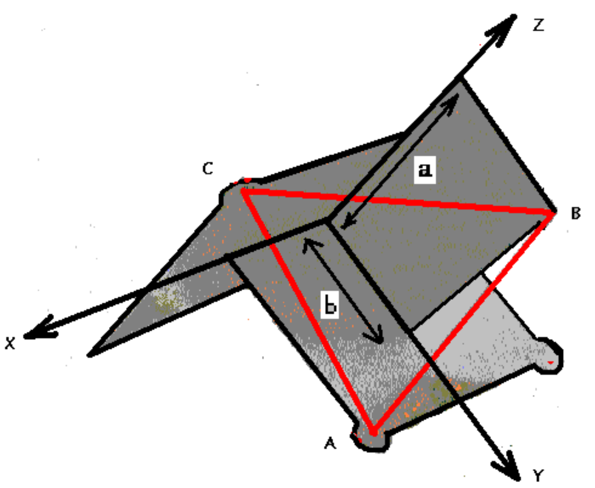
ZADANIA OTWARTE

ZADANIE 1 DWUDZIESTOŚCIAN FOREMNY

Wiemy, że z trzech złotych prostokątów można skonstruować dwudziestościan foremny. Wystarczy wykazać, że długości boków trójkąta ABC na rysunku obok są równe. Niech wymiary złotych prostokątów wynoszą: długość ***a*** zaś szerokość ***b***, przy czym b/a jest złotą liczbą. Posługując się wzorem na odległość dwóch punktów oraz znając współrzędne tych punktów udowodnij, że AB = BC = CA.	

Rozwiązanie:

Odległości AB, BC i CA wynoszą odpowiednio:

$$AB = \sqrt{b^2 + (a-b)^2 + a^2}$$

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2 + (a-b)^2}$$

$$AC = \sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2}$$

Są więc takie same. Trzeba jeszcze pokazać, że wynoszą one *2b*, gdyż taka jest długość krawędzi dwudziestościanu.

Obliczmy zatem:

$$AB = \sqrt{b^2 + (a-b)^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + a^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)} \quad (*)$$

Ponieważ prostokąt o bokach *a*, *b* jest złoty, więc

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a},$$

co jest równoważne zapisowi:

$a^2 = ab + b^2$.

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (*) otrzymamy:

$$AB = \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)} = \sqrt{2(ab + b^2 + b^2 - ab)} = \sqrt{4b^2} = 2b$$

ZADANIE 2 TRÓJKI PITAGOREJSKIE

Trójka pitagorejska to trzy liczby całkowite dodatnie **x**, **y**, ***h*** takie, że $x^2+y^2=h^2$. Nazwa pochodzi od twierdzenia Pitagorasa, które w jednej z interpretacji mówi, że każdy trójkąt prostokątny o całkowitych długościach boków określa trójkę pitagorejską. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: każda trójka pitagorejska określa trójkąt prostokątny o danych całkowitych długościach boków.

Jeśli wybierzemy dwie kolejne liczby Fibonacciego, które są długościami przyprostokątnych danego trójkąta prostokątnego, to okazuje się, że kwadrat przeciwprostokątnej jest również liczbą należącą do ciągu Fibonacciego.

Wybierz dwie dowolne kolejne liczby ciągu Fibonacciego, które są przyprostokątnymi boków trójkąta prostokątnego i sprawdź, czy faktycznie trzeci bok jest też liczbą Fibonacciego. Spróbuj to uzasadnić dla dowolnych liczb f(n) i f(n+1).

Odpowiedź:

Niech f(3) = 2, f(4) = 3. Zatem $f(3)^2 + f(4)^2 = 2^2 + 3^2 = 13$. Liczba 13 faktycznie jest liczbą ciągu Fibonacciego.

ZADANIE 3 WŁASNOŚC LUCASA

Zauważ, że jeśli dla przykładu długości przyprostokątnych trójkąta wynoszą odpowiednio $x = f(4) = 3$ i $y = f(5) = 5$, wówczas zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa:

$$h^2 = x^2 + y^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 = f(9)$$

Wynik 34 to znów liczba Fibonacciego i to nie byle która. To liczba dziewiąta tego ciągu. Czy to przypadek?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jej wskaźnik wynosi 9? Popatrzmy – przecież wzięliśmy czwarty i piąty wyraz ciągu Fibonacciego (4 + 5 = 9).

Własność tę dostrzegł po raz pierwszy i udowodnił w 1876 roku francuski matematyk – Edward Lucas – formułując następujące twierdzenie:

Jeśli dwa boki trójkąta prostokątnego są kolejnymi liczbami F(n) i F(n+1) ciągu Fibonacciego to suma ich kwadratów jest liczbą ciągu Fibonacciego i jej wskaźnik jest sumą wskaźników liczb składowych.

$F(n)^2 + F(n+1)^2 = F(2n+1)$

Spróbuj uzasadnić ten związek.

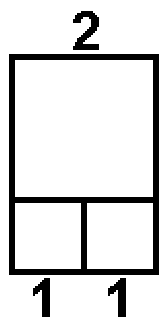
ZADANIE 4 ZŁOTE PROSTOKĄTY

Znamy już zależność pomiędzy złotym prostokątem a odciętym od niego kwadratem. To co zostało ze złotego prostokąta to znowu złoty prostokąt. Ale wykonajmy teraz czynność przeciwną: doklejajmy do złotych prostokątów kwadraty.

Pierwszy prostokąt utwórzmy z dwóch kwadratów o boku długości 1.

Uzyskamy prostokąt o wymiarach 1×2.

Doklejając kolejny kwadrat otrzymamy prostokąt o wymiarach 2×3 – rysunek obok.



Podaj wymiary dwóch następnych prostokątów. Następny będzie miał wymiary 3×5.

Odpowiedź:

Kwadraty te będą mieć wymiary 3 X 5 oraz 5 X 8

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIE 5 CIĄG UŁAMKÓW ŁAŃCUCHOWYCH

Po podzieleniu równania, którego rozwiązaniem jest złota liczba:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \qquad (*)$$

przez Φ otrzymujemy:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \qquad (**)$$

co znowu po zastąpieniu Φ wartością obliczoną z tego związku daje niekończący się ciąg ułamków łańcuchowych:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \ldots \quad (***)$$

Przypuśćmy, że nie znamy wartości Φ. Jeśli we wzorze (***) do kolejnych wyrażeń występujących po prawej stronie wstawimy za Φ dowolną wartość liczbową, to ciąg tak obliczonych wartości będzie się zbliżał do wartości liczby Φ.

Sprawdź ten fakt.

ZADANIE 6 LICZBY LUCASA

Wspomniany w poprzednich zadaniach Edward Lucas wprowadził ciąg podobny do ciągu Fibonacciego: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

nazwany później ciągiem Lucasa. Rozpoczynamy go od liczby 2, 1 i dalej tworzymy kolejne liczby ciągu poprzez dodawanie każdych dwóch poprzednich.

Liczby Lucasa definiujemy więc:

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ dla $n>1$

Porównajmy ciąg Lucasa z ciągiem Fibonacciego:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F(n)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L(n)	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pomiędzy nimi występuje wiele relacji. Przypuśćmy, że dodajemy dwie najbliższe nie kolejne liczby Fibonacciego, $F_{n-1} + F_{n+1}$. Okazuje się, że ich suma jest liczbą ciągu Lucasa. Którą? Spróbuj ją odnaleźć.

Odpowiedź:

Jest to zawsze liczba F_n. Np. suma liczby ósmej i dziesiątej ciągu Fibonacciego jest liczba dziewiąta Lucasa.

ZADANIE 7 PIRAMIDA CHEOPSA

Słynna piramida Cheopsa to też wielościan, zbudowany tak, jak to przedstawia poniższa ilustracja. Sprawdź ile wynosi iloraz s/b?

Jaki wynik daje iloraz obwodu podstawy do wysokości piramidy?