

ZADANIE

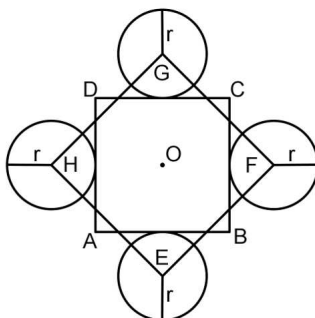
Dla I klasy liceum z B23

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B23-13	7.1 roz.	b. łatwe	4	4

2. Treść zadania

- A. Na bokach kwadratu $ABCD$ zbudowano na zewnątrz okręgi o promieniu r styczne w środkach boków i połączono kolejno ich środki otrzymując czworokąt $EFGH$ (por. rys.).



Wykaż, że czworokąt ten jest kwadratem i oblicz długość jego boku.

- B. Dla jakiej wartości r bok tego kwadratu będzie 2 razy dłuższy od boku kwadratu $ABCD$?

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

- A. Założenie: Dany jest kwadrat $ABCD$ wraz z okręgami K_1, K_2, K_3, K_4 stycznymi tak jak na rysunku.

Teza: Czworokąt $EFGH$ jest kwadratem.

Dowód. Połączmy środki okręgów K_1, K_2, K_3, K_4 ze środkiem kwadratu $ABCD$. Zauważmy, że powstały cztery trójkąty równoramienne i prostokątne $\triangle OEF, \triangle OFG, \triangle OGH, \triangle OHE$. Wynika stąd, że odcinki EF, FG, GH i HE są równej długości, bo są przeciwprostokątnymi trójkątów $\triangle OEF, \triangle OFG, \triangle OGH, \triangle OHE$ oraz kolejno parami prostopadłe. Dla obliczenia długości boku kwadratu $EFGH$ zauważmy, że odcinek łączący punkt O np. z punktem E ma długość $\frac{a}{2} + r$. Wtedy $|EF| = (\frac{a}{2} + r)\sqrt{2}$.

- B. Dla wyznaczenia szukanej wartości liczby r rozwiązujemy równanie $(\frac{a}{2} + r)\sqrt{2} = 2a$, skąd $r = a(\sqrt{2} - 0,5)$.

4. Schemat oceniania

zadanie	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	przeprowadzenie konstrukcji pomocniczej	1
	skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa	1
B	rozwiązanie równania	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

zadanie domowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna