

# INFORMATYKA

## – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA

PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI Z ELEMENTAMI  
PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Moduł interdyscyplinarny: informatyka – matematyka

### Ciągi liczbowe i ich własności

*Bronisław Pabich, Agnieszka Rogalska*

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA  
WYŻSZA SZKOŁA  
INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tytuł: ***Ciągi liczbowe i ich własności***

Autor: ***Bronisław Pabich, Agnieszka Rogalska***

Redaktor merytoryczny: ***prof. dr hab. Maciej M. Sysło***

Materiał dydaktyczny opracowany w ramach projektu edukacyjnego  
***Informatyka – mój sposób na poznanie i opisanie świata.***  
***Program nauczania informatyki z elementami przedmiotów***  
***matematyczno-przyrodniczych***

[www.info-plus.wwsi.edu.pl](http://www.info-plus.wwsi.edu.pl)

[infoplus@wwsi.edu.pl](mailto:infoplus@wwsi.edu.pl)

Wydawca: Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki  
ul. Lewartowskiego 17, 00-169 Warszawa  
[www.wwsi.edu.pl](http://www.wwsi.edu.pl)  
[rektorat@wwsi.edu.pl](mailto:rektorat@wwsi.edu.pl)

Projekt graficzny: *Marzena Kamasa*

Warszawa 2013

Copyright © Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki 2013  
Publikacja nie jest przeznaczona do sprzedaży

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA  
WYŻSZA SZKOŁA  
INFORMATYKI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





# SCENARIUSZ TEMATYCZNY

## CIĄGI LICZBOWE I ICH WŁASNOŚCI

→ MATEMATYKA – POZIOM PODSTAWOWY

**OPRACOWANY W RAMACH PROJEKTU:**  
**INFORMATYKA – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA.**  
**PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI**  
**Z ELEMENTAMI PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH**

### **Streszczenie**

Moduł ten dotyczy nauczania o ciągach przy użyciu programów komputerowych Excel i GeoGebra. Umożliwiają one wizualizację ciągu, sposobów jego opisywania i prezentacji graficznej. Dzięki interaktywnym apletom GeoGebry, uczeń może samodzielnie poznawać nietypowe ciągi i rozwiązywać nietypowe zadania, uczące logicznego myślenia i dedukowania, co jest pewną formą uzupełnienia jego szkolnej edukacji.

Scenariusz zawiera opis merytoryczny i dydaktyczny kilku lekcji poświęconych ciągom poznawanym przez uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

### **Czas realizacji**

10 x 45 minut + test

### **Tematy lekcji:**

1. Definicja ciągu liczbowego
2. Sposoby określania ciągów liczbowych
3. Sposoby prezentacji ciągów liczbowych
4. Monotoniczność ciągów liczbowych
5. Prezentacja ciągów w arkuszu kalkulacyjnym Excel
6. Wykresy ciągów w arkuszu Excel
7. Badanie ciągów w programie GeoGebra
8. Ciąg arytmetyczny
9. Ciąg geometryczny
10. Ciągi i średnie statystyczne



## LEKCJA NR 1

### TEMAT: DEFINICJA CIĄGU LICZBOWEGO

#### Streszczenie

Na początku lekcji pojawia się definicja ciągu jako funkcji określonej na zbiorze liczb naturalnych i wyjaśnianie tego pojęcia na przykładach. W celu przybliżenia uczniom tego terminu posługujemy się grafem Venna funkcji liczbowej (jest on wprowadzony w postaci zbioru dziedziny i zbioru przeciwdziedziny). Są tu również przykłady wyznaczania dowolnego wyrazu ciągu liczbowego.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- III. Modelowanie matematyczne.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

- 5.1 Pojęcie ciągu liczbowego, wyraz ciągu i zapis wzoru ciągu, umiejętność wyznaczania dowolnego wyrazu ciągu liczbowego, określonego wzorem ogólnym.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- poznawanie nowego pojęcia matematyki na bazie znanych pojęć z algebry,
- przygotowanie uczniów do samodzielnego studiowania matematyki,
- wizualizacja ciągów przy użyciu programu GeoGebra,
- wizualizacja pojęć abstrakcyjnych, np. wyjaśnienie symboliki wprowadzonej dla dowolnego  $k$ -tego wyrazu ciągu i jego zapis.

#### Cel

W nawiązaniu do pojęcia funkcji uczniowie poznają przez analogię definicje związane z ciągiem.

#### Słowa kluczowe

dziedzina ciągu, wyraz ciągu, wzór ciągu



## Co przygotować/ Przebieg zajęć

- Prezentacja „Ciągi liczbowe” (slajdy 4-13), wzbogacona przykładami ilustrującymi definicję ciągu i odczytywanie wyrazów ciągu według zadanego wzoru. W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki lekcji.
- Prezentacja odwołuje się do plików:  
Gify animowane: 01A.gif, 01B.gif, 02A.gif, 02B.gif  
Pliki GeoGebry: 01A.ggb, 01B.ggb, 02A.ggb, 02B.ggb



### **Uwaga:**

Aby uczeń mógł pracować z plikami GeoGebry, powinien pobrać ten program z Internetu, np. ze strony: <http://www.geogebra.org/cms/pl/download/> i zainstalować go na swoim komputerze

## LEKCJA NR 2

### TEMAT: SPOSOBY OKREŚLANIA CIĄGÓW LICZBOWYCH

#### Streszczenie

Poza popularną metodą stosowania wzorów funkcyjnych ciągu uczniowie poznają inne, nietypowe sposoby określania ciągów, w tym:

- opis słowny ciągu liczbowego,
- wzór algebraiczny,
- wzór rekurencyjny.

Ukazana jest możliwość uzyskania ze wzoru rekurencyjnego wzoru algebraicznego.

Przy okazji opisu słownego pojawia się ciąg, znany w matematyce jako ciąg Collatza, którego własność jest do dziś nie zbadana i nie udowodniona.

#### Podstawa programowa

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

#### Podstawa programowa

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- II. Wyszukiwanie, gromadzenie i przetwarzanie informacji z różnych źródeł; opracowywanie za pomocą komputera rysunków, tekstów, danych liczbowych, motywów, animacji, prezentacji multimedialnych.
- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

- 5.1 Wykres ciągu w układzie współrzędnych jako wykres funkcji.
- 4.3 Tworzenie grafiki w programie komputerowym

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- Poznawanie:
  - ciągów, których nie da się opisać wzorem algebraicznym,
  - metod przechodzenia ze wzoru rekurencyjnego do wzoru algebraicznego,
  - przykładu ciągu, którego nie da się opisać wzorem rekurencyjnym.
- Zainteresowanie uczniów matematyką poprzez pokazanie problemu nierozstrzygniętego przez matematyków, za rozwiązanie którego wyznaczona jest wysoka nagroda.

#### Słowa kluczowe

wykres ciągu, graficzna prezentacja ciągu



## Co przygotować/ Przebieg zajęć

- Prezentacja „Ciągi liczbowe” (slajdy 14-17), wzbogacona przykładami ilustrującymi różne sposoby uzyskiwania ciągu i odczytywanie tymi sposobami wartości wyrazów ciągu. W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki lekcji.
- Prezentacja odwołuje się do plików:  
Gify animowane: 06A.gif, 06B.gif.



## LEKCJA NR 3

### TEMAT: METODY PREZENTACJI CIĄGÓW LICZBOWYCH

#### Streszczenie

Prezentacja graficzna ciągów liczbowych jako bardziej przejrzysta niż prezentacja algebraiczna, nawiązuje do tradycyjnych wykresów funkcji. Uczeń kojarzy dziedzinę ciągu z wykresem punktowym, określonym dla argumentów będących zbiorem liczb naturalnych. Dostrzega również własności ciągów, których nie widział dotychczas, posługując się wzorami ciągów. Jest to przygotowanie do badania monotoniczności.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom rozszerzony)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- III. Modelowanie matematyczne.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

- 5.1 Prezentowanie ciągów liczbowych przez wypisywanie ich wyrazów, wykresy graficzne i wykres na osi liczbowej jako punkty, których odcięte są wartościami ciągu.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- nabycie umiejętności tworzenia wykresów funkcji,
- poznanie prezentacji ciągu na osi liczbowej, która nie ma odpowiednika w kreśleniu wykresów funkcji,
- zwrócenie uwagi na odczytywanie własności ciągu na podstawie jego wykresu.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

Wykres ciągu liczbowego, wyrazu ciągu liczbowego, własności ciągów.

#### Słowa kluczowe

wykres ciągu w układzie współrzędnych, wykres ciągu na osi liczbowej





## Co przygotować/ Przebieg zajęć

- Prezentacja „Ciągi liczbowe” (slajdy 28-35), wzbogacona przykładami ilustrującymi prezentowanie ciągu i odczytywanie wyrazów ciągu na osi liczbowej OY lub jako odcięte punktów na osi OX. W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki lekcji.
- Prezentacja odwołuje się do plików:  
Gify animowane: 02C.gif, 02D.gif.



## LEKCJA NR 4

### TEMAT: MONOTONICZNOŚĆ CIĄGÓW LICZBOWYCH

#### Streszczenie

Prezentacja graficzna ciągów liczbowych pozwala dostrzec monotoniczność ciągu i określenie warunku wzrastania i malenia ciągu liczbowego. Uczeń poznaje po wykresie, czy dany ciąg jest monotoniczny. Jest również przykład sprawdzania rachunkowego, czy ciąg jest rosnący.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom rozszerzony)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Modelowanie matematyczne.
- IV. Użycie i tworzenie strategii.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

5.2 Wzrastanie i malenie ciągu

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- odkrycie wzrastania i malenia ciągu na podstawie jego wykresu,
- odnalezienie warunku algebraicznego na monotoniczność ciągu,
- poznanie metody rachunkowej badania monotoniczności ciągu.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

Wzrastanie, malenie, monotoniczności ciągu liczbowego, ciąg stały.

#### Słowa kluczowe

wzrastanie, malenie, monotoniczności ciągu i ciąg stały

#### Co przygotować/ Przebieg zajęć

- Prezentacja „Ciągi liczbowe” slajdy 36-46, wzbogacona przykładami ilustrującymi definicję ciągu i odczytywanie wyrazów ciągu według zadanego wzoru. W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki lekcji.

- Prezentacja odwołuje się do plików:

Gify animowane: 01C.gif, 04A.gif, 04C.gif, 03A.gif, 03B.gif, 05A.gif, 05B.gif

Filmy: 1 – monot 01.avi, 2 – monot 02.avi





## LEKCJA NR 5

### TEMAT: PREZENTACJA CIĄGÓW LICZBOWYCH W ARKUSZU EXCEL

#### Streszczenie

Niniejszy temat lekcji daje możliwość wykorzystania wiedzy z informatyki i przypomnienia sobie, w jaki sposób umieszcza się ciągi liczbowe w arkuszu Excel. Wykorzystując arkusz, mogą odkryć ważną własność ciągu Fibonacciego, mianowicie zauważają, że stosunek dowolnego wyrazu ciągu Fibonacciego do wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego zbliża się do pewnej stałej liczby, której przybliżenie wzrasta w miarę wzrastania liczby  $n$ . Jest tu okazja, by wspomnieć o złotej liczbie, która nie tylko w matematyce, ale w wielu innych dziedzinach życia odgrywa ważną rolę. Ponadto uczniowie odkrywają, że własność ciągu Fibonacciego można uogólnić na wszystkie inne ciągi, których wyrazy tworzymy jako sumę dwóch poprzednich wyrazów ciągu (za wyjątkiem pierwszego i drugiego).

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom rozszerzony)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- V. Rozumowanie i argumentacja.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- II. Wyszukiwanie, gromadzenie i przetwarzanie informacji z różnych źródeł; opracowywanie za pomocą komputera rysunków, tekstów, danych liczbowych, motywów, animacji, prezentacji multimedialnych.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

#### 5.2 Ciągi liczbowe i ich granice

Przykład ciągu Fibonacciego jako ciągu o interesujących własnościach geometrycznych.

##### *Cele kształcenia – poznawcze:*

- powiązanie znajomości narzędzia GeoGebra z problemami matematyki,
- przypomnienie arkusza Excel, by go zastosować do badania ciągów,
- odkrycie własności ciągu Fibonacciego,
- poznanie funkcji Excela Zaokr.do.całk, lub funkcji MOD,
- ukazanie, jak można uogólnić ciąg Fibonacciego na dowolny ciąg do niego podobny i sprawdzenie, czy nadal spełnia te same własności,
- nawiązanie intuicyjne do pojęcia granicy.

#### Słowa kluczowe

wykres ciągu w arkuszu Excel, odczytywanie własności ciągów na ekranie komputera

## Co przygotować/ Przebieg zajęć



- Prezentacja „Ciągi liczbowe” slajdy 47-61, wzbogacona przykładami ilustrującymi definicję ciągu i odczytywanie wyrazów ciągu według zadanego wzoru. W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki lekcji.
- Do prezentacji należy się zapoznać z plikami GeoGebry, których opis znajduje się w pliku prezentacji.



## LEKCJA NR 6

### TEMAT: BADANIE CIĄGÓW W PROGRAMIE GEOGEBRA

#### Streszczenie

Po poznaniu prezentacji ciągów w arkuszu kalkulacyjnym przychodzi kolej na prezentację graficzną ciągu liczbowego. Ciąg liczbowy jako specyficzna funkcja powinna być w arkuszu prezentowana jako wykres XY. W pierwszej części lekcji uczniowie przypominają sobie metodę wykreślenia wykresu funkcji w arkuszu. Utrwalają sobie przy tym sposób formatowania wykresów, ustalają zakresy dziedziny i zbiór wartości, opisują osie itp.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom rozszerzony)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Modelowanie matematyczne.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

5.1 Ciągi liczbowe i ich prezentacja komputerowa

Korelacja z informatyką poprzez kreowanie wykresów ciągów na komputerze.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- ukazanie, jak narzędzie informatyczne może być wykorzystane na lekcjach matematyki,
- nabycie umiejętności edytowania wykresów i dostosowania arkusza do rozmaitych, nietypowych ciągów,
- poznanie sposobów tworzenia wykresów ciągów w arkuszu Excel.

#### Słowa kluczowe

wykres ciągu w arkuszu Excel, odczytywanie własności w arkuszu

#### Co przygotować/ Przebieg zajęć

- Prezentacja „Ciągi liczbowe” slajdy 62-69, wzbogacona przykładami ilustrującymi definicję ciągu i odczytywanie wyrazów ciągu według zadanego wzoru. W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki lekcji.



## LEKCJA NR 7

### TEMAT: WYKRESY CIĄGÓW LICZBOWYCH W PROGRAMIE GEOGEBRA

#### Streszczenie

W tej lekcji uczniowie mają okazję skonfrontować ze sobą dwie metody prezentacji ciągów w arkuszu Excel i w programie GeoGebra. Poznają przy tym zupełnie inny sposób prezentacji ciągu poprzez przygotowanie całej aplikacji w programie GeoGebra. Program ten ze względu na ogólną dostępność (jest to program Open Source) pozwala kontynuować lekcję w domu na swoim komputerze, gdzie uczeń może sprawdzić przykłady z lekcji i rozwiązywać samodzielnie zadania.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy i rozszerzony)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

5. Ciągi

5.1 Badanie własności ciągów przy wykorzystaniu programu GeoGebra.

##### *Cele kształcenia – poznawcze:*

- ukazanie możliwości programu GeoGebra w wyszukiwaniu liczb trzycyfrowych spełniających pewną własność,
- przygotowanie uczniów do samodzielnych badań szczególnych ciągów za pomocą GeoGebry,
- zapoznanie uczniów z funkcjami niezbędnymi do odkrywania i badania teorii liczb.

#### Słowa kluczowe

GeoGebra, ciąg sum sześciątów cyfr liczby trzycyfrowej, ciąg Collatza

#### Co przygotować/ Przebieg zajęć

- Na początku lekcji uczniowie powinni obejrzeć film instruktażowy o wykorzystaniu programu GeoGebra do prezentowania ciągów liczbowych w układzie współrzędnych.
- Następnie realizujemy kolejne kroki prezentacji „Ciągi liczbowe” (slajdy 70-77), opisującej sposób wykorzystania programu GeoGebra do badania ciekawych ciągów liczbowych.
- Do prezentacji dołączone są pliki:  
Gify animowane: 09.gif,  
Filmy – tutoriale: 3 – 01.avi, 4 – 02.avi, 5 – 03.avi





## LEKCJA NR 8

### TEMAT: CIĄG ARYTMETYCZNY

#### Streszczenie

Lekcja rozpoczyna się od znanych z poprzednich lekcji przykładów wybranych ciągów. Następnie określany jest ciąg arytmetyczny jako ciąg o specyficznych własnościach. Kolejnym etapem zajęć jest doprowadzenie uczniów do odkrycia wzoru na dowolny wyraz ciągu arytmetycznego, a następnie zdefiniowania warunków wzrastania i malenia ciągu arytmetycznego. Lekcję kończy wzór na sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego wraz z akcentem historycznym związanym z tym wzorem.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- IV. Użycie i tworzenie strategii.
- V. Rozumowanie i argumentacja.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

5. Ciągi
  - 5.2, 5.3 – ciąg arytmetyczny, jego  $n$ -ty wyraz i suma jego kolejnych wyrazów i inne jego własności.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- odkrycie własności ciągu arytmetycznego i wzorów na  $n$ -ty wyraz ciągu i sumę  $n$ -kolejnych wyrazów tego ciągu ,
- przygotowanie uczniów do rozwiązywania zadań typowych na egzaminie dojrzałości,
- ukazanie geometrycznego spojrzenia na problemy algebry poprzez wizualizację geometryczną twierzeń.

#### Słowa kluczowe

ciąg arytmetyczny, wzór na dowolny wyraz ciągu arytmetycznego i wzór na sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego

## Co przygotować/ Przebieg zajęć



- Prezentacja „Ciągi liczbowe” (slajdy 78-87).

Należy zwrócić uwagę na animacje, mające na celu odkrycie przez uczniów ważnych wzorów. Należy utrwalić poznane pojęcia i wzory uzupełniając lekcję tradycyjnymi zadaniami.



- Do prezentacji dołączone są pliki:

Gify animowane: 06C.gif, 10A.gif. 10B.gif





## LEKCJA NR 9

### TEMAT: CIĄG GEOMETRYCZNY

#### Streszczenie

Ciąg geometryczny jest pewną analogią ciągu arytmetycznego. Na przykład wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego jest analogią tego samego wzoru dla ciągu arytmetycznego, w którym dodawanie jest zastąpione mnożeniem, a mnożenie potęgowaniem. Lekcja zawiera również akcenty wizualizacji jednego z twierdzeń ( $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego) oraz przykłady umożliwiające uczniowi odkryć warunki wzrastania i malenia ciągu geometrycznego.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- III. Modelowanie matematyczne.
- IV. Użycie i tworzenie strategii.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

5. Ciągi
  - 5.4. ciąg geometryczny, wzór na dowolny wyraz ciągu arytmetycznego i wzór na sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- pokazanie na bazie obiektów geometrycznych i graficznych, jak można odkrywać własności ciągu geometrycznego,
- przygotowanie uczniów do rozwiązywania typowych zadań na egzaminie dojrzałości,
- ukazanie geometrycznego spojrzenia na problemy algebry,
- odkrywanie poprzez eksperymenty warunków monotoniczności ciągu geometrycznego.

#### Słowa kluczowe

ciąg geometryczny, wzór na dowolny wyraz ciągu geometrycznego i wzór na sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego

## Co przygotować/ Przebieg zajęć



- Prezentacja „Ciągi liczbowe” (slajdy 88-104) ilustruje animacjami wpływ wartości  $a_1$  i  $q$  na rodzaje monotoniczności ciągu geometrycznego. Lekcję należy uzupełnić zadaniami rachunkowymi z wykorzystaniem wzorów na  $n$ -ty wyraz ciągu i sumę  $n$  pierwszych kolejnych wyrazów ciągu.



- Do prezentacji dołączone są pliki:

Gify animowane: 07A.gif, 07B.gif, 11A.gif, 11B.gif, 11C.gif, 11D.gif, 11E.gif, 11F.gif, 11G.gif.



## LEKCJA NR 10

### TEMAT: CIĄGI I ŚREDNIE STATYSTYCZNE

#### Streszczenie

Ciąg geometryczny i arytmetyczny mają wiele wspólnego z pojęciami średniej arytmetycznej i geometrycznej. Lekcja ta ma na celu ukazanie tego powiązania i wprowadzenia tych średnich. Ponadto przedstawiona jest średnia harmoniczna i związek (nierówność), jaki zachodzi pomiędzy tymi trzema średnimi. Lekcję kończą dwa dowody – algebraiczny i geometryczny poznanej nierówności.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- III. Modelowanie matematyczne.
- IV. Użycie i tworzenie strategii.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

- III. Rozwiązywanie problemów i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera, z zastosowaniem podejścia algorytmicznego.
- IV. Wykorzystanie komputera oraz programów i gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin oraz do rozwijania zainteresowań

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

5. Ciągi liczbowe
10. Elementy statystyki opisowej
- 10.1 Średnie statystyczne i nierówność pomiędzy nimi.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

- pokazanie uczniom, w jaki sposób komputer pozwala prezentować dane statystyczne,
- poznanie trzech średnich i związków między nimi,
- wizualizacja geometryczna nierówności średnich statystycznych.

#### Słowa kluczowe

średnia arytmetyczna, średnia geometryczna, średnia harmoniczna

## Co przygotować/ Przebieg zajęć



- Prezentacja „Ciągi liczbowe” (slajdy 105-123). Należy zwrócić uwagę na dowód nierówności, a szczególnie dowód geometryczny znanej nierówności pomiędzy średnimi statystycznymi.

- Do prezentacji dołączone są pliki:

Filmy: 6 – dowód1.avi, 7 – dowód2.avi, 8 – metoda\_geom.avi





## Pliki do wszystkich lekcji

1. Prezentacja
2. Zadania
3. Test
4. Materiały pomocnicze (gify)
5. Filmy 1-8



*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA  
WYŻSZA SZKOŁA  
INFORMATYKI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego