E – book dla ucznia

Część 3.

TECHNIKUM

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

www.postis.pl

PTE
Zakład Szkolenia
i Doradztwa Ekonomicznego
Sp. z o.o. w Lublinie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis treści

Uwaga:

Treści rozszerzone zostały oznaczone przez: *

Matematyka

Matematyka

Wstęp

Drodzy Uczniowie!

Osoba przedsiębiorcza powinna posiadać wiadomości i umiejętności, które ułatwią jej funkcjonowanie w społeczeństwie. To także osoba, która potrafi rozwiązywać problemy, radzić sobie w trudnych sytuacjach, rozwijać i kształtować swoją osobowość, poszukiwać nowych doświadczeń oraz analizować i wyciągać wnioski. Podobnie jest w uczeniu się matematyki, bo matematyka to nie tylko rozwiązywanie zadań. Jest to nauka rozwijająca umysł, kształcąca wyobraźnię, ucząca logicznego myślenia oraz rozumowania matematycznego. Chcielibyśmy, abyście zakończyli naukę ze świadomością, że matematyka przydaje się w życiu codziennym.

Podręcznik jest przeznaczony dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Został napisany w taki sposób, aby kształcił wymagane umiejętności, a jednocześnie aby nauka matematyki była przyjemna. Znajdziesz tutaj oprócz wiedzy matematycznej, wiele ciekawostek z różnych dziedzin życia. Każdy temat rozpoczyna się od zadań sprawdzających umiejętności, które już posiadasz z gimnazjum. Jeżeli masz zaległości z poprzednich etapów kształcenia, powinieneś szybko je nadrobić. W podręczniku teorię poparto licznymi przykładami, a ich dopełnieniem jest seria ćwiczeń do samodzielnego rozwiązania. Każdy rozdział kończy się zestawem zadań, zatytułowanym: „Czy zdam maturę z matematyki?", dzięki którym możesz sprawdzić, czy poradzisz sobie na egzaminie maturalnym. Odpowiedzi do zadań znajdują się pod każdym z zadań. Na końcu podręcznika umieszczony jest zaś indeks ważniejszych pojęć i terminów matematycznych. Na cały cykl kształcenia zostały przewidziane trzy tomy podręcznika.

Nauka matematyki może stać się również dla Was wielką intelektualną przygodą i niepowtarzalną okazją, by odkryć – po raz pierwszy albo na nowo – piękno królowej wszystkich nauk! Czego wszystkim życzymy.

Autorzy

1. Planimetria

To już potrafię:

1. Korzystać ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe.
2. Rozpoznawać wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznać styczną do okręgu.
3. Korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.
4. Rozpoznawać kąty środkowe.
5. Obliczać długość okręgu i łuku okręgu.
6. Obliczać pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego.
7. Stosować twierdzenie Pitagorasa.
8. Korzystać z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.
9. Obliczać pola i obwody trójkątów i czworokątów.
10. Zamieniać jednostki pola.
11. Obliczać wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali.
12. Obliczać stosunek pól wielokątów podobnych.
13. Rozpoznawać wielokąty przystające i podobne.
14. Stosować cechy przystawania trójkątów.
15. Korzystać z własności trójkątów prostokątnych podobnych.
16. Rozpoznawać pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu.
17. Narysować pary figur symetrycznych.
18. Rozpoznawać figury, które mają oś symetrii, i figury, które mają środek symetrii.
19. Wskazywać oś symetrii i środek symetrii figury.
20. Rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta.
21. Konstruować symetralną odcinka i dwusieczną kąta, kąty o miarach 60°, 30°, 45°, okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt.
22. Rozpoznawać wielokąty foremne i korzystać z ich podstawowych własności.

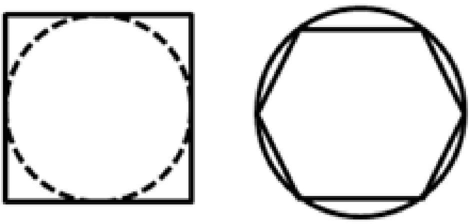
Sprawdź, czy potrafisz?

Zadania zamknięte

Informacja do zadań 1, 2.

W parku znajdują się dwie fontanny: w kształcie kwadratu z wpisanym okręgiem i w kształcie sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.

I II



Zad.1.

Jaką długość ma promień okręgu w fontannie I, jeśli kwadrat ma przekątną o długości $4\sqrt{2}$ m?

A. 4 m

B. 2 m

C. 5,6 m

D. 2,8

Zad.2.

Jaki jest obówd sześciokąta w fontannie II, jeśli promień okręgu ma długość 4 m?

A. 16 m

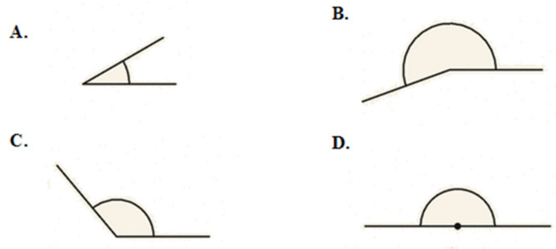
B. 24 m

C. $12\sqrt{3}$ m

D. $6\sqrt{3}$ m

Zad.3.

Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest kąt wklęsły.



Zad.4.

Sklepy przyciągają klientów reklamą. W którym z napisów jest najwięcej liter osiowosymetrycznych? Każdą literę traktuj jako oddzielną figurę.

1. BARDZO ATRAKCYJNE CENY

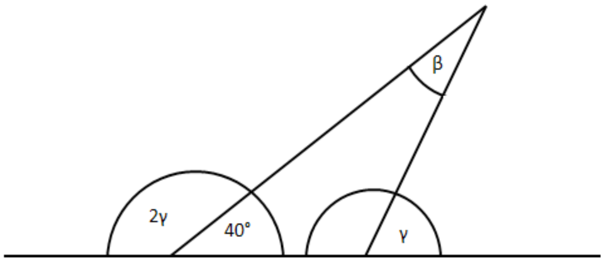
2. OBNIŻKA CEN

3. CENY PROMOCYJNE

4. PRZECENA TOWARÓW

Zad.5.

Jaką miarę ma kąt β:



A. 50°

B. 35°

C. 30°

D. 40°

Zad.6.

Miara kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{3}$ okręgu wynosi:

A. 90°
B. 60°
C. 120°
D. 80°

Zad.7.

Długość okręgu o promieniu 3 cm wynosi:

A. 6π
B. 18π
C. 9π
D. 12π

Zad.8.

W sześciokącie foremnym narysowano przekątne, które podzieliły go na 6 trójkątów. Powstałe trójkąty nie są:

A. przystające

B. równoboczne

C. podobne

D. rozwartokątne

Zad.9.

Pole kwadratu o przekątnej długości $5\sqrt{6}$ to:

A. 25

B. 50

C. 75

D. 15

Zad. 10.

Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $6\ \mathrm{cm}$ i $8\ \mathrm{cm}$ wynosi:

A. $24\ \mathrm{cm}^2$

B. $24\ \mathrm{cm}$

C. $10\ \mathrm{cm}$

D. $12\ \mathrm{cm}^2$

Odpowiedź:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	A	C	B	A	D	C	B

Zadania otwarte

1. Uzupełnij następujące zdania:

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi …

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi …

Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na …

Proste prostopadłe oznaczamy symbolem …

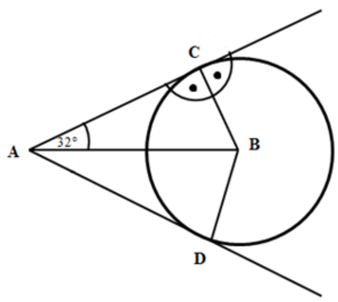
Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: …

Przez jeden punkt można poprowadzić …………………… prostych.

Miejsce przecięcia się dwóch prostych to …

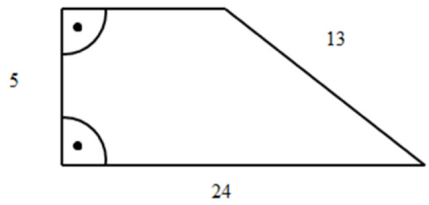
Kąt o mierze 180° nazywamy kątem …

2. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta ABCD.



3. Oblicz x i y wiedząc, że punkty $A=(3x-1;2y)$ i $B=(x+2;4y-1)$ są symetryczne względem osi OX.

4. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



Skonstruuj trójkąt równoboczny i opisz na nim okrąg.

Rozwiązania

Nr zadania	Etapy rozwiązania
1	Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego wynosi 135° Trójkąty ze względu na długości boków dzielimy na równoramienne, równoboczne, różnoboczne. Proste prostopadłe oznaczamy symbolem $\perp$ Przekątne przecinają się pod kątem prostym, np. w czworokątach: romb, deltoid Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych Miejsce przecięcia się dwóch prostych to punkt Kąt o mierze 180° nazywamy kątem półpełnym
2	$\sphericalangle A=64°, \sphericalangle C=\sphericalangle D=90°, \sphericalangle B=116°$
3	$3x-1=x+2$ $-2y=4y-1$ $x=1{,}5$ $y=\frac{1}{6}$
4	$b-b-$ górna podstawa $b=12$ $P=\frac{(24+12)\cdot 5}{2}=65$ $L=54$
5	Konstrukcja

„Geometria jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków ze źle sporządzonych rysunków".

Planimetria[1] jest działem geometrii (słowo „geometria" pochodzi od słów greckich: *ge* – ziemia i *metreo* – mierzę), która zajmuje się własnościami płaszczyzny.

1. www.medianauka.pl/podstawowe_pojecia_planimetrii, 12.03.2013.

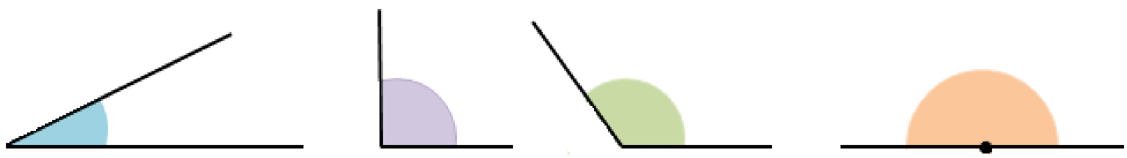
1.1. Kąt środkowy i wpisany

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

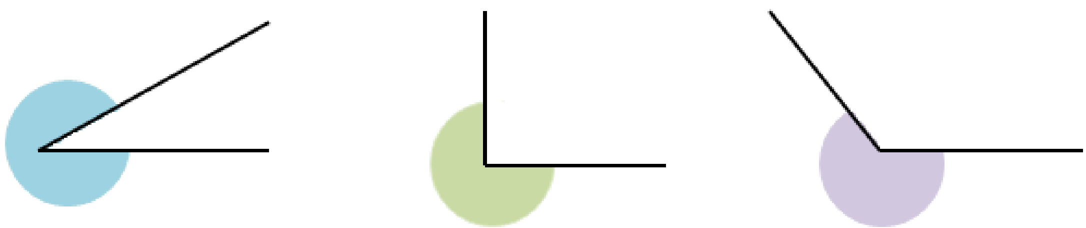
- **Stosować zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym**

Poznane dotychczas kąty możemy podzielić na **kąty wypukłe** (ich miary są mniejsze lub równe 180º) i **kąty wklęsłe** (ich miary są większe od 180°, ale mniejsze od 360°).

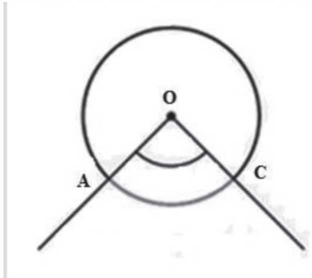
Kąty wypukłe:



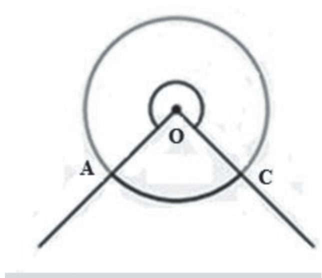
Kąty wklęsłe:



Kąt, którego wierzchołek jest środkiem koła, nazywamy **kątem środkowym**.



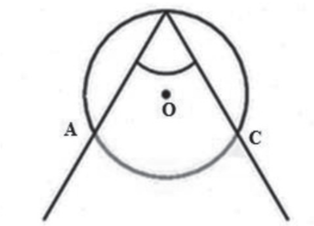
Kąt środkowy wypukły



Kąt środkowy wklęsły

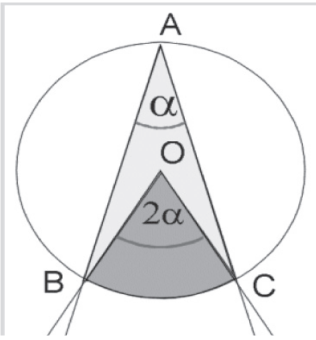
Miara kąta środkowego jest taką częścią kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.

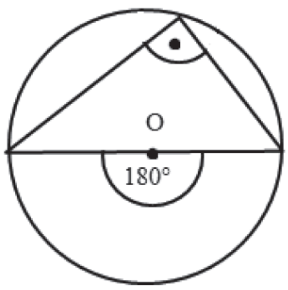
Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona kąta zawierają jego cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym** w koło.



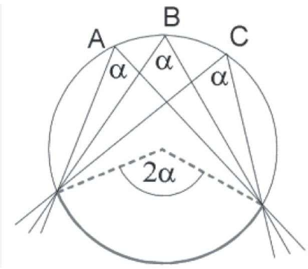
Własności kątów środkowych i wpisanych

- Jeżeli kąty wpisany i środkowy, oparte są na tym samym łuku, to miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego.





- Kąt wpisany opary na półokręgu jest kątem prostym.
- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

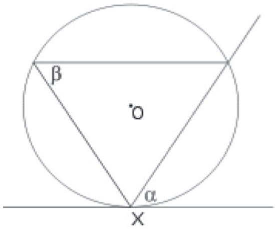


- Kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary.

Kąt dopisany do okręgu

Kąt dopisany do okręgu w punkcie X należącym do okręgu to kąt wypukły, który jest wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie X oraz półprostą, która zawiera cięciwę o końcu w punkcie X.

Kąt wpisany i dopisany, które są oparte na tym samym łuku, mają równe miary.



$\alpha - kąt\ dopisany$

$\beta - kąt\ wpisany$

Przykład 1

Na trójkącie ABC opisano okrąg i poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A, jak na rysunku obok. Kąt dopisany $\alpha = 50°$. Oblicz miarę kąta ACB.

Dorysujmy promienie OA i $OBOB$. Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

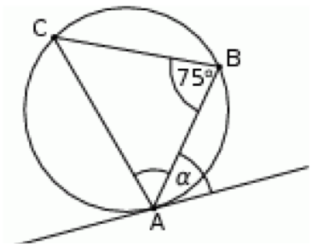
$\sphericalangle OAB = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$

$\sphericalangle AOB = 180° - 2\sphericalangle OAB = 180° - 80° = 100°$

W takim razie z twierdzenia o kątach: wpisanym i środkowym, mamy

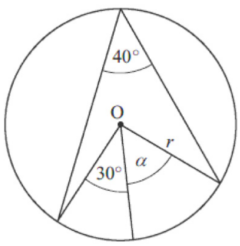
$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

$\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle C - \sphericalangle A = 180° - 50° - 75° = 55°$



Zadania

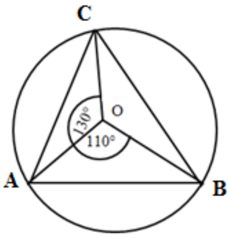
1.1.1 Oblicz miarę kąta **α**.



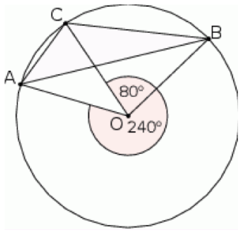
1.1.2 Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta środkowego $\boldsymbol{ABS}$.

1.1.3 Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

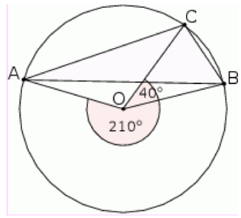
a)



b)

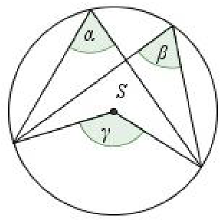


c)



1.1.4 Okrąg podzielono na trzy części w stosunku $2 : 3 : 3$. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów wewnętrznych otrzymanego trójkąta.

1.1.5 Dany jest okrąg o środku w punkcie S. Miara kąta α jest równa $70°$. Ile wynosi suma miar kątów $\beta + \gamma$?



1.1.6 Wierzchołki trójkąta ABC leżą na okręgu i środek O okręgu leży wewnątrz trójkąta. Jeśli kąt AOB ma miarę $20°$, to jaką miarę ma kąt ACB?

1.1.7 Ostrokątny trójkąt równoramienny $\mathbf{ABC}$ o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S, przy czym kąt SAB ma miarę $40°$. Oblicz miarę kąta CAB.

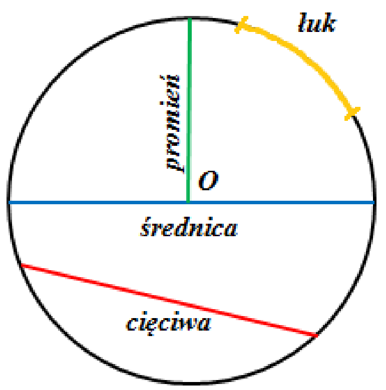
1.2. Wzajemne położenie prostej i okręgu

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Korzystać z własności okręgów (stycznych, rozłącznych, przecinających się)**

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy figurę geometryczną utworzoną ze wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od środka O. Okrąg oznaczamy $o(O,r)$.

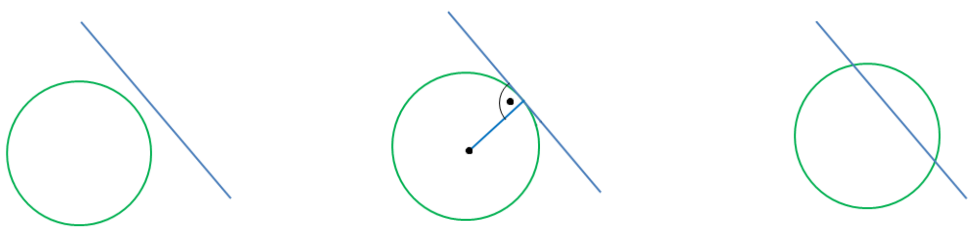
Promieniem okręgu nazywamy każdy odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim punkt leżący na tym okręgu. Długość promienia oznaczamy małą literą r. Okrąg o promieniu r ma długość $2\pi r$.



Cięciwą okręgu nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu. **Średnicą** okręgu nazywamy cięciwę przechodzącą przez jego środek. Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Istnieją trzy przypadki różnego położenia prostej i okręgu:

1. Prosta nie przecina okręgu – leży poza nim i nie mają żadnych punktów wspólnych.
2. Prosta jest styczna do okręgu – ma z nim jeden punkt wspólny.
3. Prosta jest sieczną okręgu – ma z nim dwa punkty wspólne.



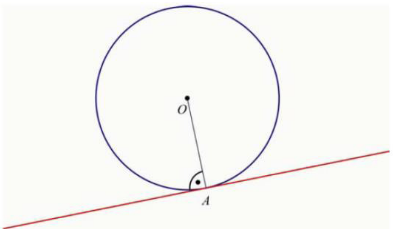
Okrąg i prosta są rozłączne   Okrąg i prosta są styczne   Prosta przecina okrąg

Definicja

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

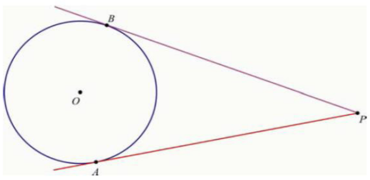
Twierdzenie 1

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.



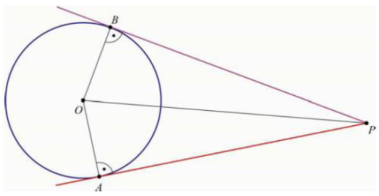
Twierdzenie 2

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe.

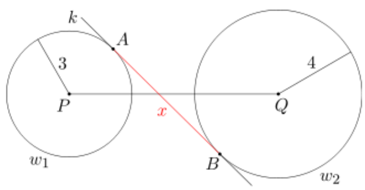


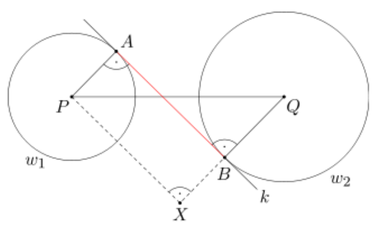
Dowód

Trójkąty POA i POB są prostokątne. Półprosta PO jest dwusieczną kąta $\sphericalangle APB$ (bo okrąg jest wpisany w kąt), zatem $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$. Oznacza to (suma kątów trójkącie), że również $\sphericalangle POA = \sphericalangle POB$.



Ponadto $AO = BO = r$. Z cechy kbk wynika, że rozważane trójkąty są przystające, a to oznacza, że $PA = PB$.





Przykład 1

Dany jest odcinek $|PQ| = 10$ oraz okręgi: jeden o środku P i promieniu 3, a drugi o środku Q i promieniu 4. Okręgi te leżą po przeciwnych stronach prostej k, która jest do nich styczna odpowiednio w punktach

A i B. Oblicz długość odcinka AB.

Zaznaczamy na prostej BQ, lecz poza odcinkiem BQ, taki punkt X, aby długość odcinka BX była równa 33. Następnie uzasadnimy, że czworokąt $ABXP$ jest prostokątem, po czym skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PQX.

Niech X będzie takim punktem leżącym na prostej BQ, poza odcinkiem BQ, że $|BX| = 3$. Proste $APAP$ i BX są prostopadłe do wspólnej prostej AB, więc $AP \parallel BX$ są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, skąd wynika, że czworokąt $APXB$ jest równoległobokiem. A ponieważ w tym równoległoboku kąt $\sphericalangle PAB = 90^{\circ}$, więc równoległobok $ABXP$ jest prostokątem.

Zatem trójkąt PXQ jest trójkątem prostokątnym. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|PQ|^2 = |PX|^2 + |XQ|^2$$

$$|PQ|^2 = |Ab|^2 + (|BQ| + |BX|)^2$$

$$10^2 = |AB|^2 + (4+3)^2$$

$$|AB|^2 = 100 - 49 = 51$$

$$|AB| = \sqrt{51}$$

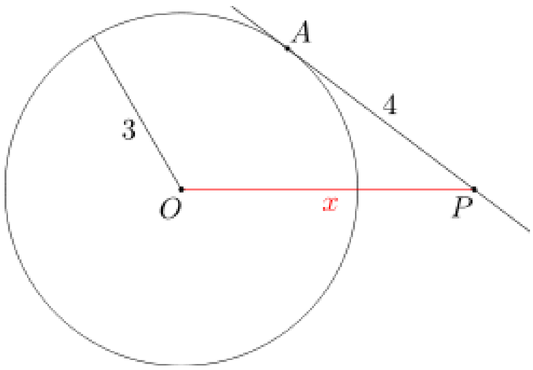
Zadania

1.2.1 Obwód okręgu jest równy $\mathbf{8\pi\ cm}$. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta, której odległość od środka okręgu jest:

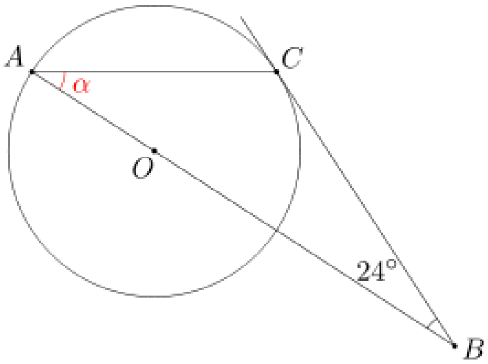
a) nie mniejsza niż $4\ cm$

b) nie większa niż $3\ cm$?

1.2.2 Dany jest okrąg o środku O i promieniu 3. Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono prostą, która jest styczna do danego okręgu w punkcie A. Wiedząc, że długość odcinka AP wynosi 4, oblicz długość odcinka OP.



1.2.3 Dany jest okrąg o środku O oraz punkty A, C leżące na nim. Styczna do tego okręgu w punkcie C przecina prostą AO w punkcie B. Wiedząc, że miara kąta ABC wynosi $24°$, oblicz miarę kąta CAB.



1.3. Wzajemne położenie dwóch okręgów

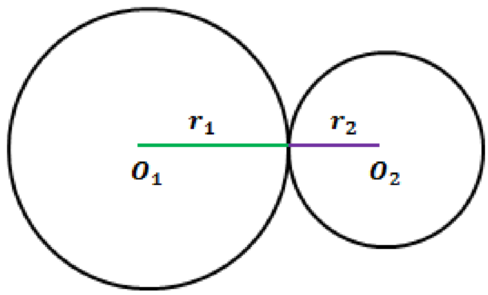
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt**
- **Sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny**
- **Obliczać miary kątów i długości boków trójkąta**

- **Obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona**
- **Korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi**

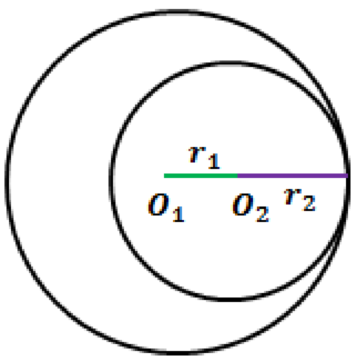
Dwa okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Ze sposobu położenia względem siebie dwóch okręgów wynikają pewne zależności, które warto znać.

Okręgi styczne zewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa sumie długości promieni.



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

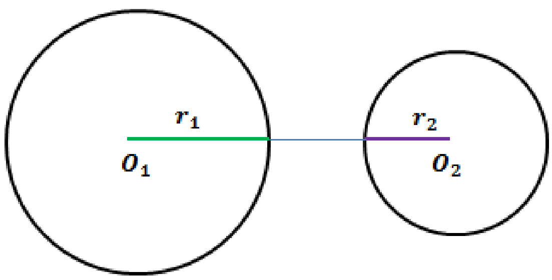
Okręgi styczne wewnętrznie mają jeden punkt wspólny, a odległość ich środków jest równa różnicy długości promieni.



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$$

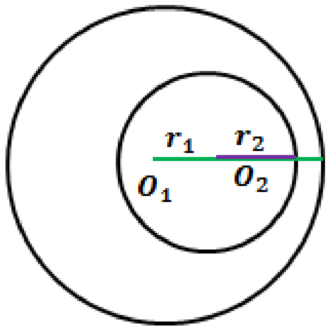
Okręgi rozłączne nie mają punktów wspólnych, a odległość ich środków może być:

- Większa od sumy ich promieni



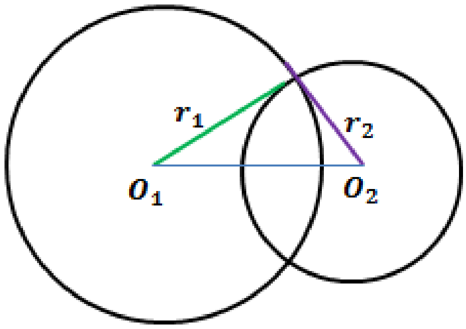
$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

- Mniejsza od modułu różnicy ich promieni



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

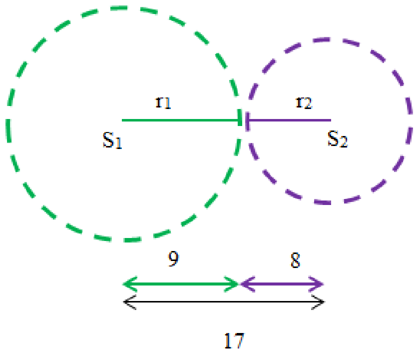
Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków jest większa od modułu różnicy długości promieni, a mniejsza od sumy długości promieni.



$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Przykład 1

Dane są dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 i promieniach odpowiednio równych r_1 i r_2. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli $|S_1S_2| = 17, r_1 = 9, r_2 = 8$.



Robimy rysunek poglądowy, jeden okrąg ma promień $r_1 = 9$, a drugi $r_2 = 8$.

Widać, że dla tych okręgów zachodzi warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, więc dane okręgi są styczne zewnętrznie.

Zadania

1.3.1 Określ wzajemne położenie okręgów $\mathbf{o(O_1, r_1)}$ i $\mathbf{o(O_2, r_2)}$, jeśli $|\mathbf{O_1O_2}| = \mathbf{12\ cm}$ oraz:

a) $r_1 = 3\ cm,\ r_2 = 8\ cm$

b) $r_1 = 5\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

c) $r_1 = 9\ cm,\ r_2 = 7\ cm$

d) $r_1 = 22\ cm,\ r_2 = 10\ cm$

1.3.2 Określ, jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach $\mathbf{10}\ \boldsymbol{cm}$ i $\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$, gdy:

a) okręgi te są styczne zewnętrznie

b) okręgi są styczne wewnętrznie

c) mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego

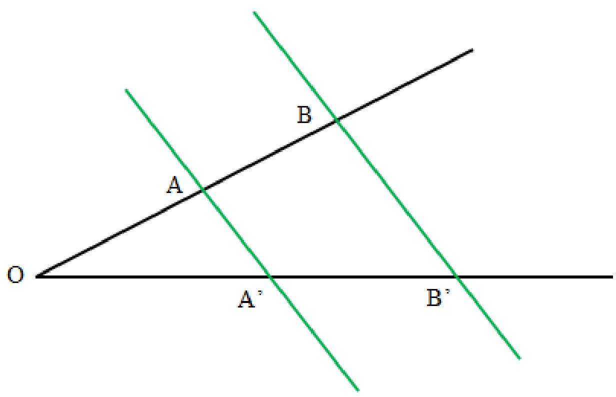
d) większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego

1.4. Twierdzenie Talesa

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

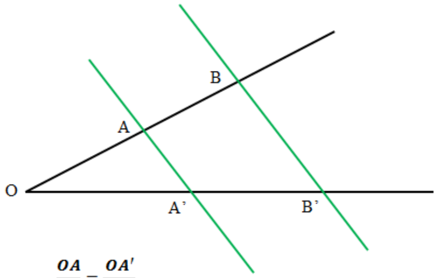
- **Stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych**

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to stosunek długości którychkolwiek dwóch odcinków utworzonych na jednym ramieniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków utworzonych na drugim ramieniu.



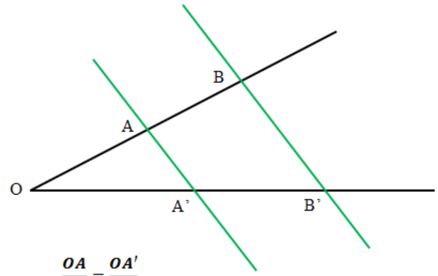
Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać trzy przypadki. Przy obliczeniach wybór uzależniamy od tego, które odcinki mamy dane i który odcinek musimy policzyć, tak aby uzyskane równanie miało jedną niewiadomą, która jest długością szukanego odcinka.

Przypadek 1



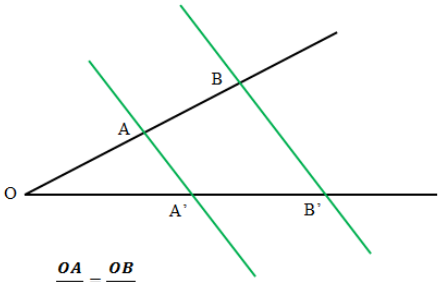
$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$

Przypadek 2

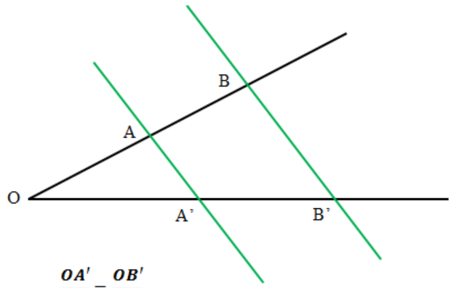


$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$

Przypadek 3



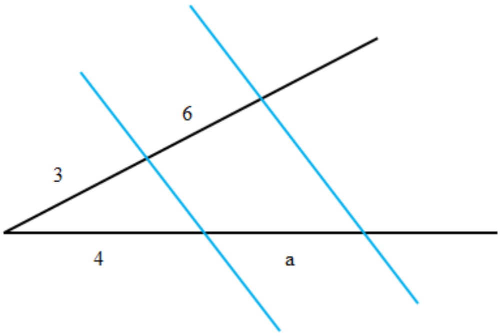
$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$



$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$

Przykład 1

Oblicz długość odcinka a.



W tym przykładzie najprościej będzie skorzystać z przypadku 1.

Układamy proporcję: $\frac{3}{6} = \frac{4}{a}$

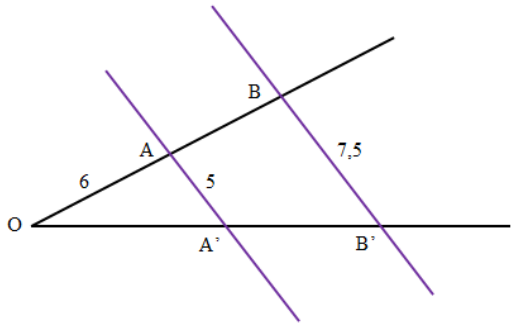
$3a = 6 \cdot 4$

$3a = 24 / : 3$

$a = 8$

Przykład 2

Oblicz długość odcinka AB.



Obliczając długość odcinka AB skorzystamy z przypadku 3.

Układamy proporcję: $\frac{OA}{AA\prime} = \frac{OB}{BB\prime}$

$$\frac{6}{5} = \frac{6 + |AB|}{7,5}$$

$5(6 + |AB|) = 6 \cdot 7,5$

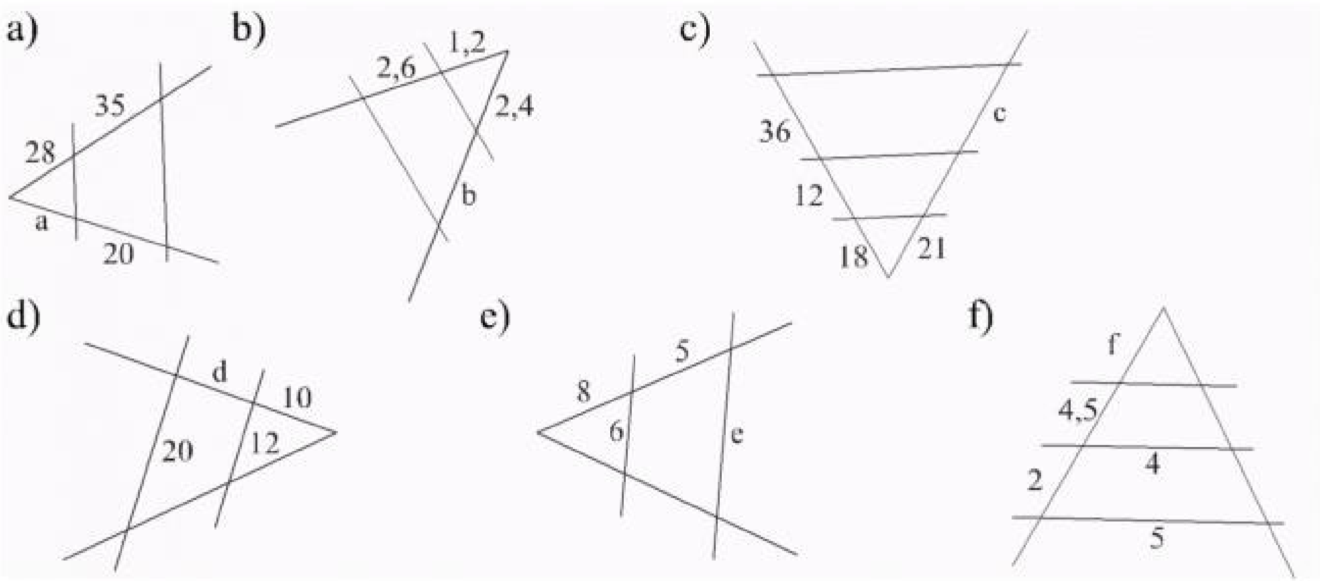
$30 + 5|AB| = 45 / -30$

$5|AB| = 15 / : 5$

$|AB| = 3$

Zadania

1.4.1 Oblicz długość odcinków zaznaczonych na rysunkach literami:



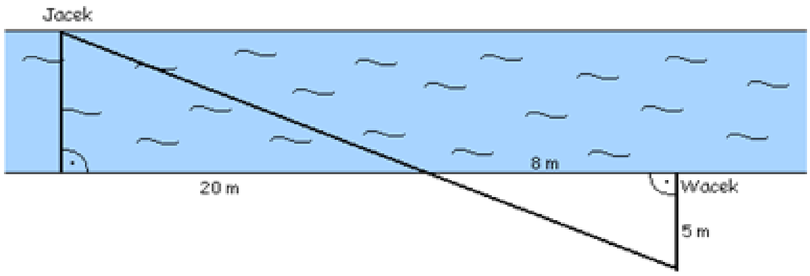
1.4.2 W trapezie $\mathbf{ABCD}$, gdzie $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{CD}$, przedłużono boki $\mathbf{AD}$ i $\mathbf{BC}$ do przecięcia w punkcie $\mathbf{S}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DS}$ wiedząc, że jest on krótszy od odcinka $\mathbf{CS}$ o $\mathbf{3\ cm}$ i $|\mathbf{AD}| = \mathbf{16\ cm}$, a $|\mathbf{BC}| = \mathbf{24\ cm}$.

1.4.3 W trapezie krótsza podstawa wynosi 6, zaś ramiona mają długość 4 i 5. Ramiona trapezu przedłużono tak, iż powstał trójkąt. Oblicz obwód trójkąta wiedząc, że ramię trapezu o długości 4 zostało przedłużone o odcinek długości 3.

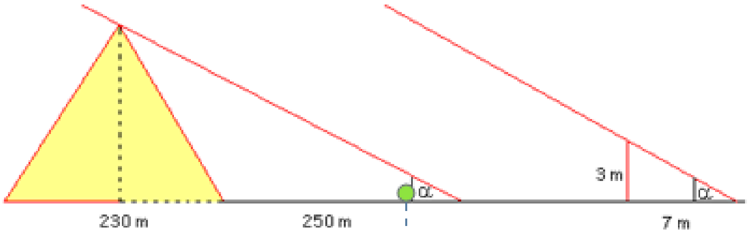
1.4.4. W trójkąt równoramienny o podstawie $\mathbf{8\ cm}$ wpisano kwadrat o boku równym $\mathbf{6\ cm}$, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Ile centymetrów ma wysokość tego trójkąta?

1.4.5. Z odległości 5 m wykonano zdjęcie człowieka mającego 170 cm wzrostu aparatem, którego długość obiektywu w chwili wykonania zdjęcia była równa 0,1 m. Oblicz, jaką wysokość ma obraz tego człowieka na fotografii.

1.4.6 Jacek i Wacek stoją na przeciwnych brzegach rzeki. Korzystając z danych na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



1.4.7. Oblicz wysokość piramidy Cheopsa, mając dane: długość krawędzi podstawy – 230 m, długość cienia piramidy – 250 m, długość użytego drąga – 3 m, długość cienia drąga – 7 m.



1.4.8. Dom o szerokości 15 m sfotografowano aparatem, którego odległość soczewki od błony fotograficznej jest równa 8 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość domu na zdjęciu jest równa 10 cm.

1.4.9. W skansenie jest żuraw studzienny. Jego dźwignię AB podparto w punkcie C tak, że ramiona dźwigni mają długości: AC = 2,4 i CB = 7,2 m. O ile metrów opuści się koniec dźwigni B, gdy koniec A podniesie się na wysokość 4 metrów.

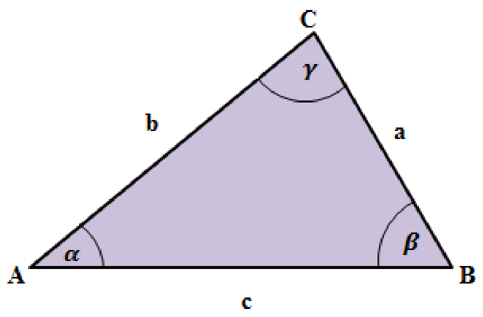
1.4.10. Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wielkości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów, jeżeli rurka ma długość 20 cm, a średnicę 2 cm?

1.5 Trójkąty. Twierdzenie Pitagorasa i odwrotne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- Sprawdzać, czy z danych odcinków można zbudować trójkąt
- Sprawdzać, czy dany trójkąt jest prostokątny
- Obliczać miary kątów i długości boków trójkąta
- Obliczać pole trójkąta ze wzoru Herona
- Korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

Trójkąt – to wielokąt mający trzy boki.



Suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Podział trójkątów

Trójkąty można podzielić ze względu na rodzaje kątów i ze względu na długości boków.

Podział trójkątów ze względu na kąty:

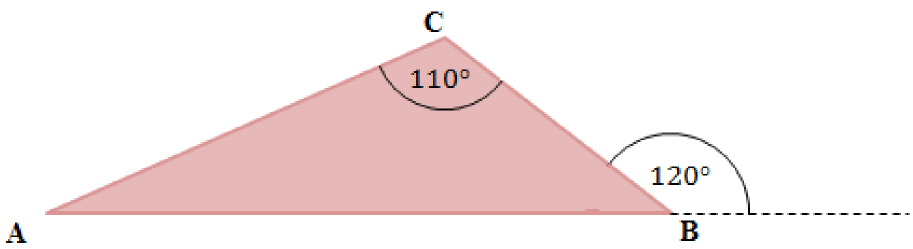
1. Ostrokątne – wszystkie kąty są ostre.
2. Prostokątne – jeden z kątów jest prosty, dwa kąty są ostre. Każdy z boków, który leży przy tym kącie, nazywamy **przyprostokątną**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną.**
3. Rozwartokątne – jeden z kątów jest rozwarty, dwa kąty są ostre.

Podział trójkątów ze względu na boki:

1. Równoboczne – wszystkie boki są tej samej długości i każdy kąt ma miarę 60°.
2. Równoramienne – przynajmniej dwa boki (ramiona) są równe i kąty przy podstawie mają równe miary.
3. Różnoboczne – każdy bok ma inną długość i każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 1

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 110º, a kąt zewnętrzny do kąta przy wierzchołku B ma miarę 120º. Oblicz kąty w trójkącie ABC i określ, jakiego rodzaju jest to trójkąt.



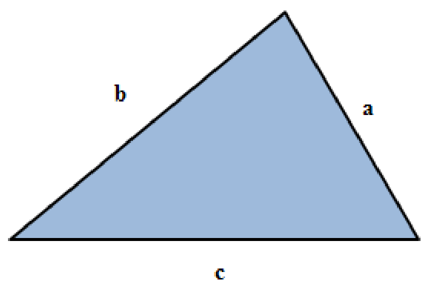
$\sphericalangle B = 180° - 120° = 60°$

$110° + 60° + \sphericalangle A = 180°$

$170° + \sphericalangle A = 180°$

$\sphericalangle A = 180° - 170° \sphericalangle A = 180° - 170° \Rightarrow\Rightarrow \sphericalangle A = 10° \sphericalangle A = 10°$

Nierówność trójkąta



W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} > c$
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > b$
$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} > a$

Przykład 2

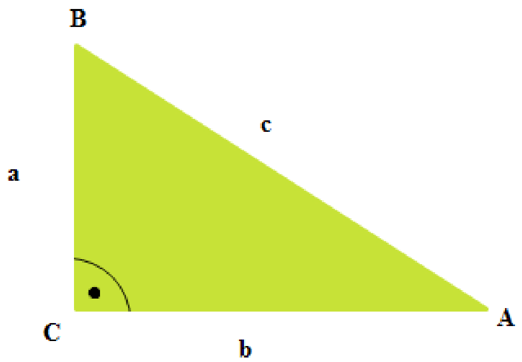
Sprawdź, czy odcinki o długościach $5, 6, 3\sqrt{2}$ mogą być bokami trójkąta.

Odcinki mają różne długości, należy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$5 + 3\sqrt{2} = 5 + 4{,}25 \approx 9{,}25 > 6$

Z podanych odcinków można zbudować trójkąt.

Twierdzenie Pitagorasa

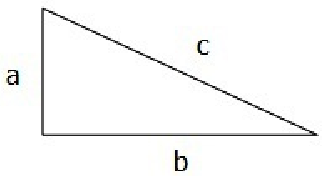


Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przeciwprostokątnych.

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Przykład 3

Oblicz długość przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym, jeżeli stosunek ich długości wynosi: $3{:}\,4$, a przeciwprostokątna ma długość $15\ \mathrm{cm}$.



$a = ?$

$b = ?$

$c = 10\ cm$

Stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3 : 4$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Skoro trójkąt jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = (15\ cm^{\,2})$$

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 225\ cm^2$$

$$\frac{25}{16}b^2 = 225\ cm^2 / \cdot \frac{16}{25}$$

$$b^2 = 144\ cm^2$$

$$b = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$$

Obliczmy drugi bok, korzystając z wcześniej wyprowadzonej zależności:

$$a = \frac{3}{4}b \ \Rightarrow \ a = \frac{3}{4} \cdot 12\ cm = 9\ cm$$

Odpowiedź: Przyprostokątne mają długości $9\ cm$ i $12\ cm$.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład 4

Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest prostokątny:

a) $\sqrt{24}, \sqrt{3}, \sqrt{21}$

b) $2, \sqrt{10}, 4$

a) $\left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2$

$$24 = 3 + 21$$

$$24 = 24$$

$$L = P$$

Trójkąt jest prostokątny

c) $4^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + 2^2$

$$16 = 10 + 4$$

$$16 \neq 14$$

$$L \neq P$$

Trójkąt nie jest prostokątny

Ciekawostka

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy **trójką pitagorejską.**
Przykłady takich trójek:

3, 4, 5;

5, 12, 13;

40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich: wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q takie, że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$$a = p^2 - q^2,\ b = 2pq,\ c = p^2 + q^2.$$

Tak otrzymane liczby stanowią trójkę pitagorejską, bowiem spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Zadanie (dla chętnych)

Znajdź inny przykład trójki pitagorejskiej.

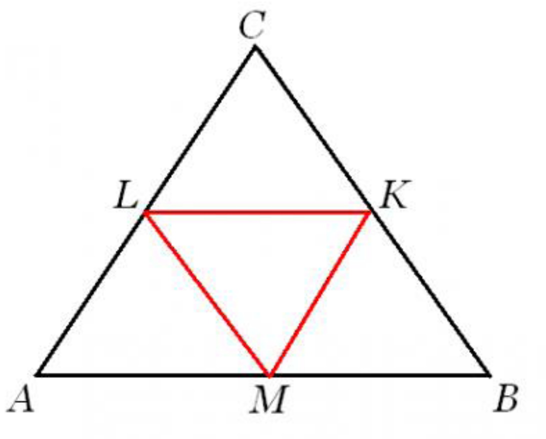
Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie połączymy środki dwóch przeciwległych boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

$AB \parallel LK \qquad |LK| = \frac{1}{2}|AB|$

$AC \parallel KM \qquad |KM| = \frac{1}{2}|AC|$

$BC \parallel LM \qquad |LM| = \frac{1}{2}|BC|$



Zadania

1.5.1 Wyznacz kąty w trójkącie wiedząc, że stosunek ich miar jest równy 3:4:11.

1.5.2 Jeden kąt trójkąta ma miarę 26°, a różnica dwóch pozostałych kątów wynosi 12°. Wyznacz kąty tego trójkąta.

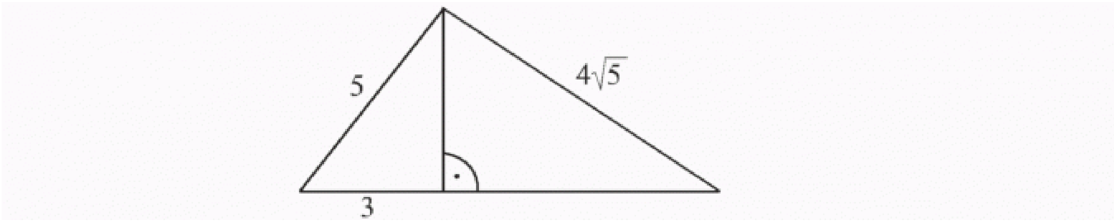
1.5.3 Znajdź długości boków trójkąta, którego obwód wynosi 48 cm, a boki mają się do siebie, jak 3 : 5 : 4.

1.5.4 W kole o promieniu 10 cm narysowano cięciwę o długości 12 cm. Znajdź odległość tej cięciwy od środka tego koła.

1.5.5 W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna wynosi 12 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

Odpowiedź: $6\sqrt{2}\ cm$

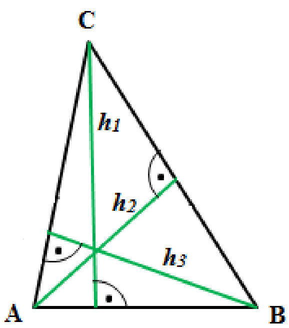
1.5.6 Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku:

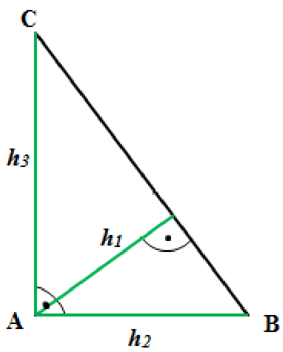


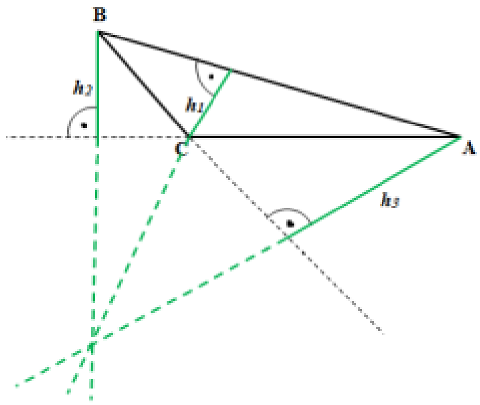
1.5.7 Dany jest trójkąt $\mathbf{ABC}$ o bokach długości: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{6}, |\mathbf{BC}| = \mathbf{4}, |\mathbf{AC}| = \mathbf{5}$. Punkt $\mathbf{M}$ jest środkiem boku $\mathbf{AC}$, punkt $\mathbf{N}$ – środkiem boku $\mathbf{BC}$. Obliczyć obwód trapezu $\mathbf{ABNM}$.

Wysokości i środkowe w trójkącie

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

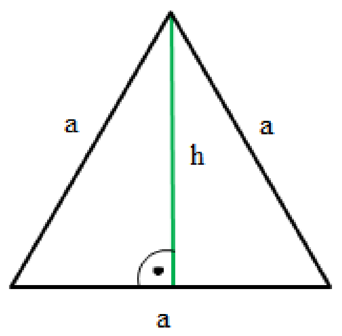






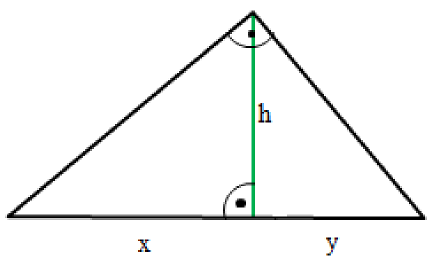
Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta. W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta, w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego, a w trójkącie rozwartokątnym poza trójkątem.

W **trójkącie równobocznym** wszystkie wysokości mają jednakową długość.



Wysokość trójkąta o boku jest równa

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a}\sqrt{3}}{2}$$

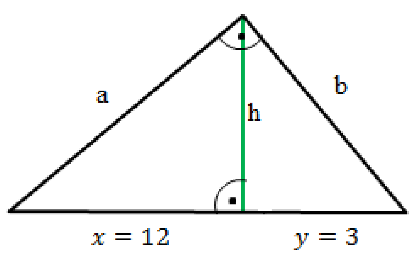


W **trójkącie prostokątnym** wysokość h, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki x, y, dla których $\boldsymbol{h} = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}$

Przykład 5

W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości $3\ cm$ i $12\ cm$. Oblicz długość tej wysokości i długości jego przyprostokątnych.

a,b – szukane długości przyprostokątnych
h – wysokość



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej a.

$a^2 = x^2 + h^2$

$a^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}\ cm$

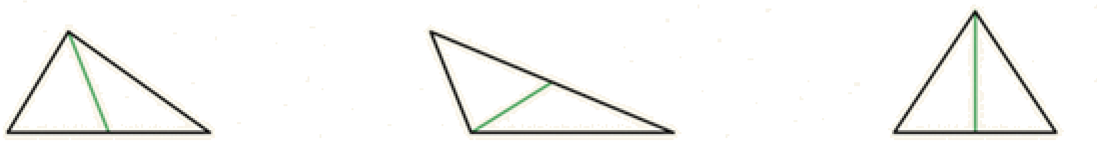
Podobnie liczmy długość przyprostokątnej b.

$b^2 = y^2 + h^2$

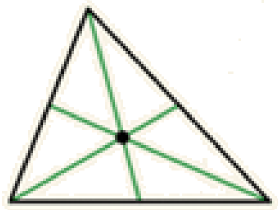
$b^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$

Wysokość trójkąta ma długość $6\ cm$, a przyprostokątne $6\sqrt{5}\ cm$ i $3\sqrt{5}\ cm$.

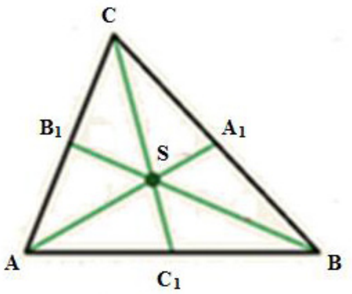
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości.

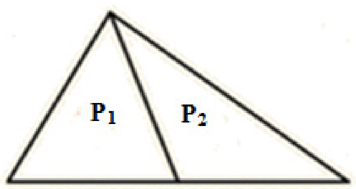


Środek ciężkości S dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$.



$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{2}{1}$$

Środkowe dzielą trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.



$$P_1 = P_2$$

Znając długości wszystkich boków trójkąta, można w bardzo łatwy i szybki sposób obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona.

Twierdzenie (wzór Herona)

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Przykład 6

Oblicz pole trójkąta o bokach długości $3, 5, 6$.

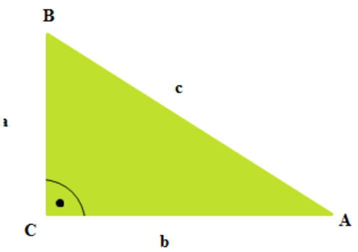
Najpierw liczymy, ile wynosi połowa obwodu trójkąta $p = \frac{3+5+6}{2} = 7$

$$P = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Odpowiedź: Pole trójkąta o bokach $3,\ 5, 6$ wynosi $2\sqrt{14}$.

Twierdzenie

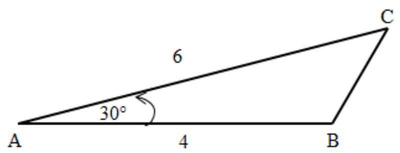
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:



$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BCA|}$$

Przykład 7

Oblicz pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot sin|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot sin30°$$

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6j^2$.

Zadania

1.5.8 W trójkącie równoramiennym dwie środkowe mają długość po 15 cm, a trzecia ma długość 18 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

1.5.9 W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową o długości 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

1.5.10 Środkowa CD trójkąta ABC jest równa bokowi AC. Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $|AB| = 4$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$.

1.5.11 Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli $|AC| = 4$, $|AB| = 7$, $\sphericalangle BAC = 60°$.

1.5.12 Oblicz pole trójkąta o bokach 12 i $9\sqrt{2}$ oraz kącie pomiędzy tymi bokami o mierze 30°.

1.5.13 W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono prostą prostopadłą do boku AB, przecinającą bok AC w punkcie E i bok AB w punkcie F. Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu C. Wiedząc, że $|EC| = 3|FD| = 1$, oblicz sinus kata CAB.

1.6. Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu*

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

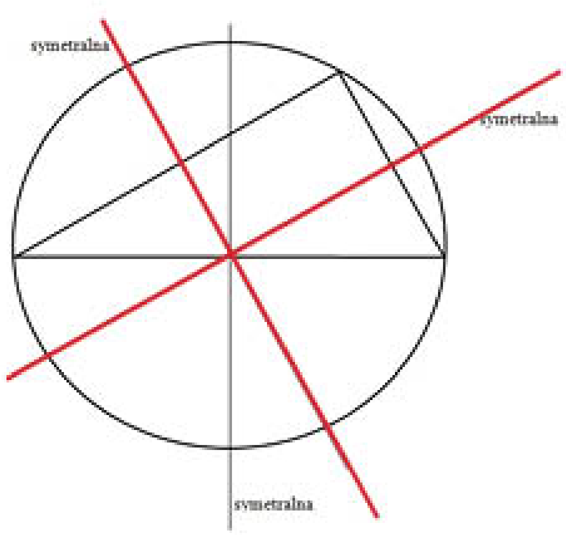
- **Stosować twierdzenia charakteryzujące trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu**

Okrąg opisany na trójkącie

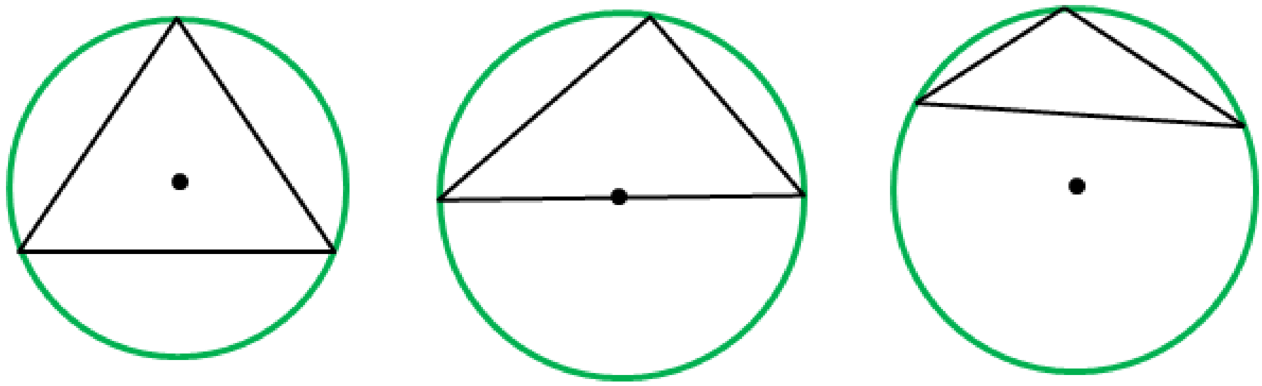
Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Symetralna to prosta dzieląca odcinek na pół i przecinająca go pod kątem prostym.

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.



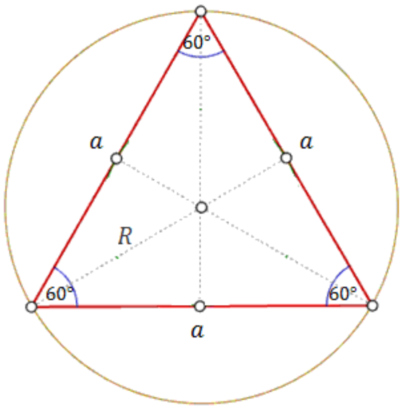
Na każdym trójkącie można opisać okrąg.



- Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży poza trójkątem.

Okręgi opisane na wybranych trójkątach

Trójkąt równoboczny



R – promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

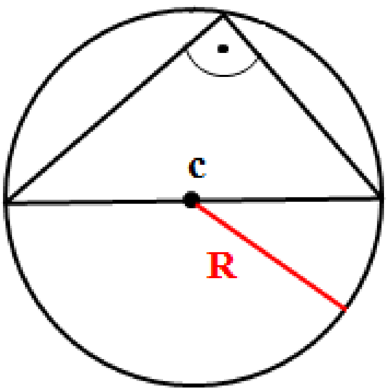
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$\boldsymbol{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{2}{3}h}$$

Trójkąt prostokątny



c – przeciwprostokątna

h – wysokość

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{2}c}$$

Przykład 1

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku$a = 12\ cm$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym liczymy ze wzoru $R = \frac{2}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 12\ cm$, to:

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

więc $R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}R = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $4\ cm$ i $10\ cm$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Przeciwprostokątna jest więc średnicą tego okręgu i jej długość wynosi $2R$.

Z twierdzenia Pitagorasa:

$(2R)^2 = 4^2 + 10^2$

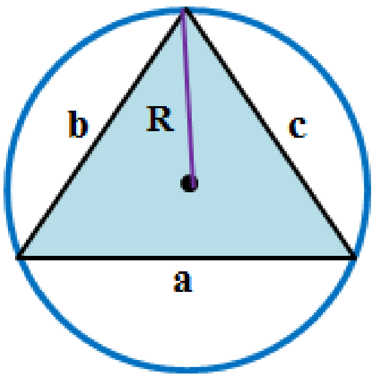
$(2R)^2 = 16 + 100$

$4R^2 = 116 /: 4$

$R^2 = 29 \Rightarrow R = \sqrt{29}$

Odpowiedź: Promień okręgu ma długość $R = \sqrt{29}$.

Pole trójkąta wpisanego w okrąg



Kiedy mamy dane długości boków trójkąta oraz promień okręgu na nim opisanego, możemy w łatwy sposób obliczyć pole tego trójkąta.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wynosi $\boldsymbol{P} = \frac{abc}{4R}$

Zadania

1.6.1 Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

1.6.2 Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $25\pi\ cm^2$. Oblicz pole tego trójkąta.

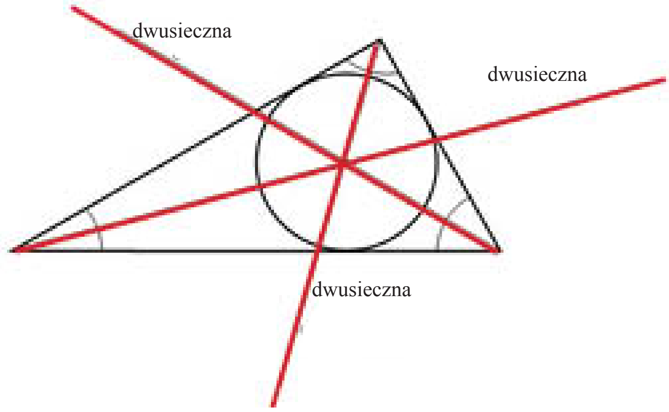
1.6.3 Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

a) równobocznym, o boku długości $8\ cm$.

b) prostokątnym, o przyprostokątnych $12\ cm$ i $18\ cm$.

1.6.4 Promień okręgu opisanego na trójkącie o polu równym 204 jest równy $\mathbf{13\frac{13}{24}}$. Dwa boki tego trójkąta mają długości 26 i 25. Oblicz długość trzeciego boku.

Okrąg wpisany w trójkąt



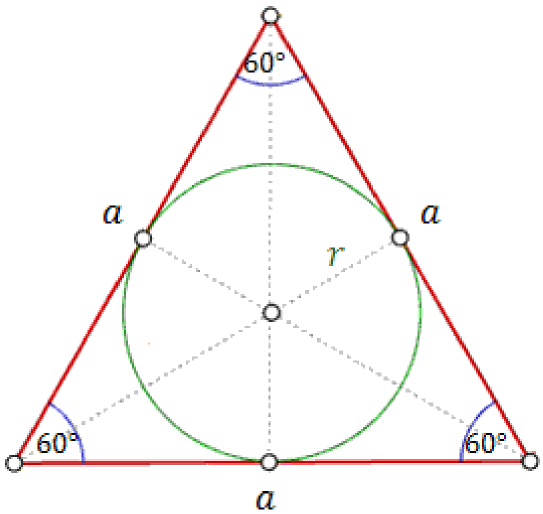
Dwusieczna kąta to półprosta, która ma początek w wierzchołku kąta i dzieli go na dwa kąty o równych miarach.

Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Okręgi wpisane w wybrane trójkąty

Trójkąt równoboczny



r – promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

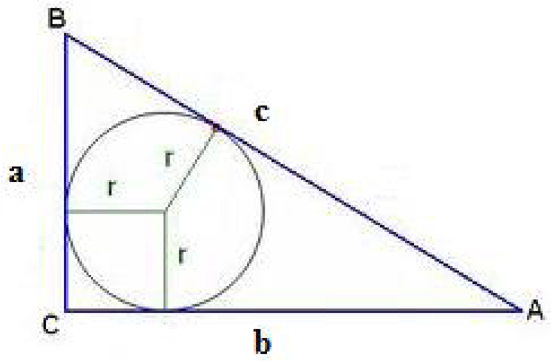
h – wysokość

W trójkącie równobocznym zachodzą następujące wzory:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

W trójkącie prostokątnym zachodzi następujący wzór:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Przykład 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku$a = 8\ cm$.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny liczymy ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, skoro $a = 8\ cm$, to:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

więc $r = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm.$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 8\ cm$ wynosi

$r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm.$

Przykład 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3\ cm$

i przeciwprostokątnej $5\ cm$.

Z twierdzenia Pitagorasa

$5^2 = 3^2 + a^2$

$25 = 9 + a^2$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4\ cm$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny liczymy ze wzoru $r = \frac{a+b+c}{2}$, więc

$$r = \frac{4+3-5}{2} = 1$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość $1\ cm$.

Pole trójkąta opisanego na okręgu

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c opisanego na okręgu o promieniu r jest równe

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Zadania

1.6.5 Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

1.7.6 Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz:

a) Pole koła opisanego na tym trójkącie.

b) Obwód okręgu wpisanego w ten trójkąt.

c) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Oblicz stosunek pola koła wpisanego do pola koła opisanego na trójkącie równobocznym.

1.6.7 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość $\mathbf{12\ cm}$. Kąty przy tej podstawie mają po $\mathbf{30^\circ}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

1.6.8 Znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $\mathbf{a}$ i opisanego na tym trójkącie wiedząc, że:

a) $a = 4$ b) $a = 3\sqrt{6}$

c) $a = 6\sqrt{2}$ d) $a = 12$

1.6.9 W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna BC ma długość 13. Stosunek promienia koła wpisanego w ten trójkąt do promienia koła opisanego na tym trójkącie wynosi 4/13. Oblicz tangensy kątów ostrych tego trójkąta.

1.7. Przystawanie i podobieństwo trójkątów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Rozpoznawać trójkąty przystające i podobne**
- **Wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów**

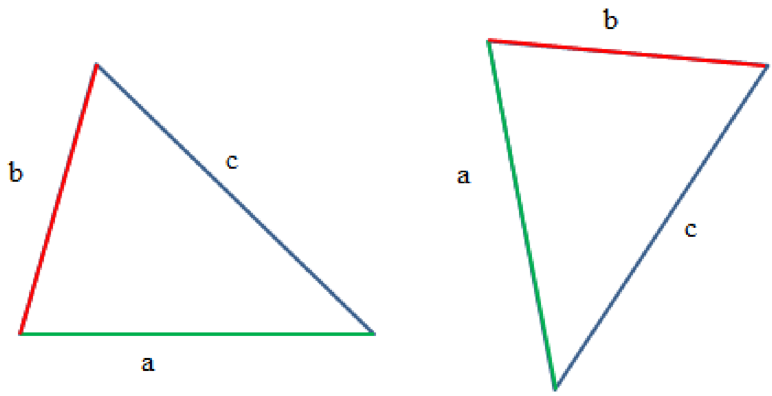
Mówimy, że dwie figury są przystające, jeśli mają ten sam kształt i tę samą wielkość.
Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same.

Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem .

Aby sprawdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba porównywać długości ich wszystkich boków i miar wszystkich kątów. Wystarczy sprawdzić tylko niektóre warunki, zwane cechami przystawania trójkątów.

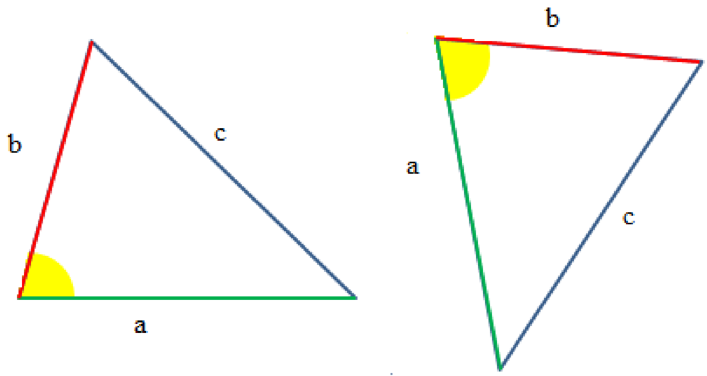
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



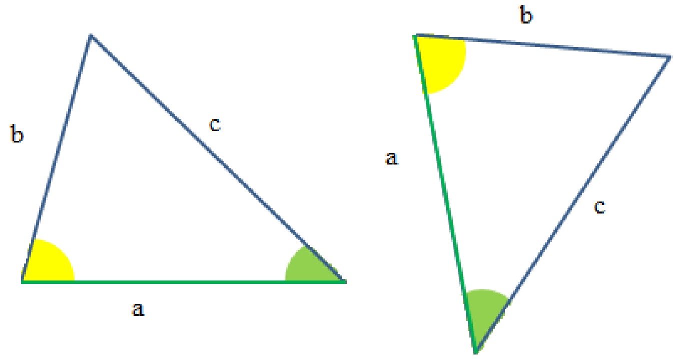
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



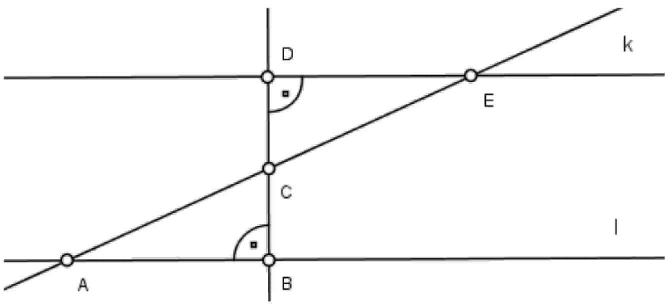
III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Przykład 1

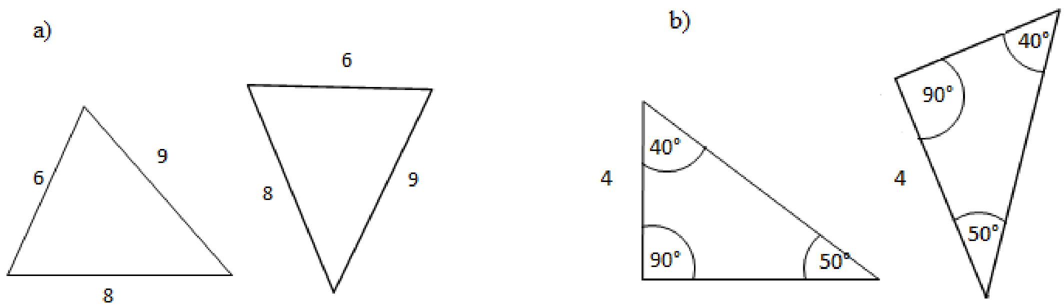
Proste k i l są równoległe. Punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.



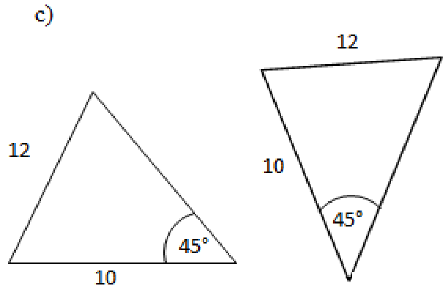
Kąty BCA oraz DCE jako kąty wierzchołkowe mają równe miary. $|DC| = |CB|$, ponieważ punkt C jest środkiem odcinka BD. Wobec powyższych faktów, trójkąty ABC oraz DCE na mocy cechy kbk są trójkątami przystającymi, stąd wynikają równości $|DE| = |AB|$ i $|AC| = |CE|$.

Zadanie

1.7.1 Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.



c)



Podobieństwo trójkątów

Figury podobne mają taki sam kształt, lecz mogą różnić się wielkością.

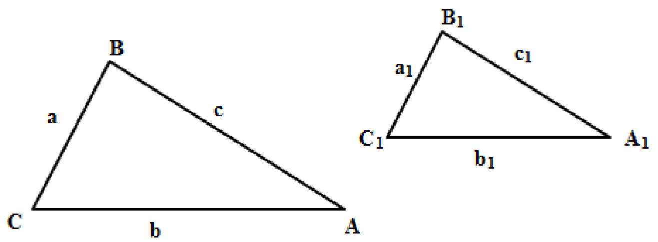
Figurami podobnymi są na przykład każde dwa odcinki, proste, koła (okręgi).

Dwa wielokąty są podobne, jeżeli mają taką samą liczbę boków, mają odpowiednie kąty równe oraz odpowiednie boki proporcjonalne.

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem ~.

I cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



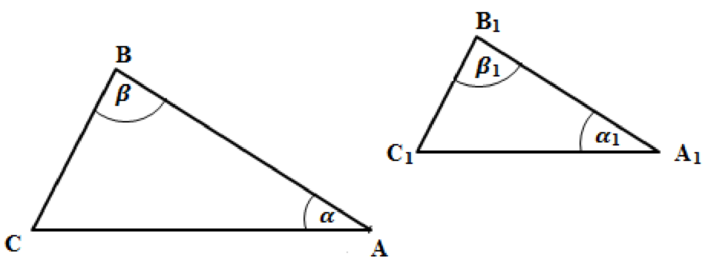
$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} = k$$

k – skala podobieństwa

$\Delta ABC \sim \Delta A_1 A_2 A_3$

II cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



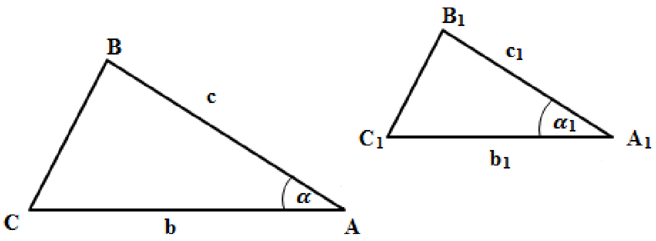
$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \beta_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1 A_2 A_3$

III cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



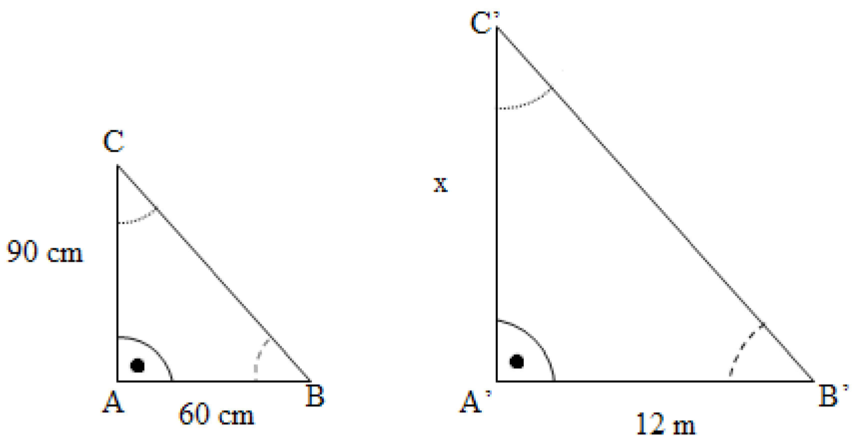
$\alpha = \alpha_1$

$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1A_2A_3$

Przykład 2

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm.
W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Oblicz wysokość wieży.



Na mocy cechy (kkk) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$\frac{0,9}{0,6} = \frac{x}{12}$

$6x = 9 \cdot 12$

$x = \frac{9 \cdot 12}{6} = 18$

Odpowiedź: Wieża ma wysokość 18 m.

Zadania

1.7.2 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$ w skali $\mathbf{k = 2}$. Oblicz długości boków trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$,

jeśli: $|\mathbf{AB}| = \mathbf{5}$, $|\mathbf{BC}| = \mathbf{7}$, $|\mathbf{CA}| = \mathbf{4}$.

1.7.3 Ramiona trapezu $\mathbf{ABCD}$ przedłużono aż do ich przecięcia w punkcie $\mathbf{E}$. Oblicz długość odcinka $\mathbf{DE}$.

1.7.4 Punkty $\mathbf{A'}, \mathbf{B'}, \mathbf{C'}$ są środkami boków trójkąta $\mathbf{ABC}$. Pole trójkąta $\mathbf{A'}, \mathbf{B'}, \mathbf{C'}$ jest równe $\mathbf{4}$. Oblicz pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

17.5 Trójkąt $\mathbf{ABC}$ jest podobny do trójkąta $\mathbf{A'B'C'}$. Oblicz długość boku $|\mathbf{A'C'}|$, jeżeli $|AB| = 8cm, |AC| = 5\ cm, |A'B'| = 12\ cm$.

1.7.6 Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Trójkąt ABC ma boki o długości $4\ cm, 6\ cm$ i $8\ cm$. Obwód trójkąta $A'B'C'$ wynosi $135\ cm$. Oblicz długości boków trójkąta $A'B'C'$.

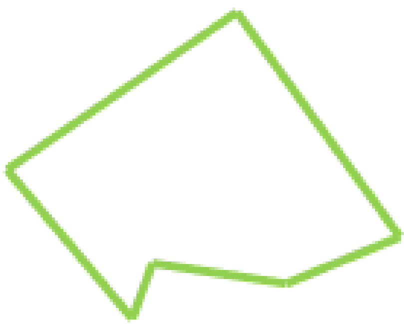
1.7.7 Drzewo o wysokości $4\ m$ rzuca cień o długości $8\ m$. O tej samej porze dnia znak drogowy rzuca cień o wysokości $3m$. Oblicz wysokość znaku drogowego.

1.8. Wielokąty

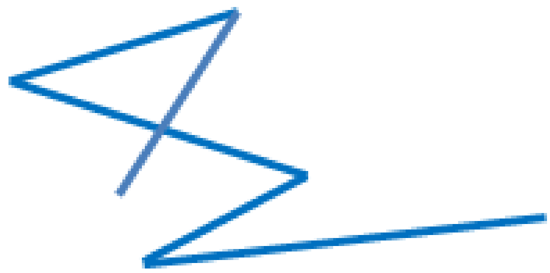
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać liczbę przekątnych wielokąta**
- **Obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta**

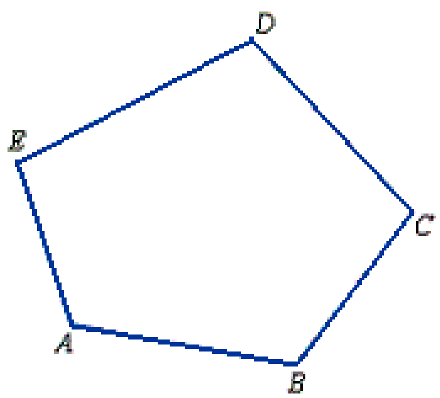
Łamaną nazywamy figurę składającą się z odcinków połączonych w ten sposób, że koniec pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, koniec drugiego odcinka jest początkiem trzeciego itd., przy czym każdy koniec odcinka może być końcem jeszcze tylko co najwyżej jednego odcinka tej łamanej.
Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**, końce tych odcinków nazywamy **wierzchołkami łamanej.**



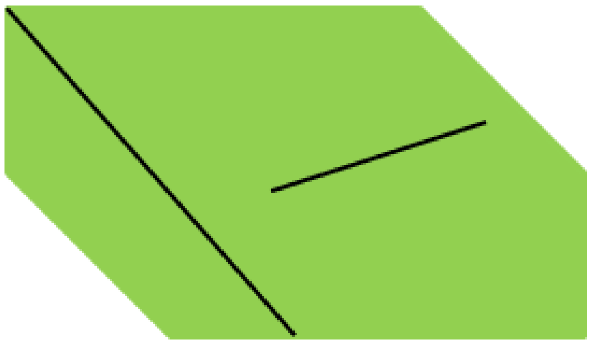
Łamana zwyczajna zamknięta



Łamana zwyczajna otwarta

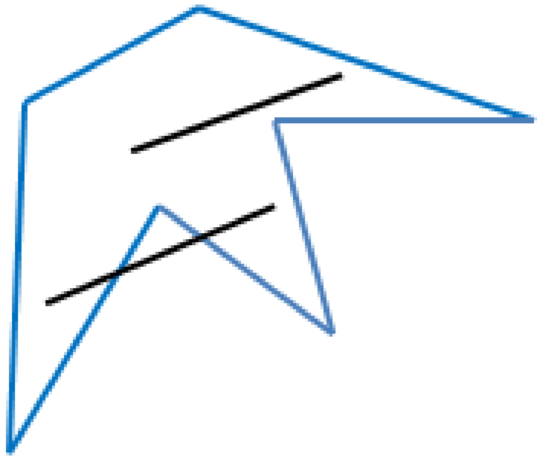


Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.
Wielokąt o n bokach nazywamy również n-kątem.
Wielokąty można podzielić na wielokąty wklęsłe i wielokąty wypukłe.



Wielokąt wypukły

Każdy odcinek całkowicie zawiera się w wielokącie



Wielokąt wklęsły

Istnieje choć jeden odcinek (o końcach w wielokącie) taki, że część odcinka jest poza wielokątem

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.

Wzór na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

Przykład 1

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta:

$$(n-2)\cdot 180°$$

Przykład 2

Oblicz liczbę przekątnych 17-kąta oraz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

$n = 17$

$$\frac{(n-3)n}{2} = \frac{(17-3)\cdot 17}{2} = \frac{14\cdot 17}{2} = 119$$

$$(n-2)\cdot 180° = (17-2)\cdot 180° = 15\cdot 180° = 2700°$$

Z obu wzorów możemy oczywiście korzystać w „drugą stronę". To znaczy, mając daną liczbę przekątnych lub sumę miar kątów wewnętrznych, możemy obliczyć, z jakim wielokątem mamy do czynienia.

Przykład 3

Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 54. Jaki to wielokąt?

Aby ustalić, z jakim wielokątem mamy do czynienia, należy obliczyć „n". Wykorzystujemy wzór na liczbę przekątnych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$\frac{(n-3)n}{2} = 54 \;/\cdot 2$$

Obliczamy powstałe równanie:

$$(n-3)n = 108$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 441$$

$$\sqrt{\Delta} = 21$$

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-21}{2} = \frac{-18}{2} = -9$ – nie spełnia warunków zadania, ponieważ liczba boków wielokąta nie może być ujemna

$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+21}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest dwunastokąt.

Przykład 4

Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $1080°$. Jaki to wielokąt? Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$$(n-2) \cdot 180° = 1080° \;/ : 180°$$

$$n - 2 = 6$$

$$n = 8$$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest ośmiokąt.

Zadania

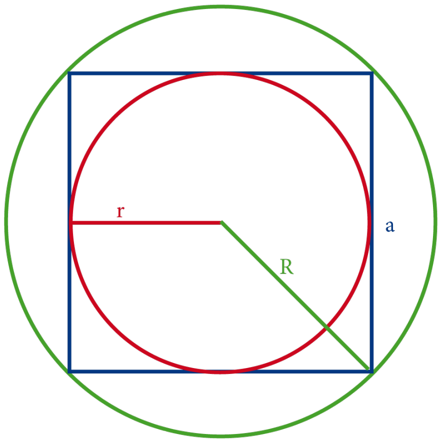
1.8.1 Liczba przekątnych pewnego wielokąta wynosi 35. Jaki to wielokąt?

1.8.2 Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi $\mathbf{1620°}$. Jaki to wielokąt?

Czworokąty

Na początek przypomnimy podstawowe wzory na pola czworokątów.

Kwadrat



$P = a^2$

$P = 2R^2$

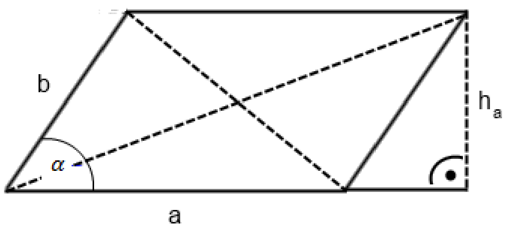
$P = 4r^2$

d – przekątna

$d = a\sqrt{2}$

$P = \frac{1}{2}d^2$

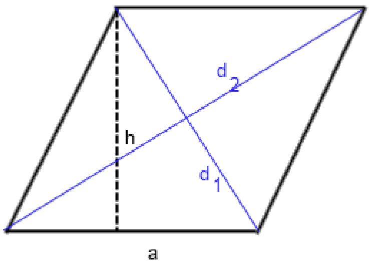
Równoległobok



$P = a \cdot h_a$

$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$

Romb

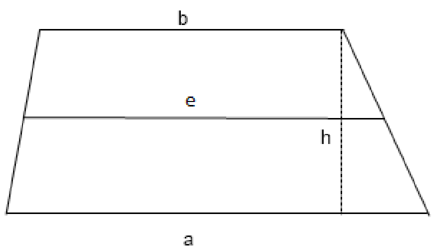


$P = a \cdot h_a$

$P = \frac{1}{2}d_1d_2$

$P = a^2 sin\alpha$

Trapez

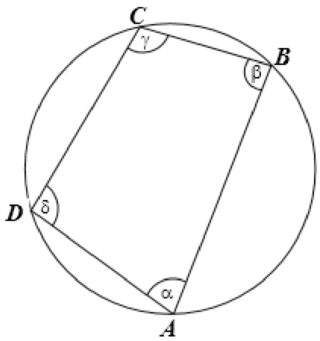


$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

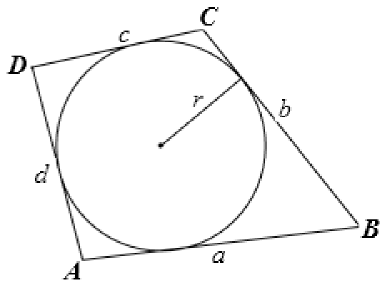
e – odcinek łączący środki ramion trapezu

$e = \frac{a+b}{2}$

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:
$a + c = b + d$



Zadania

1.8.3 Oblicz pole równoległoboku o bokach $\mathbf{7\ cm}$ i $\mathbf{12\ cm}$, którego dwa sąsiednie kąty różnią się o 60°.

1.8.4 W rombie $\mathbf{ABCD}$ bok AB ma długość $\mathbf{20\ cm}$, a przekątna $\mathbf{BD}$ ma długość $\mathbf{24\ cm}$. Punkty $\mathbf{E, F, G, H}$ są kolejno środkami boków rombu.

a) wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest prostokątem,

b) oblicz pole tego prostokąta.

1.8.5 W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą $\mathbf{45°}$ i $\mathbf{30°}$. Oblicz pole trapezu.

1.8.6 Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3cm. Oblicz pole tego trapezu.

1.8.7 W trójkącie prostokątnym ABC dane są $|\mathbf{AC}| = \mathbf{12}$, $\sphericalangle\mathbf{CAB} = \mathbf{60°}$. Poprowadzono prostą równoległą do przeciwprostokątnej AB, dzielącą bok AC w stosunku 1 : 5, licząc od wierzchołka C. Prosta ta przecina bok AC w punkcie M, a bok BC w punkcie N. Oblicz pole trapezu ABNM.

1.88 W czworokącie $\mathbf{ABCD}$ przekątne $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BD}$ przecinają się w punkcie $\mathbf{E}$. Dane są pola trzech trójkątów $: \mathbf{P_{BCE}} = \mathbf{15}, \mathbf{P_{ECD}} = \mathbf{5}, \mathbf{P_{AED}} = \mathbf{10}$. Oblicz pole czworokąta $\mathbf{ABCD}$.

1.9. Wielokąty foremne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego**
- **Obliczać sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego**
- **Obliczać pola wielokątów foremnych**

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, w którym wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.

Wszystkie wielokąty foremne są figurami wypukłymi.
Wielokątem foremnym o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny to kwadrat.
Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o *n* bokach można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

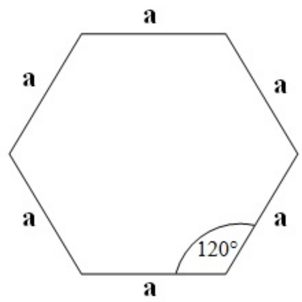
Suma miar kątów wewnętrznych *n*-kąta jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg, a środki tych okręgów pokrywają się.

Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.

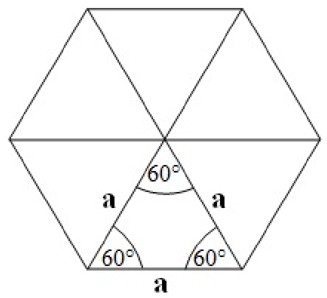
Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.

Ważnym wielokątem foremnym jest **sześciokąt foremny.**



Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi $720°$.

Jeden kąt wewnętrzny ma miarę $120°$.



Aby znaleźć wzór na pole sześciokąta foremnego, należy w nim poprowadzić przekątne, które podzielą go na sześć trójkątów równobocznych.

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Przykłady wielokątów foremnych

Wielokąt foremny	Pole	Promień okręgu opisanego na wielokącie	Promień okręgu wpisanego w wielokąt
Trójkąt równoboczny	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Kwadrat	$P = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{1}{2}a$
Sześciokąt	$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zadania

1.9.1 Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $4,5\ \mathrm{cm}$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

1.9.2 W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków, otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

1.9.3 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód o długości $10\ \mathrm{cm}$. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

1.9.4 Pole kwadratu jest równe $\mathbf{8\ cm^2}$. Oblicz promień koła:

a) opisanego na kwadracie,

b) wpisanego w kwadrat.

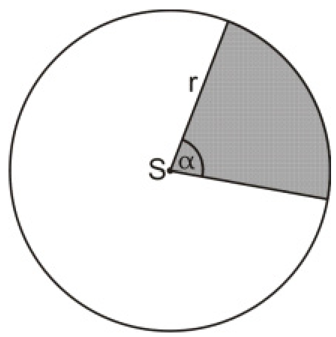
1.9.5 W koło o polu $\mathbf{6,25\pi\ cm^2}$ wpisz czworokąt foremny. Oblicz pole tego czworokąta.

1.10. Pole koła i długość okręgu

Dla danego koła o promieniu r możemy policzyć:

pole: $\boldsymbol{P = \pi r^2}$

oraz obwód: $\boldsymbol{L = 2\pi r}$



Zastanówmy się teraz, jak obliczyć pole wycinka koła o danym promieniu r. Kąt pełny ma 360°. Podzielmy całe koło na wycinki o kącie 1°. Pola wycinków będą wówczas identyczne i równe:

$$P = \frac{\pi r^2}{360°}$$

Zatem **wzór na pole wycinka koła** o kącie α będzie miał postać:

$$\boldsymbol{P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2}$$

Przykład 1

Oblicz pole wycinka koła o promieniu $r = 10$ i kącie równym $60°$.
Podstawiamy dane do wzoru i otrzymujemy:

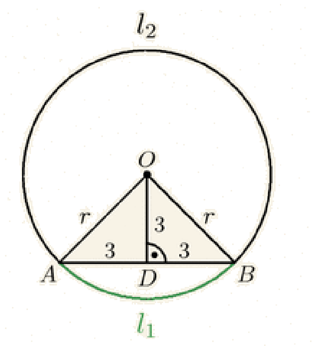
$$P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 100 = \frac{100\pi}{6}$$

Długość l łuku okręgu o promieniu r, odpowiadającego katowi środkowemu o mierze α, wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{l = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r}$$

Przykład 2

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości $6\ cm$, odległą o $3\ cm$ od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.



Trójkąt AOB jest równoramienny. Odcinek OD jest jego wysokością i dzieli cięciwę AB o długości $6\ cm$ na dwie równe części po $3\ cm$. Promień r liczymy z twierdzenia Pitagorasa.
$3^2 + 3^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 18 = r^2 \quad \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\ cm$

Suma kątów w trójkącie wynosi $180°$. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Wynika z tego, że kąty trójkątów równoramiennych ADO i DBO są równe $90°, 45°, 45°$.
$\sphericalangle AOB = 45° + 45° = 90°$

Długość łuku l_1 wynosi:
$$l_1 = \frac{90°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ cm$$

Długość drugiego łuku łatwo policzyć, odejmując od długości okręgu długość łuku l_1.

$$l_2 = 2\pi r - l_1 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\ cm.$$

Odpowiedź: Okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ cm$ i $4\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi\ cm$.

Zadania

1.10.1 Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $\mathbf{60°}$ ma długość $\mathbf{2}$. Oblicz pole tego wycinka.

1.10.2 Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\pi$ odpowiada kąt $\mathbf{135°}$.

1.10.3 Promień koła jest równy $\mathbf{2\ cm}$. Jakie pole ma wycinek koła odpowiadający kątowi o mierze $\mathbf{30°}$?

1.10.4 Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o kącie $\mathbf{60°}$, jeżeli promień koła ma długość $\mathbf{6\ cm}$.

1.10.5 Oblicz pole i długość łuku wycinka koła o promieniu $\mathbf{9\ cm}$ i kącie $\mathbf{60°}$.

1.10.6 Oblicz promień koła, jeżeli długość łuku jego wycinka o kącie $\mathbf{120°}$, wynosi $\boldsymbol{l = 8\pi\ cm}$.

Czy zdam maturę z matematyki?

1. [2]W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa *AB* tego trójkąta ma długość:

   A. 6

   B. $2\sqrt{2}$

   C. $2\sqrt{29}$

   D. 14

2. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

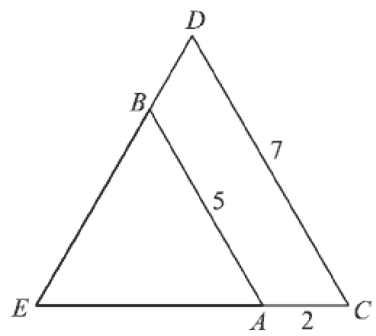
   A. $16\sqrt{6}$

   B. $14\sqrt{6}$

   C. $12 + 4\sqrt{6}$

   D. $12 + 2\sqrt{6}$

3. Odcinki *AB* i *CD* są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka *AE* jest równa:



   A. $\frac{10}{7}$

   B. $\frac{14}{5}$

   C. 3

   D. 5

4. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

   A. 25

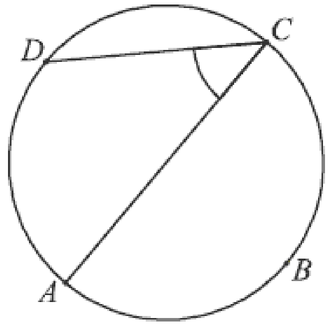
   B. 50

   C. 75

   D. 100

2. Zadania 1-6: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 01.03.2013

5. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego *ACD* jest równa:



A. 90°

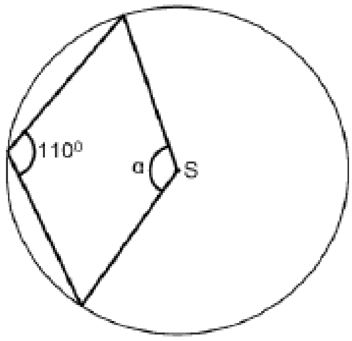
B. 60°

C. 45°

D. 30°

6. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwusieczne kątów *A* i *B*. Dwusieczne te przecinają się w punkcie *P*. Uzasadnij, że kąt *APB* jest rozwarty.

7. [3]Punkt *S* jest środkiem koła. Zatem miara kąta α jest równa (patrz na rysunek):



A. 70°

B. 220°

C. 140°

D. 250°

8. W trapezie miary kątów ostrych są równe 30° i 60°. Wówczas stosunek długości krótszego ramienia do dłuższego jest równy:

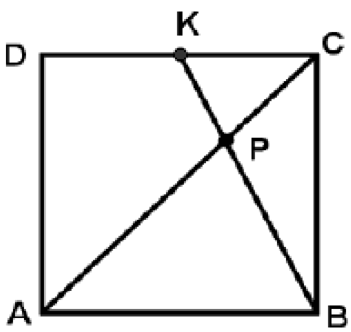
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

9. Na boku *DC* kwadratu *ABCD* obrano punkt *K* tak, że $|DK| = |KC|$ (zobacz rysunek). Przekątna *AC* kwadratu przecina odcinek *BK* w punkcie *P*. Uzasadnij, że pole trójkąta *ABP* jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta *KCP*.



3. Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze, 01.03.2013.

10. [4]Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o wysokości 9 jest równe:

A. 36π

B. 9π

C. $18\sqrt{3}\pi$

D. 12π

11. Odcinek o długości 2,4 *m* podzielono w stosunku 2:3:5. Najdłuższy z wyznaczonych odcinków ma długość:

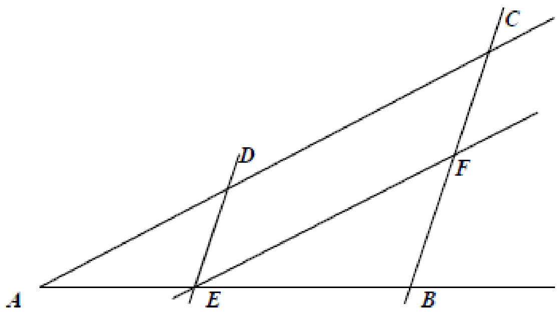
A. 120 cm

B. 0,72 m

C. 480 mm

D. 14 dm

12. * Proste *DE* i *CB* oraz *EF* i *AC* są równoległe. Oblicz długość odcinka *EB*, jeżeli *AE* = 2,5, *DE* = 3 oraz *FB* = 4.



13. Wykaż, że wysokość *CD* trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka *C* kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki *AD* i *DB*, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio *AC* i *BC* tego trójkąta.

14. [5]W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

A. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

D. $\frac{1}{17}$

4. Zadania 10-13: www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze, 01.03.2013
5. Zadania 14-15: www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 01.03.2013.

15. Długość promienia *r* okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

A. $4\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{5}$

16. [6]Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1:

A. o 10%

B. o 110%

C. o 21%

D. o 121%

17. Przekątna *AC* prostokąta *ABCD* ma długość 14. Bok *AB* tego prostokąta ma długość 6. Długość boku *BC* jest równa:

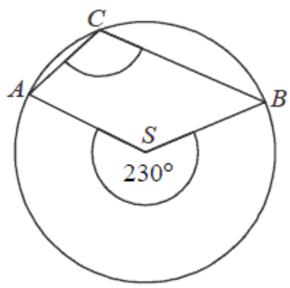
A. 8

B. $4\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{58}$

D. 10

18. Punkty *A*, *B* i *C* leżą na okręgu o środku *S* (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego *ACB* jest równa:



A. 65°

B. 100°

C. 115°

D. 130°

19. Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. 36

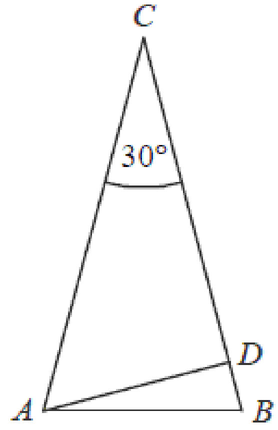
B. 18

C. 12

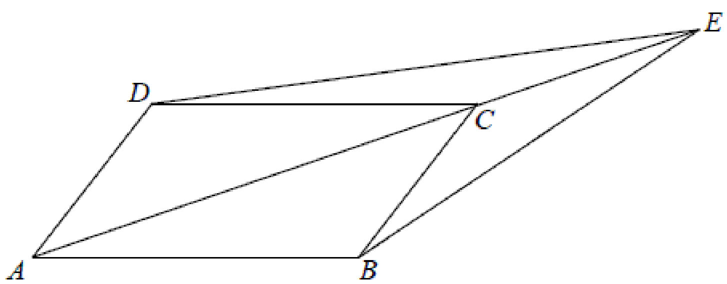
6. Zadania 16-21: www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 01.03.2013

D. 6

20. W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka na bok BC.



21. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.



22. [7]Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe:

A. 21° i 105°

B. 11° i 66°

C. 18° i 108°

D. 16° i 96°

23. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta i dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

7. Zadania 22-26: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 02.03.2013.

C. $6\sqrt{3}$

D. 12

24. Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość:

A. 3 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 8 cm

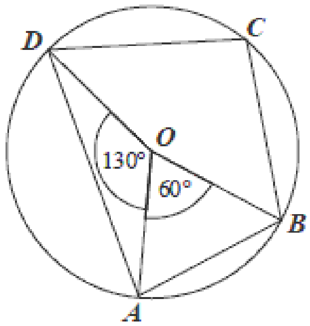
25. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany *BAD* ma miarę:

A. 150°

B. 120°

C. 115°

D. 85°



26. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

27. [8]W trójkącie równoramiennym *ABC* dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa *AB* tego trójkąta ma długość.

A. 6

B. $2\sqrt{21}$

C. $2\sqrt{29}$

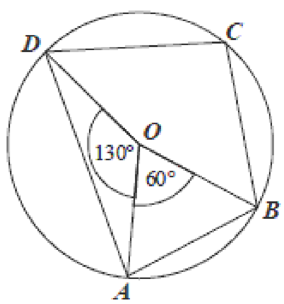
D. 14

28. Pięciokąt *ABCDE* jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta *ECD*:

A. ΔABF

B. ΔCAB

C. ΔIHD



8. Zadania 27-31: www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf, 02.03.2013

D. ΔABD

29. W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $16\sqrt{6}$

B. $14\sqrt{6}$

C. $12 + 4\sqrt{6}$

D. $12 + 2\sqrt{6}$

30. Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe:

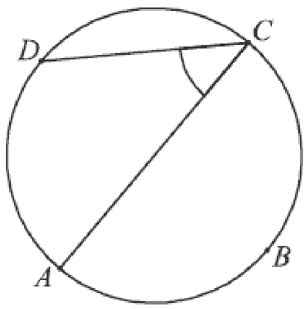
A. 25

B. 50

C. 75

D. 100

31. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego *ACD* jest równa:



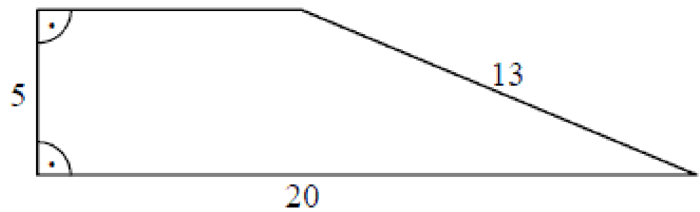
A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

32. [9]Rysunek przedstawia trapez prostokątny i długości trzech jego boków.
Obwód tego trapezu jest równy:



A. 43

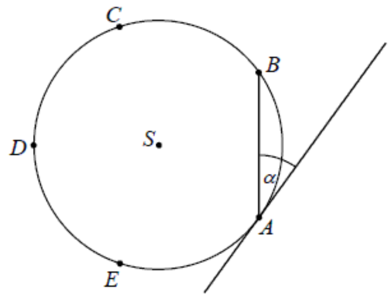
B. 46

C. 48

D. 50

9. Zadania 32-36: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 03.03.2013.

33. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* i *E* leżą na okręgu o środku *S* i dzielą ten okrąg na pięć łuków równej długości (zobacz rysunek). Wówczas miara kąta ostrego α między cięciwą *AB* i styczną do tego okręgu w punkcie *A* jest równa:



A. 18°

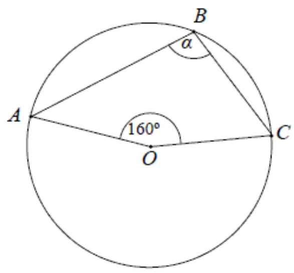
B. 30°

C. 36°

D. 54°

34. Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

35. [10] Punkt *O* jest środkiem okręgu. Kąt wpisany *α* ma miarę:



A. 80°

B. 100°

C. 110°

D. 120°

36. Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa:

A. $3\sqrt{3}$

B. 3

C. $6\sqrt{3}$

D. 6

37. Dany jest czworokąt *ABCD*, w którym *AB* || *CD*. Na boku *BC* wybrano taki punkt *E*, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt *AED* jest prosty.

38. [11]Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa:

A. 7

B. 14

C. 21

D. 28

39. Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa:

A. $4\sqrt{2}$

10. Zadania 37-39: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 04.03.2013.
11. Zadania 40-46: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 04.03.2013.

B. $2\sqrt{2}$

C. 8

D. 4

40. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

A. 3

B. 4

C. $\sqrt{34}$

D. $\sqrt{61}$

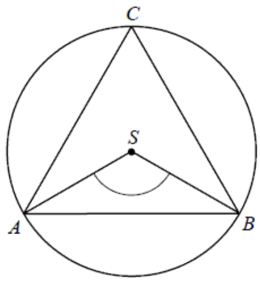
41. Punkty *A*, *B*, *C*, leżące na okręgu o środku *S*, są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego *ASB* jest równa:

A. 120°

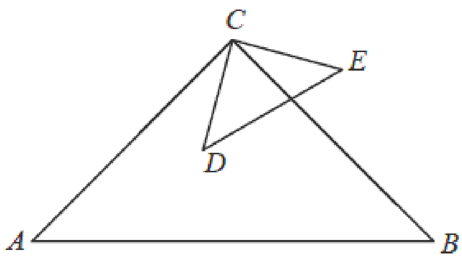
B. 90°

C. 60°

D. 30°



42. Trójkąty prostokątne równoramienne *ABC* i *CDE* są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku *C* jest prosty). Wykaż, że *AD* = *BE*.



43. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

44. [12]Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty D i E takie, że IADI=IACI oraz IBEI=IBCI. Wykaż, że kąt I ∢ DCE I=45°.

45. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica długości przekątnej i boku wynosi 2.

46. Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

A. 120°

B. 135°

12. Zadania 47-55: Testy maturalne, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

C. 144°

D. 150°

50. Odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu wynosi:

A. $6\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{5}$

D. $5\sqrt{3}$

51. Długościami boków trójkąta mogą być:

A. $\sqrt{27}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$

B. 6 mm; 0,1 dm; 12cm

C. $4, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

D. 2 dm; 4 cm; 0,07m

52. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30 stopni mniejszą od miary kąta między ramionami. Kąt między ramionami ma miarę:

A. 50°

B. 80°

C. 40°

D. 70°

53. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o 38° większy od drugiego. Kąty te mają miary:

A. 71° i 109°

B. 38° i 142°

C. 26° i 64°

D. 38° i 76°

54. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi:

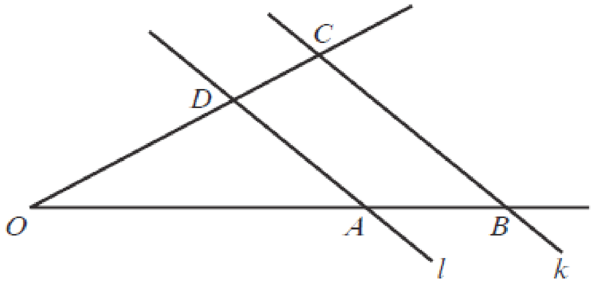
A. 360°

B. 540°

C. 720°

D. 1080°

55. *Proste *l* i *k* są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek *OD* ma długość:



A. 12

B. 18

C. $\frac{18}{5}$

D. $\frac{144}{5}$

56. [13]*Odcinki *AB* i *CD* są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka *AE* jest równa:

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5

57. [14]*Proste *AD* i *BC* są równoległe. Długości odcinków *ED*, *DC* oraz *AB* podane są na rysunku. Długość odcinka *EA* jest równa:

A. 4

B. 8

C. 9

D. 10

13 Zadanie 56: www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf, 04.03.2013
14 Zadanie 57: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 04.03.2013.

2. Ciągi

W TECHNIKUM NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;**
- **Badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;**
- **Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.**

2.1 Pojęcie ciągu liczbowego. Monotoniczność ciągów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym**

Ciąg jako pojęcie matematyczne można zrozumieć jako listę ponumerowanych elementów pewnego zbioru. Ciągiem jest więc dowolna funkcja, której argumentami są liczby **naturalne.**

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ...)$.

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, ..., n\}$ i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.

a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a liczby $(1, 2, 3, ..., n)$ nazywamy wskaźnikami lub indeksami wyrazów.

Monotoniczność ciągu

Każdy ciąg jest funkcją, więc można dla nich zdefiniować pojęcie monotoniczności.

Aby zbadać monotoniczność ciągu o danym wyrazie ogólnym, należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Jeśli jest ona dodatnia wtedy ciąg jest rosnący, jeśli ujemna, to ciąg jest malejący, a jeśli równa 0, to ciąg jest stały.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym**, jeżeli dla każdego $n \in N^+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$.
Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} = a_n$.

Przykład 1

$a_n = n + 3: 2, 5, 8, 11, 14, ...$ – ciąg rosnący

$a_n = n^2: 1, 4, 9, 16, 25, ...$ – ciąg rosnący

$a_n = 3 - n: 3, 2, 1, 0, -1, ...$ – ciąg malejący

$a_n = -5n: -5, -10, -15, -20, -25, ...$ – ciąg malejący

2.2 Ciąg arytmetyczny i jego własności

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$\boldsymbol{r = a_{n+1} - a_n}$ nazywamy różnicą ciągu

$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + r}$

Przykłady ciągów arytmetycznych:
$a_1 = 5, r = 3;$ 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...
$a_1 = 6, r = -2;$ 6, 4, 2, 0, -2, -4, ...

Zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2} \cdot n$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg arytmetyczny jest:

– **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia: $a_{n+1} - a_n > 0$,

– **malejący**, gdy różnica jest ujemna: $a_{n+1} - a_n < 0$,

– **stały**, gdy różnica jest równa 0: $a_{n+1} - a_n = 0$.

▶ CIEKAWOSTKA

[15]W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1170 - 1240) odkrył ciąg liczb naturalnych, nazwany następnie jego imieniem: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Ciąg rozpoczyna się od dwóch jedynek, a każda następna liczba stanowi sumę dwóch poprzednich:

$$k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$$

gdzie n – należy do liczb naturalnych oraz $k_0 = 1$ i $k_1 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 1{,}618033998875\ldots = \Phi$$

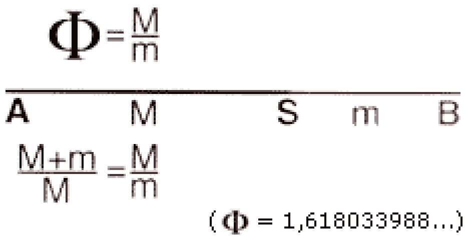
Można pokazać, że Φ jest rozwinięciem dziesiętnym nieskończonym.

Za średniowiecznym włoskim matematykiem Lucą Pacioli przyjęto, że przybliżona z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczba Φ, jest tzw. **złotym podziałem** lub też złotym środkiem. Stąd też w opracowaniach często podaje się, że $\Phi = 1{,}618$.

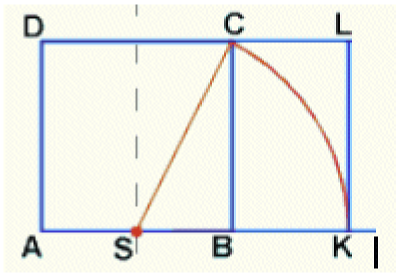
15. „Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym" autor J. Nowakowski i K. Borowski Wydawnictwo Difin., www.bossa.pl, 06.03.2013.

Do najważniejszych własności liczby Fibonacciego można zaliczyć:

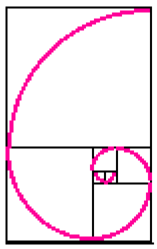
1. Złoty podział odcinka stworzony po raz pierwszy przez Euklidesa.



2. Złoty podział prostokąta .



3. Spirala logarytmiczna.



4. Elipsa logarytmiczna (matematyczny opis owalu).

Praca dla chętnych

Poszukaj więcej informacji na temat własności liczb Fibonacciego.

Zadania

2.2.1 Które z podanych ciągów są arytmetyczne?

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

b) 2, 4, 8, 16, 32, ...

c) -2, -4, -6, -8, ...

d) 1, 3, 6, 9, 12, ...

2.2.2 Podaj 6 początkowych wyrazów ciągu (a_n):

a) $a_n = 2n$

b) $a_n = 3n-1$

c) $a_n = 2n+1$

d) $a_n = 1-n$

e) $a_n = n^n$

f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

2.2.3 Dany jest ciąg (a_n) o podanym wzorze: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_3 i a_4.

2.2.4 Sprawdź, czy dany ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 3+n$

b) $a_n = 2n-1$

c) $a_n = n^2+1$

d) $a_n = \frac{2}{3}n+2$

e) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

2.2.5 Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_2 = 5$, $a_6 = 15$

b) $a_3 = 6$, $a_{11} = 21$

c) $a_7 = 4$, $a_9 = 18$

d) $a_1 = 3$, $a_4 = 9$

e) $a_2 = 1$, $a_4 = 3-2\sqrt{3}$

2.2.6 Znając trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, wyznacz 60 wyraz tego ciągu:

$a_1 = 12, a_2 = 24, a_3 = 36$

2.2.7 Mając dany ciąg arytmetyczny (a_n), w którym: $a_1 = 2$, $r = 4$, $a_n = 122$, oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg i ile wynosi suma jego wyrazów.

2.2.8 Wyznacz a_3, a_7, a_{12} w ciągu arytmetycznym (a_n), w którym $a_1 = 8$, r = 11.

2.2.9 Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów ciągu: 1, 4, 7, 10, 13, ….

2.2.10 Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym $a_n = 2n - 5$.

2.2.11 Oblicz x, wiedząc, że liczby w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Podaj różnicę ciągu.

a) $8,\ x, 22$ b) $x - 4, 5, x + 12$

2.2.12 Oblicz x, wiedząc, że: $2 + 6 + 10 + \cdots + x = 648$

2.2.13 Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n):

a) $a_n = 3n$

b) $a_n = 2n-4$

c) $a_n = n^2 - 1$

d) $a_n = -n+2$

e) $a_n = \frac{-2n}{n+3}$

▶ CIEKAWOSTKA

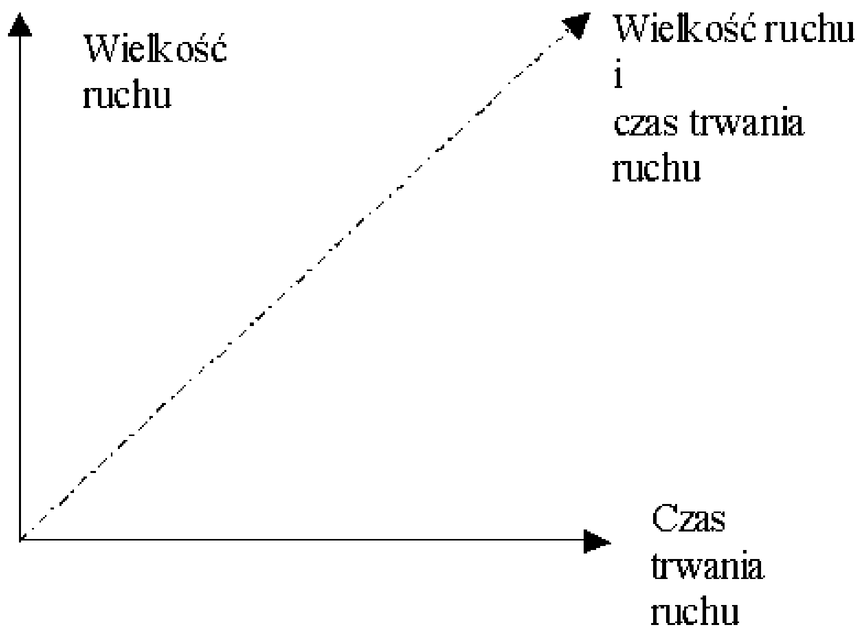
Ciąg liczb Fibonacciego na giełdzie

Istnieją trzy sposoby wykorzystania ciągu liczb Fibonacciego do analizy papierów wartościowych:

1. metody czasowe – w odniesieniu do upływu czasu – rozdział 3.2.1.
2. metody cenowe – w odniesieniu do zmiany ceny – rozdział 3.2.2
3. metody cenowo-czasowe – w odniesieniu do upływu czasu i zmiany ceny – rozdział 3.2.3

Duża liczba metod analizy technicznej stanowi próbę zmierzenia popytu na dany walor i sporządzenia na tej podstawie prognozy określającej, czy cena wzrośnie, czy spadnie oraz, przy użyciu pewnych wskaźników, jak długi będzie ten ruch. W tym przypadku stosuje się techniki wykorzystujące proporcje Fibonacciego w pionie. Metody te nazywamy metodami określającymi wielkość (zasięg) ruchu. Zaznaczone one zostały na rysunku na osi pionowej – rysunek 27.
Drugą grupę stanowią metody oparte na analizie cykli oraz wykorzystaniu ciągu liczb Fibonacciego na osi czasu. Wykorzystuje się je do określenia czasu, w jakim dokona się zmiana trendu. Nazywamy je metodami określania czasu trwania ruchu cenowego.

Trzecią grupę metod stanowią techniki, które starają się oszacować jednocześnie potencjalny zakres i czas trwania ruchu. Metody uniwersalne bardzo często posiadają tę wadę, że dobrze opisują zagadnienie całościowo, natomiast mało precyzyjnie tłumaczą szczegóły.



Rysunek 27. Podział metod prognozowania zasięgu ruchu i czasu jego trwania.

2.3. Ciąg geometryczny i jego własności

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Badać, czy dany ciąg jest geometryczny**
- **Stosować wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego**

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą q, zwaną ilorazem ciągu.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Każdy następny wyraz ciągu powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą q, a więc istnieje również zależność między pierwszym a dowolnym wyrazem ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q_n - 1 \; dla \, n \geq 2$$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \; dla \, q \neq 1$$

$$S_n = na_1 \quad dla \, q = 1$$

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu a_{n-1}, an, a_{n+1} zachodzi równość:

$$a_n^{\,2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 > 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 < 0$$

Ciąg jest malejący wtedy, gdy:

$$q > 0 \text{ i } a_1 < 0 \text{ lub } q \in (0, 1) \text{ i } a_1 > 0$$

Ciąg jest stały wtedy, gdy:

$$q = 1 \text{ lub } a_1 = 0$$

Jeśli iloraz q jest ujemny, to ciąg geometryczny jest naprzemienny. Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, jeżeli jego iloraz jest ułamkiem właściwym, tzn. należy do przedziału (-1, 1).

CIEKAWOSTKA

Metody cenowe

Teoria fal pozwala zaobserwować proporcje zachodzące między falami kolejnych ruchów cen. W ogólności fale te dzielą się na tzw. fale główne i następujące po nich fale korekty – istotnym jest, aby oba rodzaje wzrostów i spadków były tego samego rzędu. Proporcje te można opisać jako kolejne potęgi Φ i jej odwrotności. Na rynku kapitałowym zazwyczaj do obliczeń wykorzystuje się całkowite wykładniki potęgi liczby Φ z przedziału <-3, 3>.

Tabela 3. Współczynniki złotego podziału[16]

Potęga n	F^n – współczynniki złotego podziału	Rodzaj ciągu
1	1,618	
2	2,618	Ciąg zewnętrzny
3	4,236	
-1	0,618	
-2	0,382	Ciąg wewnętrzny
-3	0,236	

Proporcje Fibonacciego mogą być wykorzystane do wyznaczenia linii odwrotu. Na początku wyznaczamy linie trendu między dwoma sąsiednimi punktami ekstremum cenowego. Rozpoczynając od górnego punktu skrajnego ,wykreślamy 9 linii poziomych przecinających linię trendu na wysokości: 0,0%, 23,6%, 38,2%, 50,0%, 61,8%, 100,0%, 161,8%, 261,8% i 423,6%. Po znaczącym ruchu cenowym (w górę lub w dół), ceny najczęściej doznają korekty o część wartości pierwotnego ruchu cenowego. W czasie korekty cen kolejne poziomy wsparcia i oporu wykształcają się w pobliżu poziomu poziomów odwrotu Fibonacciego.

16. Źródło: Fischer R., Liczby Fibonacciego na giełdzie, WIG - Press, Warszawa 1996.

Rysunek. Na wykresie zaznaczone zostały poziomy cenowe, które w przeszłości zadziałały jako poziomy wsparcia (strzałka ↑) i oporu (strzałka ↓).

Zadania

2.3.1 Napisz wzór ciągu geometrycznego, mając dane:

a) 3, 6, 12, …

b) 2, -6, 18, …

c) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$

d) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

2.3.2 Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że:

a) $q = -2$, $a_3 = 0{,}5$

b) $q = -\frac{1}{3}$, $a_4 = -27$

c) $q = -0{,}2$, $a_5 = -151{,}2$

d) $q = -6$, $a_4 = 0{,}5$

2.3.3 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego oraz wzór na n-ty wyraz wiedząc, że:

a) $a_1 = 1$, $a_5 = 12{,}5$

b) $a_1 = 16$, $a_7 = 256$

c) $a_1 = -3$, $a_{10} = -81$

d) $a_1 = 5$, $a_3 = 2,5$

2.3.4 Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego, mając dane:

a) $a_1 = 3$, $q = -2$, $a_n = 1536$

b) $a_1 = -1$, $q = -20$, $a_n = -64000000$

c) $a_1 = 7$, $q = 0,5$, $a_n = \frac{7}{128}$

d) $a_1 = 0,5$, $q = -4$, $a_n = 128$

2.3.5 Wyznacz iloraz i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = 96$, $a_5 = 48$

b) $a_3 = 12$, $a_6 = 24$

c) $a_2 = 6$, $a_5 = -3$

2.3.6 W ciągu geometrycznym (a_n) mamy dane $a_2 = -1$, $q = -2$. Oblicz sumę trzech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

2.3.7 Wyznacz x wiedząc, że mamy dany ciąg geometryczny malejący, w którym:

$a_1 = 9$, $a_2 = x$, $a_3 = 1$

2.3.8 Sprawdź, czy ciąg (an) jest geometryczny? Wyznacz q.

a) $a_n = 2^{n+1}$

b) $a_n = 3 \cdot 3^{2n-1}$

c) $a_n = 2n^2$

2.3.9 Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (an), jeśli:

a) $a_1 = 8$, $2a_5 = 3a_4$, $n = 6$

b) $a_1 = 2$, $a_7 = 128$, $n = 8$

2.3.10 Zbadaj monotoniczność ciągu (an), określonego wzorem:

a) $a_n = \frac{3-2n}{4n-50}$

b) $a_n = \frac{5n}{n+1}$

c) $a_n = \frac{1}{3n^2-12n-3}$

d) $a_n = \frac{n^2-1}{n+7}$

2.3.11 Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 10^{n+2} - 2$. Wykaż, że ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

2.3.12 Znajdź sumę:

a) $1 + 6 + 21 + \ldots + n(2^n - 1)$

b) $3 + 27 + 135 + \ldots + (2n-1) \cdot 3^n$

2.3.13 Trzy liczby, których suma jest równa 30, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę pomniejszymy o 2, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

2.4. Praktyczne zastosowanie ciągów (procent prosty, procent składany)

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać podatki i zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)**

Kapitalizacja odsetek [17]

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk. W standardowej lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę roczną, to dopiero po 12 miesiącach bank obliczy należne odsetki, potrąci podatek i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem. Jednak kapitalizacja może następować częściej, na przykład co kwartał, miesiąc lub nawet codziennie. W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta. Po pierwsze, w każdym kolejnym okresie rozliczeniowym na zysk pracuje już nieco większa kwota, a po drugie, przy kapitalizacji dziennej istnieje możliwość ominięcia podatku od zysków kapitałowych (w wysokości 19%), zwanego potocznie podatkiem Belki.

Procent składany

Przy częstym naliczaniu odsetek działa zasada procentu składanego. Odsetki z pierwszego okresu kapitalizacji dopisywane są do salda lokaty i w kolejnym okresie na zysk pracuje już większa kwota.

17. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc, 06.03.2013

Na przykład, gdy kapitalizacja następuje co miesiąc, to już w drugim miesiącu zysk przynosi nie tylko odłożony kapitał, ale także odsetki za pierwszy miesiąc.

W bankowości procent składany oznacza kwotę, jaka zostanie wypłacona z lokaty poddanej kapitalizacji, czyli doliczaniu wypracowanego zysku netto do kapitału.

W jaki sposób można obliczyć procent składany? Rozważmy różne przypadki:

a) Gdy od wypracowanych odsetek nie jest pobierany podatek Belki:

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\textit{oprocentowanie}}{\textit{liczba kapitalizacji w roku}}\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

b) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 20% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.12.2001-31.12.2003

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\textit{oprocentowanie}}{\textit{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}8\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty w latach}}$$

c) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową z okresu 01.01.2004-1.12.2006 oraz od 31.03.2012.

$$\text{wypłata} = \text{kapitał} \cdot \left(1 + \frac{\textit{oprocentowanie}}{\textit{liczba kapitalizacji w roku}} \cdot 0{,}81\right)^{\text{liczba kapitalizacji w roku} \cdot \text{czas trwania lokaty}}$$

d) Gdy od wypracowanych odsetek jest pobierany podatek Belki w wysokości 19% naliczonych odsetek zgodnie z ordynacją podatkową od 01.01.2007 do 30.03.2012 – brak wzoru na procent składany.

▶ CIEKAWOSTKA

Mechanizm procentu składanego stosowany jest powszechnie w kontach oszczędnościowych prowadzonych w formie rachunku. Konta te umożliwiają elastyczny dostęp do pieniędzy – klient może wypłacać środki i dopłacać do rachunku nowe sumy w dowolnej chwili. Z tego też względu bank co miesiąc sprawdza, jaka kwota pracowała na zysk i dopisuje odsetki na bieżąco.

Zadania

2.4.1 Kredyt w wysokości 2500 zł wraz z odsetkami musisz spłacić jednorazowo po 2 latach. Oprocentowanie kredytu to 5,5% w skali rocznej. Jaką kwotę będziesz musiał oddać do banku?

2.4.2 Załóżmy, że zdecydowałeś się wpłacić 2000 zł na konto oprocentowane 12% w stosunku rocznym, z kapitalizacją odsetek:

a) co miesiąc

b) co kwartał

c) co pół roku

d) co rok

Jaki będzie stan Twojego konta po upływie roku w każdym z przypadków? Wyciągnij wnioski.

2.4.3 Oblicz, jaki dochód przyniesie po 4 latach lokata 8 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał.

2.4.4 Dokonaj analizy atrakcyjności proponowanych trzech ofert bankowych, dysponując kwotą 60 000zł.

a) bank I oferuje 14% w stosunku rocznym, z roczną kapitalizacją odsetek,

b) bank II oferuje 10% w stosunku rocznym, z kwartalną kapitalizacją odsetek,

c) bank III oferuje 3% w stosunku miesięcznym, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Wskaż najlepszą ofertę ulokowania inwestycji. Zdecydujesz się na rok czy na 2 lata? Wyciągnij odpowiednie wnioski.

2.4.5 Pan Kowalski złożył 30 000 zł na dwuletnią lokatę, która jest oprocentowana 6% w stosunku rocznym i kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

a) Oblicz, jaką kwotą (z dokładnością do jednego grosza) będzie dysponował Pan Kowalski po dwóch latach wiedząc, że bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 19% podatku od dochodów kapitałowych.

b) O ile procent większe byłyby zyski Pana Kowalskiego z tej lokaty, gdyby odsetki nie były opodatkowane? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

2.4.6 Kwotę 12 000 zł wpłacono na 3-letnią lokatę, przy czym odsetki doliczane są co pół roku. Kwota odsetek wyniosła 1 513,95zł. Jak oprocentowana była lokata? (Uwzględnij podatek od dochodów kapitałowych).

2.4.7 Jacek złożył do banku 5 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 5 624,32 zł. Jakie jest oprocentowanie w tym banku, jeśli kapitalizacja odsetek następuje co pół roku?

2.4.8 W dniu narodzin syna ojciec wpłacił do banku pewną kwotę pieniędzy. Na początku oprocentowanie w skali roku wynosiło 10%, ale po dziesięciu latach bank obniżył je do 8%. Po 20 latach syn mógł wypłacić ze swego konta 30 930,44 zł. Jaką kwotę wpłacił do banku ojciec w dniu narodzin syna?

2.4.9 [18]Rafał za wykonaną pracę otrzymał nagrodę pieniężną w wysokości 1500 zł. Postanowił wpłacić do banku 1000 zł na okres jednego roku . Bank zaproponował mu następujące oferty:

a) oprocentowanie 6% w sali rocznej, z odsetkami doliczanymi po roku,

b) oprocentowanie 3,8% w skali rocznej, z odsetkami doliczanymi co kwartał,

c) dokonaj analizy, która z ofert jest bardziej korzystna dla Rafała i o ile?

18. http://www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/.

2.4.10 Jaką kwotę w dolarach należy zdeponować na 20 lat, przy rocznej stopie procentowej 6%, aby po 20 latach otrzymać 400$.

2.4.11 Oblicz, ile wyniesie rata twojego kredytu, jeżeli pożyczyłeś w banku 15000 zł przy oprocentowaniu 7,5 % w skali roku i zamierzasz spłacać kredyt przez 10 lat przy równych ratach miesięcznych. Dodatkowo zapłacisz 3% prowizji, która powiększy kwotę twojego kredytu. Sporządź w arkuszu kalkulacyjnym harmonogram spłat tego kredytu.

2.4.12 Oblicz miesięczną kwotę spłaty pożyczki w wysokości 1 000 zł oprocentowaną na 5,5% rocznie, która musi być spłacona w ciągu 6 miesięcy. Wiedząc, że płatności wypadają:

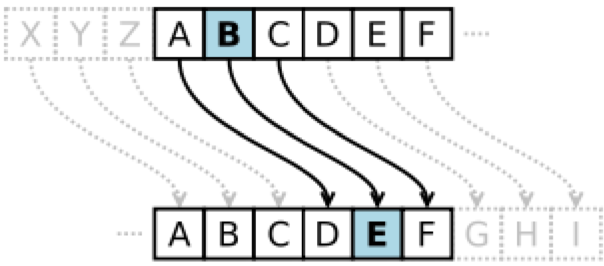
a) na koniec okresu rozliczeniowego,

b) na początek okresu rozliczeniowego,

c) jak zmieni się rata, jeżeli pożyczka zaciągnięta będzie na 4 miesiące?

CIEKAWOSTKA

Szyfr Cezara opiera się na dwóch ciągach złożonych z liter, w którym każda litera tekstu jawnego (niezaszyfrowanego) zastępowana jest oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie inną literą, przy czym kierunek zamiany musi być zachowany. Nie rozróżnia się przy tym liter dużych i małych. Nazwa szyfru pochodzi od Juliusza Cezara, który prawdopodobnie używał tej techniki do komunikacji ze swymi przyjaciółmi.



Te same litery drugiego ciągu są przesunięte względem ciągu pierwszego o określoną liczbę pozycji, zwaną parametrem przesunięcia, i pełniącą funkcję klucza szyfru:

Alfabet: AĄBCĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻ

Szyfr: CĆDEĘFGHIJKLŁMNŃOÓPRSŚTUWYZŹŻAĄB

Tekst jawny: MĘŻNY BĄDŹ, CHROŃ PUŁK TWÓJ I SZEŚĆ FLAG

Tekst zaszyfrowany: OHBÓŻ DĆFĄ, EKTRP ŚZŃM YŹŚŁ L UAGWĘ INCJ

Praca dla chętnych

Zaszyfruj opisaną metodą ważną wiadomość do nauczyciela (nie zapomnij o podaniu klucza). Wyszukaj w Internecie informacje o szyfrowaniu danych, podpisie cyfrowym, kluczu prywatnym i publicznym.

Czy zdam maturę z matematyki?

1. [19]Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

2. Dany jest ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy:

A. $-\frac{3}{25}$

B. $\frac{3}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$

D. $\frac{7}{25}$

3. Ciąg (9, x, 19) jest arytmetyczny, a ciąg (x, 42, y, z) jest geometryczny. Oblicz x, y, z.

4. [20]Który wyraz ciągu $a_n = -\frac{7}{3}n + 21$ jest równy zero?

A. a_9

B. a_{18}

C. a_{21}

D. a_{49}

5. Ciągiem arytmetycznym jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n równym:

A. $a_n = 3 \cdot 2^n$

19. Zadania 1-3: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 08.03.2013.
20. Zadania 4-6: www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf, 08.03.2013.

B. $a_n = \frac{4n^2-9}{3+2n}$

C. $a_n = \frac{2n+3}{n+2}$

D. $a_n = \frac{n^2+1}{3}$

6. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

7. [21]Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-2)^{3n} \cdot (n^2 - 4)$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_2 = 64$

B. $a_2 = 0$

C. $a_2 = -64$

D. $a_2 = 128$

8. Liczby 2; $2x$-1; 0,5 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem monotonicznego ciągu geometrycznego dla:

A. $x = 0$

B. $x = 0$ lub $x = 1$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

9. O pewnym ciągu arytmetycznym wiadomo, że ma dziesięć wyrazów. Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 75, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 90. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

10. [22]Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 7

21. Zadania 7-9: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf, 08.03.2013.
22. Zadania 10-15: http://www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf, 08.03.2013.

11. Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

A. $10000 \cdot (1{,}0075)^4$

B. $10000 \cdot (1{,}03)^4$

C. $10000 \cdot (1{,}0)^{16}$

D. $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

12. Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}, y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1, z = 3\sqrt{5} + 2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

A. z, y, x

B. y, x, z

C. x, y, z

D. z, x, y

13. Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

A. $S_{2n} = 8n^2 + 4n$

B. $S_{2n} = 4n^2 + 2n$

C. $S_{2n} = 4n^2 + n$

D. $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

14. Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

A. $q = 2$

B. $q = 7$

C. $q = 9$

D. $q = 28$

15. W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16. [23]Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_3 = \frac{1}{2}$

B. $a_3 = -\frac{1}{2}$

C. $a_3 = \frac{3}{8}$

D. $a_3 = -\frac{3}{8}$

17. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy:

A. $a_4 = -18$

B. $a_4 = 0$

C. $a_4 = 4{,}5$

D. $a_4 = 144$

18. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

19. [24]Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n + 4}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_8 = 2\sqrt{5}$

B. $a_8 = 8$

C. $a_8 = 5\sqrt{2}$

D. $a_8 = \sqrt{12}$

20. Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas:

A. $a = 8\sqrt{2}$

B. $a = 4\sqrt{2}$

C. $a = 8 - 2\sqrt{2}$

D. $a = 8 + 2\sqrt{2}$

21. Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

23. Zadania 16-18: www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 09.03.2013.
24. Zadania 19-21: www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 09.03.2013.

22. [25]Liczby 12, 18, $2x + 1$ są, w podanej kolejności, odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

A. $x = 11\frac{1}{2}$

B. $x = 12$

C. $x = 12\frac{1}{2}$

D. $x = 13$

23. W ciągu arytmetycznym a_n dane są $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 30

B. 110

C. 220

D. 2046

24. Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$.

25. [26]Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy:

A. $a_1 = \frac{2}{3}$

B. $a_1 = \frac{4}{9}$

C. $a_1 = \frac{3}{2}$

D. $a_1 = \frac{9}{4}$

26. Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy:

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$

B. $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$

C. $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$

D. $a_5 + a_7 = 2a_8$

25. Zadania 22-24: www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 09.03.2013.
26. Zadania 25-27: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 09.03.2013.

27. Liczby x, y, 19, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

28. [27]W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

A. 13

B. 0

C. -13

D. -26

29. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. 8

B. 2

C. $\frac{1}{8}$

D. $-\frac{1}{2}$

30. [28]Z napełnionego cieczą naczynia o pojemności 102 dm^3 wypływa w pierwszej minucie 5 dm^3 cieczy, a w każdej następnej o 0,25 dm^3 mniej niż w poprzedniej. Po ilu minutach naczynie będzie opróżnione do połowy?

31. Pewien pracodawca zatrudnił studenta na 1 rok. Dał mu do wyboru jedną z dwóch możliwości wynagrodzenia:

a) w pierwszym miesiącu student zarobi tylko 2 zł, ale w każdym następnym miesiącu jego wynagrodzenie będzie dwukrotnie wyższe niż w miesiącu poprzednim,

b) w pierwszym miesiącu pracy zarobi 500 zł, ale w każdym następnym wynagrodzenie będzie wzrastało o 5% w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Oblicz, który sposób wynagrodzenia powinien wybrać student, aby jego roczne dochody były najwyższe.

32. Wyznacz liczbę składników w sumie $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 151$ i wyznacz tę sumę.

33. Oblicz, dla jakiej wartości k liczby 5, $(k + 1)^2$, $2k + 9$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny?

34. Rozbicie namiotu na 1 dobę kosztuje 20 zł, a każda następna doba jest o 0,50 gr tańsza od poprzedniej.

a) Ile kosztuje rozbicie namiotu na 2 tygodnie?

b) Na ile dni pobytu wystarczy kwota 350 zł?

27. Zadania 28-29: www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf, 10.03.2013.
28. Zadania 30-37: Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

35. Pomiędzy liczby 4 i 8 wstaw liczby x, y, z, t, tak aby liczby 4, x, y, z, t, 8 tworzyły ciąg geometryczny.

36. Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymamy różnice utworzona w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

37. Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

3. Wielomiany*

3.1. Pojęcie wielomianu

Wielomian – w matematyce wyrażenie algebraiczne złożone ze zmiennych i stałych połączonych działaniami dodawania, odejmowania, mnożenia i podnoszenia do potęgi o stałym wykładniku naturalnym[29].

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$, to współczynniki wielomianu, $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Stopień wielomianu – jest to najwyższy ze stopni jego składników (jednomianów) o niezerowych współczynnikach. Dla wielomianu jednej zmiennej jest to największa potęga zmiennej, która występuje w wielomianie[30].

Przykład 1

Przykłady wielomianów oraz ich stopień:

$W(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7$ – wielomian stopnia 4

$G(x) = 5x^6 + 9x^3 - 7$ – wielomian stopnia 6

$P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ – wielomian stopnia 2

$Q(x) = 8$ – wielomian stopnia 0

Wielomiany zapisujemy zazwyczaj w postaci uporządkowanej.

29. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian, 27.02.2013.
30. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x.

Przykład 2

Wyznacz wartości parametrów a i b, tak aby wielomiany $P(x) = x^3 + x^2 + 12x - 8$ oraz $W(x) = x^3 + (2a - b)x^2 + (3b - 2a)x - 8$ były równe.

Wielomiany $P(x)$ i $W(x)$ są tego samego stopnia. Musimy sprawdzić, dla jakich wartości a i b współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3b - 2a = 12 \end{cases}$$

$$2b = 13 \quad \Rightarrow b = 6{,}5$$

$$2a = 1 + 6{,}5 \quad \Rightarrow a = 3{,}75$$

$$W(x) = P(x) \quad \Leftrightarrow a = 3{,}75 \ \wedge b = 6{,}5$$

Zadania

3.1.1. Dany jest wielomian $\boldsymbol{W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 7}$. Oblicz:

a) $W(2)$

b) $W(-1)$

c) $W(\sqrt{3})$

d) $W\left(-\frac{1}{2}\right)$

3.1.2. Podane wielomiany uporządkuj malejąco i podaj ich stopień.

a) $P(x) = 6x^5 - 2 + 4x^2 + 9x$

b) $P(x) = 7x^3 + 12 - 9x^6 + 14x + 3x^2$

c) $P(x) = -8x^{19} + 3x^9 - 7x^{15} + 6x$

d) $P(x) = -2 + x^6 + x^{11} - 6x^3$

3.1.3. a) Dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + ax - b$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 4$.

b) Dany jest wielomian
$W(x) = 3x^4 + ax^3 - bx^2 + 5x - 3$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 2, W(-1) = 5$.

c) Dany jest wielomian
$W(x) = x^3 + 3ax^3 - 2bx^2 + 6$. Oblicz a i b wiedząc, że $W(1) = 5, W(2) = 8$

d) Dany jest wielomian $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx \quad + c$. Oblicz a, b i c wiedząc, że $W(-1) = 3, W(1) = 5, W(2) = 9$.

e) Dany jest wielomian
$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$. Oblicz a, b, c wiedząc, że: $W(-1) = 1,\ W(0) = 1,\ W(1) = -1$

3.1.4. Wyznacz wartości parametrów a i b (lub a, b i c), tak aby wielomiany $W(x)$ i $P(X)$ były równe.

a) $W(x) = (3a-1)x^3 + (2b-a)x^2 + (a+b)x - 4,\ P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 4$

b) $W(x) = a x^3 + b x^2 + c x + 4,\ \ P(x) = c x^3 + 2a x^2 + a\ x + b$

c) $W(x) = a x^3 + b x^2 - 9 x + c,\ \ P(x) = (b-1) x^3 + (a+1) x^2 + 3 b x - 2a$

d) $W(x) = a x^3 + 7 x^2 - b x - 3c,\ \ P(x) = (4b + c) x^2 + (c+2) x + 15 - a$

e) $W(x) = (a+1) x^3 + 3 x^2 - 5 c x - 2,\ \ P(x) = 2 x^3 + b x^2 - 12 x - 2$

3.2. Działania na wielomianach

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne**
- **Rozszerzać i skracać wyrażenia wymierne**
- **Dzielić wielomiany przez dwumian**

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej x można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dodawanie i mnożenie wielomianów jest łączne i przemienne, zachodzi również rozdzielność mnożenia wielomianów względem dodawania.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów polega na redukcji wyrazów podobnych.

Dodawanie wielomianów

Aby dodać dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, dodajemy do siebie wszystkie wyrazy podobne tych wielomianów i porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 1

Dodaj wielomiany:

a) $W(x) = -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3$ oraz $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= -3x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 9x + 3 + 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4 \\ &= (-3x^4 + 3x^4) + (4x^3 + 5x^3) + (7x^2 + 4x^2) + (-9x + 6x) + (3 - 4) \\ &= 9x^3 + 11x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

b) $W(x) = 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3$ oraz $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2$

$$\begin{aligned} W(x) + P(x) &= 6x^5 - 7x^3 + 5x - 3 + 4x^4 - 3x^2 + 6x - 2 \\ &= 6x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 11x - 2 \end{aligned}$$

c $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ oraz $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

$$W(x) + P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 + (-3x^3 + 5x^2 - 7x + 3) = (3x^3 - 3x^3) + (-5x^2 + 5x^2) + (7x - 7x) + (-3 + 3) = 0$$

Wniosek

Suma dwóch wielomianów może mieć stopień mniejszy lub równy większemu stopniowi wielomianów, może także być wielomianem zerowym.

Odejmowanie wielomianów

Aby odjąć od wielomianu $W(x)$ wielomian $P(x)$, należy do wielomianu $W(x)$ dodać wielomian $-P(x)$. Następnie porządkujemy otrzymany wielomian.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie wielomianów:

a) $W(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3$ oraz $P(x) = -8x^2 + 5x^2 + 6x - 8$

$$\begin{aligned} W(x) - P(x) &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 - (-8x^3 + 5x^2 + 6x - 8) \\ &= 4x^3 - 7x^2 + 5x - 3 + 8x^3 - 5x^2 - 6x + 8 = \end{aligned}$$

$$= (4x^3 + 8x^3) + (-7x^2 - 5x^2) + (5x - 6x) + (-3 + 8) = 12x^3 - 12x^2 - x + 5$$

b) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ oraz $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} W(x) - P(x) &= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - (6x^3 + 4x^2 - 3x + 2) \\ &= 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 - 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = \end{aligned}$$

$$= (6x^3 - 6x^3) + (-7x^2 - 4x^2) + (5x + 3x) + (-2 - 2) = -11x^2 + 8x - 4$$

Stopień otrzymanego wielomianu zależy od wielomianów składowych, analogicznie jak w przypadku dodawania.

Mnożenie wielomianów

Aby pomnożyć dwa wielomiany tej samej zmiennej rzeczywistej x, trzeba pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Następnie zredukować wszystkie wyrazy podobne i uporządkować otrzymany wielomian.

Przykład 3

Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $W(x) = 3x^2 - 4x + 1W(x) = 3x^2 - 4x + 1$ oraz $P(x) = x + 3P(x) = x + 3$

$$W(x) \cdot P(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3x + 3$$
$$= 3x^3 + 5x^2 - 9x + 3$$

b) $W(x) = 4x^3 + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - 3x$

$$W(x) \cdot P(x) = (4x^3 + 1) \cdot (4x^2 - 3x) = 16x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 3x$$

Wniosek

Stopień iloczynu niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Dzielenie wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielnym przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że W$(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 4

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia sposobem pisemnym liczb rzeczywistych.

Wykonaj dzielenie wielomianów:

$W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3)$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dzielimy $2x^3$ przez x i otrzymujemy $2x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ mnożymy $2x^2$ przez $(x + 3)$ i wynik zapisujemy z przeciwnymi znakami

$-2x^3 - 6x^2$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2$ dodajemy stronami i przepisujemy $4x + 7$

$\underline{-2x^3 - 6x^2}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dzielimy $-9x^2$ przez x

$\underline{-2x^3 - 6x^2 \quad}$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ mnożymy $-9x$ przez $(x + 3)$ i wynik

$-2x^3 - 6x^2$ zapisujemy z przeciwnymi znakami

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$9x^2 + 27x$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x$ dodajemy stronami i przepisujemy -7

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dzielimy $31x$ przez x

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ mnożymy 31 przez $(x + 3)$

$-2x^3 - 6x^2$ i wynik zapisujemy z przeciwnym

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$ znakiem

$\underline{\qquad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$-31x - 93$

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 7) : (x + 3) = 2x^2 - 9x + 31$ dodajemy stronami

$-2x^3 - 6x^2$

$= \quad -9x^2 + 4x - 7$

$\underline{\quad 9x^2 + 27x}$

$= \quad 31x - 7$

$\underline{-31x - 93}$

$= \quad -100$

W dzieleniu wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ przez wielomian $P(x) = x + 3$

otrzymaliśmy wielomian $Q(x) = 2x^2 - 9x + 31$ i resztę $R(x) = -100$

Przykład 5

Wielomiany można dzielić przez dwumian, stosując **schemat Hornera**.

Wykonajmy dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 2)$

$r = 2$

Wielomian jest stopnia trzeciego, więc tabelka wygląda następująco:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1			

W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy wszystkie stopnie wielomianu, w drugim wierszu natomiast wszystkie współczynniki tego wielomianu. Pierwszy współczynnik zawsze przepisujemy na dole.

Przystępujemy do obliczeń.

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2		

$r = 2$

$1 \cdot 2 - 4 = -2$ $\quad$ (-2 wpisujemy do dolnego wiersza)

Dalej analogicznie:

III	II	I	0
1	-4	3	-5
1	-2	-1	

$r = 2$

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ (−1 wpisujemy do dolnego wiersza)

III	II	I	0
1	−4	3	−5
1	−2	−1	−7

$r = 2$

$-1 \cdot 2 - 5 = -7$ (−7 wpisujemy do dolnego wiersza)

Wynikiem dzielenia jest wielomian stopnia drugiego.

W dolnym wierszu tabelki otrzymaliśmy współczynniki tego wielomianu.

W wyniku dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ przez dwumian

$(x - 2)$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = x^2 - x - 1$ i resztę (-7).

Więc wielomian $W(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2) - 7$.

Zadania

3.2.1. Dane są wielomiany $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$ i $F(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

Oblicz: $P(0), P(-2), P(\sqrt{2}), F(\sqrt{3}), F(\sqrt{2})$

3.2.2. Oblicz sumę i różnice wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = 6x^3 - 7x^2 + 5x - 4,\ P(x) = -4x^3 + 5x^2 + 7x + 10$

b) $W(x) = -7x^4 - 6x^2 - 5x + 8,\ P(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x - 8$

c) $W(x) = -10x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 5,\ P(x) = 2x^8 + 4x^6 - 3x^4$

d) $W(x) = -3x^9 + 6x^7 - 5,\ P(x) = 8x^4 - 6x$

3.2.3. Oblicz iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = -3x^2 + 6,\ P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

b) $W(x) = 2x^7 + 6x^3,\ P(x) = -4x + 2$

c) $W(x) = -3x^6 + 4x^2 + 2,\ P(x) = 2x + 1$

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^2 + 6x,\ P(x) = x^2 - 3$

3.2.4. Wykonaj dzielenie wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$, gdy:

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 22x - 40,\ P(x) = x - 5$

b) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3,\ P(x) = 2x - 1$

c) $W(x) = 6x^3 - 19x^2 + 13x - 2,\ P(x) = 3x - 2$

d) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9,\ P(x) = x - 3$

e) $W(x) = 2x^3 - 19x^2 + 13x - 2, P(x) = 3x - 2$

3.2.5. Dane są wielomiany $A(x) = 2x^3 - 7x + 4$, $B(x) = x^3 - 8$, $C(x) = x^2 + 2x + 4$. Wykonaj działania:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) + 2B(x)$

c) $2A(x) - 4B(x)$

d) $5B(x) - 10C(x)$

e) $A(x) \cdot C(x)$

f) $(x - 2) \cdot C(x) - B(x)$

g) $A(x) - (3x + 5) \cdot B(x)$

h) $(C(x))^2$

i) $(A(x))^2 - (P(x))^2$

3.3. Rozkład wielomianu na czynniki

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Stosować wzory skróconego mnożenia na (a±b)3 oraz a3±b3**
- **Rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias**

Warto na początku przypomnieć sobie wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego.

Kwadrat sumy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory stopnia trzeciego:

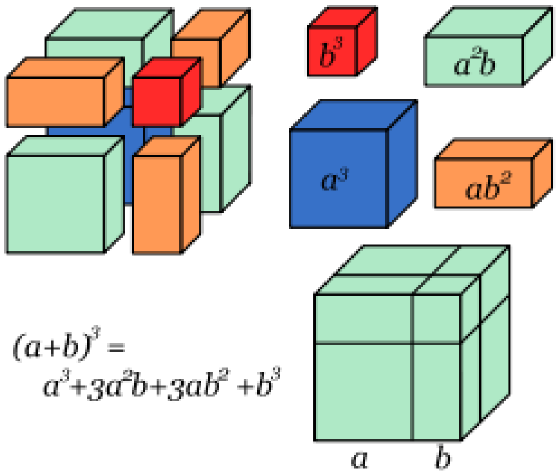
Sześcian sumy $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Suma sześcianów $$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Różnica sześcianów $$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Każdy z tych wzorów możemy udowodnić w sposób algebraiczny lub, podobnie jak w przypadku wzorów stopnia drugiego, poprzez interpretację geometryczną. Trzeba jednak przejść do przestrzeni trójwymiarowej.



Rysunek 3-1. Graficzne uzasadnienie wzoru na sześcian sumy[31]

Przykład 1

$$(x+5)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 5 + 3\cdot x\cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

$$(3x-4)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot 4 + 3\cdot 3x\cdot 4^2 - 4^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$$

$$\sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{7}+21+7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{7} + 3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^3}$$
$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{7}\right)^3} = 1+\sqrt{7}$$

Zadanie

3.3.1. Uprość:

a) $(x+5)^3$ b) $(2x+1)^3$

c) $(x+3y5)^3$ d) $(x-2)^3$

e) $(3x-4)^3$ f) $(2x-y)^3$

3.3.2. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, uprość wyrażenia:

a) $x^3 - 8$ b) $x^3 - 125$

31. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia, 07.03.2013.

c) $64x^3 + 27$ d) $8x^3 + 216$

e) $(x + 2)^3$ f) $(x - 5)^3$

Rozłożyć wielomian na czynniki, to znaczy zapisać go w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeśli taki rozkład nie istnieje, to mówimy, że wielomian jest **nierozkładalny.**

Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod:

1) wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
2) wzory skróconego mnożenia,
3) zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej,
4) grupowanie wyrazów.

Przykład 2

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z wspólnego dzielnika współczynników liczbowych oraz najniżej potęgi x.

a) $W(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

b) $W(x) = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2 + 2x - 3)$

Przykład 3

Rozłóż wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $W(x) = x^4 - 64 = (x^2 - 8)(x^2 + 8) = (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(x^2 + 8)$

W poniższym przykładzie liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania wzoru na różnicę sześcianów.

b) $W(x) = 8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9)$

c) $W(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Przykład 4

Rozłóż wielomian na czynniki, zamieniając na postać iloczynową funkcji kwadratowej.

W tym przypadku wielomian musi mieć postać funkcji kwadratowej.

$W(x) = 4x^2 - 8x - 12$

Obliczamy deltę i pierwiastki tej funkcji.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$\Delta > 0$, więc są dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 16}{2 \cdot 4} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 16}{2 \cdot 4} = \frac{24}{8} = 3$$

Zapisujemy postać iloczynową:

$W(x) = 4(x+1)(x-3)$

Przykład 5

Rozłóż wielomian na czynniki metodą przez grupowanie wyrazów.

Z tej metody można skorzystać, gdy mamy parzystą ilość czynników w wielomianie.

Łączymy wyrażenia w pary, każdą parę traktujemy jako osobne wyrażenie i każde z nich przekształcamy, wyłączając czynnik przed nawias. Ostatecznie zapisujemy iloczyn, wyłączając wspólny nawias przed nawias.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x^2+3)$

b) $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = (4x^3 - 8x^2) - (3x - 6) = 4x^2(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(4x^2-3)$

c) $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = x^3(x^2-4) + (x^2-4) = (x^2-4)(x^3+1) = (x-2)(x+2)(x+1)(x^2-x+1)$

Zadania

3.3.3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = 3x^4 - 5x^3$

b) $W(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$

c) $W(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2$

d) $W(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^4$

e) $W(x) = 4x^2(x^2-2) + 2(x^2-2)$

3.3.4. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$ b) $W(x) = (9x^2 - 6x + 1)(9x^2 - 1)$

c) $W(x) = (x^3 - 27)(x^2 - 9)$ d) $W(x) = (x^4 - 25)(x^3 + 8)$

3.3.5. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$ b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

c) $W(x) = 3x^3 + 6x^2 - 7x - 14$ d) $W(x) = x^4 + x^3 + 27x + 27$

e) $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$ f) $W(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

g) $W(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

h) $W(x) = 15x^6 - 10x^5 + 45x^4 - 30x^3$

i) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ j) $W(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$

k) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$ l) $W(x) = x^4 + 5x^2 - x^3 - 5x$

3.3.6. Rozłóż wielomiany na czynniki poznanymi metodami.

a) $5x^6 + 10x^5 - 15x^2$ b) $8x^3 - 27$

c) $2x^2 - 6x - 8$ d) $4x^3 - 8x^2 - 3x + 6$

e) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2$ f) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$

g) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3$ h) $(x^4 - 16x^2)(x^5 + 5x^4 + 6x^3)$

i) $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2$ j) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

k) $x^4 + x^3 - 8x - 8$ l) $x^5 + 10x^4 + 25x^3$

3.3.7. Wykorzystując poznane metody, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej.

a) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ b) $3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2$

c) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$ d) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

e) $x^3 + 3x^2 - 2x$

Ciekawostka

Wzory skróconego mnożenia można szybko wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala.**

Blaise Pascal (1623-166) – francuski filozof, matematyk i fizyk. Badał prawdopodobieństwo, próżnię i ciśnienie atmosferyczne. Wynalazł m.in. pierwszą maszynę liczącą „Pascalinę" oraz TRÓJKĄT PASCALA. Od jego nazwiska wywodzi się nazwa jednostki ciśnienia (Pa) i język programowania Pascal[32].

Trójkąt Pascala pozwala wyprowadzić wzory skróconego mnożenia.

Przyjrzyjmy się postaci wzorów:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

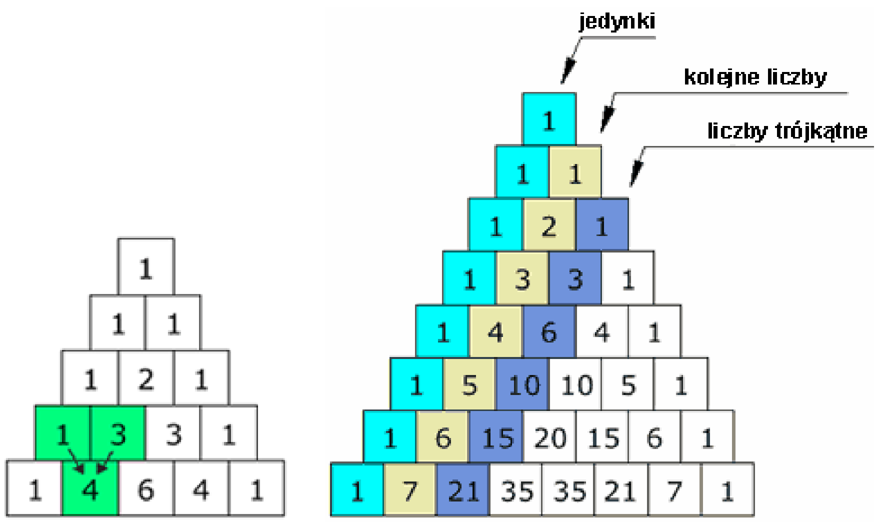
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Zapiszmy same współczynniki liczbowe składników. Postać kolejnych czynników liczbowych jest widoczna. Współczynniki liczbowe utworzyły trójkąt, który nazywa się trójkątem Pascala.

Zasady budowy trójkąta Pascala

Trójkąt Pascala to tablica liczb, w której każdy element powstaje przez sumowanie elementów stojących nad nim. Elementy skrajne to jedynki.



Rysunek 3-2. Zasada tworzenie trójkąta Pascala

Wyznaczymy teraz współczynniki piątej potęgi dwumianu.

$(a+b)^5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

32. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal, 19.02.2013.

Dwumian Newtona, czyli wzór na $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 6

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{(7-0)!\cdot 0!} = \frac{7!}{7!\cdot 1!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 2\cdot 3} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2} = 21$$

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)!\cdot 6!} = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{(7-7)!\cdot 7!} = \frac{7!}{0!\cdot 7!} = 1$$

Więc: $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Zadanie

3.3.8. Wyznacz, korzystając z trójkąta Pascala:

a) $(a-b)^4$

b) $(a-b)^5$

c) $(a+b)^6$

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych**
- **Rozwiązywać równania wielomianowe**

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań wielomianowych, przybliżymy pojęcie pierwiastka wielomianu.

Pierwiastek wielomianu lub równania wielomianowego – to rozwiązanie tego równania. W przypadku wielomianów mamy zazwyczaj do czynienia z kilkoma pierwiastkami.

Pierwiastkiem wielomianu $\boldsymbol{W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$ nazywamy jego miejsce zerowe. Powiemy zatem, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy W(a) = 0, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_+$

Przykład 1

Sprawdź, czy liczba (-2) jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 - 19x - 20$.

$W(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 19(-2) - 20 = -8 - 8 + 38 - 20 = 2$

Otrzymany wynik jest różny od 0, więc liczba (-2) nie jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 2

Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu.

$W(x) = 2x^5 - 4x^2 - 24x$

Więc: $W(2) = 2 \cdot (2)^5 - 4 \cdot (2)^2 - 24 \cdot 2 = 64 - 16 - 48 = 0$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Równanie $\boldsymbol{W(x) = 0}$, gdzie $\boldsymbol{W(x) = a_n x^n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a \quad x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0}$, nazywamy równaniem wielomianowym stopnia $\boldsymbol{n}$.

Rozwiązywanie równań wielomianowych sprowadza się do znalezienia pierwiastków danych wielomianów.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wielomian znajdujący się po lewej stronie równania rozłożyć na czynniki.

Przykład 3

Rozwiąż równanie: $x^4 - 9 = 0$.

$$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3) = 0$$

Wyrażenie będzie równe 0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$(x - \sqrt{3}) = 0 \lor (x + \sqrt{3}) = 0 \lor (x^2 + 3) = 0$

$x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 3 > 0$, więc $x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie: $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$.

Skorzystamy z metody grupowania wyrazów.

$x^3(x + 1) - 8(x + 1)$

$(x + 1)(x^3 - 8) = 0$

$(x + 1) = 0 \lor (x^3 - 8) = 0$

$x = -1 \lor x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Odpowiedź: Pierwiastkami tego równania są liczby: $x = -1 \lor x = 2$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie: $x^5 - 2x^4 + 5x^3 = 0$.

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias: $x^3(x^2 - 2x + 5) = 0$, to wyrażenie jest równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy:

$x^3 = 0 \lor x^2 - 2x + 5 = 0$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, skoro $\Delta < 0$, to trójmian nie ma pierwiastków.

Więc rozwiązaniem jest $x=0$.

Przykład 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt[4]{2-4x^2-3x}$.

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, więc:

$2-4x^2-3x\geq 0\ /\cdot(-1)$

$4x^2+3x-2\leq 0$

$\Delta=9+32=41$

$x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{8},\ x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Odpowiedź: $x\in\langle\frac{-3-\sqrt{41}}{8},\ \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\rangle$

Zadania

3.4.1. Zapisz podane wyrażenia w prostszej postaci. Przyjmij, że każdy mianownik w podanych ułamkach jest różny od zera.

a) $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$ b) $\frac{30x^4-6x^3+45x^2-9x}{8x^3+12x}$ c) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^3-2x^2-12x+8}$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

3.4.2. Rozwiąż równania:

a) $3x^4-12=0$ b) $x^3+4x=0$

c) $x^3+x^2-x-1=0$ d) $x^3-5x^2-x+5=0$

e) $x^5-x^4-5x^3+5x^2+6x-6=0$

f) $x^3+8x^2-2x-16=0$

3.4.3. Rozwiąż, rozkładając na czynniki:

a) $3x^3+6x^2+4x+8=0$ b) $x^6+2x^5+x^4+x^2+2x+1=0$

c) $1+x^2=x^3+x$ d) $3x^2-4x=-x^3+12$

e) $-9x-5x^2=-x^3-45$ f) $x^4+3x^3-6x-4=0$

g) $x^3-7x^2+6=0$ h) $5x^3+9x^2-26x-24=0$

i) $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$

j) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$

k) $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$

l) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

m) $6x^3 + 6x^2 - 3x - 3 = 0$

n) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$

o) $2x^3 - 4x^2 - 6x + 12 = 0$

p) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$

q) $x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 18x^2 = 0$

r) $-2x^4 - \sqrt{3}x^3 + 2x + \sqrt{3} = 0$

s) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$

t) $2x^5 - 18x^3 + 2x^2 - 18 = 0$

u) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$

w) $x^8 + x^6 - x^4 - x^2 = 0$

x) $20x^4 - 20x^3 + 5x^2 = 0$

3.4.4. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^3+5x^2+6x}$

b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(4-x^2)}$

c) $f(x) = \sqrt{x(2+x)(x-3)^2} - \sqrt{(x+2)^2(4-x)}$

d) $f(x) = \frac{8x^3-125}{4x^3-4x^2-25x+25}$

e) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3-16x}$

f) $f(x) = \dfrac{6x-2}{x^2-x-2}$

g) $f(x) = -3x^2 + 7x - 8$

h) $f(x) = x + \frac{1-\sqrt{x+1}}{3\sqrt{1-2x}}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x+2|}}{x(x+3)}$

j) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x+6}}$

l) $f(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy[33]:

   A. $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$

   B. $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$

   C. $2x^5 + 3x + 1$

   D. $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

2. Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (x-2)^{53} + 53x + 2^{53}$ jest równy:

   A. 2^{54}

   B. 0

   C. 2^{53}

   D. 53

3. Wielomian $W(x) = x^2(x-2) - (x-2)$ można zapisać w postaci:

   A. $x^2(x+2)$

   B. $(x^2+1)(x-2)$

   C. $x(x-2)^2$

   D. $(x-1)(x+1)(x-2)$

4. Wielomiany $W(x) = (x-2)(x+1)(x+2)$ i $P(x) = (a-b)x^3 + x^2 + (a+b)x - 4$ są równe. Z tego wynika, że:

   A. $a = 1, b = 2$

   B. $a = -1, b = -2$

   C. $a = -1, b = 2$

   D. $a = 2, b = -1$

5. Stopień wielomianu $W(x) = (x-1)(3x+5)^2(2x+1)^3$ jest równy:

   A. 4

33. Zadania 1-22: zaczerpnięte z www.zadania.info, 21.03.2013.

B. 5

C. 6

D. 8

6. Wielomian W określony jest wzorem $W(x) = -x^9 + x^8 - 6$. Zatem $W(-5)$ jest liczbą:

A. ujemną

B. dodatnią

C. niewymierną

D. pierwszą

7. Po rozłożeniu wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$, otrzymujemy:

A. $W(x) = (x+5)(x-3)(x+3)$

B. $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

C. $W(x) = (x-5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

D. $W(x) = (x+5)(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

8. Dane są wielomiany $W(x) = 3x^2 - 2x, V(x) = 2x^2 + 3x$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

A. 6

C. 5

D. 4

E. 3

9. Wartość wielomianu $W(x) = 3x - x^2 - x^3$, dla $x = -3$, jest równa:

A. 12

B. -9

C. 9

D. -24

10. Wielomian $P(x) = W(x) - K(x)$ jest siódmego stopnia oraz $W(x) = mx^7 + 8x^5 + 5, K(x) = 3x^3 + 8x^5 + (3m + 2)x^7$. Wynika stąd, że liczba m jest różna od:

A. 3

B. -1

C. 1

D. 0

11. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$:

A. jest iloczynem wielomianów $(x-2)$ i (x^4+1)

B. ma trzy miejsca zerowe

C. ma dwa miejsca zerowe

D. jest różnicą wielomianów $(x^5 - 2)$ i $x + 2$

12. Funkcja $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$ ma:

A. 1 miejsce zerowe

B. 2 miejsca zerowe

C. 3 miejsca zerowe

D. nie ma miejsc zerowych

13. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ w punkcie m jest równa 15, dla:

A. $m = 3$

B. $m = 3 \vee m = -3$

C. $m = 2 \vee m = -2 \vee m = 3$

D. $m = 2$

14. Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $W(x) = 5x^2 - 2x^3 + 3$, aby otrzymać wielomian $P(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$?

A. $6 - 7x^2 - 6x^3$

B. $2x^3 + 17x^2$

C. $6x^3 + 7x^2$

D. $6x^3 + 7x^2 - 6$

15. Wiadomo, że $W(-1) = -1$, gdy $W(x) = 2x^3 + px - 3$. Zatem wartość współczynnika p wynosi:

A. $\frac{1}{4}$

B. -4

C. 4

D. -1

16. Wielomiany P i Q określone są wzorami $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = -x^5 + 1$.

Wielomian $R(x) = 2P(x) + Q(x)$ jest stopnia:

A. 0

B. 10

C. 1

D. 5

17. Wielomiany $P(x) = (a+1)x^3 + x^2 - b$ i $P(x) = (b-1)x^3 + x^2 + 2a + 1$ są równe. Zatem liczba $a + b$:

A. należy do zbioru $\langle 2,\ 3)$

B. jest większa od 3

C. należy do zbioru $(-2, 0\rangle$

D. jest mniejsza od -2

18. Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi:

A. $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$

B. $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$

C. $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$

D. $(x^4 - 2)(x + 1)$

19. Wielomian $x^3 - 3x^2 - 3$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

A. $(x-3)(x-1)(x+1)$

B. $(x-3)x^2$

C. $(x-3)(x^2+1)$

D. $(x-3)^2(x^2+1)$

20. Dane są wielomiany $W(x) = -3x^4 + 5x^3 + 2$ oraz $P(x) = 2x^4 + 5X^3 + 3x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy:

A. $5x^4 + 3x + 2$

B. $3x + 2$

C. $-x^4 + 3x + 2$

D. $-x^4 + 3x - 2$

21. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

22. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $V(x) = 2x^3$. Wielomian $W(x) \cdot V(x)$ jest równy:

A. $2x^5 - 6x^4 + 2x^3$

B. $2x^6 - 6x^4 + 2x^3$

C. $2x^5 + 3x + 1$

D. $2x^5 + 6x^4 + 2x^3$

23. Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy[34]:

A. $5x^2 + 12x - 3$

34. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 05.03.2013.

B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$

C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$

D. $4x^3 + 12x^2 - 3$

24. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Współczynnik a jest równy[35]:

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4

25. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^2 - 5x$ i $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. Wielomian $G(x) = 2W(x) - P(x)$ jest równy[36]:

A. $x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

B. $-x^3 + 7x^2 - 7x + 4$

C. $-x^3 + 9x^2 - 12x + 7$

D. $x^3 - x^2 - 8x + 5$

26. Dane są wielomiany $\boldsymbol{W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4}$ oraz $\boldsymbol{M(x) = x^3 - 2x^2 + 5}$. Wielomian $\boldsymbol{W(x) - M(x)}$ jest równy[37]:

A. $\boldsymbol{4x^3 + 9}$

B. $\boldsymbol{3x^3 + 1}$

C. $\boldsymbol{2x^3 - 1}$

D. $\boldsymbol{4x^3 - 4x^2 + 9}$

27. Dane są wielomiany $W(x) = x - 4$ i $M(x) = x^2 - 2x$. Wielomian $W(x) \cdot P(x)$ jest równy[38]:

A. $x^3 - 2x^2 - 8x$

B. $x^3 - 6x^2 + 8x$

C. $x^3 - 4x^2 - 10\ x$

D. $x^3 - 4x^2 + 6x$

35. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 05.03.2013.
36. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf, 05.03.2013.
37. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf, 05.03.2013.
38. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 05.03.2013.

28. Suma odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1$ jest równa[39]:

A. 4

B. $-0{,}25$

C. 6

D. -4

29. Liczba $x = 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^2 - 2a$, gdy a jest równe:

A. 18

B. -18

C. 9

D. $18\sqrt{2}$

30. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy[40]:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

31. Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-4)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = 0$ są liczby[41]:

A. $-3, -2, 2, 3$

B. $2, 3$

C. $-3, 2$

D. $-2, 3$

32. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{36-x^2}{(6-x)(x^3-1)}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{1{,}6\}$

B. $R\backslash\{-6, -1, 6\}$

39. Zadania 28, 29: zaczerpnięte ze strony www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf, 05.03.2013.
40. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf, 05.03.2013.
41. Zadania 31, 32: zaczerpnięte ze strony www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php, 06.03.2013.

C. $R\setminus\{-6,6\}$

D. $R\setminus\{-6,1,6\}$

33. Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=0$ ma[42]:

A. gokładnie jedno rozwiązanie

B. dokładnie dwa rozwiązania

C. dokładnie trzy rozwiązania

D. dokładnie cztery rozwiązania

34. Liczba 5 nie należy do dziedziny wyrażenia[43]:

A. $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

B. $\frac{x-5}{x^2-10x+25}$

C. $\frac{x^2-25}{x^2+25}$

D. $\frac{x^2-25}{x+5}$

35. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{2}{x} : \frac{x^2-16}{x+1}$ jest zbiór:

A. $R\setminus\{-1,0\}$

B. $R\setminus\{-4,-1,0,4\}$

C. $R\setminus\{-4,4\}$

D. R

36. Do dziedziny funkcji f, określonej wzorem $f(x)=\frac{5x}{x(x+1)(x-\sqrt{7})(x^2+7)}$:

A. nie należą 2 liczby

B. nie należą 3 liczby

C. nie należą 4 liczby

D. nie należy 5 liczb

42. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 20.03.2013.
43. Zadania 34–47: zaczerpnięte z www.zadania.info, 20.03.2012.

37. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{x^2-2x+3}$ jest największa, gdy liczba x jest równa:

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{4}$

D. 2

38. Dla której z liczb wyrażenie $\frac{2+x}{x-5}$ nie ma sensu liczbowego?

A. -2

B. -5

C. 0

D. 5

39. Dziedziną wyrażenia $W = \frac{x^2-36}{(x+4)(x^2+4x+4)}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{-6,-4,-2,6\}$

B. $R\backslash\{-6,-4,2,6\}$

C. $R\backslash\{-4,2\}$

D. $R\backslash\{-4,-2\}$

40. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{3x}{x^2-5x+6}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{2\}$

B. R

C. $R\backslash\{2,3\}$

D. $R\backslash\{3\}$

41. Zbiór $R\backslash\{-3,0,2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

A. $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

B. $\frac{x^2-x-2}{x^3+5x^2+6x}$

C. $\frac{3x+2}{x(x-2)(x-3)}$

D. $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$

42. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-4x}$ jest zbiór:

A. $R\backslash\{-5,5\}$

B. $R\backslash\{0,4\}$

C. $R\backslash\{-2,2\}$

D. $R\backslash\{-5,0,4,5\}$

43. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{-x-3}$ jest zbiór:

A. $\langle -3,+\infty)$

B. $(-3, +\infty)$

C. $(-\infty,-3\rangle$

D. $(-\infty,-3)$

44. Najmniejszą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{-x^2-8x-\frac{59}{4}}$, jest:

A. -2

B. -3

C. -4

D. -5

45. Największą liczbą całkowitą, należącą do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{30-6x}$, jest:

A. -5

B. -4

C. 5

D. 6

46. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}$ jest:

A. $(-\infty, 1\rangle$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-1, +\infty)$

47. Wyrażenie $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+3}$ jest równe:

A. $\frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$

B. $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$

C. $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$

D. $\frac{x+2}{-5}$

48. Wyrażenie $\frac{x-1}{3x-6} - \frac{2}{x-2}$ jest równe[44]:

A. $\frac{x+1}{3x-6}$

B. $\frac{x+5}{3x-6}$

C. $\frac{x-7}{3x-6}$

D. $\frac{x-3}{3x-6}$

49. (**6 pkt**) Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - mx^3 + nx^2 - 8$. Wartość tego wielomianu dla $x = 2$ jest taka sama, jak dla $x = -2$, a wartość wielomianu dla $x = 3$ wynosi 82. Wyznacz wartości liczb m i n oraz rozwiąż nierówność: $W(x) > x^4 + 2$.[45]

50. (**2 pkt**) Sprawdź, czy wielomiany $W(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ i $H(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$ są równe.

51. **(2 pkt)** Określ dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+3}{x^2-4} + \frac{4}{x-2}$ i wykonaj działania.

44. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 21.03.2013.
45 Zadania 49, 50, 51, 52: zaczerpnięte z Testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat.

52. (2 pkt) Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

53. (2 pkt) Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$[46].

54. (2 pkt) Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$[47].

55. Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

56. (**2 pkt**) Rozwiąż równanie $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 6x - 12}$.

57. (**2 pkt**) Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$[48].

58. (2 pkt) Rozwiąż równanie: $\dfrac{x-2}{3x-1} = \dfrac{x+5}{3x+2}$[49].

59. (2 pkt) Wykonaj działania: $\dfrac{x-5}{x^2-9} \cdot \dfrac{x^2+3x}{x^2-10x+25}$.

60. (3 pkt) Pewną liczbę wymierną można przedstawić w postaci $\dfrac{n}{3-n}$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 32\}$. Gdy powiększymy licznik tego ułamka o 39, a mianownik o 20, to podwoimy wartość tego ułamka. Wyznacz ten ułamek.

46 www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf, 17.03.2013

47. Zadania 54, 55, 56: zaczerpnięte ze strony www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf, 17.03.2013.

48. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf, 17.03.2013.

49. Zadania 58, 59, 60: zaczerpnięte ze strony www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf, 17.03.2013.

4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

4.1. Równanie prostej na płaszczyźnie

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać równanie prostej w postaci kierunkowej przechodzącej przez dany punkt**

Linia prosta lub prosta – to jedno z podstawowych pojęć geometrii[50].

Równaniem prostej $\boldsymbol{k}$ nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu, który do tej prostej należy, ale nie jest spełnione przez współrzędne punktów leżących poza prostą k.

Możemy wyznaczać równanie prostej:

- przechodzącej przez dany punkt,
- przechodzącej przez dany punkt i nachylonej do osi OX pod danym kątem,
- przechodzącej przez dwa dane różne punkty.

Równanie prostej można zapisać w postaci:

Postać ogólna: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$,

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$

A, B, CA, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej.

Np. $3x - 5y + 7 = 0, -\frac{1}{2}x + 12y + 2 = 0,\ 0{,}25x - \frac{1}{3}y - 4 = 0$

50. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta#Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29, 15.03.2013.

Postać kierunkowa: $\boldsymbol{y = ax + b}$

a – współczynnik kierunkowy (kątowy) prostej, b – wyraz wolny.

Współczynnik a można obliczyć jako tangens kąta zawartego pomiędzy wykresem prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych a osią OX: $\boldsymbol{a = tg\alpha}$**.**

W równaniu prostej x i y oznaczają współrzędne dowolnego punktu P należącego do płaszczyzny. Od ich wartości zależy położenie prostej w układzie współrzędnych.

Punkt P należy do prostej tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Przykład 1

Przekształć równanie zapisane:

a) z postaci kierunkowej na postać ogólną,

b) z postaci ogólnej na postać kierunkową.

a) Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = 3x - 5$

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę: $y - 3x + 5 = 0$

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną: $-3x + y + 5 = 0$

b) Aby przekształcić równanie z postaci ogólnej na kierunkową, wystarczy z zapisu ogólnego wyznaczyć y.

Dane mamy równanie w postaci ogólnej: $2x - 3y + 6 = 0$

Wyznaczamy y: $-3y = -2x - 6 \ /:(-3)$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Mamy dane równanie w postaci kierunkowej: $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Jeżeli w równaniu ogólnym nie występuje zmienna y, to wyznaczamy x i otrzymujemy równanie prostej prostopadłej do osi OX.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt $\boldsymbol{A = (x_1, y_1)}$ **można zapisać w postaci** $\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

Przykład 2

Wiedząc, że współczynnik kierunkowy prostej wynosi 5, napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-2{,}6)$.

Rozwiązanie:

$\boldsymbol{y = a(x - x_1) + y_1}$

$y = 5\big(x - (-2)\big) + 6$

$y = 5(x + 2) + 6$

$y = 5x + 10 + 6$

$y = 5x + 11$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (-1{,}4)$ i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Ponieważ $\alpha = 60°$, to $tg60° = \sqrt{3}$.

Równanie prostej ma więc postać: $y = \sqrt{3}x + b$.

Wiemy, że do prostej należy punkt B, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$4 = \sqrt{3} \cdot (-1) + b$

$b = 4 - \sqrt{3}$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$.

Zadania

4.1.1. Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym i przechodzącej przez punkt C. Otrzymane równanie prostej zapisz w postaci ogólnej.

a) $C = (-3,-2), a = -\frac{1}{3}$ b) $C = (0{,}3), a = -1$

c) $C = (2{,}5), a = 3$ d) $C = (-2,-2), a = -4$

4.1.2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:

a) $P = (-3{,}4), \alpha = 45°$ b) $P = (6{,}15), \alpha = 120°$

c) $P = (-1{,}5), \alpha = 135°$ d) $P = (2,-3), \alpha = 60°$

4.1.3. Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = -2x + 3$. Wyznacz liczbę a, jeśli:

a) $f(2a - 4) = 3a + 8$ b) $f(4a + 1) = f(5a - 3)$ c) $f(8 - 4a) = \frac{22a-23}{3}$

4.2. Równoległość i prostopadłość prostych, a ich współczynnik kierunkowy

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych**
- **Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt**
- *** Badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych**
- *** Wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt**

Dwie proste są równoległe, jeżeli ich współczynniki kierunkowe są równe. Zatem proste *k* i *l*, dane wzorami

$$(k) \quad y = a_1x + b_1$$

$$(l) \quad y = a_2x + b_2$$

są **równoległe,** jeżeli:

$$a_1 = a_2$$

Proste są **prostopadłe**, jeżeli ich współczynniki kierunkowe spełniają zależność:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Przykład 1

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (-2{,}4)$ i równoległej do prostej o równaniu $3x - 2y + 4 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x - 2y + 4 = 0.$

$-2y = -3x - 4 \ /:(-2)$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Z warunku równoległości wiadomo, że $a = a_1 = \frac{3}{2}$.

Punkt P leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{3}{2}(x - (-2)) + 4$, więc

$$y = \frac{3}{2}(x + 2) + 4 = \frac{3}{2}x + 3 + 4 = \frac{3}{2}x + 7$$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{3}{2}x + 7$.

Przykład 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $B = (3, -2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $3x + 4y - 7 = 0$.

Przekształcamy równanie prostej do postaci kierunkowej, aby zobaczyć jej współczynnik kierunkowy.

$3x + 4y - 7 = 0$

$4y = -3x + 7 \ /:4$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

$$a_1 = -\frac{3}{4}$$

Korzystamy ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt o danym współczynniku kierunkowym.

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Z warunku prostopadłości wiadomo, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, stąd:

$-\frac{3}{4} \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{4}{3}$

Punkt B leży na prostej, więc spełnia jej równanie:

$y = \frac{4}{3}(x-3) + (-2)$, więc
$y = \frac{4}{3}x - 4 - 2 = \frac{4}{3}x - 6$

Odpowiedź: Szukana prosta ma równanie $y = \frac{4}{3}x - 6$.

Zadania

4.2.1. Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej:

a) $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6, 3)$

b) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

c) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{1}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (2,2)$

e) $y = 3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (1,2)$

f) $y = -3x - 1$ i przechodzi przez punkt $A = (3,3)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $x + y - 6 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (1, -2)$

i) $2x + 2y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-4, -3)$

j) $x - y + 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-2, -5)$

k) $x + y - 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (-6,8)$

4.2.2. Znajdź równanie funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej:

a) $y = 2x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (2, 3)$

b) $y = -5x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (2,1)$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (4,2)$

d) $y = \frac{2}{3}x - 2$ i przechodzi przez punkt $A = (6,1)$

e) $y = 4x + 6$ i przechodzi przez punkt $A = \left(\frac{1}{4}, 5\right)$

f) $y = -x - 3$ i przechodzi przez punkt $A = (-5,2)$

g) $2x - y + 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$

h) $y - 0{,}5 = 0{,}3x$ i przechodzi przez punkt $A = \left(10, -\frac{1}{2}\right)$

i) $x + y + 3 = 0$ i przechodzi przez punkt $A = (6{,}1)$

j) $3x - y = -9$ i przechodzi przez punkt $A = (-2{,}6)$

4.2.3. Dana jest prosta *l* o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \sqrt{2}$ oraz punkt *A* = (–3,–2). Wyznacz wzór funkcji liniowej *f* wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do prostej *l*, a punkt *A* należy do wykresu funkcji *f*.

4.2.4. Określ wzajemne położenie prostych:

a) $18x + 3y - 1 = 0$ $y = \frac{1}{3} - 6x$

b) $y = \frac{7}{8}x + 2$ i $7x - 8y + 24 = 0$

c) $6x + 2y = 4$ i $y = \frac{1}{3}x + 2$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ i $y = 3x + 4$

e) $x - 2y + 3 = 0$ i $2x + y - 5 = 0$

f) $3x - 6y + 7 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x$

g) $3x - 6y + 7 = 0$ i $y = -2x + 4$

4.2.5. Proste k i l są prostopadłe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: 2x - 9y + 6 = 0, k: y = ax + 6$

b) $l: y = -\frac{1}{3}x + 2,\ k: y - ax = 4$

c) $l: 2ax - y + 1 = 0,\ k: x + 2y - 6 = 0$

4.2.6. Proste l i m są równoległe. Oblicz wartość współczynnika a.

a) $l: y = 2x - 5 = 0, m: y = (3 - a)x + 4$

b) $l: y = 3x + 6,\ m: y = 12 + ax$

c) $l: y = (a + 4)x + 5,\ m: y = 4 + 10x$

d) $l: y = ax + 6,\ m: y = 6 + 19x$

4.3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych**
- **Wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)**
- **Sprawdzić, czy punkty są współliniowe**

Punkt przecięcia dwóch prostych

Gdy proste k i l nie są równoległe, to przecinają się one w pewnym punkcie P. Punkt przecięcia P leży na prostej k i na prostej l, zatem jego współrzędne muszą spełniać jednocześnie równania obu prostych. Współrzędne punktu P otrzymujemy, rozwiązując układ równań.

Przykład 1

Wyznacz punkt przecięcia się prostych danych równaniami: $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$.

Z podanych wzorów funkcji tworzymy układ dwóch równań:

$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -5x + 9 \end{cases}$ wyznaczamy z niego x oraz y.

$3x - 7 = -5x + 9$

$3x + 5x = 9 + 7$

$8x = 16 \ /{:}8$

$x = 2$

Więc: $y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1y = 3x - 7 = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Odpowiedź: Proste określone równaniami $y = 3x - 7$ i $y = -5x + 9$, przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Jeśli mamy dane dwa różne punkty na płaszczyźnie $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$, możemy wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te punkty.

Możemy napisać równanie takiej prostej, rozwiązując układ równań lub skorzystać z gotowego wzoru.

Poniższe przykłady przedstawiają obie metody.

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}6)$.

Szukamy równania prostej $y = ax + b$.

Prosta przechodzi przez punkty $A = (-3{,}6)$ i $B = (1{,}9)$, a to oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają równanie prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = -3a + b \\ 9 = a + b \end{cases}$$

Odejmujemy stronami równania, i otrzymujemy:

$$6 - 9 = -3a - a + b - b$$

$$-3 = -4a \ /:(-3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

Skoro $9 = a + b$, to $b = 9 - \frac{4}{3} = 7\frac{2}{3}$

Szukane równanie prostej, to $y = \frac{4}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

Określenie wzoru funkcji przechodzącej przez dwa dane punkty za pomocą wzorów

Mając dane dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, możemy obliczyć wartość współczynnika kierunkowego prostej, korzystając ze wzoru:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Gdy mamy współczynnik kierunkowy prostej i punkt, który do tej prostej należy, to możemy już napisać jej wzór, korzystając z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$.

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$, opisuje wzór:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

Przykład 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(-2,3)$ i $B=(4,2)$.

Rozwiązanie:

I sposób :

$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$

$(y-3)(4-(-2))-(2-3)(x-(-2))=0$
$(y-3)(4+2)-(-1)(x+2)=0$
$(y-3)\cdot(6)+1\cdot(x+2)=0$
$6y-18+x+2=0$
$6y=-x+16$
$y=-\frac{1}{6}x+\frac{16}{6}$
$y=-\frac{1}{6}x+\frac{8}{3}$

II sposób:

1. Zapisujemy równanie szukanej prostej w postaci kierunkowej, czyli: $y=a\,x+b$.
2. W kolejnych krokach będziemy wyznaczać współczynniki *a* i *b*.
3. Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do równania prostej:

$$y_A=a\cdot x_A+b$$

4. Podstawiamy współrzędne drugiego punktu do równania prostej:

$y_B=a\cdot x_B+b$

5. Rozwiązujemy układ równań

$$y_A=a\cdot x_A+b$$

$$y_B=a\cdot x_B+b$$

otrzymując szukane parametry *a* i *b*.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \ /\cdot(-1) \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = 2a - b \\ \ \ 2 = 4a + b \end{cases}$$

$$-1 = 6a \ /:6$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

Podstawiamy do pierwszego równania z układu równań za $a = -\frac{1}{6}$, dzięki temu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b, którą obliczamy:

$$3 = -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + b$$

$$3 = \frac{1}{3} + b$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Otrzymane równanie ma postać: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2,4)$ i $B = (-3,5)$. Znajdź prostą, przechodzącą przez te punkty.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-4}{-3-2} = -\frac{1}{5}$$

Korzystamy z zależności, że $y = a(x - x_A) + y_A$ i piszemy równanie prostej.

$$y = -\frac{1}{5}\left(x - (-3)\right) + (-3) = -\frac{1}{5}(x+3) - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3$$

Ostatecznie prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x - 3\frac{3}{5}$.

Zadania

4.3.1. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty:

a) A = (-2,-10), B = (1,-1) b) A = (-3,9), B = (2,-1) c) A = (0,6), B = (6,0)

d) A = (-2,-1), B = (3,0) e) A = (-12,4), B = (3,1) f) A = (8,4), B = (1,-1)

4.3.2. Oblicz brakujące współrzędne punktów, jeśli wiadomo, że należą do danej prostej:

a) $y=\frac{3}{2}x+2$, $P=(-2,y)$

b) $2x-3y=2$, $P=(\frac{1}{2},y)$

c) $y=9x-3$, $P=(x,-6)$

d) $\frac{x}{-7}+\frac{2y}{7}=1$, $P=(x,-\frac{2}{3})$

4.3.3. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a, wiedząc, że do tej prostej należy punkt M:

a) $a=0,\ M=(-2,-3)$

b) $a=3,\ M=(6,-2)$

c) $a=-\frac{3}{4},\ M=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

d) $a=-5,\ M=(2,3)$

4.3.4. Napisz równanie prostej, do której należą punkty:

a) $A=(-1,7),\ B=(3,-5)$

b) $A=(-4,4),\ B=(2,7)$

c) $A=(-5,0),\ B=(5,-6)$

d) $A=\left(1,\frac{1}{12}\right),\ B=\left(3,-\frac{17}{12}\right)$

e) $A=(-2,6), B=\left(\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$

f) $A=(2,1),\ B=(-4,2)$

g) $A=(2,6),\ B=(-1,-7)$

h) $A=(2,4),\ B=(5,-5)$

4.3.5. Sprawdź, czy punkty są współliniowe:

a) $A=(2,1), B=(4,5), C=(-3,-9)$

b) $A=(-1,-6), B=(0,-6), C=(12,0)$

c) $A=(-5,3), B=(2,3), C=(4,3)$

d) $A=(2,0), B=(2,-4), C=(2,8)$

4.4. Odległość punktów

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Obliczać odległość dwóch punktów**
- **Obliczać odległość punktu od prostej**

Niech będą dane dwa punkty $A=(x_1,y_1)$ i $B=(x_2,y_2)$.

Odległość punktu A od punktu B liczymy, korzystając ze wzoru:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość punktów A i B od siebie, gdy $A=(7,\ 6)$, $B=(-5,4)$.
Podstawiamy do wzoru:
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-5-7)^2+(4-6)^2}=\sqrt{144+4}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$

Odpowiedź:
Odległość punktu A od punktu B wynosi $2\sqrt{37}$.

Odległość punktu od prostej to w istocie długość odcinka, którego początkiem jest dany punkt i opuszczonego na prostą pod kątem prostym.

Dana jest prosta k o równaniu ogólnym $Ax+By+C=0$, gdzie $A^2+B^2\neq 0$ i punkt $P=(x_1,x_2)$, który leży poza prostą k.

Odległość punktu P od prostej k wyraża się wzorem:

$$d(P,k)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Obliczając odległość punktu od prostej, możemy korzystać z powyższego wzoru lub wykonać następujące kroki:

1. Napisać wzór prostej prostopadłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.
2. Obliczyć punkt przecięcia danej prostej i prostej do niej prostopadłej.
3. Obliczyć długość odcinka, którego końce to dany w zadaniu punkt i punkt obliczony w punkcie drugim. Długość tego odcinka jest szukaną przez nas odległością punktu A od prostej k.

Przykład 2

Dane są: prosta $k: y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$. Obliczmy odległość punktu A od prostej k.

Rozwiązanie:

1. Napiszemy wzór prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

Jeśli prosta l jest prostopadła do prostej k, to współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $-\frac{1}{2}$.

Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (1,3)$, więc:

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Równanie prostej $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Obliczamy punkt przecięcia prostej k i prostej do niej prostopadłej.

Rozwiązujemy układ równań złożony ze wzorów obu funkcji:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x = 0{,}4$$

$$y = 2 \cdot 0{,}4 + 3 = 3{,}8$$

Punkt przecięcia prostych k i l ma współrzędne $B = (0{,}4; 3{,}8)$

3. Obliczamy długość odcinka AB, czyli odległość punktu A od prostej k.

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}4 - 2)^2 + (3{,}8 - 3)^2} = \sqrt{2{,}56 + 9}$$
$$= \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$$

Odpowiedź:

Odległość puntu A od prostej k wynosi $3{,}4$.

Przykład 3

Korzystając z danych z przykładu 2, obliczymy odległość puntu A od prostej k, korzystając ze wzoru $d(P, k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

A, B i C to współczynniki prostej z jej postaci ogólnej, natomiast x_1, y_1 to współrzędne danego punktu.

Mamy dane: prostą k: $y = 2x + 3$ oraz punt $A = (2,3)$.

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$$y = 2x + 3$$

$$2x - y + 3 = 0$$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Zadania

4.4.1. Oblicz długość odcinka, mając dane współrzędne jego końców:

a) $A = (1,1), B = (4,7)$

b) $A = (-5,2), B = (3,2)$

c) $A = (2,-5), B = (-3,4)$

d) $A = (-1,-4), B = (8,4)$

e) $A = (2,-2), B = (4,5)$

e) $A = (3,-5), B = (4,4)$

f) $A = (6,8), B = (10,0)$

g) $A = (8,0), B = (-2,5)$

4.4.2. Oblicz odległość punktu A od prostej k:

a) $A = (1,4)$, $k: 4x - 2y - 16 = 0$

b) $A = (-5, 4), k: y = -2x + 1$

c) $(-2,3)$, $k: 3x - 4y + 2 = 0$

4.4.3. W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-4,2)$, $B = (5,4)$.

a) Oblicz odległość punktu $C = (-1,4)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B.

b) Uzasadnij, że jeśli $m \neq 0$, to punkty A, B oraz punkt $D = (-1, m)$ są wierzchołkami trójkąta.

4.5. Współrzędne środka odcinka

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wyznaczać współrzędne środka odcinka**

Niech będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$.

Środek odcinka, mając dane współrzędne jego końców A i B, liczymy ze wzoru:

$$\boldsymbol{S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

Przykład 1

Podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach: A = (3, -5), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3 + 6}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right) = (4{,}5;\ -1)$$

Przykład 2

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S = (-3,6)$. Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli $B = (4,-2)$.

Zajmijmy się osobno współrzędną x i osobno współrzędną y.

$\frac{x_1 + x_2}{2} = -3$	$\frac{y_1 + y_2}{2} = 6$
$\frac{x_1 + 4}{2} = -3$	$\frac{y_1 + (-2)}{2} = 6$
$x_1 + 4 = -6$	$y_1 - 2 = 12$
$x_1 = 10$	$y_1 = 14$

Odpowiedź:

Współrzędne punktu A wynoszą $(10,14)$.

Zadania

4.5.1. Podaj środki odcinków, których końce mają współrzędne:

a) $A = (-8,5), B = (0,11)$ b) $A = (3,-5), B = (-13,7)$

c) $A = (-2,3), B = (4,-9)$ d) $A = (1,7), B = (-5,-2)$

e) $A = (5,3), B = (1,3)$ f) $A = (-6,1), B = (4,3)$

g) $A = (-4,-8), B = (2,1)$ h) $A = (-4,5), B = (8,7)$

i) $A = (-4,-7), B = (10,-3)$ j) $A = (0,6), B = (-12,16)$

4.5.2. Dany jest odcinek o końcach w punktach $A = (-2,4)$ i $B = (6,-2)$.

a) Wyznacz współrzędne środka odcinka.

b) Oblicz długość tego odcinka.

c) Wyznacz równanie prostej równoległej do odcinka przechodzącej przez punkt $C = (0,3)$.

4.5.3. Dany jest odcinek $|AB|$, w którym dany jest środek S i koniec B. Wyznacz współrzędne punktu A.

a) $S = (2,-5),\ B = (9,-3)$ b) $S = (-3,6),\ B = (2,5)$ c) $S = (2,4),\ B = (5,8)$
d) $S = (2,7),\ B = (-3,5)$ e) $S = (2,1),\ B = (-5,6)$

4.5.4. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, jeżeli środki jego boków mają współrzędne: $P = (1,3), Q = (-5,4), R = (-6,7)$.

4.5.5. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek o końcach $A = (29,-15)$ i $B = (45,13)$ w stosunku $|AP|:|PB| = 1:3$.

4.5.6. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

4.5.7. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A = (4,6), B = (3,5)$ b) $A = (3,1), B = (-4,-8)$

c) $A = (3,1), B = (-1,7)$ d) $A = (-1,3), B = (1,1)$

e) $A = (1,1), B = (5,5)$ f) $A = (-2,4), B = (6,8)$

4.6. Równanie okręgu*

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Posługiwać równaniem okręgu (x – a)2 + (y – b)2 = r2 oraz opisywać koła za pomocą nierówności**
- **Wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu**

Równanie okręgu

W układzie współrzędnych dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r.

Niech punkt $P = (a, b)$ leży w dowolnym miejscu na okręgu. Zapiszmy teraz zależność dowolnego punktu P leżącego na okręgu i jego odległość od środka okręgu.

$|OP| = r$, i na mocy definicji odległości dwóch punktów otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} \; /\cdot^2$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2$$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r, gdzie $r > 0$, ma postać:

$\boldsymbol{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2}$ **(postać kanoniczna)**

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \; x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$ **(postać ogólna), gdzie $\boldsymbol{r^2 = a^2 + b^2 - c}$**

Przykład 1

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S = (-2, 6) i promieniu = 4.

$$\left(x-(-2)\right)+(y-6)=4^2$$

$$(x+2)+(y-6)=16$$

Przykład 2

Podaj wzór okręgu o środku w punkcie $S=(-2,-7)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A=(-6,-4)$.
Mamy dane współrzędne środka okręgu, które możemy podstawić do wzoru:

$$(x+2)^2+(x+7)^2=r^2$$

Musimy obliczyć promień okręgu. Możemy to zrobić, podstawiając współrzędne punktu $A=(-6,-4)$ do wzoru:

$$(-6+2)^2+(-4+7)^2=r^2$$

$$(-4)^2+3^2=r^2$$

$$16+9=r^2$$

$$25=r^2$$

$$r=5$$

Równanie okręgu jest postaci: $(x+2)^2+(x+7)^2=25$.

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli a, b oraz r.

Przykład 3

Przekształć równanie okręgu dane w postaci ogólnej na postać kanoniczną.

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0$$

Szukamy najpierw współrzędnych środka okręgu.

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0$$

$$-2a=4 \qquad -2b=-6$$

$$a=-2 \qquad b=3$$

Obliczamy długość promienia wiedząc, że: $r^2=a^2+b^2-c$

$$r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - 4 = 4 + 9 - 4 = 9$$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

Przykład 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ w punkcie $P = (-2{,}3)$.

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ – okrąg o środku w punkcie $S = (3{,}4)$ i promieniu $r = 1$.
Prosta styczna do okręgu w punkcie P jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty: $S = (3{,}4)$ i $P = (-2{,}3)$.

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$\big(y - (-2)\big)(-2-3) - (3-4)(x-3) = 0$$

$$(y+2)\cdot(-5) - (-1)(x-3) = 0$$

$$-5y - 10 + x - 3 = 0$$

$$x - 5y - 13 = 0$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$$

Prosta styczna do okręgu w punkcie A jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{5}x - \frac{13}{5}$, więc jej równanie to: $y = -5x + b$.

Skoro punkt P należy do prostej $y = -5x + b$, to:

$3 = -5\cdot(-2) + b \Rightarrow b = -7$

Odpowiedź:

Równanie stycznej do okręgu ma postać $y = -6x - 7$.

Koło – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu na tej płaszczyźnie (środka koła) nie przekracza pewnej wartości (promienia koła).

Koło w kartezjańskim układzie współrzędnych jest opisane wzorem:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$$

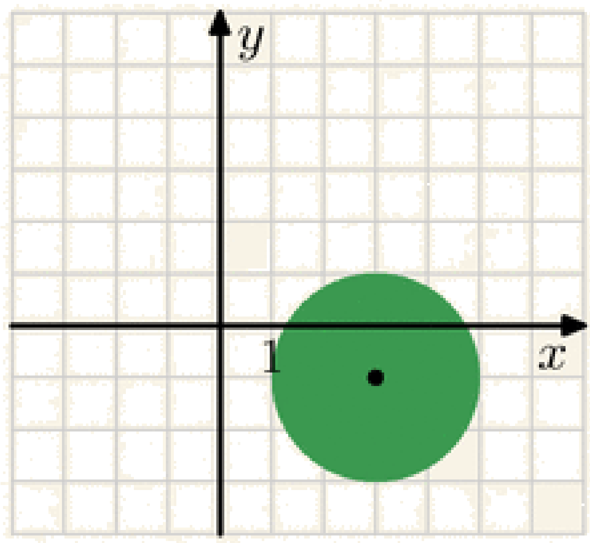
gdzie: $r > 0$ – promień koła, (x_0, y_0) – współrzędne środka koła[51].

Przykład 5

Narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 4$$

Nierówność opisuje koło o środku w punkcie $S = (3, -1)$ i promieniu $r = 2$.



Zadania

4.6.1. Wyznacz środek i długość promienia okręgu:

a) $(x-4)^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + (y+3)^2 = 9$

c) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$

d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

e) $(x+6)^2 + (y+10)^2 = 64$

f) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 8$

4.6.2. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r, gdy:

a) $S = (-4,6), r = 5$

b) $S = (1,2), r = 3$

51. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o, 19.02.2013.

c) $S=(0,0), r=\sqrt{2}$ d) $S=(-4,1), r=\sqrt{7}$

e) $S=(6,-2), r=1$ f) $S=(0,1), r=2$

4.6.3. Podaj równanie okręgu o ośrodku w punkcie $S=(6,-11)$, jeżeli przechodzi przez punkt $A=(6,-1)$.

4.6.4. Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt przecięcia prostych $7x-y-3=0$ i $4y-3x-13=0$ i do którego należy punkt $P=(5,6)$.

4.6.5. Zapisz wzór okręgu za pomocą postaci kanonicznej:

a) $x^2+y^2+6x-10y+27=0$ b) $x^2+y^2-3=0$

c) $x^2+y^2-6y+4=0$ d) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$

4.6.6. Punkt $K=(-1,9)$ należy do okręgu stycznego do osi OX w punkcie $L=(2,0)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

4.6.7. Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $S=(0,3)$ i promieniu $r=\sqrt{6}$ z prostą o równaniu $3x+y-15=0$.

4.6.8. Napisz nierówność opisującą koło o promieniu r i środku w punkcie S.

a) $S=(-1,5), r=4$ b) $S=(-3,0), r=\sqrt{3}$

c) $S=(-1,-2), r=\sqrt{2}$ d) $S=\left(4,\frac{1}{2}\right), r=3$

4.6.9. Określ położenie punktów $A=(1,0), B=(3,3), C=(4,-1)$ względem koła o środku w punkcie $S=(-1,3)$ i promieniu $r=4$.

4.6.10. Oblicz odległość punktu A od środka koła $(x-3)^2+y^2\leq 9$ oraz określ położenie punktu A względem tego koła, jeżeli:

a) $A=(3,-3)$ b) $A=(4,2)$ c) $A=(-2,-3)$

4.6.11. Przedstaw w prostokątnym układzie współrzędnych figurę:

a) $F = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \le 9 \wedge x - 2y + 2 < 0\}$

b) $F = \left\{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge (x-7)^2 + (y+2)^2 \le 36 \wedge (x-5)^2 + y^2 \ge 4\right\}$

c) $F = \left\{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge (x-2)^2 + y^2 > 16 \wedge (x-6)^2 + y^2 < 4\right\}$

4.7. Symetria osiowa i środkowa

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu**

Symetria – słowo greckie, oznaczające regularny układ, harmonię między częściami całości.

Świat jest pełen symetrii, obcujemy z nią na co dzień: w świecie roślinnym, w budowie organizmów żywych, w sztuce, w budownictwie, w technice i w geometrii.

Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi A przyporządkowany jest punkt A', leżący:

- na prostej prostopadłej do tej prostej k i przechodzącej przez punkt A,
- w tej samej odległości od prostej k co punkt A,
- po przeciwnej stronie prostej k niż punkt A[52].

Symetrię osiową względem prostej k oznaczamy jako S_k.

Twierdzenie

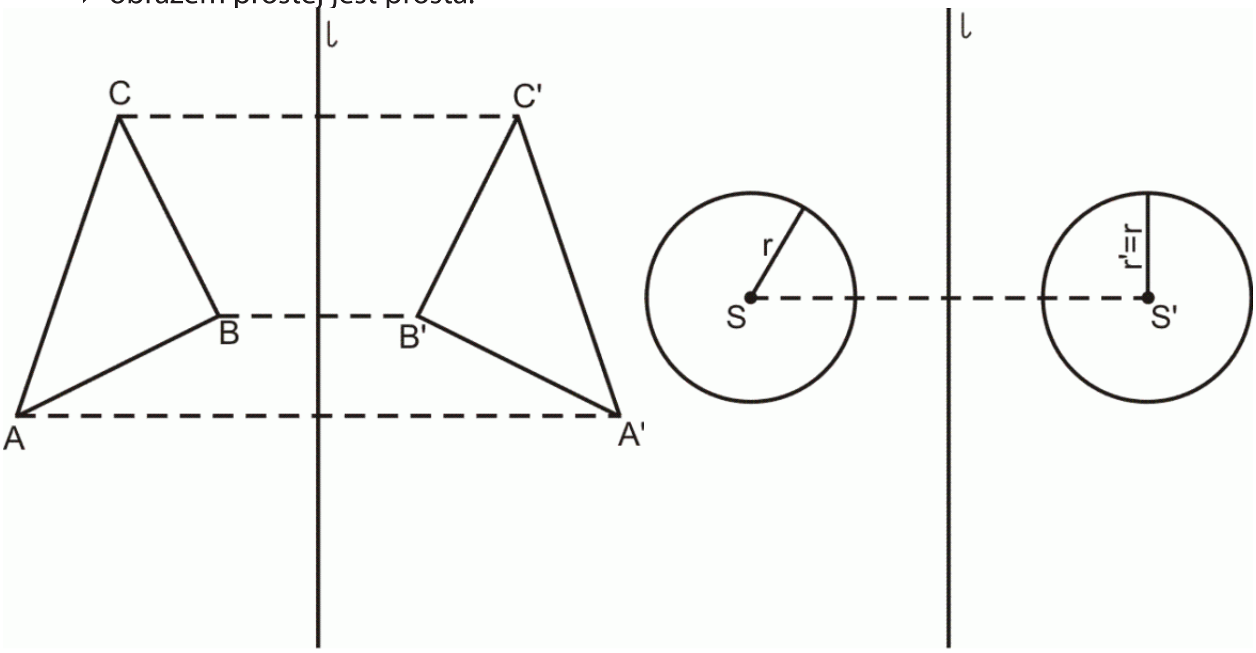
Symetria osiowa jest izometrią.
Symetria osiowa, jak każda izometria, zachowuje kształt figury i jej wymiary.

52. www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.

Izometria – przekształcenie geometryczne (płaszczyzny lub przestrzeni), które zachowuje odległość punktów, czyli odległość między dwoma dowolnymi punktami A i B jest równa odległości między ich obrazami A' i B'.

W symetrii osiowej:

- obrazem trójkąta względem dowolnej prostej jest trójkąt do niego przystający,
- obrazem okręgu względem dowolnej prostej jest okrąg o tym samym promieniu,
- obrazem odcinka jest odcinek o takiej samej długości,
- obrazem prostej jest prosta.



Rysunek 4-1. Przykłady figur symetrycznych

Prostą, względem której figura jest sama do siebie symetryczna, nazywamy **osią symetrii** tej figury. Natomiast figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną.**

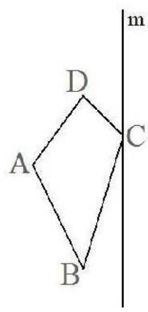
Przykład 1

Figury osiowosymetryczne, to np.:

- odcinek – 2 osie symetrii,
- kwadrat – 4 osie symetrii,
- okrąg (koło) – nieskończenie wiele osi symetrii,
- kąt – 1 oś symetrii (prosta zawierająca dwusieczną kąta),
- trójkąt równoboczny – 3 osie symetrii.

Przykład 2

Wyznacz konstrukcyjnie obraz figury w symetrii względem danej prostej.



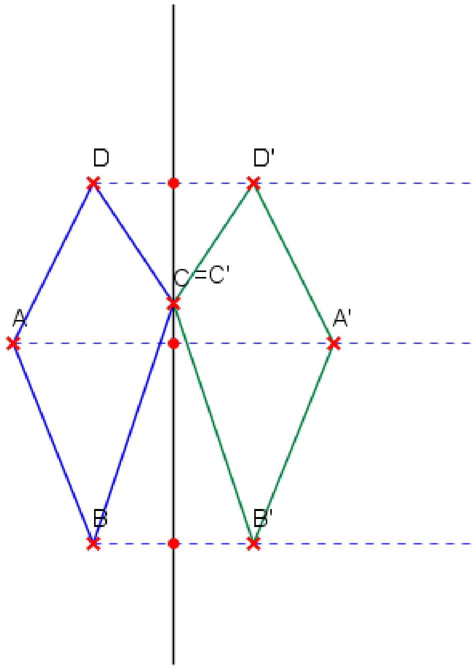
1. Prowadzimy proste prostopadłe do prostej m, przechodzące przez punkty A, B, C, D.

2. Za pomocą cyrkla mierzymy odległość punktu A od prostej m, i odkładamy taki

sam odcinek po przeciwnej stronie prostej. Otrzymujemy punkt A' symetryczny do punktu A.

3. Analogicznie postępujemy z pozostałymi punktami.

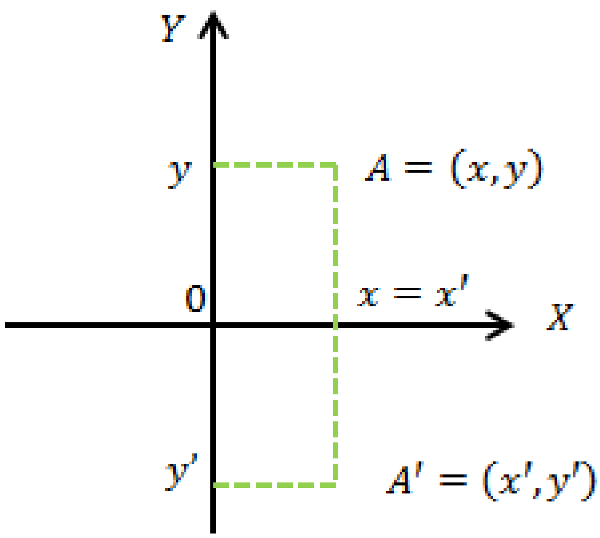
4. Łączymy punkty $A', B', C' D'$ i otrzymujemy figurę symetryczną do danej względem prostej m.



Rysunek 4-2. Figury symetryczne

Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi OX.

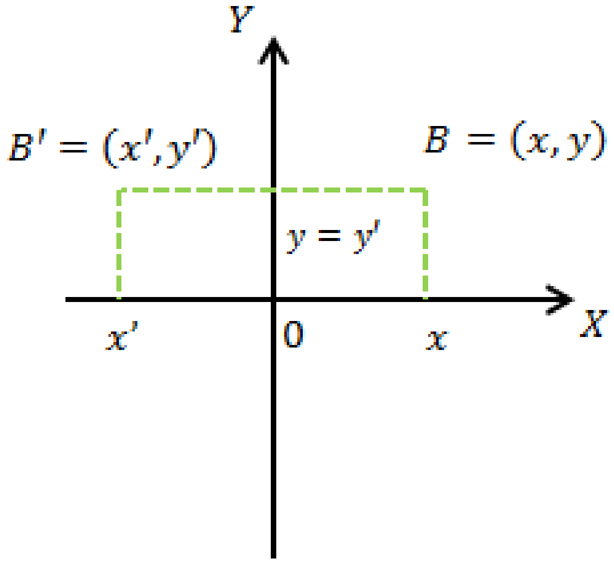


Rysunek 4-3. Symetria względem osi OX

Jak widać na rysunku 3, pierwsze współrzędne obydwu punktów są takie same, natomiast drugie są liczbami przeciwnymi:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Symetria względem osi OY.



Rysunek 4-4. Symetria względem osi OY

Jak widać na rysunku 4, pierwsze współrzędne punktów B i B' są liczbami przeciwnymi, natomiast drugie są równe:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A' = (x, -y)$.

Obrazem punktu $B = (x, y)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $B' = (-x, y)$.

Symetria środkowa

Symetrię względem punktu O będziemy oznaczać symbolem S_o.

Symetrią środkową względem punktu O, zwanego środkiem symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O jest stały, a każdemu innemu punktowi A przyporządkowuje się punkt A', taki że punkt O jest środkiem odcinka AA'[53].

Twierdzenie

Symetria środkowa względem punktu O jest izometrią.

Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest punkt O.

53 www.math.edu.pl/symetria, 03.03.2013.

Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej S_o jest ta sama figura. Figurę F nazywamy środkowosymetryczną.

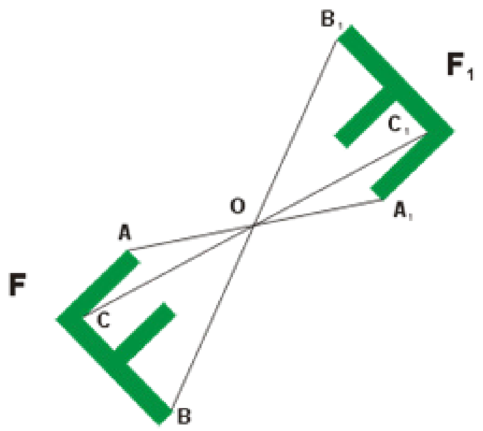
Przykład 3

Figury środkowosymetryczne, to np.:

- § koło (okrąg) – środek koła,
- § odcinek – środek odcinka,
- § prostokąt – punkt przecięcia jego przekątnych.

Przykład 4

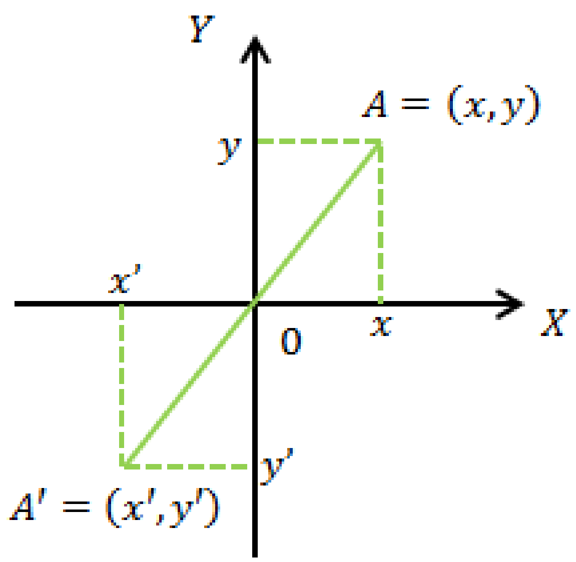
Przykład figury środkowosymetrycznej



Rysunek 4-5. Przykład figury środkowosymetrycznej[54]

Trójkąt to figura, która **nie ma** środka symetrii.

Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych



Rysunek 4-6. Symetria względem punktu (0,0)

54. www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa, 06.03.2013.

Jak widać na rysunku 5, pierwsze współrzędne punktów A i A', jak i drugie są liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Wniosek

Obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.

Zadania

4.7.1. Podaj współrzędne obrazu punktu M w symetrii względem osi OX, OY, początku układu współrzędnych:

a) $M = (5, -9)$

b) $M = \left(3, -2 + \sqrt{3}\right)$

c) $M = \left(\frac{4}{7}, -2\frac{3}{4}\right)$

d) $M = (2{,}3)$

e) $M = (-5, -7)$

4.7.2. Trójkąt ABC, w którym A = (-5,2), B = (6,-3), C = (1,4), przekształcono symetrycznie względem:

a) osi x,

b) osi y,

c) początku układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkątów otrzymanych po przekształceniu.

4.7.3. Podaj przykłady liter, liczb lub wyrazów, które są figurami osiowosymetrycznymi.

4.7.4. Oblicz, dla jakich wartości parametru m i n punkty A i B są symetryczne względem osi, gdy: $A = (3, -n)$ i $B = (m + 2{,}1)$.

4.7.5. Jakim zbiorem: pustym, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór osi symetrii kwadratu?

4.7.6. Wyznacz równanie okręgu, który jest symetryczny do okręgu o równaniu

$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 19 = 0$ **względem prostej** $y = 2x + 1$.

4.7.7. Znajdź obraz okręgu $x^2 + y^2 = 4$ w symetrii względem prostej $y = 2x + 4$.

4.7.8. Trójkąt o wierzchołkach $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ $A = (-2{,}3), B = (-4{,}1), C = (2{,}6)$ przekształcono przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktów będących obrazami wierzchołków trójkąta ABC w tym przekształceniu.

CiEKAWOSTKA

Ambigram – grafika utworzona kaligraficznie lub obrazowo w taki sposób, że po obróceniu całości można odczytać ten sam tekst[55]. Inaczej mówiąc, ambigramy to grafiki środkowosymetryczne.

Przykłady ambigramów:

Rysunek 4-7. Przykłady ambigramów[56]

Palindrom (gr. *palindromeo* – biec z powrotem) – wyrażenie brzmiące tak samo czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej. Przykładem palindromu jest: *Kobyła ma mały bok*. Współcześnie palindromy pełnią funkcję gry słownej[57].

Najdłuższy polski palindrom, autorstwa Tadeusza Morawskiego, ma ponad 33 tysiące liter.

Przykłady palindromów:

- *Gór ech chce róg*
- *Żartem dano nadmetraż*
- *Może jeż łże jeżom*
- *Zagwiżdż i w gaz*[58]

55. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram, 09.03.2013.
56. www.violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd, 07.03.2013.
57. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom, 09.03.2013.
58. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski, 21.02.2013.

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu[59]:

A. $y = -\frac{1}{3}x - 1$

B. $y = \frac{1}{3}x + 1$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = 3x - 1$

2. Prosta o równaniu $y = -4x + (2m - 7)$ przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$. Wtedy:

A. $m = 7$

B. $m = 2\frac{1}{2}$

C. $m = -\frac{1}{2}$

D. $m = -17$

3. Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych OY w punkcie $(0,2)$. Wtedy[60]:

A. $m = -\frac{2}{3}$

B. $m = -\frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = \frac{5}{3}$

4. Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$[61]:

A. $y = -2x + 1$

B. $y = 0{,}5x - 1$

C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

59. Zadania 1, 2: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Próbna matura z matematyki, listopad, 2009, 05.03.2013.
60. Zadanie zaczerpnięte z Arkusza maturalny CKE, maj, 2010, 05.03.2013.
61. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego, Próbna matura z Operonem, listopad, 2011, 05.03.2013.

D. $y = 2x - 1$

5. Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(2, 1)$[62].

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x - 3$

D. $y = -x + 1$

6. Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$ [63]:

A. są równoległe i różne

B. są prostopadłe

C. przecinają się pod kątem innym niż prosty

D. pokrywają się

7. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$ [64]:

A. $y = \frac{1}{2}x$

B. $y = -\frac{1}{2}x$

C. $y = 2x$

D. $y = -2$

8. Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

A. $(-5, -2012)$

B. $(-2012, -5)$

C. $(2, -7)$

D. $(-2012, 5)$

9. Na okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$ leży punkt:

A. $A = (-2, 5)$

62. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, maj, 2011, 05.03.2013.
63. Zadanie zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, Matura próbna, listopad, 2010, 05.03.2013.
64. Zadania 7, 8, 9: zaczerpnięte z CKE (www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 05.03.2013.

B. $B = (2,-5)$

C. $C = (2,-7)$

D. $D = (7,-2)$

10. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (4,-3)$ i $B = (-1,-13)$. Funkcja f opisana jest wzorem[65]:

A. $f(x) = 2x - 11$

B. $f(x) = 2x + 11$

C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

D. $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

11. Dany jest okrąg o równaniu $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Środkiem S tego okręgu jest punkt:

A. $S = (-3,-4)$

B. $S = (3,4)$

C. $S = (3,-4)$

D. $S = (-3,4)$

12. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$:

A. $y = \frac{1}{2}x$

B. $y = -\frac{1}{2}x$

C. $y = 2x$

D. $y = -2x$

13. Prostą przechodzącą przez punkt $\boldsymbol{A} = (\mathbf{1},\mathbf{1})$ i równoległą do prostej $\boldsymbol{y} = \mathbf{0{,}5}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ opisuje równanie[66]:

A. $y = -2x - 1$

65. Zadania 10, 11, 12: zaczerpnięte z CKE (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze), 05.03.2013.
66. Zadania 13, 14, 15: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z matematyki, styczeń, 2013, (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 05.03.2013.

B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

D. $y = 2x - 1$

14. Proste: $y = -3x + 4$ i $y = \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{4}{3}\right)x$ są prostopadłe, jeżeli:

A. $a = -2$

B. $a = 2$

C. $a = \sqrt{5}a = \sqrt{5}$

D. $a = -\sqrt{5}$ lub $a = \sqrt{5}$

15. Proste l i k są prostopadłe i $l\colon 2x - 9y + 6 = 0, k\colon y = ax + b$. Wówczas[67]:

A. $a = -\frac{2}{9}$

B. $a = \frac{2}{9}$

C. $a = -\frac{9}{2}$

D. $a = \frac{9}{2}$

16. Równanie $(x + 6)^2 + y^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

A. $S = (-6, 4), r = 4$

B. $S = (6, 0), r = 4$

C. $S = (6, 0), r = 2$

D. $S = (-6, 0), r = 2$

17. (**5 pkt**) Prosta $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

18. Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$:[68]

A. $y = 3x$

67. Zadania 15, 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2012 (www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012--listopad.pdf), 05.03.2013.
68. Zadania18, 19, 20: zaczerpnięte z CKE (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 05.03.2013.

B. $y = -3x$

C. $y = 3x + 2$

D. $y = \frac{1}{3}x + 2$

19. Punkty $B = (-2,4)$ i $C = (5,1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 74

B. 58

C. 40

D. 29

20. Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 100$. Środek tego okręgu ma współrzędne:

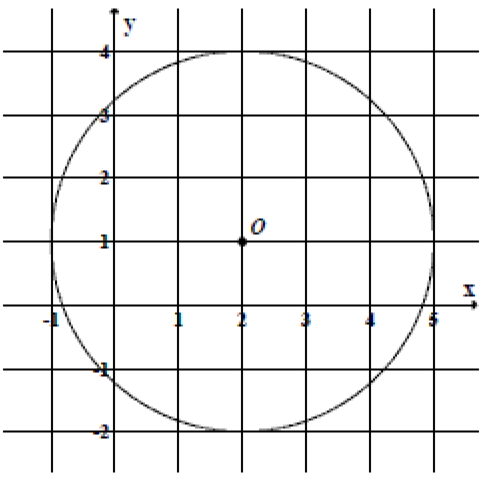
A. $(-4,-6)$

B. $(4,6)$

C. $(4,-6)$

D. $(-4,6)$

21. Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku. Równanie tego okręgu ma postać[69]:



A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$

C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3$

22. Punkt $S = (2,7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (-1,3)$. Punkt B ma współrzędne:

69. Zadania 21, 22: zaczerpnięte z arkusza maturalnego CKE, czerwiec, 2012, www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf, 05.03.2013.

A. $B = (5,11)$

B. $B = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

C. $B = \left(-\frac{3}{2}, -5\right)$

D. $B = (3,11)$

23. Proste o równaniach $y = 2x - 5$ i $y = (3 - m)x + 4$ są równoległe. Wynika stąd, że[70]:

A. $m = 1$

B. $m = \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{7}{2}$

D. $m = 5$

24. Prosta *k* ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$[71]:

A. $y = -2x + 3$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = 2x + 5$

D. $y = -x + 1$

25. Styczną do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu:

A. $x = 1$

B. $x = 3$

C. $y = 0$

D. $y = 4$

26. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$, jest równy:

A. $-\frac{1}{3}$

70. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf, 05.03.2013
71. Zadania 24, 25, 26, 27, 28: zaczerpnięte z arkusza maturalnego, CKE, maj, 2011 (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf), 05.03.2013.

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

27. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6:

A. $x^2 + y^2 = 3$

B. $x^2 + y^2 = 6$

C. $x^2 + y^2 = 12$

D. $x^2 + y^2 = 36$

28. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 30

B. $4\sqrt{5}$

C. $12\sqrt{5}$

D. 36

29. (5 pkt) Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2, -1), B = (4,2), C = (5,1)$. Wyznacz:

a) pole trójkąta ABC[72],

b) równanie zawierające wysokość trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka A.

30. (4 pkt) W rombie $ABCD$ dane są $A = (-3, -1)$ i punkt przecięcia przekątnych $M = (9,3)$. Wiadomo, że punt B leży na prostej $2x - y - 25 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

31. (2 pkt) Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-1, -1), B = (5,2), C = (3,3), D = (1,2)$ jest trapezem?

72. Zadania 29-32: zaczerpnięte z testów maturalnych, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

32. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0,-3)$ i jest prostopadły do prostej $y = 2x - 4$.

33. (2 pkt) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2,2)$ i $B = (2,10)$[73].

34. (2 pkt) W trójkącie równoramiennym $\boldsymbol{ABC}$ o podstawie $\boldsymbol{AB}$ poprowadzono wysokość z wierzchołka $\boldsymbol{C}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli

$\boldsymbol{A = (2,8)}$, $\boldsymbol{B = (-2,4)}$ [74].

35. (4 pkt) Oblicz pole i obwód rombu $\boldsymbol{ABCD}$ wiedząc, że przekątna $\boldsymbol{AC}$ jest zawarta w prostej o równaniu

$\boldsymbol{y = 2x - 2}$ oraz $\boldsymbol{A = (-1,-4)}$ i $\boldsymbol{D = (-6,6)}$.

36. (6 pkt) Wyznacz współrzędne punktu $\boldsymbol{B}$, który jest symetryczny do punktu

$\boldsymbol{A = (3,2)}$ względem prostej $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x - 6}$ [75].

37. (4 pkt) Dany jest trójkąt równoramienny $\boldsymbol{ABC}$, w którym $|\boldsymbol{AC}| = |\boldsymbol{BC}|$ oraz $\boldsymbol{A = (2,1)}$ i $\boldsymbol{C = (1,9)}$.

Podstawa $\boldsymbol{AB}$ tego trójkąta jest zawarta w prostej $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$. Oblicz współrzędne wierzchołka $\boldsymbol{B}$.[76]

38. (4 pkt) Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu przechodzącej przez jeden z tych punktów[77].

39. (4 pkt) Okrąg o środku w punkcie $\boldsymbol{S = (3,\ 7)}$ jest styczny do prostej o równaniu $\boldsymbol{y = 2x - 3}$. Oblicz współrzędne punktu styczności[78].

73. (www.cke.edu.pl/images/stories/00000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf), 06.03.2013.
74. Zadania 34, 35: zaczerpnięte z arkusza maturalnego (www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze), 06/03.2013
75. (www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf), 06.03.2013.
76. (www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf), 06.03.2013.
77. (www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf), 06.03.2013.
78. (www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013), 06.03.2013.

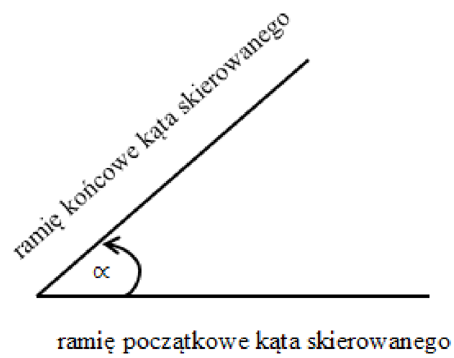
5. Trygonometria

5.1. *Miara łukowa i stopniowa kąta

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy parę prostych o wspólnym początku (wierzchołek kąta).

Miarą kąta skierowanego jest stopień.

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{kąta pełnego}$$



Rysunek 5-1. Kąt skierowany

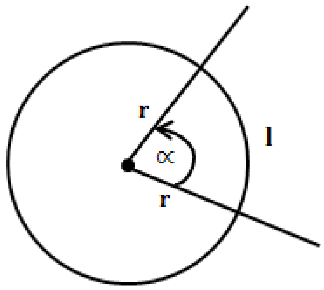
Jednostki mniejsze niż stopień to **minuta kątowa 1’** (uwaga: to nie jest jednostka czasu)

$1^{\circ} = 60'$ $\qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} 1'$

oraz **sekunda kątowa (1”)**

$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$.

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu.



Jednostką miary łukowej jest radian.

$$1\,radian = \frac{180°}{\pi} \sim 57°17'44''$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Rysunek 5-2. Radian

Zamiana miary stopniowej $(\alpha°)$ na miarę łukową (α):

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}\ radiana}$$

Przykład 1

$180° = \pi\ rad.$

$90° = \frac{\pi}{2}\ rad.$

$30° = \frac{\pi}{6}\ rad.$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową $(\alpha°)$:

$$\boldsymbol{\alpha° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi}}$$

Przykład 2

$\frac{3}{2}\pi\ rad = 270°$

$\frac{\pi}{3}\ rad = 60°$

$\frac{\pi}{2}\ rad = 90°$

CIEKAWOSTKA

W niektórych krajach obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. Gradusy. **Gradus** – jest to jedna setna część kąta prostego.

Zadania

5.1.1. Znajdź:

a) miarę łukową kątów: $90°, 30°, 45°, 60°, 180°, 210°, 270°, 360°$

b) miarę stopniową kątów: $3\pi\ rad;\quad 6{,}5\pi\ rad;\quad \frac{6}{5}\pi\ rad;\quad \frac{5}{3}\pi\ rad.$

5.1.2. Miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{5}$. Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta. Wynik podaj w stopniach.

5.1.3. Pole wycinka koła o promieniu $r = 3\ cm$, jest równe $2\ cm^2$. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

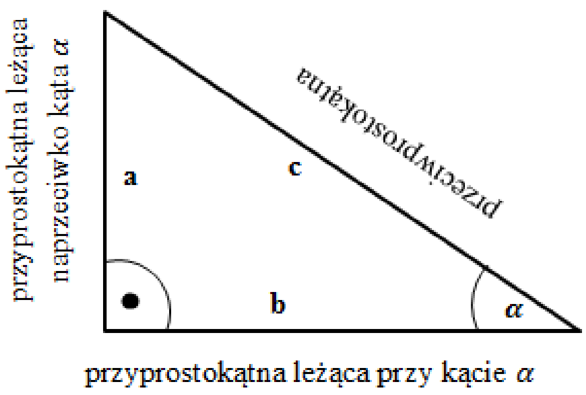
5.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wykorzystywać definicję i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens kątów o miarach od 0° do 180°**
- **Obliczać miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną)**

Termin trygonometria pochodzi od dwóch greckich słów: trigonom (trójkąt) i metron (mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.

Rozważmy trójkąt prostokątny o kącie ostrym α.



Rysunek 5-3. Trójkąt prostokątny

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, leżącej naprzeciwko kąta α, do długości przyprostokątnej (leżącej przy tym kącie) i oznaczamy $tg\ \alpha$.

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, leżącej naprzeciwko kąta α, do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $sin\ \alpha$.

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta α (czytaj: kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, przylegającej do kąta α, do długości przeciwprostokątnej i oznaczamy $cos\ \alpha$.

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Cotangensem kąta α (czytaj: kotangensem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej, przylegającej do kąta α, do długości drugiej przyprostokątnej i oznaczamy $ctg\ \alpha$.

$$ctg\alpha = \frac{a}{b}$$

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, zatem ilorazy określające sinus i cosinus są liczbami mniejszymi od 1.

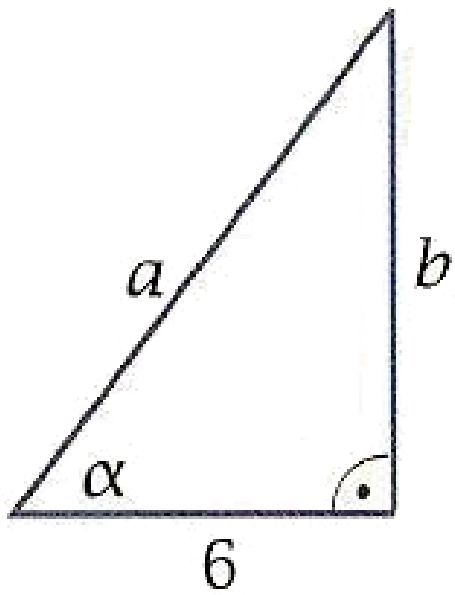
Przykład 1

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi 3/4. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$cos\alpha = \frac{6}{a}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{a}$$



CIEKAWOSTKA

Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim, zapisywali oni hinduską nazwę sinusa bez samogłosek jako *jb*. Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie zatoka to sinus, tak też przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa sinus znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

Wartości funkcji trygonometrycznych, dla różnych miar kątów, można odczytać z tablic.

Z tablic możemy korzystać w dwóch celach:

1. Możemy odczytać wartość danej funkcji, dla danego kąta.

2. Możemy odczytać, z jakim kątem mamy do czynienia, mając podaną wartość danej funkcji.

Funkcje trygonometryczne i ich wartości odczytywane z tabeli wykorzystujemy do obliczania długości poszczególnych boków lub miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przykład 2

Podaj wartość tangensa kąta o mierze $15°$.
Dla podanego kąta i funkcji, odczytujemy wartość:

	sin	cos	tg	ctg
0°	0	1	0	-
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046
13°	0.225	0.9744	0.2309	4.3315
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874

Możemy więc zapisać, że tangens $15°$ wynosi 0,2679:

$$\text{tg}\ 15° = 0{,}2679$$

Przykład 3

Podaj miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,6023. Dla podanego kąta i funkcji, odczytujemy wartość. Szukamy w kolumnie funkcji cosinus podanej wartości (0,6023), a jeżeli jej nie ma w tabeli, szukamy wartości najbliższej do danej (dla naszego przykładu będzie to wartość 0,6018):

	sin	cos	tg	ctg
46°	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
47°	0.7314	0.682	1.0724	0.9325
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
49°	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
50°	0.766	0.6428	1.1918	0.8391
51°	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
52°	0.788	0.6157	1.2799	0.7813
53°	0.7986	0.6018	1.327	0.7536
54°	0.809	0.5878	1.3764	0.7265
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
56°	0.829	0.5592	1.4826	0.6745
57°	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494

Kąt ma więc w przybliżeniu miarę 53°.

5.3. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

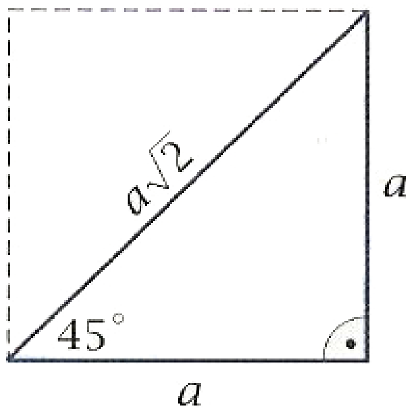
Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°, korzystamy z tego, że trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° jest połową kwadratu.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°.

$$sin45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{a}{a} = 1$$



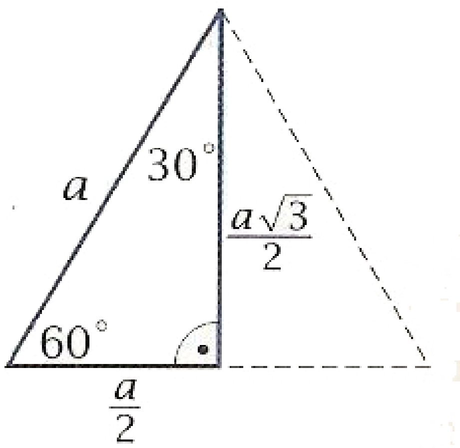
Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60°, korzystamy z tego, że trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° to połowa trójkąta równobocznego.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°.

$$sin30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$ctg30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

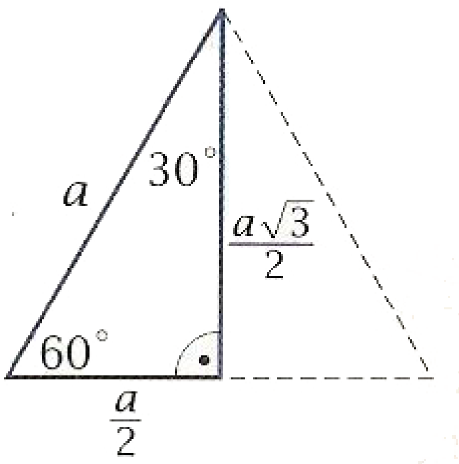
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°.

$$sin60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$ctg60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



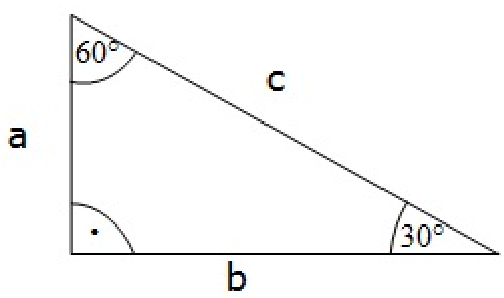
Wartości funkcji trygonometrycznych

α	30°	45°	60°
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 5-1. Wartości funkcji trygonometrycznych

Przykład 1

Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



$$\frac{a}{6} = sin30°$$

$$\frac{b}{6} = cos30°$$

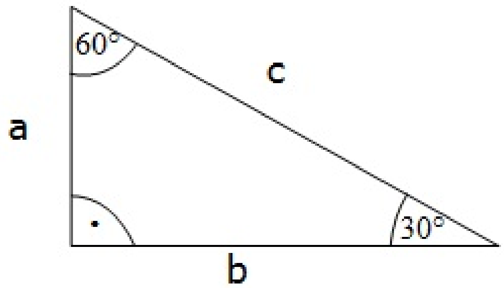
Korzystamy z wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{b}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

Przykład 2

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.



$$cos30° = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{c}$$

$$\sqrt{3}c = 2 \cdot 6$$

$$\sqrt{3}c = 12 / : \sqrt{3}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

Zadania

5.3.1. Oblicz:

a) $sin30° \cdot cos60° + 2sin45°$

b) $tg45° + sin60° + 2cos30°$

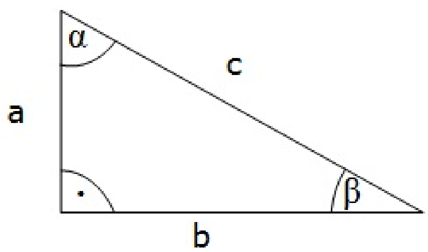
c) $tg30° \cdot ctg60° - sin30° \cdot cos30°$

d) $(tg30° - ctg30°) : cos30°$

e) $\sqrt{2tg^2 60° - 4cos^2 45°} - ctg45°$

5.3.2. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.

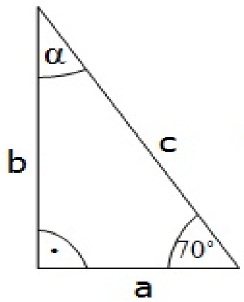
5.3.3. Oblicz miary kątów trójkąta.



dane:
a = 6cm
c= 14cm

5.3.4. Rozwiąż podane trójkąty prostokątne:

a)



$c = 4\text{cm}$

dane

$a = 6$ cm

$b = 14$ cm

$a = 6\text{cm}$

$c = 6\sqrt{2}$ cm

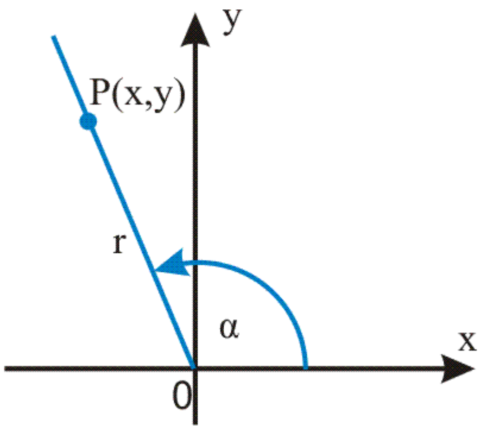
5.3.5. Linę podtrzymującą maszt przymocowano na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy naprężona linia z poziomem?

5.3.6. Kąt ostry trapezu równoramiennego ma miarę 45°. Oblicz jego pole, jeżeli jego podstawy mają długość 12 cm i 6 cm.

5.4. *Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych kątów, umieszczamy te kąty w układzie współrzędnych.

Dowolny kąt w układzie współrzędnych, to kąt skierowany, którego ramieniem początkowym jest dodatnia półoś x.



α – kąt skierowany

dodatnia półoś x – ramię początkowe kąta α

półprosta $OP^{\rightarrow}$ – ramię końcowe kąta α

$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – promień wodzący

punktu $P \neq 0$, gdzie $P = (x, y)$ jest

dowolnym punktem leżącym na końcowym

Rysunek 5 4. Promień wodzący

Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Sinusem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem dowolnego kąta C w układzie współrzędnych nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do odciętej tego punktu.

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Cotangensem dowolnego kąta α w układzie współrzędnych, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta do rzędnej tego punktu.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych katów o mierze $0°, 90°$ i $180°$.

Dla ułatwienia obliczeń, na końcowym ramieniu każdego kąta obieramy punkt, którego odległość od początku układu współrzędnych jest równa 1.

Dla kąta $\mathbf{0°}$, $\boldsymbol{P = (1,0)}$

$$x = 1, y = 0, r = 1$$

$$sin0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$cos0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$tg0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$$

Dla kąta $90°$, $P = (0,1)$

$x = 0, y = 1, r = 1$

$$sin90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$cos90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$tg90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} - nie\ istnieje$$

$$ctg90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

Dla kąta $180°$, $P = (-1,0)$
$x = -1, y = 0, r = 1$

$$sin180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$cos180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$tg180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$ctg0° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} - nie\ istnieje$$

Wyniki umieścimy w tabeli

α	$0°$	$90°$	$180°$
$sin\alpha$	0	1	0
$cos\alpha$	1	0	-1
$tg\alpha$	0	$-$	0
$ctg\alpha$	$-$	0	$-$

Tabela 5-2. Wartości funkcji trygonometrycznych

Zadania

5.4.1. Zaznacz w układzie współrzędnych kąt skierowany α, w którym punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta, a następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P = (1,7)$ b) $P = (-2,5)$

c) $P = \left(-\sqrt{3}, -4\right)$ d) $P = (6, -3)$

5.5. Wzory redukcyjne

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Korzystać ze worów typu:** *sin (90º - α) = cos α*

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

Jeśli argument zmienia się w nieparzystą wielokrotność kąta $\frac{\pi}{2}$, to funkcja przechodzi w kofunkcję (sinus w cosinus, cosinus w sinus, tangens w cotangens, cotangens w tangens). Ponieważ wszystkie cztery funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, więc należy je poprzedzić odpowiednim znakiem, pisząc prawą stronę wzoru. Znak piszemy taki, jaki odpowiada funkcji trygonometrycznej kąta α występującej z lewej strony wzoru.

Tabela wzorów redukcyjnych

$\varphi =$	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\varphi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\varphi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tabela 5-3. Wzory redukcyjne

Przykład 1

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

Funkcja przeszła w kofunkcję, bo kąt zmienił się o $\frac{\pi}{2}$. Znak z prawej strony jest dodatni (+), bo kąt $\frac{\pi}{2}+\alpha$ jest kątem drugiej ćwiartki, a tam sinus jest dodatni.

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

Funkcja nie zmieniła się, bo kąt zmienił się o π. Znak z prawej strony jest ujemny (-), bo kąt π - α jest kątem drugiej ćwiartki, a tam cosinus jest ujemny.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-
$ctg\alpha$	+	-	+	-

Tabela 5-4. Znaki funkcji trygonometrycznych

Przykład 2

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 420° = \cos(4 \cdot 90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi = \cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadania

5.5.1. Oblicz:

a) $\sin 120°$

b) $\cos 315°$

c) $tg(-840°)$

d) $\sin\frac{\pi}{3}$

e) $ctg(-2\pi)$

f) $2\sin^2 225° - ctg330° \cdot tg450°$

5.5.2. Korzystając z wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $\frac{cos135°+tg330°}{ctg225°\cdot sin840°}$

b) $sin\frac{5\pi}{4}\cdot tg\frac{4\pi}{3}+cos2\frac{1}{2}\pi$

5.5.3. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

5.6. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Stosować proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:**

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

- **Znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznaczyć wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego**

Jedynka trygonometryczna

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Uzasadnimy wzór dla sinusa i cosinusa kąta ostrego.

$sin\alpha = \frac{a}{c},\quad cos\alpha = \frac{b}{c}$

$a^2+b^2=c^2$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

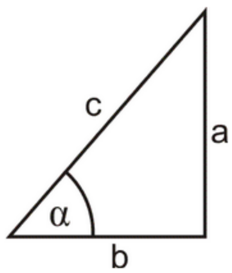
$a^2+b^2=c^2 /:c^2$

$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}$

$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$

$(sin\alpha)^2+(cos\alpha)^2=1$

$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$



Wniosek:

Jeżeli $\alpha\epsilon(0°;90°)\alpha\epsilon(0°;90°)$, to:

$$\boldsymbol{sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha}$$

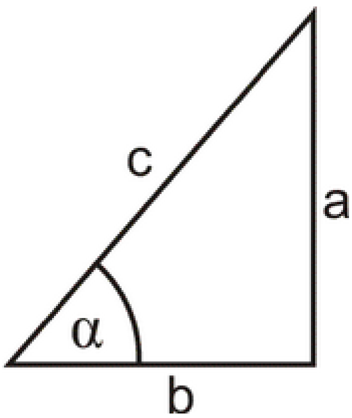
$$\boldsymbol{\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = ctg\alpha}$$

Przykład 1

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$

b) $\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha$



Niech będzie dany trójkąt prostokątny.

a) $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha : cos\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = tg\alpha$

b) $\frac{cos\alpha}{tg\alpha} = cos\alpha : sin\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = ctg\alpha$

Ponieważ wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta ostrego są liczbami odwrotnymi, to:

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

Z tego wynika, że $\boldsymbol{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$.

Przykład 2

Wiedząc, że $cos\alpha = \frac{4}{5}$, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α.

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2}$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

Przykład 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną: $sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - \left(\frac{sinx}{tgx}\right)^2$.

Przekształcimy najpierw wyrażenie:

$$\frac{sinx}{tgx} = sinx : tgx = sinx : \frac{sinx}{cosx} = sinx \cdot \frac{cosx}{sinx} = cosx$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx - sinx \cdot cos^2x - (cosx)^2$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx(1 - cos^2x) - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sinx \cdot sin^2x - cos^2x$$

$$sin^3x - cos^2x = sin^3x - cos^2x$$

$$L = P$$

Zadania

5.6.1. Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych:

a) $cos\alpha = \frac{1}{4}$

b) $tg\alpha = 2\sqrt{2}$

5.6.2. Oblicz $a + b$, gdy $a = 1 - cos^2\alpha$, $b = tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha$, dla $\alpha = 45°$.

5.6.3. Kąt α jest ostry i $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

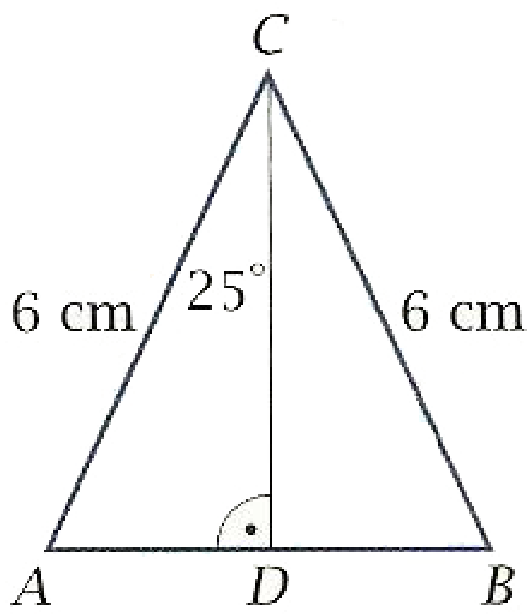
TERAZ NAUCZĘ SIĘ

- **Wykorzystywać wiadomości i umiejętności w zadaniach i problemach życia codziennego**

Przykład 1

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta? Jaką długość ma wysokość opuszczona na tę podstawę?
Wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli kąt między ramionami trójkąta na dwa równe kąty

$\sin 25° = \frac{|AD|}{6}$



$|AD| = 6 \sin 25°$

$|AB| = 2|AD| = 12 sin25°$

Wartość $\sin 25°$ odczytujemy z tablic.

$\sin 25° \approx 0{,}4226$

$|AB| = 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5{,}1$

$cos25° = \frac{|CD|}{6}$

$|CD| = 6 \cdot cos25°$

Wartość $\cos 25°$ odczytujemy z tablic.

$cos25° \approx 0{,}906$

$|CD| = 6 \cdot 0{,}906 \approx 5{,}4$

Odpowiedź:

Podstawa trójkąta ma około 5,1 cm długości, a wysokość około 5,4 cm.

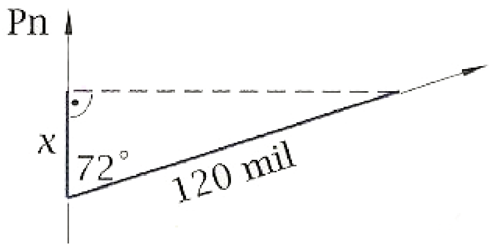
Przykład 2

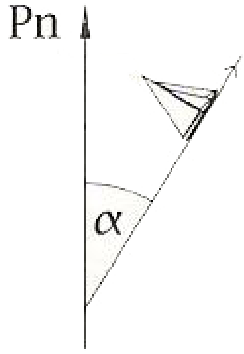
Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°. O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).

Rysunek pomocniczy do zadania:

$$\frac{x}{120} = cos72°$$

$$x = 120 \cdot cos72°$$





Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tablic.

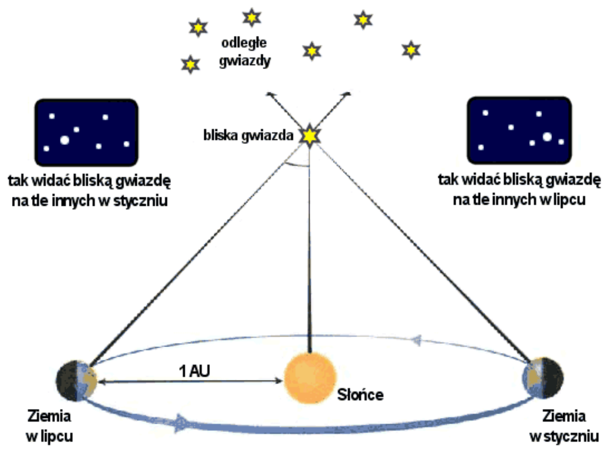
$$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$$

Odpowiedź:

Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

CIEKAWOSTKA

[79]Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się przy pomiarze odległości do trudno dostępnych obiektów, np. do wyznaczania odległości obiektów astronomicznych przy pomocy zjawiska paralaksy. Paralaksa to zjawisko pozornej zmiany położenia obiektu oglądanego z dwóch kierunków. W praktyce najłatwiej zobaczyć zmianę położenia na tle innych, odległych obiektów. Paralaksę geocentryczną stosuje się do pomiarów odległości w Układzie Słonecznym, wówczas za bazę przyjmuje się promień Ziemi. Do wyznaczenia odległości do innych gwiazd, za bazę obiera się jedną jednostkę astronomiczną, czyli średnią odległość Ziemia – Słońce (149,6 mln km). Można zmierzyć położenie danej gwiazdy na tle odległych gwiazd w dwóch momentach czasu, gdy Ziemia jest na przeciwnych miejscach na swojej orbicie. Otrzymujemy wtedy podwojony kąt paralaksy ($2\pi\pi$).



Rysunek 5-5 Kąt paralaksy

Kąt ten jest na tyle mały, że wyrażamy go w sekundach łuku i oznaczamy symbolem π. **Jedna sekunda łuku,** czyli odległość, z jakiej obiekt o średnicy równej średniej odległości Ziemi od Słońca, miałby rozmiary jednej sekundy łuku na niebie.

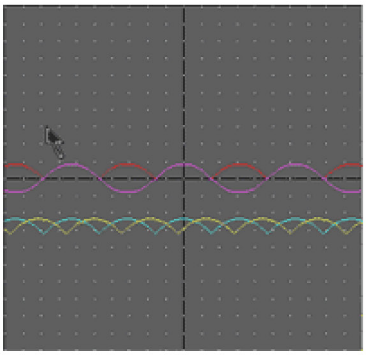
79. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk, 19.04.2013.

CIEKAWOSTKA

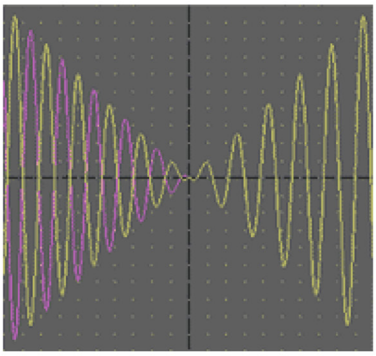
[80]**Parsek** – jednostka odległości używana w astronomii. Jest to odległość, dla której paralaksa roczna położenia Ziemi widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity wynosi 1 sekundę łuku. Parsek można równoważnie opisać jako odległość, z jakiej połowa wielkiej osi orbity ziemskiej (czyli 1 j.a.) jest widoczna jako łuk o długości 1 sekundy kątowej.
Słowo parsek zostało wprowadzone przez Herberta Turnera w XIX wieku. Utworzył on je jako zbitkę pierwszych sylab słów paralaksa i sekunda. Parsek oznaczany jest skrótem pc lub ps. Używanie drugiego ze skrótów nie jest wskazane, gdyż jest on identyczny ze skrótem dla pikosekundy (1 ps = 10^{-12} s).
1 pc ≈ 3,2616 roku świetlnego **≈ 206265 jednostek astronomicznych ≈ 3,086·10^16** m

CIEKAWOSTKA

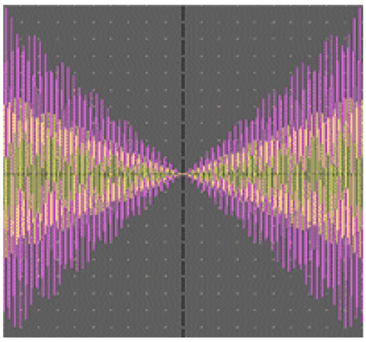
- $y = sin(cos(x))$



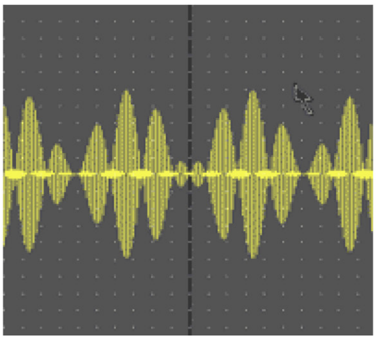
- $y = -x \cdot cos(100x)$



- $y = x \cdot sin(20x)$



- $y = 5sin(0,5x) \cdot cos(50x)$



Zadania

5.7.1. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Ramię tego trapezu ma długość $10\ cm$, a obwód wynosi $40\ cm$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

5.7.2. Oblicz wysokość drzewa, które daje cień o długości 17 m przy wysokości słońca 54°. *Wysokość słońca – kąt między kierunkiem promieni słonecznych a płaszczyzną horyzontu.*

80. www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek, 20.04.2013.

5.7.3. Najbardziej „stroma" kolej na świecie znajduje się w Gwatemali. Tory biegną pod kątem 52°. Na jaką wysokość wjedziesz po przejechaniu 1000 m?

5.7.4. Pod jakim kątem nachylona jest do podłoża drabina o długości 10 m, jeżeli sięga ona na wysokość 8 m? Jak wysoko sięgnie ta drabina, jeżeli kąt między nią a ziemią będzie wynosił 60°?

5.7.5. Obserwator stoi na stromym brzegu na wysokości 35 m nad wodą. Widzi żaglówkę pod kątem 12° do poziomu wody. Jak daleko jest ta żaglówka od brzegu?

5.7.6. Oblicz, w jakiej odległości od Ziemi znajduje się Księżyc, jeżeli kąt paralaksy wynosi $\pi = 57'$. Przyjmij promień Ziemi R = 6378 km.

5.7.7. Oblicz kąt paralaksy najbliższej nam gwiazdy Proxima Centauri, znajdującej się w odległości 4,3 lat świetlnych od Ziemi. P**Odpowiedź:** Rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu jednego roku. (Jaką drogę pokona światło? $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$).

5.7.8. Po upływie 6 miesięcy pozycja obserwowanej gwiazdy zmieniła się, tak że jej kąt paralaksy wyniósł 0,00013°. Oblicz odległość gwiazdy od Ziemi wiedząc, że promień orbity Ziemi wynosi $1{,}496 \cdot 10^8$ km. Odległość wyraź w kilometrach i parsekach.

Czy zdam maturę z matematyki?

1. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{8}{9}$. Wtedy $\cos\alpha$ jest równy[81]:

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{9}$

D. $\frac{\sqrt{65}}{9}$

2. Dany trójkąt jest prostokątny (patrz rysunek). Wtedy $\mathrm{tg}\,\alpha$ jest równy:

A. $\sqrt{2}$,

B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

81. Zadania 1, 2, 3: zaczerpnięto z próbnej matury z matematyki, CKE, listopad, 2009.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 4/3$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

4. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = 3/4$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$ równa się[82]:

A. $\frac{25}{16}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{17}{16}$

D. $\frac{31}{16}$

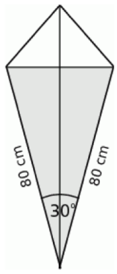
5. Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa:

A. 3200 cm^2

B. 6400 cm^2

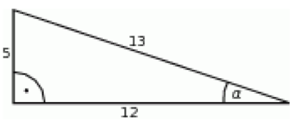
C. 1600 cm^2

D. 800 cm^2



6. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

7. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy[83]:



A. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

B. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{13}{12}$

C. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

8. Kąt $\boldsymbol{\alpha}$ jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, wtedy[84]:

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

82. Zadania 4, 5, 6: zaczerpnięto z matury z matematyki, CKE, maj, 2010.
83. Próbna matura z matematyki, CKE, listopad, 2010.
84. Zadania 8, 9, 10: zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2011.

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{13}$

9. Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. 1

10. (2 pkt) Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

11. Liczba tg 30° - sin30° jest równa[85]:

A. $\sqrt{3}$-1

B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{-3+2\sqrt{3}}{6}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i |AB| = 13 oraz |BC| = 13. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

A. $\frac{12}{13}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{13}{12}$

13. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ jest[86]:

A. mniejsza od -1

B. równa 1

85. Zadania 11, 12: zaczerpnięte z arkusza maturalnego z matematyki, CKE, maj, 2012.
86. Zadania 13, 14: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2010.

C. większa od 1

D. równa 0

14. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy cosα jest równy[87]:

A. $\frac{45}{49}$

B. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

15. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas[88]:

A. $\cos\alpha = \sin\alpha$

B. $\cos\alpha > \sin\alpha$

C. $\cos\alpha < \sin\alpha$

D. $\cos\alpha = 1 - \sin\alpha$

16. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy[89]:

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

17. Wyrażenie $\frac{1-\sin^2\alpha}{\frac{1}{tg^2\alpha}}$, gdzie α jest kątem ostrym, można zapisać w postaci:

A. $\sin^2\alpha$

B. $\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}$

C. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

D. $\frac{1}{\sin\alpha}$

87. Próbna matura z operonem, listopad, 2009.
88. Zadania 16, 17: zaczerpnięte z arkusza próbnej matury z Operonem, listopad, 2011.
89. Zadania 18, 19, 20: zaczerpnięto z arkusza maturalnego, OKE, Poznań, styczeń, 2013.

18. (2 pkt) Wykaż, że jeżeli kąt α jest kątem ostrym i tgα = 2, to $\cos\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. (2 pkt) W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

20. Oblicz wartość wyrażenia tg^{2}α - 3cos^{2}α , jeżeli $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i α jest kątem ostrym.

21. (4 pkt) Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $tg\,\alpha + \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$. Oblicz wartość sin$\alpha$, cosα i tgα [90].

22. (2 pkt) Drabina o długości 2,5 m oparta o mur styka się z nim na wysokości 2 m. Na jakiej wysokości zetknie się z murem drabina o długości 3,5 m, jeśli obie drabiny nachylone są pod takim samym kątem do podłoża?

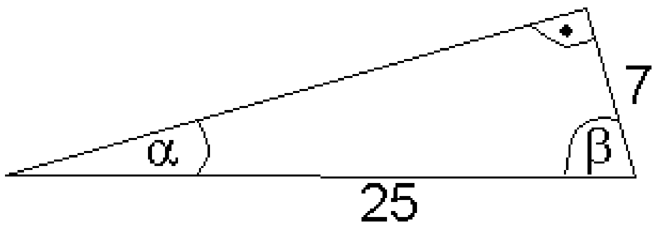
23. (2 pkt) Posługując się wzorem: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, oblicz sin75°.

24. (2 pkt) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α .Oblicz sinα · cosα [91].

25. (2 pkt) Oblicz a-b, gdy a = sin$^4\alpha$ -cos$^4\alpha$, b = 1- 4sin$^2\alpha$ · cos$^2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.

26. (4 pkt) Korzystając z danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia

(tgβ- $\frac{1}{\sin\beta}$)^2 · cosα .



27. (4 pkt) Wiadomo, że α jest kątem ostrym i sin$\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{ctg\,\alpha - tg\,\alpha}{ctg\,\alpha + tg\,\alpha}$.

28. (5 pkt) Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α [92].

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność sinα -tgα < 0.

b) Dla sin$\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

90. Zadania 21,22, 23: zaczerpnięte z „Testy maturalne", Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.
91. Zadania 24, 25, 26, 27: zaczerpnięte z informatora maturalnego, CKE, 2007.
92. Arkusz maturalny, CKE, maj, 2009.

Bibliografia

1. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury.*
2. *Testy maturalne. Matematyka 2010,* Wydawnictwo Aksjomat.
3. Kalina R., Szymański T., *Zbiór zadań z matematyki*, Wydawnictwo Sens.
4. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań.*
5. Kasprzyk K., Piórek K., Smołucha D., *Arkusze egzaminacyjne*, Wydawnictwo Szkolne Omega.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od 2010 roku*, Wydawnictwo Podkowa.
7. Gwizdak D., *Matematyka – zbiór zadań otwartych i zamkniętych*, Oficyna Wydawnicza Nowa Matura.
8. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
9. Jurczyszyn P., Wesołowski M., *Matematyka. Zbiór zadań przygotowujących do matury*, Wydawnictwo Nowa Era.
10. Jenike M., *Fizyka*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
11. Wojciechowska M., Unieszowska J., *Fizyka i astronomia. Testy dla maturzysty. Matura 2009*, Operon.
12. Jaworski R., *Fizyka. Matura 2012*, Operon.

Źródła internetowe:

1. www.medianauka.pl/podstawowe_pojecia_planimetrii
2. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
3. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php#arkusze
4. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
5. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
6. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
7. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
8. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
9. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
10. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
11. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
12. www.matemaks.pl/materialy/matura2012maj/matura2012-maj.pdf
13. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
14. www.bossa.pl
15. www.bankier.pl/lokaty/wiadomosc
16. www.bankier.pl/finanse/kalkulatory/
17. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
18. www.matemaks.pl/materialy/matura2013luty/matura2013-luty.pdf

19. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
20. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
21. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
22. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
23. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
24. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
25. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2010_p.pdf
26. pl.wikipedia.org/wiki/Wielomian
27. pl.wikipedia.org/wiki/Stopie%C5%84_wielomianu, 27.02.2013.
28. www.pl.wikipedia.org/wiki/Wzory skróconego mnożenia
29. www.pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascalwww.zadania.info
30. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
31. www.operon.internetdsl.pl/arkusze_pm_2010/25_35168743216874316874168765164687/mat_ark_pdst.pdf
32. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf,
33. www.d.webgenerator24.pl/k/r//lx/6d/s1x10b4cw0sc8c4c4k4wogc0s0w/matematyka-podstawa.pdf
34. www.bi.gazeta.pl/im/7/10397/m10397917,MATEMATYKA-PP.pdf
35. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-luty-2013.php
36. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
37. www.zadania.info
38. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
39. www.cke.edu.pl/images/stories/001_Matura/matematyka_pp.pdf
40. www.cke.edu.pl/images/stories/0012_Matura/arkusz_proba2010_std.pdf
41. www.operon.x.pl/probnamatura/files2_2009/Matematyka/Matematyka-arkusz-ZP.pdf
42. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
43. www.pl.wikipedia.org/wiki/Prosta#Prosta_na_p.C5.82aszczy.C5.BAnie_.28afinicznej.29
44. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ko%C5%82o
45. www.math.edu.pl/symetria
46. www.math.edu.pl/symetria
47. www.pl.wikipedia.org/wiki/Symetria_środkowa
48. www.pl.wikipedia.org/wiki/Ambigram
49. www. violus.bloog.pl/id,939577,title,ambigramy,index.html?ticaid=6103dd
50. www.pl.wikipedia.org/wiki/Palindrom.
51. pl.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Morawski
52. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
53. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
54. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf

55. www.matemaks.pl/materialy/matura2012listopad/matura2012-listopad.pdf
56. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
57. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura_czerw_2012/matematyka/pp_matematyka.pdf
58. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
59. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf
60. www.cke.edu.pl/images/stories/0000000000000002012_matura2012/matm_pp.pdf
61. www.matemaks.pl/matura-z-matematyki-styczen-2013.php#arkusze
62. www.matemaks.pl/materialy/matura2013styczen/matura2013-styczen.pdf
63. www.cke.home.pl/dokumenty/sierpien2012/matematyka/matematyka_PP.pdf
64. www.matemaks.pl/materialy/matura2012echo/MaturaProbnaMatematykaArkuszEcho2012.pdf
65. www.matemaks.pl/materialy/matura/arkusze/2011_p.pdf, 27.02.2013)
66. www.pl.euhou.net/docupload/files/misc/VenusTransit2012/Gloria/zestaw3.pdf, dr Kamil Złoczewski, mgr Krzysztof Kowalczyk
67. www.pl.wikipedia.org/wiki/Parsek

Stowarzyszenie POSTIS
20-091 Lublin, ul. Fieldorfa 7/4
tel. +48 81 524 39 66; fax +48 81 524 39 66
www.postis.pl; e-mail: biuro@postis.pl

Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Zakład Szkolenia i Doradztwa Ekonomicznego Sp. z o. o.
20-086 Lublin, ul. Szewska 4 lok. 7
tel. +48 81 532 84 14; tel./fax +48 81 534 35 50; mobile +48 668 445 503
www.pte.lublin.pl; e-mail: biuro@pte.lublin.pl

Autorzy
Kinga Sarad-Deć, pedagog
Joanna Rusinkiewicz, pedagog
Milena Potręć, nauczyciel przedsiębiorczości
Anna Cudna, nauczyciel przedsiębiorczości
Michał Roman, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Magdalena Siroń, specjalista ds. Technologii informacyjno-komunikacyjnych
Tomasz Banasiak, specjalista ds. Mediów
Grzegorz Kozak, specjalista ds. Mediów
Agnieszka Wróblewska, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Kamila Niziołek-Duda, specjalista ds. Przedsiębiorczości
Zbigniew Biały, specjalista ds. Ekonomii
Ewa Oleksiejczuk, specjalista ds. Ekonomii
Agata Linkiewicz, specjalista ds. Matematyki
Anna Kwiecińska-Osuch, specjalista ds. Matematyki
Katarzyna Korona, doradca metodyczny
Dorota Ulikowska, doradca metodyczny
Agnieszka Lewicka-Zelent, koordynator merytoryczny

Skład i opracowanie typograficzne
Ewa Kutkowska
Andrzej Sokulski

Przygotowanie publikacji w wersji elektronicznej
Agencja ORPHA
www.orpha.pl
Systemy Wspomagania Nauczania Sp. z o. o.
www.swn.edu.pl