CZWOROŚCIAN FOREMNY

Czworościan foremny podobnie jak trójkąt równoboczny na płaszczyźnie jest w przestrzeni trójwymiarowej simpleksem, tzn. obiektem n-wymiarowym, który ma minimalną liczbę elementów (*n-1*) wymiarowych. Znajomość własności trójkąta może sprowokować uczniów do przeniesienia ich na czworościan foremny (tetrahedron) hołdując zasadzie poszukiwania analogii.

W praktyce okazuje się, że w przestrzeni 3-wymiarowej bardziej popularnym i lepiej znanym wielościanem jest sześcian. Potraktujmy go więc jako bazę do badania czworościanu. Być może taka droga okaże się łatwiejsza.

PROBLEM 1

Czy w sześcianie można umieścić czworościan tak, by jego wierzchołki były równocześnie wierzchołkami sześcianu? Ile rozwiązań ma zadanie?

Podpowiedź 1:

Jeśli wydaje Ci się, że odpowiedź na pytanie postawione w problemie 1 jest pozytywna, to spróbuj naszkicować na kartce odpowiedni rysunek.

Podpowiedź 2:

Jeśli masz trudności z wykonaniem rysunku, to pomyśl, jak umieścić czworościan w sześcianie tak, aby ilość pewnych jego elementów była równa ilości odpowiednich elementów sześcianu.

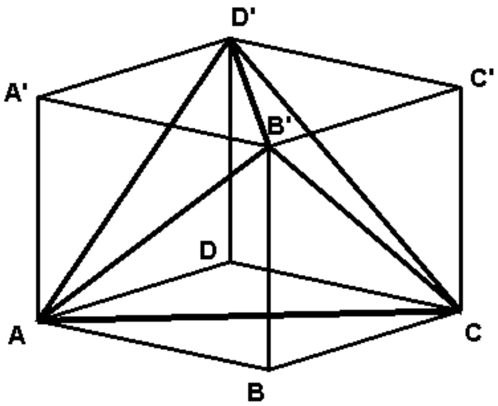
Podpowiedź 3:

Ile ścian ma sześcian, a ile krawędzi czworościan?

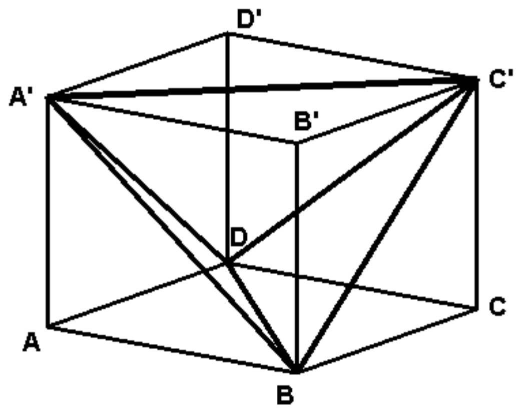
Rozwiązanie:

Czworościan ma tyle krawędzi, ile ścian ma sześcian. Wobec tego krawędzie te powinny zawierać się w ścianach sześcianu. Ponieważ jednak mają wspólne wierzchołki, to muszą być przekątnymi ścian sześcianu.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



rys. 1



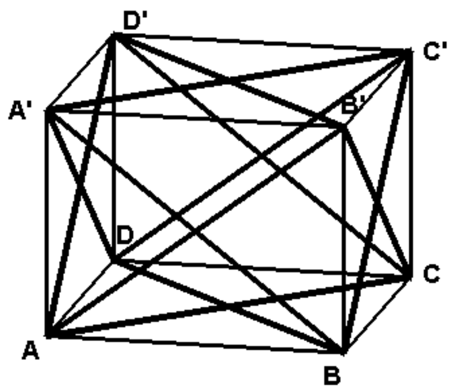
rys. 2

Czworościan można umieścić w sześcianie na dwa różne sposoby (patrz rysunki 1 i 2).

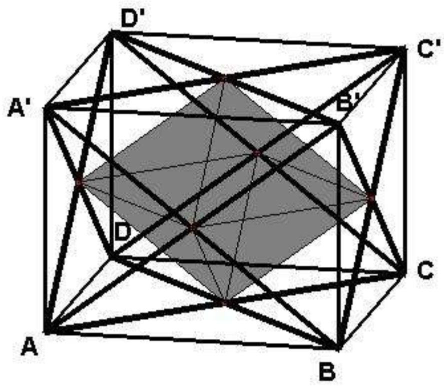
PROBLEM 2

Oba czworościany umieszczone w sześcianie przenikają się wzajemnie. Czy potrafisz ustalić, co jest częścią wspólną tych czworościanów? Naszkicuj oba czworościany w jednym sześcianie i spróbuj odnaleźć ich część wspólną.

Rozwiązanie:



rys. 3

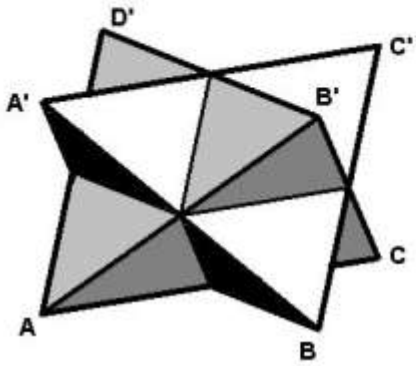


rys. 4

Jak widać częścią wspólną obu czworościanów jest ośmiościan foremny, którego wierzchołki są środkami ścian sześcianu. Zastanów się, jak obliczysz objętość tego ośmiościanu?

A jaki wielościan jest sumą obu czworościanów?

Sumą obu czworościanów jest „rogaty" wielościan (rys. 5). Po raz pierwszy udało się go skonstruować w 1609 roku niemieckiemu matematykowi Johannesowi Keplerowi (1571-1630).



rys. 5

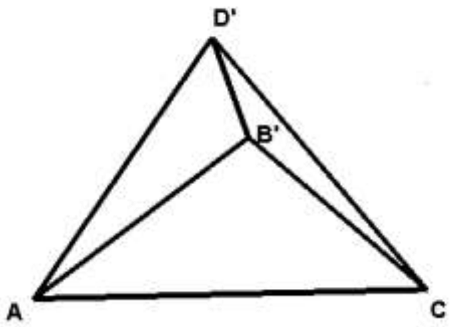
Nazwał on ten wielościan ***stella octangula***, czyli ośmiościan gwiaździsty. Jest on reprezentantem całego zbioru wielościanów zwanych gwiaździstymi.

PROBLEM 3

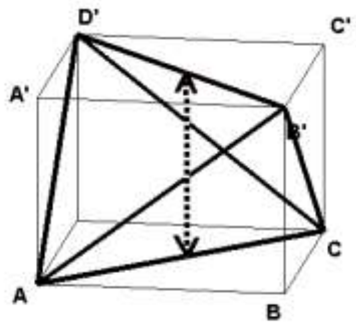
Narysuj na kartce dowolny czworościan o krawędzi długości *b* i bez wykonywania rachunków oblicz odległość dwóch jego skośnych krawędzi.

Podpowiedź:
Wykorzystaj rozwiązanie problemu 1.

Rozwiązanie:



rys. 6



rys. 7

Narysowanie samego czworościanu nie daje pomysłu na obliczenie odległości jego skośnych krawędzi np. *AC* i *B'D'*. Umieszczenie go w sześcianie, tak jak omówiono to w problemie 1, daje natychmiastową odpowiedź (rys. 7):

Odległość skośnych krawędzi czworościanu jest równa długości krawędzi sześcianu, w którym czworościan został umieszczony tak, aby jego wierzchołki były równocześnie wierzchołkami sześcianu.

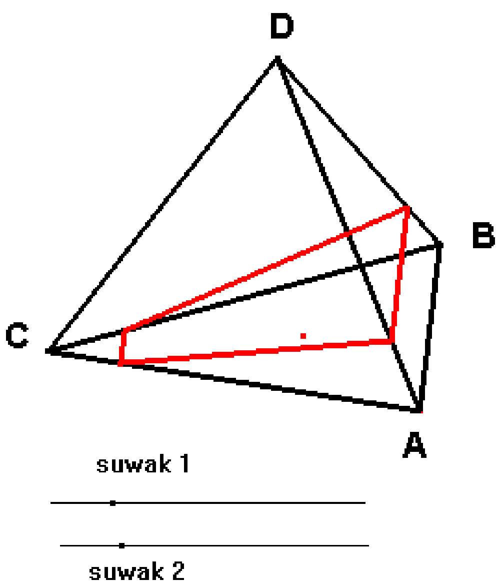
Jeżeli krawędź czworościanu wynosi $b = a\sqrt{2}$, to odległość jego skośnych krawędzi wynosi $a = \frac{1}{\sqrt{2}} b$.

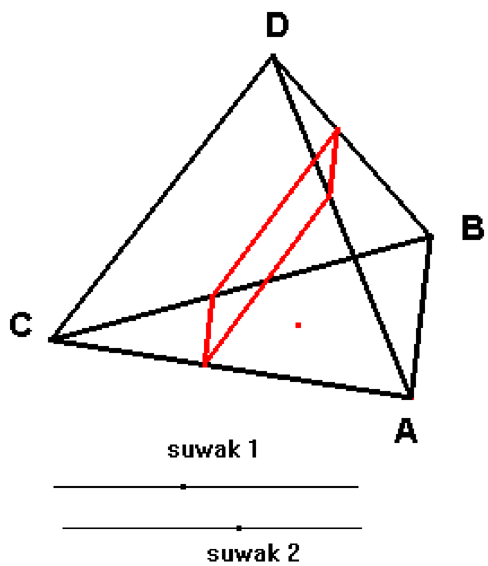
PROBLEM 4

Czy istnieje taki przekrój czworościanu, który jest kwadratem? Jeśli tak, to ile jest takich przekrojów? Jakie jeszcze inne przekroje może posiadać czworościan?

Rozwiązanie:

Problem pomogą Ci rozwiązać konstrukcje przekrojów czworościanu wykonane w programie Cabri II Plus lub Cabri 3D, których ilustracje przedstawiają rysunki 8, 9. 10 i 11. Na rysunkach 8 i 9 zamieszczone są przekroje czworościanu płaszczyznami dzielącymi krawędzie CB i CA oraz DA i DB w tym samym stosunku. Suwaki umieszczone obok konstrukcji pozwalają zmieniać położenie płaszczyzn przekroju. Jak widać przekrojem tym może być trójkąt równoboczny (płaszczyzna przekroju zawiera wówczas ścianę czworościanu), prostokąt, a nawet kwadrat.

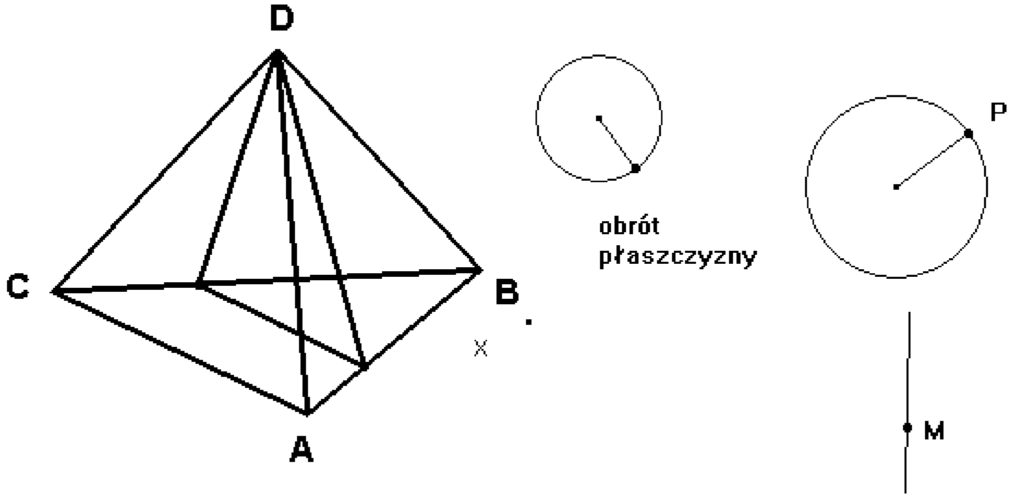




rys. 8 rys. 9

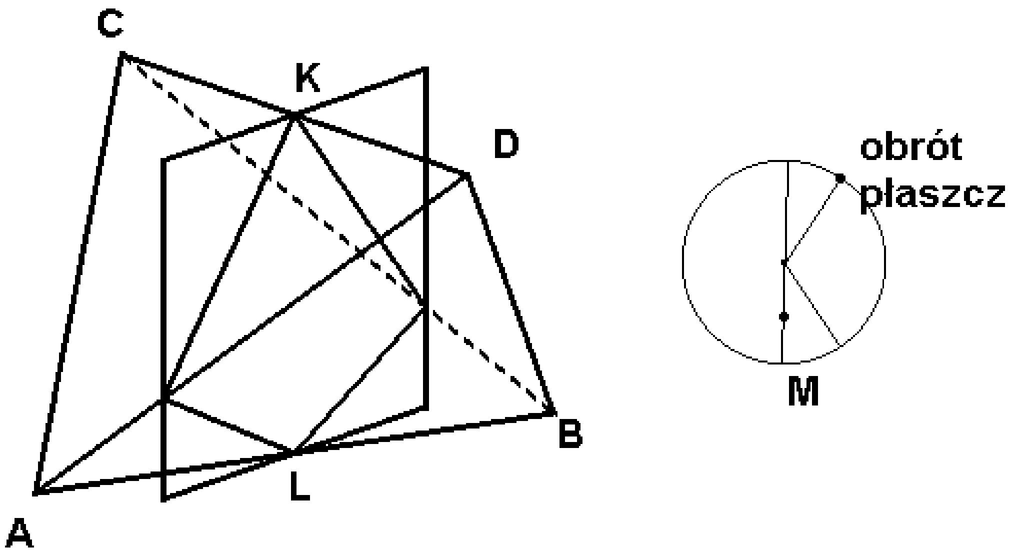
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Inną grupę przekrojów otrzymamy, gdy płaszczyzna przekroju będzie zawierać jedną z wysokości czworościanu – rys. 10. Wówczas przekrojem będzie pewien trójkąt. Czy może on być równoramienny? A równoboczny?



rys. 10

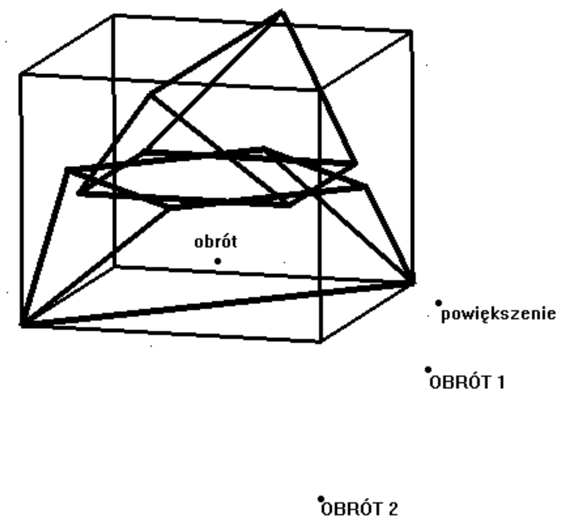
Nie mniej ciekawe przekroje posiada czworościan, gdy przetniemy go płaszczyzną zawierającą prostą przechodzącą przez środki skośnych krawędzi czworościanu. Mogą nimi być trójkąt równoramienny, deltoid, a w najlepszym przypadku kwadrat. Konstrukcja umożliwia obracanie płaszczyzny wokół osi *KL* oraz obrót czworościanu suwakiem *M*.



rys. 11

PROBLEM 5

Odnalazłeś już kwadratowy przekrój czworościanu. Przyjrzyj się uważnie kształtom dwóch wielościanów, które otrzymałeś w wyniku tego przekroju. Jaka relacja zachodzi pomiędzy nimi? (rys. 12)



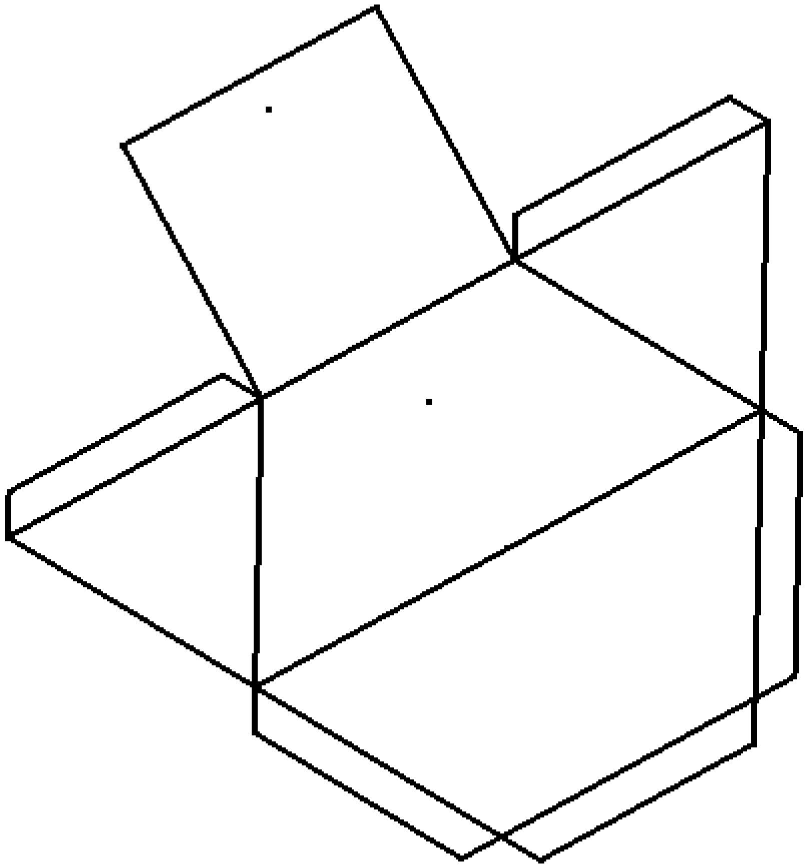
rys. 12

Konstrukcja umożliwia obserwację obu tych wielościanów poprzez ich obracanie wokół osi przechodzącej przez środki skośnych krawędzi czworościanu.

Oba mają po pięć ścian i są oczywiście przystające. Przyjrzyj się uważnie i zaprojektuj siatkę każdego z nich. Następnie sklej dwa takie pięciościany i daj swoim kolegom do złożenia z nich czworościanu.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jeżeli zaprojektowałeś tę siatkę, to sprawdź, czy jest ona taka sama jak przedstawiona na rysunku 13.



rys. 13

PROBLEM 6

Wiesz już, że istnieje kwadratowy przekrój czworościanu foremnego.

Czy można ustawić czworościan względem źródła światła tak, aby jego cień był kwadratem?

Czy kierunek promieni wydaje Ci się przypadkowy? Określ go.

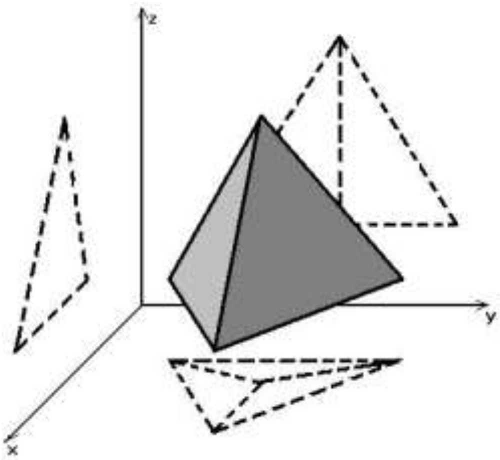
Czy potrafisz znaleźć jeszcze inny kierunek, dający też kwadratowy cień czworościanu?

Ile jest takich kierunków w przypadku danego czworościanu foremnego?

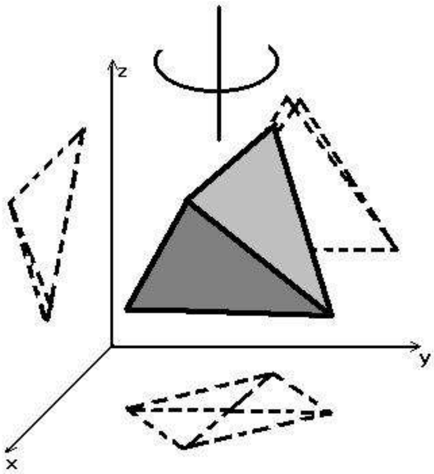
Rozwiązanie:

Zadanie to można sformułować też w inny sposób: czy istnieje tunel kwadratowy, przez który czworościan można przemieścić tak, by wypełniał całkowicie „okno” tunelu?

Oglądanie figury przestrzennej ułatwia dokonanie jej rzutów Monge’a. Gaspard Monge (1746–1818) – francuski matematyk i inżynier – był prekursorem współczesnej geometrii wykreślnej i konstrukcji inżynierskich. Wprowadził do geometrii przestrzennej trzy wzajemnie prostopadłe osie *OX*, *OY*, i *OZ* i na każdą z płaszczyzn wyznaczonych przez dwie osie zrzutował prostopadle figurę. Rysunek 161 ilustruje trójkątne rzuty Monge’a czworościanu foremnego. Rysunek 162 ilustruje natomiast takie jego położenie względem rzutni, że rzutem na płaszczyznę *XY* jest kwadrat.



rys. 14

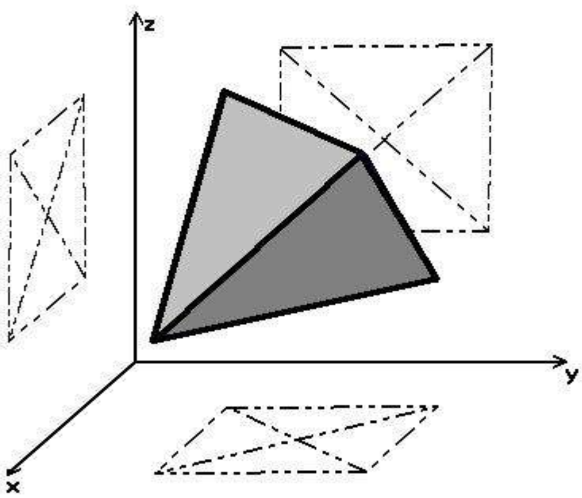


rys. 15

Zwróć uwagę, że kierunek rzutowania (oś *OZ*) przechodzi przez środki skośnych krawędzi czworościanu foremnego.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W trakcie obracania tego czworościanu w takim ustawieniu wokół osi przechodzącej przez środki tych krawędzi rzut na płaszczyznę *XY* będzie zachowany. Obróćmy teraz ten czworościan względem płaszczyzny *XY* wokół osi pokazanej na rysunku 15. W pewnym momencie uzyskamy takie położenie czworościanu względem rzutni Monge'a, w którym pozostałe dwa rzuty też będą kwadratami – rysunek 16.

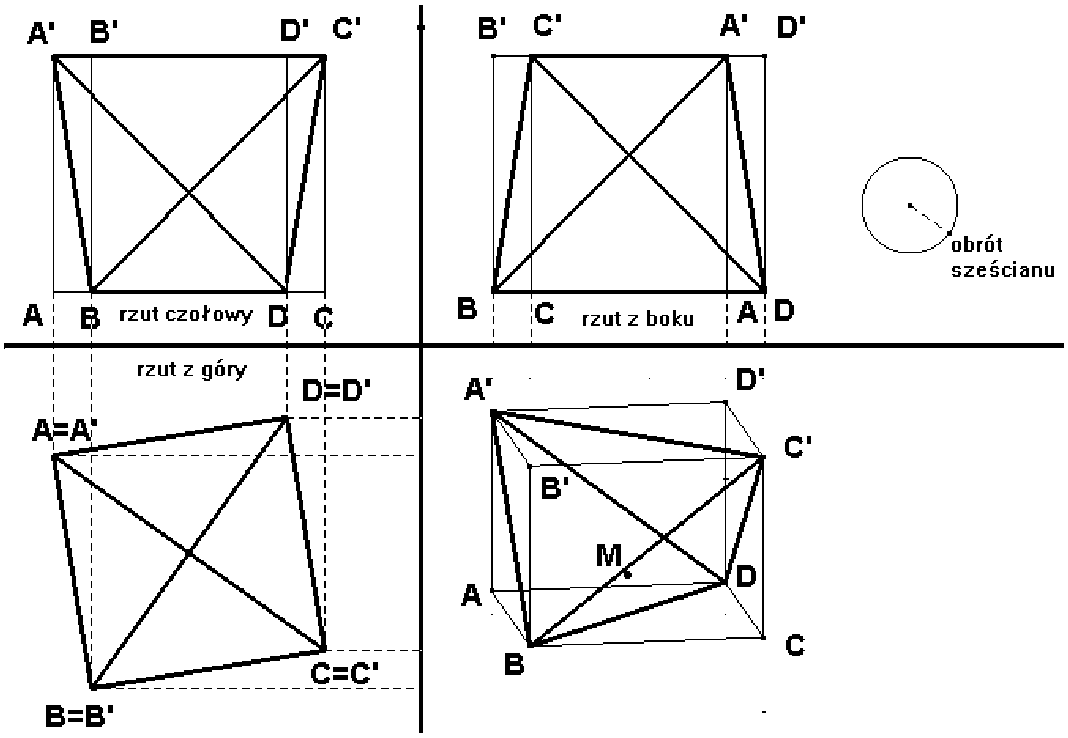


rys. 16

Tak więc istnieje takie położenie czworościanu, że nie tylko jeden rzut, ale wszystkie trzy są kwadratami. Zauważ, że kierunki rzutowania są w tym przypadku równoległe do każdej z osi rzutni Monge'a. To znów jest potwierdzeniem tego, co już poznaliśmy wcześniej. Skoro czworościan można odpowiednio umieścić w sześcianie, to jego trzy rzuty pokrywają się ze ścianami sześcianu, czyli są kwadratami równoległymi do płaszczyzn układu współrzędnych.

Program CABRI II pozwala utworzyć konstrukcję rzutni Monge'a i umieścić w niej sześcian oraz czworościan foremny. Jest ona nieco skomplikowana i nie ma tu miejsca na jej objaśnianie. Obracając każdą z brył za pomocą przygotowanych i odpowiednio oznaczonych pokręteł możesz obserwować jak dynamicznie zmieniają się ich rzuty Monge'a.

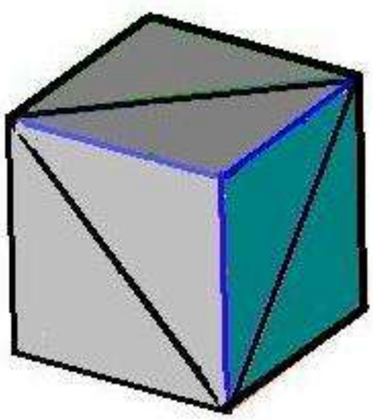
Rysunek 17 ilustruje trzy takie rzuty czworościanu: czołowy (od przodu), z góry i z boku. Cienie wielościanu nie można utożsamiać z jego rzutami, ale stanowią one ich obrys. Jak widać można tak ustawić czworościan foremny względem płaszczyzn rzutni Monge'a, aby przynajmniej jeden z rzutów czworościanu był kwadratem. Ustaw go tak, by wszystkie trzy były kwadratami.



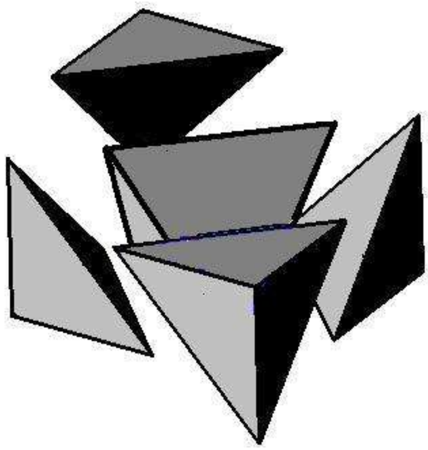
rys. 17

PROBLEM 7

Umieść w znany Ci sposób czworościan foremny w sześcianie i zauważ, że resztę sześcianu wypełniają cztery przystające do sobie ostrosłupy.



rys. 18



rys. 19

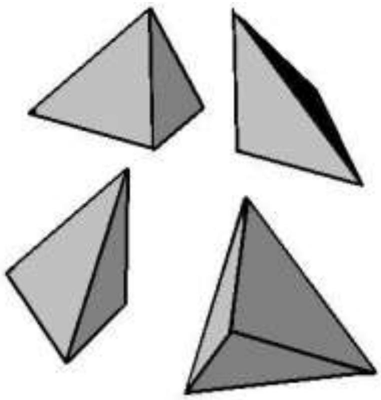
Oznacz krawędź sześcianu jako „*a*”, a czworościanu jako „*b*”.

Jaka relacja zachodzi pomiędzy „*a*” i „*b*”?

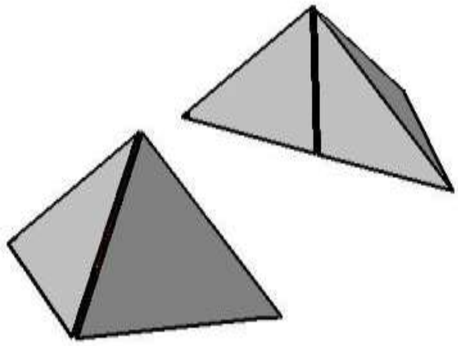
Spróbuj bez wykonywania rachunków obliczyć, ile razy objętość sześcianu jest większa od objętości czworościanu w nim umieszczonego.

Podpowiedź:

Zauważ, że każdy z ostrosłupów ma jedną ścianę przystającą do ściany czworościanu. Złóż ze sobą dwa takie ostrosłupy stykając je ścianami nieprzystającymi do ściany czworościanu (rys. 18, 17). To samo zrób z pozostałą dwójką ostrosłupów. Jaką bryłę otrzymałeś? Oblicz jej objętość.



rys. 20

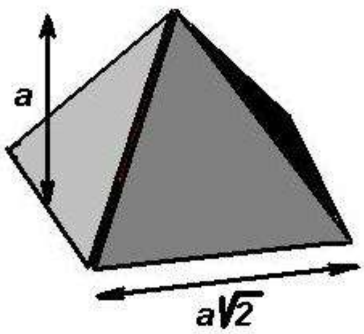


rys. 21

Rozwiązanie:

Przyjmując za *a* długość krawędzi sześcianu, a za *b* czworościanu wiesz, że $b = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Cztery ostrosłupy uzupełniające czworościan do sześcianu można złożyć w prawidłowy ostrosłup czworokątny o krawędzi podstawy $b = a\sqrt{2}$ i wysokości *a* (rysunek 22).



rys. 22

Ich objętość wynosi zatem:

$$V_{4ostr} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot a^3$$

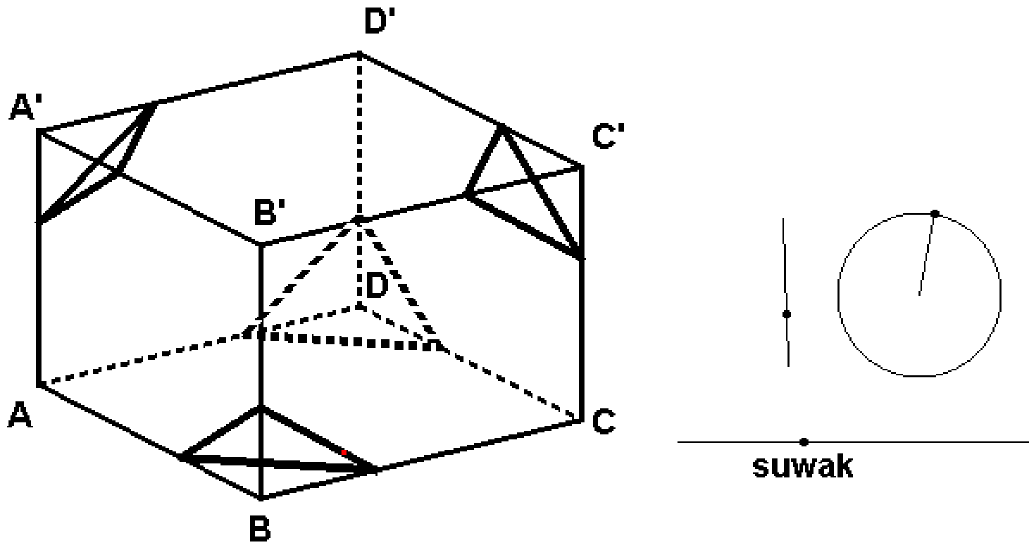
co oznacza, że objętość czworościanu umieszczonego w sześcianie stanowi $\frac{1}{3}$ objętości tego sześcianu.

Wobec tego objętość czworościanu o krawędzi b wynosi:

$$V_{czw} = \frac{1}{3} \cdot a^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{b^3}{6\sqrt{2}}$$

PROBLEM 8

W sześcianie *ABCDA'B'C'D',* którego ścianą przednią jest ściana *ABB'A'* ścinamy naroża przy wierzchołkach *B*, *D*, *A'* i *C'* prowadząc płaszczyzny prostopadłe do przekątnych wychodzących z tych wierzchołków w jednakowej odległości od nich.



rys. 23

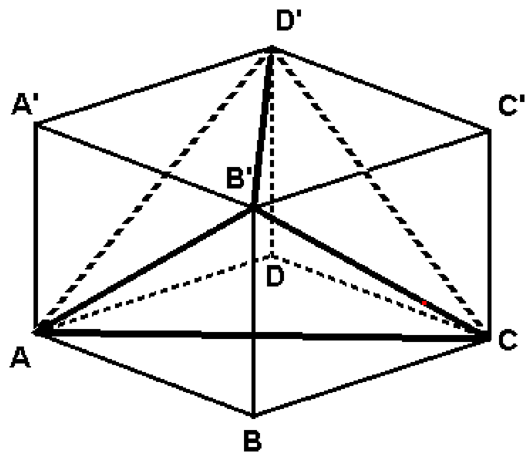
Gdy płaszczyzny te będziemy zbliżać do środka sześcianu, wówczas dojdziemy do takiego momentu, że przetną się one ze sobą zamykając w przestrzeni pewien wielościan. Naszkicuj ten wielościan wykreślając wcześniej kolejne fazy ścinania naroży.

3333333333333333333222222222222222222222222222222222222222222222222

Rozwiązanie:

Rozwiązując to zadanie na kartce papieru kreślisz kilkanaście takich przekrojów. Rysunek jest zbyt zamazany i trudno z niego odczytać rozwiązanie. Wykonaj jedna konstrukcję dynamiczna ścinanie wybranych naroży sześcianu (patrz rys. 23).

Teraz masz możliwość w sposób ciągły kreowania tych przekrojów. W etapie końcowym cztery trójkątne przekroje zamykają się w jedną całość – czworościan foremny umieszczony w sześcianie w sposób opisywany w poprzednich problemach – rys. 25.
Jest to więc pewna forma tworzenia czworościanu foremnego z sześcianu.



rys. 24

W kolejnej książce z serii CABRISTA poświęconej również stereometrii dowiesz się, że takimi metodami można generować z jednych wielościanów inne.

PROBLEM 9

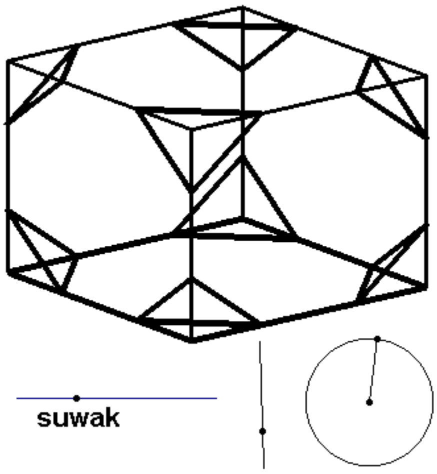
W sześcianie *ABCDA'B'C'D'* ścinamy wszystkie naroża płaszczyznami prostopadłymi, każdą do odpowiedniej przekątnej wychodzącej z wierzchołka tego naroża.

Gdy zaczniemy przesuwać te płaszczyzny w kierunku środka sześcianu, wówczas w pewnym momencie zamkną one pewien określony obszar przestrzeni. Jaki wielościan wyznaczył ten obszar?

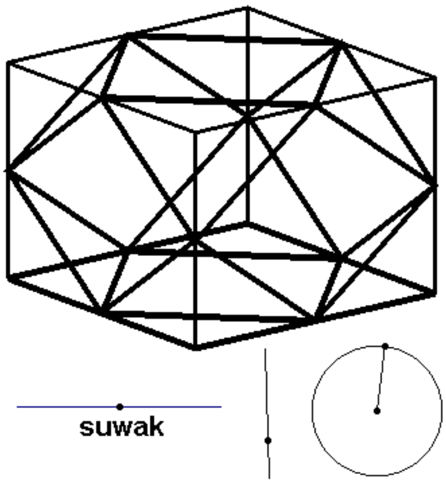
Naszkicuj na kartce sześcian i kolejne etapy ścinania naroży aż do uzyskania wspomnianego wielościanu.

Rozwiązanie:

Zadanie to zawiera w sobie elementy poprzedniego. Tu zamiast czterech naroży ścinamy wszystkie osiem. Jest to więc rozszerzenie poprzedniego problemu. Tutaj kreślenie przekrojów na kartce daje jeszcze mniej klarowny obraz niż poprzednio.



rys. 25



rys. 26

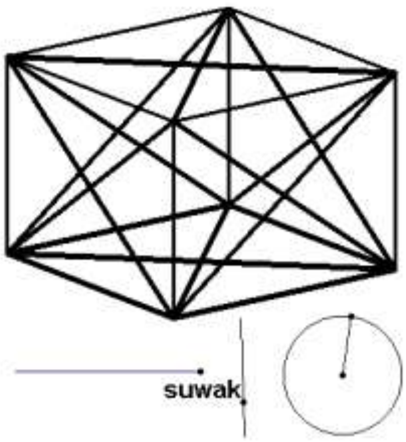
W pierwszym etapie ścinania naroży sześcianu dochodzimy do momentu, w którym trójkątne przekroje odcinają na każdej ścianie sześcianu ośmiokąt foremny. Tak utworzony wielościan posiada osiem ścian będących trójkątami foremnymi i sześć ścian będących ośmiościanami foremnymi. W matematyce nazywamy go sześcianem ściętym – rys. 25.

W drugim dochodzimy do sytuacji, w której trójkątne przekroje schodzą się wierzchołkami zamykając swoimi bokami kwadraty. Wielościan tak otrzymany składa się z ośmiu ścian będących trójkątami równobocznymi i sześciu ścian kwadratowych. W nomenklaturze matematycznej nosi on nazwę sześcioośmiościanu lub rzadziej czternastościanu (z uwagi na łączną liczbę wszystkich ścian)

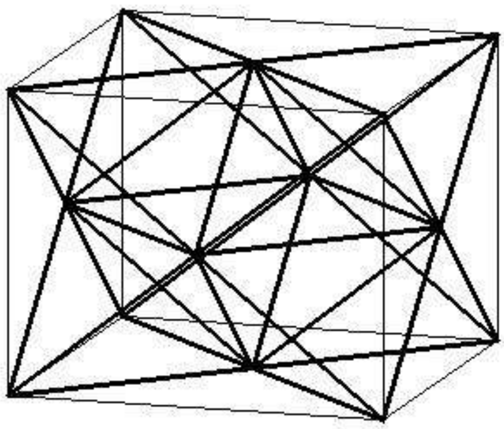
Oba tak otrzymane wielościany zaliczamy w matematyce do grupy wielościanów półforemnych Archimedesa.

Na tym jednak nie koniec. Suwak można poruszać dalej i okazuje się, że płaszczyzny przekrojów zaczynają się przenikać tworząc obiekt wklęsły. Po zamknięciu pewnego wielościanu wklęsłego okazuje się, że jest to znany już ośmiościan gwiaździsty (stella octangula) – bryła odkryta przez Johannesa Keplera w 1609 roku.

Na rysunku widać, jak powstaje ten wielościan. Składa się on z dwóch wzajemnie przenikających się czworościanów, których część wspólna jest ośmiościanem foremnym dualnym z sześcianem, w którym umieszczone są wszystkie te obiekty.

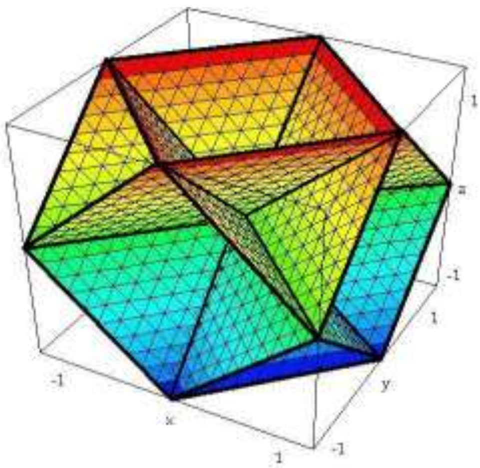


rys. 27



rys. 28

I tu jak widać, suwak zakończył swoją drogę i wydawałoby się, że już nie można nic więcej zrobić. Okazuje się, że to jednak jeszcze nie koniec. Płaszczyzny przekroju można przesuwać dalej. Czynność tę wykonał autor niniejszej publikacji w innym programie pozwalającym również animować obiekty przestrzenne i płaskie. Jest to program Davida Parkera ze Stanów Zjednoczonych, a jego popularna nazwa to DPGRAPH.



rys. 29

Obiekt ten (patrz rys, 29) można odnaleźć w internecie pod adresem www.dpgraph.com w dziale GALLERY.

PROBLEM 10

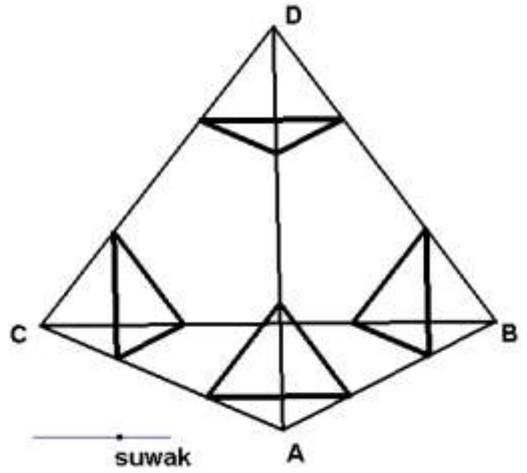
Dany jest czworościan foremny *ABCD*. Ścinamy jego naroża płaszczyznami prostopadłymi do jego wysokości w równych odległościach od wierzchołków. Przesuwamy płaszczyzny ścięć w kierunku środka czworościanu do momentu, aż płaszczyzny te zamkną pewien obszar przestrzeni.

Naszkicuj otrzymany wielościan.

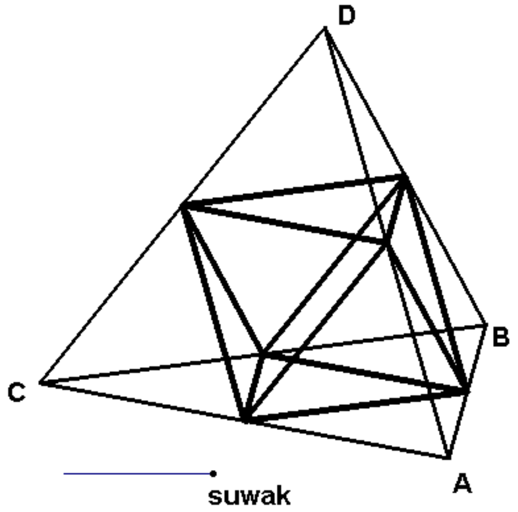
Rozwiązanie:

I tym razem warto posłużyć się dynamiczną konstrukcją CABRI II.

Suwakiem tworzymy kolejne trójkątne przekroje czworościanu, aż w pewnym momencie wytną one z każdej ściany czworościanu sześciokąty foremne. Otrzymany wielościan ma wszystkie krawędzie równej długości a ściany są albo trójkątami albo sześciokątami foremnymi. To kolejna bryła Archimedesowska zwana czworościanem ściętym – rysunek 30.



rys. 30



rys. 31

Dalsze posuwanie się przekrojów w kierunku środka czworościanu pozwala wyciąć z niego foremny wielościan o ośmiu ścianach trójkątnych – ośmiościan foremny.

PROBLEM 11

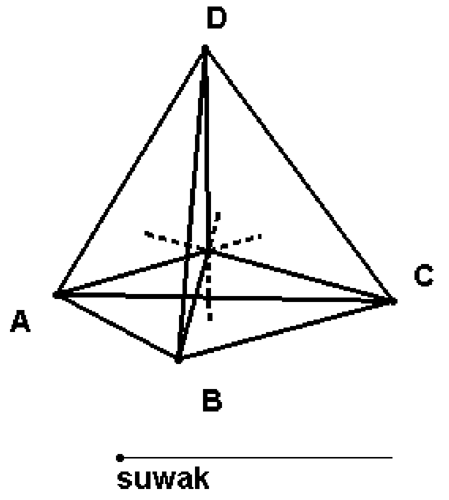
Niech punkt *S* będzie punktem przecięcia się wysokości czworościanu foremnego *ABCD*. Utwórz odcinki *AS*, *BS*, *CS*, *DS*. Tak wyznaczone odcinki stanowią krawędzie pewnych przystających ostrosłupów (gdyż *AS* = *BS* = *CS* = *DS*).

Ile jest tych ostrosłupów? Czym są ich podstawy? Jakie są ich wysokości? Czy potrafisz określić, bez wykonywania obliczeń, w jakim stosunku dzielą się wysokości czworościanu foremnego?

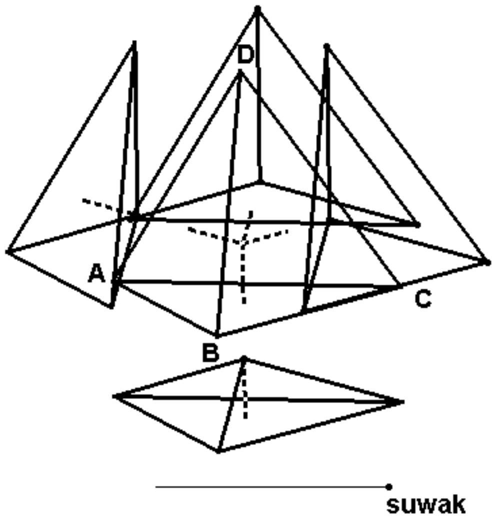
Rozwiązanie:

Aby uzyskać punkt *S,* należy poprowadzić wysokości czworościanu. Ich spodki na ściany czworościanu wyznaczają środki ciężkości tych ścian. Aby w CABRI znaleźć te spodki, warto przygotować makrokonstrukcję środka ciężkości.

Po połączeniu punktu *S* z wierzchołkami czworościanu foremnego otrzymujemy odcinki, które są krawędziami czterech przystających ostrosłupów. Ich podstawy są ścianami czworościanu foremnego.



rys. 32



rys. 33

Po wyciągnięciu tych ostrosłupów z czworościanu okazuje się, że ich wysokości to krótsza z części wysokości czworościanu na które podzielił ją punkt *S*. Skoro te ostrosłupy wypełniały cały czworościan, to ich objętości stanowią ¼ część objętości czworościanu. Ale ich podstawy i podstawa czworościanu są przystające, więc ich wysokości stanowią 1/4 część wysokości czworościanu. Zatem wysokości czworościanu dzielą się w stosunku 1:3 (1/4 i 3/4 wysokości).

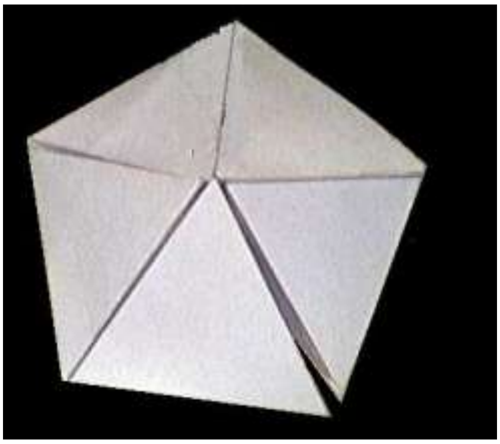
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 12

Czy można wypełnić przestrzeń używając do tego tylko czworościanów foremnych?

Rozwiązanie:

Pierwszym pomysłem, jaki przychodzi do głowy jest wykonanie próby na modelach kilkunastu czworościanów. Składamy je ze sobą przykładając do siebie ich ściany. Praktyka wskazuje, że można je tak składać dysponując pięcioma czworościanami. Szósty czworościan foremny nie mieści się już między nimi. Ale i te pięć czworościanów nie pasuje do siebie. Między nimi pozostaje mała luka.



rys. 34

Czyżby więc modele czworościanów były niedokładnie wykonane?

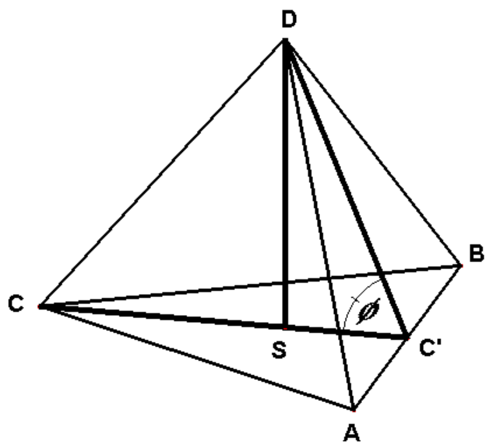
A może rzeczywiście między nimi występuje szpara? Gdyby pięć czworościanów miało stykać się dokładnie ze sobą, wówczas kąty dwuścienne między nimi musiałyby mieć miarę 72^0.

A jak jest faktycznie?

Kąt między ścianami czworościanu foremnego można wyznaczyć z trójkąta równoramiennego utworzonego przez przekrój czworościanu foremnego zawierającego wysokości dwóch jego ścian. Obliczenia są łatwe:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$$

gdzie *h* oznacza wysokość ściany bocznej czworościanu foremnego. Można odczytać z tablic lub komputera, że wówczas $\varphi \approx 70^0$.



rys. 35

Drugi sposób polega na umieszczeniu czworościanu foremnego w znany już sposób w sześcianie. Przyjrzyjmy się, czy można wyznaczyć kąt między jego ścianami?

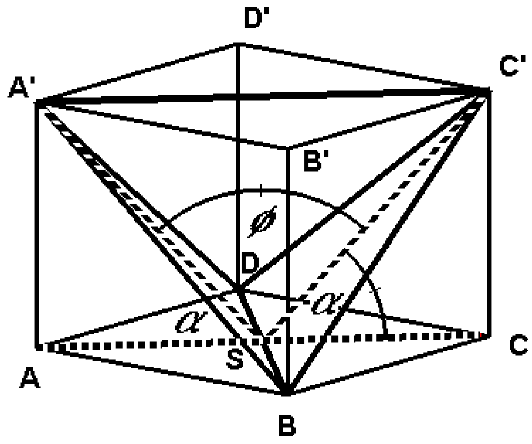
Zauważ, że:

$\varphi(\angle CSA') = 180^0 - 2\alpha$.

Ale $tg\alpha = \frac{CC'}{SC} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

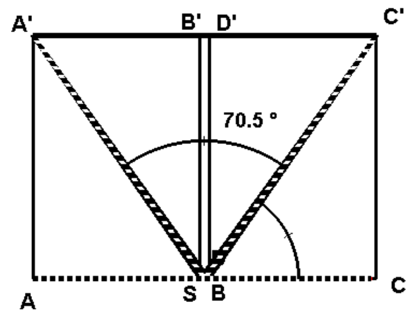
więc $\alpha \approx 54^0 73561032$

Stąd $\varphi = 180^0 - 109{,}4712106^0 = 70{,}52877937^0$



rys. 36

Trzecia metoda, polega na odczytaniu kąta dwuściennego na ekranie komputera. Program Cabri pozwala tak obrócić sześcian wraz z czworościanem, by móc odczytać faktyczną miarę poszukiwanego kąta dwuściennego. Kierunek widzenia musi się pokrywać z kierunkiem *B'D'*.



rys. 37

Oznacza to, że musimy ustawić sześcian w takim rzucie, by punkt *B'* pokrył się z punktem *D'*. Rysunek 37 ilustruje takie położenie sześcianu i odczytaną miarę kąta (ok. 70.5^0).

Tak więc nie da się wypełnić przestrzeni czworościanami foremnymi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego