ZADANIA OTWARTE „WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW”

Zad. 1

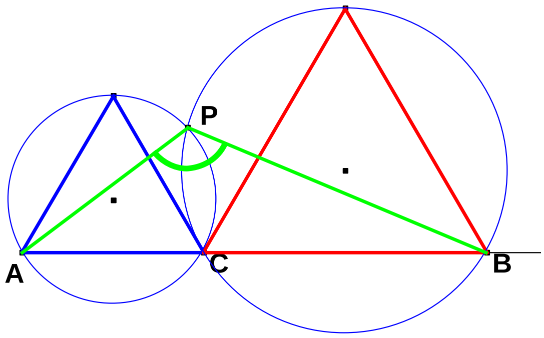
Na odcinku *AB* wybrano punkt *C*, a następnie zbudowano trójkąty równoboczne *ACD* i *CBE* tak, że wierzchołki *D* i *E* leżą po tej samej stronie prostej *AB*. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach *C* i *P* (zobacz rysunek). Udowodnij, że miara kąta *APB* jest równa 120°.

Rozwiązanie:

$|\angle APC| = |\angle ADC| = 60^0$ bo są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku,

$|\angle BPC| = |\angle BEC| = 60^0$ z tych samych powodów

$|\angle APB| = |\angle APC| + |\angle BPC| = 60^0 + 60^0 = 120^0$



Zad. 2

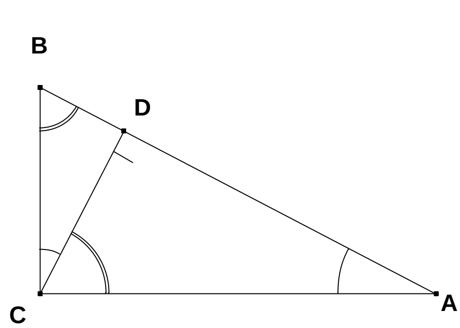
Wykaż, że wysokość *CD* trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka *C* kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki *AD* i *DB*, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio *AC* i *BC* tego trójkąta.

Rozwiązanie:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = ? \frac{|AC|^2}{|BC|^2}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$$

$$\begin{cases} \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BC|} \\ \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BC|} \end{cases}$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD|}{|DC|} \cdot \frac{|CD|}{|BD|}$$

$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD}{|BC|}$$

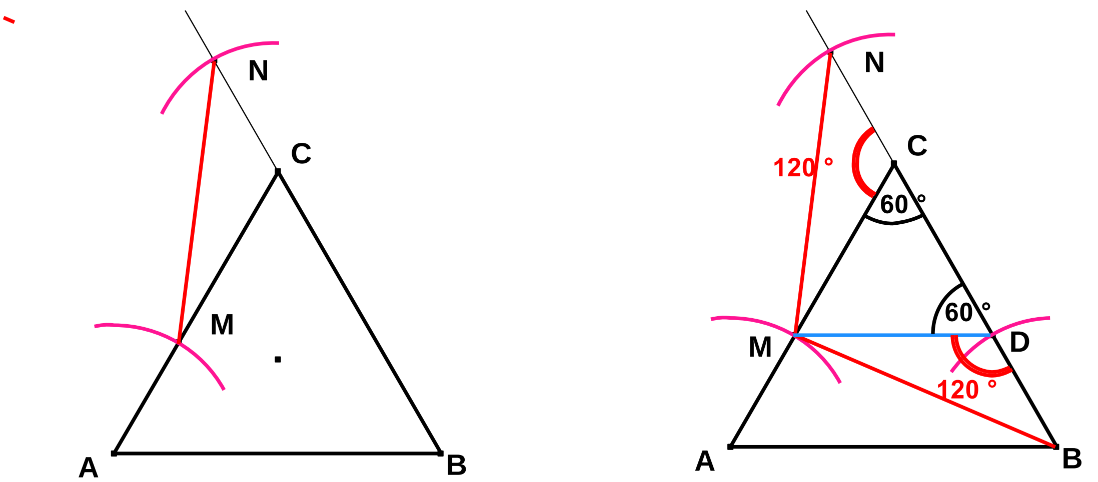
Zad. 3

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że |AM| = |CN|. Wykaż, że |BM| = |MN|.

Rozwiązanie:

Odłóżmy odcinek ***CN*** na boku ***BC*** z punktu ***B***. Czyli ***DB=CN=AM***, i ***ABGM*** jest trapezem równoramiennym. Zatem trójkąt ***DBM*** jest podobny do trójkąta ***CNM.***

Stąd ***NM=MB***

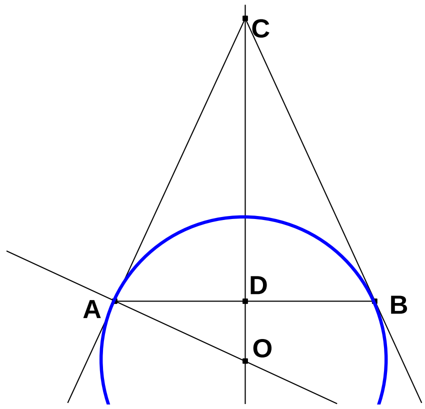


Zad. 4

W trójkącie równoramiennym podstawa AB ma długość 8 cm. Promień okręgu, stycznego w punktach A i B do prostych zawierających ramiona AC i BC trójkąta, ma długość 5 cm. Oblicz pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez O oznaczymy środek okręgu, o którym mowa w treści zadania, to trójkąt AOC jest prostokątny i odcinek AB zawiera jego wysokość opuszczoną z wierzchołka A. Z trójkąta prostokątnego ABO (D jest środkiem boku AB) mamy DO = 3



Trójkąty ADO i CDA są podobne, więc

$$\frac{DC}{DA} = \frac{AC}{AO} = \frac{DA}{DO}$$

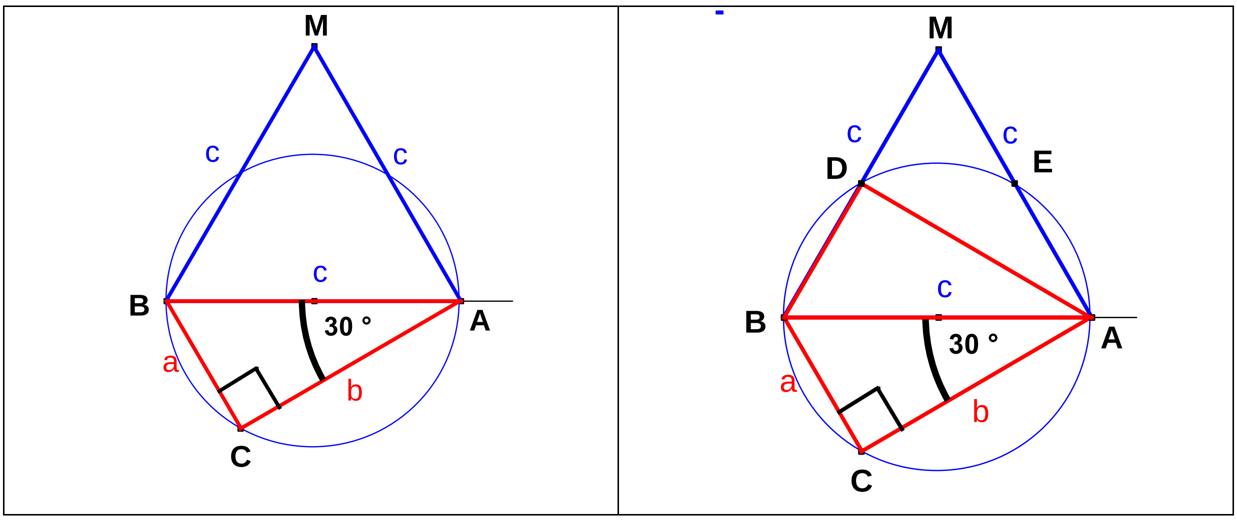
Czyli $\frac{DC}{4} = \frac{4}{3}$, stąd DC=$\frac{16}{3}$

Zatem pole jest równe:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DC = 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$$

Zad. 5

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Trójkąt AMB jest równoboczny. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC, jeśli pole trójkąta AMB jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie:

Przyjmując oznaczenia długości boków z rysunku, mamy

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 2\cdot\frac{ab}{2} \qquad / :c^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Ale $2\alpha = 60^0$, lub $2\alpha = 120^0$

Stąd $\alpha = 30^0$, lub $\alpha = 60^0$