ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZADAŃ

„Ciągi liczbowe”

Ćwiczenie 1

$a_n = 2n$

Ćwiczenie 2

$a_n = 2^n$

Ćwiczenie 3

Ciąg a_n jest przemienny, ciąg b_n jest rosnący.

Ćwiczenie 4

a) Utwórzmy ilorazy: $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$, $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$, $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$, $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.

Kolejne ilorazy powinny więc wynosić: $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ …itd.

Niech x i y będą poszukiwanymi kolejnymi dwoma wyrazami ciągu.
Wówczas:

$\frac{x}{24} = \frac{5}{6}$, stąd $x = 20$

Podobnie jeśli y jest kolejną poszukiwaną liczbą w ciągu, to:

$\frac{y}{20} = \frac{6}{7}$, stąd $y = \frac{120}{7}$

b) Zauważmy, że ułamki $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, są tak utworzone, że liczniki są kolejnymi liczbami naturalnymi, zaś mianowniki kolejnymi liczbami nieparzystymi. Zatem liczniki następnych ułamków to 5 i 6, zaś liczniki to 11 i 13.

Poszukiwane ułamki to: $\frac{5}{11}$ oraz $\frac{6}{13}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 5

Kolejne sześć wyrazów tego ciągu to: 2, 4, 10, 28, 82, 244.

Ćwiczenie 6

Dla ciągu 5, 9, 17, 33, 65, 129 ciąg różnic wynosi: 4, 8, 16, 32, 64, który jak widać jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 2 i wyrazie pierwszym 4.

Kolejnymi liczbami ciągu tych różnic będą liczby 128, 256, 512, …

Zatem następny wyraz po 129 jest równy 129 + 128 = 257, a kolejny to 513.

Można zauważyć, że ten ciąg przedstawia się ogólnym wzorem:

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

Ćwiczenie 7

Zgodnie z instruktażem w lekcji 4.Monotoniczność ciągu badamy znak różnicy:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{2(k+1)+1}{3(k+1)-4} - \frac{2k+1}{3k-4} = \frac{2k+3}{3k-1} - \frac{2k+1}{3k-4} = \frac{6k^2 - 8k + 9k - 12 - 6k^2 - 3k - 2k - 1}{(3k-1)(3k-4)} = \frac{-4k-13}{(3k-1)(3k-4)}$$

Wyznaczona różnica jest ujemna począwszy od drugiego wyrazu, zatem ciąg od drugiego wyrazu jest malejący.

Ćwiczenie 8

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 3r = 11 \\ a_1 + 5r = 17 \end{cases}$$

Po odjęciu od drugiego równania pierwszego otrzymamy $r = 3$,

co po podstawieniu do pierwszego równania daje wartość: a_1 = 2.

Ćwiczenie 9

Z zadania wynika, że c = a+8

Korzystając ze średniej arytmetycznej dla liczb a, b, a + 8 otrzymamy:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$b = \frac{a + a + 8}{2}$, skąd b = a + 4

Korzystając ze średniej geometrycznej liczb a, b – 1, a + 15 otrzymamy:

$(b-1)^2 = a(a+15)$

Podstawiając wyznaczone b = a + 4 otrzymamy równanie:

$(a+4-1)^2 = a^2 + 15a$

Z którego wyznaczone a jest równe 1.

Stąd b=5, c = 9

Ciągiem arytmetycznym był więc ciąg 1, 5, 9, zaś geometrycznym 1, 4, 16.

Ćwiczenie 10

Średnią arytmetyczną liczb 5, 10, 15 jest oczywiście 10.

Średnia geometryczna wynosi: $\sqrt[3]{5 \cdot 10 \cdot 15} \approx 9{,}0856$.

Średnia harmoniczna to liczba:

$$\frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = \frac{3}{\frac{30+15+10}{150}} = \frac{450}{55} \approx 8,(18)$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego