = 4 \cdot P_{\Delta EFG}$, więc

$$r = \frac{2 \cdot 4P_{\Delta EFG}}{2(|EF| + |FG| + |GE|)} = 2\frac{2P_{\Delta EFG}}{|EF| + |FG| + |GE|} = 2r_1.$$

Stosunek pól tych kół wynosi $\frac{\pi r_1^2}{\pi r^2} = \frac{r_1^2}{4r_1^2} = \frac{1}{4}$.

Odpowiedź. Stosunek pól koła wpisanego w trójkąt ΔEFG do pola koła wpisanego w trójkąt ΔABC jest taki sam jak stosunek pól tych trójkątów.

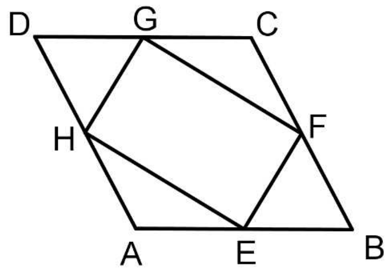
B. Rozważmy kwadrat $ABCD$. Niech E, F, G i H będą środkami odpowiednio boków: AB, BC, CD i DA. Łącząc kolejno te punkty otrzymujemy kwadrat $EFGH$ o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Sytuacja ta przedstawiona jest na rysunku.



Zatem skala podobieństwa kwadratu $EFGH$ do kwadratu $ABCD$ wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a stosunek ich pól $\frac{1}{2}$. Promień koła wpisanego w kwadrat $ABCD$ ma długość $\frac{a}{2}$, a promień koła wpisanego w kwadrat $EFGH$ ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Zatem stosunek pól tych kół wynosi $\frac{(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2}{(\frac{a}{2})^2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź. Stosunek pól kół wpisanych w oba kwadraty jest taki sam jak odpowiedni stosunek pól tych kwadratów.

C. Niech czworokąt $ABCD$ będzie rombem. Czworokąt, który powstanie po połączeniu środków boków rombu jest prostokątem, gdyż jego boki są równoległe do przekątnych rombu, które są prostopadłe. Prostokąt ten nie jest kwadratem, bo długości jego boków są równe połowom długości przekątnych rombu (por. rys.).



Ponieważ przekątne rombu są różnej długości, więc w powstały prostokąt nie da się wpisać koła.

Odpowiedź. W powstały czworokąt nie da się wpisać koła.

4. Schemat oceniania

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA
IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

podpunkt	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	sporządzenie rysunku	1
	dostrzeżenie podobieństwa trójkątów	1
	wyznaczenie stosunku pól trójkątów	1
	zastosowanie wzoru na promień koła wpisanego w trójkąt	1
	wyznaczenie zależności między promieniami obu kół	1
	wyznaczenie stosunku pól kół	1
	sformułowanie odpowiedzi	1
B	sporządzenie rysunku	1
	ustalenie skali podobieństwa kwadratów	1
	wyznaczenie stosunku pól kwadratów	1
	obliczenie długości promieni kół wpisanych w kwadraty	1
	wyznaczenie zależności między promieniami obu kół	1
	wyznaczenie stosunku pól kół	1
	sformułowanie odpowiedzi	1
C	dostrzeżenie, że powstały czworokąt jest prostokątem o różnych bokach	1
	skorzystanie z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt	1
	sformułowanie odpowiedzi	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, zadanie projektowe

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego