



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



FIZYKA

e-zadania

dla szkół ponadgimnazjalnych
w zakresie rozszerzonym

Praca zbiorowa

„Nauka z WAT jest fascynująca!”

projekt nr WND-POKL.03.03.04-00-110/12

ZADANIA

Zadanie 1

W wodzie pływa sześcián o krawędzi $a=20\text{cm}$ wykonany z lodu i drewna. Sześcián powstał przez połączenie dwóch identycznych prostopadłościanów o podstawie kwadratowej (krawędź o długości a) i wysokości równej $\frac{1}{2}a$. Dolną część sześciánu stanowi lód.

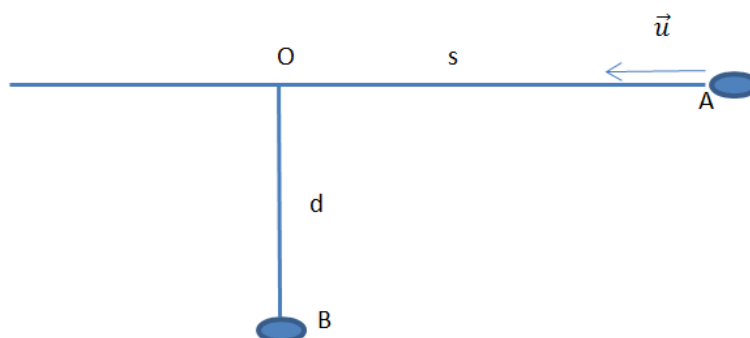
Oblicz, o ile zmieni się zanurzenie prostopadłościanu wykonanego z drewna po stopieniu się lodu. Przyjmij, że: gęstość wody wynosi 1000kg/m^3 , gęstość lodu 900kg/m^3 , gęstość drewna 800kg/m^3 .

Zadanie 2

Przez rzekę o szerokości $d=25\text{m}$ musi przepłynąć antylopa. Nurt rzeki ma szybkość $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$, antylopa płynie z szybkością własną $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po drugiej stronie rzeki, naprzeciw antylopy czeka drapieżnik, który może poruszać się wzdłuż brzegu z szybkością $4,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jak powinna płynąć antylopa aby przebyć rzekę w możliwie najkrótszym czasie i jednocześnie umknąć drapieżcy. Ile czasu trwa przeprawa?

Zadanie 3 – dział „Kinematyka. Ruch punktu materialnego”

Wzdłuż prostej AO z punktu A porusza się kolarz A z prędkością $u=20\text{m/s}$. W punkcie B znajduje się drugi zawodnik, kolarz B, który chce dogonić kolegę. Wyjaśnij, jak powinien poruszać się kolarz B tak, aby mógł dogonić kolegę rozwijając możliwie najmniejszą prędkość. Oblicz wartość tej prędkości. Odcinek $OB=s=400\text{m}$, odcinek $BO=d=50\text{m}$



Zadanie 4 - Kinematyka

Samochód jedzie z prędkością początkową $V_0 = 30\text{ km/h}$, następnie kierowca dodaje gazu i przez czas $t_1 = 6\text{ s}$. jedzie ruchem jednostajnie przyspieszonym i wyłączając silnik porusza się aż do momentu zatrzymania przez czas $t_2 = 15\text{ s}$. W czasie wykonywania tych manewrów pokonał drogę $s = 250\text{ m}$. Oblicz wartość przyspieszenia i opóźnienia ruchu pojazdu?

Zadanie 5 - Kinematyka

Dźwig zaczyna unosić skrzynię do góry przez czas $t_1 = 2$ s. z przyspieszeniem $a_1 = 0,5 \text{ m/s}^2$, a następnie ruchem jednostajnym przez czas $t_2 = 11$ s. i przez czas $t_3 = 2$ s. ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem $a_2 = 0,5 \text{ m/s}^2$. Oblicz na jaką wysokość zostanie wyniesiona skrzynia i jaką będzie miała prędkość po 1,5 sek.?

Zadanie 6 - Kinematyka

Pasażer pociągu jadącego z prędkością $v = 36 \text{ km/h}$. widzi przez czas $t = 3$ s. mijający pociąg o długości $l = 75$ m. Z jaką prędkością jedzie ten pociąg ?

Zadanie 7 - Dynamika

Na ciało o masie $m = 2$ kg działają siły $F_1 = 3\text{N}$ i $F_2 = 4\text{N}$ pod kątem $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 120^\circ$ względem prędkości początkowej $v_0 = 36 \text{ km/h}$. Oblicz v i s po 10 s. ruchu.

Zadanie 8 – Dynamika

Na ciało o masie $m = 7$ kg leżące na równi pochyłej o kącie $\alpha = 30^\circ$ działa oprócz siły ciężkości siła równoległa do równi (do góry równi) o wartości $F = 42$ N. Jaką drogę pokona ciało w ciągu $t = 3$ s, jeżeli współczynnik tarcia $f = 0,001$?

Zadanie 9 – Dynamika

Między pionowymi listwami drewnianymi spada swobodnie klocek o masie $m=2\text{kg}$. Ile wynosi minimalna siła F , jaką należy docisnąć do klocka aby pozostawał w spoczynku, jeżeli współczynnik tarcia statycznego klocka o listwę wynosi $f=0,01$?

Zadanie 10 – Grawitacja

Natężenie pola grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi wynosi ok. 10 N/kg . Jaki promień musiałaby mieć kula ołowiana aby wytworzyć w pobliżu swojej powierzchni pole grawitacyjne o tym samym natężeniu?

Zadanie 11 – Grawitacja

Pocisk masie $m = 10$ kg wystrzelono z pierwszą prędkością kosmiczną pionowo do góry. Oblicz siłę z jaką Ziemia będzie działać na ten pocisk w najwyższym punkcie jego toru.

Zadanie 12 – Grawitacja

Wyrzucono kamień pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu z prędkością $v_0 = 36 \text{ m/s}$. Jaka będzie maksymalna odległość i wysokość rzutu? Na jakiej wysokości i w jakiej odległości będzie się znajdował po 3 s. lotu?

Zadanie 13 – Grawitacja

Oblicz prędkość kuli karabinowej która przebiła 2 pionowe kartki papieru umieszczone w odległości $l = 20$ m jedna od drugiej tak że różnica w wysokości otworów wynosi $s = 5$ cm pocisk biegł poziomo.

Zadanie 14 – Ruch obrotowy

Kulka o promieniu $r=3$ cm porusza się ruchem jednostajnym po dwóch cienkich równoległych deseczkach odległych o $d = 4$ cm od siebie. W ciągu $t = 2$ s. przebyła drogę $s = 120$ cm. Z jakimi prędkościami liniowymi poruszają się punkty najwyżej i najniżej położone na kulce (względem szyn deseczki)?

Zadanie 15 – Ruch obrotowy

Poziomy krążek obraca się z prędkością $n=36$ obr/min. W odległości $r = 20$ cm od osi krążka leży na krążku ciało o masie m . Jaki winien być współczynnik tarcia by ciało nie ześliznęło się z krążka?

Zadanie 16 – Ruch obrotowy

Walec o promieniu $r = 10$ cm osadzono na osi. Nawinięto na niego nieważką, nierozciągliwą nić na której końcu przymocowano ciało o masie $m = 1$ kg. W ciągu czasu $t = 10$ s od chwili rozpoczęcia ruchu ciężarek przebył drogę $s = 0,5$ m. Oblicz moment bezwładności walca J_0 i siłę napinającą nić (opory ruchu pomijamy).

Zadanie 17 – Ruch obrotowy

Na krześle siedzi człowiek który wraz z krzesłem obraca się dookoła wykonując $n_1 = 15$ obr/min. Człowiek trzyma na wyciągniętych ramionach masy po 5 kg w każdej dłoni w odległości $l_1 = 70$ cm od osi obrotu, w pewnej chwili człowiek przyciąga ramiona do siebie na odległość $l_2 = 10$ cm od osi obrotu. Ile będą wynosiły obroty człowieka i jaką pracę wykona?

($J_0 = 10$ kg m² człowieka z krzesłem)

Zadanie 18 - Ciecze

Kawałek szkła o gęstości $\rho_1 = 2,5$ g/cm³ i masie 150 g zawieszono na kwarcowej nici i zanurzono w kwasie siarkowym $\rho_2 = 1,8$ g/cm³. Znaleźć naprężenie nici.

Zadanie 19 – Ciecze

W jakim stosunku należy zmieszać stal z korkiem aby pływały w wodzie całkowicie zanurzone ($\gamma_s = 7,8$ G/cm³ , $\gamma_k = 0,2$ G/cm³)?

Zadanie 20 – Ciecze

Aby obliczyć ciężar właściwy γ mosiądku zważono próbkę w powietrzu. Masa $m_p = 17,41$ g, a następnie w wodzie masa $m_w = 15,38$ g $\gamma_w = 9810$ N/m³

Oblicz ciężar właściwy mosiądku.

Zadanie 21 – Ruch drgający

Obliczyć maksymalne przyspieszenie i prędkość ruchu harmonicznego końcówek widełek stroikowych (pręt w kształcie litery U), jeśli amplituda drgań $A = 0,2$ mm a częstotliwość $\nu = 435$ Hz

Zadanie 22 – Ruch drgający

Sprężyna wykonuje drgania harmoniczne z prędkością $\max v_{\max} = 0,63$ m/s i przyspieszeniem $\max a_{\max} = 3,9$ m/s². Znaleźć amplitudę drgań i częstotliwość.

Zadanie 23 – Ruch drgający

Napisać równanie ruchu drgania harmonicznego o amplitudzie 5 cm, jeżeli w ciągu 1 min zachodzi 150 drgań, a faza początkowa drgań jest równa 450.

Zadanie 24 – Ruch falowy

Statek płynący po jeziorze wywołał falę, która doszła do brzegu po $t = 1$ min. Odległość między grzbietami fal wynosiła 1,5 m a czas między dwoma kolejnymi uderzeniami fali o brzeg wyniósł 2 s. Jak daleko był statek od brzegu?

Zadanie 25 – Ruch falowy

Dwa punkty są odległe od siebie o 25 cm. Jaka jest różnica faz w ich drganiu jeżeli prędkość przechodzącej przez te punkty fali wynosi 340 m/s a częstotliwość 680 Hz?

Zadanie 26 – Ruch falowy

Płaska fala biegnąca wzdłuż osi x posiada amplitudę 2 cm, częstotliwość $\omega = 20$ rad/s, prędkość rozchodzenia się fal w ośrodku 200 m/s. Wychylenie w chwili początkowej było zerowe. Napisz równanie ruchu tej fali.

Zadanie 27 - Akustyka

Obliczyć długość fali dźwiękowej w powietrzu odpowiadającej górnej i dolnej granicy słyszalności ucha ludzkiego.

granice słyszalności (4.1) $\nu_d = 20$ Hz $\nu_g = 20\,000$ Hz

Zadanie 28 - Akustyka

Lokomotywa gwiżdżąc z częstotliwością 100 Hz zbliża się do obserwatora z prędkością 90 km/h. Jakiej częstotliwości dźwięk usłyszy obserwator w przypadku:

a - zbliżania się lokomotywy do niego?

b - oddalania się lokomotywy od niego?

Zadanie 29 - Ciepło

Obliczyć ile wody wrzącej należy dolać do wanny galwanicznej zawierającej 245 l wody o temperaturze 150 C aby otrzymać wodę o temperaturze 320 C

$$c_w(\text{wody}) = 4187 \text{ J/kg K}$$

Zadanie 30 - Ciepło

Stalową kulkę o promieniu $r = 10 \text{ cm}$ ogrzaną do temperatury $T_1 = 293 \text{ K}$ umieszczamy na lodzie będącym w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$ na jaką głębokość pogrąży się kulka w lodzie?

$$c_t(\text{lodu}) = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J/K}$$

$$\rho_l = 880 \text{ kg/m}^3, \rho_{\text{Fe}} = 7860 \text{ kg/m}^3$$

Zadanie 31 - Ciepło

Z równi pochyłej o długości $s = 40 \text{ m}$ i kącie nachylenia 30° zsunął się klocek miedziany. Obliczyć przyrost temperatury klocka zakładając, że tylko połowa wydzielonego ciepła została zużyta na jego ogrzanie.

$$\text{Współczynnik tarcia } f = 0,5 \text{ ciepło właściwe miedzi } c_{\text{Cu}} = 400 \text{ J/(kg K)}$$

Zadanie 32 – Przemiany gazowe

W naczyniu o pojemności 2 l znajduje się CO_2 pod ciśnieniem $12,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ w temperaturze 270 C. Ile molekuł jest w naczyniu?

Zadanie 33 – Przemiany gazowe

Obliczyć gęstość mieszaniny składającej się z $m_1 = 12 \text{ g}$ helu i $m_2 = 6 \text{ g}$ argonu pod ciśnieniem $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ i temperaturze $T = 300 \text{ K}$. Masa molowa helu $\mu_1 = 4,0026 \text{ g/mol}$ i argonu $\mu_2 = 39,95 \text{ g/mol}$.

Zadanie 34 - Termodynamika

Silnik spalinowy Chaussona zużywa 15,3 kg oleju napędowego na godzinę pracy. Oblicz sprawność tego silnika jeżeli jego moc wynosi 105 KM?

$$c_{\text{son}} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ J/kg (ciepło spalania oleju napędowego)} \quad 1 \text{ KM} = 736 \text{ W}$$

Zadanie 35 – Elektrostatyka

Dwie jednakowe kulki o masie $m = 0,5 \text{ g}$ każda zawieszono na nitkach o długości 0,5 m po udzieleniu im jednakowego ładunku oddaliły się na odległość $d = 2 \text{ cm}$. Oblicz jaki ładunek elektryczny kulki otrzymały?

Zadanie 36 – Elektrostatyka

Kulę o promieniu $r = 10 \text{ cm}$ naładowano do potencjału 300 V. Jaką pracę należy wykonać by przenieść ładunek o wartości $0,2 \mu\text{C}$ z punktu oddalonego o 55 cm do punktu oddległego o 30 cm?

Zadanie 37 – Prąd elektryczny

Jak wielki jest opór wewnętrzny ogniwa o SEM 1,49 V dającego prąd 0,38 A przy napięciu na zaciskach 1,43 V?

