m@te-maniak

ZADANIE
Dla I klasy liceum
z B23

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B23-1	7.4	trudne	7	20

2. Treść zadania

A. Wykaż, że pole P sześciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu r dane jest wzorem $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

B. Zbadaj, jak zmieni się wzór z podpunktu A, gdy sześciokąt foremny będzie opisany na tym okręgu.

C. Oblicz stosunek pól sześciokąta wpisanego i opisanego na danym okręgu.

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

A. Założenie: Dany jest sześciokąt foremny wpisany w koło o środku O i promieniu r.

Teza:

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

Dowód. Połączmy każdy wierzchołek sześciokąta foremnego ze środkiem koła. Wtedy kąt pełny $360°$ został podzielony na sześć części. Każdy z trójkątów otrzymany w ten sposób z podziału sześciokąta foremnego jest równoramienny. Ramionami tych trójkątów są promienie koła. Ponieważ kąt przy wierzchołku każdego z tych trójkątów ma miarę $60°$, to trójkąty te są równoboczne o boku równym promieniowi r okręgu. Wiadomo, że pole takiego trójkąta wynosi $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, stąd $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

B. Jeżeli sześciokąt foremny jest opisany na kole o środku O i promieniu r, to postępując tak jak w dowodzie podpunktu A dzielimy ten sześciokąt na sześć trójkątów równoramiennych, o wysokości r prowadzonej z punktu O na podstawę. Wysokość ta jest wtedy dwusieczną kąta trójkąta przy wierzchołku O. Aby obliczyć pole jednego z sześciu trójkątów, znajdujemy długość jego podstawy. Mamy $a = 2r\tan 30° = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Stąd jego pole wynosi $\frac{1}{2}r \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}$ Zatem pole S sześciokąta wyraża się wzorem $S = 2r^2\sqrt{3}$.

C. Stosunek pól sześciokąta foremnego wpisanego w koło, do sześciokąta foremnego opisanego na kole wyraża się wzorem

$$\frac{P}{S} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2}{2r^2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.$$

Projekt „Żyj twórczo. Zostań M@T.e-MANIAKIEM" jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WYŻSZA SZKOŁA EUROPEJSKA IM. KS. JÓZEFA TISCHNERA
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

4. Schemat oceniania

zadanie	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	obliczenie pola jednego z sześciu trójkątów	1
	obliczenie pola całego sześciokąta	1
B	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	obliczenie pola jednego z sześciu trójkątów	1
	obliczenie pola całego sześciokąta	1
C	obliczenie ilorazu	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, zadanie dodatkowe, materiały do MOODL-a, zadanie projektowe