WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA

INNOWACYJNY PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI W SZKOŁACH PONADGIMNAZJALNYCH

Moduł dydaktyczny: fizyka - informatyka

Mechanika bryły sztywnej

Elżbieta Kawecka

Człowiek - najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tytuł: ***Mechanika bryły sztywnej***

Autor: ***mgr inż. Elżbieta Kawecka***

Redaktor merytoryczny: ***dr hab. inż. prof. WWSI Zenon Gniazdowski***

Materiał dydaktyczny opracowany w ramach projektu edukacyjnego
WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA.
PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI
Z ELEMENTAMI TECHNOLOGII INFORMATYCZNYCH

www.wlf.wwsi.edu.pl

wlf@wwsi.edu.pl

Wydawca: Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
ul. Lewartowskiego 17, 00-169 Warszawa
www.wwsi.edu.pl
rektorat@wwsi.edu.pl

Projekt graficzny: *Maciej Koczanowicz*

Warszawa 2013

Człowiek - najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

MODUŁ 4

MECHANIKA BRYŁY SZTYWNEJ

FIZYKA – ZAKRES ROZSZERZONY

OPRACOWANE W RAMACH PROJEKTU:

WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA.

PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI

Z ELEMENTAMI TECHNOLOGII INFORMATYCZNYCH

Komentarz metodyczny

Realizacja opisanych tematów wymaga ścisłej współpracy nauczyciela fizyki i informatyki. W ramach modułu zaproponowano stosowanie różnych narzędzi technologii informacyjnej, które mogą ułatwić zrozumienie zagadnień fizycznych. W szczególności zaleca się stosowanie oprogramowania do analizy ruchu metodą wideopomiarów, arkusza kalkulacyjnego, programów do modelowania matematycznego oraz interaktywnych symulacji. Zaproponowane ćwiczenia mogą być realizowane na lekcjach fizyki i informatyki oraz na zajęciach dodatkowych, prowadzonych przez nauczycieli obu przedmiotów.

Wstęp do modułu

Dynamika bryły sztywnej zajmuje sie opisem ruchu ciał pod wpływem działających sił. Termin bryła sztywna oznacza ciało, którego elementy (części, punkty) nie przemieszczają się względem siebie w czasie ruchu. W przypadku ruchu postępowego, gdy wszystkie punkty poruszają się po tych samych torach, mają tę samą prędkość i przyspieszenie, ruch bryły sztywnej można opisać jako ruch środka masy. Opis ruchu obrotowego wymaga wprowadzenia nowych wielkości i praw fizycznych.

Temat 1

Wielkości opisujące bryłę sztywną

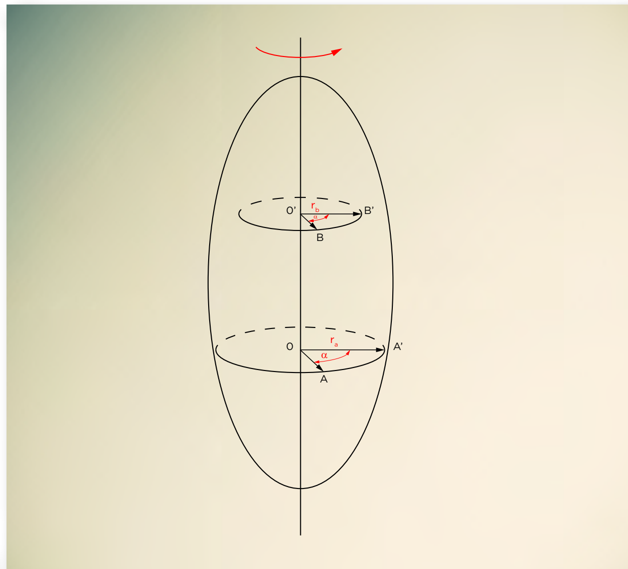
W ruchu obrotowym wokół nieruchomej osi punkty ciała leżące w różnej odległości od osi obrotu zakreślają okręgi o różnych promieniach, mają więc różne prędkości liniowe.

Podobnie jak w ruchu po okręgu prędkość liniowa punktu jest zdefiniowana jako stosunek drogi Δs do czasu Δt, w którym ta droga został przebyta.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Wielkością stosowaną do opisu ruchu obrotowego jest **prędkość kątowa (ω)**, równa stosunkowi kąta ($\Delta\alpha$) zakreślonego przez promień wodzący do czasu (Δt), w którym ten kąt zostaje zakreślony (rys. 1.1).

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$



Rys. 1.1. Promienie wodzące punktów A i B zakreślają w tym samym czasie ten sam kąt.

Wszystkie punkty bryły (z wyjątkiem punktów leżących na osi obrotu) mają tę samą prędkość kątową. Jednostką prędkości kątowej jest radian/s.

Prędkość liniowa punktu odległego o *r* od osi obrotu jest związana z prędkością kątową bryły zależnością:

$$v = \omega \cdot r$$

Przyspieszenie kątowe $\in$ to stosunek zmiany (przyrostu) prędkości kątowej $\Delta\omega$ do czasu Δt, w którym ta zmiana nastąpiła:

$$\in = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Przyspieszenie liniowe *a* punktu leżącego na okręgu o promieniu *r* (przyspieszenie spowodowane zmianą wartości prędkości liniowej *v*) jest związane z przyspieszeniem kątowym $\in$ zależnością:

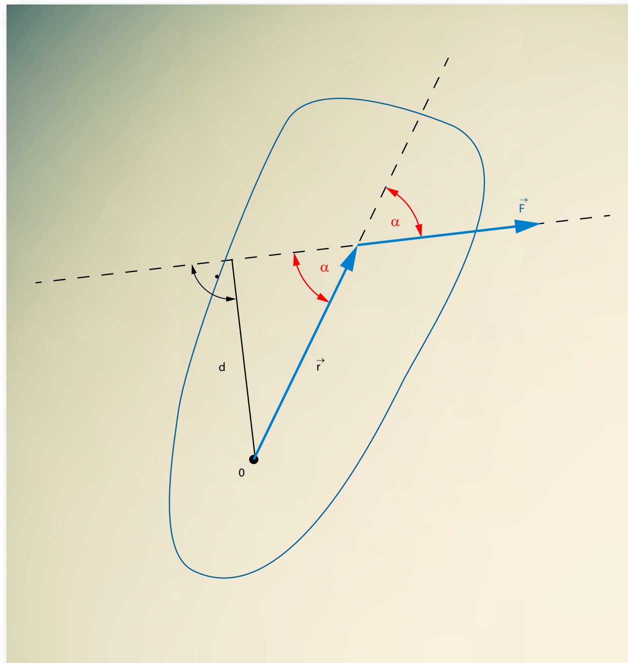
$$\in = \frac{a}{r}$$

O rodzaju ruchu obrotowego decyduje moment siły.

Moment siły względem punktu O (rys. 1.2) jest zdefiniowany jako iloczyn siły i jej ramienia, czyli odległości prostej, na której leży wektor siły od osi obrotu.

$$M = F \cdot d = r \cdot F \cdot \sin\alpha$$

gdzie d oznacza ramię siły $\vec{F}$, $\vec{r}$ wektor poprowadzony od punktu O do punktu przyłożenia siły, a α kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$. Przyjęto umowę, że moment siły który powoduje obrót ciała w prawo jest dodatni, a moment siły powodujący obrót w lewo ujemny. Wypadkowy moment siły jest sumą momentów sił działających na ciało.



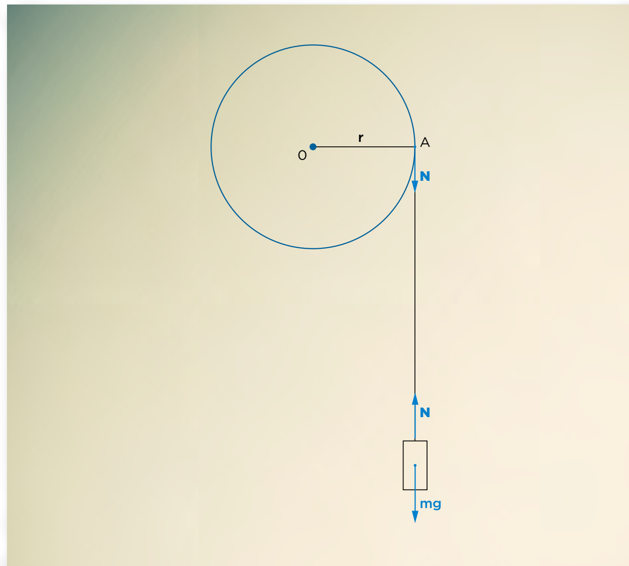
Rys. 1.2. Moment siły

Często mamy do czynienia z przypadkiem, gdy $\alpha = 90^o$, wtedy $M = r \cdot F$.

Przykład 4.1.

Na walec o promieniu r, nawinięto nić, na której zawieszono ciężarek o masie m. Walec może obracać się względem nieruchomej osi obrotu O (rys. 1.3). Wyznacz moment siły, który powoduje obrót walca.

Na ciężarek działa siła ciężkości $Q = mg$ i siła napięcia nici N. Zgodnie z III zasadą dynamiki siła o tej samej wartości N działa w punkcie A. Moment siły, który powoduje ruch obrotowy walca jest równy $M = N \cdot r$, gdyż nić jest styczna do walca.



Rys. 1.3. Obrót walca

Do opisu ruchu obrotowego nie wystarczy znajomość masy ciała, ważny jest również rozkład masy względem osi obrotu, określany przez moment bezwładności.

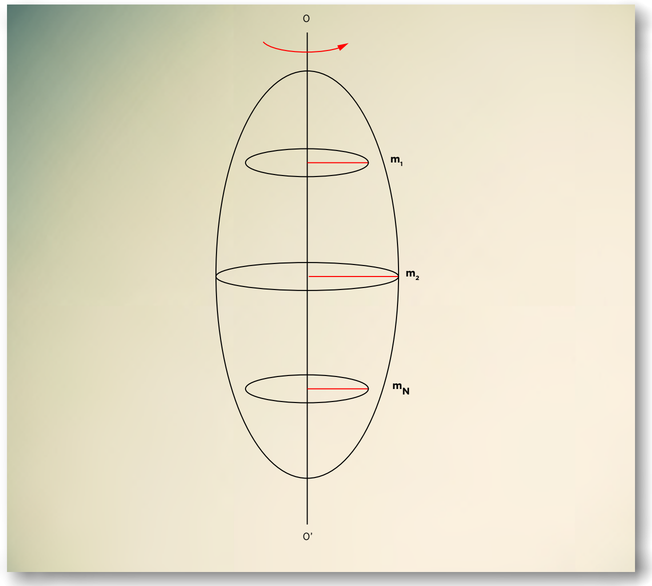
Aby zdefiniować **moment bezwładności** ciała względem osi obrotu załóżmy, że ciało o masie *m* składa się z N punktów materialnych o masie m_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), leżących w odległości r_i od osi obrotu każdy (rys. 1.4). Masa ciała jest sumą mas wszystkich punktów, czyli

$$m = \sum_{i=0}^{N} m_i$$

Moment bezwładności ciała względem osi obrotu jest zdefiniowany jako suma iloczynów mas i kwadratów ich odległości od osi obrotu, czyli

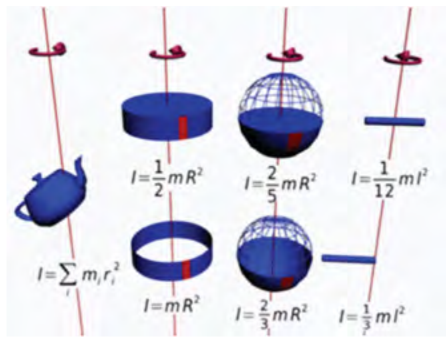
$$I = \sum_{i=0}^{N} m_i r_i^2$$

Momenty bezwładności typowych brył podano w tabeli 4.1.



Rys. 1.4. Bryła sztywna

Tabela 4.1. Momenty bezwładności wybranych brył

Bryła o masie m	Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy	
Kula o promieniu r	$\frac{2}{5}mr^2$	
Walec o promieniu r	$\frac{1}{2}mr^2$	
Pręt o długości l	$\frac{1}{12}ml^2$	
Obręcz o promieniu r	mr^2	http: //pl.wikipedia.org/wiki/Plik: Moment_of_inertia_ examples.gif

Aby obliczyć moment bezwładności bryły względem innej osi, równoległej do osi przechodzącej przez środek masy (rys. 1.5), stosujemy twierdzenie Steinera.

Twierdzenie Steinera:

$$I = I_0 + md^2$$

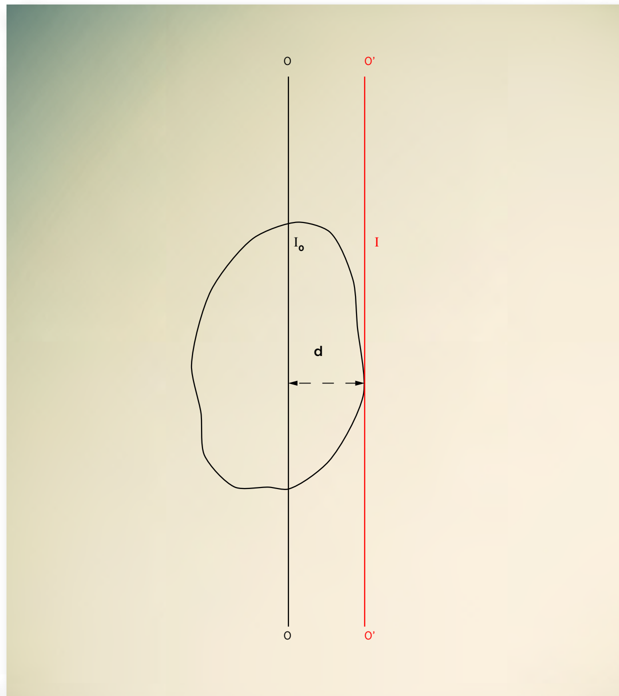
gdzie:

I – moment bezwładności względem osi O'O', równoległej do osi OO, przechodzącej przez środek masy bryły,

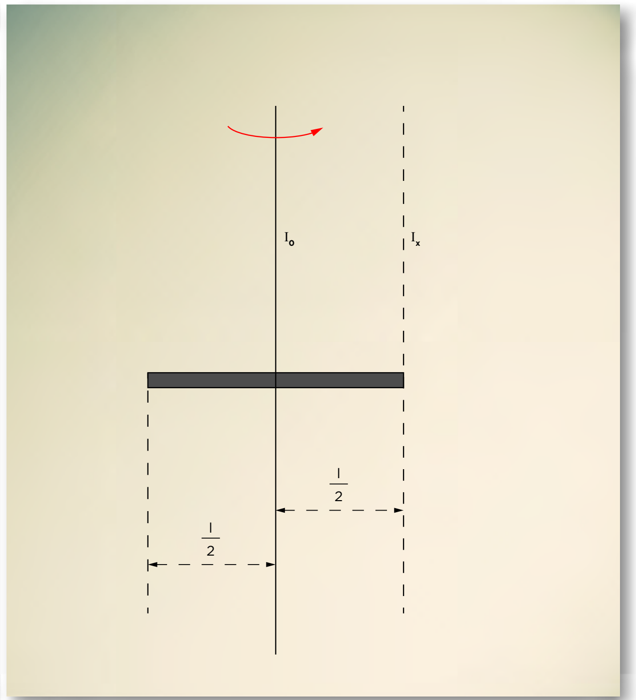
I_0 – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,

m – masa bryły,

d – odległość osi.



Rys. 1.5. Moment bezwładności bryły zależy od wyboru osi obrotu.



Rys. 1.6. I_0, I_x – momenty bezwładności pręta względem dwóch równoległych osi.

Przykład 4.2.

Oblicz moment bezwładności pręta o długości *l* względem osi przechodzącej przez jego koniec i prostopadłej do pręta (rys. 1.6).

$$I_x = I_0 + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Temat 2

Równowaga brył sztywnych

Znajomość warunków równowagi bryły sztywnej ma ogromne znaczenie w budownictwie przy projektowaniu różnych budowli. Zajmuje się tym osobny dział fizyki (mechaniki) zwany statyką. W przypadku punktu materialnego lub ciała, które może się poruszać tylko ruchem postępowym, wystarczy rozważyć siły działające na ciało. W przypadku ruchu obrotowego konieczna jest analiza momentów sił. Ważne jest również położenie środka masy (środka ciężkości) względem osi obrotu.

Środek masy układu punktów materialnych możemy wyznaczyć obliczając jego współrzędne w wybranym układzie odniesienia. Dla N punktów materialnych współrzędne środka masy wynoszą:

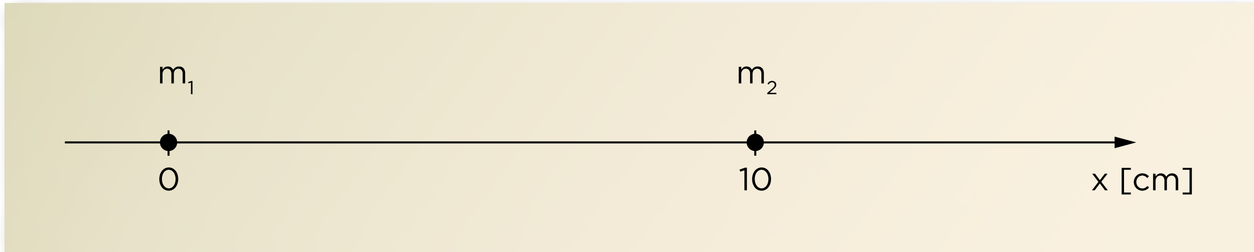
$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \; y_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \; z_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i};$$

gdzie x_i, y_i, z_i – współrzędne punktu o masie m_i (dla $i = 1\ldots N$).

Przykład 4.3.

Wyznacz położenie środka masy 2 ciężarków o masach: 0,1 kg i 0,4 kg, umieszczonych w odległości d = 10 cm.

W tym przypadku wystarczy nam jedna współrzędna (rys. 2.1), gdyż środek masy leży na prostej przechodzącej przez położenia obu ciężarków.



Rys. 2.1. Wybór układu odniesienia.

Dane:

$m_1 = 0{,}1\,kg,\; x_1 = 0\,cm$

$m_2 = 0{,}4\,kg,\; x_2 = 10\,cm$

Zgodnie z definicją współrzędna położenia środka masy wynosi:

$$x_s = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_s = \frac{0cm \cdot 0{,}1kg + 10cm \cdot 0{,}4kg}{0{,}5kg} = 8cm$$

Środek masy leży bliżej ciężarka o większej masie.

Przy większej liczbie punktów, a zwłaszcza przy ciągłym rozkładzie masy obliczenia są znacznie trudniejsze.

W przypadku jednorodnych i symetrycznych brył (np. walec, kula, prostopadłościan) środek masy pokrywa się z ich środkiem geometrycznym.

Środek masy można też znaleźć doświadczalnie.

Patrz: Doświadczenie 1.
Wyznaczanie środka masy

Zajmijmy się teraz sformułowaniem warunków równowagi bryły sztywnej i ich wyjaśnieniem na kilku przykładach.

Bryła sztywna jest w równowadze, gdy:

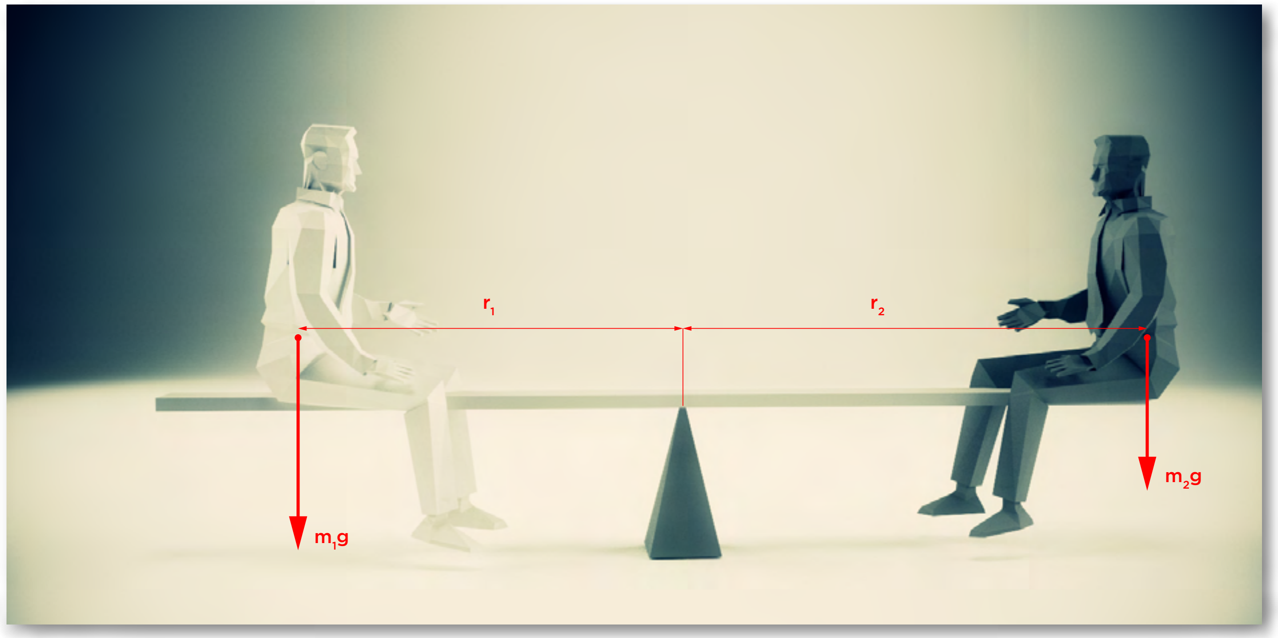
- Wypadkowa wszystkich sił działających na bryłę jest równa zero.
- Wypadkowy moment siły jest równy zero.

Przykład 4.4.
Dźwignia dwustronna

Przykładem dźwigni dwustronnej jest huśtawka na placu zabaw dla dzieci (rys. 2.2). Na huśtawce siedzą dwie osoby o masach m_1 i m_2. Huśtawka jest w równowadze, gdy wypadkowy moment siły względem punktu O jest równy zero, czyli:

$$M = m_2 g r_2 - m_1 g r_1 = 0$$

$$m_2 r_2 = m_1 r_1$$



Rysunek 2.2. Rozkład sił na huśtawce.

Jeśli osoby siedzące na huśtawce mają różne masy, to osoba o większej masie powinna usiąść bliżej punktu podparcia.

Ćwiczenie. Uruchom symulację „Równowaga" (Balancig act) ze strony http: //phet.colorado.edu/en/simulations/translated/pl

Zastosuj poznane warunki równowagi na kolejnych etapach gry.

Statyka zajmuje się określaniem warunków równowagi bryły sztywnej w stanie ustalonym. Często mamy do czynienia z przypadkami, gdy dojście do stanu równowagi trwa jakiś czas. Przykładem może być równowaga jachtu czy dziecinnej zabawki zwanej „Wańka-wstańka".

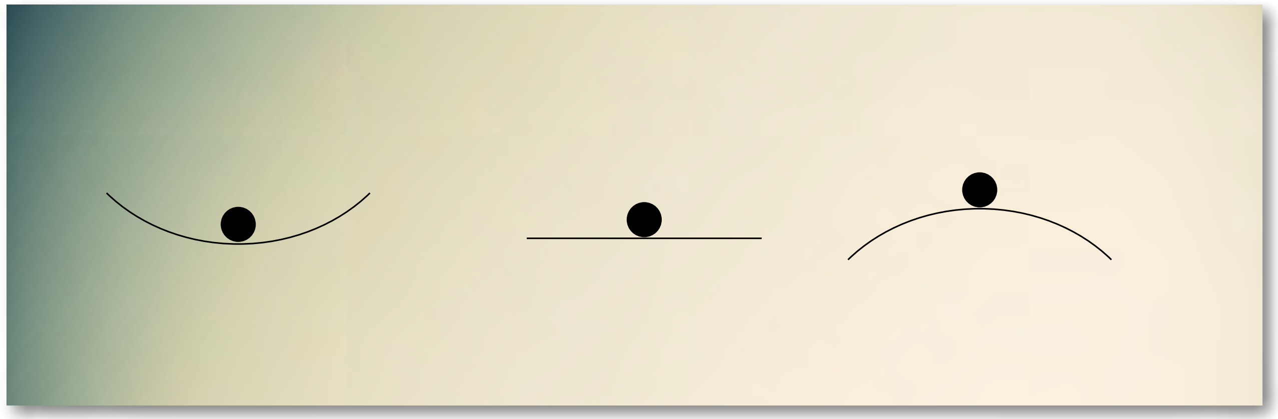
Zagadnienie to często jest dyskutowane przez żeglarzy, którzy używają pojęcia stateczność jachtu. Ilustrują to animacje na stronie http: //www.zeglarstwo.sail-ho.pl/statecz/stateczn.html

Od czasu do czasu media nagłaśniają niesamowite wyczyny akrobatów. Na przykład w czerwcu 2013 roku głośno było o spacerze na linie nad Wielkim Kanionem

(http: //www.rmf24.pl/foto/zdjecie, iId, 1153212,iAId, 84266#ad-image-0).

Akrobata spacerujący na linie trzyma przed sobą długą, wygiętą do dołu tyczkę. Dlaczego?
Fizycy mówią o trzech rodzajach równowagi: chwiejnej, obojętnej i chwiejnej.

Na przykład kula spoczywająca na dnie kulistego naczynia znajduje się w równowadze trwałej, gdy leży na poziomym stole w równowadze obojętnej, a gdy ją ustawić na drugiej kuli w równowadze chwiejnej (rys. 2.3).



Rys. 2.3. Różne rodzaje równowagi

W przypadku równowagi trwałej środek ciężkości znajduje się w najniższym możliwym położeniu – ciało zajmuje położenie odpowiadające minimum energii potencjalnej.

Temat 3
Ruch obrotowy bryły sztywnej

Zastosujmy poznane wielkości fizyczne do opisu ruchu obrotowego. Zacznijmy od sformułowania zasad dynamiki.

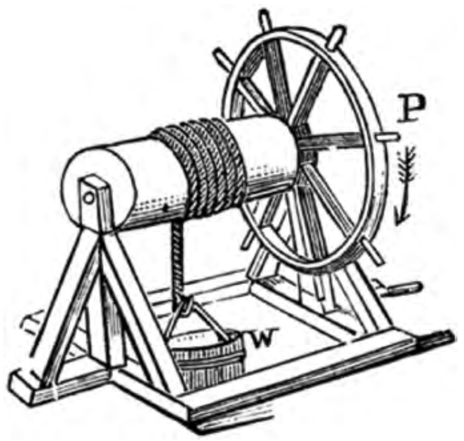
I zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Jeśli wypadkowy moment sił działających na ciało jest równy zeru to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem obrotowym jednostajnym (ze stałą prędkością kątową).

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Jeśli na bryłę sztywną działają siły, których momenty sił nie równoważą się, to bryła porusza się ruchem obrotowym jednostajnie zmiennym. Przyspieszenie kątowe bryły jest wprost proporcjonalne do wypadkowego momentu siły, a odwrotnie proporcjonalne do jej momentu bezwładności względem danej osi obrotu.

$$\epsilon = \frac{M}{I}$$



Rys. 3.1. Rycina przedstawiającą kołowrót (http: //pl.wikipedia.org/wiki/Plik: Wheelaxle_quackenbos.gif)

Przykład 4.5.

Tradycyjny kołowrót (rys. 3.1) składa się z walca, z umocowaną na jego końcu korbą lub kołem. Służy do wyciągania ciężkich przedmiotów przy użyciu siły mniejszej od ich ciężaru. Promień koła P jest większy od promienia walca, na którym nawinięta jest lina. Oznaczamy przez:

R – promień koła P, r – promień walca, Q – ciężar wiadra z wodą W, F – siłę przyłożoną do koła P, której moment powoduje obrót kołowrotu.

Gdy kołowrót obraca się ruchem jednostajnym momenty sił równoważą się, czyli:

$$Q \cdot r = F \cdot R$$

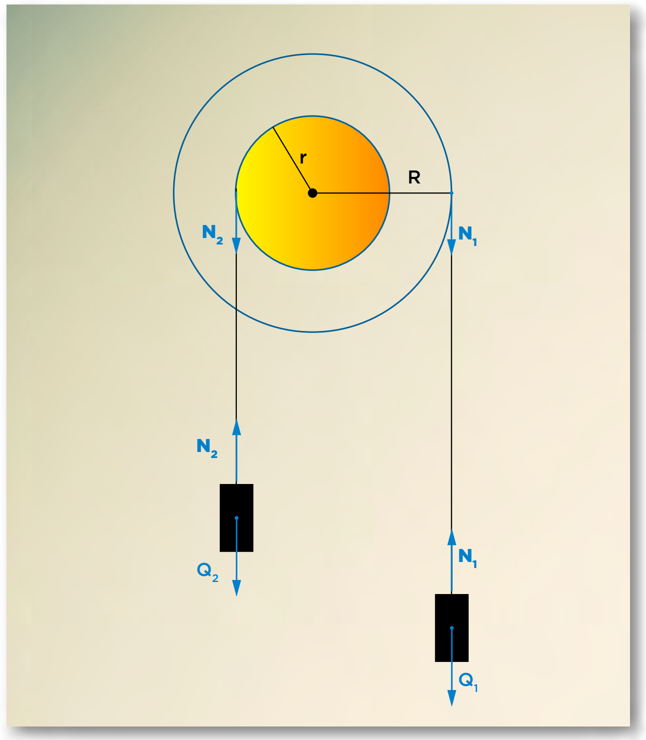
Oznacza to, że jeśli promień koła jest 3 razy większy od promienia walca ($R = 3r$) to do wyciągnięcia wiadra z wodą możemy użyć siły trzy razy mniejszej od jego ciężaru!

Przykład 4.6.

Kołowrót w pracowni fizycznej składa się z dwóch połączonych sztywno krążków (rys. 3.2) o promieniach *r* i *R* > *r*, mogących obracać się wokół osi przechodzącej przez ich środek.

Na krążki nawinięto nić i zawieszono ciężarki o masach m_1 i m_2. Na ciężarki działają siły ciężkości Q_1 i Q_2 oraz siły napięcia nici N_1 i N_2. O ruchu obrotowym decyduje wartość wypadkowego momentu siły.

$$M = N_1 R - N_2 r$$



Rys.3.2. Kołowrót – rozkład sił.

Jeśli wypadkowy moment siły jest równy zeru, czyli $N_1 R = N_2 r$ to kołowrót pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem obrotowym jednostajnym (ze stałą prędkością kątową).

Jeśli wypadkowy moment siły jest różny od zera, to kołowrót porusza się ruchem obrotowym jednostajnie przyspieszonym. Przyspieszenie kątowe kołowrotu możemy obliczyć z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

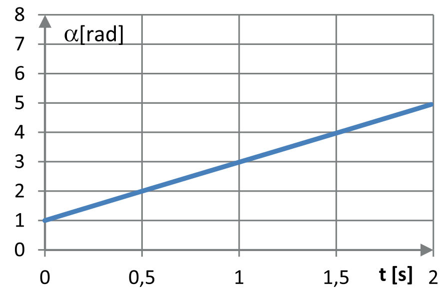
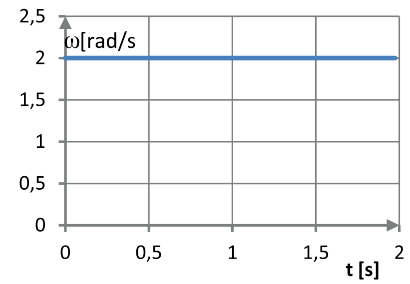
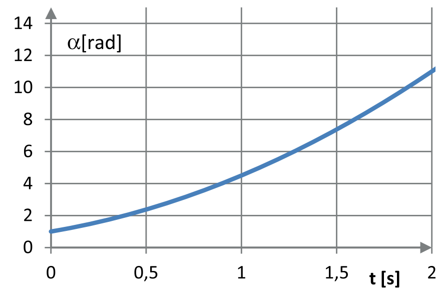
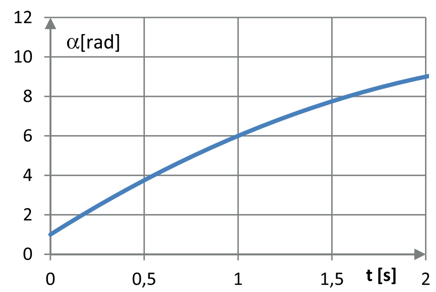
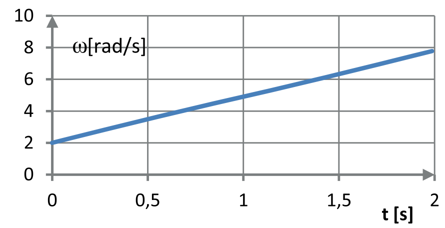
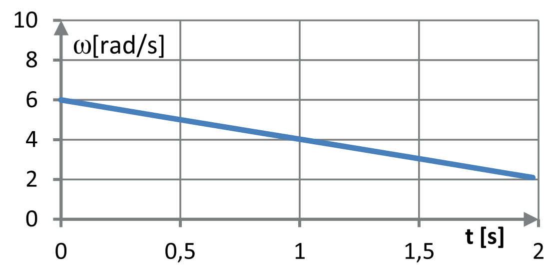
$$\epsilon = \frac{M}{I} = \frac{N_1 R - N_2 r}{I}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności bryły względem osi obrotu. Dla $\epsilon > 0$ kołowrót obraca się w prawo.

W kinematyce punktu materialnego opis ruchu przedstawialiśmy na wykresach zależności położenia i prędkości ciała od czasu. W podobny sposób możemy opisać ruch obrotowy, ale używamy innych wielkości: kąta obrotu, prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego. Odpowiednie zależności i wykresy dla ruchu obrotowego przedstawia tabela 4.2.

Podobne wykresy możesz otrzymać jeśli zarejestrujesz na filmie ruch obrotowy ciała i wykonasz analizę tego ruchu metodą wideopomiarów.

Tabela 4.2. Przykładowe wykresy dla ruchu obrotowego bryły sztywnej

	Zależność kąta obrotu od czasu	Zależność prędkości kątowej od czasu
Ruch obrotowy jednostajny	$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$ α_0 – początkowa wartość kąta 	Stała prędkość kątowa $\omega(t) = \omega$ 
Ruch obrotowy jednostajnie zmienny	$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}$  Wykres dla $\epsilon > 0$ (góra) i $\epsilon < 0$ (dół) 	$\omega(t) = \omega_0 + \epsilon\, t$ Gdy $\epsilon > 0$ prędkość kątowa rośnie liniowo - ruch jednostajnie przyspieszony.  Gdy $\epsilon < 0$ prędkość kątowa maleje liniowo - ruch jednostajnie opóźniony. 

Przykład 4.7.

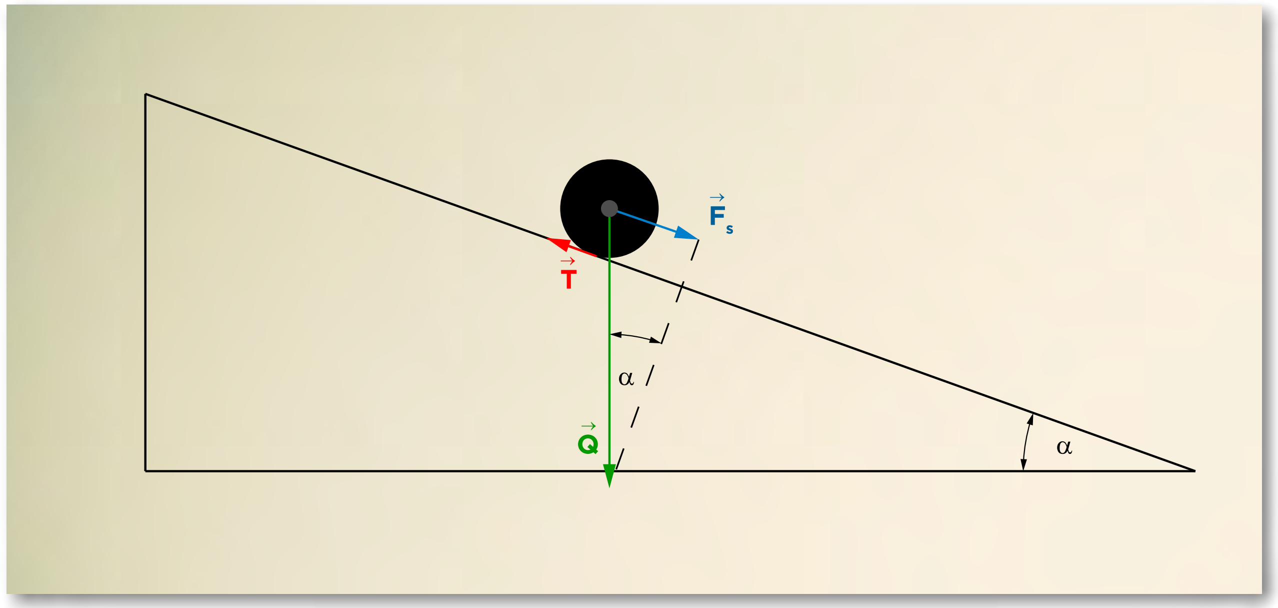
Oblicz przyspieszenie walca o promieniu *r* staczającego się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30°$. Moment bezwładności walca względem osi przechodzącej przez środek masy $I = \frac{1}{2}mr^2$.

Rozwiązanie:

Ruch walca staczającego się w dół równi pochyłej możemy traktować jako złożenie ruchu postępowego środka masy walca i ruchu obrotowego względem osi geometrycznej walca.

Oznaczmy przez *T* siłę tarcia tocznego, a przez F_s składową siły ciężkości, równoległą do równi (rys. 3.3). Można ją wyrazić przez:

$$F_s = mgsin\alpha$$



Rys. 3.3. Rozkład sił.

Zapiszmy równania opisujące ruch postępowy i obrotowy walca względem osi przechodzącej przez środek masy:

$$ma = mgsin\alpha - T$$

$$\epsilon = \frac{T \cdot r}{\frac{1}{2}mr^2}$$

Ponieważ walec stacza się bez poślizgu, przyspieszenie środka masy walca jest związane z przyspieszeniem kątowym równaniem:

$$\epsilon = \frac{a}{r}$$

Porównując prawe strony obu równań na przyspieszenie kątowe otrzymujemy:

$$\frac{a}{r} = \frac{T \cdot r}{\frac{1}{2}mr^2}$$

$$a = \frac{2T}{m}$$

$$T = \frac{ma}{2}$$

Po wstawieniu do równania ruchu postępowego otrzymujemy

$$ma = mgsin\alpha - \frac{ma}{2}$$

$$\frac{3ma}{2} = mgsin\alpha$$

$$a = \frac{2}{3}gsin\alpha$$

Wstawiając wartość przyspieszenia ziemskiego i $sin\alpha = 0{,}5$ obliczamy:

$$a = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}{3}\frac{m}{s^2} = 3{,}27\frac{m}{s^2}$$

Odp. Przyspieszenie walca staczającego się z równi pochyłej wynosi $3{,}27\frac{m}{s^2}$.

Zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego przy ustalonym momencie siły przyspieszenie kątowe bryły jest odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności bryły względem danej osi obrotu. Ilustruje to animacja 1.

A jak wyznaczyć doświadczalnie moment bezwładności ciała?

Patrz: Doświadczenie 2. Wyznaczanie wartości momentu bezwładności

Temat 4

Zasada zachowania momentu pędu

Znasz już pojęcie pędu ciała i przykłady zjawisk świadczących o słuszności prawa zachowania pędu. W ruchu obrotowym odpowiednikiem pędu jest moment pędu.

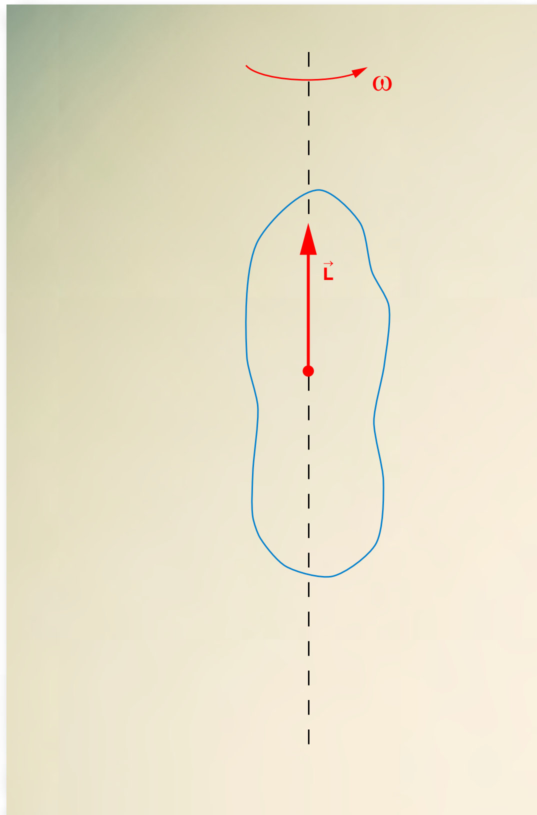
Moment pędu obracającej się bryły jest równy iloczynowi prędkości kątowej i momentu bezwładności bryły względem danej osi obrotu.

$$L = I \cdot \omega$$

Moment pędu jest wielkością wektorową. Kierunek wektora momentu pędu pokrywa się z osią obrotu bryły, a zwrot wyznaczamy regułą śruby prawoskrętnej (rys. 4.1).

W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadków, gdy kierunek i zwrot wektora momentu pędu nie ulega zmianie.

Zacznijmy od doświadczeń z wykorzystaniem krzesełka obrotowego. Ilustrują one zasadę zachowania momentu pędu, która jest jednym z fundamentalnych praw fizyki.



Rysunek 4.1. Zwrot wektora momentu pędu jest wskazywany przez ruch postępowy śruby prawoskrętnej, wkręcanej zgodnie z ruchem obrotowym bryły.

Patrz: Doświadczenie 3. Prawo zachowania momentu pędu.

Prawo zachowania momentu pędu

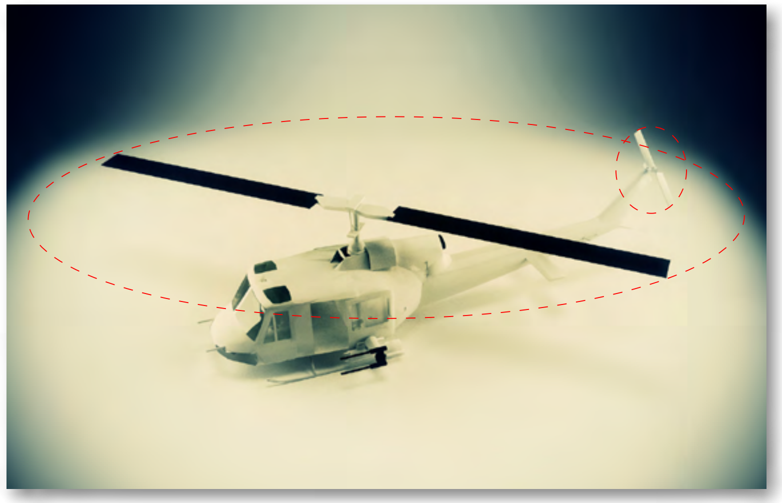
Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na bryłę sztywną jest równy zeru, to moment pędu bryły nie ulega zmianie.

Przy ruchu obrotowym względem ustalonej osi obrotu iloczyn momentu bezwładności i prędkości kątowej bryły pozostaje stały, czyli:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Zmiana momentu bezwładności obracającej się bryły (spowodowana zmianą rozmieszczenia masy względem osi obrotu) powoduje zmianę jej prędkości kątowej.

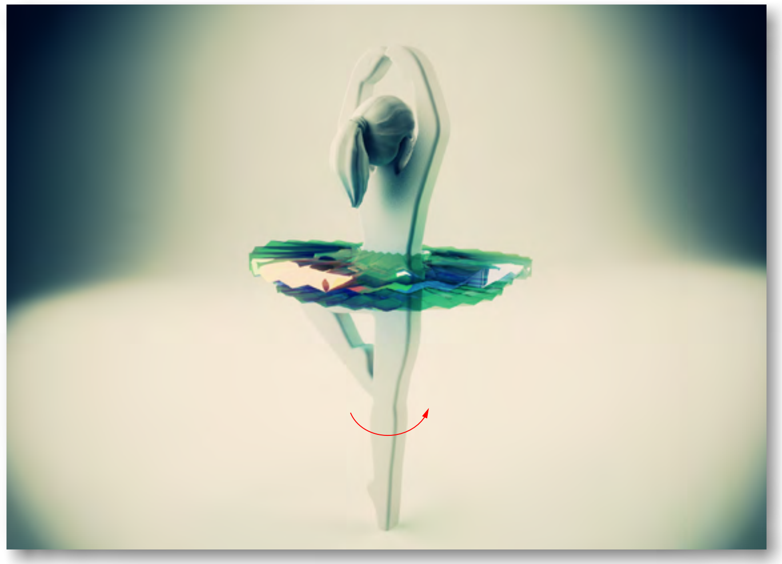
Można podać wiele przykładów wykorzystania zasady zachowania momentu pędu w przyrodzie i technice. Małe śmigło na ogonie helikoptera (rys. 4.2) zapobiega ruchowi obrotowemu kadłuba, który wystąpiłby przy ruchu obrotowym głównego śmigła nośnego.



Rys. 4.2. Klasyczny układ śmigieł helikoptera.

Łyżwiarka czy baletnica, wykonująca piruety, zwiększa prędkość wirowania zbliżając ręce do tułowia (rys. 4.3).

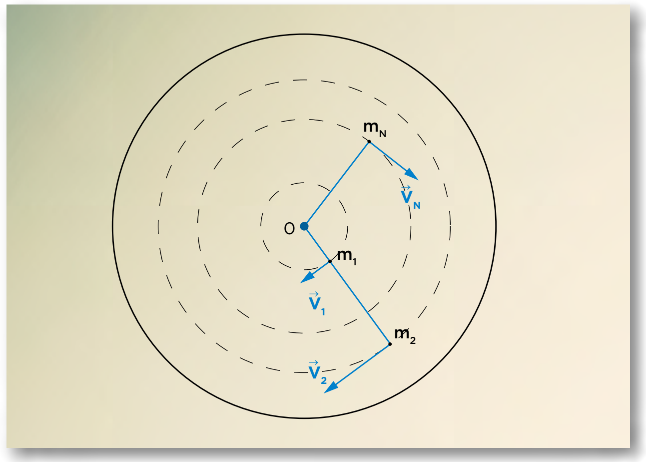
Gwiazda neutronowa, powstająca w czasie zapadania grawitacyjnego centralnej części masywnej gwiazdy, kurcząc się zaczyna bardzo szybko wirować, gdyż maleje jej moment bezwładności.



Rys. 4.3. Tajemnice piruetów.

Temat 5
Energia kinetyczna ruchu obrotowego

Znasz już różne rodzaje energii mechanicznej: energię potencjalną ciężkości i sprężystości oraz energię kinetyczną ciała poruszającego się ruchem postępowym. Rozważmy ciało obracające się ze stałą prędkością kątową wokół osi O prostopadłej do płaszczyzny rysunku (rys. 5.1).



Rys. 5.1. Punkty leżące w różnej odległości od osi obrotu mają różne prędkości liniowe.

Energia kinetyczna ciała jest sumą energii kinetycznej poszczególnych punktów, czyli:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \cdots + \frac{m_N v_N^2}{2}$$

Prędkości liniowe punktów zależą od ich odległości od osi obrotu:

$v_i = \omega \cdot r_i$, dla $i = 1, \ldots, N$

Zatem energia kinetyczna

$$E_k = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2} + \cdots + \frac{m_N \omega^2 r_N^2}{2}$$

Po przekształceniu

$$E_k = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 r_1^2 + \cdots + m_N r_N^2\right) = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=0}^{N} m_i r_i^2$$

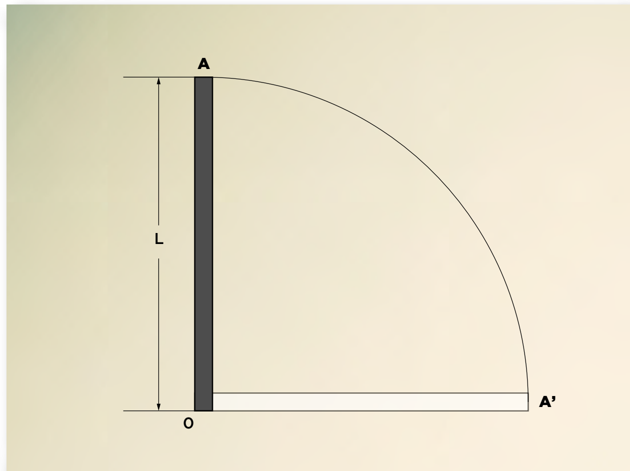
$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego jest proporcjonalna do momentu bezwładności bryły względem danej osi obrotu i kwadratu prędkości kątowej.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z ruchem złożonym z ruchu obrotowego i postępowego bryły (przykład 4.7 – walec staczający się z równi pochyłej) energia kinetyczna jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem osi geometrycznej walca.

Przykład 4.8.

Kij o długości L przewraca się z położenia pionowego OA do położenia OA', obracając się wokół punktu O (rys. 5.2). Oblicz prędkość kątową i liniową końca kija w chwili upadku na ziemię. Moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego koniec wynosi $I = \frac{1}{3}mL^2$ (m – masa, L – długość pręta).



Rys. 5.2. Ruch obrotowy kija.

Rozwiązanie:

Kij porusza się ruchem obrotowym względem osi przechodzącej przez punkt O. Energia mechaniczna kija E_1 w położeniu pionowym jest równa jego energii potencjalnej, czyli przy założeniu, że energia potencjalna jest równa zero na poziomie OA':

$$E_1 = mgh = mg\frac{L}{2}$$

Energia mechaniczna kija w momencie uderzenia o podłoże to energia kinetyczna ruchu obrotowego, czyli $E_2 = \frac{I\omega^2}{2}$. Zakładając, że straty energii spowodowane oporami ruchu są na tyle małe, że możemy je pominąć:

$$E_1 = E_2$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{\frac{1}{3}mL^2\omega^2}{2}$$

$$3g = L\omega^2$$

Prędkość kątowa kija w momencie uderzenia o podłoże wynosi

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$[\omega] = \sqrt{\frac{m}{s^2 \cdot m}} = \frac{1}{s}$$

Prędkość liniowa górnego końca kija wynosi

$$v_{A'} = \omega L = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot L = \sqrt{3gL}$$

$$[v_{A'}] = \sqrt{\frac{m}{s^2}m} = \frac{m}{s}$$

Człowiek - najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Warszawska
Wyższa Szkoła
Informatyki

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego