ZADANIE
Dla I klasy liceum
z B23

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B23-2	7.3	trudne	9	15

2. Treść zadania

A. Trójkąt ΔABC jest podobny do trójkąta $\Delta A^{'}B'C'$ w skali s. Uzasadnić, że jeżeli punkt D jest środkiem odcinka AB i $D^{'}$ środkiem odcinka $A^{'}B^{'}$, to $|C^{'}D^{'}| = s|CD|$.

B. Sprawdź, czy twierdzenie z podpunktu A będzie prawdziwe również dla wysokości obu trójkątów.

C. Co można powiedzieć o promieniach okręgów wpisanych w dane trójkąty?

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

A. Założenie: Trójkąt ΔABC jest podobny do trójkąta $\Delta A^{'}B'C'$ w skali s, $|AD| = |DB|$ i $|A^{'}D^{'}| = |D^{'}B^{'}|$.

Teza: $|C^{'}D^{'}| = s|CD|$.

Dowód. Z założenia o podobieństwie trójkątów mamy

$$\frac{|A^{'}B'|}{|AB|} = \frac{|A^{'}C'|}{|AC|} = \frac{|B'C^{'}|}{|BC|} = s$$

i odpowiednie kąty tych trójkątów mają równe miary. Rozważmy trójkąty ΔACD i $\Delta A^{'}C^{'}D^{'}$. Trójkąty te są podobne w skali s, bo $|A^{'}C^{'}| = s|AC|$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C^{'}A^{'}D^{'}$.

Mamy

$$|A^{'}D^{'}| = \frac{1}{2}|A^{'}B^{'}| = s \cdot \frac{1}{2}|AB| = s|AD|.$$

Wynika stąd prawdziwość tezy dowodzonego twierdzenia.

B. Twierdzenie prawdziwe, dowód podobny do dowodu w podpunkcie A. Należy w nim skorzystać z faktu, że dwa trójkąty są podobne, jeżeli ich odpowiednie kąty są równe. Fakt proporcjonalności wysokości wynika z założenia o proporcjonalności odpowiednich boków danych trójkątów.

C. Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta ΔABC oraz przez $a^{'}$, $b^{'}$, $c^{'}$ odpowiednie długości boków trójkąta $\Delta A^{'}B'C'$. Wtedy na mocy założenia zachodzą równości:

$$a^{'} = sa, \quad b^{'} = sb, \quad c^{'} = sc.$$

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Ponadto stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa. Oznaczmy przez r i $r^{'}$ promienie okręgów wpisanych w dane trójkąty. Wtedy, jeśli P i $P^{'}$ oznaczają odpowiednie pola danych trójkątów to otrzymujemy

$$r^{'} = \frac{2P^{'}}{a^{'} + b^{'} + c^{'}} = \frac{2s^2 P}{sa + sb + sc} = s\frac{2P}{a+b+c} = sr.$$

Udowodniliśmy zatem twierdzenie, że jeżeli trójkąty są podobne w skali s, to promienie okręgów wpisanych są proporcjonalne w tej samej skali.

4. Schemat oceniania

zadanie	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	uzasadnienie podobieństwa trójkątów	1
	przeprowadzenie rachunków	1
B	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	uzasadnienie podobieństwa trójkątów	1
	przeprowadzenie rachunków	1
C	skorzystanie ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt	1
	skorzystanie ze wzoru na stosunek pól figur podobnych	1
	przeprowadzenie rachunków	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, zadanie dodatkowe, zadanie projektowe

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY