Załącznik C

(materiały pomocnicze 3)

Przekształć i zwyciężaj (ang. *transform-and-conquer*)

Technika przekształć i zwyciężaj to podejście do rozwiązywania problemu algorytmicznego, które składa się z dwóch etapów: najpierw problem jest przekształcany na inny (np. przez zmianę reprezentacji danych wejściowych), równoważny mu, który z jakiegoś powodu daje większe nadzieje na jego rozwiązanie; drugi etap to właśnie znajdowanie rozwiązania drugiego problemu, które jest jednocześnie rozwiązaniem pierwotnego problemu.

Przykład 1 (Anagramy)

Słowa tuba i buta czy atol i lato są anagramami, tzn. składają się z tych samych liter. Znajdź anagramy wśród słów:

abo	aft	akr	akt	alb	ale	ano	bal	boa	dal	dla	fag	gaf	kat	kra	ona	rak	taf	Tak

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) W I etapie dokonaj zmiany reprezentacji (sposobu przedstawienia) danych wejściowych.

Rozwiązanie:

Sposób postępowania (algorytm) jest następujący:

- Dodajemy każdemu ze słów „sygnaturę”, która ma postać uporządkowanego jak w alfabecie ciągu liter tworzących słowo (to etap zmiany reprezentacji).

abo	aft	akr	akt	alb	ale	ano	bal	boa	dal	dla	fag	gaf	kat	kra	ona	rak	taf	tak
abo	*aft*	*akr*	*akt*	*abl*	*ael*	*ano*	*abl*	*abo*	*adl*	*adl*	*afg*	*afg*	*akt*	*akr*	*ano*	*akr*	*aft*	*akt*

- Następnie porządkujemy w porządku alfabetycznym „sygnatury” i uzyskujemy rozwiązanie zadania – anagramy znajdują się obok siebie.

alb	bal	abo	boa	dal	dla	ale	fag	gaf	aft	taf	akr	kra	rak	akt	kat	tak	ano	Ona
abl	*abl*	*abo*	*abo*	*adl*	*adl*	*ael*	*afg*	*afg*	*aft*	*aft*	*akr*	*akr*	*akr*	*akt*	*akt*	*akt*	*ano*	*Ano*

Projekt algorytmu to przykład zastosowania techniki typu przekształć i zwyciężaj. Zastosowana została zmiana reprezentacji, tj. sposób przedstawienia danych wejściowych, poprzez uporządkowanie liter.
Należy podkreślić, że w przypadku większej liczby danych wejściowych trzeba by posłużyć się efektywnym algorytmem porządkowania.

Zadanie 1 (Układ nierówności)
Zastąp litery liczbami 2, 3, 1, 5, 8, 6, 11, 13, 10,
a < b > c < d < e > f < g < h > i,
tak, aby nierówności a < b, b > c, c < d itd. były *prawdziwe:*
Wskazówka:
Dla liczb 2, 5, 1 i 0 i układu nierówności a < b > c < d rozwiązaniem jest np. 0 < 5 > 1 < 2, gdyż 0 < 5, 5 > 1 i *1 < 2.*
a) Przeanalizuj dokładnie wskazówkę.
b) Zastosuj algorytm wykorzystujący m.in. technikę typu przekształć i zwyciężaj.

Przykład 2 (Koperty)
Masz tysiąc banknotów o nominale 1$. Jak rozmieścić banknoty w 10 kopertach, aby przy pomocy pewnej kombinacji tych kopert dało się uzyskać każdą kwotę między 1$ i 1000$?
a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.
b) Zauważ, że 2^{10}>1000. Jak rozwiązać zadanie, stosując własności numeracji dwójkowej?

Rozwiązanie:

Do zmiany reprezentacji (sposobu przedstawiania) danych wejściowych wykorzystamy reprezentację binarną liczb, a dalej skorzystamy z tego, że 9 bitów wystarczy do zapisania każdej liczby mniejszej niż $2^9 = 512$.

Oznacza to, że do dziewięciu kopert powinniśmy włożyć kolejno: 1$, 2$, 4$, 8$, …, 256 $. Do dziesiątej wkładamy resztę banknotów, tj. w sumie 489$ (=1000 – 511).

Każdą liczbę nie większą niż 488 można zapisać jako sumę potęg liczby 2, co daje rozwiązanie (wykorzystamy co najwyżej dziewięć kopert).

Co z liczbami pomiędzy 489 a 1000? Można je zapisać jako sumę 489 i sumę potęg liczby 2, więc mamy rozwiązanie (wszystkie 10 kopert wykorzystamy tylko do zapisu liczby 1000).

a) W jaki sposób została zastosowana technika typu przekształć i zwyciężaj.

b) Dla jakich kwot pieniędzy rozwiązań łamigłówki jest więcej?

Zadanie 2 (Odważniki)

Zaprojektuj zestaw takich dziesięciu odważników do wagi szalkowej, który pozwoli na wyznaczenie ciężaru jak największej liczby ważonych przedmiotów z dokładnością do 1 kg.

Zakładamy, że odważniki można kłaść tylko na jednej szalce wagi.

Przykład 3 (Ciasto)

Jaka jest największa liczba kawałków, na jakie można podzielić prostokątne ciasto, przecinając je 11 razy? Każda z linii cięcia ma być równoległa do jednego z boków trójkąta?

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) Jak przeformułować zadanie na zadanie optymalizacyjne dla funkcji kwadratowej?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez h liczbę cięć poziomych, a przez v liczbę cięć pionowych. Jakim wyrażeniem opiszemy całkowitą liczbę uzyskanych kawałków? To $(h + 1)(v + 1)$.

Ponieważ h + v = 11, więc pierwotny problem sprowadza się do wyznaczenia największej możliwej wartości iloczynu (h + 1) (11 – h + 1) = h (11 – h) + 12, gdzie h < 12.

Można w prosty sposób pokazać (jak?), że zadanie optymalizacyjne ma dwa rozwiązania (5, 6) oraz (6, 5). Dla pierwotnego problemu oznacza to, że rozwiązaniem jest liczba 30.

Zadanie 3 (Tramwaj)

Ania, Bartek, Darek, Hania, Krzyś, Robert, Sonia i Tomek dojeżdżają do szkoły tramwajami tej samej linii (niekoniecznie jadąc w tym samym kierunku). Wsiadają na przystankach: 4, 2, 4, 3, 12, 11, 11 i 10 (licząc dla tramwaju jadącego w tym samym kierunku). Okazuje się, że przystanek najbliższy szkole znajduje się w takim miejscu, że średnia długość ich podróży (mierzona przez liczbę przystanków) jest najmniejsza z możliwych. Który to przystanek?

a) Zaproponuj rozwiązanie „siłowe”.

b) Jak przeformułować zadanie na zadanie dotyczącej statystyki?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego