

# INFORMATYKA

## – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA

PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI Z ELEMENTAMI  
PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Moduł interdyscyplinarny: informatyka – matematyka

### Odkrywanie geometrii kół

*Bronisław Pabich, Agnieszka Rogalska*

Człowiek - najlepsza inwestycja



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA  
WYŻSZA SZKOŁA  
INFORMATYKI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tytuł: ***Odkrywanie geometrii kół***

Autor: ***Bronisław Pabich, Agnieszka Rogalska***

Redaktor merytoryczny: ***prof. dr hab. Maciej M. Sysło***

Materiał dydaktyczny opracowany w ramach projektu edukacyjnego  
***Informatyka – mój sposób na poznanie i opisanie świata.***  
***Program nauczania informatyki z elementami przedmiotów***  
***matematyczno-przyrodniczych***

[www.info-plus.wysi.edu.pl](http://www.info-plus.wysi.edu.pl)

[infoplus@wysi.edu.pl](mailto:infoplus@wysi.edu.pl)

Wydawca: Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki

ul. Lewartowskiego 17, 00-169 Warszawa

[www.wysi.edu.pl](http://www.wysi.edu.pl)

[rektorat@wysi.edu.pl](mailto:rektorat@wysi.edu.pl)

Projekt graficzny: *Marzena Kamasa*

Warszawa 2013

Copyright © Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki 2013

Publikacja nie jest przeznaczona do sprzedaży

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA  
WYŻSZA SZKOŁA  
INFORMATYKI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





# SCENARIUSZ TEMATYCZNY

## ODKRYWANIE GEOMETRII KÓŁ

→ MATEMATYKA – POZIOM PODSTAWOWY

**OPRACOWANY W RAMACH PROJEKTU:**  
**INFORMATYKA – MÓJ SPOSÓB NA POZNANIE I OPISANIE ŚWIATA.**  
**PROGRAM NAUCZANIA INFORMATYKI**  
**Z ELEMENTAMI PRZEDMIOTÓW MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH**

### **Streszczenie**

Scenariusz składa się z pięciu lekcji, które nauczyciel może realizować według własnego uznania w różnych klasach szkoły ponadgimnazjalnej. Zaprezentowane problemy nawiązują ściśle do materiału obowiązującego w szkole. Każdy składa się z kilku twierdzeń, które uczniowie mają okazję odkrywać na ekranie komputera.

Pierwszy projekt poszerza gamę twierdzeń o kątach środkowych i wpisanych, znanych uczniom z gimnazjum. Drugi to konstrukcja stycznej do okręgu na pięć sposobów. Trzy z nich są na ogół znane. Dwa zostały odkryte przez Bronisława Pabicha w trakcie lekcji matematyki, gdy uczennica rozpoczęła nieprawidłowo tradycyjną konstrukcję. Pomyłka uczennicy pomogła odkryć tę metodę.

Kolejny projekt to styczne i sieczne do koła i ich własności. Czwarty dotyczy twierdzeń o kołach, odkrytych przez znanych matematyków. Ostatni zaś zawiera interesujące podziały koła i innych figur za pomocą łuków na figury, który przeszły do historii matematyki pod arabskimi, chińskimi, lub greckimi nazwami.

### **Czas realizacji**

5 x 45 minut

Ze względu na złożoność treści scenariusza i jego zadań i różne zdolności matematyczne uczniów, czas może zostać przez nauczyciela właściwie dostosowany do tempa pracy młodzieży. Nie jest też obowiązkiem nauczyciela realizowanie wszystkich tych lekcji. Użycie programu geometrii dynamicznej GeoGebra pozwala wykonywać konstrukcje ożywione, ułatwiające lepsze i szybsze przyswojenie tej wiedzy.

### **Tematy lekcji:**

1. Twierdzenia nie do przeoczenia.
2. Konstrukcje stycznej do okręgu na pięć sposobów.
3. Styczne, sieczne i coś jeszcze.
4. Znane nazwiska i ich zjawiska.
5. Podział koła na segmenty.

## LEKCJA NR 1

### TEMAT: Twierdzenia nie do przeczenia

#### Streszczenie

Podczas lekcji pojawiają się zagadnienia dotyczące podstawowych własności kątów wpisanych i środkowych. Gotowe definicje nie są podawane, lecz uczeń prowadzony jest krok po kroku w celu samodzielnego określania nowych pojęć. Kierowany wskazówkami nauczyciela lub samodzielnie uczeń wykonuje konstrukcje geometryczne, odkrywa twierdzenia, które wykorzystuje podczas rozwiązywania zadań przygotowujących go do egzaminu maturalnego.

Istotne jest, że o kącie wpisanym istnieją dwa twierdzenia: jedno, które mówi o równości kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku, a drugie, opartych na przystających łukach. To jest ważne, gdyż stosujemy je w różnych dowodach geometrycznych, a faktycznie tylko jedno z nich pojawia się w podstawie programowej. Oba są jednak potem wykorzystywane w zadaniach.

#### Podstawa programowa

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Modelowanie matematyczne

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

7. Planimetria

7.1. stosuje zależności między kątem środkowym i wpisanym.

Uczeń rozpoznaje kąt wpisany, kąt środkowy. Zna twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych.

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Rozwiązywanie problemów z i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

Uczeń poznaje nowe twierdzenia matematyczne na bazie znanych pojęć geometrycznych, samodzielnie studiuje matematykę.

#### Słowa kluczowe

kąt wpisany, kąt środkowy, łuki Talesa, styczna, cięciwa

#### Co przygotować

- Zainstalować program GeoGebra na stanowiskach komputerowych lub na tablicy interaktywnej w sali lekcyjnej
- Prezentacja „Odkrywanie geometrii kół”



## Przebieg zajęć

W prezentacji „Odkrywanie geometrii kół” zamieszczone są slajdy:

- 1. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku – slajd 4
- 2. Kąty wpisane oparte na przystających łukach – slajdy 5-6
- 3. Kąty wpisane i środkowe w kole – slajdy 7-9
- 4. Łuki Talesa – slajdy 10-14
- 5. Kąt między styczną i cięciwą okręgu – slajdy 15-18
- 6. Odległość punktu okręgu od średnicy – slajdy 19-23

## LEKCJA 2

### TEMAT: KONSTRUKCJE STYCZNEJ DO OKRĘGU NA PIĘĆ SPOSOBÓW

#### Streszczenie

Podczas lekcji pojawiają się zagadnienia dotyczące konstrukcji stycznej do okręgu. Wykonując konstrukcje geometryczne uczeń samodzielnie albo dzięki wskazówkom nauczyciela odkrywa twierdzenia, które może wykorzystać podczas rozwiązywania zadań przygotowujących go do egzaminu maturalnego. Konstrukcje pokazane są w plikach GeoGebry. Uczeń może odtworzyć konstrukcję od początku. Trzy twierdzenia są znane od wielu lat. Jedno z nich jest ważne, gdyż to przykład konstrukcji steinerowskiej bez cyrkla. Dwa twierdzenia zostały odkryte w roku 1996 przez uczniów Liceum Ekonomicznego w Wieliczce podczas lekcji matematyki, którą prowadził Bronisław Pabich. Pokazuje to, jak komputer potrafi pomóc nam w odkrywaniu nieznanych faktów.

#### Podstawa programowa

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Modelowanie matematyczne

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Rozwiązywanie problemów z i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

Uczeń poznaje nowe twierdzenia matematyczne na bazie znanych pojęć geometrycznych, samodzielnie studiuje matematykę.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

7. Planimetria

7.2. uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

#### Słowa kluczowe

styczna do okręgu

#### Co przygotować



- Zainstalować program GeoGebra na stanowiskach komputerowych



- Prezentacja „Geometria kół”



## Przebieg zajęć

W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki, które uczeń wykonuje z użyciem programu GeoGebra. Lekcje zamieszczone są w slajdach:

- ▣ 7. Konstrukcja stycznej cz. I – slajdy 25-26
- ▣ 8. Konstrukcja stycznej cz. II – slajdy 27-28
- ▣ 9. Konstrukcja stycznej cz. III – slajdy 25-26
- ▣ 10. Konstrukcja stycznej cz. IV – slajdy 31-35

## LEKCJA 3

### TEMAT: Styczne i sieczne

#### Streszczenie

Podczas lekcji rozwijana jest wiedza związana z własnościami odcinków i kątów w okręgach. Dobrze byłoby, aby uczniowie poznali konstrukcję stycznej do dwóch okręgów. Jest nietypowa, ale bardzo kształcąca logiczne myślenie i to, co w matematyce nazywają „dociekaniem”.

#### Podstawa programowa

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Modelowanie matematyczne

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Rozwiązywanie problemów z i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

Uczeń poznaje nowe twierdzenia matematyczne na bazie znanych pojęć geometrycznych, samodzielnie studiuje matematykę.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

7. Planimetria

7.2. uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

#### Słowa kluczowe

punkt wewnętrzny, rzut prostokątny, obraz w symetrii osiowej, obraz w symetrii środkowej

#### Co przygotować



- Zainstalować program GeoGebra na stanowiskach komputerowych



- Prezentacja „Geometria kół”

#### Przebieg zajęć

W prezentacji „Odkrywanie geometrii kół” zamieszczone są slajdy:

- ➡ 11. Styczna do dwóch okręgów – slajdy 35-40
- ➡ 12. Punkt cięciwy okręgu – slajdy 41-44





## LEKCJA 4

### TEMAT: Znane nazwiska i ich zjawiska

#### Streszczenie

Każdy niemal ze znanych matematyków chciał pozostawić dla przyszłych pokoleń coś nieznanego, ale praktycznego w zastosowaniu. Takim był Kopernik, który obracając wewnątrz koła drugie koło do niego styczne zauważył, że jeśli stosunek średnic tych kół wynosi  $\frac{1}{2}$ , to punkt tego mniejszego koła zakreśla średnicę większego koła. Podobnie Archimedes czy Ptolemeusz, którym matematyka służyła do pomiarów astronomicznych.

Uczeń nabywa umiejętności samodzielnego uczenia się matematyki. Lekcje napisane są w formie instrukcji. Uczeń wykonując kolejne polecenia poznaje drogi dojścia do sukcesu, którym jest poznanie nowej wiedzy.

#### Podstawa programowa

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Modelowanie matematyczne

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Rozwiązywanie problemów z i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

Uczeń poznaje nowe twierdzenia matematyczne na bazie znanych pojęć geometrycznych, samodzielnie studiuje matematykę.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

7. Planimetria

7.2. uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;

7.3. uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

#### Słowa kluczowe

punkt wewnętrzny, rzut prostokątny, obraz w symetrii osiowej, obraz w symetrii środkowej

#### Co przygotować

- Zainstalować program GeoGebra na stanowiskach komputerowych.
- Prezentacja „Odkrywanie geometrii kół”.



#### Przebieg zajęć

W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki, które uczeń wykonuje z użyciem programu GeoGebra:

- ➡ 13. Twierdzenie Kopernika – Ptolemeusza – slajdy 45-55
- ➡ 14. Twierdzenie Archimedesa – slajdy 56-59

## LEKCJA 5

### TEMAT: PODZIAŁ KOŁA NA SEGMENTY

#### Streszczenie

Niniejsza lekcja ma służyć uczniom do poznania ciekawych podziałów koła i innych figur za pomocą odpowiednich łuków. Oprócz tego uczniowie mają możliwość wykazania się umiejętnościami rachunkowymi, w których powtarzają wiedzę na temat pól figur. Zaskoczeniem dla uczniów jest fakt, że figury kształtu okrągłego mają takie same pola, jak figury ograniczone łamanymi.

Konstrukcje GeoGebry pozwalają uczniom na eksperymentowanie. Tę lekcję można przeprowadzić zarówno na tradycyjnych zajęciach z matematyki, jak i na kole matematycznym.

#### Podstawa programowa

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: matematyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Modelowanie matematyczne

Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

**Etap edukacyjny: IV, przedmiot: informatyka (poziom podstawowy)**

##### *Cele kształcenia – wymagania ogólne*

III. Rozwiązywanie problemów z i podejmowanie decyzji z wykorzystaniem komputera.

##### *Cele kształcenia – poznawcze*

Uczeń poznaje nowe twierdzenia matematyczne na bazie znanych pojęć geometrycznych, samodzielnie studiuje matematykę.

##### *Treści nauczania – wymagania szczegółowe*

7. Planimetria

7.4. uczeń korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych w tym we wzorze na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi;

7.5. rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Ponadto uczeń wykorzystuje wiedzę zdobytą w gimnazjum do wyznaczania pola koła, wycinka koła i długości łuku.

#### Słowa kluczowe

wycinek i odcinek koła, pole koła, długość łuku

#### Co przygotować



- Zainstalować program GeoGebra na stanowiskach komputerowych.



- Prezentacja „Odkrywanie geometrii kół”.



## Przebieg zajęć

W prezentacji zamieszczone są kolejne kroki, które uczeń wykonuje z użyciem programu GeoGebra. Oto poszczególne lekcje:

- ▣ 15. Pole figury sercowej – slajdy 61-62
- ▣ 16. Arbelos – slajdy 63, 64
- ▣ 17. Księżycy Hipokratesa – slajdy 65-66
- ▣ 18. Lunula – slajdy 67-68
- ▣ 19. Salinon – slajd 69
- ▣ 20. Yung Yang – slajdy 70, 71

*Człowiek - najlepsza inwestycja*



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



WARSZAWSKA  
WYŻSZA SZKOŁA  
INFORMATYKI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego