WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA

INNOWACYJNY PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI W SZKOŁACH PONADGIMNAZJALNYCH

Moduł dydaktyczny: fizyka - informatyka

Grawitacja

Grzegorz F. Wojewoda

Człowiek - najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tytuł: ***Grawitacja***

Autor: ***mgr Grzegorz F. Wojewoda***

Redaktor merytoryczny: ***dr hab. inż. prof. WWSI Zenon Gniazdowski***

Materiał dydaktyczny opracowany w ramach projektu edukacyjnego
WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA.
PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI
Z ELEMENTAMI TECHNOLOGII INFORMATYCZNYCH

www.wlf.wwsi.edu.pl

wlf@wwsi.edu.pl

Wydawca: Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
ul. Lewartowskiego 17, 00-169 Warszawa
www.wwsi.edu.pl
rektorat@wwsi.edu.pl

Projekt graficzny: *Maciej Koczanowicz*

Warszawa 2013

Człowiek - najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

MODUŁ 6

GRAWITACJA

FIZYKA – ZAKRES ROZSZERZONY

OPRACOWANE W RAMACH PROJEKTU:
WIRTUALNE LABORATORIA FIZYCZNE NOWOCZESNĄ METODĄ NAUCZANIA.
PROGRAM NAUCZANIA FIZYKI
Z ELEMENTAMI TECHNOLOGII INFORMATYCZNYCH

Spis tematów:

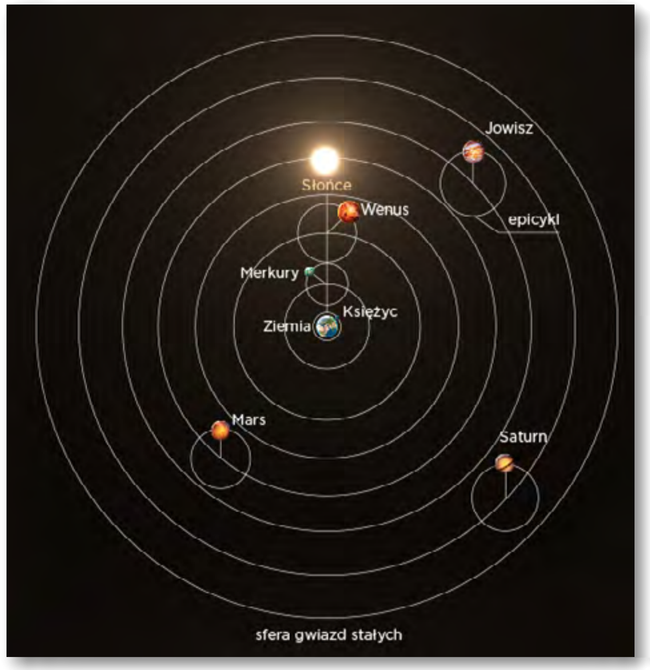
Temat 1
Prawa Keplera

Wstęp

W temacie tym postaramy się przybliżyć wam ewolucję poglądów na budowę Układu Słonecznego. Omówimy również empiryczne, bo wynikające z obserwacji, prawa dotyczące ruchu planet dookoła Słońca.

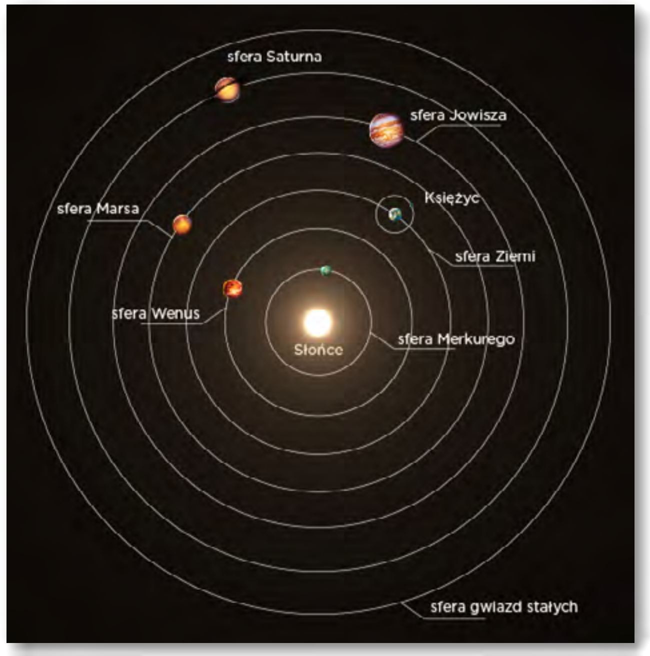
Rozwój poglądów na budowę Układu Słonecznego

Można powiedzieć, że podsumowaniem wyobrażeń starożytnych o Wszechświecie jest opublikowany w drugim wieku naszej ery model geocentrycznego systemu astronomicznego. Stworzył go żyjący w Aleksandrii Klaudiusz Ptolemeusz. Starożytni odróżniali prawa dotyczące ruchu ciał niebieskich od praw dotyczących zachowania się ciał na Ziemi. Wspólną cechą ciał niebieskich było to, że poruszały się one po okręgach, a ich ruch był wieczny. Gwiazdy stałe były nieru-

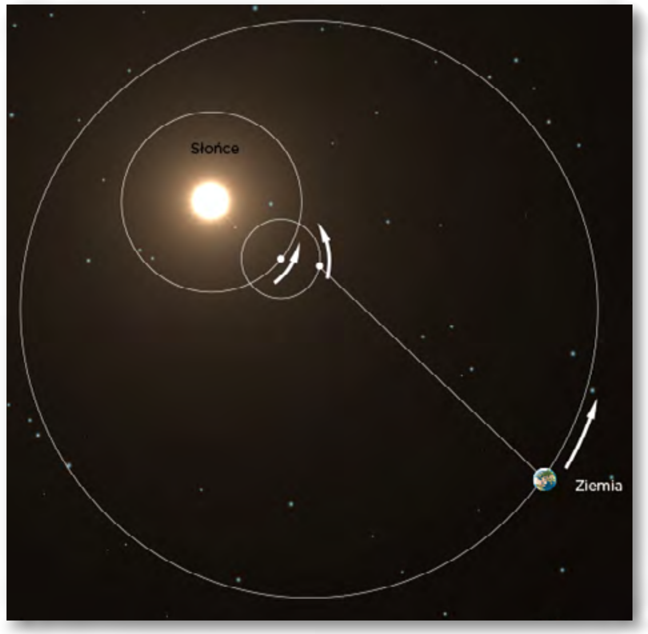


Rys. 6.1. Geocentryczny system Ptolemeusza. Wersja uproszczona, zaznaczono jeden epicykl dla planety.

chome względem siebie, przymocowane do sfery niebieskiej i wraz z nią poruszały się po okręgach wokół Ziemi. Ziemia stanowiła centrum Wszechświata (rys. 6.1.). Pomiędzy sferą gwiazd stałych a Ziemią znajdowały się sfery poszczególnych planet. Do sfery przymocowany był epicykl, na którym znajdowała się planeta. Jak można zauważyć na schemacie środki epicykli Merkurego i Wenus leżą na linii łączącej Ziemię i Słońce. Natomiast promień epicyklu dla trzech pozostałych planet (Marsa, Jowisza i Saturna) był zawsze równoległy do linii łączącej Ziemię i Słońce. Księżyc porusza się po epicyklu, którego środek znajdował się w punkcie obiegającym Ziemię po małym okręgu. Słońce było przymocowane tylko do sfery niebieskiej. Wszystkie te obiekty ostatecznie wirowały wokół Ziemi. Przez następne piętnaście stuleci ludzkość dojrzewała do zmiany układu odniesienia względem którego opisywany jest ruch ciał niebieskich. W opublikowanym w 1543 roku dziele *De revolutionibus orbium coelestium* Mikołaj Kopernik przedstawił rewolucyjne pomysły na model budowy Wszechświata. Najważniejsze postulaty tego modelu: nie istnieje środek wszystkich sfer niebieskich, środek świata znajduje się w punkcie w pobliżu Słońca, wokół którego krążą sfery poszczególnych planet oraz sfera gwiazd stałych. Według Kopernika widziany ruch Słońca na sferze niebieskiej jest skutkiem ruchu Ziemi i sfery z nią związanej, z którą obracamy się wokół Słońca. Ziemia podobnie jak każda inna planeta wykonuje więc kilka ruchów. Na rysunku 6.2. przedstawiono kolejność sfer przedstawioną przez Kopernika w pierwszym rozdziale swojego dzieła. Nie oznacza to jednak, że ruch planet w modelu Kopernika ograniczał się tylko do ruchu po jednej sferze. Ściśle rzecz biorąc system kopernikański nie był heliocentryczny. Aby wyjaśnić fakt, że Słońce szybciej przesuwa się na tle gwiazd zimą iż latem Kopernik zmuszony był przyjąć, że środek orbity Ziemi nie leży w środku Słońca (rys. 6.3.). Aby wyjaśnić inne nieregularności w położeniu Słońca i innych obiektów na niebie Kopernik musiał założyć, że środek orbity Ziemi nie jest nieruchomy, lecz porusza się po okręgu. A dopiero ten okrąg krąży wokół Słońca. Podobnie skomplikowane ruchy wykonywały pozostałe planety Układu Słonecznego. Matematycznie system heliocentryczny Kopernika z pewnością nie był prostszy niż średniowieczne wersje modelu geocentrycznego. Na rysunku 6.4. przedstawiono sposób, w jaki Kopernik tłumaczy powstawanie „pętli" podczas przemieszczania się planety na sferze niebieskiej. W tym przypadku skorzystano z uproszczenia ruchu planet po orbitach kołowych wokół Słońca.

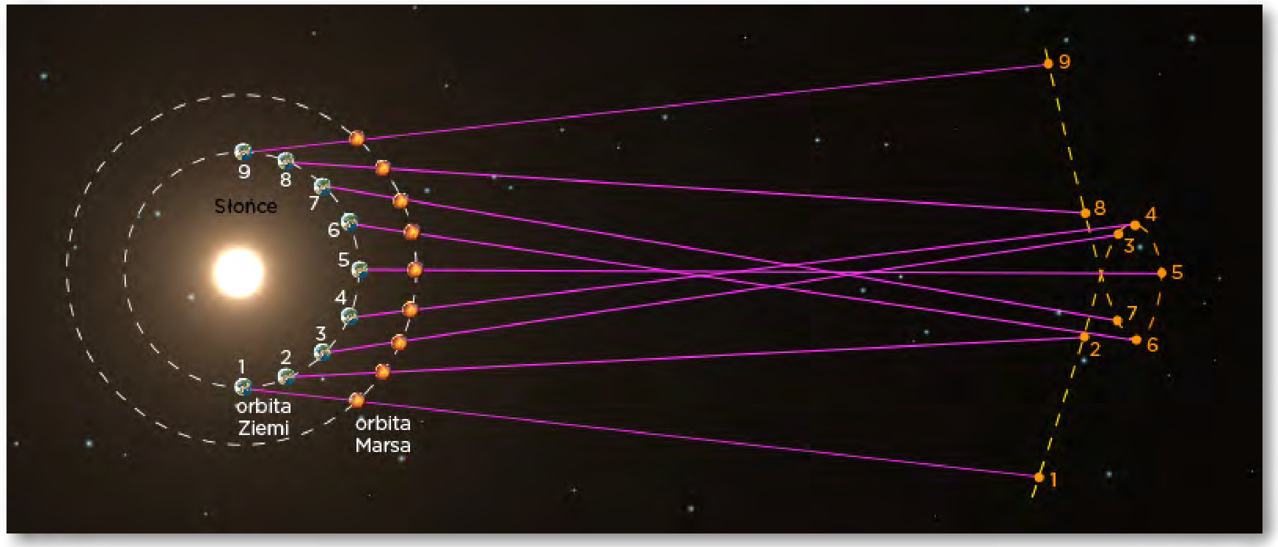


Rys. 6.2. Heliocentryczny model Kopernika.



Rys. 6.3. Ruch Ziemi wokół Słońca według teorii Mikołaja Kopernika.

Kolejność planet została w heliocentrycznym modelu Mikołaja Kopernika związana z czasem ich obiegów wokół Słońca. W swojej teorii Kopernik wysunął również hipotezę, że ciężkość jest naturalną dążnością ciał niebieskich do tworzenia kul. Można stwierdzić, że była to pierwsza hipoteza powszechnej grawitacji. W związku z tym, że Kopernik nie przedstawił żadnych dowodów obserwacyjnych na słuszność swoich stwierdzeń, jego poglądy spotkały się z ostrą krytyką. Potem jego dzieło *De revolutionibus* … zostało umieszczone w indeksie ksiąg zakazanych.



Rys. 6.4. Zmiana położenia Marsa na sferze niebieskiej widziana z powierzchni Ziemi.

Kilka lat po ukazaniu się drukiem dzieła Kopernika urodził się Tycho Brahe. Ten duński astronom wykonywał obserwacje z niezwykłą jak na ówczesne czasy precyzją. Obserwując w 1572 roku nową gwiazdę (obecnie wiemy, że była to supernowa) podważył pogląd utrzymujący się od starożytności o tym, że układ gwiazd jest stały od początku świata. Nie mogąc zaobserwować przesunięcia paralaktycznego gwiazd podczas rocznego ruchu Ziemi wokół Słońca Brahe odrzucał teorię Kopernika. Efekt paralaksy został dostrzeżony wiele lat później, po zastosowaniu teleskopów do obserwacji nieba. Tycho Brahe swój własny model, w myśl którego centrum świata jest Ziemia. Wokół Ziemi krążą Księżyc i Słońce. Pozostałe planety krążyły wokół Słońca, a wraz ze Słońcem wokół Ziemi.

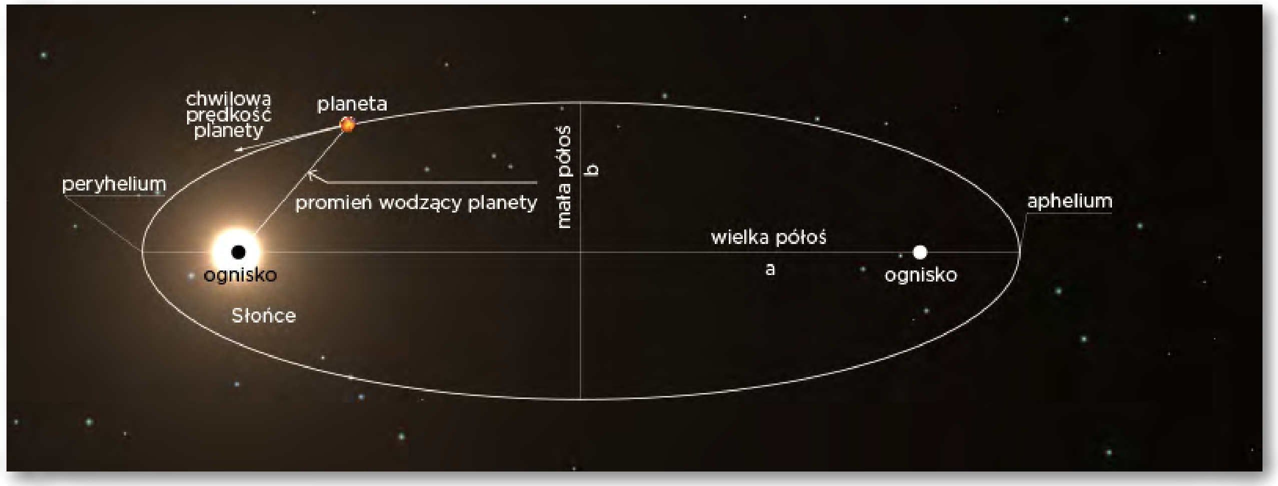
Prawa Keplera

Na początku XVII wieku Johanes Kepler przedstawił bardzo śmiałą koncepcję. Założył, że planety poruszają się wokół Słońca po orbitach eliptycznych. Okazało się wówczas, że wyniki obserwacji astronomicznych zgadzały się z modelem matematycznym.

Pierwsze prawo Keplera brzmi więc następująco:

Orbita każdej planety jest elipsą. Słońce znajduje się w ognisku tej elipsy.

Na rysunku 6.5. przedstawiono eliptyczną orbitę Ziemi wokół Słońca. Rysunek nie jest w poprawnej skali. W rzeczywistości odległość a jest bardzo bliska odległości b i nie zobaczylibyśmy eliptyczności orbity. Z rysunku wynika, że odległość planety od Słońca nie jest stała. Punkt najmniejszej odległości planety od Słońca nazywamy **peryhelium**. Gdy planeta znajduje się w najdalej od Słońca, mówimy że jest w **aphelium**.

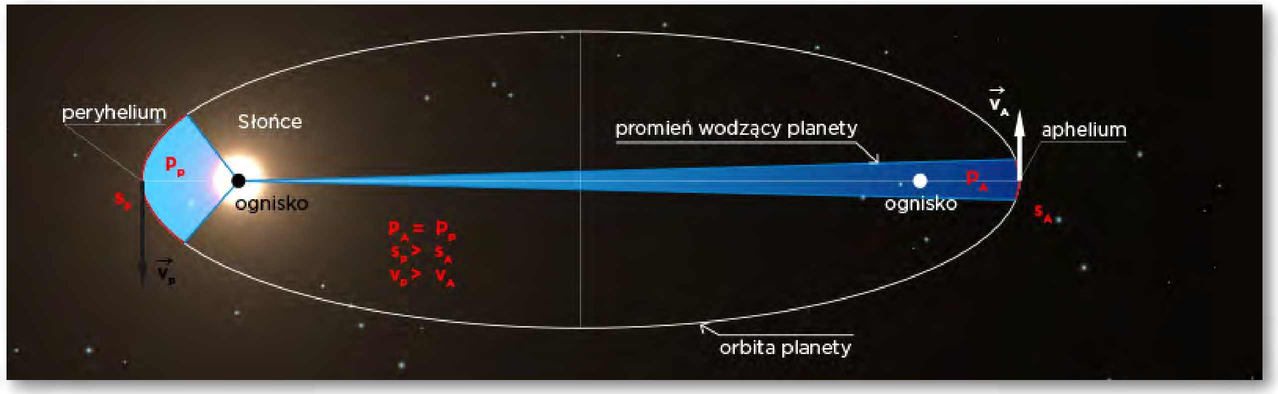


Rys. 6.5. I prawo Keplera.

W związku z tym, że zmienia się odległość planety od Słońca, zmienia się również wartość prędkości poruszania się planety po orbicie. Na podstawie obliczeń Kepler stwierdził, że pole powierzchni zakreślane przez linię łączącą planetę ze Słońcem pozostaje stałe w czasie. Drugie prawo Keplera brzmi:

Promień wodzący planety w jednakowych odstępach czasu zakreśla jednakowe pola.

Z rysunku 6.6 wynika, że odległość s_p zakreślana w tym samym czasie co odległość s_A jest dłuższa. Oznacza to, że prędkość liniowa planety w peryhelium jest największa, a prędkość liniowa planety w aphelium jest najmniejsza.



Rys. 6.6. II prawa Keplera.

Po następnych kilku latach poszukiwań związku między odległością planety od Słońca a okresem jej obiegu wokół Słońca Kepler odkrył swoje trzecie prawo.

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do trzeciej potęgi średniej odległości planety od Słońca jest wielkością stałą.

$$\frac{T^2}{R_{sr}^3} = const$$

Znając dane orbity Ziemi oraz jeden z parametrów opisujących orbitę dowolnej planety (średnią odległość lub okres obiegu) możemy wyznaczyć wartość drugiego parametru orbity.

Przykład 1

Wenus krąży wokół Ziemi po orbicie o promieniu 108 mln km. Oblicz okres obiegu planety Wenus wokół Słońca.

Rozwiązanie:

Korzystamy z następujących danych dotyczących orbity Ziemi:

Okres obiegu: $T = 1\ rok = 365{,}25\ dni$

Średnia odległość Ziemi od Słońca: $R_z = 150m\ \ln.km$

Korzystamy z III prawa Keplera:

$$\frac{T_Z^2}{R_Z^3} = \frac{T_W^2}{R_W^3}$$

Z równania tego wyznaczamy okres obiegu Wenus wokół Słońca:

$$T_W = T_Z\sqrt{\frac{R_W^3}{R_Z^3}} = 365,25dni\sqrt{\frac{(108m\ln.km)^3}{(150m\ln.km)^3}} = 365,25dni \cdot 0,61 = 223dni$$

Odpowiedź: Okres obiegu Wenus wokół Słońca wynosi 223 dni.

Jak nietrudno się domyśleć teoria budowy świata podana przez Keplera nie wszystkim się spodobała. Niebawem jego dzieła znalazły się w indeksie ksiąg zakazanych. Potwierdzenie teorii Keplera przyszło z Włoch. Galileusz był pierwszym człowiekiem, który zastosował wynaleziony właśnie teleskop do obserwacji nieba. W wyniku tych obserwacji Galileusz odkrył księżyce Jowisza. Kepler zastosował swoje prawa do opisu ruchu księżyców wokół Jowisza. Okazało się, że prawa te znalazły swoje potwierdzenie. I chociaż Galileusz nie uznawał teorii o eliptyczności orbit planet, to można stwierdzić, że od czasów Galileusza i Keplera zaczyna się nowoczesna fizyka. Fizyka, w której ostateczną weryfikacją prawdziwości praw jest doświadczenie. Galileuszowi bliski był układ kołowych orbit planet krążących wokół Słońca, który postulował Kopernik. Galileusz na potwierdzenie słuszności teorii heliocentrycznej oprócz istnienia satelitów Jowisza, przytaczał dane obserwacyjne dotyczące faz Wenus oraz istnienie plam na Słońcu świadczących o jego obrocie wokół swojej osi.

Obecnie wiemy, że planeta nie krąży wokół nieruchomego Słońca, ale układ planeta – Słońce krąży wokół wspólnego środka masy. Oczywiście środek masy układu planeta – Słońce znajduje się bardzo blisko środka Słońca. Dotyczy to wszystkich planet w naszym układzie planetarnym. Trzecie prawo Keplera uwzględniające powyższy fakt nazywamy trzecim uogólnionym prawem Keplera:

Stosunek trzeciej potęgi średniej odległości planety od Słońca do kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca jest proporcjonalny do sumy mas Słońca i planety

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}$$

Występująca we wzorze litera G oznacza stałą grawitacji. O stałej grawitacji będziemy mówić w następnym temacie. Uogólniona postać III prawa Keplera ma również zastosowanie do księżyców obiegających planety, satelitów krążących wokół Ziemi, planet krążących wokół innych gwiazd.

Dla dwóch planet krążących wokół wspólnej gwiazdy III uogólnione prawo Keplera ma postać:

$$\frac{T_1^2(M_G+m_1)}{T_2^2(M_G+m_2)} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

gdzie M_G – masa gwiazdy, m_1, m_2, – masy planet, R_1, R_2, – odległości planet od gwiazdy.

Podsumowanie

Planety krążą wokół Słońca po elipsach.

Wartość prędkości liniowej w ruchu planety wokół Słońca zmienia się, stałe pozostają pola powierzchni zakreślone przez promień wodzący planety.

Dla dwóch planet krążących wokół tej samej gwiazdy słuszne jest równanie:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Temat 2
Prawo powszechnego ciążenia

Wstęp

Wskażemy podobieństwa między siłą powodującą spadanie jabłek z drzew a siłą powodującą ruch Księżyca wokół Ziemi. Wyjaśnimy od jakich wielkości zależy siła wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego między ciałami.

Od czasów starożytnych uważano ruch planet po kołowych orbitach za naturalny. Galileusz udowodnił, że ruch jednostajny po linii prostej bez oporów ruchu nie wymaga siły napędzającej. A z obserwacji wynikało, że ruch planet wokół Słońca odbywa się po elipsach a nie po okręgach. Wielu naukowców w XVII wieku starało się scalić w jedno odkrycia Galileusza i Keplera. Izaak Newton był tym, któremu się to udało. Analizując zasadę bezwładności Galileusza Newton doszedł do wniosku, że siła powodująca ruch planety wokół Słońca nie może być skierowana wzdłuż kierunku prędkości planety, ale musi być skierowana do środka krzywizny ruchu. Czyli siła powodująca ruch planety wokół musi pochodzić od Słońca! Ale czy może istnieć siła wzajemnego działania między ciałami bez ich bezpośredniego kontaktu? Legenda wymyślona częściowo przez samego Newtona głosi, że na rozwiązanie tej zagadki wpadł w ogrodzie, pod jabłonią. Newton zastanawiał się czy natura siły powodującej spadanie jabłka z drzewa jest taka sama jak natura siły powodującej ruch Księżyca wokół Ziemi. Doszedł do wniosku, że Księżyc spadłby na Ziemię tak jak jabłko gdyby nie to, że ma prędkość w kierunku prostopadłym do kierunku działania siły. Stanowiło to rewolucję w ówczesnym rozumieniu świata. Po raz pierwszy w dziejach nauki wysunięto hipotezę, że prawa przyrody są takie same na ziemi i w kosmosie. Stąd nazwa „powszechne" w prawie grawitacji.

Jak wiadomo z tematu poświęconego dynamice ruchu po okręgu wartość siły dośrodkowej powodującej ruch ciała po okręgu wyrażamy wzorem: $F_d = \frac{m \cdot v^2}{R}$, zaś wartość prędkości liniowej w ruchu po okręgu wynosi: $v = \frac{2\pi R}{T}$. Łącząc te dwa wzory wartość siły dośrodkowej można zapisać za pomocą równania:

$$F_d = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2}$$

Z III prawa Keplera wynika, że kwadrat okresu obiegu planety wokół Słońca jest proporcjonalny do trzeciej potęgi odległości planety od Słońca: $T^2 \sim R^3$. Wstawiając tę zależność do wyrażenia na wartość siły dośrodkowej otrzymujemy:

$$F_d \sim \frac{1}{R^2}$$

Wynik tych prostych rozważań jest następujący. Wartość siły działającej na planetę w ruchu dookoła Słońca jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości planety od Słońca. Zatem gdy odległość ciała niebieskiego od Słońca rośnie dwukrotnie, to wartość siły z jaką Słońce przyciąga to ciało maleje czterokrotnie. Z trzeciej zasady dynamiki Newtona wynika, że jeśli Słońce przyciąga planetę, to planeta przyciąga Słońce. Siły wzajemnego oddziaływania mają te same wartości i przeciwne zwroty. Są też przyłożone do różnych ciał. Analizując ruch komety odkrytej przez Edmunda Halleya Izaak Newton doszedł do wniosku, że jego teoria grawitacji jest prawdziwa.

Sformułowane przez Izaaka Newtona prawo powszechnego ciążenia:

Siła wzajemnego przyciągania grawitacyjnego między dwoma ciałami jest wprost proporcjonalna do iloczynu mas tych ciał a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między tymi ciałami.

$$F_g \sim \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Jak widać (rys. 6.7.) wartości obu sił są jednakowe. Oznacza to, że Słońce przyciąga Ziemię pewną siłą grawitacji, ale również siłą o takiej samej wartości Ziemia przyciąga Słońce.

Aby wartość sił wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego między ciałami wyrazić w jednostkach siły w układzie jednostek SI musimy otrzymany stosunek iloczynu mas do kwadratu odległości między masami pomnożyć przez pewną stałą. Stała ta nosi nazwę stała grawitacji i jej wartość wynosi:

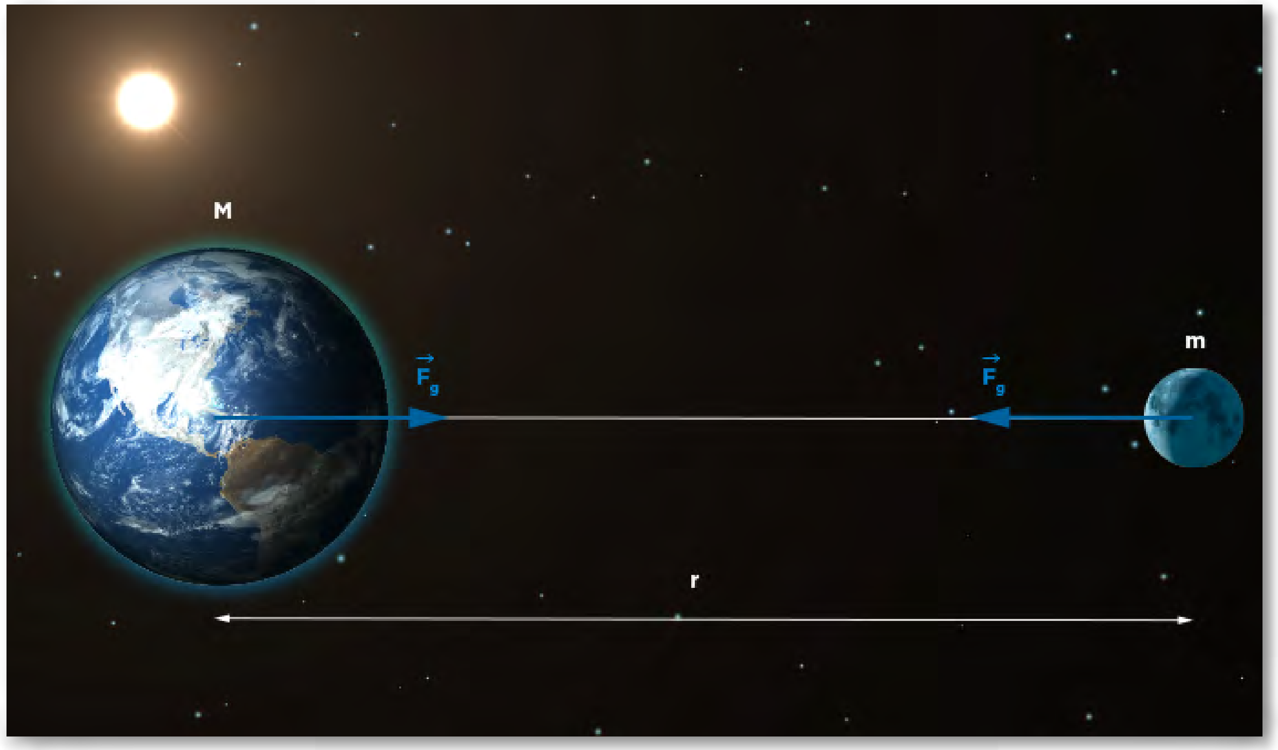
$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Wzór opisujący prawo powszechnego ciążenia przyjmuje wówczas postać:

$$F_g = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Zachęcamy do zapoznania się z symulacją sił grawitacji działających na dwa ciała.

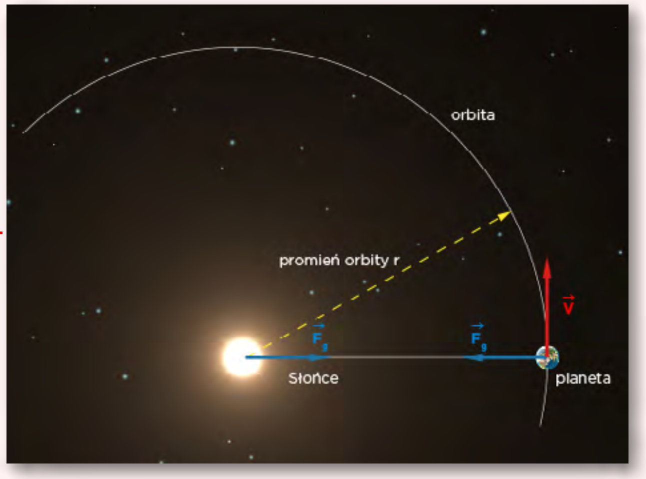
Siła oddziaływania grawitacyjnego gwiazdy i planety jest siłą dośrodkową powodującą ruch po okręgu. Jak wynika z praw Keplera planety krążą wokół Słońca po elipsach, ale uczniowie szkół ponadgimnazjalnych są w stanie matematycznie opisać ruch odbywający się po okręgu. Jednak z całkiem dobrym przybliżeniem można stwierdzić, że planety poruszają się wokół Słońca po okręgach. Znając okres obiegu planety wokół gwiazdy oraz promień orbity tej planety można wyznaczyć masę tej gwiazdy. Znając okres obiegu księżyca wokół planety oraz promień orbity tego księżyca można wyznaczyć masę tej planety.



Rys. 6.7. Siły wzajemnego przyciągania grawitacyjnego mają takie same wartości.

Przykład 1

Wiedząc, że Wenus obiega Słońce po orbicie o promieniu 108,2 mln km (zakładamy dla uproszczenie, że orbita ta jest okręgiem) w czasie 243 dób ziemskich, oblicz masę Słońca.



Rys. 6.8.

Rozwiązanie:

Traktując siłę grawitacji, z jaką Słońce przyciąga Wenus, jako siłę dośrodkową (rys. 6.8.) otrzymujemy:

$$F_g = F_d$$

$$G\frac{M_s \cdot M_W}{r^2} = \frac{M_W \cdot v^2}{r}$$

Skracając takie same wyrazy otrzymujemy: $G\frac{M_s}{r} = v^2$

Wiedząc o tym, że wartość prędkości liniowej w ruchu po okręgu wynosi: $v = \frac{2\pi r}{T}$

Podstawiając ten wzór do poprzedniego wyrażenia otrzymujemy: $G\frac{M_s}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$

Przekształcając to wyrażenie otrzymujemy:

$$M_S = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2\left(108,2 \cdot 10^9 m\right)^3}{6,67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{kg^2}\left(243 \cdot 24 \cdot 3600 s\right)^2} = 1,7 \cdot 10^{30} kg$$

Odpowiedź: Masa Słońca wynosi $1,7 \cdot 10^{30}\ kg$.

Ale oddziaływanie grawitacyjne występujące wyłącznie między dwoma ciałami to w kosmosie rzadkość. W następnym przykładzie przedstawiamy sposób postępowania prowadzący do wyznaczenia wypadkowej siły grawitacji pochodzącej od dwóch ciał, a działających na trzeci obiekt.

Przykład 2

Na prostej łączącej planetę z jej księżycem umieszczone jest ciało o masie 10t. Siły grawitacji działające na to ciało, a pochodzące od planety oraz księżyca się równoważą. Oblicz, w jakiej odległości od planety znajduje się to ciało. Masa planety jest 144 większa od masy jej księżyca. Odległość księżyca od planety wynosi 400 tys. km.

Rozwiązanie:

Naszkicujmy sytuację przedstawioną w zadaniu (rys. 6.9.). Na ciało o masie m działają dwie siły: siła $\vec{F}_{pc}$, z jaką planeta przyciąga to ciało oraz siła $\vec{F}_{kc}$, z jaką księżyc przyciąga to ciało. Dla czytelności rysunku pominęliśmy siły oddziaływania wzajemnego między planetą i księżycem. Zgodnie z warunkiem wynikającym z treści zadania wartości tych sił są takie same:

$$F_{pc} = F_{kc}$$

Otrzymujemy:

$$G\frac{M_p \cdot m}{x^2} = G\frac{M_k \cdot m}{(d-x)^2}$$

Po skróceniu tych samych wielkości występujących po obu stronach równania otrzymujemy:

$$\frac{M_p}{x^2} = \frac{M_k}{(d-x)^2}$$

Masa planety jest 144 razy większa od masy księżyca:

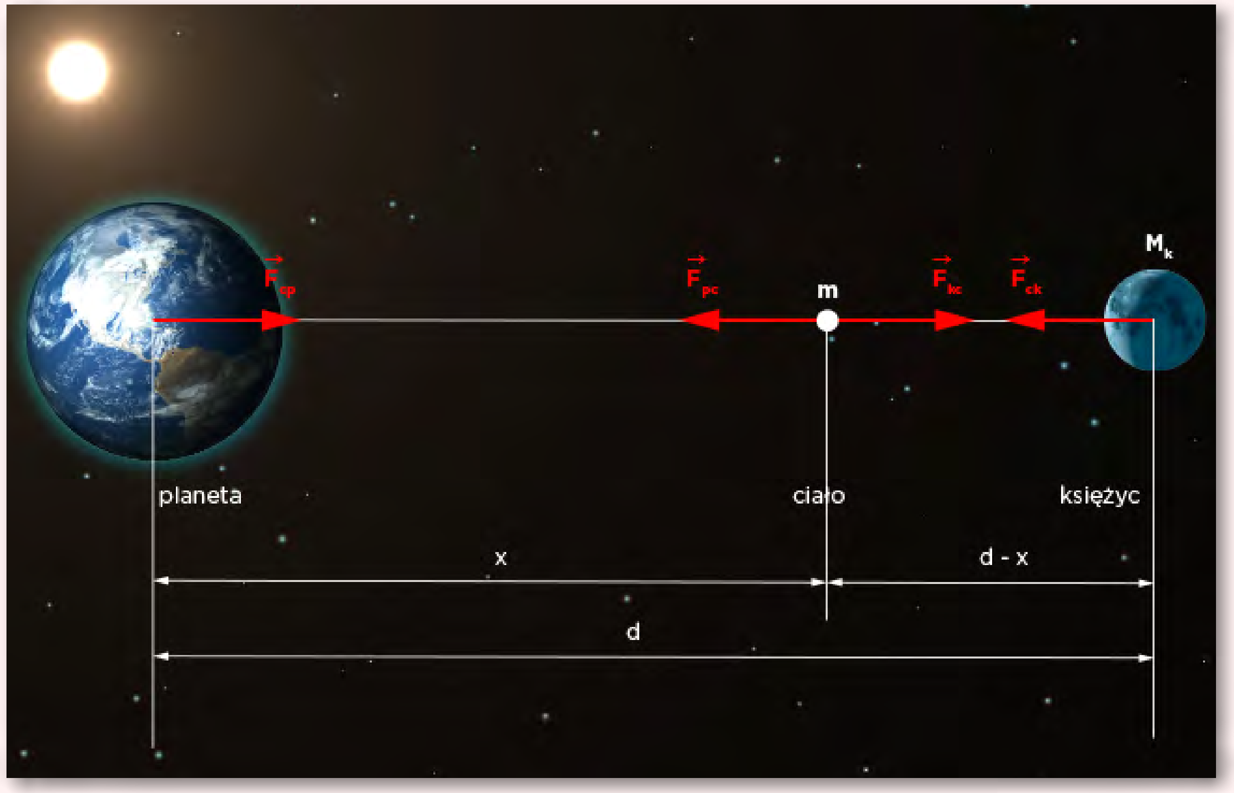
$$\frac{144 M_k}{x^2} = \frac{M_k}{(d-x)^2}$$

Wiedząc o tym, że odległość d-x nie może mieć wartości ujemnych, możemy obie strony równania spierwiastkować:

$$\frac{12}{x} = \frac{1}{d-x}$$

Po krótkich przekształceniach otrzymujemy:

$$x = \frac{12}{13}d = \frac{12}{13}400 tys.km = 369 tys.km$$



Rys. 6.9. Siły grawitacji działające na ciało o masie m umieszczonym między obiektami o dużo większych masach.

Odpowiedź: Ciało znajduje się 369 tys. km. od planety.

Patrz: Doświadczenie 1

Podsumowanie

Wiemy już, że prawa fizyki obowiązujące na Ziemi obowiązują również w kosmosie.
Wartość siły wzajemnego przyciągania grawitacyjnego między ciałami ma wartość:

$$F_g = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Temat 3
Pole grawitacyjne

Wstęp

Dowiecie się, że "pole" to pojęcie mające w fizyce nieco inne znaczenie niż w matematyce. Opiszemy w jaki sposób grawitacja jest przenoszona na odległość. Wyjaśnimy co pion murarski ma wspólnego z polem grawitacyjnym. Poszukamy końca pola grawitacyjnego Ziemi. Do opisu pola grawitacyjnego użyjemy dwóch jego modeli.

Księżyc krąży wokół Ziemi pod wpływem siły oddziaływania grawitacyjnego. Również pod wpływem oddziaływania grawitacyjnego jabłka spadają z drzew. Ale nie można dostrzec bezpośredniego połączenia między Ziemią a Księżycem, między jabłkiem a Ziemią. Mówimy, że oddziaływanie grawitacyjne między ciałami przenoszone jest za pomocą pola. Możemy sformułować następująca definicję pola grawitacyjnego:

Jeżeli na masę m o bardzo małych rozmiarach działa siła grawitacji o wartości wprost proporcjonalnej do wielkości tej masy, to mówimy, że masa ta znajduje się w polu grawitacyjnym.

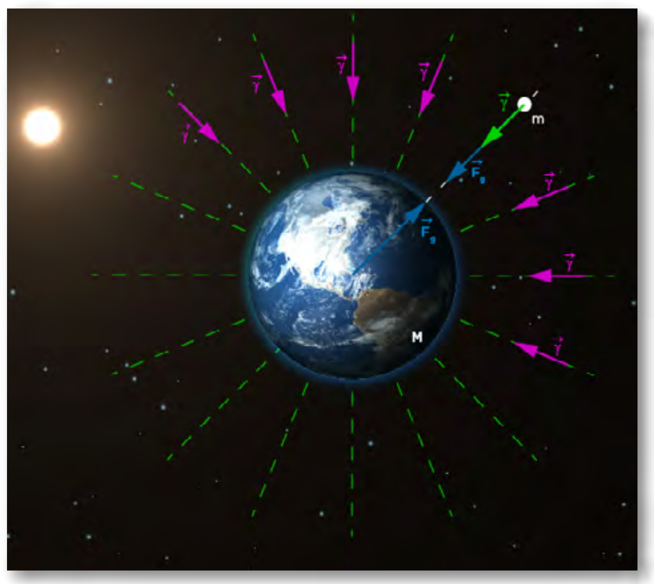
A co może być źródłem pola grawitacyjnego? Źródłem pola grawitacyjnego jest na przykład Słońce. To siła przyciągania grawitacyjnego, którego źródłem jest Słońce powoduje ruch planet, asteroidów, komet wokół naszej gwiazdy. Ale Ziemia, która znajduje się w polu grawitacyjnym Słońca powoduje, że Księżyc oraz sztuczne satelity krążą wokół niej pod wpływem siły przyciągania grawitacyjnego. Tak więc Ziemię też można uznać za źródło pola grawitacyjnego. A czy Księżyc wytwarza pole grawitacyjne? Na starych filmach z lądowania ludzi na Księżycu widać, że swobodnie puszczone ciała spadają na powierzchnię Księżyca. Musimy więc uznać, że Księżyc też jest źródłem pola grawitacyjnego. Gdzie jest granica zasięgu pola grawitacyjnego pochodzącego z danego źródła? Możemy uznać, że wpływ pola grawitacyjnego danego źródła kończy się tam, gdzie można zaniedbać jego działanie na inne obiekty. Na przykład satelita SOHO, służący do badania Słońca został umieszczony w punkcie, w którym równoważą się siły grawitacji pochodzące od Słońca i od Ziemi. Punkt ten znajduje się około 1,5 mln km od Ziemi. Nie można powiedzieć, że w tym punkcie zanika pole pochodzące od Ziemi. Ale kilka milionów kilometrów dalej w kierunku Słońca wpływ Ziemi na znajdujące się tam obiekty można już pominąć.

Do opisu pola grawitacyjnego używać będziemy wielkości fizycznej o nazwie natężenie pola grawitacyjnego.

Natężenie pola grawitacyjnego to wektor równy iloczynowi wektora siły grawitacji działającej na pewne ciało o masie m oraz masy tego ciała.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Wektor natężenia pola ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem siły grawitacji. Wartość natężenia pola grawitacyjnego obliczymy ze wzoru: $\gamma = \frac{F_g}{m}$**. Jednostką natężenia jest:** $\gamma = \frac{N}{kg}$ **lub** $\frac{m}{s^2}$**.**

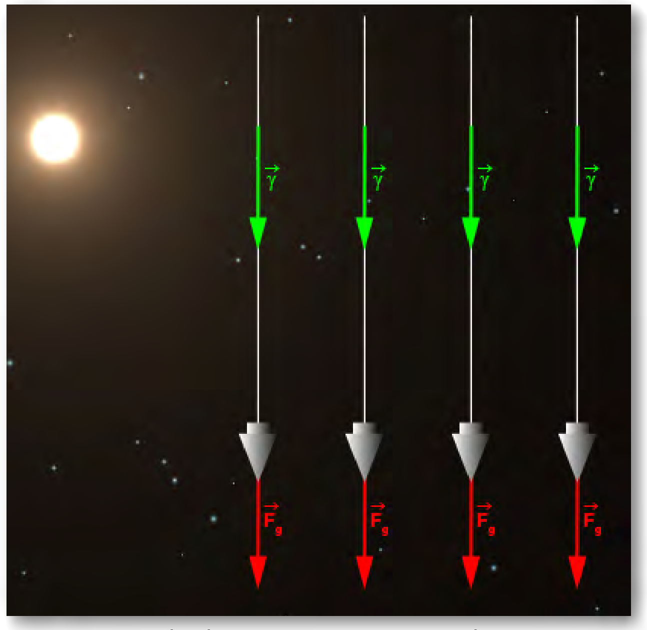


Rys. 6.10. Linie natężenia pola grawiracyjnego.

Prosta na której leży wektor natężenia pola grawitacyjnego (rys. 6.10) ma swój początek w źródle pola grawitacyjnego. Prostą tę będziemy nazywać linią pola grawitacyjnego. Linie pola grawitacyjnego będą graficzną reprezentacją pola grawitacyjnego. W przypadku, gdy pole grawitacyjne pochodzi od wielu źródeł linie te mogą mieć bardzo skomplikowane kształty. Na naszym poziomie opisu przyrody pozostaniemy przy pojedynczych źródłach co oznacza, że linie pola grawitacyjnego będą proste.

Rozważania na temat pola grawitacyjnego zaczniemy od jednorodnego pola grawitacyjnego. To najbardziej przybliżony model tego pola. Na rys. 6.11. widzimy swobodnie wiszące piony murarskie. Piony te wyznaczają lokalny kierunek działania siły grawitacji. Pomijamy przy tym wpływ ruchu wirowego Ziemi na zachowanie się pionów. Łatwo sobie wyobrazić, że gdybyśmy powiesili w tej sali więcej pionów murarskich, to kierunki przez nie wyznaczone byłyby do siebie równoległe. Odkryliśmy w ten sposób pierwszą ważną cechę pola jednorodnego:

W jednorodnym polu grawitacyjnym kierunki wektorów natężeń w różnych punktach pola są do siebie równoległe.



Rys. 6.11. Swobodnie wiszące piony murarskie wyznaczają linie jednorodnego pola grawitacyjnego.

Przykład 1

Pion murarski ma masę 350 g. Oblicz wartość siły grawitacji działającej na ten pion w pobliżu powierzchni Ziemi. Oblicz wartość natężenia pola grawitacyjnego w pobliżu powierzchni Ziemi.

Rozwiązanie:

Wartość siły grawitacji działającej na pion murarski:

$$F_g = G\frac{M \cdot m}{R_Z^2}$$

gdzie: $M = 6 \cdot 10^{24}\ kg$ – masa Ziemi, $R = 6{,}38 \cdot 10^6\ m$ – promień Ziemi

Podstawiając dane do wzoru otrzymamy:

$$F_g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\frac{6 \cdot 10^{24}kg \cdot 0{,}35kg}{\left(6{,}38 \cdot 10^6 m\right)^2} = 3{,}44N$$

Wartość natężenia pola grawitacyjnego:

$$\gamma = \frac{F_g}{m} = \frac{3{,}44N}{0{,}35kg} = 9{,}83\frac{N}{kg}$$

Odpowiedź: Wartość natężenia pola grawitacyjnego w pobliżu powierzchni Ziemi wynosi $9{,}83\frac{N}{kg}$.

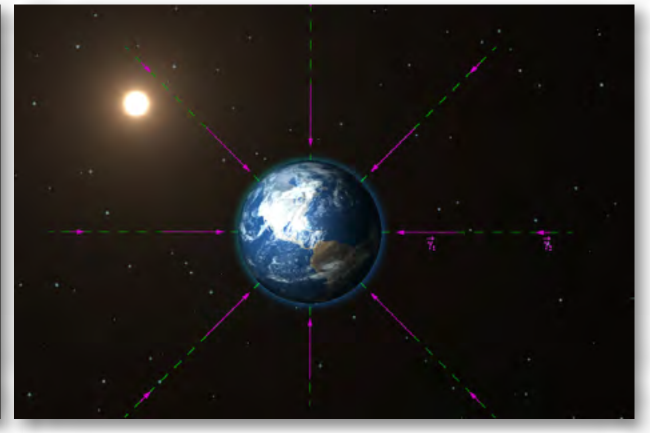
Otrzymana wartość natężenia pola grawitacyjnego jest bardzo zbliżona do powszechnie znanej wartości przyspieszenia ziemskiego $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$. Różnice wynikają z przyjętych przybliżeń. Analizując powyższy przykład łatwo wyobrazić sobie, że gdy nie zmienia się odległość od środka Ziemi punktu, w którym wyznaczamy wartość natężenia pola grawitacyjnego, nie zmienia się wartość tego natężenia. Wartość ta nie zmienia się również przy niewielkich zmianach odległości od środka Ziemi. Możemy przyjąć, że na boisku szkolnym oraz na dachu budynku szkolnego wartości natężenia pola grawitacyjnego będą identyczne. Zapamiętajmy druga cechę jednorodnego pola grawitacyjnego:

Wartość natężenia pola w każdym punkcie jednorodnego pola grawitacyjnego jest taka sama.

Patrz: Animacja ilustrująca jednorodne pole grawitacyjne

Możemy podsumować model jednorodnego pola grawitacyjnego. Jednorodne pole grawitacyjne to obszar, w którym możemy uznać, że linie pola są do siebie równoległe. W obszarze pola jednorodnego wartość natężenia pola grawitacyjnego jest w każdym punkcie taka sama. Możemy przyjąć, że na obszarze miasta, do wysokości kilku kilometrów nad powierzchnią Ziemi istnieje jednorodne pole grawitacyjne. Oczywiście każde miasto ma swoje „własne" jednorodne pole grawitacyjne. Kierunki wyznaczone przez piony zawieszone w centrum Poznania i centrum Krakowa nie są równoległe do siebie. Więc na większym obszarze stosowanie modelu jednorodnego pola grawitacyjnego jest niewłaściwe. Również do opisu ruchu satelitów wokół Ziemi musimy stosować inny model pola grawitacyjnego.

Rys. 6.12. Daleko od powierzchni Ziemi linie utworzone przez piony murarskie nie są równoległe.



Rys. 6.13. Linie natężenia centralnego pola grawitacyjnego.

Wyobraźmy sobie, że zawiesiliśmy piony murarskie daleko od siebie i w sporej odległości od Ziemi (rys. 6.12.). Na zawieszony ciężarek działa siła przyciągania grawitacyjnego pochodząca od Ziemi. Zgodnie z definicją kierunek i zwrot wektora natężenia pola grawitacyjnego są zgodne z kierunkiem i zwrotem działającej siły. Jak widać na rysunku 6.13. linie natężenia pola grawitacyjnego zbiegają się do źródła w postaci planety. Takie pole grawitacyjne nazywamy centralnym. Pierwsza ważna cecha **centralnego pola grawitacyjnego** jest następująca:

Linie centralnego pola grawitacyjnego zbiegają się do źródła tego pola.

Wyznaczmy teraz zależność wartości natężenia pola w zależności od odległości od źródła tego pola. Zgodnie z definicją wartość natężenia pola grawitacyjnego:

$$\gamma = \frac{F_g}{m}$$

Ale wartość siły grawitacji działającej na ciało o masie m:

$$F_g = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru na wartość natężenia pola:

$$\gamma = \frac{F_g}{m} = \frac{G\frac{M \cdot m}{r^2}}{m}$$

Tak więc wartość natężenia pola grawitacyjnego w odległości r od źródła:

$$\gamma = G\frac{M}{r^2}$$

Ze wzoru tego wynika druga ważna cecha pola centralnego:

Wartość natężenia pola w centralnym polu grawitacyjnym maleje z kwadratem odległości od źródła.

Patrz: Animacja ilustrująca centralne pole grawitacyjne

Przykład 2

W odległości 5 tys. km od środka pewnej planety wartość natężenia pola grawitacyjnego wynosi $6\frac{N}{kg}$. Oblicz, w jakiej odległości od środka tej planety wartość natężenia pola zmaleje czterokrotnie w porównaniu z wartością początkową. Zakładamy, że promień planety jest mniejszy niż 5 tys. km.

Rozwiązanie:

Wartość natężenia pola w odległości początkowej: $\gamma_1 = G\frac{M}{r_1^2}$

Wartość natężenia pola w odległości końcowej: $\gamma_2 = G\frac{M}{r_2^2}$

Z treści zadania wiadomo, że: $\gamma_2 = \frac{1}{4}\gamma_1$

Do ostatniego równania wstawiamy wyrażenia na wartości natężeń pól:

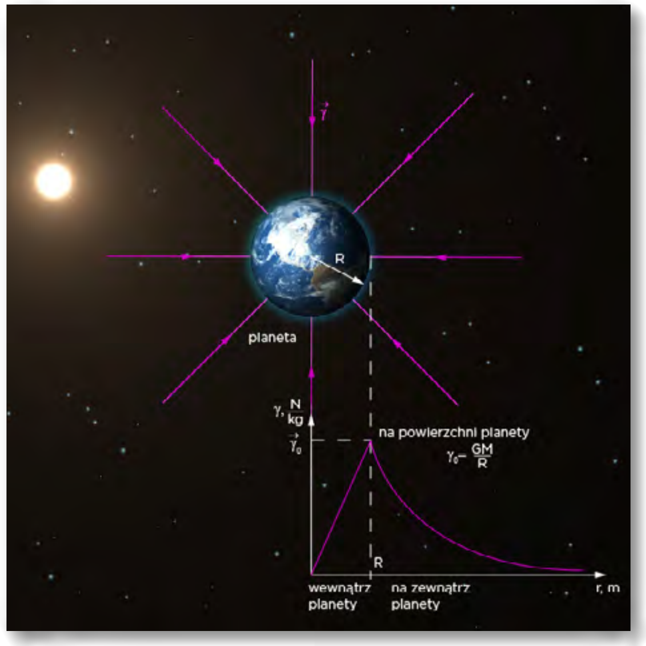
$$G\frac{M}{r_2^2} = \frac{1}{4}G\frac{M}{r_1^2}$$

Redukując wyrazy podobne otrzymujemy: $\frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{r_1^2}$

Tak więc ostatecznie: $r_2 = \sqrt{4}r_1 = 2r_1 = 10 tys.km$

Odpowiedź: Wartość natężenia pola zmaleje czterokrotnie w odległości dwukrotnie większej niż początkowa, czyli 10 tys. km.

Wykres zależności natężenia pola od odległości od źródła przedstawia rysunek 6.14. Zakładamy, że źródłem centralnego pola jest planeta, w której masa jest rozłożona równomiernie. Jak można zauważyć wartość natężenia pola wewnątrz planety maleje liniowo do zera. W samym centrum planety siły przyciągania grawitacyjnego pochodzące od warstw leżących powyżej się równoważą, więc wypadkowa wartość siły grawitacji w tym punkcie jest równa zero. Zeruje się więc wartość natężenia pola. Im dalej od środka planety, tym wartość natężenia pola jest większa. Największa wartość natężenia pola w centralnym polu grawitacyjnym jest na powierzchni planety. Największa wartość natężenia pola w centralnym polu grawitacyjnym jest na powierzchni planety. Na przykład wartość natężenia pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi wynosi $9,8\frac{N}{kg}$, wartość natężenia pola grawitacyjnego na powierzchni Księżyca wynosi $1,6\frac{N}{kg}$. W tabeli przedstawiono wartości natężeń pól grawitacyjnych na powierzchni planet Układu Słonecznego. W przypadku planet gazowych „powierzchnia planety" oznacza punkt znajdujący się w odległości równej jej promieniowi od środka planety. Wartość natężenia pola grawitacyjnego na powierzchni Słońca wynosi około $274\frac{N}{kg}$. Siła grawitacji działająca na ciała na powierzchni planety jest równa iloczynowi masy ciała oraz wartości natężenia pola grawitacyjnego. Na przykład człowiek o masie 60 kg, stojący na powierzchni ziemi, jest przyciągany przez nią siłą o wartości około 588 N. Gdyby umieścić ciało o takiej masie na „powierzchni" Słońca, byłoby ono przyciągane siłą o wartości 16440 N. Ziemia przyciąga siłą o takiej wartości ciało o masie prawie 1,7 tony znajdujące się na jej powierzchni. Przypominamy, że w naszych rozważaniach nie uwzględniamy ruchu wirowego planety.



Rys. 6.14. Wykres zależności natężenia pola grawitacyjnego od odległości od źródła.

Planeta	Wartość natężenia pola [N/kg]	Stosunek natężenia pola planety oraz Ziemi
Merkury	4,39	0,45
Wenus	8,87	0,91
Ziemia	9,8	1
Mars	3,7	0,38
Jowisz	24,8	2,53
Saturn	10,4	1,06
Uran	8,87	0,91
Neptun	11,1	1,13

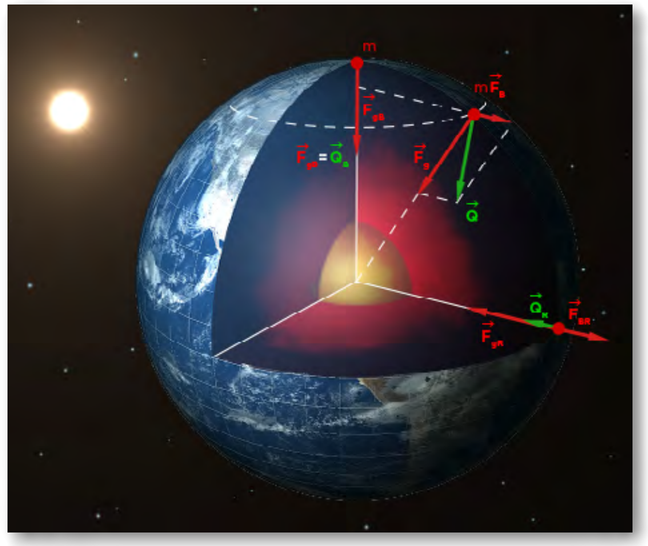
Tabela 2. Wartości natężeń pól grawitacyjnych na poszczególnych planetach.

Do tej pory posługiwaliście się pojęciem ciężaru ciała, gdy rozważaliście wartość siły, z jaką Ziemia działa na ciało o masie m. Wartość ciężaru ciała można obliczyć ze wzoru:

$$Q = m \cdot g$$

gdzie: m – masa ciała, g – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Pomiędzy siłą grawitacji, z jaką Ziemia przyciąga ciało o masie m znajdujące się na jej powierzchni a ciężarem ciała jest subtelna różnica. Ziemia obraca się wokół swojej osi, możemy więc ją potraktować jako nieinercjalny układ odniesienia (rys. 6.15). Jak pamiętacie w nieinercjalnych układach odniesienia działają siły bezwładności skierowane przeciwnie do przyspieszenia układu odniesienia. Punkt znajdujący się na powierzchni Ziemi porusza się po okręgu z przyspieszeniem dośrodkowym. Na ciało o masie m znajdujące się w tym punkcie działa siła grawitacji $\vec{F}_g$ oraz siła odśrodkowa bezwładności $\vec{F}_b$. Wypadkowa tych sił jest ciężarem ciała $\vec{Q}$. Z rysunku wynika, że wartość ciężaru ciała zależy od położenia geograficznego. Dlatego wartość przyspieszenia ziemskiego zmienia się w zależności od szerokości geograficznej. Ciężar ciała ma największą wartość na biegunach (wówczas wartość siły bezwładności jest równa zero) a najmniejszą wartość na równiku. Zmiany wartości ciężaru w zależności od położenia geograficznego są też związane z biegunowym spłaszczeniem Ziemi (zmienia się odległość od środka Ziemi). Pomiary wartości przyspieszenia ziemskiego wskazują, że zmienia ono swoją wartość od $g = 9,83\frac{m}{s^2}$ na równiku do $g = 9,78\frac{m}{s^2}$ na biegunach. Jak widać nie są to duże zmiany wartości, więc nie popełniamy dużego błędu gdy siłę ciężaru ciała utożsamiamy z siłą przyciągania grawitacyjnego.


Rys. 6.15. Zmiany ciężaru ciała w pobliżu powierzchni Ziemi.

Podsumowanie:

Jednorodne pole grawitacyjne jest przybliżeniem pola centralnego. Wartość natężenia jednorodnego pola grawitacyjnego nie zmienia się w całym obszarze tego pola. Wartość natężenia pola w centralnym polu grawitacyjnym maleje wraz z kwadratem odległości od tego pola:

$$\gamma = G\frac{M}{r^2}$$

Ciężar ciała znajdującego się na powierzchni Ziemi jest wypadkową działających na ciało sił grawitacji oraz odśrodkowej bezwładności związanej z nieinercjalnością Ziemi.

Temat 4

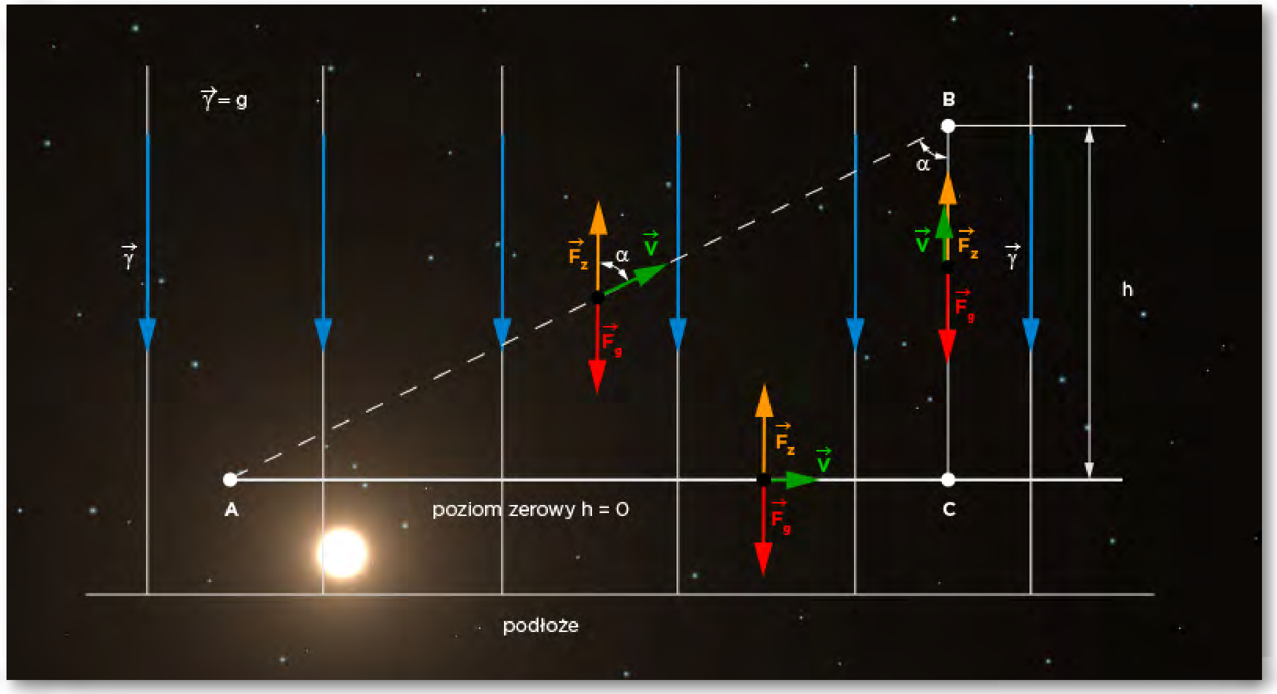
Energia potencjalna grawitacji

Wstęp

Temat ten poświęcony jest wyjaśnieniu problemu zachowawczości pola grawitacyjnego oraz energii potencjalnej grawitacji. Wyjaśnimy czy są różnice w wykonaniu pracy podczas podnoszenia przedmiotów po różnych drogach.

Podczas wycieczki po górach na szczyt wspina się dwóch turystów. Który z nich wykona większą pracę podczas wspinaczki – ten który szedł dłuższą, ale łagodniejszą trasą. Czy ten, który wybrał drogę krótszą, ale bardziej stromą? Postaramy się w tym temacie wyjaśnić fizyczne podstawy tego zagadnienia.

Prom kosmiczny Discovery tuż po odcumowaniu od Międzynarodowej Stacji Kosmicznej porusza się z prędkością o wartości ponad 7 km/s względem Ziemi. Aby wrócić na Ziemię załoga promu włącza silniki hamujące. Po pewnym czasie prom kosmiczny wchodzi w górne warstwy ziemskiej atmosfery z prędkością o wartości ponad 20 km/s. Postaramy się wyjaśnić fizyczne podstawy mechanizmów, które powodują takie zjawiska.



Rys. 6.16. Przesunięcie ciała ruchem jednostajnym w jednolitym polu grawitacyjnym.

Na początku zajmiemy się pracą wykonaną podczas przemieszczania ruchem jednostajnym ciała o masie m w jednorodnym polu grawitacyjnym. Będziemy przemieszczać ciało od punktu A do B dwiema drogami: po linii prostej od A do B oraz po liniach prostych od punktu A do C i od punktu C do B (rys. 6.16). Przyjmujemy, że wartość natężenia pola grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ jest równa wartości przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$. Aby ruch ciała był jednostajny siła grawitacji $\vec{F}_g$ musi być równoważona przez pewną siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$. Skoro wartość siły grawitacji wynosi $F_g = m \cdot g$, to również wartość siły zewnętrznej wynosi $F_Z = m \cdot g$. Zgodnie z definicją pracy, wartość pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$ przy przesuwaniu ciała o masie m od punktu A do punktu B obliczymy ze wzoru:

$$W_{A\to B} = F_Z \cdot AB \cdot \cos\alpha,$$

gdzie: $\cos\alpha = \dfrac{BC}{AB}$

Więc praca siły zewnętrznej $\vec{F}_Z$ wynosi:

$$W_{A\to B} = F_Z \cdot AB \cdot \frac{BC}{AB}$$

Ale odcinek AB jest równy wysokości h ponad pewnym poziomem, wybranym przez nas jako zerowy. Natomiast wartość siły zewnętrznej wynosi $F_Z = m \cdot g$. Więc ostatecznie wartość pracy wykonanej na odcinku AB opisywana jest wzorem:

$$W_{A\to B} = m \cdot g \cdot h$$

Praca wykonana nad ciałem podczas przemieszczania od punktu A poprzez punkt C do punktu B jest równa sumie pracy wykonanej przy przesuwaniu od punktu A do C oraz pracy wykonanej od punktu C do B:

$$W_{A\to C\to B} = W_{A\to C} + W_{C\to B}$$

Wartość pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$ na odcinku AC:

$$W_{A\to C} = F_Z \cdot AC \cdot \cos 90^0$$

Ale $\cos 90^0 = 0$, więc:

$W_{A\to C} = 0$

Wartość pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$ na odcinku CB:

$$W_{C\to B} = F_Z \cdot CB \cdot \cos 0^0$$

Ale $\cos 0^0 = 1$ oraz $F_Z = m \cdot g$, a odcinek AB jest równy wysokości h, więc:

$$W_{C\to B} = m \cdot g \cdot h$$

Ostatecznie praca wykonana na odcinku $A \to C \to B$ jest równa:

$$W_{A\to C\to B} = m \cdot g \cdot h$$

Okazuje się, że wartość pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną nad przesunięciem ciała o masie m ruchem jednostajnym w jednorodnym polu grawitacyjnym nie zależy od toru, po którym wykonano przesunięcie. Zależy ona od zmiany wysokości ponad poziomem, który uznamy za zerowy. Pole grawitacyjne jest **polem zachowawczym,** bo praca wykonana nad przesunięciem ciała nie zależy od toru, po którym zostało ono wykonane.

Jak już wiecie ciało wyniesione na pewną wysokość posiada energię potencjalną grawitacji. Ściśle rzecz biorąc jest to energia potencjalna układu Ziemia – ciało, oddziałującego ze sobą grawitacyjnie. Zmiana energii potencjalnej grawitacji jest równa pracy wykonanej nad zmianą położenia ciała. Spróbujmy wyjaśnić zachowawczość pola grawitacyjnego bez użycia wzorów matematycznych.

Wyobraźmy sobie, że na drugim piętrze budynku podczas jego budowy stoją dwa identyczne wiadra. Jedno z nich zostało podniesione z poziomu gruntu za pomocą żurawia budowlanego, a drugie zostało przyniesione po drabinie (rys. 6.17). Nagle wiadra zostały strącone i oba zaczynają spadać w tym samym momencie. Które z nich będzie miało tuż przed uderzeniem w ziemię większą energię kinetyczną – to wniesione po drabinie, czy to podniesione za pomocą żurawia? Tak postawione pytanie niewątpliwie wzbudzi zdziwienie: **Czy będzie jakaś różnica?** Zgodnie z omówioną już zasadą zachowania energii mechanicznej wartość energii kinetycznej ciała tuż przez uderzeniem w ziemię (w przypadku spadania bez oporów ruchu) jest równa wartości energii potencjalnej ciała w chwili początkowej. Wartość energii potencjalnej ciała na wysokości h ponad poziomem uznawanym za zerowy obliczamy za pomocą wzoru: $E_P = m \cdot g \cdot h$. Wynika z niego, że wartość energii potencjalnej grawitacji ciała na wysokości h ponad poziomem uznawanym za zerowy, nie zależy od toru, po którym ciało zostało na wysokość tę podniesione. Wiemy, że aby ciało mogło zostać umieszczone na wysokości h (czyli, aby wzrosła wartość jego energii potencjalnej), musi zostać wykonana nad nim praca. Gdy możemy zaniedbać opory ruchu, przyrost energii potencjalnej ciała jest równy pracy wykonanej podczas podnoszenia tego ciała. Skoro przyrost energii potencjalnej nie zależy od toru, po którym podnoszone jest ciało, to również praca zużyta na podnoszenie ciała nie zależy od tego toru. Można stwierdzić, że w każdym polu zachowawczym ciało oddziaływujące ze źródłem może gromadzić energię potencjalną.

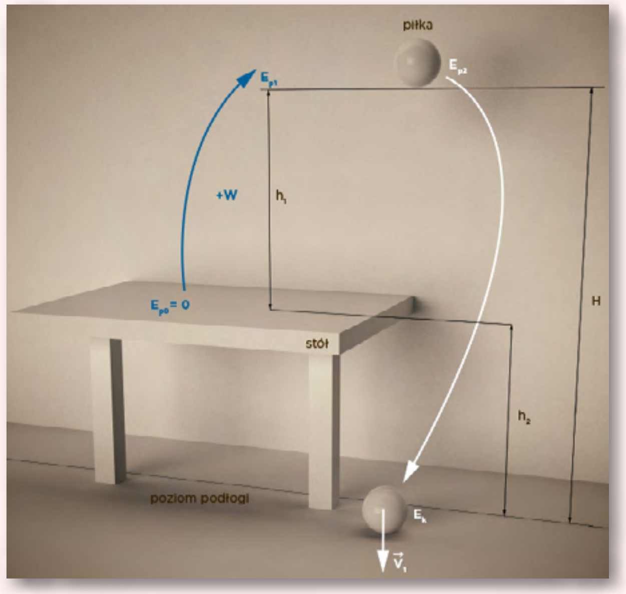
Rys. 6.17. Przyrost energii potencjalnej wiader nie zależy od toru, po którym zostały one wniesione na górę.

Przykład 1

Na wysokości 1m ponad stołem wartość energii potencjalnej kulki wynosi 10J (uznając poziom stołu za poziom zerowy). Oblicz wartość energii kinetycznej tej kulki tuż przed upadkiem na podłogę, która znajduje się 0,8m poniżej poziomu stołu. Podczas lotu należy zaniedbać wpływ oporu ruchu na lot kulki. Można przyjąć, że wartość przyspieszenia ziemskiego wynosi $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Rozwiązanie:

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono schematycznie na rysunku 6.18. Wyobraźmy sobie, że na poziomie stołu początkowa energia potencjalna kulki była równa zero. Po wykonaniu pewnej pracy W energia potencjalna tej kulki na wysokości $h_1 = 1m$ ma wartość $E_{p1} = 10J$. Możemy wyznaczyć masę tej kulki:



Rys. 6.18. Względna wartość energii potencjalnej piłki.

$$E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow m = \frac{E_{p1}}{g \cdot h_1}$$

$$m = \frac{10J}{10m/s^2 \cdot 1m} = 1kg$$

Traktując poziom podłogi jako poziom zerowy można obliczyć wartość energii potencjalnej E_{p2}:

$$E_{p2} = m \cdot g \cdot H = m \cdot g\left(h_1 + h_2\right)$$

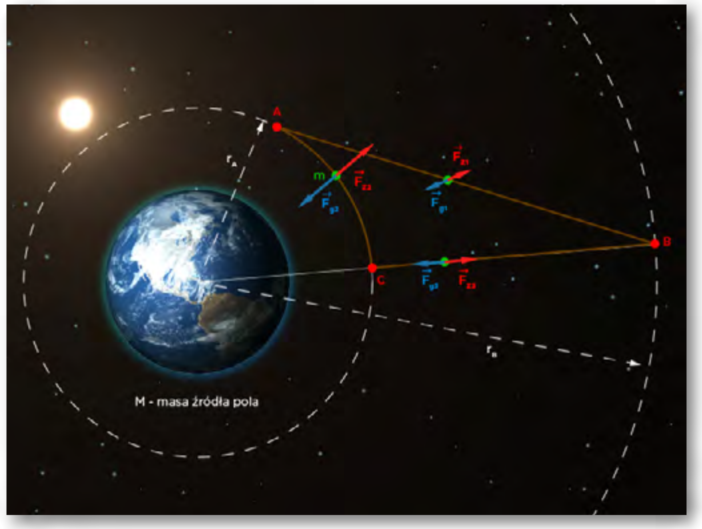
$$E_{p2} = 1kg \cdot 10m/s^2\left(1m + 0{,}8m\right) = 18J$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, gdy zaniedbujemy opory ruchu, wartość energii kinetycznej kulki tuż przed uderzeniem w podłoże jest równa wartości energii potencjalnej na wysokości H.

Odpowiedź: Wartość energii kinetycznej tej kulki tuż przed upadkiem na podłogę wynosi 18J.

A co z turystami opisanymi we wstępie do tego tematu? Okazuje się, że gdyby jedyną pracą wykonaną przez turystów była praca związana z przyrostem energii potencjalnej związanej z przemieszczeniem turysty od podnóża góry na szczyt, to wartości pracy nie zależą od wybranej drogi. Większą pracę wykona ten, którego masa (wraz z ekwipunkiem) będzie większa. To bardzo duże uproszczenie, bo podczas marszu przy każdym kroku podnosimy swój środek masy. W ostatecznym rachunku wartość wykonanej pracy będzie zależała od ilości kroków oraz wysokości na jaką podnosimy się przy każdym kroku.

Patrz: Symulacja energii potencjalnej w jednorodnym polu grawitacyjnym



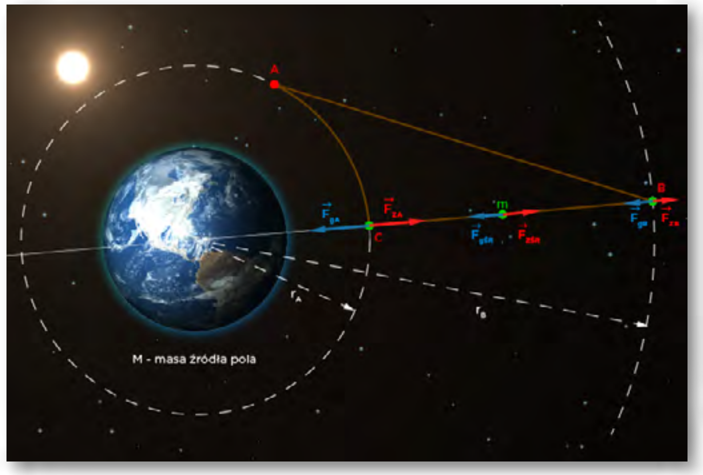
Rys. 6.19. Praca wykonana podczas przemieszczania siał o masie m w centralnym polu grawitacyjnym.

Jednorodne pole grawitacyjne jest pewnym przybliżeniem pola centralnego. Ale natura obu pól jest jednakowa. Centralne pole grawitacyjne jest również polem zachowawczym, czyli również w polu centralnym praca wykonana podczas przemieszczania ciała o masie m ruchem jednostajnym nie zależy od toru tego przesunięcia.

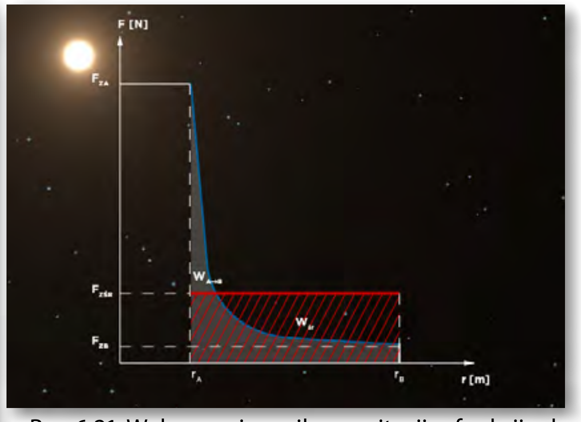
Wyznaczymy wyrażenie opisujące wartość pracy wykonanej przez zewnętrzną siłę, równoważącą siłę grawitacji podczas przesuwania ciała ruchem jednostajnym w centralnym polu grawitacyjnym. Wartość pracy wykonanej podczas przesunięcia ciała o masie m od punktu A do punktu B (rys. 1.19) bezpośrednio po linii prostej jest równa pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną podczas przemieszczania tego ciała po torze $A \to C \to B$. Wybieramy ten ostatni tor, bo łatwiej będzie wyznaczyć na nim wyrażenie na wartość pracy. Musimy pamiętać, że wartość siły grawitacji w centralnym polu grawitacyjnym nie jest stała, lecz maleje one wraz z kwadratem odległości od źródła. Aby ruch ciała był jednostajny w każdym punkcie toru siła grawitacji $\vec{F}_g$ musi być równoważona przez pewną siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$. Więc wartość siły $\vec{F}_Z$ jest równa wartości siły $\vec{F}_g$:

$$F_Z = F_g = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Czyli wartość siły przesuwającej ciało maleje wraz ze wzrostem odległości od źródła.



Rys. 6.20. Obliczanie pracy przy przesunięciu ciała o masie m od punktu C do punku B.



Rys. 6.21. Wykres zmiany siły grawitacji w funkcji odległości od źródła. Na wykresach zaznaczono wartości pracy wykonanej przez siłę równoważącą siłę grawitacji.

Wyznaczymy teraz wartość pracy wykonanej na odcinku $A \rightarrow C$. Jak wynika z rysunku 6.20 kierunek działania siły $\vec{F}_Z$ jest w każdym punkcie toru prostopadły do przesunięcia. Więc zgodnie z definicją pracy:

$$W_{A \to C} = F_Z \cdot \Delta s \cdot \cos 90^0 = 0$$

Gdy nie zmienia się odległość od źródła, to wartość pracy wykonanej przez siłę równoważącą siłę grawitacji jest równa zero.

Wyznaczymy teraz wartość pracy wykonanej na odcinku (rys. 6.21.). Kłopot polega na tym, że w poznanym wyrażeniu na wartość pracy występuje siła, której wartość jest stała. A wartość siły zewnętrznej wykonującej pracę na odcinku $C \rightarrow B$ maleje. Można do wyznaczenia tej pracy wykorzystać rachunek całkowy, ale jest on niedostępny dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Jak już wiecie w takich przypadkach pomocny jest wykres zależności siły od drogi, na której ta siła działała. Praca jest w tym przypadku równa wartości pola pod wykresem siły. Można również znaleźć pewną średnią siłę $\vec{F}_{ZSR}$, która na drodze $\Delta r = r_B - r_A$ wykona taką samą pracę jak siła zewnętrzna $\vec{F}_Z$. Wartość średniej siły obliczymy ze wzoru:

$$F_{ZSR} = \sqrt{F_{ZA} \cdot F_{ZB}} = \sqrt{G\frac{M \cdot m}{(r_A)^2} \cdot G\frac{M \cdot m}{(r_B)^2}} = G\frac{M \cdot m}{r_A \cdot r_B}$$

Pracę wykonaną przez średnią siłę na odcinku $C \rightarrow B$ zapisujemy równaniem:

$$W_{C \to B} = F_{ZSR} \cdot \Delta r \cdot \cos 0^0 = G\frac{M \cdot m}{r_A \cdot r_B} \cdot \Delta r \cdot 1$$

Podstawiając za $\Delta r = r_B - r_A$ otrzymujemy:

$$W_{C \to B} = G\frac{M \cdot m}{r_A \cdot r_B} \cdot (r_B - r_A)$$

A ostatecznie:

$$W_{C \to B} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Pracą wykonaną podczas przesunięcia ciała o masie m od punktu A do punktu B przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$ równoważącą siłę grawitacji $\vec{F}_g$ zapisujemy wyrażeniem:

$$W_{A \to B} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Przykład:

Oblicz wartość pracy, jaką należałoby wykonać podczas przemieszczania ruchem jednostajnym satelity o masie 10 ton z powierzchni Ziemi na orbitę, o wysokości 200 km nad jej powierzchnię.

Rozwiązanie:

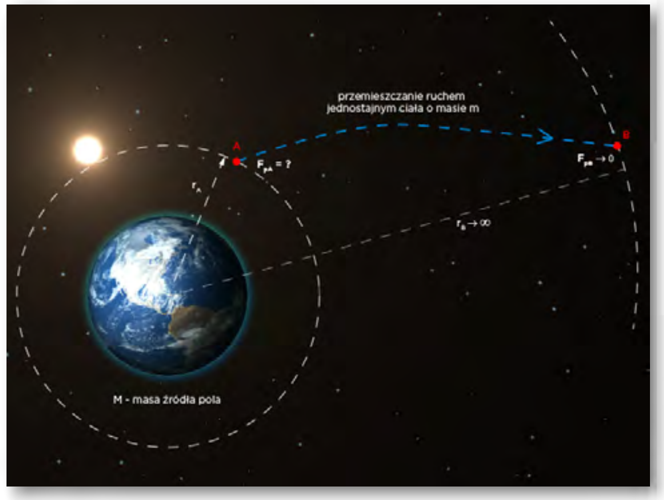
Odległość początkowa satelity od środka Ziemi wynosi $r_A = 6400km$, odległość końcowa wynosi $r_A = 6600km$. Masa Ziemi wynosi $M = 6 \cdot 10^{24} kg$

Wstawiamy dane do wzoru na pracę i otrzymujemy:

$$W_{A \to B} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} kg \cdot 10 \cdot 10^3 kg \left(\frac{1}{6,4 \cdot 10^6 m} - \frac{1}{6,6 \cdot 10^6 m}\right) = 1,89 \cdot 10^{10} J$$

Odpowiada to ciepłu uzyskanemu ze spalenia około 650 litrów benzyny.

Odpowiedź: Aby przenieść satelitę ruchem jednostajnym z powierzchni Ziemi na orbitę potrzeba wykonać pracę o wartości $1,89 \cdot 10^{10} J$.



Rys. 6.22. Wyznaczenie wartości energii potencjalnej w centralnym polu grawitacyjnym.

Praca wykonana w powyższym przykładzie została zużyta tylko na pokonanie sił przyciągania grawitacyjnego. W rzeczywistości podczas wynoszenia satelitów potrzeba wykonać pracę na pokonanie sił oporów ruchu oraz zmianę energii kinetycznej satelity.

Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, więc wykonanie pracy przeciwko siłom pola grawitacyjnego powoduje wzrost energii potencjalnej układu na podnoszone ciało – źródło pola grawitacyjnego (lub inaczej energii potencjalnej ciała w polu grawitacyjnym). Wartość tej pracy jest równa zmianie wartości energii potencjalnej. Wyznaczymy wyrażenie na wartość energii potencjalnej ciała o masie m umieszczonej w odległości r od źródła tego pola (rys. 6.22.). Nieskończenie daleko od źródła pola grawitacyjnego (w naszym przypadku w punkcie B) możemy przyjąć, że wartość siły grawitacji działającej na ciało o masie m jest równa zero. Możemy więc również przyjąć, że w punkcie tym wartość energii potencjalnej jest równa zero. Zmiana wartości energii potencjalnej $\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA}$ jest równa pracy wykonanej podczas przemieszczania ciała od punktu A do punktu B:

$$W_{A \to B} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \Delta E_p = E_{pB} - E_{pA}$$

Wiedząc o tym, że $E_{pB} = 0$ oraz $\frac{1}{r_B} \to 0$ otrzymujemy:

$$G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - 0\right) = 0 - E_{pA}$$

Energię potencjalną ciała o masie m w odległości r_A od źródła pola grawitacyjnego o masie M wyznaczymy z wyrażenia:

$$E_{pA} = -G\frac{M \cdot m}{r_A}$$

Pozostaje wyjaśnić dlaczego wartość energii potencjalnej jest ujemna. Im dalej od źródła znajduje się ciało tym wartość energii potencjalnej jest większa. Nieskończenie daleko od źródła wartość tej energii jest największa, ale równocześnie równa zero. Z lekcji matematyki wiadomo, że zero jest większe od każdej liczby ujemnej.

Przykład 2

Oblicz wartość energii potencjalnej człowieka o masie 60 kg znajdującego się na powierzchni Ziemi. W rozwiązaniu przyjmij model pola centralnego.

Rozwiązanie:

Wartość energii potencjalnej ciała o masie m w odległości r od źródła o masie M obliczamy ze wzoru:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Podstawiając dane do wzoru otrzymujemy:

$$E_p = -6,67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\frac{6 \cdot 10^{24}\,kg \cdot 60kg}{6,4 \cdot 10^6\,m} = -3,75 \cdot 10^9\,J$$

Odpowiedź: Człowiek o masie 60 kg spoczywający na powierzchni Ziemi ma energię potencjalną o wartości $-3,75 \cdot 10^9\,J$.

Wynik ten oznacza, że aby wyrwać człowieka z wpływu pola grawitacyjnego Ziemi należy wykonań nad nim pracę o wartości $-3,75 \cdot 10^9\,J$. Oczywiście zaniedbując wpływ wszelkich innych pól grawitacyjnych.

Patrz: Symulacja energii potencjalnej w centralnym polu grawitacyjnym

A co to wszystko ma wspólnego z promem Discovery, o którym mówiliśmy we wstępie? Włączenie na chwilę silników hamujących powoduje zmianę kierunku prędkości promu. Prom zaczyna lecieć w kierunku powierzchni Ziemi. Maleje wartość jego energii potencjalnej. A zgodnie z zasadą zachowania energii gdy maleje wartość energii potencjalnej to rośnie wartość energii kinetycznej. Prędkość promu rośnie. Silniki manewrowe dokonują korekty ustawienia promu względem kierunku lotu. Prom ustawia się w taki sposób, aby siły oporu atmosfery wyhamowały go. Ale to już historia. Prom Discovery, oraz pozostałe amerykańskie wahadłowce, już nigdy nie polecą w kosmos.

Podsumowanie:

Wartość pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną nad przesunięciem ciała o masie m ruchem jednostajnym w jednorodnym polu grawitacyjnym nie zależy od toru, po którym wykonano przesunięcie. Jednorodne pole grawitacyjne jest polem zachowawczym.

Centralne pole grawitacyjne jest polem zachowawczym.

Pracę wykonaną podczas przesunięcia ciała o masie m od punktu A do punktu B przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_Z$ równoważącą siłę grawitacji $\vec{F}_g$ zapisujemy wyrażeniem:

$$W_{A \to B} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

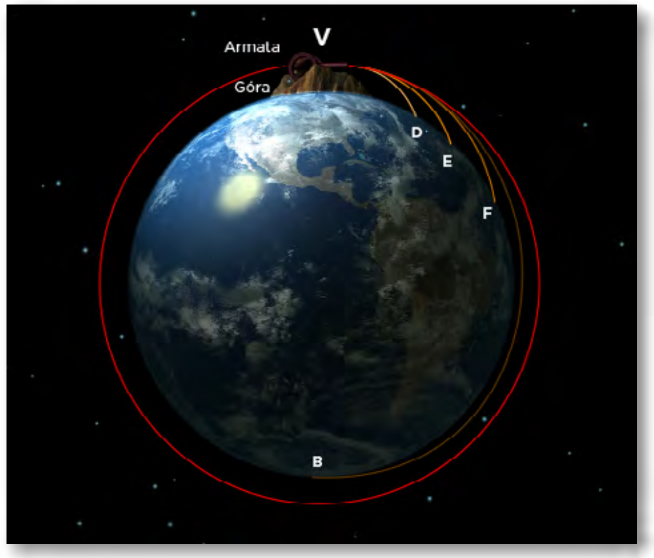
Energię potencjalną ciała o masie m w odległości r od źródła pola grawitacyjnego o masie M wyznaczymy z wyrażenia:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Temat 5
Prędkości kosmiczne

Wstęp

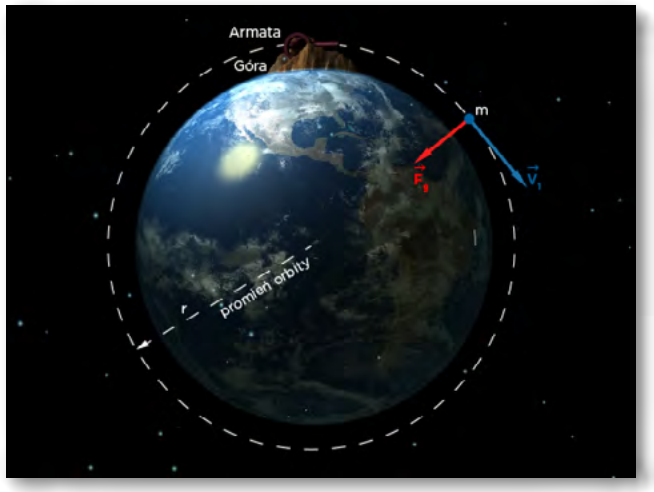
Wyjaśnimy, jakie warunki muszą być spełnione, aby można było okrążyć Ziemię poruszając się pojazdem bez napędu.



Rys. 6.23. Góra Newtona.

Historia lotów kosmicznych sięga w zasadzie czasów Izaaka Newtona. W roku 1728 Newton opublikował książkę, w której opisał eksperyment myślowy z ruchem satelitów wokół Ziemi. Otóż wyobraźmy sobie, że na Ziemi jest bardzo wysoka góra, na której ustawiamy armatę (rys. 6.23.). Z armaty tej wystrzelono pocisk z prędkością początkową skierowaną poziomo (to znaczy prostopadle do kierunku promienia Ziemi). Wartość prędkości początkowej była taka, że pocisk doleciał do punktu D. Gdy zwiększono wartość prędkości początkowej, pocisk doleciał do punktu E. Po dalszym zwiększeniu wartości prędkości początkowej pocisk dolatuje do punktu F, itd. Oczywiście cały czas zakładamy, że ruch pocisku odbywa się bez oporów powietrza. Możemy wyobrazić sobie, że istnieje taka wartość prędkości, z którą należy wystrzelić pocisk z armaty, aby okrążył on Ziemię po okręgu i uderzył w armatę. Wyjaśnijmy dlaczego jest to możliwe. Podczas lotu pocisku działa na niego siła przyciągania grawitacyjnego (rys. 6.24.). Siła grawitacji jest w tym przypadku siłą dośrodkową. Przyrównajmy wzory na wartości sił grawitacji oraz dośrodkowej:

$$F_g = F_d$$



Rys. 6.24. Pierwsza prędkość kosmiczna dla orbity okołoziemskiej.

Pamiętamy, że wartość siły grawitacji działającej na pocisk opisujemy wzorem: $F_g = G\frac{M \cdot m_p}{r^2}$,

zaś wartość siły dośrodkowej opisujemy wzorem: $F_d = \frac{m_p v^2}{r}$. Gdzie r – promień okręgu, po którym porusza się pocisk, m_p – masa pocisku.

Przyrównując do siebie wyrażenia na wartości sił otrzymujemy:

$$G\frac{M \cdot m_p}{r^2} = \frac{m_p v^2}{r}$$

Dzieląc obie strony równania przez m_p oraz mnożąc przez r otrzymamy:

$$G\frac{M}{r} = v^2$$

Stąd wartość prędkości, z jaką porusza się pocisk w ruchu po okręgu wokół Ziemi opisuje równanie:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Wartość prędkości, z jaką porusza się satelita wokół planety, po okręgu o jak najmniejszym promieniu nazywamy pierwszą prędkością kosmiczną. Wartość tej prędkości:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

gdzie: M – masa planety, R – promień planety

Najczęściej planety posiadają atmosferę, więc promień najmniejszej orbity musi być nieco większy od promienia planety.

Przykład 1

Oblicz wartość pierwszej prędkości kosmicznej dla Ziemi. Porównaj otrzymany wynik z wartością prędkości, z jaką porusza się Międzynarodowa Stacja Kosmiczna.

Rozwiązanie:

Masa Ziemi wynosi $M = 5,98 \cdot 10^{24}\,kg$, promień Ziemi wynosi: $R = 6,38 \cdot 10^{6}\,m$

Wstawiając te dane do wzoru na wartość I prędkości kosmicznej otrzymamy:

$$v_I = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}\,kg}{6,38 \cdot 10^{6}\,m}} = 7,91 \cdot 10^{3}\,\frac{m}{s} = 7,91\,\frac{km}{s}$$

Stacja kosmiczna porusza się po orbicie o promieniu $r = 6,38 \cdot 10^{6}\,m + 0,34 \cdot 10^{6}\,m = 6,72 \cdot 10^{6}\,m$

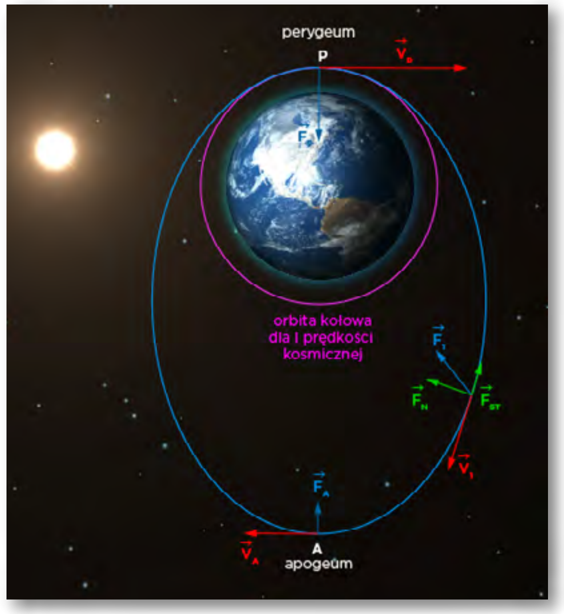
Wartość I prędkości kosmicznej dla stacji kosmicznej:

$$v_{IST} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}\,kg}{6,72 \cdot 10^{6}\,m}} = 7,70 \cdot 10^{3}\,\frac{m}{s} = 7,7\,\frac{km}{s}$$

Odpowiedź: Wartość I prędkości kosmicznej dla Ziemi wynosi 7,91 km/s (teoretycznie, bo w pobliżu powierzchni Ziemi oprócz siły grawitacji na satelitę działa siła oporu powietrza). Praktyczna wartość I prędkości kosmicznej dla Ziemi wynosi 7,7 km/s.

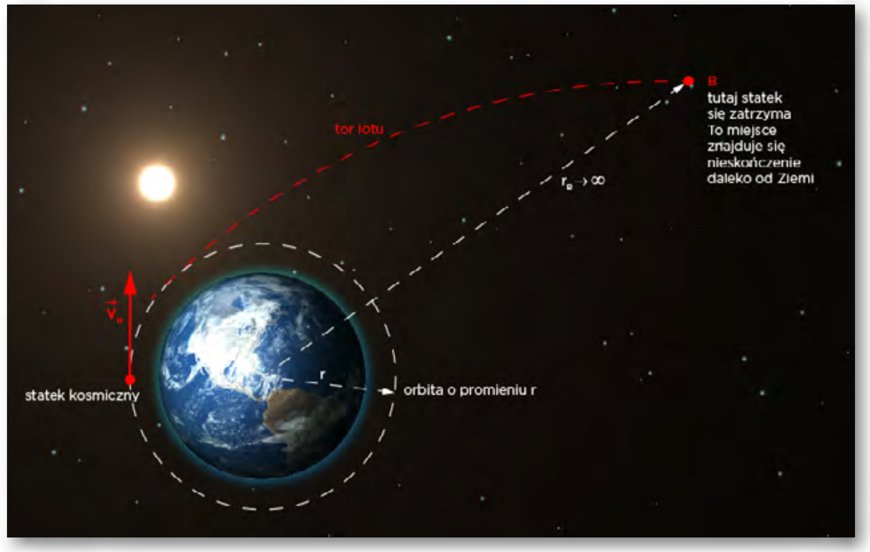
Wynik powyższego przykładu świadczy o tym, że im jest większy promień orbity satelity, tym wartość prędkości z jaką się on porusza jest mniejsza.

Jaki będzie tor ruchu satelity, którego wartość prędkości będzie większa od I prędkości kosmicznej? W punkcie P orbity kołowej pewnego satelity nadajemy mu prędkość większą od wartości I prędkości kosmicznej (rys. 6.25.). Satelita zacznie poruszać się po orbicie eliptycznej. Im odległość satelity od Ziemi jest większa, tym wartość jego prędkości jest mniejsza. Spróbujmy wyjaśnić dlaczego tak się dzieje. Podczas ruchu po elipsie na satelitę działa siła przyciągania grawitacyjnego pochodząca od Ziemi. Ale kierunek działania tej siły nie jest prostopadły do kierunku prędkości satelity. Wyjątek stanowią punkty znajdujące się najbliżej Ziemi – perygeum, oraz najdalej Ziemi – apogeum. W punktach tych kierunki sił grawitacji są prostopadłe do kierunków prędkości. Składowa siły grawitacji działająca wzdłuż wektora



Rys. 6.25. Eliptyczna orbita wokół Ziemi.

prędkości podczas oddalania się satelity przeciwdziała ruchowi. Powoduje to zmniejszanie się wartości prędkości satelity. Gdy satelita zbliża się do Ziemi, to składowa siły grawitacji powoduje wzrost wartości jego prędkości. Ale wartość siły grawitacji maleje wraz ze wzrostem odległości satelity od Ziemi. Łatwo można sobie wyobrazić, że gdy wartość prędkości, z jaką wyrzucimy satelitę z punktu P będzie zbyt duża, to siła grawitacji nie będzie w stanie spowodować powrotu satelity do punktu P.



Rys. 6.26. Druga prędkość kosmiczna.

Najmniejsza wartość prędkości, z jaką należy wystrzelić ciało z pola grawitacyjnego danej planety aby ciało oddaliło się bezpowrotnie nazywamy drugą prędkością kosmiczną.

Na rysunku 6.26. przedstawiono sposób rozumowania prowadzący do znalezienia wyrażenia na wartość drugiej prędkości kosmicznej. Wokół Ziemi po orbicie o promieniu r krąży statek kosmiczny. W pewnym momencie wystrzeliwuje go się z drugą prędkością kosmiczną. Energia statku w momencie wystrzelenia jest sumą energii kinetycznej oraz potencjalnej:

$$E_{pocz} = \frac{1}{2} m v_{II}^2 - G\frac{Mm}{r}$$

gdzie: m – masa statku, M – masa Ziemi, r – odległość początkowa statku od Ziemi

Po dotarciu do punktu odległego nieskończenie daleko od Ziemi (przy założeniu braku innych źródeł pól grawitacyjnych) statek kosmiczny zatrzymuje się. Zgodnie z definicją drugiej prędkości kosmicznej statek oddala się do nieskończoności. Energia kinetyczna nieskończenie daleko od Ziemi jest więc równa zero. Jak już wiecie wartość energii potencjalnej nieskończenie daleko od źródła też jest równa zero. Zgodnie z zasadą zachowania energii wartość energii końcowej jest równa wartości energii początkowej, otrzymujemy więc:

$$\frac{1}{2} m v_{II}^2 - G\frac{Mm}{r} = 0$$

Przekształcając powyższy wzór dowiadujemy się, że wartość II prędkości kosmicznej można obliczyć ze wzoru:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Drugą prędkość kosmiczną nazywamy czasem prędkością ucieczki z danego ciała niebieskiego.

Podobnie jak to było w przypadku I prędkości kosmicznej teoretyczną wartość II prędkości kosmicznej dla danej planety obliczymy wstawiając do wzoru promień planety. W praktyce nadanie II prędkości kosmicznej odbywa się w pewnej odległości od powierzchni Ziemi. Powyższy wzór nie uwzględnia wpływu innych ciał niebieskich na ruch statków kosmicznych. Minimalna wartość prędkości pojazdu kosmicznego wystrzelonego w kierunku Księżyca może być więc nieco mniejsza niż wyznaczona teoretycznie ze wzoru na wartość II prędkości kosmicznej.

Patrz: Animacja ilustrująca prędkości kosmiczne

Przykład 2

Porównaj teoretyczne wartości II prędkości kosmicznej dla Ziemi i Księżyca.

Rozwiązanie:

II prędkość kosmiczna dla Ziemi:

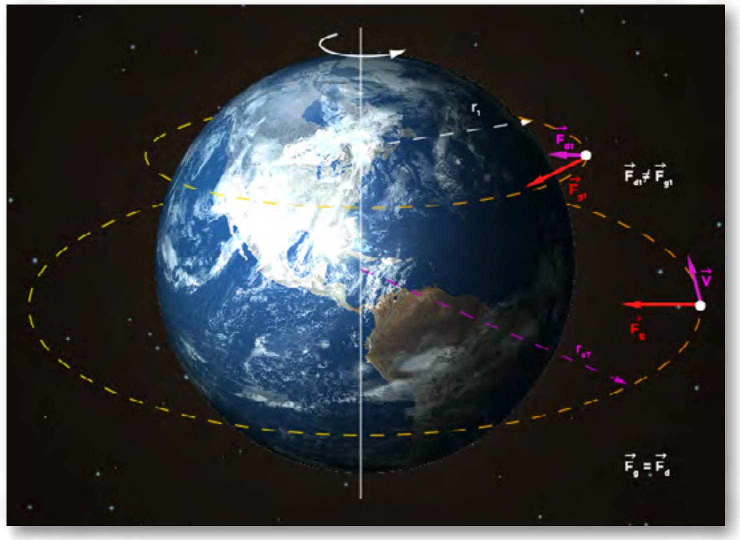
$$v_{IIZ} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,kg}{6{,}38\cdot 10^6\,m}} = 11{,}2\,\frac{km}{s}$$

II prędkość kosmiczna dla Księżyca:

$$v_{IIK} = \sqrt{\frac{2GM_K}{R_K}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\,kg}{1{,}74\cdot 10^6\,m}} = 2{,}37\,\frac{km}{s}$$

Odpowiedź: Prędkość ucieczki z Ziemi jest około 4,7 razy większa niż prędkość ucieczki z powierzchni Księżyca.

Zapewne ciekawi was, czy można tak rozpędzić ciało, żeby wyleciało ono poza Układ Słoneczny, czyli poza wpływ pola grawitacyjnego Słońca. Najmniejsza prędkość jaką należy przy tym nadać niektórzy nazywają III prędkością kosmiczną. Chociaż tak naprawdę jest to prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego, więc jest to II prędkość kosmiczna. Oczywiście wartość tej prędkości zależy od odległości od Słońca, w której zostanie obiekt wystrzelony. Prędkość ucieczki z Układu Słonecznego sondy wystrzelonej z orbity Ziemi wynosi ponad 42 km/s. A prędkość ucieczki z orbity Jowisza tylko 19 km/s. Już trzy sondy kosmiczne opuściły nasz Układ Słoneczny (pierwszą była sonda Pioneer 10), ale ich prędkości są mniejsze niż 42 km/s.



Rys. 6.27. Orbita stacjonarna.

Oprócz pojazdów kosmicznych służących do badania przestrzeni kosmicznych wokół Ziemi krąży wiele satelitów, które służą do obserwacji Ziemi (w tym satelity szpiegowskie i meteorologiczne) oraz pełnią rolę użytkową. W tym na przykład satelity systemu GPS służącego do precyzyjnego wyznaczania pozycji na powierzchni Ziemi (tzw. nawigacja satelitarna). Przyjemność oglądania programów telewizji satelitarnej zapewniają satelity telekomunikacyjne, krążące wokół Ziemi po orbicie stacjonarnej. **Satelita stacjonarny, to satelita, który znajduje się ciągle nad tym samym punktem na powierzchni Ziemi**. Orbita stacjonarna leży wyłącznie w płaszczyźnie równika ziemskiego (rys. 6.27.). Wszystkie satelity krążą wokół Ziemi pod wpływem jej pola grawitacyjnego. Siła przyciągania grawitacyjnego jest siłą powodującą ruch satelitów wokół Ziemi (żaden pojazd kosmiczny nie jest wyposażony w ciągle działający napęd). Ziemia potrzebuje 24 godzin na wykonanie jednego obrotu wokół swojej osi. Aby satelita mógł być nieruchomy względem punktu na powierzchni Ziemi, na wykonanie jednego pełnego obiegu wokół naszej planety również potrzebuje 24 godzin. Tylko w przypadku umieszczenia satelity w płaszczyźnie równika, w odpowiedniej odległości, jest to możliwe.

Przykład 3

Oblicz wartość promienia orbity stacjonarnej satelity krążącego wokół Ziemi.

Rozwiązanie:

Ruch satelity odbywa się pod wpływem siły grawitacji, która w tym przypadku jest siłą dośrodkową:

$$G\frac{M\cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Dzieląc obie strony równania przez masę satelity oraz mnożąc przez promień orbity otrzymujemy:

$$G\frac{M}{r} = v^2$$

Wiemy, że wartość prędkości liniowej w ruchu po okręgu: $v = \frac{2\pi r}{T}$

Wstawiając to do poprzedniego równania otrzymujemy:

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

Z tego równania wyznaczamy promień orbity stacjonarnej:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Wyrażenie to jest prawdziwe dla każdej planety.

Podstawiając do wzoru dane dotyczące Ziemi otrzymujemy:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,kg\cdot\left(24\cdot 3600s^2\right)}{4\pi^2}} = 42{,}25\,tys.km.$$

Odpowiedź: Promień orbity stacjonarnej wokół Ziemi wynosi prawie 42,3 tys. km.

Satelity stacjonarne przekazujące programy telewizyjne do Polski również krążą nad równikiem. Równik znajduje się na południe od Polski, więc anteny telewizji satelitarnej skierowane są w przybliżeniu na południe.

Podsumowanie:

Aby okrążać planetę bez napędu po okręgu należy rozpędzić się do I prędkości kosmicznej. Wartość tej prędkości obliczamy ze wzoru:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Aby wyrwać się z pola grawitacyjnego ciała niebieskiego należy rozpędzić się do II prędkości kosmicznej. Wartość tej prędkości obliczamy ze wzoru:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Człowiek - najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego