KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

MATEMATYKA
scenariusze lekcji

dla szkół ponadgimnazjalnych
w zakresie rozszerzonym

„Nauka z WAT jest fascynująca!”

projekt nr WND-POKL.03.03.04-00-110/12

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

scenariusz lekcji nr 1

Przedmiot: **Matematyka**
Dział programowy: **Ciągi**
Temat: **Określenie ciągu wzorem rekurencyjnym**
Klasa: **Klasa II**
Zgodność z podstawą programową:
Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
- wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
Pomoce (środki) dydaktyczne:

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**

Cele: Uczeń:

- określa ciągi wzorem ogólnym,
- określa ciągi wzorem rekurencyjnym,
- oblicza wyrazy ciągu określonego w/w wzorami,
- określa monotoniczność ciągu,
- przekształca wyrażenia algebraiczne,
- rozwiązuje równania wymierne,
- posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**
Plan lekcji

Na wstępie przypominamy dwa podstawowe sposoby określania ciągów:

- określenie za pomocą wzoru ogólnego,
- określenie za pomocą wzoru rekurencyjnego.

Uczniowie podają przykłady ciągów określonych wzorem ogólnym i wzorem rekurencyjnym.
Nauczyciel wybiera ciąg określony za pomocą wzoru ogólnego, np. $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Uczniowie wypisują kilka jego wyrazów, np.: $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{5}{4}$, itd. Obliczone wyrazy sugerują, że jest to ciąg rosnący. Czy w ten sposób badamy monotoniczność ciągu? Nie, należy wykonać wszystkie możliwe odejmowania dowolnego wyrazu tego ciągu i wyrazu go poprzedzającego. W tym celu znajdujemy wyraz a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}.$$

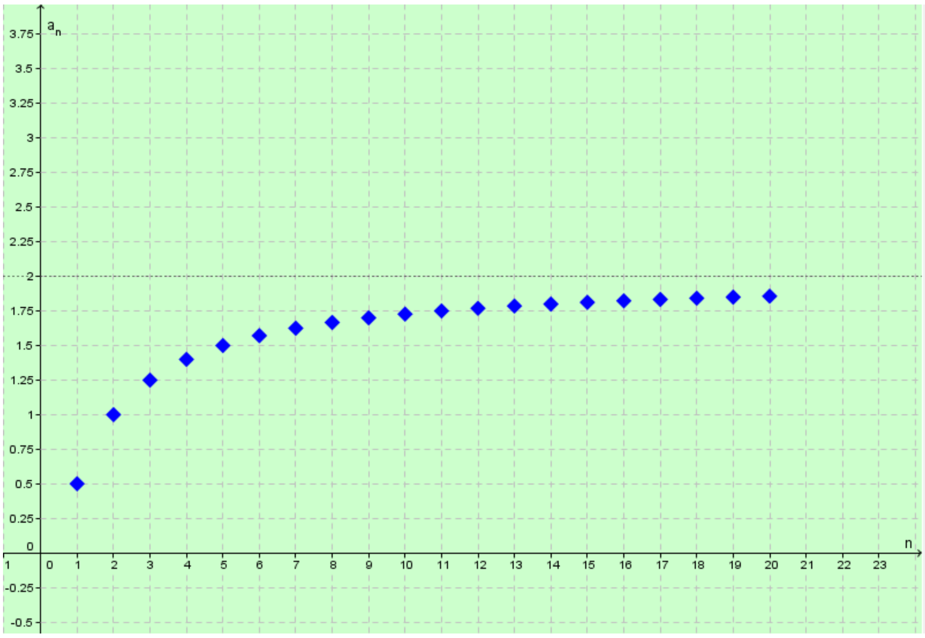
Mamy teraz:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$

Ponieważ liczba $\frac{3}{(n+1)(n+2)}$ jest liczbą dodatnią dla każdej liczby naturalnej n, więc dany ciąg jest rosnący. Czy jednak jego wyrazy rosną nieograniczenie?
Wykorzystamy teraz arkusz kalkulacyjny GeoGebry.

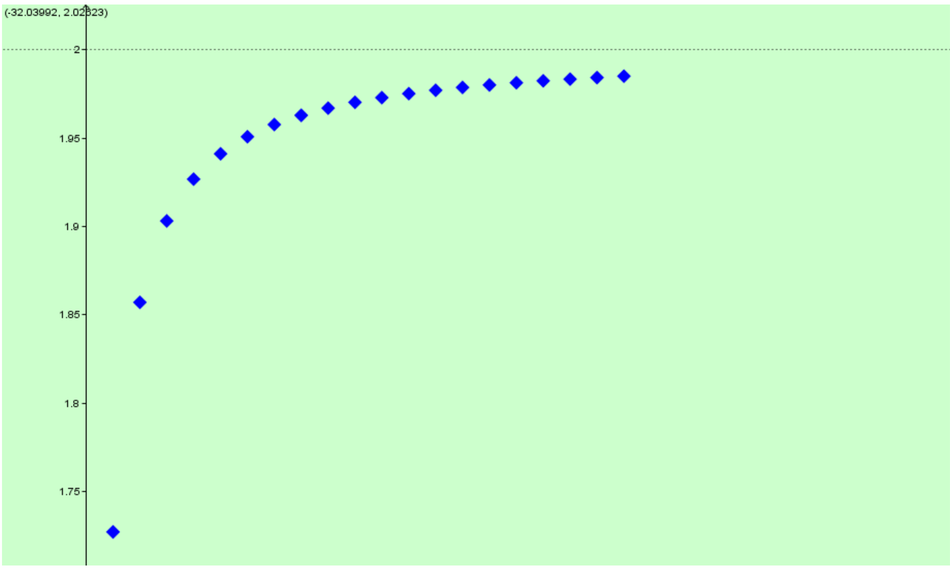
Otwieramy GeoGebrę i w Widoku zaznaczamy Widok Arkusza. W kolumnie B2 wpisujemy *n*, zaś w komórce C2 wpisujemy *a_n*. W kolumnie B3:B22 wpisujemy liczby od 1 do 20, zaś w C3 wpisujemy =(2*B3-1)/(B3+1) i kopiujmy formułę do komórek C3:C22.

By dokładniej „zobaczyć” ciąg, wykonajmy jego wykres. Zaznaczamy komórki B2:C22 i klikając prawym przyciskiem myszy wybieramy Utwórz i Lista punktów. W Widoku Grafiki pojawi się wykres, który możemy (dla przejrzystości) nieco zmodyfikować. Klikamy Widok i zaznaczamy punkty (trzymając shift) od A do T; klikamy zaznaczone punkty i wybieramy Pokaż etykietę, a potem Właściwości ⟶Kolor (np. niebieski) ⟶Styl⟶Wielkość punktu 5⟶Styl punktu (np. taki, jak na rysunku poniżej).



	A	B	C
1			
2		n	a_n
3		1	0.5
4		2	1
5		3	1.25
6		4	1.4
7		5	1.5
8		6	1.57143
9		7	1.625
10		8	1.66667
11		9	1.7
12		10	1.72727
13		11	1.75
14		12	1.76923
15		13	1.78571
16		14	1.8
17		15	1.8125
18		16	1.82353
19		17	1.83333
20		18	1.84211
21		19	1.85
22		20	1.85714

Jak zachowuje się ten ciąg dla dużych *n*? Wykonajmy poprzednie czynności w kolumnie B wpisując liczby od 10 do 200 co 10. Efekt jest następujący:



	A	B	C
1			
2		n	a_n
3		10	1.72727
4		20	1.85714
5		30	1.90323
6		40	1.92683
7		50	1.94118
8		60	1.95082
9		70	1.95775
10		80	1.96296
11		90	1.96703
12		100	1.9703
13		110	1.97297
14		120	1.97521
15		130	1.9771
16		140	1.97872
17		150	1.98013
18		160	1.98137
19		170	1.98246
20		180	1.98343
21		190	1.98429
22		200	1.98507

Widać wyraźnie, że kolejne wyrazy a_n zbliżają się do dwójki! Ciąg jest więc zbieżny, czyli jego wyrazy będą coraz bliżej liczby 2, ale nigdy jej nie osiągną. Na pierwszym rysunku widzimy, że $a_n = 1{,}85$ dla *n* = 19. A co otrzymamy przyrównując wzór na a_n do liczby 2? Będzie:

$$\frac{2n-1}{n+1} = 2,$$

a ostatecznie:

$$\frac{-3}{n+1} = 0.$$

Równanie to jest sprzeczne!

Przejdziemy teraz do zapisu wykonanego wcześniej:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$

Co z niego wynika? Mamy:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3}{(n+1)(n+2)},$$

co wraz z $a_1 = \frac{1}{2}$ dają następującą definicję rekurencyjną:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{3}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

Wprowadzając ten wzór do arkusza, otrzymujemy te same wartości, które otrzymaliśmy dla ciągu (a_n) zdefiniowanego wzorem ogólnym.

	A	B	C
1			
2		n	a_n
3		1	0.5
4		2	1
5		3	1.25
6		4	1.4
7		5	1.5
8		6	1.57143
9		7	1.625
10		8	1.66667
11		9	1.7
12		10	1.72727
13		11	1.75
14		12	1.76923
15		13	1.78571
16		14	1.8
17		15	1.8125
18		16	1.82353
19		17	1.83333
20		18	1.84211
21		19	1.85
22		20	1.85714

Zadanie domowe

Wyznacz kilka wyrazów ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+5}$.

Używając GeoGebry, sporządź jego wykres. Określ, czy jest zbieżny. Podaj definicję rekurencyjną tego ciągu. Jaka jest jego granica?

Uwaga

Jeśli dany ciąg jest określony rekurencyjnie to zwykle nie jest łatwo podać wzór ogólny tego ciągu. Podamy prosty przykład rozwiązania takiego zagadnienia.

Niech

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 1$$

Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy 3 i wyrazie pierwszym równym 1, zatem

$$a_n = 1 + 3(n-1)$$

scenariusz lekcji nr 2

Przedmiot: **Matematyka**

Dział programowy: **Funkcje**

Temat: **Funkcja logarytmiczna (i wykładnicza)**

Klasa: **Klasa I**

Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**

-Szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;

-Posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;

Pomoce (środki) dydaktyczne

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/),**
- **aplety GeoGebry,**
- **karty pracy.**

Cele: Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- stosować własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań;
- odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji;
- sporządzać wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- przekształcać wykresy funkcji wykładniczych;
- opisywać własności funkcji wykładniczych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- posługiwać się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, biologicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- obliczać logarytm liczby dodatniej;
- stosować własności logarytmów w rozwiązywaniu zadań;
- rozwiązywać proste równania logarytmiczne, korzystając z definicji logarytmu.
- posługiwać się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**

Formy pracy: **Praca indywidualna lub w grupach**

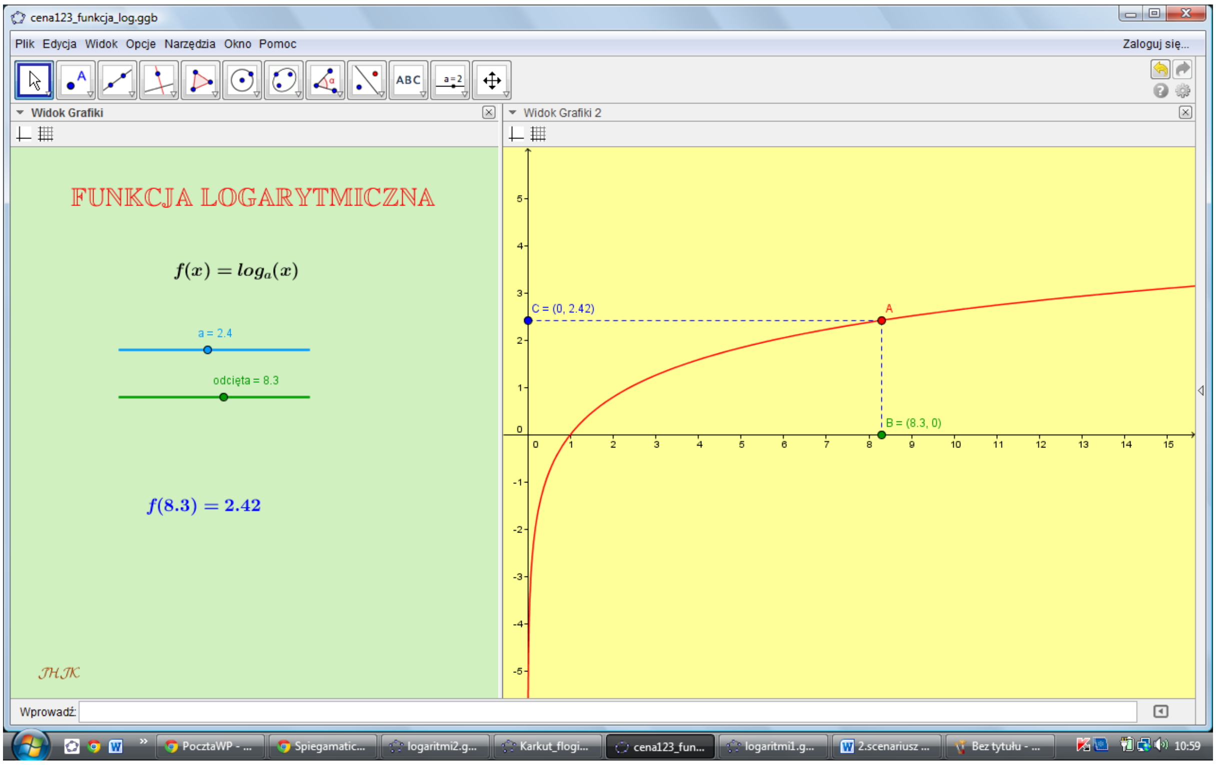
Plan lekcji

Na wstępie przypominamy podstawowe określania i twierdzenia dotyczące logarytmów:

- słowne określenie logarytmu,
- $\log_a a^c = c, a > 0 \wedge a \neq 1,$
- $a^{\log_a b} = b, a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0,$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c,\ a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0, c > 0,$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c\ ,\ a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0, c > 0,$
- $\log_a b^c = c \log_a b\ , a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0, c \in \mathbb{R},$

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, a > 0 \wedge a \neq 1, b > 0, c > 0 \wedge c \neq 1.$

I. Prezentacja 1. apletu *Funkcja logarytmiczna*



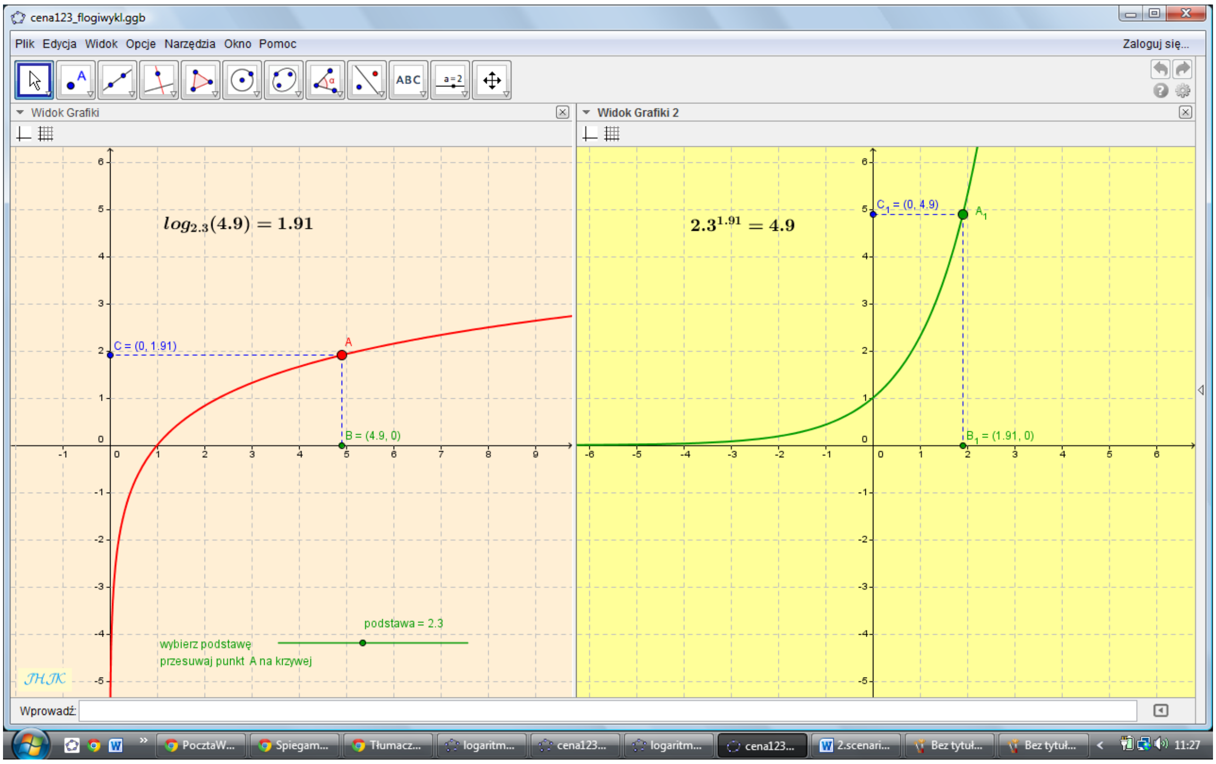
Czynności uczniów:

1. Czy funkcja logarytmiczna jest zawsze funkcją rosnącą?
2. Czy logarytm liczby ujemnej jest liczbą rzeczywistą?
3. Czy funkcja logarytmiczna przyjmuje wartości ujemne?
4. Na jakim odcinku osi *x* zauważasz szybką zmianę rzędnej punktu *A*?
5. Uzupełnij poniższą tabelę, korzystając z apletu GeoGebry (wiesz, że podajesz wyniki przybliżone?):

$\log_{2,3} 4,9 =$ 1,91	$\log_2 9 =$	$\log_{0,6} 4 =$	$\log_{0,3} 14$	$\log_{1,2}(-9) =$
$\log_{3,5} 3,2 =$	$\log_3 6 =$	$\log_{0,8} 5,6 =$	$\log_{0,7} 7 =$	$\log_{(-2)} 8 =$

Przybliżony wynik 1,91 otrzymujemy, ustawiając suwakiem podstawę 2,3, zaś punkt *A* przesuwamy myszką tak, by liczba 4,9 była jego odciętą.

II. Prezentacja 2. apletu



Powyższy aplet przedstawia wykres funkcji logarytmicznej i wykres funkcji odwrotnej – wykres funkcji wykładniczej. Przy pomocy suwaka *a* ustalamy jednocześnie podstawę logarytmu i podstawę potęgi, zaś suwakiem *k* zmieniamy położenie punktów A i A_1.

Czynności uczniów:

1.Obserwuj położenie punktów A i A_1 przy zmianie podstawy i uzupełnij następujące zdania:

a. Jeżeli podstawa rośnie, to punkt A na krzywej logarytmicznej ....

.... ;

punkt A_1 na krzywej wykładniczej ....

....

b. Jeżeli podstawa maleje, to punkt A na krzywej logarytmicznej ....

.... ;

punkt A_1 na krzywej wykładniczej ....

....

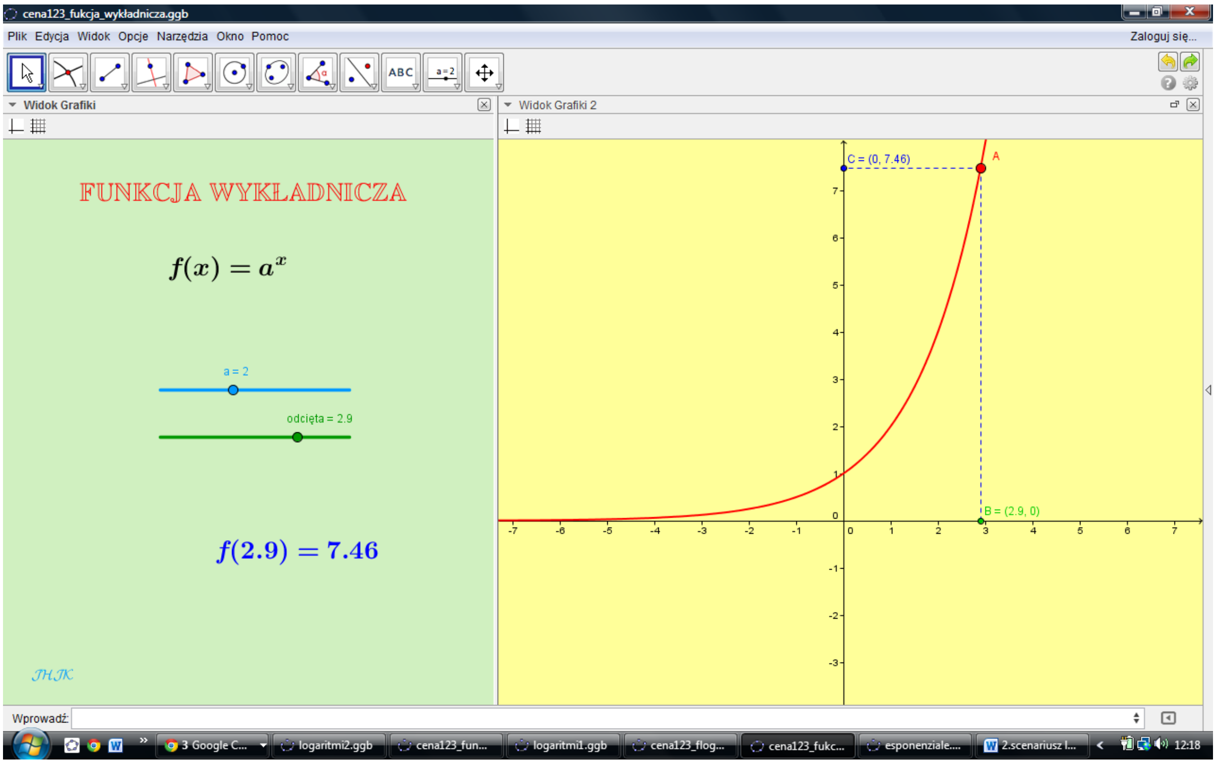
2. Uzupełnij tabelę, wpisując w miejscu kropek przybliżone wyniki otrzymane z apletu GeoGebry.

$\log_2 8 = \cdots$	$\log_{2,6} \cdots = 1,26$	$\log_{0,7} \cdots = 1,72$
$\log_{\dots} 2,78 = 1,3$	$\log_{0,7} \cdots = -1,68$	$\log_{2,3} 0,54 = \cdots$

3. Uzupełnij tabelę, wpisując w miejscu kropek przybliżone wyniki otrzymane z apletu GeoGebry.

$3,9^{-0,45} = \cdots$	$3.5^{0,45} = \cdots$	$4^{1,09} = \cdots$
$\dots^{0,79} = 3,22$	$4,5^{\cdots} = 1,54$	$\dots^{-2,62} = 6,18$

Poniższy aplet pozwala odczytać przybliżone wartości, jakie należy wpisać w trzeciej tabelce.



Zadanie domowe

Początkowa liczba bakterii w pewnej kulturze bakterii wynosiła N_0. Po upływie dwóch godzin liczba bakterii wynosiła 800, zaś po następnych dwóch godzinach liczba ta wzrosła do 2500. Ile bakterii było na początku? Ile bakterii będzie po 9. godzinach, jeśli założymy ich wykładniczy przyrost $(N(t) = N_0 \cdot a^t)$?

scenariusz lekcji nr 4

Przedmiot: **Matematyka**

Dział programowy: **Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**

Temat: **Odległość punktu od prostej o równaniu** $y = kx + q$

Klasa: **Klasa II**

Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**

- Oblicza odległość punktu od prostej;

Pomoce (środki) dydaktyczne

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/),**
- **aplet GeoGebry.**

Cele: Uczeń potrafi:

- obliczyć odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- wyznaczyć współrzędne środka odcinka;
- zastosować informacje o wektorze w układzie współrzędnych do rozwiązywania prostych zadań;
- wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- zbadać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- wyznaczyć równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci kierunkowej (lub ogólnej) i przechodzi przez dany punkt;
- obliczyć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- stosować wzór na odległość punktu od prostej (w tym obliczać odległość między prostymi równoległymi);
- rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej z wykorzystaniem poznanych wzorów oraz przekształceń geometrycznych, takich jak: symetria osiowa względem osi układu współrzędnych oraz symetria środkowa względem punktu *O*(0, 0);
- rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej dotyczących własności trójkątów i czworokątów;
- posługiwać się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).

Metody nauczania: **Elementy wykładu, demonstracja, ćwiczenia, prezentacja.**

Formy pracy: **Praca indywidualna**

Plan lekcji

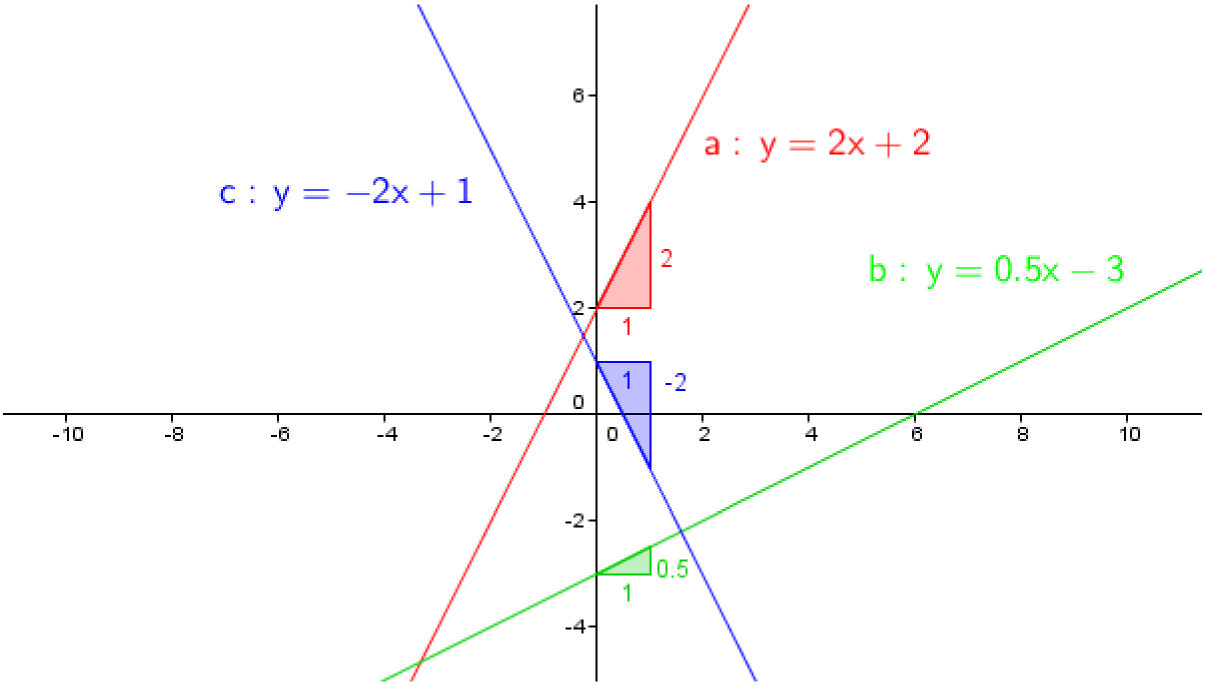
Na egzaminie maturalnym z matematyki uczeń ma do dyspozycji **Wybrane wzory matematyczne**, gdzie w dziale 9. GEOMETRIA ANALITYCZNA na stronie 5. mamy zapis:

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ *od prostej o równaniu* $Ax + By + C = 0$ *jest dana wzorem:*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

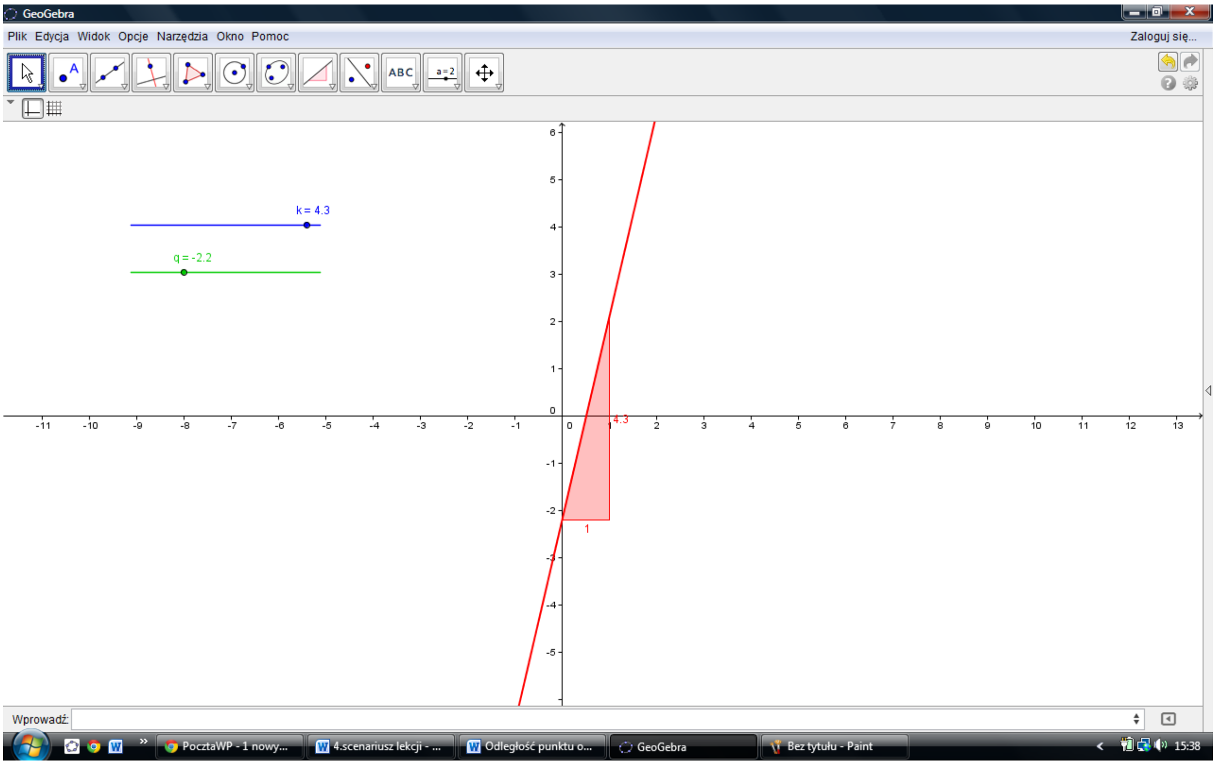
Czy to oznacza, że nie można obliczyć odległości punktu od prostej, gdy ta dana jest równaniem kierunkowym $y = kx + q$? Czy trzeba koniecznie przekształcić je do postaci ogólnej? Spróbujemy dzisiaj odpowiedzieć na to pytanie.

Na wstępie przypomnijmy pojęcie współczynnika kierunkowego prostej, posługując się np. następującym rysunkiem:

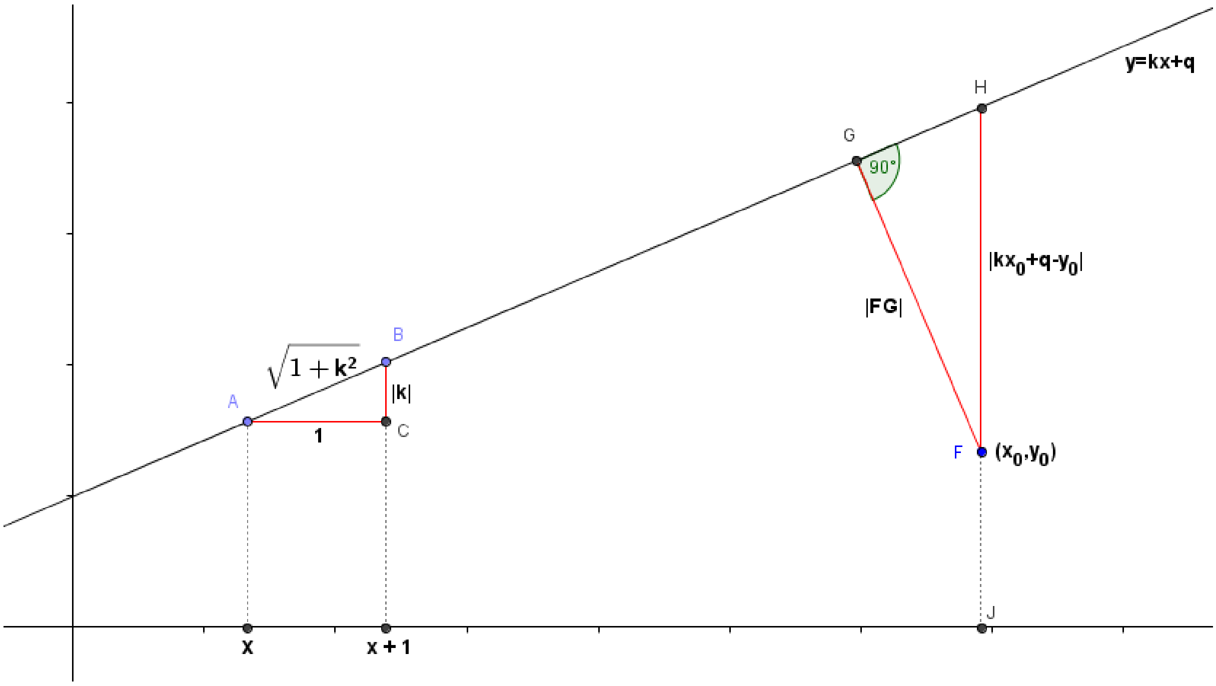


Zwracamy szczególną uwagę na to, że przyrost argumentu musi wynosić 1.

Możemy też, stosując GeoGebrę, pokazywać dynamicznie zmieniający się współczynnik kierunkowy prostej, jak w poniższym aplecie:



Przejdźmy teraz do rysunku, dzięki któremu ustalimy odpowiedni wzór.



Na rysunku tym mamy trójkąt prostokątny *ACB*, w którym odcinek *BC* ma długość $|k|$, gdzie k jest współczynnikiem kierunkowym prostej o równaniu $y = kx + q$.

Trójkąty prostokątne *ABC* i *FGH* są podobne, zatem

$$\frac{|FG|}{1} = \frac{|kx_0 + q - y_0|}{\sqrt{1+k^2}},$$

skąd

$$|FG| = \frac{|kx_0 + q - y_0|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

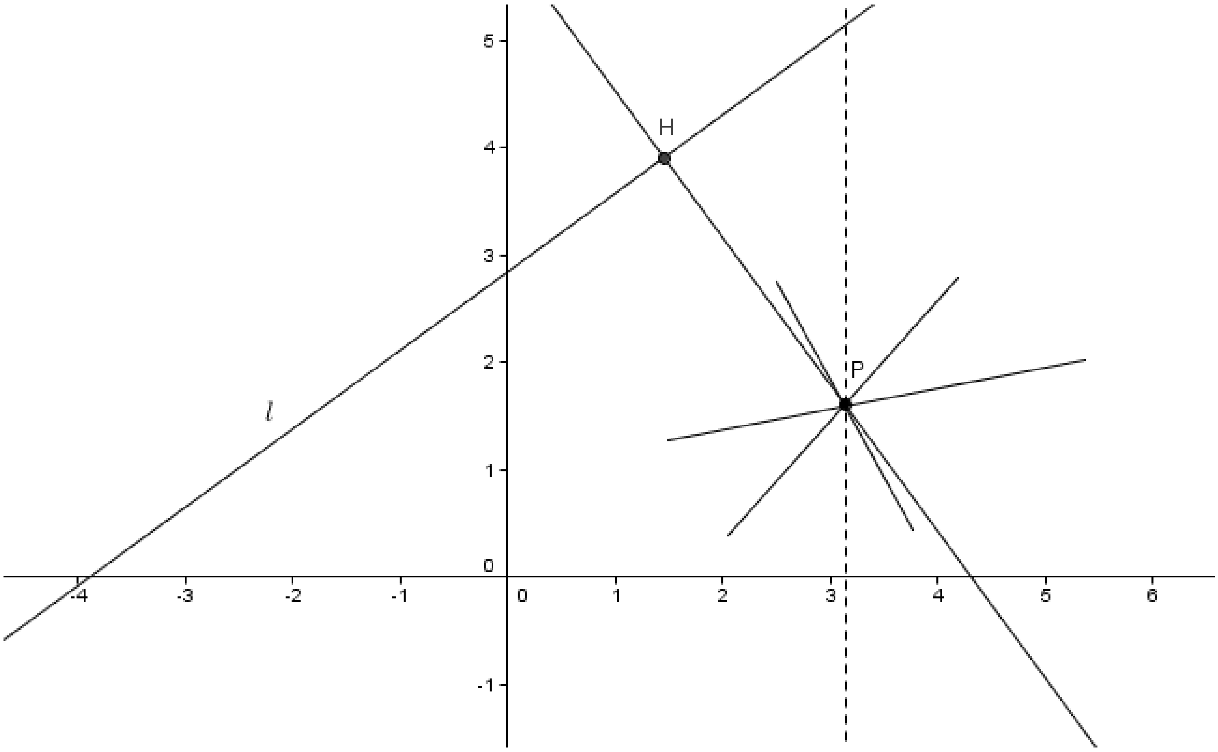
Wykazanie tego wzoru z zastosowaniem geometrii analitycznej jest nieco trudniejsze (szczególnie rachunkowo), ale dostępne uczniom, którzy wybiorą matematykę na poziomie rozszerzonym. Chociaż wzoru $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ nie ma w podstawie programowej nawet w zakresie rozszerzonym, to uczeń takiej klasy powinien sobie poradzić pisząc np.: $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$.

Twierdzenie. Niech *l* będzie prostą leżącą na płaszczyźnie, nierównoległą do osi *y*, o równaniu $y = kx + q$, zaś $P = (x_0, y_0)$ - punktem tej płaszczyzny.

Odległość punktu *P* od prostej *l* wyraża się wzorem:

$$|PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1+k^2}},$$

gdzie *H* jest punktem przecięcia się prostej *l* z prostą do niej prostopadłą, na której leży punkt *P*.



Dowód. Równanie pęku prostych o wierzchołku w punkcie *P* jest następujące: $y - y_0 = m(x - x_0)$ (w tym pęku nie ma oczywiście prostej równoległej do osi *y*). W przypadku, gdy prosta *l* jest równoległa do osi *x*, czyli ma równanie $y = q$, odległość $|PH| = |y_0 - q|$, co można też wywnioskować z podanego wzoru.

Jeśli *l* nie jest prostą równoległą do osi *x*, to ze wszystkich prostych pęku wybieramy prostą prostopadłą do prostej *l*, a zatem w miejsce *m* wstawiamy $-\frac{1}{k}$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = kx + q \\ y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

znajdziemy współrzędne punktu *H*. Mamy: $kx + q = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0$, skąd $x = \frac{x_0 + ky_0 - kq}{1 + k^2}$.

Współrzędne punktu *H* są więc następujące: $x = \frac{x_0 + ky_0 - kq}{1 + k^2}$, $y = \frac{kx_0 + k^2 y_0 + q}{1 + k^2}$.

Szukaną odległością punktu *P* od prostej *l* jest odległość punktów *P* i *H*. Obliczmy ją zatem.

$$P = (x_0, y_0), H = \left(\frac{x_0 + ky_0 - kq}{1 + k^2}, \frac{kx_0 + k^2 y_0 + q}{1 + k^2}\right)$$

$$|PH| = \sqrt{\left(\frac{x_0 + ky_0 - kq}{1+k^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{kx_0 + k^2 y_0 + q}{1+k^2} - y_0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ky_0 - kq - k^2 x_0}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{kx_0 + q - y_0}{1+k^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{k^2(k^2+1)x_0^2 + (k^2+1)y_0^2 + (k^2+1)q^2 - 2k(k^2+1)x_0 y_0 + 2k(k^2+1)x_0 q - 2(k^2+1)q y_0}{(1+k^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(k^2+1)(k^2 x_0^2 + y_0^2 + q^2 - 2kx_0 y_0 + 2kx_0 q - 2q y_0)}{(1+k^2)^2}} = \sqrt{\frac{(kx_0 - y_0 + q)^2}{1+k^2}} = \frac{|kx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1+k^2}},$$

a to należało wykazać.

W przypadku, gdy prosta *l* jest równoległa do osi *y*, czyli gdy ma równanie postaci *x* = *h*, to odległość $|PH| = |x_0 - h|$. W przypadku, gdy punkt *P* jest punktem prostej *l*, to $|PH| = 0$, co łatwo wywnioskować z uzyskanego wzoru.

Przykład. Dana jest prosta *l* o równaniu $y = \frac{3}{2}x + 3$ oraz punkt *P* = (2, 1). Oblicz odległość punktu *P* od prostej *l*.

Rozwiązanie. Stosując wzór z udowodnionego twierdzenia mamy:

$$|PH| = \frac{|kx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2}\cdot 2 - 1 + 3\right|}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{13}{4}}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

Zadanie domowe

Dana jest prosta *l* o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 1$ oraz punkt *P* = (2, 1). Oblicz odległość punktu *P* od prostej *l*.

scenariusz lekcji nr 5

Przedmiot: **Matematyka**
Dział programowy: **Rachunek różniczkowy**
Temat: **Figury w paraboli**
Klasa: **Klasa III**
Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**

-korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji;
-znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;
-stosuje pochodne do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

Pomoce (środki) dydaktyczne

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
- **aplety GeoGebry.**

Cele: Uczeń potrafi:

- obliczyć pochodną funkcji w punkcie,
- sprawnie wyznaczać funkcje pochodne danych funkcji na podstawie poznanych wzorów,
- napisać równanie stycznej do wykresu funkcji oraz rozwiązywać różne zadania z wykorzystaniem wiadomości o stycznej ,
- zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej,
- wyznaczyć ekstrema funkcji różniczkowalnej,
- zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować jej wykres,
- zastosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk z życia codziennego opisanych wzorami funkcji wymiernych (zadania optymalizacyjne),
- posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).

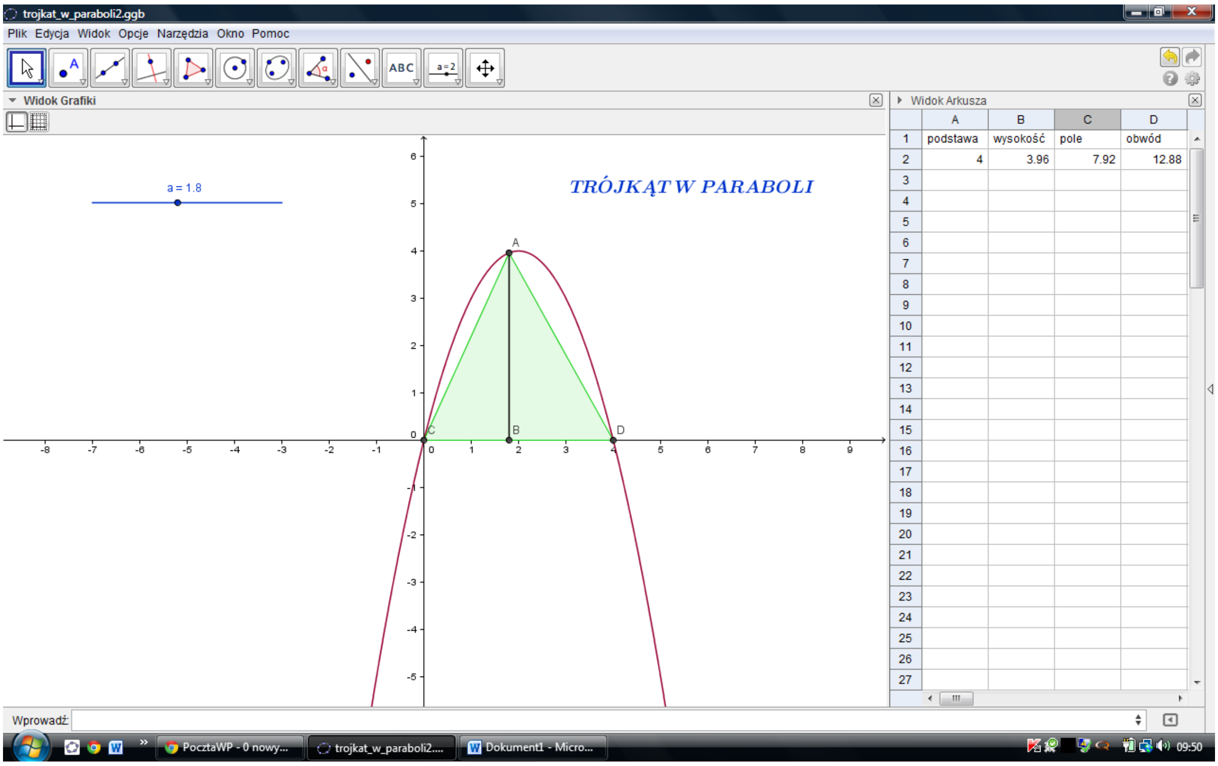
Metody nauczania: **Elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia, prezentacja**
Formy pracy: **Praca indywidualna lub w grupach**
Plan lekcji

Zadanie 1 (TRÓJKĄT W PARABOLI)

Obliczyć pola trójkątów, których podstawa jest odcinkiem o końcach (0, 0) i (4, 0), zaś wierzchołek leży na tej części paraboli o równaniu $y = -x^2 + 4x$, która zbudowana jest dla $x \in \langle 0,4 \rangle$.
Niech $a \in (0,4)$. Każdy punkt paraboli ma współrzędne $(a, -a^2 + 4a)$. Pole każdego trójkąta jest więc równe:

$$P(a) = \frac{1}{2} \cdot 4(-a^2 + 4a) = -2a^2 + 8a.$$

Jeśli np. $a = \frac{1}{2}$, to $P = 3{,}5$. Ze względu na symetrię punktów paraboli pole równe 3,5 uzyskamy również dla $a = \frac{7}{2}$. Wniosek wydaje się oczywisty: trójkąt osiągnie pole maksymalne wówczas, gdy stanie się trójkątem równoramiennym, czyli dla *a* = 2 (jego wierzchołek pokrywa się wówczas z wierzchołkiem paraboli).Wszystko to możemy sprawdzić eksperymentując z GG (przykładowy plik zamieszczono poniżej).



Mamy tu również nietrudny przykład pozwalający zastosować metody rachunku różniczkowego. Niech bowiem

$$P(a) = -2a^2 + 8a.$$

Wówczas

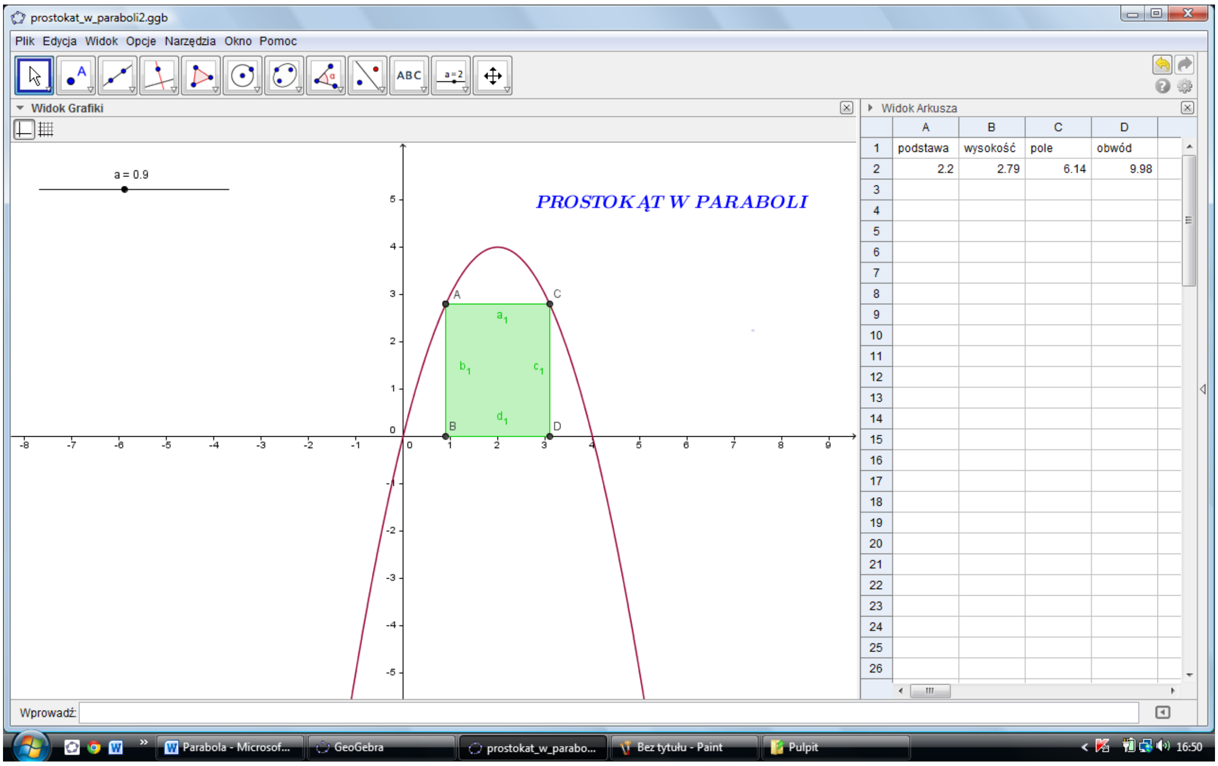
$$P'(a) = -4a + 8.$$

$P'(a) = 0$ dla $a = 2$. Dla $a < 2$ pochodna jest dodatnia, zaś dla $a > 2$ pochodna jest ujemna. Oznacza to, że funkcja *P* jest funkcją rosnącą w przedziale (0, 2), zaś malejącą w przedziale (2, 4). Osiąga zatem w punkcie 2 maksimum, co oznacza, że trójkąt o największym polu jest trójkątem równoramiennym.

Zadanie 2 (PROSTOKĄT W PARABOLI)

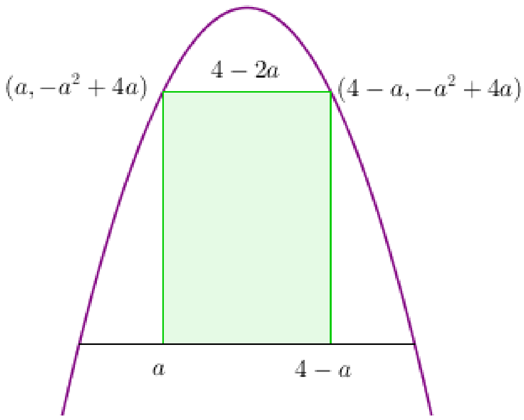
Obliczmy pola prostokątów wpisanych w parabolę o równaniu $y = -x^2 + 4x$, podobnie jak obliczaliśmy pola trójkątów w poprzednim zadaniu.

Wykorzystajmy najpierw GG tworząc odpowiedni plik. Przewidywany efekt końcowy może być następujący:



Posługując się suwakiem stwierdzamy, że maksymalne pole wynosi 6,14 dla *a* = 0,9 (po zmianie zaokrąglenia do czterech miejsc po przecinku otrzymujemy 6,1583 dla *a* = 0,85).

Zadajmy jeszcze pytanie: dla jakiego *a* prostokąt ten jest kwadratem? Proszę zwiększyć liczbę miejsc po przecinku np. do czterech oraz ustawić krok suwaka na 0,001.
Przejdźmy do obliczeń.



Korzystając z powyższego rysunku ustalamy pole prostokąta:

$P(a) = (4-2a)(-a^2+4a) = 2a^3 - 12a^2 + 16a.$

$P'(a) = 6a^2 - 24a + 16.$

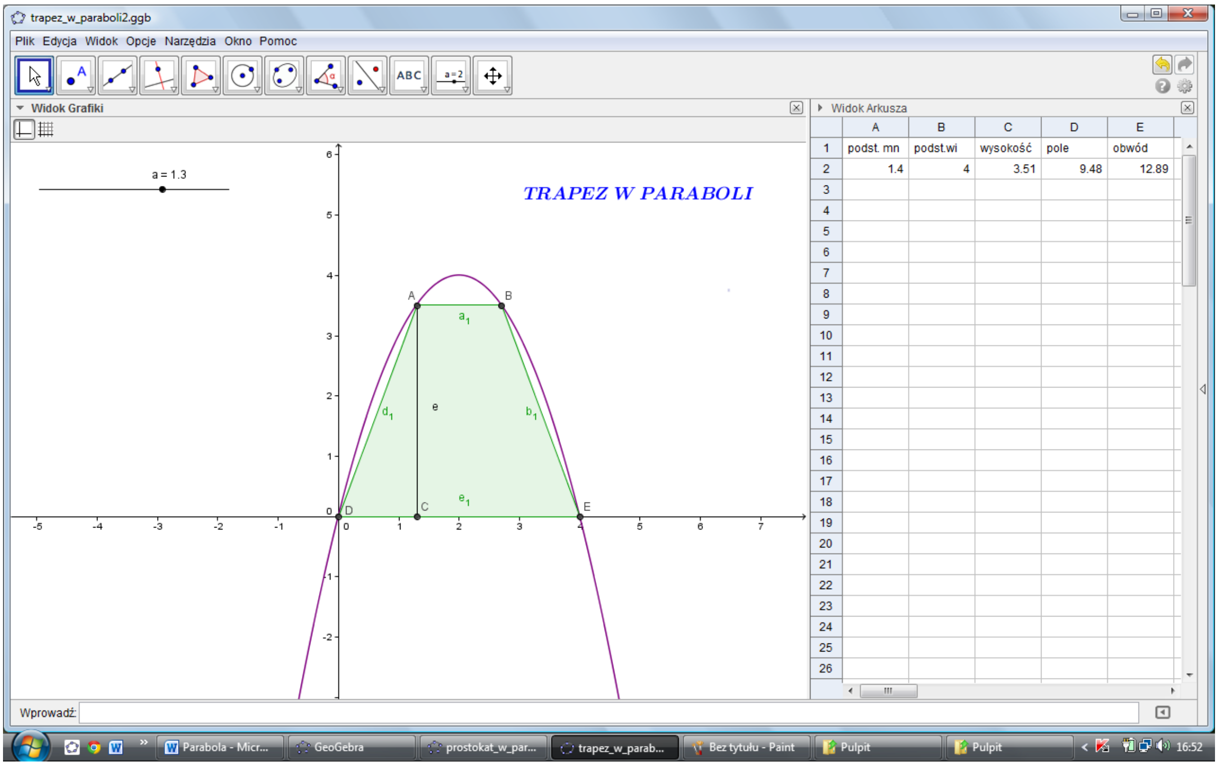
$P'(a) = 0$ dla $a = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ oraz dla $a = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$. Badając znak funkcji pochodnej stwierdzamy, że funkcja *P* osiąga maksimum dla $a = \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}85$, co potwierdza eksperymenty prowadzone w GG.

Możemy tutaj też obliczyć, że prostokąt ten jest kwadratem dla $a = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76$.

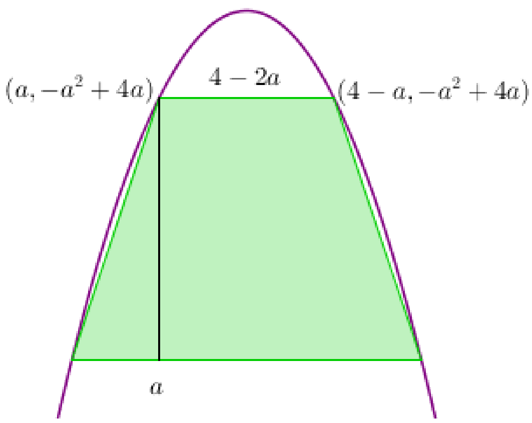
Zadanie 3 (TRAPEZ W PARABOLI)

Obliczmy jeszcze pola trapezów wpisanych w parabolę o równaniu $y = -x^2 + 4x$, podobnie jak w poprzednich zadaniach obliczaliśmy pola trójkątów i prostokątów.

Wykorzystajmy plik GG. Przewidywany efekt końcowy może być następujący:



Przejdźmy do rozwiązania rachunkowego.



Korzystając z powyższego rysunku, otrzymujemy:

$P(a) = a(a-4)^2$.

$P'(a) = 3a^2 - 16a + 16$.

Funkcja ta osiąga wartość maksymalną $\frac{256}{27}$ dla $a = \frac{4}{3}$ (w pliku GG mamy wartość 9,48 dla *a* = 1,3).

Otrzymane funkcje można również badać przy pomocy GG, jak to pokazują poniższe pliki.

Zadanie domowe

Zrealizuj zagadnienia przedstawione na lekcji stosując funkcję $y = -x^2 + 6x$ we właściwej dziedzinie.

scenariusz lekcji nr 6

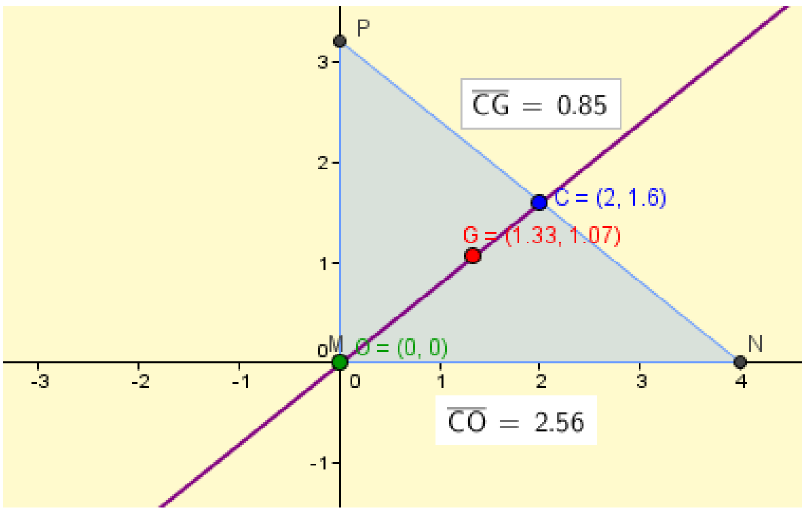
Przedmiot: **Matematyka**
Dział programowy: **Planimetria**
Temat: **Punkty szczególne trójkąta**. **Prosta Eulera**
Klasa: **Klasa II**
Zgodność z podstawą programową: **Uczeń:**
spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego.
Pomoce (środki) dydaktyczne:

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
- **aplet GeoGebry.**

Cele: Uczeń:

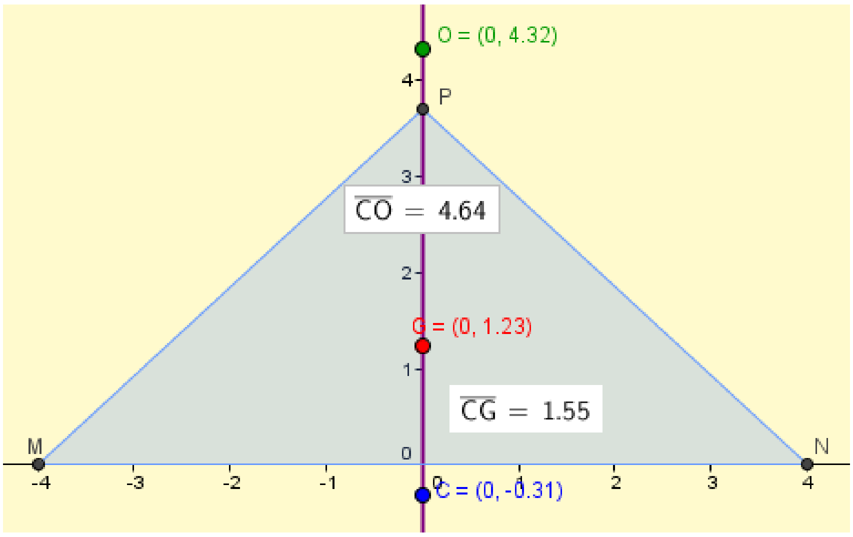
- konstruuje symetralną boku trójkąta,
- konstruuje środkową trójkąta,
- konstruuje wysokość trójkąta,
- zna pojęcia: ortocentrum (*O*), barycentrum (*G*) i środek okręgu opisanego na trójkącie(*C*),
- uzasadnia, że punkty *O*, *G*, *C* leżą na jednej prostej w trójkącie prostokątnym,
- uzasadnia, że punkty *O*, *G*, *C* leżą na jednej prostej w trójkącie równoramiennym,
- formułuje hipotezy,
- uzasadnia hipotezy
- rozwiązuje układy równań,
- oblicza współczynnik kierunkowy,
- oblicza długość odcinka,
- posługuje się programem GeoGebra.

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
Formy pracy: **Praca w grupach**
Plan lekcji
Wykorzystujemy aplet i rozpatrujemy trójkąt prostokątny.



Na podstawie obserwacji uczniowie stwierdzają, że w tym przypadku punkty *O*, *G*, *C* leżą na jednej prostej. Mierzymy odcinki *CG* i *CO* i stwierdzamy, że $\frac{CG}{CO} = \frac{1}{3}$.

Wykorzystujemy aplet i rozpatrujemy trójkąt równoramienny.

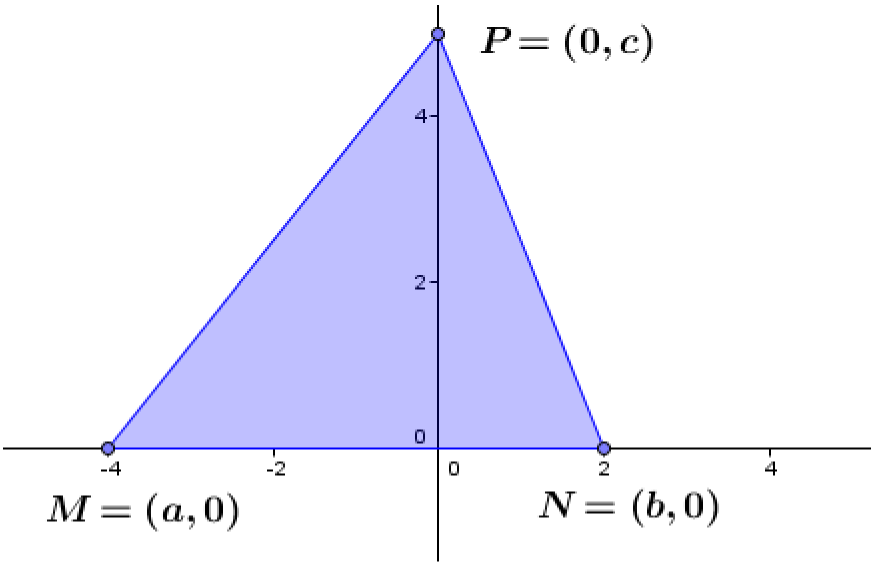


Na podstawie obserwacji uczniowie stwierdzają, że i w tym przypadku punkty *O*, *G*, *C* leżą na jednej prostej. Mierzymy odcinki *CG* i *CO* i stwierdzamy, że i tu $\frac{CG}{CO} = \frac{1}{3}$.

Wniosek

W przypadku trójkątów prostokątnych i równoramiennych punkty *O*, *G*, *C* leżą na jednej prostej (prosta Eulera), zaś $\frac{CG}{CO} = \frac{1}{3}$.

Czy tak jest w dowolnym trójkącie? Sprawdźmy to, wykorzystując geometrię analityczną.
Niech punkty *M* i *N* leżą na osi *x*, zaś punkt *P* na osi *y*, jak na poniższym rysunku.



I. PUNKT PRZECIĘCIA WYSOKOŚCI (*O* - ortocentrum)

Wysokość trójkąta opuszczona z wierzchołka *P* leży na osi *y*, a więc zawiera się w prostej o równaniu $x = 0$. Wysokość opuszczona z wierzchołka *N* jest prostopadła do prostej *MN*, której współczynnik kierunkowy wynosi:

$$\frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{c-0}{0-a} = -\frac{c}{a}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka *N* jest więc równy $\frac{a}{c}$. Proste prostopadłe do *MP* mają więc równania: $y = \frac{a}{c}x + q$. Aby ustalić *q*, wykorzystamy współrzędne punktu *N*.

Mamy:

$$\frac{a}{c} \cdot b + q = 0,$$

$$q = -\frac{ab}{c}.$$

Zatem

$$y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c}.$$

Ortocentrum *O* trójkąta *MNP* uzyskamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{a}{c}x - \frac{ab}{c} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow O = \left(0, -\frac{ab}{c}\right)$$

II. PUNKT PRZECIĘCIA SYMETRALNYCH (*C* – środek okręgu opisanego)

Środek odcinka *MN* ma współrzędne $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$, więc symetralna boku *MN* ma równanie $x = \frac{a+b}{2}$. Ponieważ symetralna boku *MP* ma współczynnik kierunkowy równy $\frac{a}{c}$, więc równanie rodziny prostych, do której należy symetralna, jest następujące:

$$y = \frac{a}{c}x + q.$$

Współczynnik *q* ustalimy, wykorzystując współrzędne środka odcinka *MP*. Są one następujące: $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Zatem

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{a}{2} + q = \frac{c}{2},$$

Skąd

$$q = \frac{c}{2} - \frac{a^2}{2c}.$$

Szukana prosta ma więc równanie:

$$y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2 - a^2}{2c}.$$

Współrzędne punktu *C*, będącego środkiem okręgu opisanego na trójkącie *MNP* uzyskamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{a}{c}x + \frac{c^2 - a^2}{2c} \\ x = \frac{a+b}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab + c^2}{2c}\right)$$

III. PUNKT PRZECIĘCIA ŚRODKOWYCH (*G* – barycentrum, środek ciężkości trójkąta)

Wykorzystajmy **Wybrane wzory matematyczne** (str. 6):

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Stosując ten wzór do trójkąta *MNP*, mamy:

$$G = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Mamy zatem:

$$C = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right),\quad G = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right),\quad O = \left(0, -\frac{ab}{c}\right).$$

IV. WSPÓŁLINIOWOŚĆ

Obliczmy współczynnik kierunkowy prostych *OC* i *OG*.

Po łatwych obliczeniach, otrzymujemy:

$$m_{OC} = m_{OG} = \frac{3ab + c^2}{c(a+b)},\quad a \neq -b,$$

co oznacza, że punkty *O*, *C* i *G* są współliniowe.

V. STOSUNEK

Obliczmy długości odcinków *CG* i *CO*.

$$|CG| = \sqrt{(x_C - x_G)^2 + (y_C - y_G)^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{6}\right)^2 + \left(\frac{3ab+c^2}{6c}\right)^2},$$

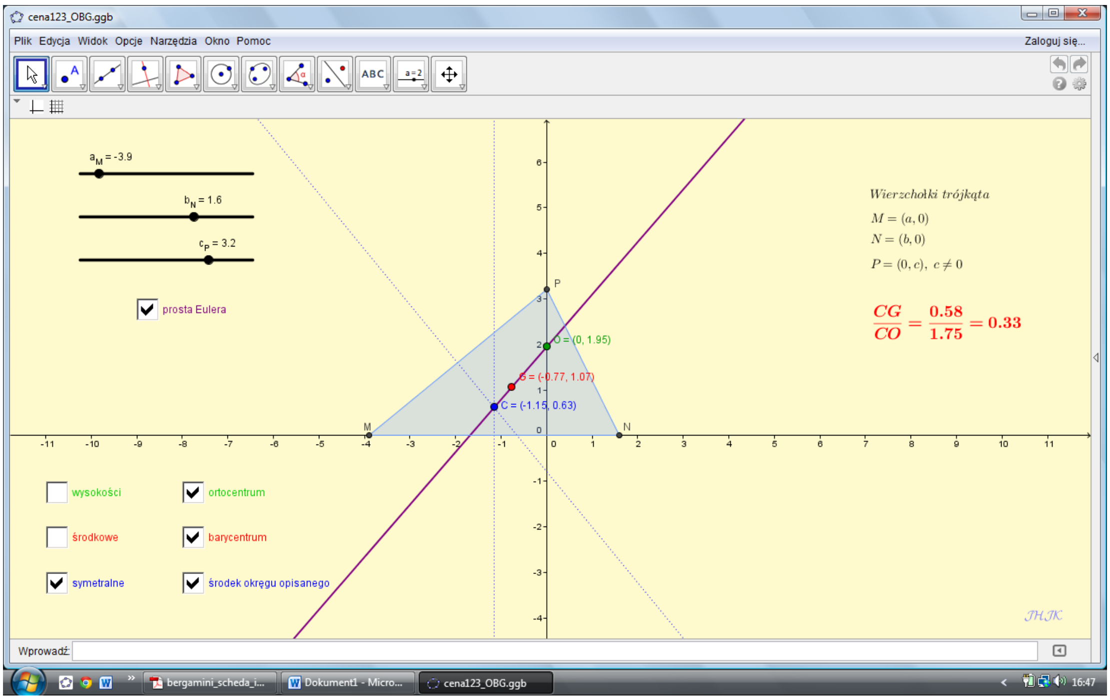
$$|CO| = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3ab+c^2}{2c}\right)^2}.$$

Stąd mamy:

$$\frac{CG}{CO} = \frac{1}{3}.$$

W ten sposób uzyskaliśmy potwierdzenie postawionych hipotez.

Załączony aplet pozwala zobaczyć uzyskane zależności w dowolnej liczbie różnych trójkątów.



Zadanie domowe

Przez punkt *O*, który jest środkiem ciężkości trójkąta *ABC*, prowadzimy prostą równoległą do podstawy *AB* tego trójkąta. Prosta ta przecina bok *AC* w punkcie *E*, zaś bok *BC* w punkcie *F*. Wykaż, że punkt *O* jest środkiem odcinka *EF,* zaś długość odcinka *EF* stanowi $\frac{2}{3}$ długości odcinka *AB*.

scenariusz lekcji nr 7

Przedmiot: **Matematyka**

Dział programowy: **Równania i nierówności**

Temat: **Dzielenie wielomianów; schemat Hornera**

Klasa: **Klasa II**

Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**

- Stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian x - a;

Pomoce (środki) dydaktyczne

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
- **aplety GeoGebry**

Cele: Uczeń:

- potrafi podzielić z resztą dwa wielomiany,
- zna i stosuje twierdzenie o reszcie,
- wyjaśnia sposób otrzymywania współczynników ilorazu w schemacie Hornera,
- stosuje schemat Hornera w przypadkach szczególnych ,
- przekształca wyrażenia algebraiczne,
- posługuje się programem GeoGebra.

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia, prezentacja**

Formy pracy: **Praca indywidualna lub w grupach**

Plan lekcji

Zakładam, że uczniowie znają już dzielenie wielomianów i potrafią podzielić np.:

$$6x^3 + 13x^2 + 5x + 6 \text{ przez } 3x^2 - x + 2.$$

Teraz zajmiemy się dzieleniem wielomianów przez dwumian typu ***x – p****,* gdzie *p* jest dowolną liczbą rzeczywistą. Aby szybko wyznaczyć iloraz *Q* i resztę *R* możemy posłużyć się procedurą, nazywaną schematem Hornera (lub Ruffiniego). Prześledzimy ją na konkretnym przykładzie.

Wykonajmy następujące dzielenie:

$(3x^3 + 4x^2 - 5x + 7) : (x - 2).$

W pierwszym kroku zapiszmy współczynniki 3, 4, -5, 7 i liczbę *p* = 2 w następującej tabeli:

	3	4	–5	7
2				

Poprowadziliśmy dwie linie pionowe, jedną po lewej stronie pierwszego współczynnika, a drugą po lewej stronie wyrazu wolnego. Następnie prowadzimy linię poziomą, zostawiając powyżej wolny wiersz.

	3	4	–5	7
2				
	3			

Pod linią poziomą spisujemy pierwszy współczynnik dzielnej. Będzie to pierwszy współczynnik ilorazu. Zgodnie ze strzałkami wykonujemy mnożenie: $2 \cdot 3 = 6$ i otrzymany wynik zapisujemy pod drugim współczynnikiem.

	3	4	–5	7
2		**6**		
	3			

Dodajemy następnie liczby tej kolumny i uzyskujemy drugi współczynnik ilorazu równy 10.

	3	4	–5	7
2		6		
	3	**10**		

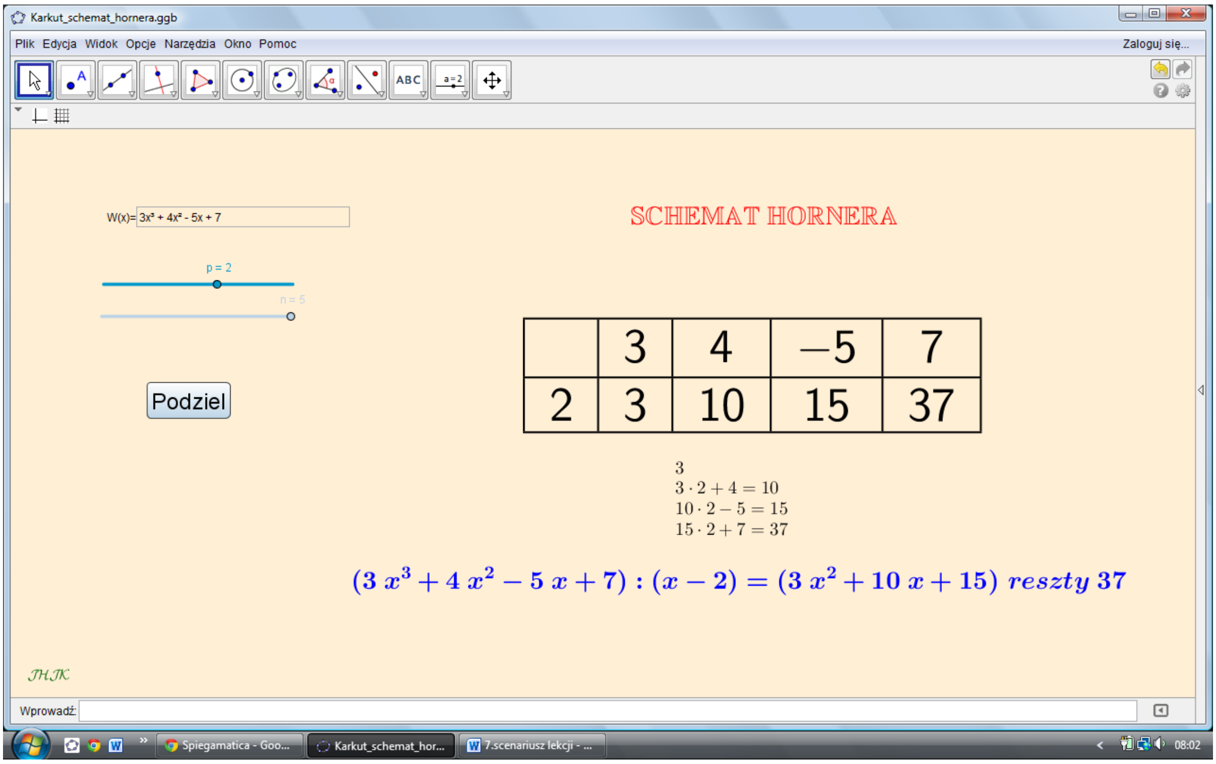
Procedurę tę powtarzamy, aż całkowicie wypełnimy ostatni wiersz tabeli.(Kolejne mnożenie, to $2 \cdot 10$.)

	3	4	–5	7
2		6	20	30
	3	**10**	**15**	**37**

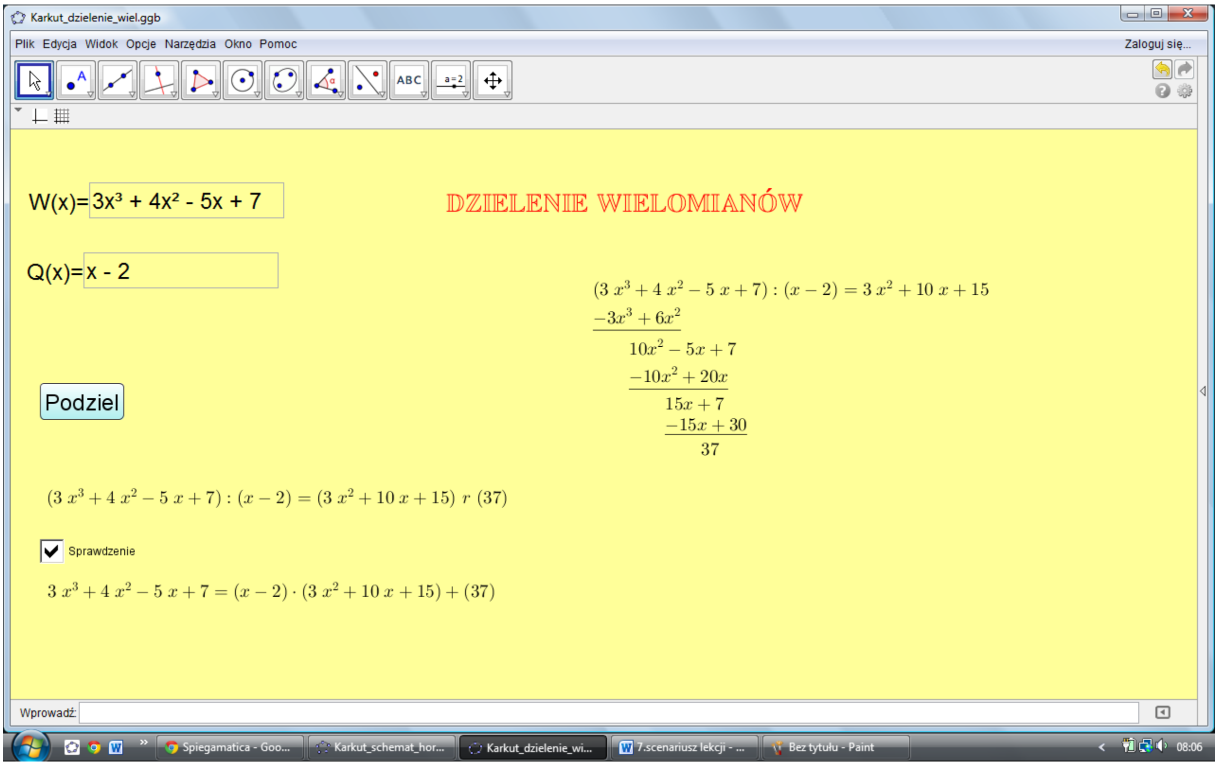
Pierwszy, drugi i trzeci współczynnik z ostatniego wiersza tabeli jest równy odpowiednio 3, 10 i 15; ponieważ dzieliliśmy wielomian trzeciego stopnia przez wielomian stopnia pierwszego, to iloraz $Q(x)$ będzie wielomianem stopnia drugiego, a wiec:

$Q(x) = 3x^2 + 10x + 15, \quad R = 37.$

Dzielenie to łatwo przeprowadzić, stosując poniższy aplet GeoGebry.



Dzielenie w sposób „tradycyjny” możemy zademonstrować przy pomocy poniższego apletu.



Uwaga 1

Czy możemy skorzystać ze schematu Hornera do wykonania następującego dzielenia:

$(3x^2+2x-5):(2x-1)$?

Odpowiedź jest twierdząca: należy podzielić dzielną i dzielnik przez 2. Mamy wówczas dzielenie:

$$\left(\frac{3}{2}x^2+x-\frac{5}{2}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

w wyniku którego otrzymujemy: $Q(x)=\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$ i $\frac{R}{2}=-\frac{13}{8}$, skąd $R=-\frac{13}{4}$.

Uwaga 2

Schemat Hornera możemy stosować również do dzielenia wielomianów zawierających oprócz zmiennej *x* inną zmienną, np. x^3-a^3.

Oznaczmy przez $W(x)$ dwumian x^3-a^3. Sprawdzamy, że $W(a)=0$. Pamiętając, że

$$x^3-a^3=x^3+0x^2+0x-a^3,$$

mamy:

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	0

Jest zatem:
$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

Zadanie domowe

Stosując metodę Hornera, wykonaj dzielenia następujących wielomianów:

1. $(6x^3 + 12x^2 - x - 1):(x + 1)$
2. $(2x^3 - 3x^2 - 7x + 8):(x - 1)$
3. $\left(x^3 - 4x - \frac{1}{2}x^2 + 2\right):\left(x - \frac{1}{2}\right)$
4. $(12x^3 - 54x^2 + 21x - 3):(3x - 12)$
5. $(x^3 + a^3):(x + a)$

scenariusz lekcji nr 8

Przedmiot: **Matematyka**
Dział programowy: **Równania i nierówności**
Temat: **Równania i nierówności liniowe z parametrem**
Klasa: **Klasa II**
Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
-rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;
Pomoce (środki) dydaktyczne

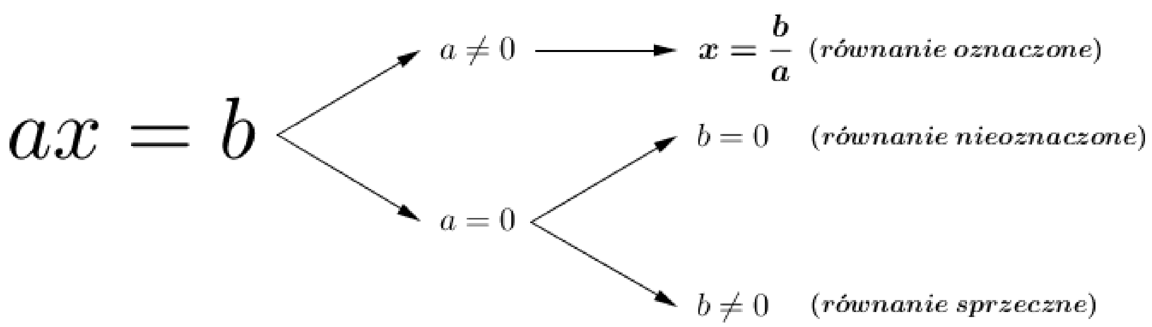
- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
- **aplet GeoGebry**

Cele: Uczeń:

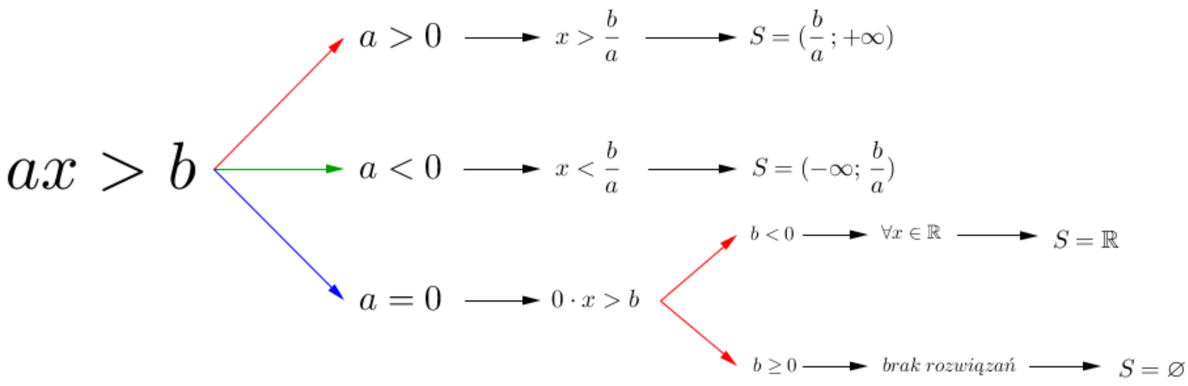
- stosuje twierdzenia pozwalające otrzymywać równania równoważne danemu,
- stosuje twierdzenia pozwalające otrzymywać nierówności równoważne danej,
- przekształca wyrażenia algebraiczne,
- rozwiązuje równania liniowe,
- rozwiązuje nierówności liniowe,
- posługuje się programem GeoGebra

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
Formy pracy: **Praca indywidualna lub w grupach**
Plan lekcji

Na lekcji tej podamy przykłady rozwiązań równań i nierówności liniowych pierwszego stopnia z parametrem. Rozwiązując równania i nierówności z parametrem posługiwać się będziemy następującymi schematami (S oznacza zbiór rozwiązań):



Schemat 1



Schemat 2

Przykład 1

Rozwiąż równanie:

$x - 2a = \frac{x+1}{a}$

Rozwiązanie

Widzimy, że równanie to ma sens liczbowy tylko wówczas, gdy $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Przekształćmy dane równanie do postaci $ax = b$ (Schemat 1).

$\frac{a(x-2a)}{a} = \frac{x+1}{a}$,

$a(x-2a) = x+1$,

$ax - 2a^2 = x + 1$,

$ax - x = 2a^2 + 1$,

$$(*)\boldsymbol{(a-1) \cdot x = 2a^2 + 1}.$$

Dyskusja

Aby otrzymać rozwiązanie, należy obie strony równania podzielić przez współczynnik przy niewiadomej *x*, tzn. przez *a* – 1, a ten zawiera parametr. Należy więc założyć, że nie jest on zerem:

$a - 1 \neq 0 \Longrightarrow a \neq 1 \Longrightarrow x = \frac{2a^2+1}{a-1}$.

Wynik ten oznacza, że dla każdego $a \notin \{0,1\}$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = \frac{2a^2+1}{a-1}$.

Np. dla *a* = 2, *x* = 9, dla *a* = -5, *x* = $-8{,}5$ itd.

A co się dzieje, gdy *a* = 1? Podstawiając *a* = 1 do równania (*) otrzymujemy:

$0 \cdot x = 3$.

Jest to więc równanie sprzeczne.

Odpowiedź.

$$\begin{cases} \text{dla } a = 0 \text{ równanie traci sens liczbowy} \\ \text{dla } a = 1 \text{ równanie jest sprzeczne} \\ \text{w pozostałych przypadkach } x = \dfrac{2a^2+1}{a-1} \end{cases}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$\frac{5-4x}{a}=\frac{b}{a}-2x$$

Rozwiązanie

Widzimy, że równanie to ma sens liczbowy tylko wówczas, gdy $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Przekształćmy dane równanie do postaci $ax = b$ (Schemat 1).

$$\frac{5-4x}{a}=\frac{b-2ax}{a},$$

$5-4x = b-2ax \Longrightarrow 2ax-4x = b-5,$

$$(*)\boldsymbol{(2a-4)x = b-5}.$$

Dyskusja

Współczynnikiem przy *x* jest 2*a* – 4.

a) $2a-4 \neq 0 \Longrightarrow 2a \neq 4 \Longrightarrow a \neq 2 \Longrightarrow x = \frac{b-5}{2a-4}$.

b) $2a-4 = 0 \Longrightarrow a = 2$; dla *a* = 2 równanie (*) ma postać: $0 \cdot x = b-5,$

a stąd:

1) $b-5 = 0 \Longrightarrow b = 5 \Longrightarrow 0 \cdot x = 0,$ a więc równanie jest nieoznaczone;

2) $b-5 \neq 0 \Longrightarrow b \neq 5,$ a zatem równanie jest sprzeczne.

Odpowiedź.

$$\begin{cases} \text{dla } a = 0 \text{ równanie nie ma sensu liczbowego} \\ \text{dla } a = 2 \text{ i } b = 5 \text{ równanie jest nieoznaczone} \\ \text{dla } a = 2 \text{ i } b \neq 5 \text{ równanie jest sprzeczne} \\ \text{w pozostałych przypadkach } x = \dfrac{b-5}{2a-4} \end{cases}$$

Przejdźmy teraz do nierówności liniowych z parametrem.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność:

$ax - 2 < a + x$

Rozwiązanie

Przekształćmy daną nierówność do postaci $ax > b$ (Schemat 2).

$ax - x < a + 2,$

$\boldsymbol{(a-1)x} < a + 2.$

Współczynnik przy *x* zawiera parametr *a*, a zatem musimy rozpatrywać nierówność w zależności od jego znaku.

Dyskusja

a)

$a - 1 < 0 \Longrightarrow a < 1.$

Ponieważ *a* – 1 jest liczbą ujemną, to dzieląc przez nią obie strony nierówności, musimy odwrócić znak nierówności. Oznacz to, że:

$$x > \frac{a+2}{a-1}.$$

b)

$a-1=0 \Longrightarrow a=1.$

Mamy tu nierówność

$0 \cdot x < 3,$

która jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą *x*.

c)

$a-1>0 \Longrightarrow a>1.$

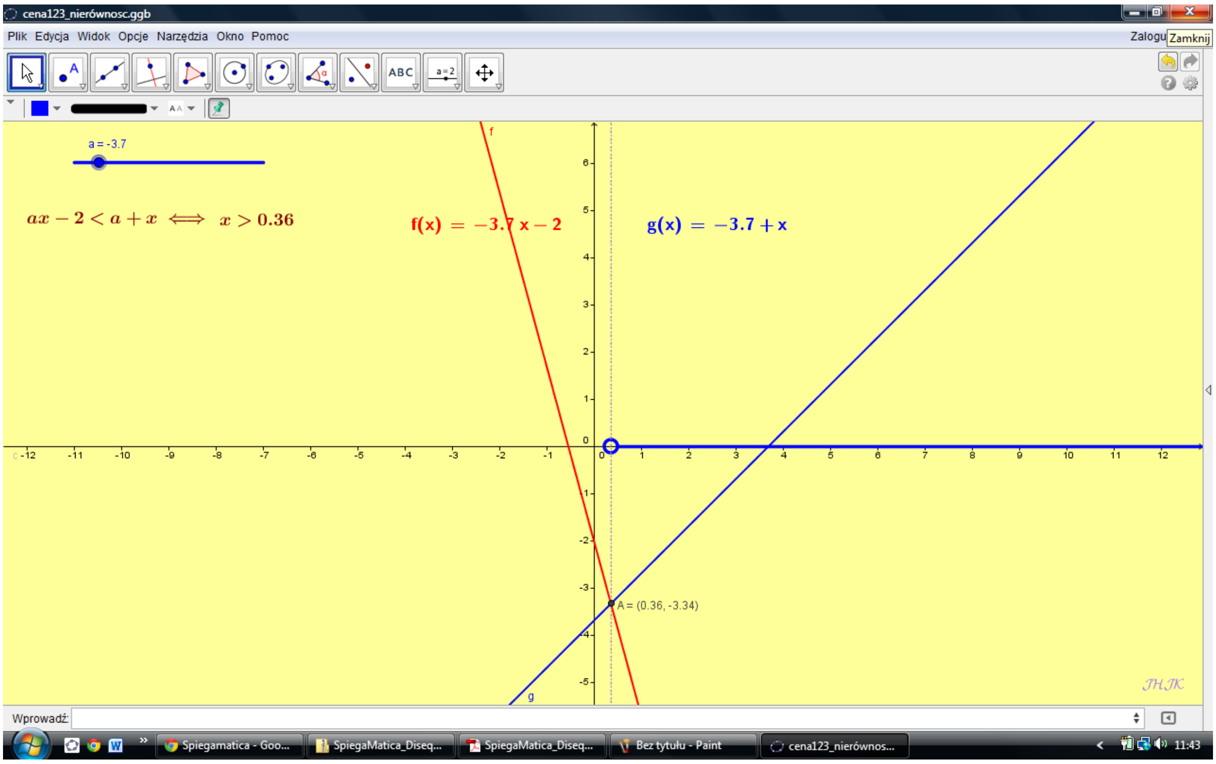
Ponieważ *a* – 1 jest liczbą dodatnia, to dzieląc przez nią obie strony nierówności nie odwracamy jej znaku. Oznacza to, że:

$$x < \frac{a+2}{a-1}.$$

Odpowiedź.

$$\begin{cases} \text{dla } a<1 \text{ rozwiązanie tworzą liczby } x > \dfrac{a+2}{a-1} \\ \text{dla } a=1 \text{ nierówność jest zawsze prawdziwa} \\ \text{dla } a>1 \text{ rozwiązanie tworzą liczby } x < \dfrac{a+2}{a-1} \end{cases}$$

Poniższy aplet GeoGebry pozwala wskazać rozwiązanie dla wybranej wartości parametru *a*.



Przykład 4

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{x-2}{a} < 2-x.$$

Widzimy, że nierówność ta ma sens liczbowy tylko wówczas, gdy $a \neq 0$.

Przekształćmy daną nierówność do postaci $ax > b$ (Schemat 2).

$$\frac{x-2}{a} < \frac{2a-ax}{a}.$$

Dyskusja

1) $a > 0$

$x - 2 < 2a - ax,$

$(\boldsymbol{a} + \mathbf{1})\boldsymbol{x} < 2(\boldsymbol{a} + \mathbf{1}).$

W tym przypadku współczynnik *a* + 1 jest zawsze dodatni, a zatem

$$x < \frac{2(a+1)}{a+1} \Rightarrow x < 2.$$

2) $a < 0$

$x - 2 > 2a - ax,$

$(\boldsymbol{a} + \mathbf{1})\boldsymbol{x} > 2(\boldsymbol{a} + \mathbf{1}).$

W tym przypadku współczynnik *a* + 1 nie ma stałego znaku. Rzeczywiście:

$-1 < a < 1 \Rightarrow a + 1 > 0,$

$a < -1 \Rightarrow a + 1 < 0,$

$a = -1 \Rightarrow a + 1 = 0.$

W związku z tymi przypadkami, mamy:

a) $-1 < a < 0 \Rightarrow x > \frac{2(a+1)}{a+1} \Rightarrow x > 2$

b) $a < -1 \Rightarrow x < \frac{2(a+1)}{a+1} \Rightarrow x < 2$

c) $a = -1 \Rightarrow 0 \cdot x > 0 \Rightarrow$ sprzeczność

Odpowiedź.

$$\begin{cases} a < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \\ a = -1 \Rightarrow \text{nierówność jest sprzeczna} \\ -1 < a < 0 \Rightarrow x \in (2, +\infty) \\ a = 0 \Rightarrow \text{nierówność traci sens liczbowy} \\ a > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \end{cases}$$

Zadanie domowe

1. Rozwiąż równanie:

$$\frac{(a+1)x}{2a} = \frac{5a(b-3)}{6b}.$$

2. Rozwiąż nierówność:

$a(x-1) < 2a - 3x.$

scenariusz lekcji nr 9

Przedmiot: **Matematyka**
Dział programowy: **Liczby rzeczywiste**
Temat: **Obliczenia związane z *BMI***
Klasa: **Klasa I**
Zgodność z podstawą programową: Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego.
Pomoce (środki) dydaktyczne

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
- **aplet GeoGebry.**

Cele: Uczeń potrafi:

- zinterpretować dane zawarte w zestawieniu,
- rozwiązać nierówność kwadratową,
- rozwiązać układ nierówności kwadratowych,
- podać przybliżenie liczby z zadaną dokładnością,
- przekształcać wyrażenia algebraiczne,
- rozwiązuje równania wymierne,
- korzystać z programu GeoGebra.

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia, prezentacja**
Formy pracy: **Praca indywidualna**

Plan lekcji

Na lekcji tej poznamy bliżej BMI (*Body Mass Index*), tj. najbardziej obecnie rozpowszechniony wskaźnik prawidłowej wagi ciała. Wynik BMI otrzymujemy na podstawie działania, w którym dzielimy masę ciała podaną w kilogramach przez kwadrat wzrostu podany w metrach, czyli
$BMI = \frac{m}{h^2}$.

W praktyce klinicznej rozróżnia się następujące przedziały wskaźnika BMI:

1. poniżej 16,0 – wygłodzenie
2. 16,0–16,99 – wychudzenie (np. na skutek anoreksji lub innej ciężkiej choroby)
3. 17,0–18,49 – niedowaga
4. 18,5–24,99 – wartość prawidłowa
5. 25,0–29,99 – nadwaga
6. 30,0–34,99 – 1. stopień otyłości
7. 35,0–39,99 – 2. stopień otyłości (otyłość kliniczna)
8. powyżej 40,0 – 3. stopień otyłości (otyłość skrajna)

Weźmy pod uwagę osobę o wadze 70 kg. Jaki powinien być jej wzrost, by była to osoba:

- z niedowagą,
- z wagą prawidłową,
- otyła?

Rozważmy pierwszy przypadek. Korzystając z określenia *BMI*, mamy:

$$BMI < 18{,}5 \Longrightarrow \frac{70}{h^2} \Longrightarrow h^2 > \frac{70}{18{,}5} \Longrightarrow h > \sqrt{\frac{70}{18{,}5}} \approx 1{,}95$$

Jeśli więc osoba waży 70 kg, a jej wzrost wynosi około 195 cm (lub więcej), to jest to na pewno osoba z niedowagą.
Obliczmy teraz, jaki wzrost powinna mieć osoba o wadze 70 kg, by uznać, że ma wagę prawidłową? Tym razem mamy:

$$18{,}5 \leq \frac{70}{h^2} \leq 24{,}9 \Longrightarrow h^2 \leq \frac{70}{18{,}5} \wedge h^2 \geq \frac{70}{24{,}9},$$

$$h \leq \sqrt{\frac{70}{18{,}5}} \approx 1{,}95 \wedge h \geq \sqrt{\frac{70}{24{,}9}} \approx 1{,}68,$$

$1{,}68 \leq h \leq 1{,}95.$

Przeprowadźmy teraz obliczenia dla osoby z nadwagą.

$$25 \leq \frac{70}{h^2} \leq 29{,}9 \Longrightarrow h^2 \leq \frac{70}{25} \wedge h^2 \geq \frac{70}{29{,}9},$$

$$h \leq \sqrt{\frac{70}{25}} \approx 1{,}67 \wedge h \geq \sqrt{\frac{70}{29{,}9}} \approx 1{,}53,$$

$1{,}53 \leq h \leq 1{,}67.$

Dla osoby z 1. stopniem otyłości, mamy:

$$30 \leq \frac{70}{h^2} \leq 34{,}9 \Longrightarrow h^2 \leq \frac{70}{30} \wedge h^2 \geq \frac{70}{34{,}9},$$

$$h \leq \sqrt{\frac{70}{30}} \approx 1{,}53 \wedge h \geq \sqrt{\frac{70}{34{,}9}} \approx 1{,}42,$$

$1{,}42 \leq h \leq 1{,}53.$

Dla osoby z 2. stopniem otyłości, mamy:

$$35 \leq \frac{70}{h^2} \leq 39{,}9 \Longrightarrow h^2 \leq \frac{70}{35} \wedge h^2 \geq \frac{70}{39{,}9},$$

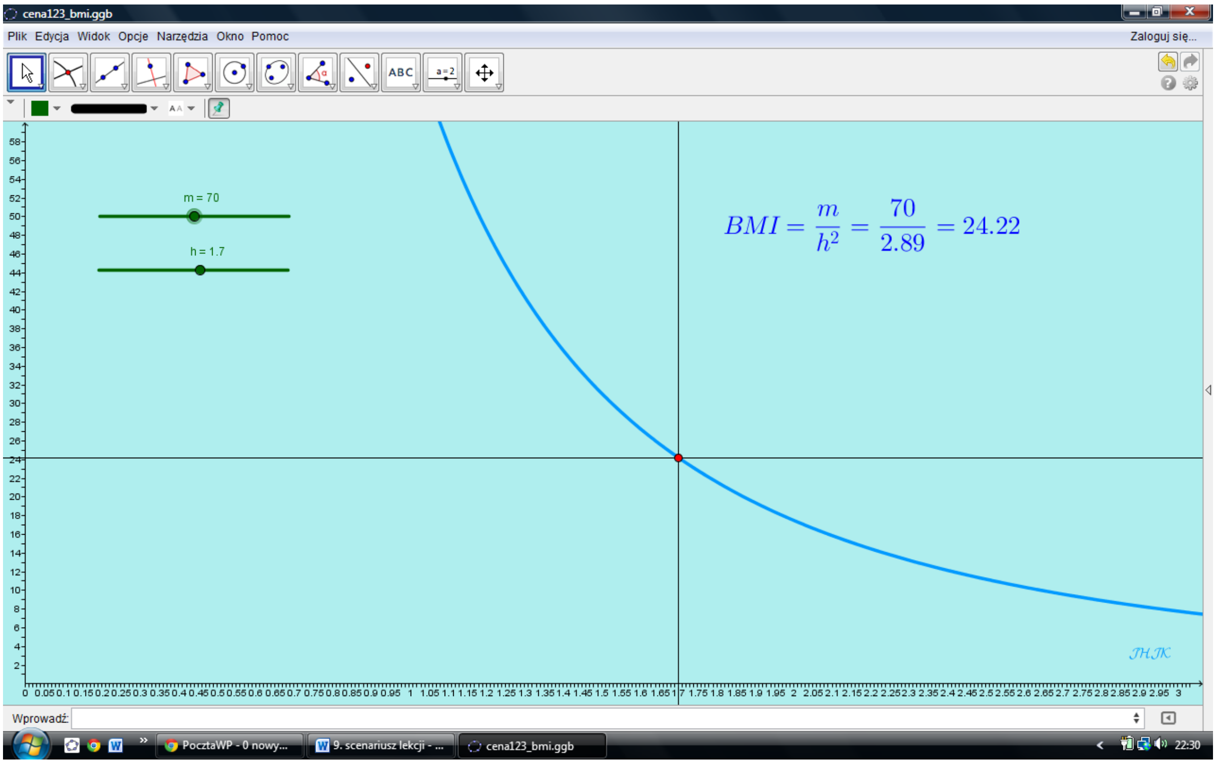
$$h \leq \sqrt{\frac{70}{35}} \approx 1{,}41 \wedge h \geq \sqrt{\frac{70}{39{,}9}} \approx 1{,}32.$$

$1{,}32 \leq h \leq 1{,}41.$

Zestawmy otrzymane wyniki w tabeli.

WAGA	WZROST	STAN
	$h > 195$	niedowaga
	$168 \leq h \leq 195$	prawidłowa
70	$153 \leq h \leq 167$	nadwaga
	$142 \leq h \leq 152$	1. stopień otyłości
	$132 \leq h \leq 141$	2. stopień otyłości

Poniżej przedstawiony jest aplet, przy pomocy którego możemy obliczyć *BMI* oraz badać stan otyłości w zależności od wagi bądź wzrostu.



Zadanie domowe

Zważ się i sprawdź, jaki powinien być twój wzrost, by uznać, że twoja waga jest prawidłowa.

Zmierz swój wzrost i oblicz przy jakiej wadze ciała Twój BMI będzie wynosił od 18,5 do 25.

scenariusz lekcji nr 10

Przedmiot: **Matematyka**
Dział programowy: **Rachunek różniczkowy**
Temat: **Rozwiązujemy zadania optymalizacyjne.**
Klasa: **Klasa III**
Zgodność z podstawą programową:
-oblicza pochodne funkcji wymiernych;
-korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji;
-znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;
-stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.
Pomoce (środki) dydaktyczne

- **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
- **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
- **aplet GeoGebry.**

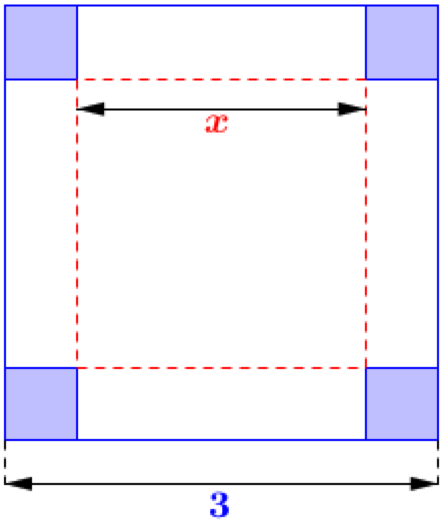
Cele: Uczeń potrafi:

- obliczyć pochodną funkcji w punkcie,
- sprawnie wyznaczać funkcje pochodne danych funkcji na podstawie poznanych wzorów,
- napisać równanie stycznej do wykresu funkcji oraz rozwiązywać różne zadania z wykorzystaniem wiadomości o stycznej ,
- zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej,
- wyznaczyć ekstrema funkcji różniczkowalnej,
- zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować jej wykres,
- zastosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk z życia codziennego opisanych wzorami funkcji wymiernych (zadania optymalizacyjne),
- posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).

Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
Formy pracy: **Praca indywidualna lub w grupach**
Plan lekcji

Na lekcji tej rozwiążemy dwa zadania optymalizacyjne, w rozwiązaniu których wykorzystamy elementy rachunku różniczkowego.

Zadanie 1
Dany jest kwadratowy arkusz blachy o boku 3 m. Z tego arkusza chcemy wyciąć cztery jednakowe kwadraty, po jednym w każdym rogu kwadratu. Otrzymany kwadrat zaznaczony na rysunku ma bok równy *x*. następnie zaginamy blachę wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne, otwarte pudełko. Dla jakiej wartości *x* otrzymane pudełko będzie miało największą objętość?



Rozwiązanie
Objętość powstałego pudełka, to objętość prostopadłościanu o podstawie x^2 i wysokości $\frac{3-x}{2}$. Jest ona równa:

$$V(x) = -\frac{1}{2}(x^3 - 3x^2),\ \ 0 \le x \le 3.$$

Wyznaczmy funkcję pochodną funkcji $V(x)$:

$$V'(x) = -\frac{1}{2}(3x^2 - 6x).$$

Dalej mamy:

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$

$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,2).$

$V'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$

Uwzględniając dziedzinę, umieścimy uzyskane wyniki w tabeli.

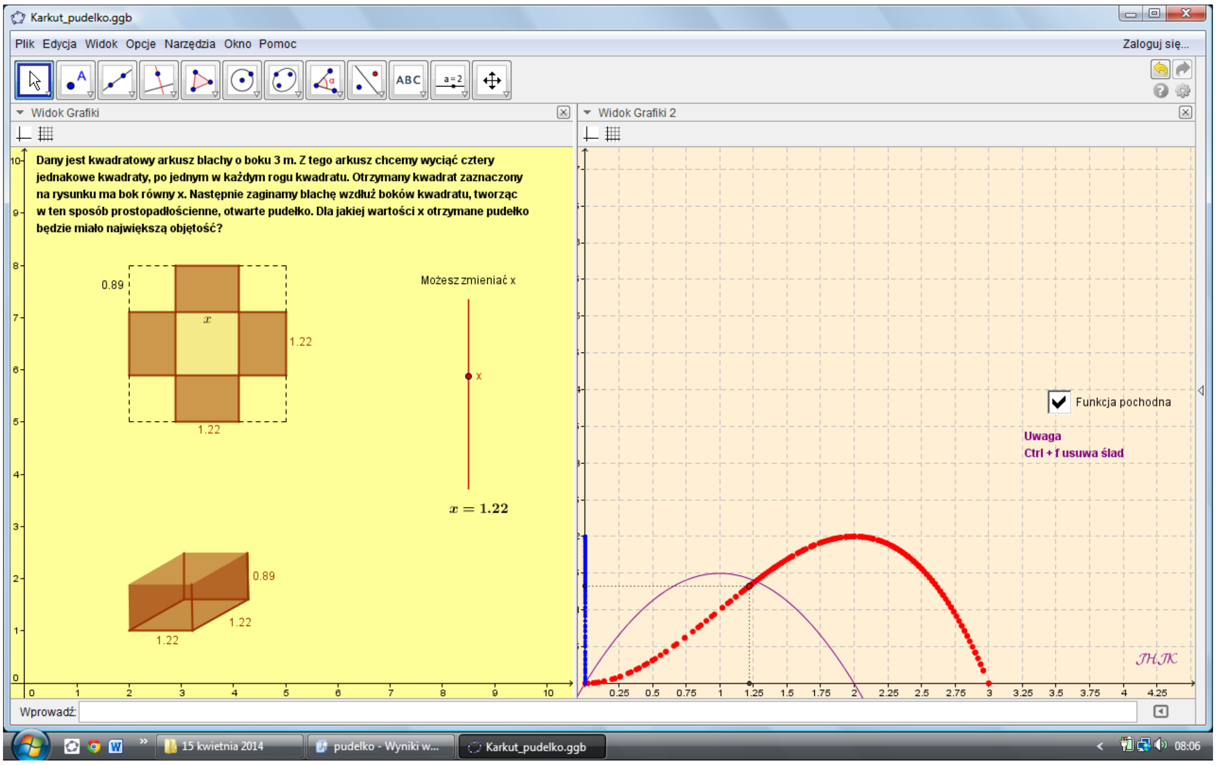
x	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3
V'		+		−	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że w przedziale $\langle 0,3 \rangle$ największą wartość funkcja *V* przyjmuje dla *x* = 2.

Odpowiedź.

Prostopadłościenne pudełko ma największą objętość wówczas, gdy jego podstawa jest kwadratem o buku 2.

Wykorzystując poniższy aplet, możemy zaprezentować i pudełko, i zmiany jego objętości.



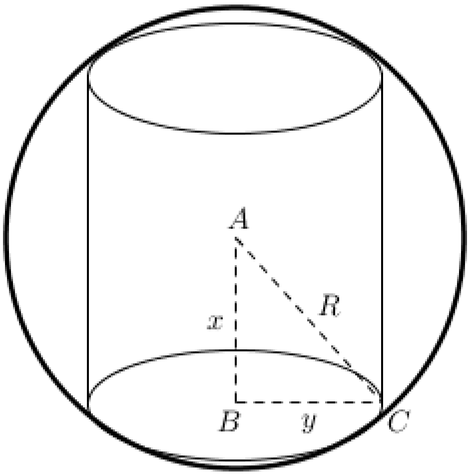
Kolejne zadanie jest zadaniem optymalizacyjnym z częściowym rozwiązaniem (z lukami). Uzupełnij te luki.

Zadanie 2

W środku czekoladowego „jajka” w kształcie sfery umieszczono pudełko w kształcie walca, które zawiera niespodziankę.

- Wyznacz maksymalną objętość pudełka, wiedząc, że sferyczne „jajko” ma promień *R*.
- Oblicz stosunek średnicy podstawy do wysokości walca znalezionego w poprzednim punkcie.

Wykonajmy rysunek i przyjmijmy stosowne oznaczenia.



Rozwiązanie

Niech *y* oznacza promień podstawy walca, *x* – połowę jego wysokości, a *R* – promień sfery.

Objętość walca wynosi wówczas:

V = .

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta *ABC* mamy: ,

skąd y^2 = .

Objętość walca możemy teraz zapisać następująco:

V = , czyli *V(x)* = .

Obliczmy teraz pochodną tej funkcji i zbadajmy jej znak.

$V'(x) =$, czyli $V'(x) = 2\pi \cdot$.

> 0, czyli .

Jednak $0 < x < R$, więc stwierdzamy, że $V(x)$ jest funkcją rosnącą w przedziale i malejącą w przedziale . Walec osiąga więc maksymalną objętość dla *x* = ; objętość ta wynosi: .

Stosunek średnicy podstawy do wysokości wynosi:

$$\frac{2y}{2x} = \frac{y}{x} = = \sqrt{2}.$$

Zadanie domowe

Z tyłu domu ma być utworzony mały, prostokątny ogródek o powierzchni 50 m^2, ogrodzony płotem. Jeden bok działki nie wymaga płotu, gdyż stanowi go ściana domu. Jakie wymiary musi mieć ten ogródek, by koszty jego ogrodzenia były minimalne?