

Zadanie 3

Większość obliczeń naukowych i technicznych to obliczenia przybliżone, realizowane z użyciem techniki komputerowej (wykonywane na liczbach w reprezentacji zmiennejoprzecinkowej). Choć to nie człowiek wykonuje obliczenia komputerowe, lecz maszyna, to jednak to on wybiera metodę obliczeń i później korzysta z wygenerowanych wyników. Dlatego powinien mieć świadomość ograniczeń arytmetyki komputerowej i potrafić oceniać wybór metody, tzn. jej wpływ na wyniki obliczeń.

Przypuśćmy, że częścią jakiegoś algorytmu jest wykonanie mnożenia przez stałą,

której dokładna wartość wynosi $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$.

a) Uzasadnij, że wartość stałej może być zapisana na kilka równoważnych sposobów:

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = (5\sqrt{2}-7)^2 = 99-70\sqrt{2}.$$

b) Napisz program komputerowy (lub zaprojektuj obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym), który będzie służył do oceny przewidywanych konsekwencji wyboru różnych metod obliczeń wartości stałej. W obliczeniach zastąp $\sqrt{2}$ kolejnymi przybliżeniami: 1,4, 1,41, 1,414 itd.

Wyniki obliczeń zapisz w tabeli podobnej do ukazanej poniżej:

| $\sqrt{2}$ | $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$ | $(\sqrt{2}-1)^6$ | $(3-2\sqrt{2})^3$ | $(5\sqrt{2}-7)^2$ | $99-70\sqrt{2}$ |
|------------|--|------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 1,4 | | | | | |
| 1,41 | | | | | |
| 1,414 | | | | | |
| ... | | | | | |

c) Określ błędy względne wyników otrzymanych w pkt.

d) Porównaj je z błędami stosowanych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.

e) Poszukaj wyjaśnienia przyczyn tak dużych błędów (zwłaszcza dla ostatniego ze wzorów).