Zadanie 38 – Prąd elektryczny

Połączono równolegle dwa oporniki z których jeden ma opór dwa razy większy od drugiego i podłączono ich do napięcia 90 V. Znaleźć wartość ich oporów i prąd płynący w każdym z nich. Prąd całkowity wynosi $I_c = 1,5$ A.

Zadanie 39 – Indukcja magnetyczna

Cewka o promieniu $r = 10$ cm ma $N = 500$ zwojów. Jest w polu magnetycznym jednorodnym prostopadłym do jej powierzchni. W ciągu czasu $\Delta t = 0,3$ s indukcja pola wzrosła z 1T do 1,5T. Oblicz SEM indukcji.

Zadanie 40 – Indukcja magnetyczna

Znaleźć natężenie prądu oraz spadek napięcia na poszczególnych elementach obwodu RLC połączonych szeregowo jeżeli $L=0,038$ H, $C=177$ μ F, $R = 8$ Ω , zasilany prądem zmiennym $\nu=50$ Hz i $U_S = 220$ V (napięcie skuteczne).

Znaleźć przesunięcie fazowe między prądem a napięciem i moc czynną.

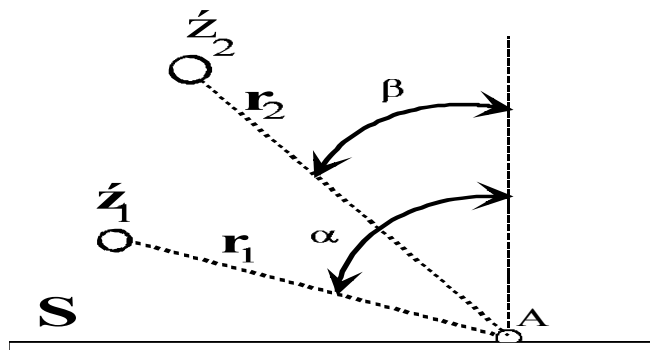
Zadanie 41 - Optyka

Punktowe źródło światła jest zanurzone na głębokości 20cm. Znaleźć średnicę D okręgu na powierzchni wody gdzie widać będzie światło.

Współczynnik załamania światła w wodzie $n = 1,33$

Zadanie 42 - Optyka

Punkt A leżący na powierzchni S (patrz rysunek), oświetlono światłem o światłości $I_1 = 40$ cd pochodzącym od punkowego źródła światła \dot{Z}_1 , które znajduje się w odległości $r_1 = 1$ m i kącie padania promienia $\alpha = 60^\circ$. Jaki powinien być kąt padania β światła pochodzącego od punkowego źródła światła \dot{Z}_2 , o światłości $I_2 = 100$ cd, umieszczonego w odległości $r_2 = 1,5$ m od punktu A, aby natężenie oświetlenia powierzchni w punkcie A uległo $n = 3$ krotnemu zwiększeniu?



Zadanie 43 – Budowa atomu

Oblicz energię całkowitą elektronu w modelu atomu wodoru. Promień pierwszej orbity wynosi $5,3 \cdot 10^{-11}$ m.

Zadanie 44 – Budowa atomu

Znajdź częstotliwość promieniowania przy przejściu elektronu z trzeciej i drugiej orbity na pierwszą w atomie wodoru $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (prędkość światła) oraz odpowiadającą im długość fali λ

Zadanie 45 – Budowa jądra

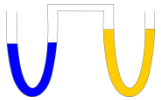
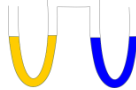
Izotop radu o liczbie masowej 226 uległ przemianie na izotop ołowiu liczbie masowej 206. Znaleźć liczbę rozpadów α i β .

Zadanie 46 – Budowa jądra

Atom deuteru składa się z jednego protonu, jednego neutronu i jednego elektronu. Oblicz jego energię wiązania skoro wiadomo że masa atomu deuteru w/g tablic wynosi $M = 2,0141$ u

Zadanie 47 - Ciecze

Mamy dwie jednakowe U-rurki do których wlano:

- a) do jednej 0,5kg wody a do drugiej 0,5kg nafty 
- b) do jednej 0,5dm³ wody a do drugiej 0,5dm³ nafty 

Oblicz ile i jakiej cieczy należy dolać w obu przypadkach, aby po połączeniu U-rurek szczelną rurką pobudzenie do drgań cieczy w jednej z U-rurek spowodowało samorzutne drgania cieczy w drugiej U-rurce. Gęstość nafty $\rho_n = 800 \frac{kg}{m^3}$, gęstość wody $\rho_w = 1000 \frac{kg}{m^3}$

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Rozwiązanie Zadania 1

Dane:

$$\rho_w = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_d = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

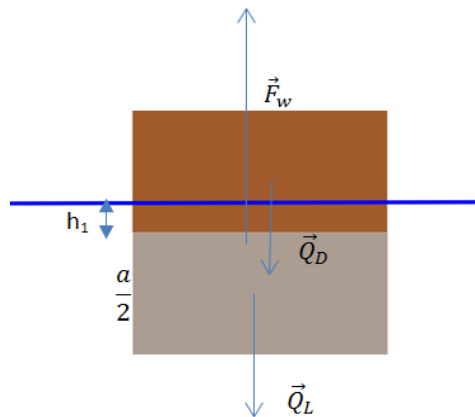
$$\rho_l = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$a=20\text{cm}$

Szukane:

$$\Delta h=?$$

Sześcian pływa tak, że prostopadłościan wykonany z lodu jest w dolnej części.



Przez \vec{Q}_L , \vec{Q}_D , \vec{F}_W oznaczono odpowiednio ciężar lodu, ciężar drewna i siłę wyporu. Przez h_1 oznaczono zanurzenie części drewnianej w wodzie.

Sześcian pływa więc prawdziwe jest równanie $\vec{Q}_L + \vec{Q}_D + \vec{F}_W = 0$.

czyli $F_W = Q_L + Q_D$

Wartość siły wyporu $F_W = a^2 \left(\frac{a}{2} + h_1 \right) \rho_w g$

gdzie $a^2 \left(\frac{a}{2} + h_1 \right)$ jest objętością części sześcianu zanurzoną w wodzie

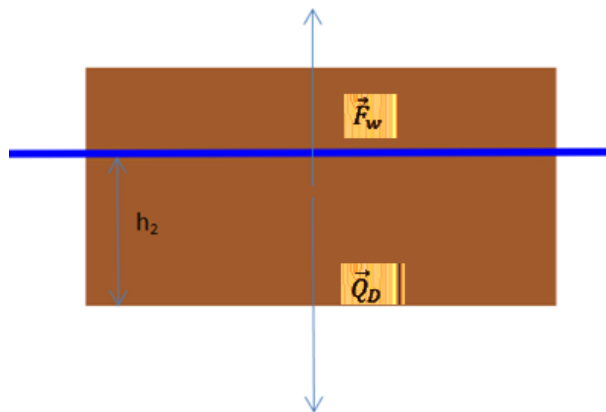
Wartość ciężaru lodu i drewna dane są wyrażeniami: $Q_L = \frac{1}{2} a^3 \rho_L g$ $Q_D = \frac{1}{2} a^3 \rho_D g$

Możemy zapisać $a^2 \left(\frac{a}{2} + h_1 \right) \rho_W g = \frac{1}{2} a^3 \rho_L g + \frac{1}{2} a^3 \rho_D g$

Po prostych przekształceniach wyrażenie przyjmuje postać $\left(\frac{a}{2} + h_1 \right) \rho_W = \frac{1}{2} a (\rho_L + \rho_D)$

$$\text{czyli } h_1 = \frac{a(\rho_L + \rho_D)}{2\rho_W} - \frac{a}{2} = \frac{20\text{cm} \times \left(900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)}{2 \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} - \frac{20\text{cm}}{2} = 17\text{cm} - 10\text{cm} = 7\text{cm}$$

Po stopieniu lodu w wodzie pływa prostopadłościan wykonany z drewna. Zanurzenie tegoż prostopadłościanu obliczmy następująco:



Przez \vec{Q}_D , \vec{F}_W oznaczono odpowiednio ciężar drewna i siłę wyporu. Przez h_2 oznaczono zanurzenie części drewnianej w wodzie.

Prostopadłościan pływa więc prawdziwe jest równanie $\vec{Q}_D + \vec{F}_W = 0$.

$$\text{czyli } F_W = Q_D$$

Wartość siły wyporu $F_W = a^2 h_2 \rho_W g$

gdzie $a^2 * h_2$ jest objętością części prostopadłościanu zanurzoną w wodzie

Wartość ciężaru drewna dana jest wyrażeniem: $Q_D = \frac{1}{2} a^3 \rho_D g$

Możemy zapisać $a^2 h_2 \rho_W g = \frac{1}{2} a^3 \rho_D g$

Po prostych przekształceniach wyrażenie przyjmuje postać $h_2 \rho_W = \frac{1}{2} a \rho_D$

$$\text{czyli } h_2 = \frac{a \rho_D}{2 \rho_W} = \frac{20\text{cm} \times 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2 \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 8\text{cm}$$

Stąd $\Delta h = h_2 - h_1 = 8\text{cm} - 7\text{cm} = 1\text{cm}$.

Odp. zanurzenie prostopadłościanu wykonanego z drewna wzrośnie o 1cm.

Rozwiązanie Zadania 2

Dane:

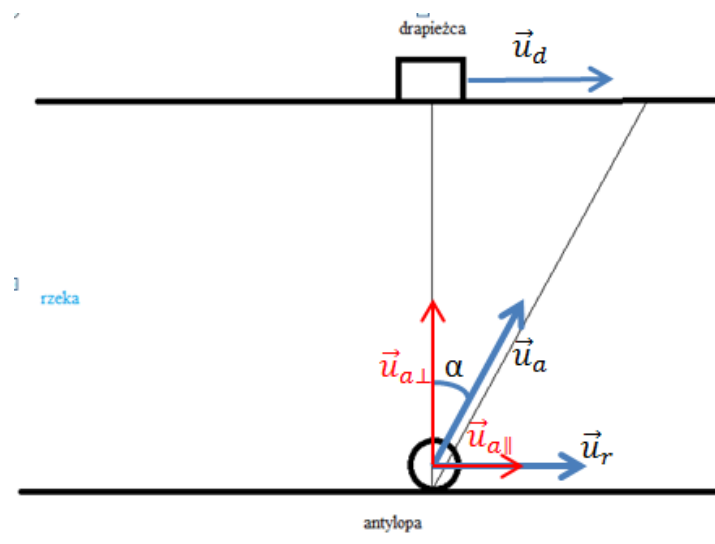
$$u_a = 5 \frac{m}{s}$$

$$u_r = 2 \frac{m}{s}$$

$$u_d = 4,5 \frac{m}{s}$$

$$d = 25m$$

Antylopa nie może płynąć na wprost, wtedy będzie unoszona wzdłuż brzegu z szybkością nurtu rzeki a drapieżca może poruszać się z szybkością większą niż szybkość nurtu rzeki. Wybiera więc pewien kierunek tak, aby szybkość unoszenia wzdłuż brzegu była większa niż szybkość drapieżcy. Wybrany przez antylopę kierunek określony jest przez kąt α . (rysunek)



Wektor prędkości własnej antylopy \vec{u}_a rozłożono na dwie składowe (kolor czerwony), składową skierowaną prostopadle do brzegu $\vec{u}_{a\perp}$ i składową skierowaną wzdłuż brzegu $\vec{u}_{a\parallel}$.

Wartości tych składowych można zapisać: $u_{a\perp} = u_a * \cos \alpha$

$$u_{a\parallel} = u_a * \sin \alpha$$

Warunkiem bezpiecznej przeprawy jest: $u_r + u_a * \sin \alpha > u_d$

stąd $\sin \alpha > \frac{u_d - u_r}{u_a}$ czyli $\sin \alpha > \frac{4,5 \frac{m}{s} - 2 \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s}} = 0,5$ więc $\alpha > 30^\circ$

Czas przeprawy obliczymy zauważając, że o czasie pokonania rzeki decyduje wartość składowej prostopadłej prędkości antylopy.

$$\Delta t > \frac{d}{u_{a\perp}} = \frac{d}{u_a * \cos \alpha}$$

Rozwiązanie Zadania 3:

Dane:

$$u = 20 \frac{m}{s}$$

$$d = 50m$$

$$s = 400m$$

Szukane:

$$x=?$$

$$\alpha=?$$

$$v=?$$

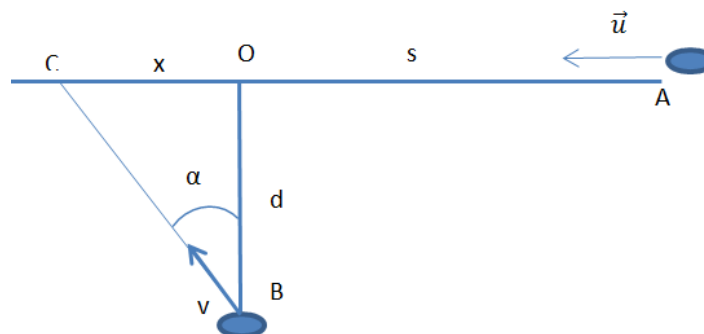
Na początku założymy, że kolarz B pojedzie wzdłuż odcinka BO.

Możemy wtedy zapisać, że $t_{AO}=t_{BO}$ gdzie $t_{AO} = \frac{s}{u}$ oraz $t_{BO} = \frac{d}{v}$

$$\frac{s}{u} = \frac{d}{v} \quad \text{stąd} \quad v = u * \frac{d}{s} = 20 \frac{m}{s} * \frac{50m}{400m} = 2,5 \frac{m}{s}$$

Czy możliwe jest, by kolarz B mógł jechać wolniej? Jadąc w stronę punktu A jest to niemożliwe ponieważ ma do przejechania dłuższy odcinek w krótszym czasie (kolarz A przejedzie wtedy krótszy odcinek).

Więc jedyną ewentualnością jest taki tor jazdy:



Wyprowadzimy wzór na prędkość kolarza B w funkcji x:

$$t_{AC} = \frac{s+x}{u} - \text{czas jazdy kolarza A do punktu C}$$

$$t_{BC} = \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v} - \text{czas jazdy kolarza B do punktu C (z tw. Pitagorasa } BC = \sqrt{x^2 + d^2} \text{)}$$

ponieważ $t_{AC} = t_{BC}$ (kolarze muszą dojechać do C w tym samym czasie),

$$\text{więc} \quad \frac{s+x}{u} = \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v} \quad \text{czyli po przekształceniu } v = u * \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{s+x}.$$

Traktując v jako funkcję x możemy spróbować obliczyć minimum tej funkcji przez wyznaczenie miejsc zerowych pierwszej pochodnej funkcji (oczywiście jest to tylko warunek konieczny).

Dla funkcja postaci $f(x) = \frac{g(x)}{p(x)}$, pierwsza pochodna $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot p(x) - g(x) \cdot p'(x)}{(p(x))^2}$.

$$\text{czyli } v' = u \cdot \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+d^2}} \cdot 2x \cdot (s+x) - \sqrt{x^2+d^2} \cdot 1\right)}{(s+x)^2} = u \cdot \frac{\left(\frac{x(s+x)}{\sqrt{x^2+d^2}} - \sqrt{x^2+d^2}\right)}{(s+x)^2}$$

$$\text{warunek na minimum } \frac{x(s+x)}{\sqrt{x^2+d^2}} - \sqrt{x^2+d^2} = 0 \quad / \cdot \sqrt{x^2+d^2}$$

$$x(s+x) - (x^2+d^2) = 0$$

$$xs - d^2 = 0 \quad \text{czyli } x = \frac{d^2}{s} = \frac{(50m)^2}{400m} = \frac{2500m^2}{400m} = 6,25m$$

$$\text{stąd } v = 20 \frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{(6,25m)^2 + (50m)^2}}{400m + 6,25m} = 20 \frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{2539,0625m^2}}{406,25m} \approx \frac{1007,78m}{406,25s} \approx 2,48 \frac{m}{s}$$

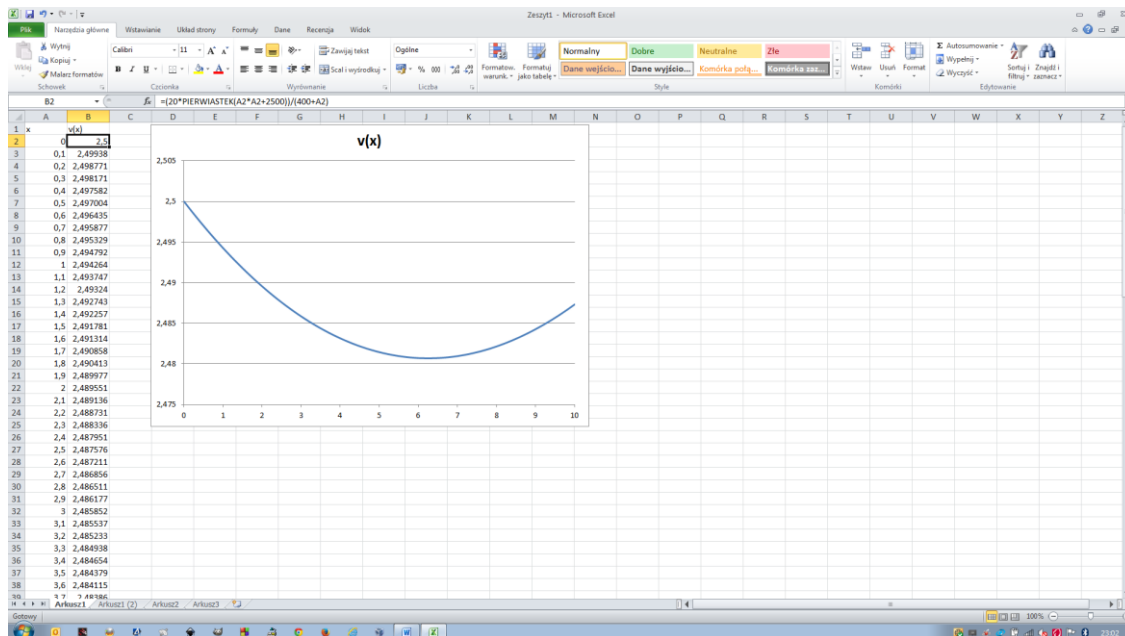
II sposób

Założmy, że nie znasz pochodnych funkcji. Spróbujmy rozwiązać zadanie graficznie.

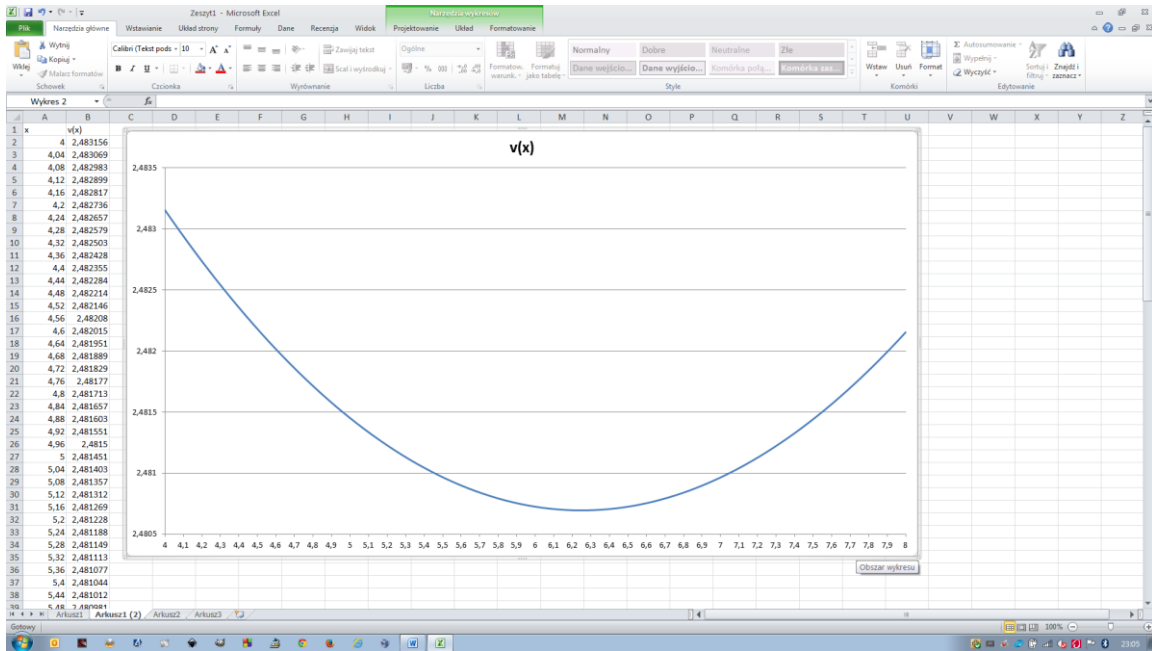
Skorzystamy z odkrytej zależności (zapisanej w układzie SI) $v(x) = u \cdot \frac{\sqrt{x^2+d^2}}{s+x} = 20 \frac{\sqrt{x^2+50^2}}{400+x}$

i narysujemy w programie Excell wykres $v(x)$ dla x z przedziału $\langle 0;10 \rangle$

Otrzymany wykres dotyczy przypadku, gdy x zmieniamy z krokiem 0,1, formuła na $v(x)$ jest widoczna w oknie



Zmieniamy przedział x dla $\langle 4;8 \rangle$, z krokiem 0,04



i możemy odczytać, że dla $x \approx 6,25\text{m}$ funkcja $v(x)$ czyli prędkość kolarza B osiąga minimum $\approx 2,45\text{m/s}$

Możemy też posłużyć się dodatkiem Solver – pierwszy ekran pokazuje ustawienia modelu, następny rozwiązanie problemu.

Parametry dodatku Solver

Ustaw cel: $\$B\2

Na: Maks Min Wartość: 0

Przez zmianę komórek zmiennych: $\$A\2

Podlegających ograniczeniom:

Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń

Wybierz metodę rozwiązywania: Nieliniowa GRG

Wyniki dodatku Solver

Dodatek Solver znalazł rozwiązanie. Wszystkie ograniczenia i warunki optymalizacji są spełnione.

Zachowaj rozwiązanie dodatku Solver

Przywróć wartości pierwotne

Powróć do okna dialogowego parametrów dodatku Solver

Raporty

Wyników

Wrażliwości

Granic

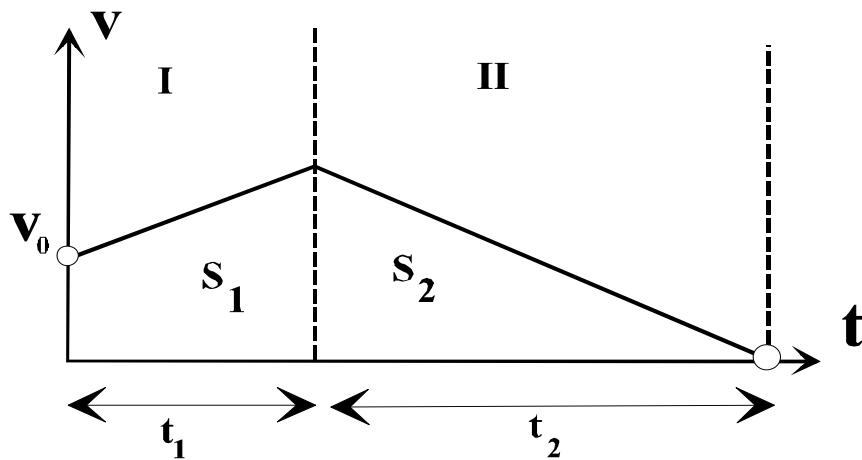
Raporty konspektu

Dodatek Solver znalazł rozwiązanie. Wszystkie ograniczenia i warunki optymalizacji są spełnione.

Jeśli jest używany aparat GRG, to dodatek Solver znalazł przynajmniej rozwiązanie optymalne lokalnie. W przypadku korzystania z aparatu LP simpleks oznacza to, że dodatek Solver znalazł rozwiązanie optymalne globalne.

Rozwiązanie Zadania 4:

$$v_0 = 30 \text{ km/h} = 8,3(3) \text{ m/s}; \quad S = 250 \text{ m}; \quad t_1 = 6 \text{ s}; \quad t_2 = 15 \text{ s};$$



$$S_1 = v_0 t_1 + a_1 t_1^2 / 2; \quad S_2 = v_{k1} t_2 - a_2 t_2^2 / 2, \quad v_{k1} = v_0 + a_1 t_1; \quad v_{k2} = v_{k1} - a_2 t_2$$

z warunków zadania wiemy że;

$$(1) \quad v_{k1} = v_{k2}$$

$$(2) \quad S = S_1 + S_2,$$

$$(3) \quad v_{k2} = 0;$$

z (3) wynika

$$(4) \quad v_{k1} = a_2 t_2;$$

po uwzględnieniu (1) otrzymamy;

$$(5) \quad a_2 t_2 = v_0 + a_1 t_1$$

wstawiając (4) do S_2 otrzymamy;

$$(6) \quad S_2 = a_2 t_2^2 - a_2 t_2^2 / 2 = a_2 t_2^2 / 2$$

z (2) i (6) otrzymamy;

$$v_0 t_1 + a_1 t_1^2 / 2 + a_2 t_2^2 / 2 = S, \text{ dodając (5)}$$

$$a_2 t_2 = v_0 + a_1 t_1$$

powstał układ dwóch równań i dwóch niewiadomych a_1 i a_2 , obliczając z drugiego równania a_2 ;

$$a_2 = v_0 / t_2 + a_1 t_1 / t_2 \text{ i podstawiając do pierwszego}$$

$$a_1 = 2 S / [t_1 (t_1 + t_2)] - v_0 (2 t_1 + t_2) / [t_1 (t_1 + t_2)]$$

oraz

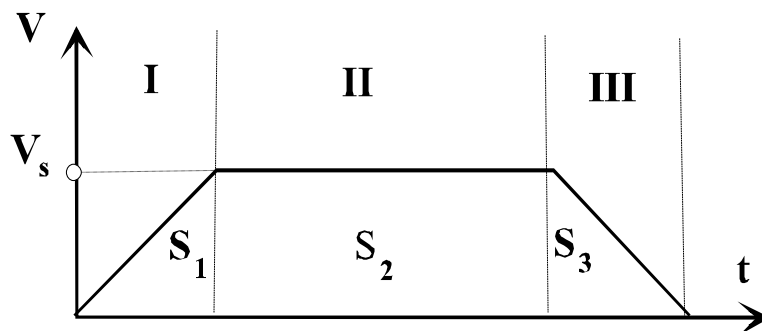
$$a_2 = v_0 / t_2 + 2 S / [t_2 (t_1 + t_2)] - v_0 (2 t_1 + t_2) / [t_2 (t_1 + t_2)]$$

po podstawieniu wartości liczbowych;

$$a_1 = 2,2 \text{ m} / \text{s}^2 ; a_2 = 1,43 \text{ m} / \text{s}^2$$

(pamiętajmy że a_2 jest ujemne gdyż jest to ruch jednostajnie opóźniony)

Rozwiązanie Zadania 5:



$$t_1 = 2 \text{ s}; t_2 = 11 \text{ s}; t_3 = 2 \text{ s}; a_1 = 0,5 \text{ m} / \text{s}^2; a_2 = -0,5 \text{ m} / \text{s}^2$$

odcinek I ruch jednostajnie przyspieszony z $v_0 = 0$ i przyspieszeniem a_1

$$S_1 = a_1 t_1^2 / 2 \text{ i prędkość końcowa } v_k = a_1 t_1$$

odcinek II ruch jednostajny z $v = v_k^I = a_1 t_1$

$$S_2 = v t_2 = a_1 t_1 t_2$$

odcinek III ruch jednostajnie opóźniony z $v_0 = v_k^I = a_1 t_1$ i opóź. a_2

$$S_3 = v_0 t_3 - a_2 t_3^2 / 2 = a_1 t_1 t_3 - a_2 t_3^2 / 2$$

czyli

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = a_1 (t_1^2 / 2 + t_1 t_2 + t_1 t_3) - a_2 t_3^2 / 2, \text{ a stąd } S = 22 \text{ m}$$

prędkość po $t = 1,5$ s od chwili wystartowania w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej; $v_k = a_1 t_1$; zatem $v_k = 0,65 \text{ m/s}$. Zatem wysokość wynosi 22m, a prędkość po 1,5 s wynosi 0,65 m/s.

Rozwiązanie Zadania 6:

$$v_p = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}; \quad t = 3 \text{ s}; \quad l = 75 \text{ m}.$$

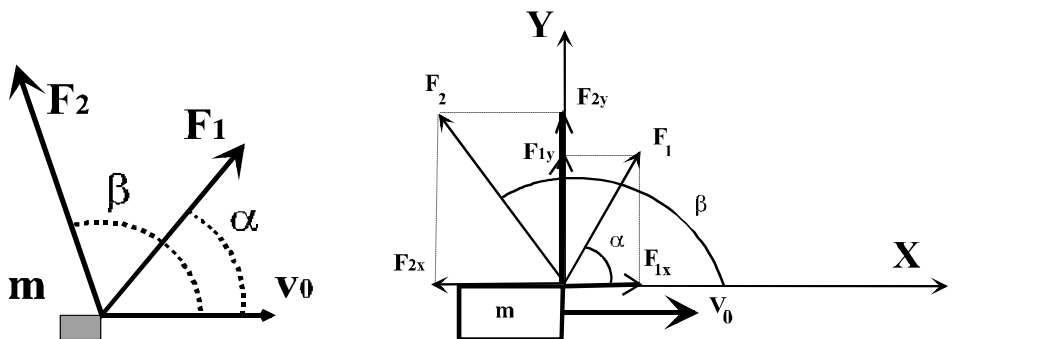
Gdyby pociąg który mijamy był nieruchomy czyli $v_m = 0$, to wtedy jego długość byłaby $l = v_p t$

ponieważ pociąg mijany porusza się w naszym kierunku – czyli prędkości się sumują,

$$\text{więc } l = (v_p + v_m) t$$

$$\text{stąd } v_m = (l - v_p t)/t \text{ czyli } v_m = 15 \text{ m/s}$$

Rozwiązanie Zadania 7:



$$m = 2 \text{ kg}; \quad F_1 = 3 \text{ N}; \quad F_2 = 4 \text{ N}; \quad \alpha = 60^\circ; \quad \beta = 120^\circ;$$

$$v_0 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}; \quad t = 10 \text{ s}$$

rzutując siły na oś X

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha, \quad F_{2x} = F_2 \cos (180^\circ - 120^\circ) = -F_2 \cos \alpha$$

$$\text{czyli wzdłuż osi } X \text{ działa siła } F_x = F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha = (F_1 - F_2) \cos \alpha$$

$$\text{podobnie wzdłuż osi } Y \text{ działa siła } F_y = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha = (F_1 + F_2) \sin \alpha$$

ponieważ przyspieszenie $a = F_w / m$;

F_w siła wypadkowa w danym kierunku, stąd

$$a_x = (F_1 - F_2) \cos \alpha / m \text{ i } a_y = (F_1 + F_2) \sin \alpha / m$$

podstawiając wartości

$$a_x = -1/4 \text{ m/s}^2; \quad a_y = 7\sqrt{3}/4 \text{ m/s}^2;$$

oraz $a^2 = a_x^2 + a_y^2$ czyli $a = \sqrt{37} \text{ m/s}^2$;

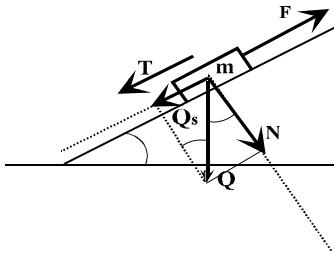
prędkości

$v_x = v_0 + a_x t$; $v_y = a_y t$; czyli $v_x = 7,5 \text{ m/s}$; $v_y = 17,5\sqrt{3} \text{ m/s}$

oraz $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ czyli $v = 29,49 \text{ m/s}$

podobnie obliczamy drogę

Rozwiązanie Zadania 8:



$m = 7 \text{ kg}$; $F = 42 \text{ N}$; $\alpha = 30^\circ$; $t = 3 \text{ s}$; $f = 0,001$;

należy uwidocznic wszystkie siły działające na ciało jak na rysunku

siła tarcia $T = N f$

jak wynika z rysunku $N = Q \cos \alpha$ stąd $T = m g f \cos \alpha$

siła spychająca ciało $Q_s = Q \sin \alpha = m g \sin \alpha$

siła wypadkowa działająca na ciało $F_w = F - Q_s - T$

pod działaniem tej siły ciało nabiera przyspieszenia

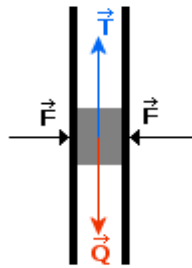
$a = F_w / m = (F - Q_s - T) / m = F / m - g (\sin \alpha + f \cos \alpha)$

ponieważ jest to ruch jednostajnie przyspieszony z $v_0 = 0$ więc droga

$s = a t^2 / 2 = [F / m - g (\sin \alpha + f \cos \alpha)] t^2 / 2$;

$s = 4,5 \text{ m}$

Rozwiązanie Zadania 9:



$$m = 2\text{kg} \quad f = 0,01 \quad g = 10\text{m/s}^2$$

Chcemy, aby wskutek działania siły F , klocek zatrzymał się. Jak wiemy, wtedy siła ciężkości będzie musiała równoważyć siłę tarcia $Q = T$

Siłę ciężkości wyrazamy wzorem $Q = m g$, natomiast siłę tarcia: $T = f N$

gdzie f jest w tym przypadku współczynnikiem tarcia statycznego. Siła nacisku N jest nią sumą działających sił F (zauważ, że siły te działają z dwóch stron), czyli:

$$N = 2 F$$

Zatem ostatecznie:

$$Q = T$$

$$mg = f N$$

$$mg = f * 2 F$$

$$F = mg / 2f$$

po obliczeniach $F = 1000 \text{ N}$

Rozwiązanie Zadania 10:

$$\rho_{\text{Pb}} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

$$\gamma_z = 10 \text{ N/kg}; \quad \rho_{\text{Pb}} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_z = F / m; \quad F = G m M / R^2; \quad \text{stąd} \quad \gamma_z = G M / R^2$$

podobnie dla kuli wykonanej z ołowiu $\gamma_o = G M_o / R_o^2$

warunek $\gamma_z = \gamma_o$ powoduje $G M / R^2 = G M_o / R_o^2$

stąd $R_o^2 = (M_o / M) R^2 = [(4/3 * \pi R_o^3 \rho_{pb}) / (g R^2 / G)] R^2$

po obliczeniu

$R_o = 3 g / 4 \pi \rho_{pb} G$ i podstawieniu $R_o = 31 \cdot 10^5$ m

Rozwiązanie Zadania 11:

I prędkość kosmiczna, jest to taka prędkość przy której powstająca siła odśrodkowa w ruchu dookoła kuli ziemskiej jest równa sile ciężkości przy powierzchni Ziemi

$$F_g = F_o$$

$m v^2 / R = m g$ stąd $v_1 = (g R)^{1/2}$ – I prędkość kosmiczna

wysokość $h = v_1 t - g t^2 / 2$ oraz $v_k = v_1 - g t$

przy maksymalnej wysokości $v_k = 0$ i $h = v_1^2 / 2 g$

po podstawieniu za v_1 otrzymamy $h = R / 2$

wstawiając do $F_p = G m M / (R + h)^2 = 4 G m M / 9 R^2 = 4/9 [G m M / R^2]$

a ponieważ na powierzchni ziemi $Q = mg = G m M / R^2$

czyli pocisk będzie przyciągany (ważył) $F_p = 4/9 Q$

Rozwiązanie Zadania 12:

$$\alpha = 30^\circ \quad v_0 = 36 \text{ m/s} \quad t = 3 \text{ s}$$

przy rzucie pod kątem $\alpha = 30^\circ$ kamień posiada dwie składowe prędkości

poziomą $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$ i pionową $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$

w kierunku poziomym będzie ruch jednostajny, natomiast w kierunku pionowym ruch jednostajnie opóźniony przy wznoszeniu i jednostajnie przyspieszony przy opadaniu kamienia

maksymalny zasięg $s = v_{x0} t$

przy czym czas jest czasem w którym kamień jest w ruchu, obliczymy go z prędkości w ruchu pionowym $v_y = v_{y0} - g t$

po osiągnięciu h_{\max} – $v_y = 0$ stąd $t = v_{y0} / g$

kamień spada w tym samym czasie – więc w powietrzu był w czasie $t_p = 2 t = 2 v_{y0}/g$
i $s_{\max} = 2 v_{x0}v_{y0}/g = 2 v_0 \cos \alpha v_0 \sin \alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g$
po obliczeniach $s = 114,4 \text{ m}$
maksymalną wysokość $h = v_{y0} t - g t^2 / 2$
otrzymamy gdy w ruch do góry kamień wytraci prędkość $v_y = 0$
czyli $v_y = v_{y0} - g t$ stąd $t = v_{y0} / g$
 $h_{\max} = v_{y0}^2 / 2g = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$ $h = 16,5 \text{ m}$
parametry po $t = 3 \text{ s}$ ruchu otrzymamy wstawiając do równań na s i h czas 3 s .

Rozwiązanie Zadania 13:

$l = 20 \text{ m}$ $s = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

w kierunku pionowym pocisk wykonał drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym (bez prędkości początkowej $v_{0y} = 0$) pod wpływem przyspieszenia ziemskiego

$s = g t^2 / 2$

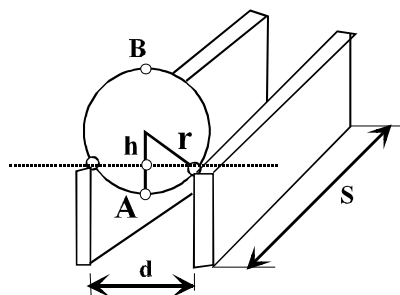
stąd $t = (2 s / g)^{1/2}$ jest to czas przelotu pomiędzy kartkami

i w tym czasie pocisk przebył drogę $l = v t$

czyli $v = l / t = (gl/2s)^{1/2}$ $v = 200 \text{ m/s}$

Rozwiązanie Zadania 14:

$d = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$ $r = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ $t = 2 \text{ s}$ $s = 120 \text{ cm} = 1,2 \text{ m}$



prędkość liniowa punktów na osi obrotu wynosi

$v = s / t$

prędkość kątowna względem środka geometrycznego

$\omega = v / h = s / h t$

h obliczymy z zależności $r^2 = (d/2)^2 + h^2$ $h = (4 r^2 - d^2)^{1/2} / 2$

$$\text{stąd } \omega = 2 s / t (4 r^2 - d^2)^{1/2}$$

$$v_A = \omega (r - h) = 2 s (r - h) / t (4 r^2 - d^2)^{1/2} \quad v_A = 0,6 (3 - \sqrt{5}) / \sqrt{5}$$

$$v_B = \omega (r + h) = 2 s (r + h) / t (4 r^2 - d^2)^{1/2} \quad v_B = 0,6 (3 + \sqrt{5}) / \sqrt{5}$$

Rozwiązanie Zadania 15:

$$n = 36 \text{ obr/min} \quad \nu = 0,6 \text{ obr/s} = 0,6 \text{ Hz} \quad r = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

aby leżąca masa nie ześliznęła się musi być siła tarcia tej masy o podłoże krążka większe lub równe sile odśrodkowej $F_T = F_o$

$$\text{siła odśrodkowa } F_o = m v^2 / r$$

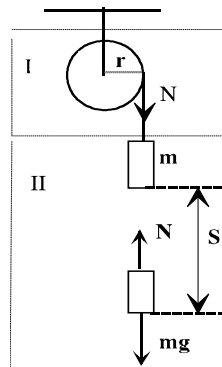
$$\text{siła tarcia } F_T = N f = m g f$$

$$v = \omega r = 2\pi \nu r$$

$$\text{stąd } f = 4\pi^2 \nu^2 r / g$$

$$f = 0,284$$

Rozwiązanie Zadania 16:



$$m = 1 \text{ kg} \quad r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m} \quad s = 0,5 \text{ m};$$

obszar I - ruch obrotowy II zasada dynamiki $\varepsilon = M/J$

ponieważ $J = N r$ stąd

$$* \quad N r = J \varepsilon$$

obszar II - ruch postępowy II zasada dynamiki

$$a = F/m$$

ponieważ $F = mg - N$ stąd

$$** \quad m g - N = m a$$

$$\varepsilon = a / r$$

ciało porusza się więc ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej

$$s = a t^2 / 2 \quad \text{stąd} \quad a = 2 s / t^2$$

$$\text{obliczając z równania} \quad * \quad N = 2 s J / r^2 t^2$$

$$\text{i wstawiając do równania} \quad ** \quad J = mgr^2 t^2 / 2s - mr^2 \quad J = 10 \text{ kg m}^2$$

$$\text{oraz} \quad N = m (g - 2s / t^2)$$

$$N = 10 \text{ N}$$

Rozwiązanie Zadania 17:

$$n_1 = 15 \text{ obr/min} \quad v_1 = 1/4 \text{ Hz} \quad m = 5 \text{ kg} \quad l_1 = 70 \text{ cm} \quad l_2 = 10 \text{ cm}$$

($J_0 = 10 \text{ kg m}^2$ człowieka z krzesłem)

$$\text{kręt początkowy} \quad L_1 = J_0 \omega_1 + 2 m l_{12} \omega_1$$

$$\text{kręt końcowy} \quad L_2 = J_0 \omega_2 + 2 m l_{22} \omega_2$$

$$\text{porównując} \quad L_1 = L_2$$

$$v_1 = 1/4 \text{ Hz} \quad \omega_1 = 2\pi v_1$$

$$v_2 = v_1 (J_0 + 2 m l_{12}) / (J_0 + 2 m l_{22}) \quad v_2 = 2,25 \text{ Hz}$$

Praca jest równoważna przyrostowi energii kinetycznej

$$E_k = J \omega^2 / 2$$

$$E_{k1} = (J_0 + 2 m l_{12}) \omega_{12}^2 / 2$$

$$E_{k2} = (J_0 + 2 m l_{22}) \omega_{22}^2 / 2$$

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = (J_0 + 2 m l_{22}) \omega_{22}^2 / 2 - (J_0 + 2 m l_{12}) \omega_{12}^2 / 2$$

Rozwiązanie Zadania 18:

$$\rho_1 = 2,5 \text{ g/cm}^3 \quad m = 150 \text{ g} \quad \rho_2 = 1,8 \text{ g/cm}^3$$

siła naprężenia nici będzie równa sile ciężkości pomniejszonej o wartość siły wyporu ciała w cieczy

$$N = Q - P_w$$

Siła wyporu będzie równa ciężarowi wypartej cieczy

$$P_w = V_2 \gamma_2 = V_2 \rho_2 g$$

objętość wypartej V_2 cieczy jest równa objętości ciała $V_2 = V_1$

$$V_1 = m / \rho_1 \quad \text{stąd}$$

$$P_w = m (\rho_2 / \rho_1) g$$

$$\text{oraz} \quad N = mg (1 - \rho_2 / \rho_1) \quad N = 41,2 \text{ N}$$

Rozwiązanie Zadania 19:

$$\gamma_s = 7,8 \text{ G/cm}^3 \quad \gamma_k = 0,2 \text{ G/cm}^3 \quad \gamma_w = 0,981 \text{ G/cm}^3$$

aby mieszanina korka i stali pływała w wodzie to musi być jej ciężar właściwy równy ciężarowi właściwemu wody

$$\gamma_m = \gamma_w;$$

$$\text{ale} \quad \gamma_m = x \gamma_s + (1 - x) \gamma_k \quad x - \text{ilość stali}$$

stąd

$$x = (\gamma_w - \gamma_k) / (\gamma_s - \gamma_k) \quad \text{stąd} \quad x = 0,105$$

Rozwiązanie Zadania 20:

$$m_p = 17,41 \text{ g} \quad m_w = 15,38 \text{ g} \quad \gamma_w = 9810 \text{ N/m}^3$$

$$\text{ciężar wypartej wody } P_w = Q_p - Q_w;$$

Q_p - ciężar próbki w powietrzu

Q_w - ciężar próbki w wodzie

$$\text{objętość wypartej wody } V_w = (Q_p - Q_w) / \gamma_w = \text{objętości próbki.}$$

Stąd

$$\gamma_m = Q_p / V_w = Q_p \gamma_w / (Q_p - Q_w)$$

$$\text{ale } Q = mg \quad \text{stąd } Q / g = m$$

$$\gamma_m = m_p / V_w = m_p \gamma_w / (m_p - m_w);$$

$$\gamma_m = 84 \, 100 \text{ N/m}^3$$

Rozwiązanie Zadania 21

$$A = 0,2\text{mm} \quad \nu = 435 \text{ Hz}$$

zgodnie ze wzorami ruchu harmonicznego

$$\text{wychylenie} \quad x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{prędkość} \quad v = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{przyspieszenie} \quad a = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = A \omega \cos \omega t$$

ponieważ faza początkowa $\varphi = 0$

maksymalna wartość prędkości będzie wtedy gdy $\cos \omega t = 1$

wtedy

$$v = \omega A$$

gdzie $A = 0,2\text{mm}$; i $\omega = 2 \pi \nu$

wstawiając otrzymamy

$$v_{\max} = 2 \pi \nu A \quad \text{po podstawieniu} \quad v_{\max} = 0,55 \text{ m/s}$$

podobnie $a = -\omega^2 A \sin \omega t$ maksimum gdy $\sin \omega t = 1$

(znak minus świadczy o przeciwnym zwrocie przyspieszenia i prędkości)

otrzymamy

$$a_{\max} = 4 \pi^2 \nu^2 A \quad \text{po podstawieniu} \quad a_{\max} = 1500 \text{ m/s}^2$$

Rozwiązanie Zadania 22:

$$v_{\max} = 0,63 \text{ m/s} \quad a_{\max} = 3,9 \text{ m/s}^2 \quad \varphi = 0$$

$$v = A \omega \cos \omega t \quad \text{i stąd} \quad v_{\max} = \omega A$$

$$a = -A \omega^2 \sin \omega t \quad \text{i stąd} \quad a_{\max} = -\omega^2 A$$

po podstawieniu otrzymamy układ równań,

$$\omega A = 0,63$$

$$\omega^2 A = 3,9$$

$$\omega = 2 \pi \nu$$

otrzymamy $A = 0,1 \text{ m}$ $\omega = 6,3 \text{ rad/s}$ $\nu = 1 \text{ Hz}$.

Rozwiązanie Zadania 23:

$$A = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} \quad f = 150 \text{ drgań/min} = 2,5 \text{ drg/s} = 2,5 \text{ Hz} \quad \varphi = 45^\circ = \pi/4$$

ogólna postać równania ruchu drgającego podana jest wzorem

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\nu = 2,5 \text{ Hz}$$

$$\text{stąd } \omega = 2\pi\nu = 5\pi$$

i równanie ruchu

$$x = 0,05 \sin(5\pi t + \pi/4)$$

Rozwiązanie Zadania 24:

$$t_d = 1 \text{ min} \quad l = 1,5 \text{ m} \quad t_u = 2 \text{ s}$$

odległość między dwoma grzbietami fal, jest to najmniejsza odległość między dwoma punktami drgającymi w tej samej fazie czyli jest to długość fali,

$$\lambda = l$$

czas między dwoma kolejnymi uderzeniami o brzeg, jest to odległość czasowa między punktami drgającymi w tej samej fazie czyli okres drgań,

$$T = t_u$$

czas t_d jest to czas po którym fala dobiegła do brzegu

$$\text{droga wynosi więc } s = \nu f t_d$$

$$\text{ale } \nu f = \lambda / T$$

i po podstawieniu

$$s = \lambda t_d / T = l t_d / t_u$$

$$s = 45 \text{ m.}$$

Rozwiązanie Zadania 25:

$$l = 25 \text{ cm} \quad \nu = 340 \text{ m/s} \quad \nu = 680 \text{ Hz}$$

Napiszmy równania fali biegnącej dla obu punktów

dla pkt. 1 $y_1 = A \sin(\omega t - kx_1)$;

dla pkt. 2 $y_2 = A \sin(\omega t - kx_2)$;

fazy drgań

dla pkt. 1 $\varphi_1 = \omega t - kx_1$

dla pkt. 2 $\varphi_2 = \omega t - kx_2$

$k = \pi / \lambda$, $x_2 - x_1 = l$, $\lambda = vT = v/\nu$

różnica faz $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k(x_2 - x_1) = 2\pi / \lambda l$

$\Delta \varphi = 2\pi \nu l / v$

po podstawieniu $\Delta \varphi = \pi$

Rozwiązanie Zadania 26:

$A = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$ $\omega = 20 \text{ rad/s}$ $v = 200 \text{ m/s}$ $\varphi = 0$

równanie fali $y = A \sin(\omega t - kx)$

$k = 2\pi / \lambda$

ale $\lambda = vT = v / \nu$ podstawiając

$k = 2\pi \nu / v = \omega / v$ po podstawieniu

$k = 0,1$ stąd

$y = 0,02 \sin(20t - 0,1x)$

Rozwiązanie Zadania 27:

$\lambda = vT = v / \nu$

stąd $\lambda_d = 17 \text{ m}$ $\lambda_g = 0,017 \text{ m}$

Rozwiązanie Zadania 28

$\nu = 100 \text{ Hz}$ $v = 90 \text{ km/h.} = 25 \text{ m/s}$

Zgodnie ze zjawiskiem Dopplera $\nu_l = \nu / (1 \pm u/v)$

gdzie

u – prędkość źródła dźwięku

v – prędkość dźwięku w danym ośrodku

więc przy zbliżaniu się lokomotywy

$\nu_l = \nu / (1 - u/v)$

$\nu_l = 107 \text{ Hz}$

a przy oddalaniu się lokomotywy

$$v_l = v / (1 + u/v)$$

$$v_l = 93 \text{ Hz}$$

Rozwiązanie Zadania 29:

$$V = 245 \text{ l} \quad t_p = 150 \text{ C} \quad T_p = 288 \text{ K} \quad t_k = 320 \text{ C} \quad T_k = 305 \text{ K}$$

$$c_w (\text{wody}) = 4187 \text{ J/kg K.}$$

Gęstość wody w warunkach normalnych $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$V = 245 \text{ l} = 245 \text{ dcm}^3 = 0,245 \text{ m}^3 \quad m. = \rho V \quad \text{stąd} \quad m_1 = 245 \text{ kg}$$

ciepło będzie pobierała ogrzewająca się woda zmieniając temperaturę z t_p do t_k (rozumiejąc to w skali Celsjusza), lub z T_p do T_k (rozumiejąc to w skali Kelwina)

$$Q_p = m_1 c_w (T_k - T_p)$$

Uwaga!!!

Różnica temperatur w obu skalach będzie co prawda jednakowa, lecz dobrze jest wyrobić sobie nawyk rozróżniania obu skal, co przydaje się w całym kursie gazodynamiki i termodynamiki.

Ciepło będzie oddawane przez nieznaną ilość wrzącej wody m_2 ,

$$Q_o = m_2 c_w (T_w - T_k) \quad \text{gdzie} \quad T_w = 1000 \text{ C} + 273 = 373 \text{ K}$$

bilans ciepła (5.2) $Q_p = Q_o$
porównując prawe strony równań

$$m_1 c_w (T_k - T_p) = m_2 c_w (T_w - T_k) \quad \text{stąd} \quad m_2 = m_1 (T_k - T_p) / (T_w - T_k)$$

$$\text{po podstawieniu} \quad m_2 = 61,25 \text{ kg} = 61,25 \text{ l}$$

Rozwiązanie Zadania 30:

$$r = 10 \text{ cm} \quad T_1 = 293 \text{ K} \quad T_0 = 273 \text{ K} \quad c_t(\text{lodu}) = 334 \text{ 103 J/kg}$$

$$\text{gęstość materiałów} \quad \rho_s = 7 \text{ 860 kg/m}^3 \quad \rho_l = 880 \text{ kg/m}^3$$

masa stopionego lodu będzie się składała z walca o promieniu r i wysokości h , oraz połowy kuli o promieniu r

$$\text{masa stopionego lodu} \quad m_l = V \rho_l = (\pi r^2 h + 1/2 * 4/3 * \pi r^3) \rho_l$$

$$\text{ciepło pobrane przez lód} \quad Q_p = m_l c_t(\text{lodu})$$

$$\text{ciepło oddane przez kulkę} \quad Q_o = m_k c_{ws} (T_1 - T_0) \quad m_k = 4/3 * \pi r^3 \rho_s$$

$$Q_p = Q_o$$

stąd $h = 2r/3 [2 cws \rho s (T1 - T0) / ct \rho l - 1]$
po podstawieniu $cws(\text{stali}) = 753 \text{ J/kgK}$
 $h = 0,067 \text{ m.} = 6,7 \text{ cm}$

Rozwiązanie Zadania 31:

$s = 40 \text{ m.}; \alpha = 300; f = 0,5; c_{Cu} = 400 \text{ J/ (kg K)}; \eta = 0,5$

klocek będący na równi o kącie nachylenia α wywiera nacisk na podłoże

siła nacisku $N = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$

siła nacisku powoduje powstanie siły tarcia T

$T = f N = mgf \cos \alpha$

siła tarcia przy przemieszczaniu klocka na drodze s , wykonuje pracę

$W = T s = mgfs \cos \alpha;$

ale tylko połowa czyli η tej pracy zostaje zamieniona na energię cieplną:

czyli $\eta W = Q$

$\eta mgfs \cos \alpha = m. c_{Cu} \Delta t$

stąd $\Delta t = \eta gfs \cos \alpha / c_{Cu} \quad \Delta t = \Delta T = 0,22 \text{ K}$

Rozwiązanie Zadania 32:

$V = 2 \text{ l} = 0,002 \text{ m}^3 \quad p = 12,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \quad t = 270 \text{ C} \quad T = 300 \text{ K}$

warunki normalne mają parametry

$V_0 = 22,414 \text{ l} = 0,0224 \text{ m}^3 \quad p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \quad T_0 = 273 \text{ K}$

aby obliczyć należy sprowadzić gaz do warunków normalnych w których jest wiadomo że w molu substancji znajduje się liczba Avogadro cząstek (bądź atomów)

czyli $pV/T = p_0 V_0 / T_0$

stąd $V_0 = pVT_0 / p_0 T$

gdy znaleźliśmy objętość którą zajmuje gaz w warunkach normalnych, to wiadomo nam że każdy mol zajmuje objętość $V_m = 22,414 \text{ l} = 0,022 \text{ m}^3$ tzw. objętość molowa

jeżeli podzielimy otrzymaną objętość przez objętość 1 mola otrzymamy ilość moli danego gazu

$$\text{czyli } n = V_0 / V_m = p V_0 / V_m p_0 T$$

mnożąc teraz liczbę moli przez liczbę Avogadro (ilość cząsteczek w molu danej substancji) otrzymamy całkowitą liczbę cząsteczek w naczyniu

$$N = n N_A = p V_0 N_A / V_m p_0 T$$

$$\text{po podstawieniu liczb } N = 0,101 N_A = 6,086 \cdot 10^{22}$$

Rozwiązanie Zadania 33:

$$m_1 = 12 \text{ g helu} \quad m_2 = 6 \text{ g argonu} \quad p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad T = 300 \text{ K}$$

$$\mu_1 = 4,0026 \text{ g/mol} \quad \mu_2 = 39,95 \text{ g/mol}$$

$$\text{gęstość mieszaniny } \rho = m / V \quad \text{gdzie } m = m_1 + m_2$$

objętość mieszaniny obliczymy z prawa Clapeyrona $pV = nRT$

$$V = nRT/p$$

ale n jest sumą ilości moli gazów w mieszaninie

$$n_1 = m_1 / \mu_1 \quad \text{i} \quad n_2 = m_2 / \mu_2$$

$$n = n_1 + n_2 = m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2$$

po wstawieniu do ρ otrzymamy:

$$\rho = (m_1 + m_2) p / (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) RT$$

$$\text{i liczbowo } \rho = 45,8 \text{ g/l}$$

Rozwiązanie Zadania 34:

$$m = 15,3 \text{ kg} \quad P_u = 105 \text{ KM} \quad c_{s\text{on}} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ J/kg} \quad (1 \text{ KM} = 736 \text{ W})$$

sprawność silnika liczona jest jako stosunek mocy użytecznej P_u (bądź energii zamienionej na pracę), do mocy całkowitej P_c (czyli energii dostarczonej do urządzenia)

$$\eta = P_u / P_c$$

moc całkowitą otrzymamy z obliczenia energii otrzymanej przez spalanie paliwa i podzielenie jej przez czas, w którym to nastąpiło

$$E = W = m c_{s\text{on}} \quad \text{oraz} \quad P_c = m \cdot c_{s\text{on}} / t \quad t = 3600 \text{ s}$$

podstawiając

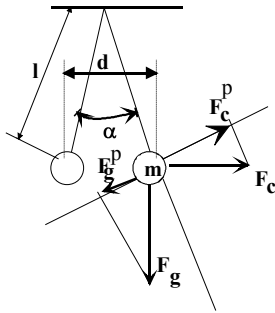
$$\eta = P_u t / m c_{s\text{on}}$$

po podstawieniu

$$\eta = 40 \%$$

Rozwiązanie Zadania 35:

$$m = 0,5 \text{ g} \quad l = 0,5 \text{ m} \quad d = 2 \text{ cm} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$



rzutując siłę ciężkości F_g na kierunek prostopadły i równoległy do nitki (równoległy niezaznaczono)-ponieważ siły rzutowane na ten kierunek powodują jedynie naprężenie nici

otrzymamy dla siły ciężkości:

$$F_{gp} = F_g \sin \alpha \quad F_{gr} = F_g \cos \alpha$$

dla siły oddziaływania elektrostatycznego:

$$F_{cp} = F \cos \alpha \quad F_{cr} = F \sin \alpha$$

$$\text{gdzie } F_g = mg \quad \text{a } F_c = k q^2 / d^2 \quad \text{i } k = 1 / 4\pi \epsilon_0$$

warunkiem równowagi jest $F_{gp} = F_{cp}$ czyli $mg \sin \alpha = k q^2 \cos \alpha / d^2$ stąd

$$q^2 = mgd^2 \tan \alpha / k$$

ale

$$\tan \alpha = (d/2) / h = d / (4l^2 - d^2)^{1/2}$$

i

$$q = [mgd^3 / k(4l^2 - d^2)^{1/2}]^{1/2} = (4\pi \epsilon_0 mgd^3)^{1/2} / (4l^2 - d^2)^{1/4}$$

po podstawieniu

$$q = 1,78 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Rozwiązanie Zadania 36:

$$r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m} \quad V = 300 \text{ V} \quad q = 0,2 \text{ } \mu\text{C} \quad d_1 = 55 \text{ cm} = 0,55 \text{ m} \quad d_2 = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

potencjał kuli $V = kQ/r$

stąd ładunek będący n kuli $Q = V r / k$

ładunek ten wytwarza w punkcie A potencjał $V_A = k Q/ d_1 = V r/ d_1$

i punkcie B wytwarza potencjał $V_B = k Q/ d_2 = V r/ d_2$

praca zaś

$$W = q (V_A - V_B) = q V r (1/ d_1 - 1/ d_2)$$

$W = - 9 \cdot 10^{-7} \text{ J}$ praca ujemna bo wykonują siły zewnętrzne.

Rozwiązanie Zadania 37:

$$\text{SEM } \mathcal{E} = 1,49 \text{ V} \quad I = 0,38 \text{ A} \quad U = 1,43 \text{ V}$$

$$\text{SEM ogniwa } \mathcal{E} = I R_w + I R_z = I R_w + U$$

stąd

$$R_w = (\mathcal{E} - U)/ I$$

po podstawieniu

$$R_w = 0,158 \text{ } \Omega.$$

Rozwiązanie Zadania 38:

$$n = 2 \quad U = 90 \text{ V} \quad I_c = 1,5 \text{ A}$$

prąd płynący w obwodzie zgodnie z wzorem $I = U/R$

$$\text{stąd } R = U/I$$

R jest oporność zastępcza układu równoległego oporu $-x$ i oporu $-2x$

$$1/x + 1/2x = 1/R$$

$$\text{obliczone } R = 2x/3$$

i podstawione wyżej otrzymamy:

$$x = 3U/2I$$

$$\text{po podstawieniu wartości liczbowych } x = 90 \text{ } \Omega$$

korzystając z prawa Ohma,

$$\text{do rezystora } x = 90 \text{ } \Omega$$

przyłożono napięcie $U = 90 \text{ V}$, więc musi popłynąć prąd $I_1 = 1 \text{ A}$

przez drugi rezystor $2x = 180 \text{ } \Omega$, przy tym samym napięciu $I_2 = 0,5 \text{ A}$

$$\text{sumaryczny prąd } I_c = 1,5 \text{ A}$$

Rozwiązanie Zadania 39:

$$r = 10 \text{ cm} \quad N = 500 \quad \Delta t = 0,3 \text{ s} \quad B_1 = 1 \text{ T} \quad B_2 = 1,5 \text{ T}$$

$$\text{zgodnie z wzorem } \mathcal{E} = - \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E} = - \Delta B S / \Delta t = - (B_2 - B_1) S / \Delta t$$

pamiętajmy!!! - znak minus we wzorze oznacza kierunek indukowanej elektromotorycznej, bądź kierunek przepływu prądu

ponieważ S to jest pole powierzchni koła objętego przez cewkę

$$S = \pi r^2$$

Stąd SEM od pojedynczego zwoju wynosi

$$E = -\pi r^2 (B_2 - B_1) S / \Delta t$$

a od N zwojów

$$E_c = -N \pi r^2 (B_2 - B_1) S / \Delta t$$

i liczbowo $E_c = -26,2 \text{ V}$

Rozwiązanie Zadania 40:

$$L = 0,038 \text{ H} \quad C = 177 \mu\text{F} \quad R = 8 \Omega \quad \nu = 50 \text{ Hz} \quad U_S = 220 \text{ V}$$

z prawa Ohma $I_s = U_S / Z$

$$\text{natomiast } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$X_L = \omega L = 2 \pi \nu L \quad X_C = 1 / \omega C = 1 / (2 \pi \nu C)$$

po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$X_L = 11,9 \Omega \quad X_C = 18 \Omega \quad Z = 10,1 \Omega \quad I_s = 21,8 \text{ A}$$

$$\text{spadki napięć } U_R = I_s R \quad U_L = I_s X_L \quad U_C = I_s X_C$$

i odpowiednio

$$U_R = 174 \text{ V} \quad U_L = 259 \text{ V} \quad U_C = 392 \text{ V}$$

ponieważ

$U_L - U_C = -133 \text{ V}$ więc obwód ma charakter pojemnościowy

wartość wypadkowego wektora napięcia

$$U = [U_R^2 + (U_L - U_C)^2]^{1/2} \quad U = 219 \text{ V}$$

kąt przesunięcia fazowego

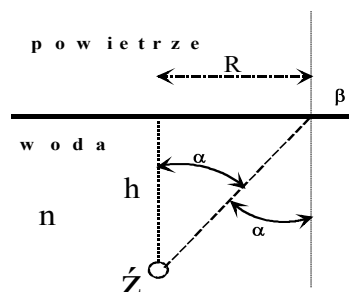
$$\cos \varphi = U_R / U \quad \cos \varphi = 0,794 \quad \varphi = 37,30$$

moc czynna

$$P = I_s U_S \cos \varphi \quad P = 3808 \text{ W}$$

Rozwiązanie Zadania 41:

$$h = 20 \text{ cm} \quad n = 1,33$$



jeżeli światło będzie padało na granicę ośrodków tak jak na rysunku to przy kącie załamania $\beta=90^\circ$ (można określić max. promień R)

z zależności

$$\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1$$

i wstawiając $\sin \beta = 1$

$$n_2 = 1 \text{ (dla powietrza)}$$

stąd

$$\sin \alpha = 1 / n_1 = 1 / n$$

ale

$$*) R / h = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha / \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha / (1 - \sin^2 \alpha)$$

podstawiając za $\sin^2 \alpha = 1 / n^2$ otrzymam

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 1 / (n^2 - 1)$$

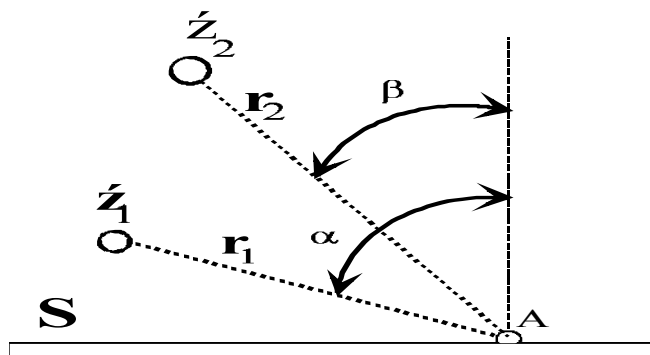
porównując ostatnie wyrażenie z *) otrzymam

$$R = h \operatorname{tg} \alpha = h / (n^2 - 1)^{1/2}$$

$$\text{Stąd średnica okręgu } D = 2 R = 2 h / (n^2 - 1)^{1/2}$$

$$D = 45,6 \text{ cm}$$

Rozwiązanie Zadania 42:



$$I_1 = 40 \text{ cd} \quad I_2 = 100 \text{ cd}$$

$$r_1 = 1 \text{ m} \quad r_2 = 1,5 \text{ m}$$

$$\alpha = 60^\circ \quad n = 3 \text{ razy}$$

natężenie oświetlenia powierzchni S w punkcie A pochodzące od obu źródeł odpowiednio wynoszą

$$E_1 = I_1 \cos \alpha / r_1^2$$

$$E_2 = I_2 \cos \beta / r_2^2$$

oświetlenie jest sumą oświetleń od obu źródeł

$$E_C = E_1 + E_2 \text{ oraz warunek } E_C / E_1 = n$$

$$\text{Stąd } n = 1 + E_2 / E_1$$

podstawiając wartości oświetleń otrzymamy

$$n = 1 + (I_2 r_1^2 \cos \beta) / (I_1 r_2^2 \cos \alpha)$$

$$\text{stąd } \cos \beta = (n - 1) (I_1 r_2^2 \cos \alpha) / (I_2 r_1^2)$$

$$\text{po podstawieniu } \cos \beta = 0,9 \quad \beta = 25^\circ 51'$$

Rozwiązanie Zadania 43:

$r_0 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N m}^2$
 energia całkowita $E_c = E_k + E_p$

poszczególne składniki energii

$$E_k = mv^2/2 \quad \text{i} \quad E_p = -eV$$

V- potencjał pola pochodzący od ładunku jądra w odległości r,

prędkość elektronu obliczymy porównując siłę oddziaływania elektrostatycznego między jądrem a elektronem F_C z siłą odśrodkową F_0 działającą na elektron będący w ruchu po okręgu o promieniu r

$$F_C = k e^2 / r^2 \quad F_0 = m v^2 / r \quad F_C = F_0$$

stąd $v^2 = k e^2 / m r$ i podstawiając za $k = 1/4 \pi \epsilon_0$

$$v^2 = e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r m) \quad \text{i} \quad E_k = e^2 / (8 \pi \epsilon_0 r)$$

potencjał od ładunku punktowego jądra $V = k q/r$

wielkość dodatnia bo ładunek jądra jest dodatni

$$\text{stąd} \quad E_p = -e (k e / r) = -k e^2 / r = -e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r)$$

po dodaniu obu energii

$$E_c = -e^2 / (8 \pi \epsilon_0 r)$$

i liczbowo $E_c = 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$

$$1 \text{ J} = 6,2 \cdot 10^{-18} \text{ eV}$$

Rozwiązanie Zadania 44:

Wzór na długość fali wypromieniowanego kwantu energii

$$\frac{1}{\lambda} = RH \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad \text{oraz} \quad v = c / \lambda$$

$$\text{stąd} \quad v = c RH \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

dla orbity trzeciej $k = 3$, dla orbity pierwszej $n = 1$

$$v_{3-1} = (8 c RH) / 8 \quad \text{i} \quad \text{liczbowo} \quad v_{3-1} = 2,92 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Długość fali $\lambda = c/v$ i liczbowo $\lambda = 0,102 \mu\text{m}$

dla orbity drugiej $k = 2$, orbita pierwsza $n = 1$

$$v_{2-1} = (3 c RH) / 4 \quad \text{i} \quad \text{liczbowo} \quad v_{2-1} = 2,46 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Długość fali $\lambda = c/v$ i liczbowo $\lambda = 0,121 \mu\text{m}$

Dla przypomnienia!

Zakres widzialny przez ludzkie oko (0,36 – 0,78) μm

Rozwiązanie Zadania 45:

22688Ra, 20682Pb

ilość rozpadów α otrzymamy dzieląc zmianę liczby masowej, przez masę cząstki α , czyli przez 4

$$N\alpha = (A_{Ra} - A_{Pb}) / A\alpha = (226 - 206) / 4 = 5$$

powinno być 5 rozpadów α

te 5 rozpadów winny zmniejszyć liczbę protonów o 10 (bo każdy rozpad α zabiera 2 protony) ale jak wynika z przemiany liczba protonów zmniejszyła się o

$$\Delta Z = Z_{Ra} - Z_{Pb} = 88 - 82 = 6$$

wynika z tego że zaszły również 4 przemiany β , z których każda spowodowała wzrost ładunku o jednostkę – czyli przyrost jednego protonu.

Rozwiązanie Zadania 46:

$$M_j = 2,0141 \text{ u} \quad j.m.a \text{ u} = 931 \text{ MeV}$$

zgodnie z wzorem $E_w = \Delta M c^2$ oraz

$$E_w = 931 \text{ MeV na jednostkę masy atomowej}$$

jądro atomu deuteru składa się z protonu $m_p = 1,00727 \text{ u}$

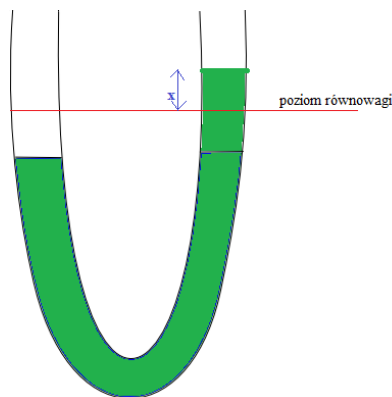
i neutronu $m_n = 1,00866 \text{ u}$ razem 2,01593 u

$$\text{ubytok masy } \Delta M = [Z m_p + (A-Z) m_n] - M_j = (2,01593 - 2,0141) \text{ u} = 0,00183 \text{ u}$$

$$\text{stąd } E_w = 0,00183 \text{ u} * 931 \text{ MeV} = 1,7 \text{ MeV}$$

Rozwiązanie Zadania 47:

U-rurka zawierająca ciecz może być traktowana jak oscylator harmoniczny. Okres drgań słupa cieczy możemy określić następująco:



Założmy, że U-rurka ma pole przekroju S , odchylenie od poziomu równowagi oznaczmy x , przyspieszenie ziemskie oznaczmy g , ciecz w U-rurce ma gęstość ρ .

Siła, która wywołuje ruch powrotny jest równa ciężarowi nadmiarowego słupka cieczy o masie $m_s = 2xSp$ i wynosi:

$$F = m_s g = 2xSp g$$

Jest to siła proporcjonalna do x i zwrocie przeciwnym do

odkształcenia postaci

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Porównując oba wzory możemy współczynnik sprężystości zapisać następująco: $k = 2Sp g$

a następnie obliczyć okres drgań cieczy w U-rurce korzystając ze znanego wzoru

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

gdzie m -masa całej cieczy.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}$$

Okres drgań cieczy w jednakowych U-rurkach zależy od masy cieczy i jej gęstości.

Wracając do naszego zadania, samorzutne drgania w drugiej U-rurce to oczywiście zjawisko rezonansu mechanicznego. Warunkiem pojawienia się rezonansu jest równość okresów drgań cieczy w obu naczyniach. Powietrze w rurce łączącej przenosi drgania przez okresowe, niewielkie zmiany ciśnienia powietrza.

Przypadek A

Masy nafty i wody są jednakowe $m_n = m_w = m$.

Okres drgań nafty:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2S\rho_n g}}$$

Okres drgań wody:

$$T_w = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2S\rho_w g}}$$

Zauważymy, że $T_n > T_w$ (gdyż $\rho_n < \rho_w$) musimy więc dolać wody. Oznaczmy m_x – masa dolanej wody

Warunek pojawienia się zjawiska rezonansu: $T_n = T_w$ stąd

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{2S\rho_n g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_x}{2S\rho_w g}}$$

Po wykonaniu prostych przekształceń mamy: $\frac{m}{2S\rho_n g} = \frac{m + m_x}{2S\rho_w g}$

$$\frac{m}{\rho_n} = \frac{m + m_x}{\rho_w} \quad \text{czyli} \quad m_x = m \left(\frac{\rho_w - \rho_n}{\rho_n} \right) = 0,5 \text{ kg} * \left(\frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right) = 0,125 \text{ kg}$$

Należy dolać 0,125 kg wody.

Przypadek B

Objętości wody i nafty w obu naczyniach są jednakowe $V_n = V_w = V$. Masy obu cieczy wynoszą więc:

$$m_n = V\rho_n \quad m_w = V\rho_w$$

Okres drgań nafty:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{V\rho_n}{2S\rho_n g}} = 2\pi \sqrt{\frac{V}{2Sg}}$$

Okres drgań wody:

$$T_w = 2\pi \sqrt{\frac{V\rho_w}{2S\rho_w g}} = 2\pi \sqrt{\frac{V}{2Sg}}$$

Okresy drgań obu cieczy są w tym przypadku jednakowe. Nie trzeba dolewać żadnej z cieczy!!!

TESTY

KINEMATYKA

Test 1.

Jak powinien lądować samolot wojskowy na pokładzie lotniskowca:

- a) **zgodnie z ruchem lotniskowca, bo ma wtedy względem lotniskowca mniejszą prędkość lądowania;**
- b) zgodnie z ruchem lotniskowca, bo ma wtedy względem lotniskowca większą prędkość lądowania;
- c) przeciwnie do ruchu lotniskowca, bo ma wtedy względem lotniskowca mniejszą prędkość lądowania;
- d) przeciwnie do ruchu lotniskowca, bo ma wtedy względem lotniskowca większą prędkość lądowania;
- e) nie ma to znaczenia.

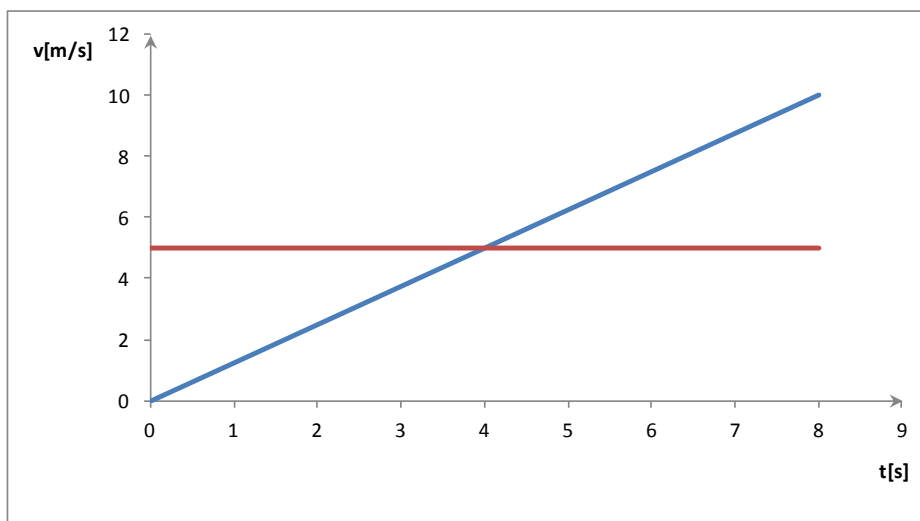
Test 2.

Po równi pochyłej o długości 90 cm stacza się bez tarcia kulka. Drogi przebyte w kolejnych trzech sekundach ruchu wynoszą odpowiednio:

- a) 30 cm, 30 cm, 30 cm;
- b) 10 cm, 30 cm, 50 cm;**
- c) 20 cm, 30 cm, 40 cm;
- d) 40 cm, 30 cm, 20 cm.

Test 3.

Wykres przedstawia zależność prędkości v od czasu t dla dwóch różnych ciał (ciało A – kolor czerwony i ciało B – kolor niebieski). Możemy stwierdzić, że:

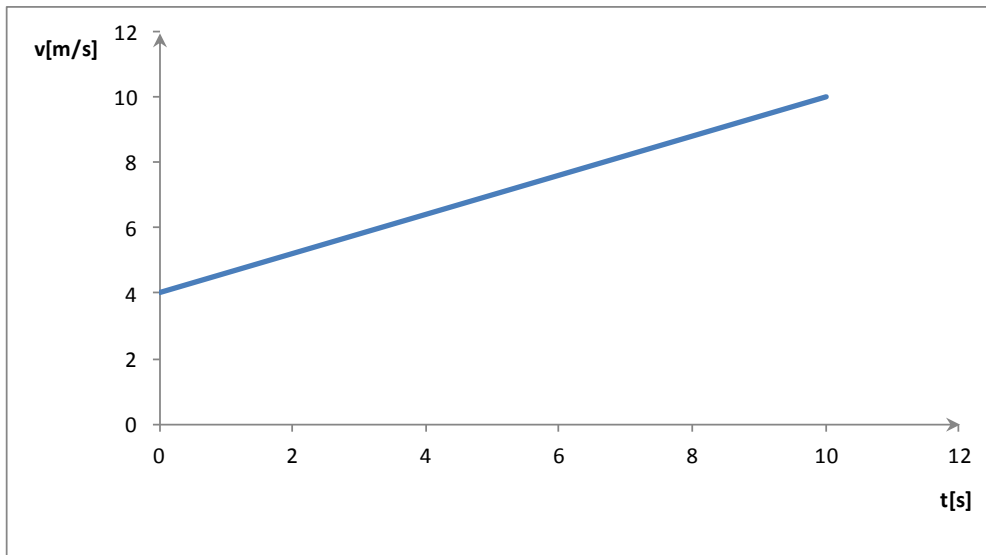


- a) drogi przebyte przez obydwa ciała w ciągu 8s są sobie równe;**

- b) ciało B przebędzie drogę dwa razy dłuższą niż ciało A;
- c) w punkcie przecięcia ciało B minie ciało A;
- d) żadna odpowiedź nie jest poprawna.

Test 4.

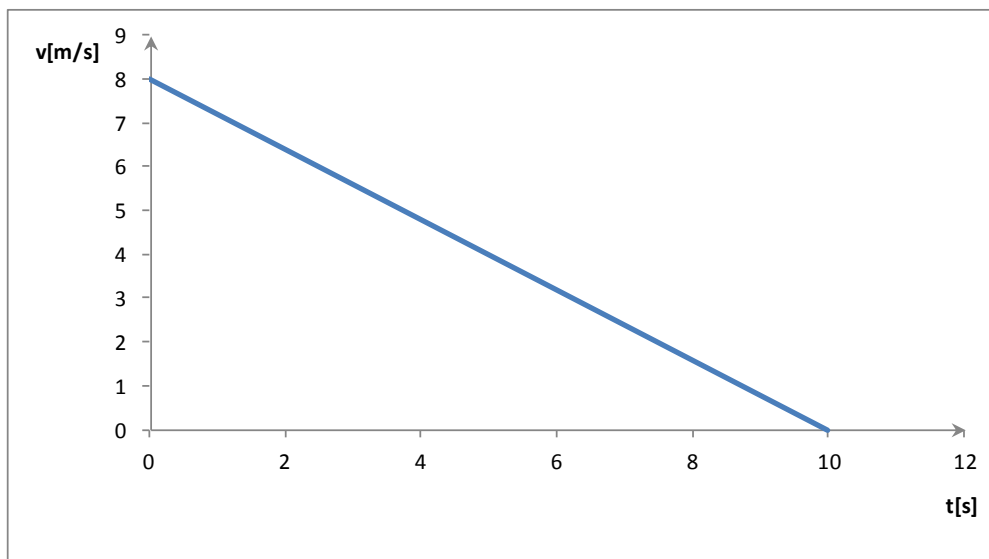
Na podstawie wykresu prędkości v od czasu t możemy stwierdzić, że funkcja $s(t)$ ma postać:



- a) $s = 4t + 0,6t^2$;
- b) $s = 4t + 0,3t^2$;**
- c) $s = 4t + 4t^2$;
- d) $s = 4t + 2t^2$.

Test 5.

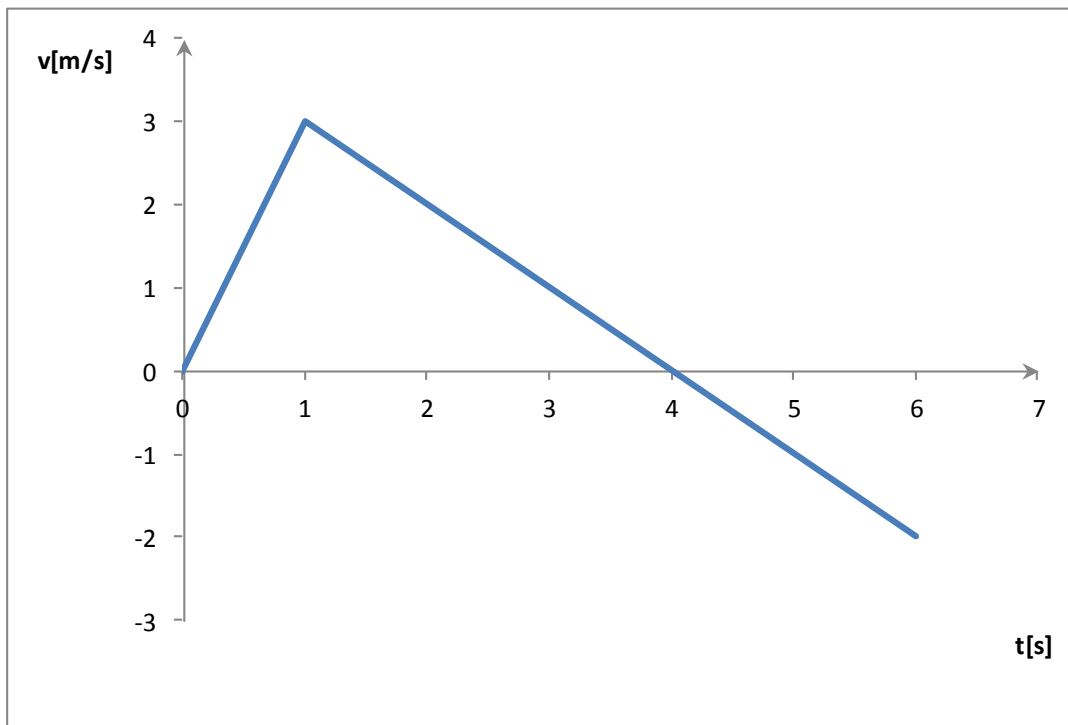
Na podstawie wykresu zależności prędkości v od czasu t możemy stwierdzić, że funkcja $s(t)$ czyli droga w funkcji czasu ma postać:



- a) $s(t) = 8t + 0,8t^2$;
- b) $s(t) = 8t + 0,4t^2$;
- c) $s(t) = 8t - 0,4t^2$;**
- d) $s(t) = 8t - 0,8t^2$.

Test 6.

Wykres przedstawia zależność prędkości v od czasu t . Średnia wartość szybkości w czasie 6 s wynosi:



- a) 3m/s
- b) 1m/s
- c) 1,33m/s**
- d) 0,67 m/s

Test 7.

Ratowniczy helikopter lecący z prędkością 7m/s wciąga na pokład z prędkością 3m/s rozbitków. Ich prędkość względem ziemi wynosi:

- a) 4 m/s
- b) 10 m/s
- c) 6,3 m/s
- d) 7,6 m/s**

Test 8.

Z urwiska w niewielkim odstępie czasu spadają w przepaść dwa kamienie. Względem siebie:

- a) pozostają one w spoczynku;
- b) poruszają się ruchem jednostajnym;**
- c) zbliżają się ruchem jednostajnie przyspieszonym;
- d) oddalają się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

Test 9.

Z wiatrówki znajdującej się na pewnej wysokości strzelono poziomo do kulki, która wisiała na takiej samej wysokości, jak lufa. W momencie wystrzału, kulka zerwała się i zaczęła spadać swobodnie. Zakładając, że początkowa wysokość, na jakiej znajdowały się obydwie ciała, jest dostatecznie duża od ziemi, a opór powietrza pomijamy:

- a) śrut przeleci nad kulką;
- b) śrut przeleci pod kulką;
- c) śrut trafi w kulkę.**
- d) *brak jednoznacznej odpowiedzi*

Test 10.

Dwa samochody jadą naprzeciw siebie z prędkością 10m/s. W pewnej chwili pasażer jednego samochodu rzucił do kolegi z drugiego samochodu poziomo z prędkością 2 m/s piłeczkę. Piłeczka będzie zbliżała się do niego z prędkością:

- a) 2 m/s;
- b) 8 m/s;
- c) 12 m/s;
- d) **22 m/s.**

Test 11

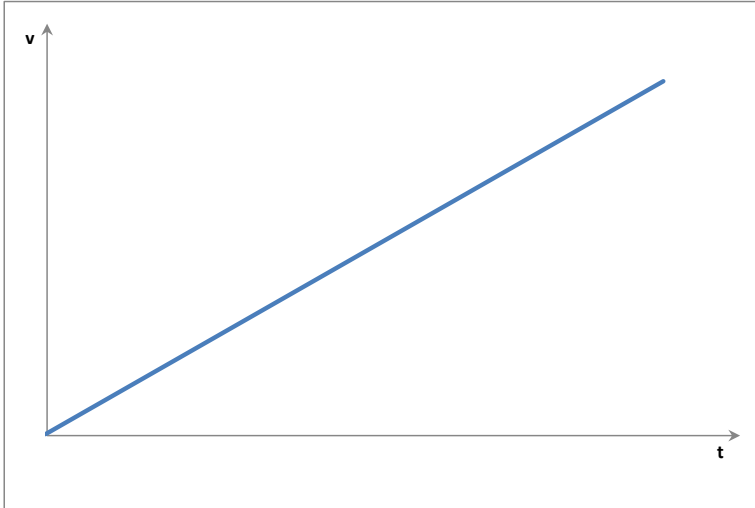
Krople deszczu opadają na ziemię z szybkością 5 m/s. Z jaką prędkością powinien poruszać się Janek, który trzyma rurę pod kątem 45° do poziomu, aby krople przelatowały przez rurę nie dotykając jej wewnętrznej powierzchni:

- a) 2,5 m/s
- b) 5 m/s**
- c) 7 m/s
- d) 10 m/s

DYNAMIKA

Test 1.

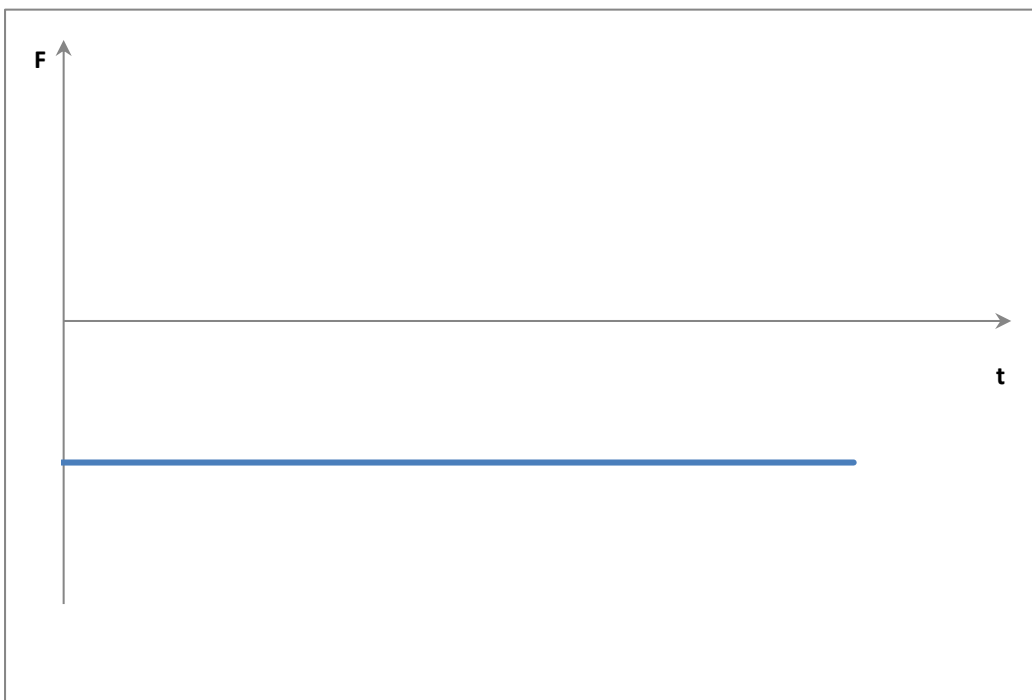
Wykres przedstawia zależność prędkości v od czasu t . Wypadkowa siła działająca na ciało :



- a) *jest stała i ma zwrot zgodny ze zwrotem prędkości;*
- b) *jest stała i ma zwrot przeciwny do zwrotu prędkości;*
- c) *jest równa 0;*
- d) *rośnie jednostajnie wraz z czasem.*

Test 2.

Wykres przedstawia zależność siły F działającej na ciało od czasu. Prędkość ciała:

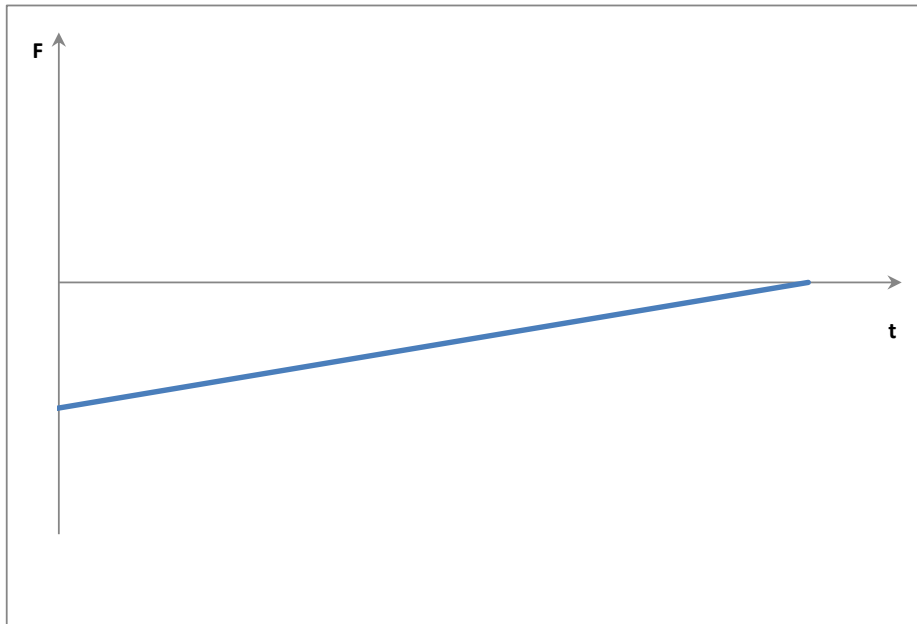


- a) *jest stała;*

- b) rośnie jednostajnie;
- c) **maleje jednostajnie;**
- d) najpierw maleje, a później rośnie.

Test 3.

Na podstawie wykresu zależności siły F od czasu, możemy stwierdzić, że ciało poruszało się:

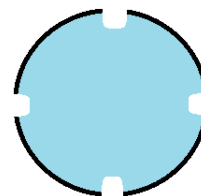


- a) ruchem jednostajnie przyspieszonym;
- b) ruchem jednostajnie opóźnionym;
- c) ruchem niejednostajnie przyspieszonym;
- d) **ruchem niejednostajnie opóźnionym.**

Test 4.

W gumowej piłce napełnionej wodą zrobiono 4 otwory, a następnie puszczo ją swobodnie z balkonu. Podczas ruchu woda:

- a) będzie wylewała się tylko dolnym otworem;
- b) będzie wylewała się tylko górnym otworem;
- c) będzie wylewała się tylko bocznymi otworami;
- d) będzie wylewała się wszystkimi otworami;
- e) **nie będzie wylewała się.**



Test 5.

Winda przewozi 5 osób o łącznej masie 300kg. Siła nacisku na podłogę windy podczas ruszania z przyspieszeniem $0,5 \text{ m/s}^2$ i hamowania z opóźnieniem $0,5 \text{ m/s}^2$ będzie różniła się o:

- a) 30 N;
- b) 60 N;
- c) 150 N;
- d) 300 N.**

Test 6.

Po oblodzonej górcie nachylonej do poziomu pod kątem 30° zsuwają się bez tarcia sanki. Ich średnia szybkość w ciągu czterech sekund wyniesie:

- a) 5 m/s;
- b) 10 m/s;**
- c) 15 m/s;
- d) 20 m/s.

Test 7.

Podczas kuligu konie ciągną siłą 2000 N duże sanie o łącznej masie 200 kg i przywiązane do nich liną saneczki o łącznej masie 50 kg. Przyspieszenie sanek i naprężenie liny wynoszą (pominiętą siłę tarcia i opory ruchu):

- a) 5 m/s^2 i 400 N
- b) 8 m/s^2 i 200 N
- c) 5 m/s^2 i 200 N
- d) 8 m/s^2 i 400 N**

Test 8.

Spadochroniarz o masie 50 kg spada ruchem jednostajnym z szybkością 5 m/s. Wiedząc, że siła opory jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości, ustal prędkość, z jaką będzie spadał spadochroniarz o masie 100 kg:

- a) ok. 5 m/s^2
- b) ok. 6 m/s^2
- c) ok. 7 m/s^2**
- d) ok. 8 m/s^2

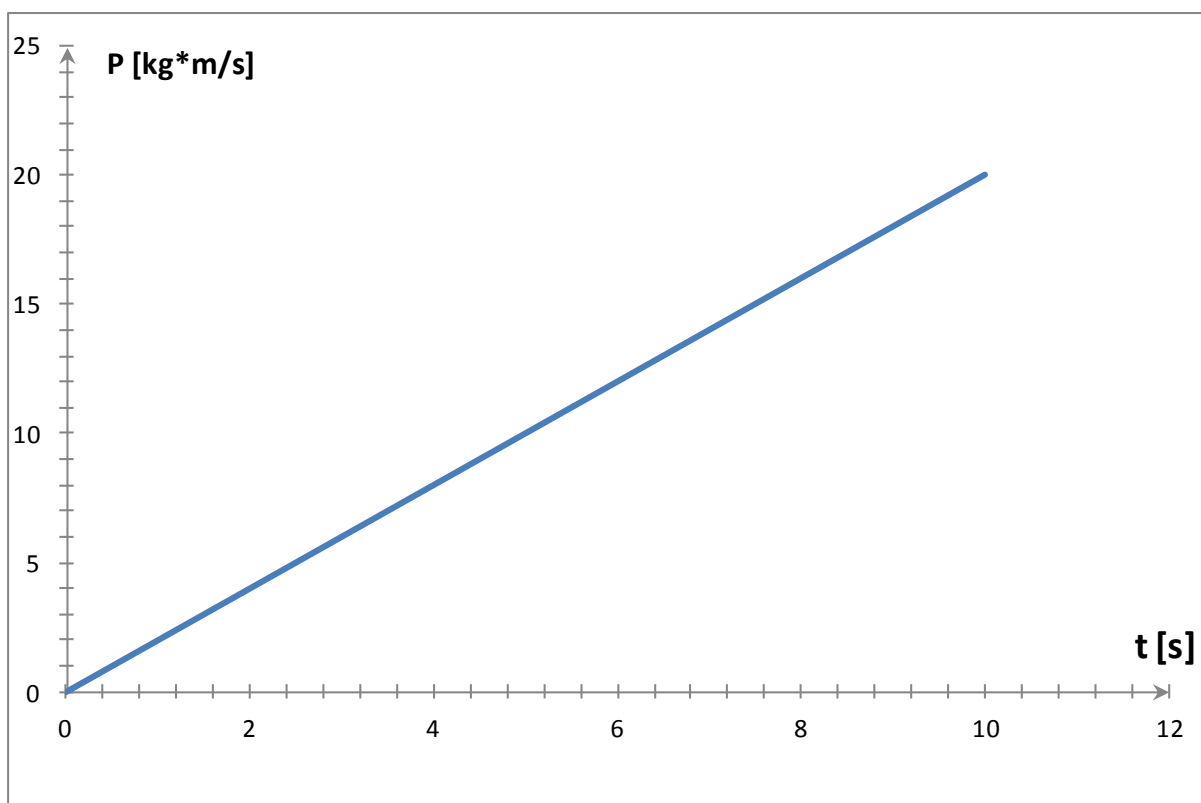
Test 9.

Z łódki o masie 200 kg wyskakuje z szybkością 2 m/s chłopiec o masie 50 kg. Z przedstawionych danych można wnioskować, że:

- a) wartość pędu chłopca jest równa wartości pędu łódki**
- b) energia kinetyczna chłopca jest równa energii kinetycznej łódki
- c) zarówno wartość pędu chłopca jak i jego energia kinetyczna są odpowiednio równe wartości pędu łódki i jej energii kinetycznej
- d) łódka odpłynie z szybkością 1 m/s

Test 10

Wykres przedstawia zależność pędu ciała o masie 2 kg poruszającego się wzdłuż prostej od czasu trwania ruchu. Na tej podstawie możemy stwierdzić, że:



- a) przyspieszenie ma wartość 2 m/s^2
- b) po 10 s ruchu prędkość ciała wynosi 20 m/s
- c) energia kinetyczna ciała po 10 s wynosi 400 J
- d) siła działająca na ciało ma wartość 2 N**