MATEMATYKA
e-zadania
dla szkół ponadgimnazjalnych
w zakresie rozszerzonym

Praca zbiorowa

„Nauka z WAT jest fascynująca!”

projekt nr WND-POKL.03.03.04-00-110/12

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIA:

Zadanie 1

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędziach długości l przecięto płaszczyzną zawierającą dwie przeciwległe krawędzie podstaw. Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie dotyczy działu 9. *Stereometria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

Zadanie 2

W prostokątnym układzie współrzędnych prosta równoległa do osi y dzieli trójkąt o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $P = (1, 1)$, $Q = (9, 1)$ na dwa obszary o równych polach. Znajdź równanie tej prostej.

Zadanie dotyczy działów: 7. *Planimetria* i 8. *Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania dla zakresu podstawowego, a ponadto: 7.4) rozpoznaje figury podobne; 8. 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt.

Zadanie 3.

Dla jakich wartości r i s środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \frac{3rx+2}{6x+s-3}$ jest punkt $C = (2; -1)$?

Zadanie dotyczy działów: 2. *Wyrażenia algebraiczne*, 3. *Równania i nierówności*, 4. *Funkcje*. W zakresie rozszerzonym uczeń spełnia wymagania dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2. 6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne; 3.4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$; 4.4) odczytuje własności funkcji z wykresu.

Zadanie 4.

Niech $f(x) = x^2 - 7x + c$. Dla jakiej wartości parametru c $\min_{\langle 3,4\rangle} f(x) = 2$?

Zadanie dotyczy działu 3. *Równania i nierówności* oraz działu 4. *Funkcje*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 5.

Dla jakiej wartości $n > 3$ liczby $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Czy suma wyrazów tego ciągu jest liczbą podzielną przez 7?

Zadanie dotyczy działów: 10. *Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka* oraz 5. *Ciągi*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 10. 1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 6.

Barman, obserwując zachowania konsumentów, zapisał następujące uwagi:

- połowa konsumentów pije cappuccino,
- $\frac{2}{5}$ pije kawę, a pozostali piją herbatę,
- jeden na trzech z pijących herbatę słodzi ją, zaś pozostali piją herbatę bez cukru,
- połowa z pijących kawę pije ją bez cukru, a z pijących cappuccino nie słodzi go jeden na trzech,
- codziennie rano jest 10 klientów pijących gorzką herbatę.

Ilu konsumentów pije w tym barze poranny napój?

Zadanie dotyczy działu 10. *Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe; 3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Zadanie 7.

Producent opakowań chce produkować takie cylindryczne opakowania, aby przy danej objętości V ich powierzchnia była minimalna. Jakie powinny być wymiary takiego opakowania, jeśli promień podstawy ma być równy 6 cm? Jaki będzie koszt wytworzenia 1000 opakowań o minimalnej powierzchni, jeśli do każdego opakowania trzeba doliczyć 20% materiału przeznaczonego na powierzchnię minimalną, a cena 1 m^2 materiału wynosi 3,60 PLN?

Zadanie dotyczy działu 11. *Rachunek różniczkowy*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zadanie 8.

Rozważmy funkcję:
$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$
gdzie *a* jest liczbą rzeczywistą, różną od zera.
Wyznacz te wartości parametru *a*, dla których funkcja *f* osiąga maksimum i minimum lokalne oraz te, dla których nie osiąga ekstremum.

Zadanie dotyczy działu 11. *Rachunek różniczkowy*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 4) korzysta z własności pochodnych do obliczania przedziałów monotoniczności funkcji; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych.

Zadanie 9.

Na wykresie funkcji wielomianowej trzeciego stopnia leży punkt $M = (3, 1)$,w którym funkcja osiąga minimum. Współczynnik kierunkowy stycznej do jej wykresu w punkcie $P = (0, 1)$ wynosi 3. Jakim wzorem jest określona ta funkcja?

Zadanie dotyczy działów: 4. *Funkcje* i 11. *Rachunek różniczkowy*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 11. 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych.

Zadanie 10.

Niech *A, B, C, D, E, F, G* kolejnymi wierzchołkami siedmiokąta foremnego. Oznaczmy przez *b, c, d* długości odcinków *AB, AC, AD* odpowiednio. Wykaż, że
$\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne.

Przy pomocy tego zadania możemy realizować wymaganie ogólne: V. *Rozumowanie i argumentacja*: Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Zadanie 11.

Znajdź równania parabol $y = ax^2 + bx + c$, na których leży punkt prostej $3x - 5y + 8 = 0$ o rzędnej 4, stycznych do prostych o równaniach
$2x - y - 5 = 0$ i $2x + y - 3 = 0$.

Zadanie dotyczy działu 8. *Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych; 6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu.

Zadanie 12.

Wyznacz równanie okręgu, do którego należy punkt *A* = (-4, -3) i który jest styczny do brzegów pasa $P = \{(x, y): |x - y| \leq \sqrt{2}\}$.

Ile jest takich okręgów? Oblicz odległość środka tych okręgów od tej ich osi symetrii, do której należy punkt *A*.

Zadanie dotyczy działów: 3. *Równania i nierówności* oraz 8. *Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 3. 9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną; 8. 4) oblicza odległość punktu od prostej; 8. 5) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zadanie 13.

Dany jest trójkąt *ABC* oraz punkty *P*, *Q* należące do boku *AB*, z których pierwszy leży między *A* i *Q* oraz punkt *R* należący do boku *AC*. Punkty te są tak położone, że odcinek *PR* jest równoległy do odcinka *QC*, zaś *QR* jest równoległy do boku *BC*. Niech |*AP*| = 16 i |*PQ*| = 12. Oblicz długość odcinka *QB*.

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych; 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne.

Zadanie 14.

Z dwóch miast A i B wyjechali naprzeciw siebie dwaj kierowcy i spotkali się na drodze między A i B po 8 godzinach. Jeżeli prędkość pojazdu wyjeżdżającego z miasta A byłaby o 14% większa, a prędkość drugiego byłaby większa o 15%, to kierowcy spotkaliby się po 7 godzinach. Który pojazd jechał z większą prędkością i ile razy?

Zadanie dotyczy działów: 2. *Wyrażenia algebraiczne* i 3. *Równania i nierówności*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2. 3) rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias; 3. 6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne; 3. 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 15.

Na ramieniu a kąta ostrego o mierze 60^0 i wierzchołku O wybrano dwa takie punkty A i B, że $|OA| = 2k$ i $|OB| = 8k$. Wyznacz na ramieniu b tego kąta taki punkt P, że stosunek $|PB|$ do $|PA|$ wynosi 2.

Zadanie dotyczy działów: 3. *Równania i nierówności*, 6. *Trygonometria*, 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego.

Zadanie 16.

Dana jest parabola o równaniu $y = x^2$. Parabolę tę przesunięto o wektor $[0, -1]$. Oblicz pole powierzchni trójkąta wyznaczonego przez punkt $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ przecięcia się stycznych (do przesuniętej paraboli przechodzące przez ten punkt) oraz punkty styczności. Wykonaj rysunek.

Zadanie dotyczy działu 4. *Funkcje*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

Zadanie 17.

Na okręgu o środku O i średnicy CD leży punkt Q różny od C i D. Styczne poprowadzone w punktach C, D i Q przecinają się w punktach A i B. Wykaż, że kąt AOB jest kątem prostym.

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 4) rozpoznaje figury podobne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zadanie 18.

Wyznacz współrzędne punktów *C* i *D*, które dzielą odcinek *AB* na trzy równe części, wiedząc, że *A* = (-1, 1) i *B* = (5, 4). Uogólnij zadanie przyjmując, że $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$.

Zadanie dotyczy działu 8. *Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach; 8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

Zadanie 19.

Dany jest kwadrat *ABCD* o boku *a*, w który wpisano drugi kwadrat *MNRS* tak, że jego wierzchołki są środkami boków poprzedniego kwadratu (*M* jest środkiem boku *AB*). Znajdź na boku *MN* taki punkt *P*, którego odległość od boku *CD* wynosi |*PH*|, by suma kwadratów odległości $|PH|^2+|PM|^2$ była minimalna.

Zadanie dotyczy działu 4. *Funkcje*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Zadanie 20.

Wyznaczyć współczynniki funkcji

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e},$$

tak, by asymptotami jej wykresu były proste o równaniach $x = 2$ i $y = -x - 1$, zaś w punkcie o odciętej $x = 1$ styczna miała współczynnik kierunkowy równy 2.

Zadanie dotyczy działu 11. *Rachunek różniczkowy*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych; 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Zadanie 21.

Dana jest funkcja $y = m^2x^2 - 2mx - 3m + 2$ dla $m \neq 0$. Wyznacz w zależności od *m* współrzędne wierzchołków tej rodziny parabol oraz ustal ich miejsce geometryczne.
Uwaga
Miejsce geometryczne – zbiór wszystkich punktów posiadających określoną własność, np. okrąg jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od ustalonego punktu.

Zadanie dotyczy działu 3. *Równania i nierówności* oraz 4. *Funkcje*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 4.13) szkicuje wykres funkcji f(x)= a/x, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Zadanie 22.

W prostokącie *ABCD* bok *AB* ma długość 20*a*, zaś odcinek *AH* o długości 16*a* jest rzutem prostokątnym *AB* na przekątną *AC*. Na boku *CD* wybieramy punkt *M* tak, że kąty *AMD* i *AHM* są przystające. Obliczyć obwód i pole trójkąta *AMH*.

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zadanie 23.

Niech *ABC* będzie trójkątem równoramiennym o podstawie |*AB*| = 2*l*, takim, że $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{4}{5}$. Z wierzchołka *A* tego trójkąta poprowadźmy półprostą, która przecina bok *BC* w takim punkcie *D*, że

$$|DB| + |DK| = m \cdot |AB|, m \in \mathbb{R},$$

gdzie |*DK*| jest odległością punktu *D* od boku *AC*. Dla jakich *m* zadanie ma rozwiązanie?

Zadanie dotyczy działu 6. *Trygonometria* 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 6.5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 7. 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zadanie 24.

Wskazać wszystkie takie trójkąty *ABC*, w których zachodzi równość
$|BC| + h_A = |AC| + h_B,$
gdzie h_A i h_B są długościami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków *A* i *B*.

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Zadanie 25.

Rozważmy trójkąt *ABC*, o kącie 60^0 przy wierzchołku *B*. Obliczyć miarę kata przy wierzchołku *A* tego trójkąta, wiedząc, że *H* jest rzutem prostokątnym tego wierzchołka na bok *BC* i spełniona jest zależność:
$|AC|^2 + |BH|^2 = \frac{169}{64}|BC|^2.$

Zadanie dotyczy działu 6. *Planimetria* i 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 6. 2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego); 7. 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zadanie 26.

W półokręgu o średnicy *AB* = 2*r* cięciwa *AC* ma długość $r\sqrt{2}$. Na łuku *AC* leży punkt *P*, którego rzutem prostokątnym na odcinek *AC* jest punkt *H*, zaś punkt *K* jest rzutem prostokątnym punktu *C* na styczną do półokręgu w punkcie *P*. Niech *x* oznacza miarę kata *CAP*. Wyznaczyć funkcję
$y = |CK| + \sqrt{2}|PH| + |PK|$
jako funkcję argumentu *x* i wykonać jej wykres.

Zadanie dotyczy działu 6. *Trygonometria* i 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 6. 4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych; 6. 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów; 6. 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

Zadanie 27.

Oblicz największą wartość wyrażenia $3x + 4y$, jeżeli $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$.

Zadanie dotyczy działu 8. *Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych; 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt; 5) posługuje się równaniem okręgu.

Zadanie 28.

Na płaszczyźnie kartezjańskiej dane są dwa punkty: A = (2, -1), B = (-6, -8). Znaleźć równanie takiej prostej pęku prostych o wierzchołku B, której odległość od punktu A jest największa.

Zadanie dotyczy działu 8. *Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej* i 11. *Rachunek różniczkowy*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 8. 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt; 8. 4) oblicza odległość punktu od prostej; 8. 5) posługuje się równaniem okręgu; 9. 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 9. 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 9. 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

Zadanie 29.

Z cyfr od 1 do 7 możemy utworzyć 7! = 5040 liczb odpowiadających permutacji tych cyfr. Np. liczby 1 234 567 i 3 546 712 są dwiema z możliwych permutacji. Jeżeli otrzymane liczby ustawimy w porządku rosnącym, to jaka liczba stoi na miejscu siódmym, a jaka zajmuje 721 miejsce?

Zadanie dotyczy działu 10. *Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.* W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 30.

Rozważmy dwa okręgi o środkach w punktach *A* i *A*', o promieniach odpowiednio 9 i 1, styczne zewnętrznie w punkcie *O*. Niech *r* będzie wspólną styczną tych okręgów, na której leży punkt *O*, *s* – wspólną styczną w punktach *B* i *B*' zaś punkt *C* – punktem przecięcia się tych stycznych. Wykaż, że trójkąt *ACA*' jest prostokątny i oblicz pola czworokątów *ABCO* i *A*'*OCB*'.

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Zadanie 31.

Wewnątrz kwadratu *ABCD* leży punkt *E* taki, że $|DE| = 5$, $|AE| = 2\sqrt{2}$, $|BE| = 3$. Obliczyć pole powierzchni tego kwadratu.

Zadanie dotyczy działu 3. *Równania i nierówności* i 7. *Planimetria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 3. 3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; 7. 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zadanie 32.

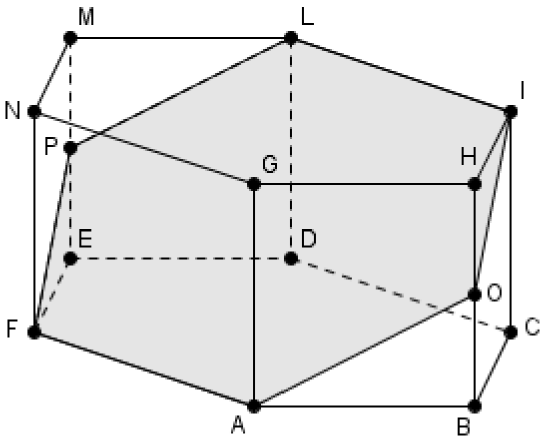
Stożek o wysokości $4\sqrt{5}$ cm przecięto płaszczyzną równoległą do jego podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka w stosunku 3 : 1 zaczynając od wierzchołka *C*. Wiedząc, że sfery opisane na każdej z tak otrzymanych brył mają równe promienie, obliczyć powierzchnię boczną danego stożka oraz objętość stożka odciętego.

Zadanie dotyczy działu 7. *Planimetria* i 9. *Stereometria*. W wymaganiach szczegółowych uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 7. 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; 7.5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów; 9. 1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;

ROZWIĄZANIA ZADAŃ:

Rozwiązanie zadania 1

Wykonajmy stosowny rysunek.



Sposób 1.

Zauważmy, że odcinek *OP* jest równoległy do *AF* i *IL*, gdyż ich rzuty prostokątne na płaszczyznę podstawy są równoległe. Otrzymany przekrój jest zatem nieforemnym sześciokątem, utworzonym z dwóch przystających, równoramiennych trapezów: *OPLI* i *OPFA*. Dłuższą, wspólną podstawą tych trapezów jest *OP*, zaś krótsze podstawy mają długość *l*. Zauważmy dalej, że *OP* = *EB* = 2*l* (dłuższa przekątna sześciokąta foremnego o boku *l*; krótsza przekątna ma długość $l\sqrt{3}$). Wysokość każdego z tych trapezów otrzymamy dzieląc długość odcinka *IA* przez 2. Mamy zatem:

$$h = \frac{IA}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + CI^2}}{2} = \frac{\sqrt{\left(l\sqrt{3}\right)^2 + l^2}}{2} = l.$$

Pole *S* przekroju wynosi:

$$S = 2 \cdot \frac{2l + l}{2} \cdot l = 3l^2.$$

Odpowiedź.

Pole *S* przekroju *AOILPF* wynosi $3l^2$.

Sposób 2.

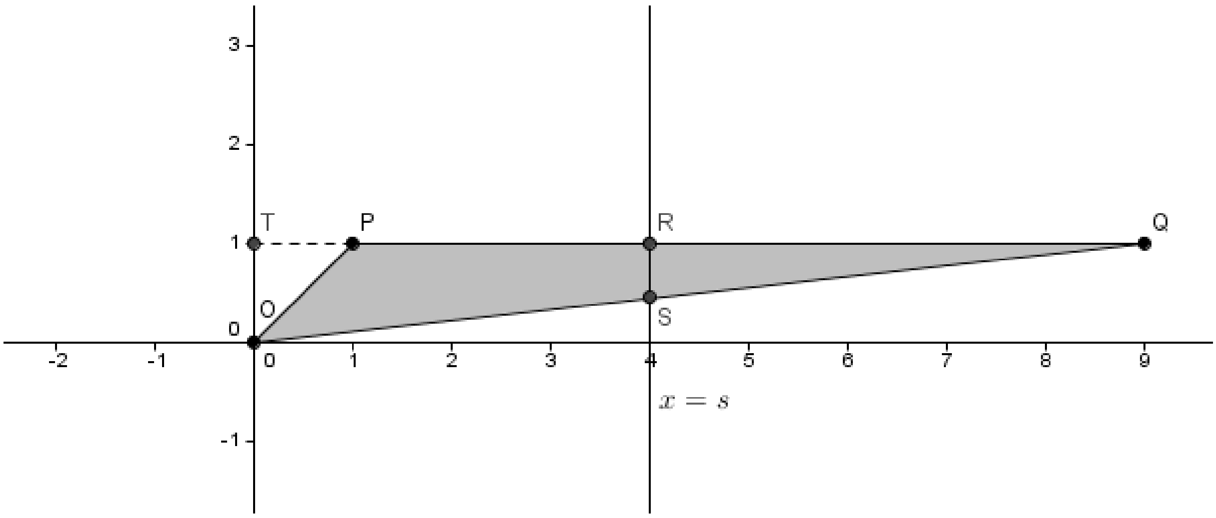
Pole *S* przekroju możemy obliczyć też w następujący sposób: do pola prostokąta *AFLI* dodać pola dwóch przystających trójkątów *FPL* i *AIO*.

Ponieważ *FL* ma długość 2*l*, zaś wysokość trójkąta *FPL* jest równa wysokości trójkąta *EFD* i wynosi $\frac{1}{2}l$ (pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l^2$), więc pole *S* wynosi:

$$S = 2l \cdot l + 2 \cdot \frac{l^2}{2} = 3l^2.$$

Rozwiązanie zadania 2

Sposób 1.
Wykonajmy rysunek.



Obliczmy pole trójkąta *OPQ*. W tym celu obliczymy pole trójkąta prostokątnego *OTQ* i odejmiemy od niego pole trójkąta prostokątnego *OPT*.

$P_{\Delta OTQ} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 = 4{,}5,$

$P_{\Delta OPT} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5,$

$P_{\Delta OPQ} = 4{,}5 - 0{,}5 = 4.$

Jeśli więc pole trójkąta *OPQ* wynosi 4, to pole każdego obszaru wynosi 2. Zauważmy dalej, że trójkąty *OTQ* i *OTP* są podobne, zatem

$\frac{|RS|}{|OT|} = \frac{|RQ|}{|TQ|}.$

Niech $|RQ| = r$. Wówczas

$\frac{|RS|}{1} = \frac{r}{9},$

skąd

$|RS| = \frac{r}{9}.$

Pole trójkąta *QRS* jest równe 2, zatem

$\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{9} \cdot r = 2,$

skąd

$r = 6.$

Szukana prosta ma więc równanie: $x = 9 - 6 = 3$.
Odpowiedź.
Prosta prostopadła do osi *y* i dzieląca dany trójkąt na dwa obszary o równych polach ma równanie: $x = 3$.

Sposób 2.
Skorzystajmy z geometrii analitycznej.
Równaniem prostej OQ jest $y=\frac{1}{9}x$, punkt $R=(s,1)$, $S=\left(s,\frac{1}{9}s\right)$, gdzie $0 < s < 9$. Trójkąt QRS ma jedną przyprostokątną o długości $1-\frac{1}{9}s$, a drugą $9-s$. Zatem

$$P_{\Delta QRS}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}s\right)(9-s).$$

Pole tego trójkąta musi być równe 2, co daje równanie $s^2-18s+45=0$, którego pierwiastkami są liczby: $s_1=3, s_2=15$. Ponieważ drugi pierwiastek nie spełnia warunków zadania, więc $s = 3$, a tym samym $x = 3$.

Rozwiązanie zadania 3

Sposób 1.
Zauważmy, że wykresem funkcji $y=\frac{a}{x-p}+q$, gdzie $a \neq 0$, jest hiperbola, której asymptotami są proste $y = q$ i $x = p$. Środek symetrii tej hiperboli jest punktem przecięcia się jego asymptot. Przedstawmy więc naszą funkcję w postaci $f(x)=\frac{a}{x-p}+q$, którą możemy uzyskać, wykonując dzielenie:

$$(3rx+2):(6x+s-3)=\frac{\frac{1}{4}r-\frac{1}{12}rs}{x+\left(\frac{s}{6}-\frac{1}{3}\right)}+\frac{1}{2}r.$$

Korzystając z tego przedstawienia, mamy:

$$\begin{cases} p=-\frac{s}{6}+\frac{1}{2} \\ q=\frac{1}{2}r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{s}{6}+\frac{1}{2}=2 \\ \frac{1}{2}r=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-9 \\ r=-2 \end{cases}$$

Odpowiedź.
Środkiem symetrii wykresu funkcji f jest punkt C dla r = -2 i s = - 9.

Sposób2.
Asymptota pionowa hiperboli znajduje się w punkcie nie należącym do dziedziny funkcji. Zatem:

$$6x+s-3=0 \Rightarrow 6x=-s+3 \Rightarrow x=-\frac{s}{6}+\frac{1}{2},$$

a stąd:

$$-\frac{s}{6}+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow s=-9.$$

Asymptota ukośna ma równanie $y=mx+n$, gdzie $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$. Ponieważ $m = 0$, więc $n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3rx+2}{6x+s-3}=\frac{1}{2}r$.

Zatem:
$$\frac{1}{2}r = -1 \Rightarrow r = -2.$$

Rozwiązanie zadania 4

Ponieważ $a = 1 > 0$, więc funkcja f osiąga minimum.
Obliczmy odciętą p wierzchołka paraboli.
$$p = -\frac{b}{2a}, p = -\frac{-7}{2} = 3{,}5.$$
Ponieważ $p \in \langle 3{,}4\rangle$, więc minimalną wartością funkcji f na przedziale $\langle 3{,}4\rangle$ jest $q = -\frac{\Delta}{4a}$:
$$q = -\frac{49-4c}{4} = \frac{4c-49}{4}.$$
Zatem
$$\frac{4c-49}{4} = 2,$$
skąd
$$c = \frac{57}{4} = 14{,}25.$$
Odpowiedź.

Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na przedziale $\langle 3{,}4\rangle$ dla $c = 14{,}25$.

Rozwiązanie zadania 5

Niech $a_{n-1} = \binom{n}{n-1}, a_{n-2} = \binom{n}{n-2}, a_{n-3} = \binom{n}{n-3}$. Ponieważ liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, więc
$$a_{n-2} - a_{n-1} = a_{n-3} - a_{n-2},$$
czyli
$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}, n > 3.$$
Przekształcając to równanie $\left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$, otrzymujemy kolejno:
$$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} - \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} - \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!},$$

$$\frac{(n-2)!\cdot(n-1)n}{(n-2)!\cdot 2} - \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!} = \frac{(n-3)!\cdot(n-2)(n-1)n}{(n-3)!\cdot 6} - \frac{(n-2)!\cdot(n-1)n}{(n-2)!\cdot 2}.$$
Skracając otrzymane wyrażenia i dzieląc obie strony przez n, otrzymujemy:
$$\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n-1}{2} \,|\cdot 6$$

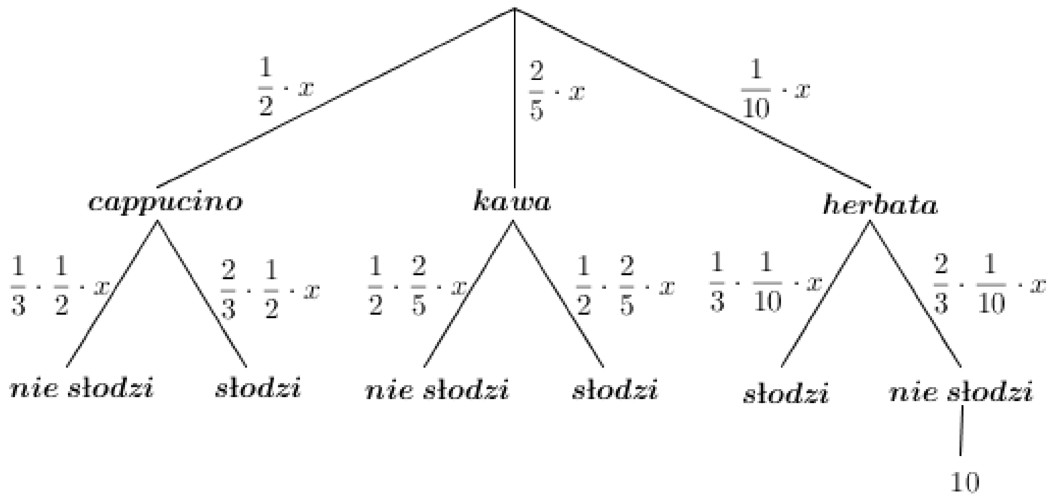
$3(n-1)-6=(n-2)(n-1)-3(n-1)$,
$n^2-9n+14=0$.
Wyróżnik $\Delta=25, \sqrt{\Delta}=5$, zatem $n_1=2, n_2=7$. Ponieważ liczba $n_1=2$ nie spełnia warunków zadania, więc $n = 7$.

Dla $n = 7$ mamy:
$\binom{7}{6}+\binom{7}{5}+\binom{7}{4}=7+21+35=7\cdot 9$.

Odpowiedź.
Dane liczby są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego dla $n = 7$. Suma wyrazów tego ciągu wynosi 63, a więc jest liczbą podzielną przez 7.

Rozwiązanie zadania 6

Niech x oznacza liczbę konsumentów. Zbudujmy drzewko stochastyczne uwzględniające liczbę konsumentów:



Teraz możemy obliczyć, ilu konsumentów pije poranny napój: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot x=10$, skąd $x = 150$.

Odpowiedź.
Poranny napój pije w tym barze 150 konsumentów.
Rozwiązanie zadania 7.
Oznaczmy przez r promień podstawy walca, zaś przez H jego wysokość. Objętość walca wynosi wówczas:
$V=\pi r^2\cdot H$,
skąd
$H=\frac{V}{\pi r^2}$.
Pole powierzchni całkowitej wynosi:
$P=2\pi r^2+2\pi rH$.

Wyraźmy je w zależności od *r*:

$P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$

Obliczmy teraz pochodną $P'(r)$:

$P'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$

Zbadajmy znak pochodnej:

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} \geq 0 \Longrightarrow 4\pi r^3 - 2V \geq 0 \Longrightarrow r^3 \geq \frac{V}{2\pi} \Longrightarrow r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Powyższe obliczenia pozwalają stwierdzić, że dla $0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ funkcja *P*(*r*) jest malejąca, rosnąca dla $r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, zaś dla $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ osiąga minimum.

Wysokość *H* wynosi wówczas: $H = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi} \cdot \left[\left(\frac{2\pi}{V}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{V}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$

Stwierdzamy, że cylindryczne pudełko spełniające warunki zadania jest walcem, którego wysokość jest równa średnicy podstawy (przekrój osiowy jest kwadratem).

Dla *r* = 6 cm i *H* = 12 cm przeprowadźmy pozostałe obliczenia.

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r H \approx 226{,}19\ cm^2 + 452{,}39\ cm^2 = 678{,}58\ cm^2 = 0{,}067858 m^2.$

Ilość zużytego materiału wynosi:

$1000P + 2001200P = 1200 \cdot 0{,}067858 \approx 81{,}4 m^2,$

a jego koszt wyniesie około

$3{,}60 \frac{PLN}{m^2} \cdot 81{,}4 m^2 \approx 293 PLN.$

Odpowiedź.

Cylindryczne pudełko powinno być walcem, którego wysokość jest równa średnicy podstawy. Koszt wytworzenia 1000 takich opakowań wynosi około 293 *PLN*.

Rozwiązanie zadania 8

Dana funkcja przedstawia rodzinę parabol sześciennych. Każda z nich może mieć maksymalnie dwa punkty ekstremalne. Jeśli takie ma, to jej pochodna

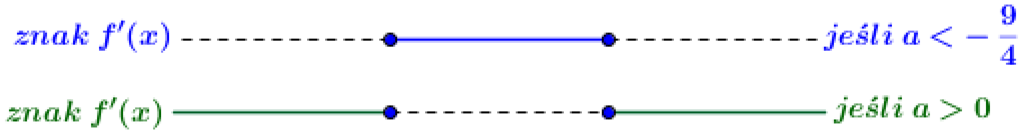
$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$

powinna zmieniać znak w swojej dziedzinie. Oznacza to, że nierówność $f'(x) \geq 0$, tzn. $3ax^2 + 4ax - 3 \geq 0$ musi mieć wyznacznik $\Delta > 0$. Obliczmy ten wyznacznik.

$\Delta = (4a)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (-3) = 16a^2 + 36a.$

$\Delta > 0 \Longrightarrow 16a^2 + 36a > 0 \Longrightarrow a(4a + 9) > 0 \Longrightarrow a < -\frac{9}{4} \lor a > 0.$

Znak $f'(x)$ jest więc w tym przypadku następujący:



Jeśli $\Delta \leq 0$, to funkcja nie osiąga ekstremum, co oznacza, że $-\frac{9}{4} \leq a < 0$.

Odpowiedź

Funkcja *f* osiąga ekstremum, jeśli $a < -\frac{9}{4} \vee a > 0$, zaś nie ma ekstremum, gdy $-\frac{9}{4} \leq a < 0$.

Rozwiązanie zadania 9

Funkcją wielomianową trzeciego stopnia jest każda funkcja, której wzór można zapisać w postaci $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie *a, b, c, d* są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Zanim przejdziemy do wyznaczenia współczynników *a, b, c, d*, wyznaczmy funkcję pochodną f' funkcji *f*:
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

1° Ponieważ *M* jest punktem wykresu szukanej funkcji, więc *f*(3) = 1, czyli
$27a + 9b + 3c + d = 1$.

2° Punkt *P* też jest punktem wykresu szukanej funkcji, zatem *f*(0) = 1, czyli
$d = 1$.

3° Dla *x* = 3 funkcja osiąga minimum lokalne, więc $f'(3) = 0$, skąd
$27a + 6b + c = 0$.

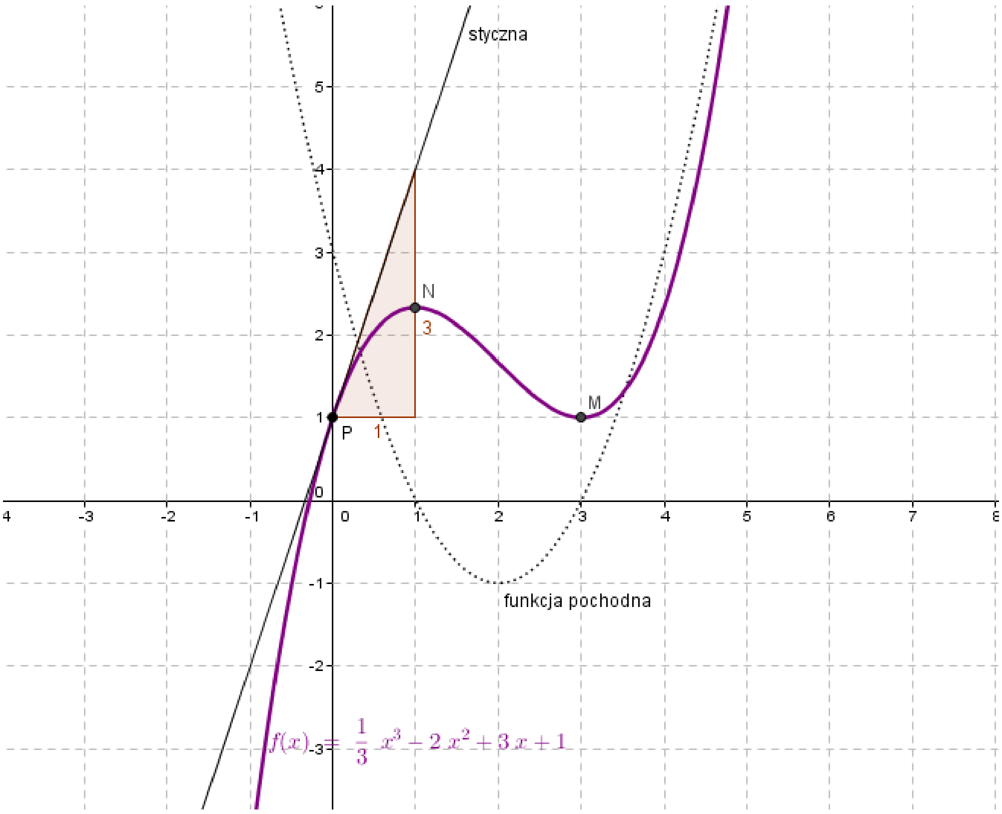
4° W punkcie o odciętej 0 współczynnik kierunkowy wynosi 3, czyli $f'(0) = 3$, więc
$c = 3$.

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań:
$$\begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = 1 \\ d = 1 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$
Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy: $a = \frac{1}{3}$, *b* = - 2, *c* = 3, *d* = 1.

Odpowiedź.

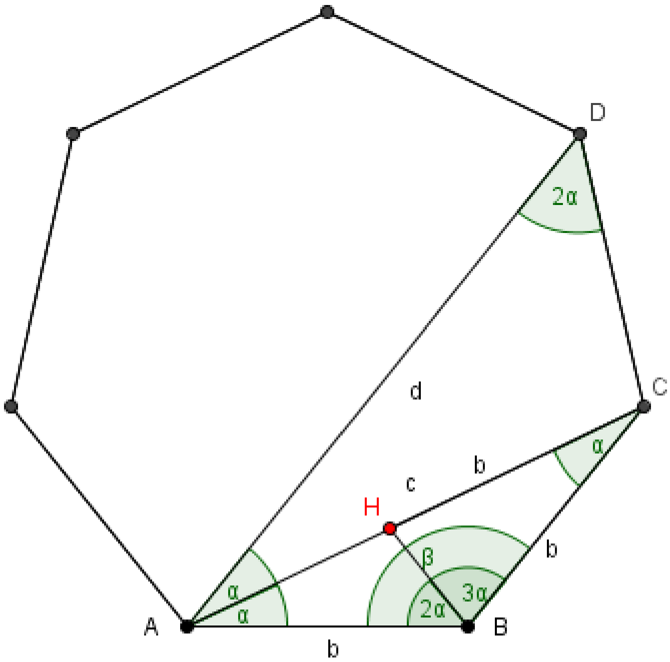
Funkcja określona jest wzorem: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Wykres tej funkcji jest następujący:



Rozwiązanie zadania 10

Wykonajmy stosowny rysunek.



Ponieważ suma miar kątów wewnętrznych n – kąta wyraża się wzorem $(n-2)\cdot\pi$, co oznacza, ze kąt β ma miarę $\frac{5}{7}\pi$. Niech $|\sphericalangle CAB| = \alpha$. Wówczas i $|\sphericalangle ACB| = \alpha$, co pozwala napisać równanie: $2\alpha + \beta = \pi$, czyli $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Na przekątnej *AC* ustalmy taki punkt *H*, by *HC* = *AB* = *b*. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są przystające, zatem każdy z nich ma miarę $\frac{\pi-\alpha}{2} = 3\alpha$. Miara kąta *HBA* jest więc równa 2α.

Wszystkie te działania pozwalają stwierdzić, że trójkąty *AHB* i *ACD* są podobne, a zatem
$AH\colon AC = AB\colon AD$,
czyli
$(c-b)\colon c = b\colon d$.
Przekształcając tę proporcję otrzymujemy:
$bc = (c-b)d | \colon bcd$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c},$$

co należało wykazać.

Rozwiązanie zadania 11

Jeśli *y* = 4, to $3x - 5\cdot 4 + 8 = 0$ i *x* = 4. Punkt *P* = (4,4) jest zatem punktem wspólnym parabol. Współrzędne tego punktu spełniają równanie $y = ax^2 + bx + c$, czyli

(*) $$16a + 4b + c = 4.$$

Zapiszmy równania prostych w postaci kierunkowej: $y = 2x - 5$ i $y = -2x + 3$. Parabole mają dokładnie jeden punkt wspólny z każdą z tych prostych, więc
$ax^2 + bx + c = 2x - 5$ i $ax^2 + bx + c = -2x + 3$,
$ax^2 + (b-2)x + c + 5 = 0$ i $ax^2 + (b+2)x + c - 3 = 0$.
W obu przypadkach wyróżnik Δ musi być równy zero, zatem
$(b-2)^2 - 4a(c+5) = 0$ i $(b+2)^2 + 4a(c-3) = 0$.
Przekształcając te równania i uwzględniając równanie (*) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} b^2 - 4b + 4 - 4ac - 20a = 0 \\ b^2 + 4b + 4 - 4ac + 12a = 0 \\ \quad 16a + 4b + c = 4 \end{cases}$$

Odejmując od równania (2) równanie (1), otrzymujemy:
$8b + 32a = 0$,
czyli
$b = -4a$.
Podstawiając *b* = -4*a* do równania (3), otrzymujemy *c* = 4.
Podstawmy teraz do równania (2) $a = -\frac{1}{4}b$ i $c = 4$:

$$b^2 + 4b + 4 - 4\cdot\left(-\frac{1}{4}b\right)\cdot 4 + 12\cdot\left(-\frac{1}{4}b\right) = 0,$$

$b^2 + 5b + 4 = 0.$

Wyróżnikiem tego równania jest 9, zatem

$$b_1 = \frac{-5-3}{2} = -4, \qquad b_2 = \frac{-5+3}{2} = 1.$$

Odpowiadające tym wartościom *b* wartości *a* są następujące:

$$a_1 = -\frac{1}{4} \cdot (-4) = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4}.$$

Rozwiązaniem układu są więc następujące trójki liczb:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Możemy teraz napisać równania parabol:

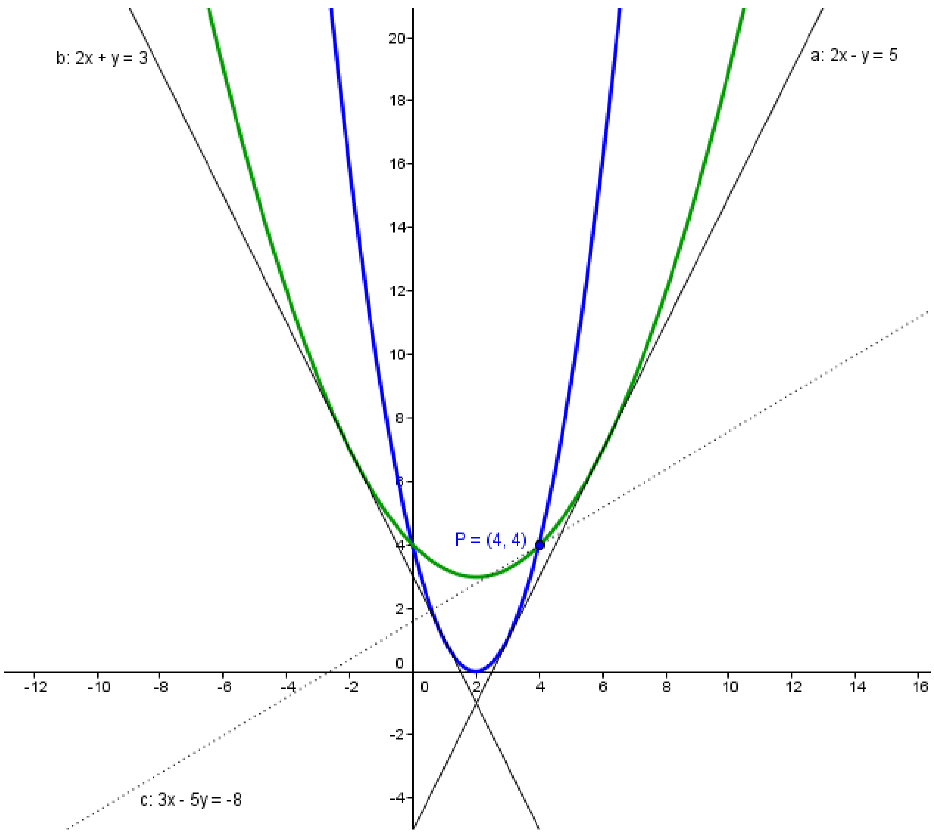
$$y = x^2 - 4x + 4 \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{4}x^2 - x + 4.$$

Odpowiedź.

Szukanymi równaniami parabol są:

$$y = x^2 - 4x + 4 \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{4}x^2 - x + 4.$$

Dodajmy jeszcze rysunek.



Rozwiązanie zadania 12

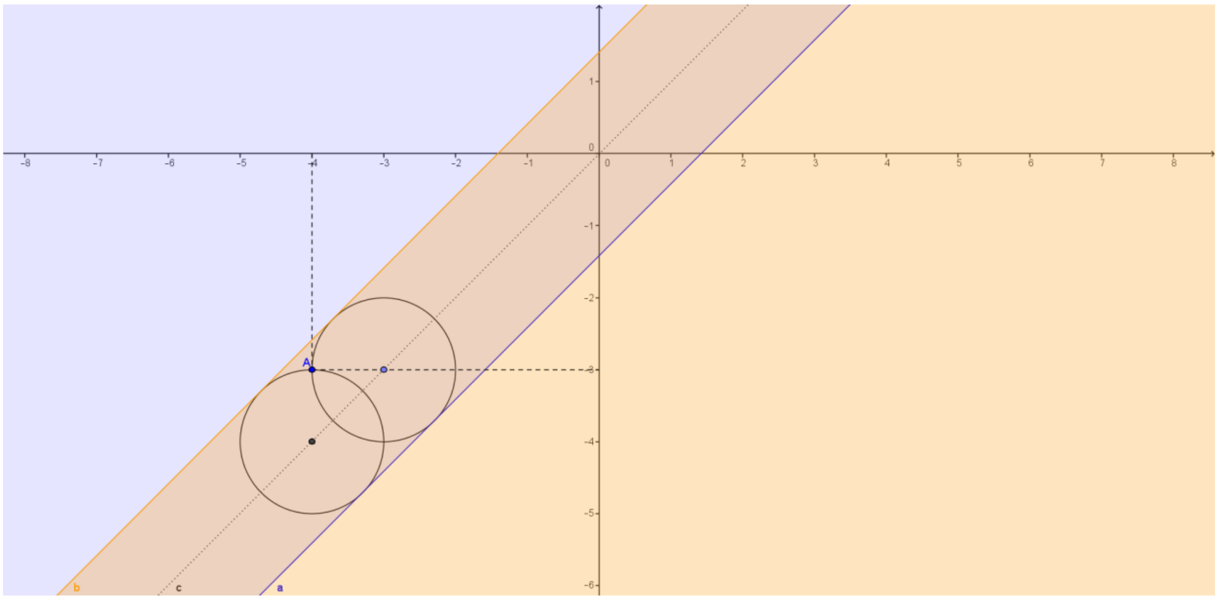
Rozważając dwa przypadki:

$1^0 x - y > 0$ i $2^0 x - y < 0$

stwierdzamy, że obrazem geometrycznym danej nierówności jest pas płaszczyzny, którego punkty spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y \geq x - \sqrt{2} \\ y \leq x + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Wykonajmy stosowny rysunek.



Z zapisu układu nierówności widać, że osią symetrii tego pasa jest prosta o równaniu $y = x$. Odległość tej prostej od każdej prostej, która stanowi brzeg pasa, wynosi 1. Zatem szukany okręg musi mieć promień 1, a jego środek leży na prostej $y = x$. Równanie każdego takiego okręgu jest więc następujące:

$(x - k)^2 + (y - k)^2 = 1.$

Do tego okręgu należy punkt (-4, -3), zatem:

$(-4 - k)^2 + (-3 - k)^2 = 1.$

Przekształcając to równanie otrzymujemy kolejno:

$16 + 8k + k^2 + 9 + 6k + k^2 = 1,$

$k^2 + 7k + 12 = 0,$

$\Delta = 49 - 48 = 1; \quad \sqrt{\Delta} = 1$

$k_1 = -4, \quad k_2 = -3.$

Mamy zatem dwa okręgi spełniające warunki zadania:

$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 1, \quad (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 1.$

Oś symetrii tych okręgów, przechodząca przez punkt *A*, jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = x$. Ma więc ona współczynnik kierunkowy – 1 i należy do pęku prostych $y = -x + b$. Z tego pęku wybierzmy prostą, która przechodzi przez punkt *A*:

$y = -x + b, \quad -3 = 4 + b, \qquad b = -7,$

$x + y + 7 = 0.$

Odległość punktu (-3, -3) od tej prostej wynosi:

$$d = \frac{|1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odpowiedź.

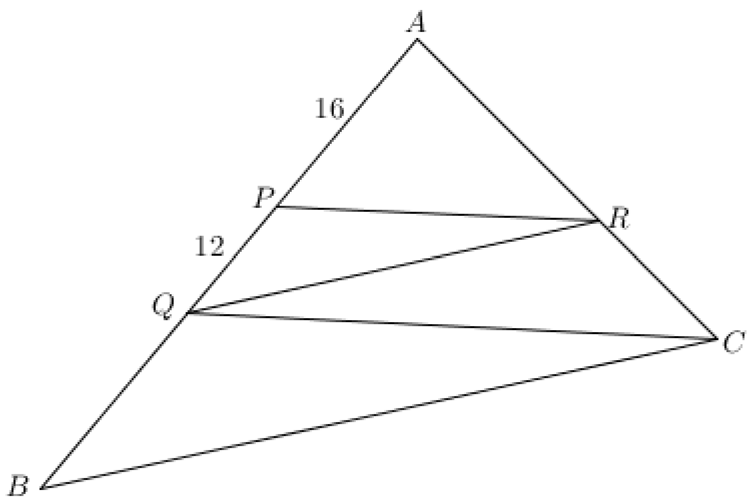
Okręgami spełniającymi warunki zadania są dwa okręgi o równaniach:

$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 1, \quad (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 1.$

Odległość środków tych okręgów od wskazanej osi symetrii wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie zadania 13

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Trójkąty *APR* i *AQC* są podobne, zatem

$$|AR| : |AP| = |RC| : |PQ|,$$

skąd

$$|AR| : |RC| = 4 : 3.$$

Również trójkąty *AQR* i *ABC* są podobne, więc

$$|AR| : |RC| = |AQ| : |QB|,$$

skąd

$\frac{4}{3} = \frac{28}{|QB|},$

$4|QB| = 3 \cdot 28 \Longrightarrow |QB| = \frac{3 \cdot 28}{4} = 21.$

Odpowiedź.

Długość odcinka *QB* wynosi 21.

Rozwiązanie zadania 14

Załóżmy, że średnia prędkość pierwszego pojazdu wynosi v_A, a drugiego v_B, zaś przebyte drogi są równe odpowiednio s_1 i s_2. Drogę w ruchu jednostajnym prostoliniowym obliczamy według wzoru $s = v \cdot t$, zatem przebyte drogi są równe:

$8v_A$, $8v_B$.

Po zmianie prędkości przebyte drogi będą równe odpowiednio:

$7 \cdot 1{,}14v_A$, $7 \cdot 1{,}15v_B$.

Ponieważ

$8v_A + 8v_B = s$ i $7 \cdot 1{,}14v_A + 7 \cdot 1{,}15v_B = s$,

więc

$$8v_A + 8v_B = 7 \cdot 1{,}14v_A + 7 \cdot 1{,}15v_B.$$

Przekształcając to równanie otrzymujemy kolejno:

$(8 - 7 \cdot 1{,}14)v_A + (8 - 7 \cdot 1{,}15)v_B = 0$,

$(8 - 7{,}98)v_A + (8 - 8{,}05)v_B = 0$,

$0{,}02v_A - 0{,}05v_B = 0$,

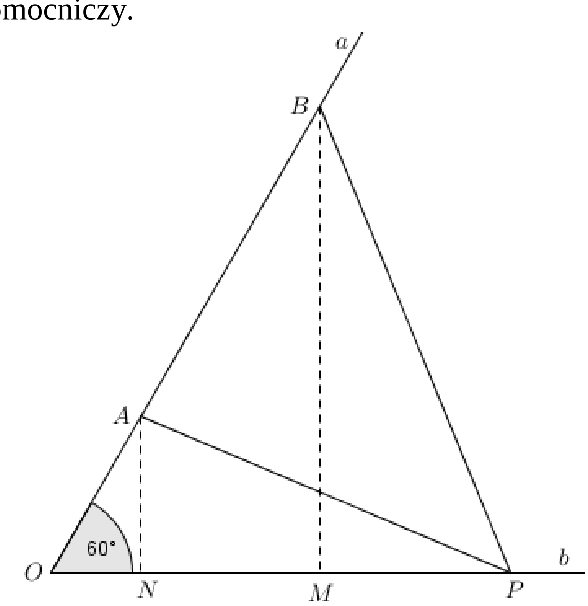
$\frac{v_A}{v_B} = \frac{0{,}05}{0{,}02} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Odpowiedź.

Pojazd wyjeżdżający z miasta *A* poruszał się 2,5 razy szybciej.

Rozwiązanie zadania 15

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Wiadomo, że $|\sphericalangle aOb| = 60^0$, $|OA| = 2k$, $|OB| = 8k$. Mamy wskazać taki punkt $P \in b$, aby $\frac{|PB|}{|PA|} = 2$. Zauważmy, że liczba k musi być liczbą dodatnią. Niech $|OP| = x$ i $x > 0$, zaś M i N niech będą rzutami prostokątnymi punktów B i A na ramię b.

Ponieważ znamy $\frac{|PB|}{|PA|}$, więc znajdźmy $|PA|$ i $|PB|$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego PMB, otrzymujemy:

$(*)|PB|^2 = |BM|^2 + |PM|^2$.

Z trójkąta BOM mamy:

$$sin60^0 = \frac{|BM|}{|OB|}, cos60^0 = \frac{|OM|}{|OB|}$$

skąd

$$|BM| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |OB| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8k = 4k\sqrt{3};\ |OB| = \frac{1}{2} \cdot 8k = 4k.$$

Ponieważ

$|PM| = |OP| - |OM| = x - 4k,$

więc po podstawieniu do (*) mamy:

$|PB|^2 = 48k^2 + (x - 4k)^2$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego PNA, otrzymujemy:

$(**)|PA|^2 = |AN|^2 + |PN|^2$.

Z trójkąta AON mamy:

$$sin60^0 = \frac{|AN|}{|OA|}, cos60^0 = \frac{|ON|}{|OA|},$$

skąd

$$|AN| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2k = k\sqrt{3};\ |ON| = \frac{1}{2} \cdot 2k = k.$$

Ponieważ

$|PN| = |OP| - |ON| = x - k,$

Więc po podstawieniu do (**) mamy:

$|PA|^2 = 3k^2 + (x - k)^2$.

Przekształcając wyrażenie $\frac{|PB|^2}{|PA|^2} = 4$, otrzymujemy:

$48k^2 + (x - 4k)^2 = 4[3k^2 + (x - k)^2]$,

$48k^2 = 3x^2$,

$x = -4k$ lub $x = 4k$.

Ponieważ $x > 0$ (i $k > 0$), więc wybieramy $x = 4k$.

Uwaga.

Można zauważyć, że dla $x = 4k$ trójkąt OPB jest charakterystycznym trójkątem prostokątnym (30^0, 60^0, 90^0), w którym PA jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

Rozwiązanie zadania 16

Równanie paraboli przesuniętej jest następujące:
$y = x^2 - 1$.
Rodzina prostych przechodzących przez punkt $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ ma równanie:
$y - (-1) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

(W pęku tym nie ma oczywiście prostej o równaniu $x = \frac{1}{2}$; prosta ta jest prostopadła do osi *x* i nie może być ona styczną do danej paraboli.)

Zapiszmy układ równań złożony z równania paraboli i rodziny prostych:

$$\begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ x^2 - mx + \frac{1}{2}m = 0 \end{cases}$$

Odcięte punktów przecięcia paraboli z prostymi pęku otrzymamy, rozwiązując drugie równanie ostatniego układu z warunkiem $\Delta = 0$.

$m^2 - 2m = 0$,
$m_1 = 0, \quad m_2 = 2$.

Uzyskane wartości *m* pozwalają napisać równania stycznych.
$s_1\colon \; y = -1$,
$s_2\colon \; y = 2x - 2$.

Wyznaczmy współrzędne punktu styczności paraboli i prostej s_1.

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -1 = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

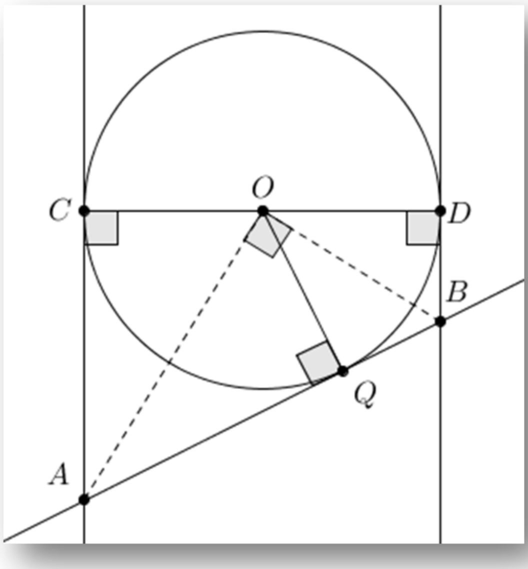
Pierwszy punkt styczności jest wierzchołkiem paraboli i ma współrzędne: (0, -1).
Wyznaczmy jeszcze współrzędne drugiego punktu styczności.

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2x - 2 = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$$

Drugi punkt styczności jest punktem osi *x* i ma współrzędne: (1, 0).

Rozwiązanie zadania 17

Dowód poprzedźmy rysunkiem.



Założenia

1. *CD* jest średnicą okręgu;
2. *AC*, *AB* i *BD* są stycznymi do okręgu.

Teza

Kąt *AOB* jest kątem prostym

Dowód

- Przystawanie trójkątów *AOC i AOQ*

Boki *AOC* i *AOQ* są równej długości (jako promienie), bok *AO* jest wspólny, a boki *AC* i *AQ* są równe jako odcinki łączące punkt *A* z punktami styczności. Trójkąty *AOC* i *AOQ* są więc przystające na podstawie cechy *bbb*.

- Podobnie uzasadniamy, ze trójkąty *BOD* i *BOQ* są podobne.

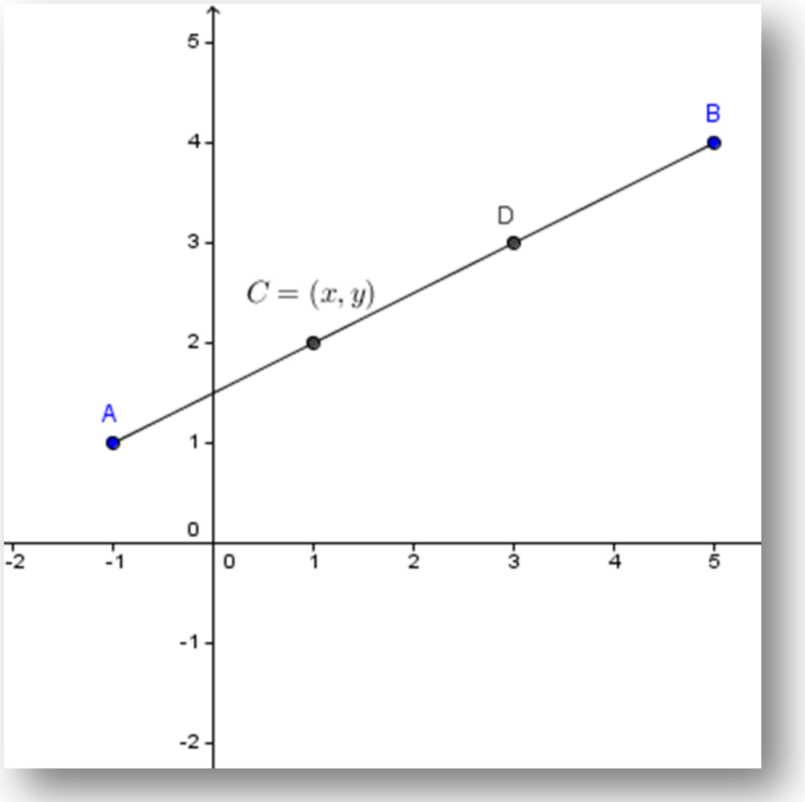
Rozważmy teraz kąt półpełny *COD*:
$|\measuredangle COD| = |\measuredangle AOC| + |\measuredangle AOQ| + |\measuredangle QOB| + |\measuredangle BOD| = 180^0$.

Korzystając z trójkątów przystających, możemy napisać:

$2 \cdot |\measuredangle AOQ| + 2 \cdot |\measuredangle QOB| = 180^0$.

Dzieląc obie strony tej równości przez 2, otrzymujemy tezę:
$|\measuredangle AOQ| + |\measuredangle QOB| = 90^0$.

Rozwiązanie zadania18



Niech $C = (x, y)$. Wówczas:

$\overrightarrow{AC} = [x+1, y-1]$,

$\overrightarrow{AB} = [6,3]$.

Ponieważ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, więc

$[x+1, y-1] = \dfrac{1}{3} \cdot [6,3]$,

skąd

$\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C = (1,2).$

Postępując podobnie $\left(\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$, znajdujemy

$D = (3,3)$.

Niech teraz $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. Znajdujemy współrzędne odpowiednich wektorów:

$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$, $\quad \overrightarrow{AC} = [x - x_A, y - y_A]$.

Dalej mamy:

$\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

$[x - x_A, y - y_A] = \dfrac{1}{3}[x_B - x_A, y_B - y_A]$,

$$\begin{cases} x - x_A = \dfrac{x_B - x_A}{3} \\ y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2x_A + x_B}{3} \\ y = \dfrac{2y_A + y_B}{3} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{2x_A + x_B}{3}, \frac{2y_A + y_B}{3}\right).$$

Postępując podobnie $\left(\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$, znajdujemy

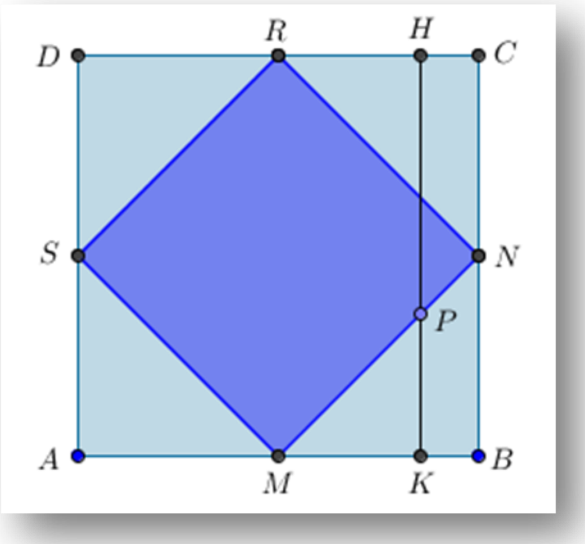
$$D = \left(\frac{x_A + 2x_B}{3}, \frac{y_A + 2y_B}{3}\right).$$

Odpowiedź.

Współrzędnymi punktów C i D są odpowiednio: (1, 2) i (3, 3), zaś współrzędnymi tych punktów w przypadku ogólnym są: $\left(\frac{2x_A+x_B}{3}, \frac{2y_A+y_B}{3}\right)$ i $\left(\frac{x_A+2x_B}{3}, \frac{y_A+2y_B}{3}\right)$.

Rozwiązanie zadania 19

Wykonajmy odpowiedni rysunek.



Niech $|PH| = x$. Z warunków zadania mamy: $\frac{a}{2} \le x \le a$. Obliczmy teraz $|PM|$. Zauważmy, że w dowolnym położeniu punktu P na boku MN $(P \neq M)$ trójkąt MKP jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnych długości $a - x$. Zatem $|MP| = (a - x)\sqrt{2}$, a funkcja opisująca sumę kwadratów odległości jest następująca:

$f(x) = x^2 + 2(a - x)^2 = 3x^2 - 4ax + 2a^2$.

Funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = -\frac{b}{2a}$. Obliczmy ją.

$x = -\dfrac{-4a}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}a.$

Najmniejszą wartością sumy kwadratów odległości jest zatem $f\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{3}a^2$.

Odpowiedź.

Suma kwadratów $|PH|^2+|PM|^2$ jest najmniejsza, gdy $x = \frac{2}{3}a$. Wtedy $|MP| = \frac{\sqrt{2}}{3}a$.

Rozwiązanie zadania 20

Jeśli prosta o równaniu $x = 2$ ma być asymptotą pionową wykresu funkcji f, to jej granica w punkcie 2 musi być niewłaściwa.

Zatem

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\frac{4a+2b+c}{2d+e}=\infty \Longrightarrow 2d+e=0 \wedge 4a+2b+c\neq 0 \wedge d\neq 0.$$

Jeśli prosta o równaniu $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji, to $\mathrm{m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ oraz $n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$. W naszym przypadku mamy: m = - 1 i n = - 1.

Zatem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex}=\frac{a}{d}=-1$$

oraz

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{bx+ex+c}{dx+e}=\frac{b+e}{d}=-1.$$

(Zaważ, że podczas obliczania drugiej granicy wykorzystaliśmy fakt, iż $\frac{a}{d}=-1$!)

Wyznaczmy teraz funkcję pochodną f' funkcji f:

$$f'(x)=\frac{adx^2+2aex+be-cd}{(d+e)^2}.$$

Dalej mamy:

$$f'(1)=2 \Leftrightarrow ad+2ae+be-cd=2d^2+2e^2+4de.$$

Uwzględniając uzyskane wyniki, możemy wyrazić wszystkie współczynniki w zależności od jednego, np. d:

$$a=-d, b=d, c=-d, e=-2d,$$

gdzie np. zależność c = -d uzyskujemy podstawiając za a, b, e powyższe wartości, a mianowicie:

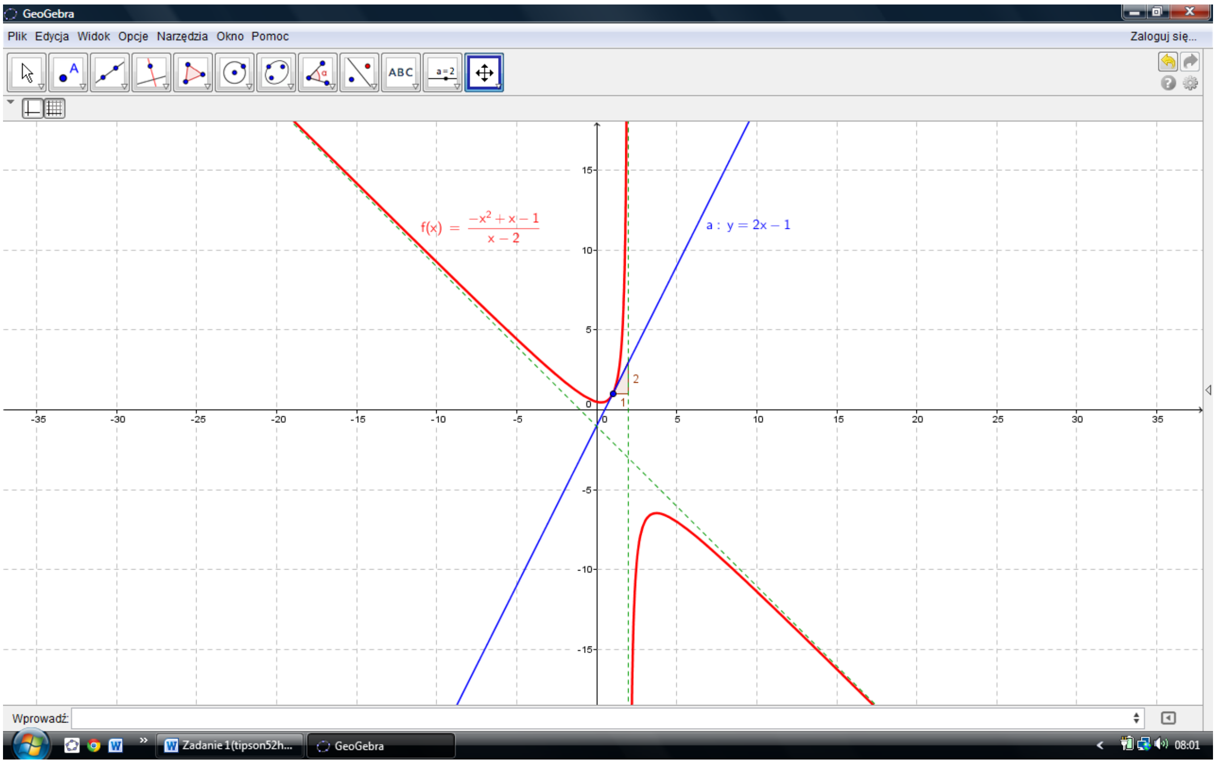
$$ad + 2ae + be - cd = 2d^2 + 2e^2 + 4de \Longrightarrow -d^2 + 4d^2 - 2d^2 - cd = 2d^2 + 8d^2 - 8d^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -d(d + c) = 0 \Longrightarrow c = -d.$$

Ostatecznie, pamiętając, że $d \neq 0$, otrzymujemy:

$$f(x) = \frac{-dx^2 + dx - d}{dx - 2d} = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 2}.$$

Popatrzmy teraz na wykres.



Odpowiedź.

Szukanymi współczynnikami są zatem: *a* = -1, *b* = 1, *c* = -1, *d* = 1, *e* = -2.

Rozwiązanie zadania 21

Obliczmy odciętą wierzchołka $x_w = -\frac{b}{2a}$:

$$x_w = -\frac{-2m}{2m^2} = \frac{1}{m}.$$

Rzędną wierzchołka jest zatem:

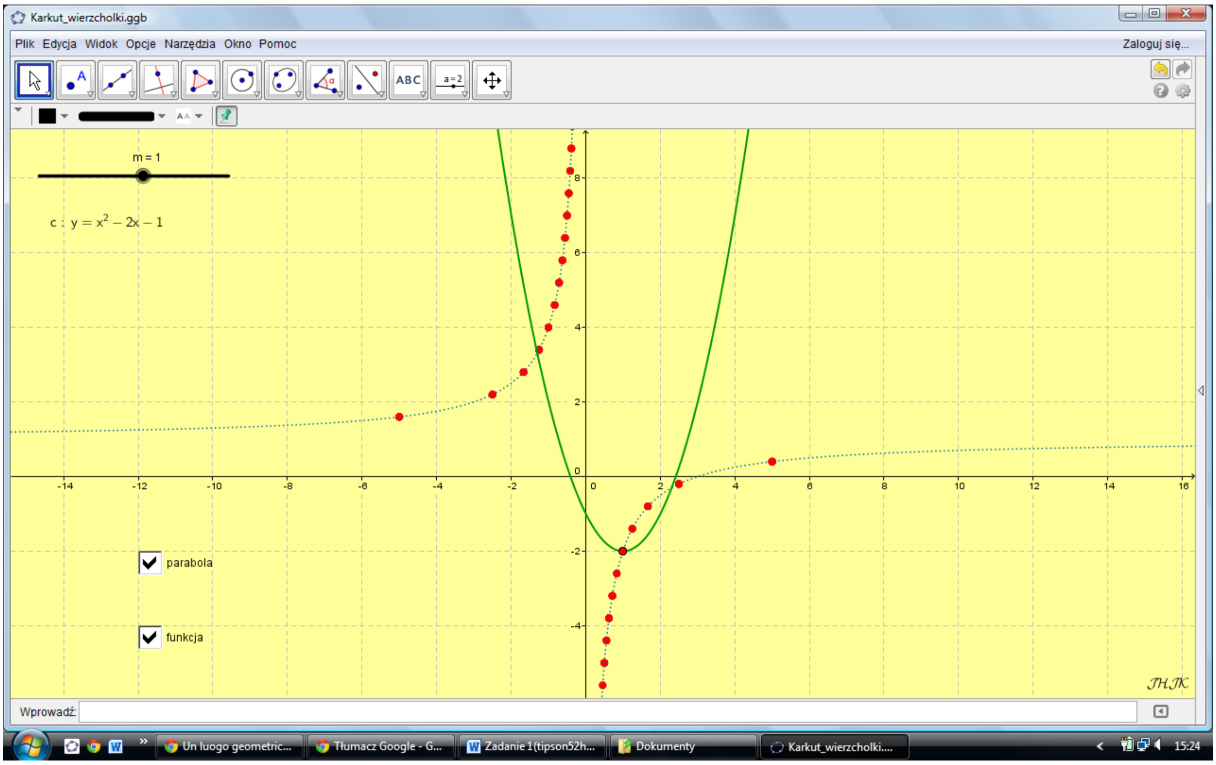
$$y_w = f\left(\frac{1}{m}\right) = -3m + 1.$$

Pozostaje ustalić miejsce geometryczne wierzchołków $W = (x_W, y_W)$. W tym celu z równania $x = \frac{1}{m}$ wyznaczamy $m = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ i podstawiamy do równania drugiego:

$$y = -3 \cdot \frac{1}{m} + 1 = \frac{x-3}{x}.$$

Otrzymane równanie jest równaniem hiperboli $y = \frac{-3}{x}$ przesuniętej o wektor $\vec{v} = [0,1]$.

Ilustracja geometryczna wykonana przy pomocy programu GeoGebra może być następująca:



Odpowiedź.

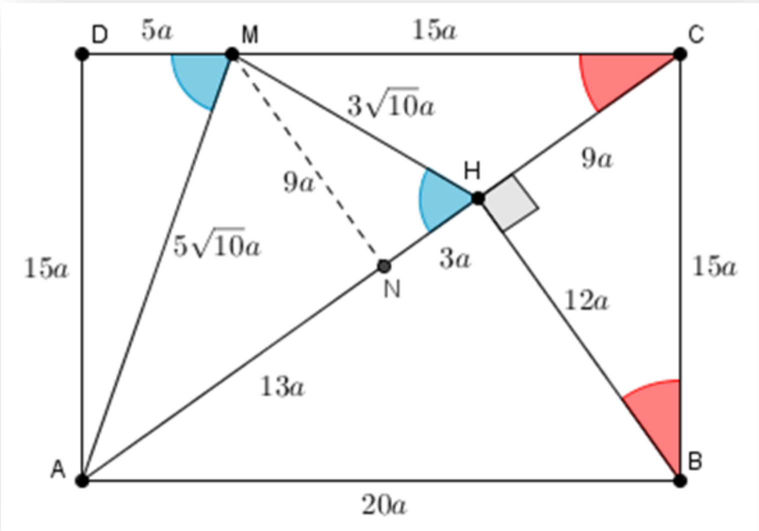
Parabole danej rodziny mają wierzchołki w punktach $\left(\frac{1}{m}, -3m+1\right)$, które są punktami hiperboli o równaniu $y = \frac{x-3}{x}$.

Rozwiązanie zadania 22

Na poniższym rysunku zaznaczono już wyniki obliczeń, które prowadzą do rozwiązania zadania. Przejdźmy do tych obliczeń.

Rozważmy trójkąt prostokątny *ABH*. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku *BH*:

$|BH|^2 = |AB|^2 - |AH|^2,$
$|BH|^2 = (20a)^2 - (16a)^2,$
$|BH|^2 = 144a^2,$
$|BH| = 12a.$



Trójkąty *ABH* i *BCH* są podobne, zatem
$$\frac{|AB|}{|AH|} = \frac{|BC|}{|BH|},$$
$$\frac{20a}{16a} = \frac{|BC|}{12a},$$
skąd
$|BC| = 15a.$

Łatwo teraz obliczyć, że $|CH| = 9a$. Zauważmy też, że trójkąt *BCH* jest trójkątem pitagorejskim.

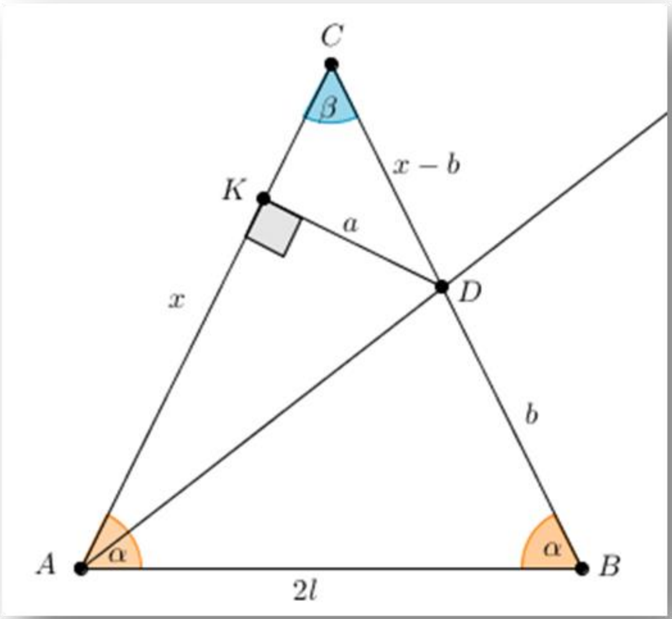
Niech *MN* będzie wysokością trójkąta *AHM*. Widać wówczas, że trójkąty prostokątne *MNC* i *CHB* są podobne, podobnie (z założenia) podobne są trójkąty *MNH* i *ADM*. Trójkąt *MNC* jest podobny do trójkąta pitagorejskiego, zatem on też jest pitagorejski. Oznaczając więc przez *x* długość odcinka *MC*, otrzymujemy: $|MN| = \frac{3}{5}x$, zaś $|NC|x$ i $|NH| = \frac{4}{5}x - 9a$. Mamy następującą proporcję:
$|MN|:|NH| = |AD|:|MD|,$
czyli
$$\frac{3}{5}x : \left(\frac{4}{5}x - 9a\right) = 15a : (20a - x),$$
skąd
$x^2 = 225a^2,$
$x = 15a.$

Wynik ten pozwala stwierdzić, że trójkąty *MNC* i *CHB* są przystające. Mamy więc $|MN| = 9a$, zaś $|NH| = 3a$.
Dalsze obliczenia są już proste. W ich wyniku otrzymujemy:
$2p = 8\left(2+\sqrt{10}\right)a$, zaś $P = 72a^2$.

Odpowiedź.
Obwód trójkąta *AMH* wynosi $8\left(2+\sqrt{10}\right)a$, zaś jego pole $P = 72a^2$.

Rozwiązanie zadania 23

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Wiedząc, że $\alpha = \measuredangle ABC = \measuredangle BAC$ $(\beta = 180^0 - 2\alpha)$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$ i korzystając z twierdzenia sinusów w trójkącie *ABC*, mamy:

$$\frac{2l}{\sin(180^0 - 2\alpha)} = \frac{x}{\sin\alpha} \qquad \text{gdzie } x = |AC|$$

$$\frac{2l}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha}$$

$$x = \frac{l}{\cos\alpha}$$

$$x = \frac{5}{3}l.$$

Skorzystajmy teraz z trójkąta prostokątnego *CKD*:

$$\frac{a}{x-b} = \sin\beta,$$

$$a = \left(\frac{5}{3}l - b\right)\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

$a = \frac{8}{5}l - \frac{24}{25}b.$

Podstawiając uzyskane wyrażenia do równania $|DB| + |DK| = m \cdot |AB|$, mamy:

$a + b = m \cdot 2l,$

$\frac{8}{5}l - \frac{24}{25}b + b = m \cdot 2l,$

$b = 50l\left(m - \frac{4}{5}\right).$

$b \geq 0 \Rightarrow m - \frac{4}{5} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{m \geq \frac{4}{5}}.$

Ponadto musi być

$$b \leq x,$$

czyli

$50l\left(m - \frac{4}{5}\right) \leq \frac{5}{3}l,$

$5\left(m - \frac{4}{5}\right) \leq \frac{1}{6},$

$\boldsymbol{m \leq \frac{5}{6}}.$

Ostatecznie więc mamy:

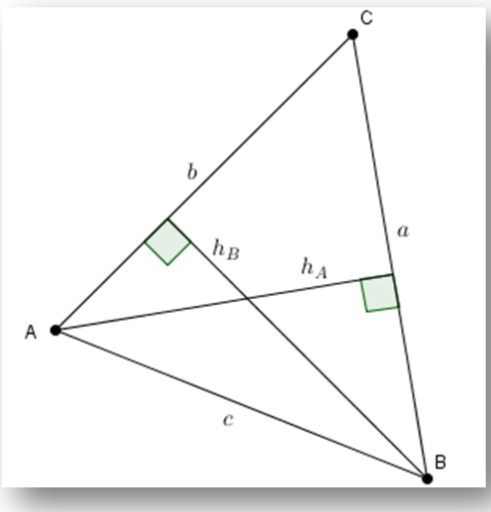
$\frac{4}{5} \leq m \leq \frac{5}{6}.$

Odpowiedź.

Warunki zadania są spełnione, gdy $\frac{4}{5} \leq m \leq \frac{5}{6}.$

Rozwiązanie zadania 24

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Oznaczmy przez S pole trójkąta ABC.
Ponieważ
$$S = \frac{a \cdot h_A}{2} \text{ i } S = \frac{b \cdot h_B}{2},$$
więc
$$h_A = \frac{2S}{a} \text{ i } h_B = \frac{2S}{b}.$$
Korzystając z założenia , mamy:
$$a + h_A = b + h_B,$$
czyli
$$a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b}.$$
Przekształćmy otrzymane równanie do postaci iloczynowej.
$$a - b = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a},$$
$$a - b = 2S \cdot \frac{a-b}{ab},$$
$$(a-b)ab = 2S(a-b),$$
$$(a-b)ab - 2S(a-b) = 0,$$
$$\boldsymbol{(a-b)(ab-2S) = 0}.$$
Ostatnie równanie pozwala rozważyć dwa przypadki:

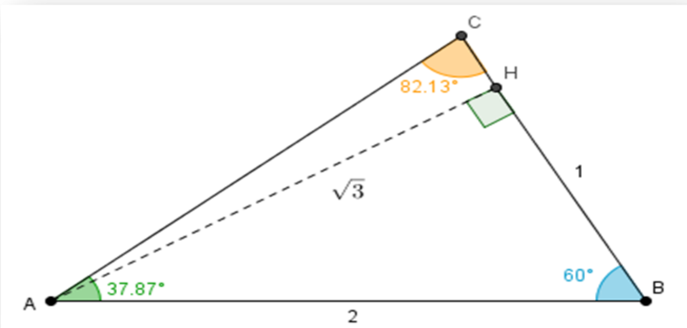
1^o $a - b = 0$, tzn. $a = b$; w tym przypadku trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB.

2^o $ab - 2S = 0$, tzn. $S=\frac{ab}{2}$; w tym przypadku $h_A = b, h_B = a$ i $|\measuredangle ACB| = 90^0$. Oznacza to, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

Odpowiedź.
Trójkątami spełniającymi warunki zadania są wszystkie trójkąty równoramienne o podstawie AB i wszystkie trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej AB.

Rozwiązanie zadania 25

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że bok AB ma długość $c = 2$. Wówczas $|BH| = 1$ i $|AH| = \sqrt{3}$, jak na poniższym rysunku. Przyjmijmy ponadto, że $a = |BC|$ i $b = |AC|$.



Widać, że $\cos|\measuredangle ABH| = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

Korzystając z twierdzenia cosinusów oraz z założenia, mamy:

$$\frac{4 + a^2 - b^2}{4a} = \frac{1}{2} \quad i \quad b^2 + 1 = \frac{169}{64}a^2.$$

Z układu tego wyznaczmy a.

$$2\left(4 + a^2 - \frac{169}{64}a^2 + 1\right) = 4a,$$

$$105a^2 + 128a - 320 = 0,$$

$$\Delta = 150784 = 256 \cdot 589,$$

$$\sqrt{\Delta} = 16\sqrt{589},$$

$$a_1 = \frac{-128 - 16\sqrt{589}}{210} < 0,$$

$$a_2 = \frac{-128 + 16\sqrt{589}}{210} = \frac{8\sqrt{589} - 64}{105},$$

$$\boldsymbol{a = \frac{8\sqrt{589} - 64}{105}}.$$

Obliczmy teraz długość przyprostokątnej *HC* :

$$|HC| = a - 1 = \frac{8\sqrt{589} - 64}{105} - 1 = \frac{8\sqrt{589} - 169}{105}.$$

$$\mathrm{tg}|\measuredangle HAC| = \frac{8\sqrt{589} - 169}{105\sqrt{3}} \approx \frac{25{,}1546}{181{,}8653} = 0{,}1383.$$

Zatem

$$|\measuredangle HAC| \approx 7^0 54' = 7{,}87^0.$$

W konsekwencji mamy:

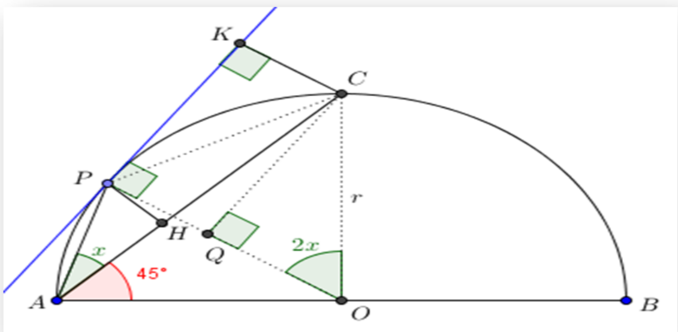
$$|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAH| + |\measuredangle HAC| = 30^0 + 7{,}87^0 = 37{,}87^0.$$

Odpowiedź.

Kąt przy wierzchołku *A* ma miarę około $37{,}9^0$.

Rozwiązanie zadania 26

Wykonajmy odpowiedni rysunek.



Ponieważ $|AC| = r\sqrt{2}$, więc AC jest przekątną kwadratu o boku r, co oznacza, że

$$|\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle ACO| = \frac{\pi}{4},$$

zaś

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Ponadto, jeśli kąt wpisany CAP ma miarę x, to kąt środkowy POC, oparty na tym samym łuku, ma miarę $2x$.
W konsekwencji, mamy:

$$|CK| = |PQ| = |PO| - |QO| = r - r\cos 2x,$$

$$|PK| = |CQ| = r\sin 2x,$$

$$|PH| = |AP|\sin x = 2r\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin x,$$

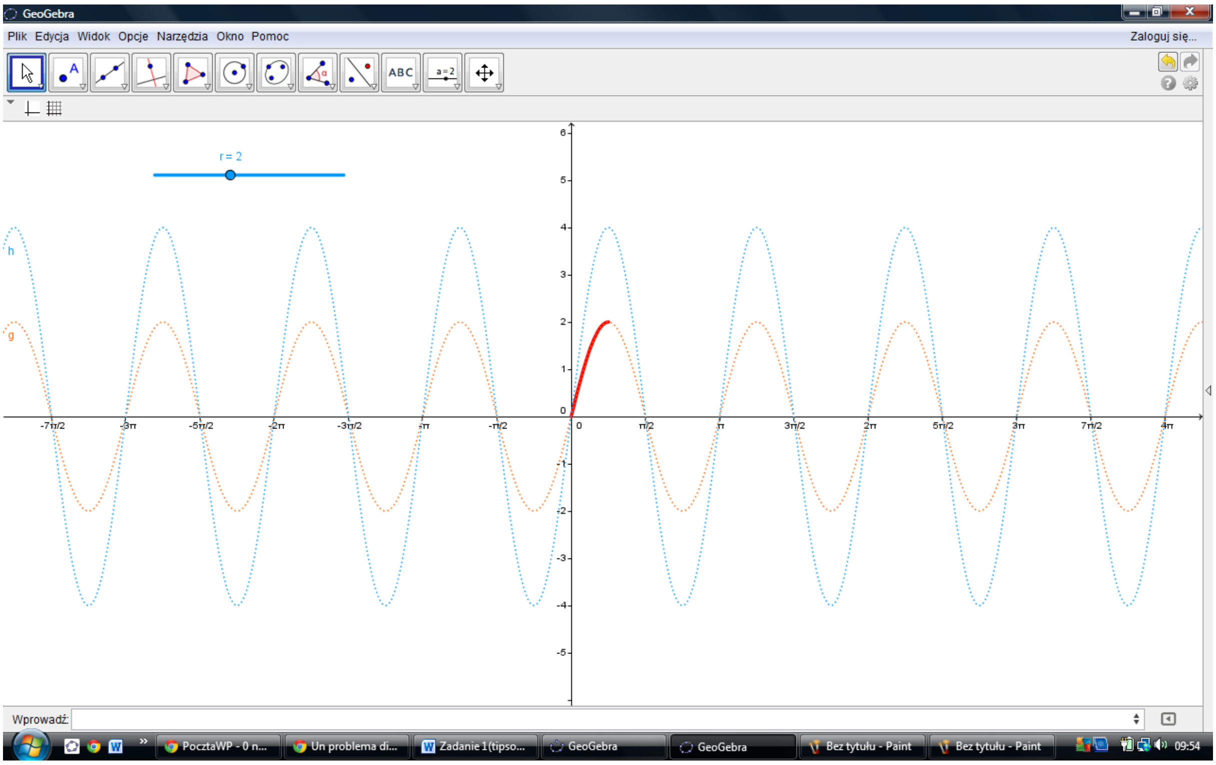
a zatem

$$y = r - r\cos 2x + \sqrt{2}\left(2r\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin x\right) + r\sin 2x,$$

co po przekształceniach daje

$$y = 2r\sin 2x.$$

Wykonajmy jeden wykres z rodziny tych funkcji, np. dla $r = 1$.



Rozwiązanie zadania 27

I sposób.

Niech $3x + 4y = s$. Wyznaczmy y z tego równania :

$$y = \frac{s - 3x}{4}.$$

Podstawmy tak wyznaczone *y* do równania $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$. Po przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe o niewiadomej *x*:

$$x^2 + \frac{s^2 - 6sx + 9x^2}{16} - 12x - \frac{6(s - 3x)}{4} - 4 = 0,$$

$$25x^2 - (6s + 120)x + s^2 - 24s - 64 = 0.$$

Aby równanie to miało pierwiastki, to jego wyróżnik musi być nieujemny. Obliczmy go:

$$\Delta = [-(6s + 120)^2] - 4 \cdot 25 \cdot (s^2 - 24s - 64) = -64s^2 + 3840s + 20800.$$

Musimy teraz rozwiązać nierówność $-64s^2 + 3840s + 20800 \geq 0$. Po przekształceniach mamy nierówność $-s^2 + 60s + 325 \geq 0$, dla której $\Delta = 4900$, zaś $\sqrt{\Delta} = 70$. Obliczmy s_1 i s_2:

$$s_1 = \frac{-60 - 70}{-2} = 65,$$

$$s_2 = \frac{-60 + 70}{2} = -5.$$

Mamy zatem

$$-5 \leq s \leq 65.$$

Ostatni zapis pozwala stwierdzić, że największą wartością $s = 3x + 4y$ jest 65 (a najmniejszą - 5).

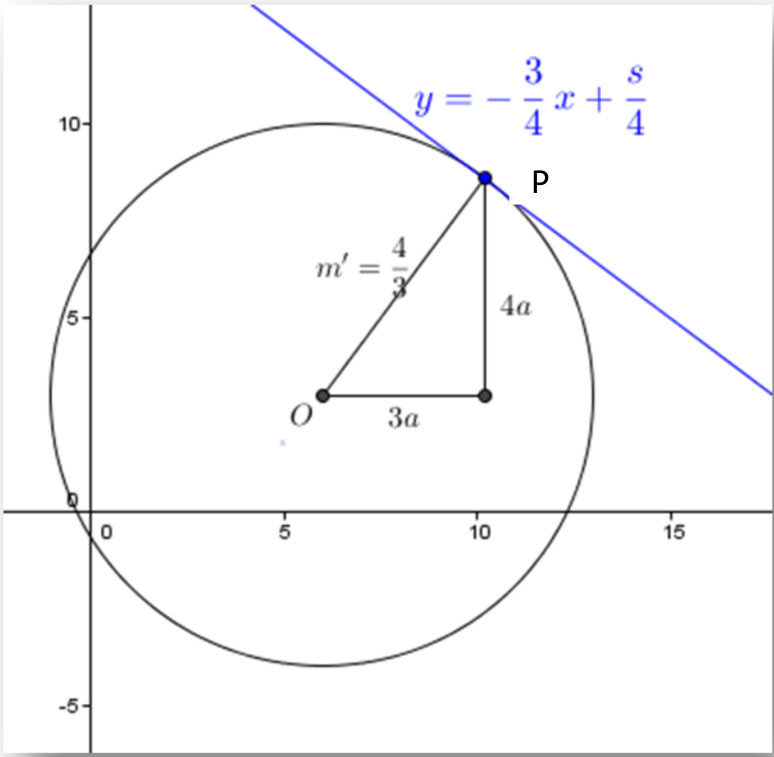
II sposób.

Inną strategię rozwiązania tego zadania podpowiada równanie $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$, które jest równaniem okręgu.

Przekształćmy dane równanie do postaci środkowej:

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 49.$$

Stwierdzamy, że środek tego okręgu ma współrzędne (6, 3), zaś $r = 7$. Jeśli $3x + 4y = s$, to $y = -\frac{3}{4}x + \frac{s}{4}$ jest równaniem kierunkowym prostej o współczynniku kierunkowym $m = -\frac{3}{4}$. Aby wartość *s* mogła osiągnąć ekstremum, to prosta ta musi być styczna do danego okręgu i musi być tak położona, jak na poniższym rysunku (dlaczego?).



Prosta *OP* jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + \frac{s}{4}$, więc jej współczynnik kierunkowy wynosi $m' = \frac{4}{3}$. Oznacza to, że punkt *P* ma współrzędne $(6 + 3a, 3 + 4a)$. Punkt ten jest punktem okręgu , więc współrzędne te spełniają jego równanie.

Zatem

$(6 + 3a - 6)^2 + (3 + 4a - 3)^2 = 49,$

skąd

$25a^2 = 49.$

Pierwiastkami tego równania są liczby: $a_1 = -\frac{7}{5}$ i $a_2 = \frac{7}{5}$.

Aby obliczyć największą wartość wyrażenia 3*x*+4*y*, należy wybrać $a = \frac{7}{5}$.

Mamy więc:

$3x + 4y = 3\left(6 + 3 \cdot \frac{7}{5}\right) + 4\left(3 + 4 \cdot \frac{7}{5}\right) = 65.$

Łatwo zauważyć, że dla $a = -\frac{7}{5}$ otrzymujemy najmniejszą wartość wyrażenia 3*x*+4*y*.

Rozwiązanie zadania 28

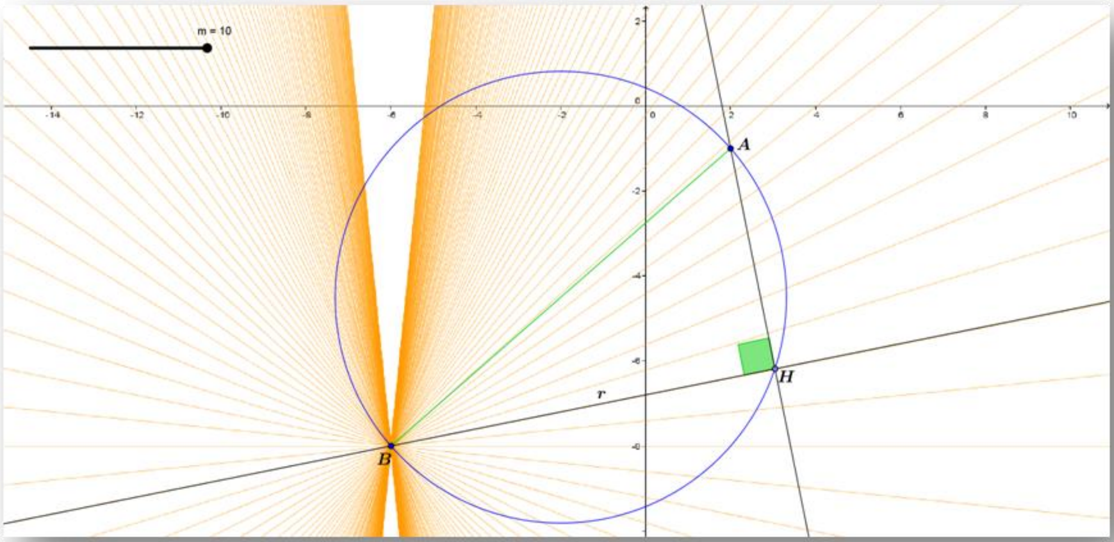
I sposób.

Każda prosta r pęku prostych o wierzchołku B (z wyjątkiem prostej prostopadłej do osi x) ma równanie:

r: $\quad y - y_B = m(x - x_B)$.

Podstawiając współrzędne punktu B, otrzymujemy:

r: $\quad y + 8 = m(x + 6)$.



Na powyższym rysunku mamy proste pęku o wierzchołku B, wyróżnioną jedną prostą r tego pęku oraz prostą AH, prostopadłą do prostej r. Długość d odcinka AH jest odległością punktu A od prostej r. Dla dowolnej prostej pęku punkty A, B, H są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku H. Oznacza to, że punkt H jest punktem okręgu o średnicy AB. Zatem odległość punktu A od prostej pęku będzie największa, gdy będzie to prosta pęku prostopadła do prostej AB. Znajdźmy jej współczynnik kierunkowy.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-8 - (-1)}{-6 - 2} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej wynosi zatem:

$$m = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\frac{7}{8}} = -\frac{8}{7}.$$

Ostatecznie szukana prosta r ma równanie:

$$y + 8 = -\frac{8}{7}(x + 6) \Rightarrow y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}.$$

Odpowiedź.

Punkt *A* leży najdalej od prostej pęku o równaniu $y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}$.

II sposób.

Zapiszmy równanie $y + 8 = m(x + 6)$ w postaci ogólnej:

$mx - y + 6m - 8 = 0$.

Odległość $d(m)$ punktu *A* od tej prostej wynosi:

$$d(m) = \frac{|m \cdot 2 - (-1) + 6m - 8|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|8m - 7|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

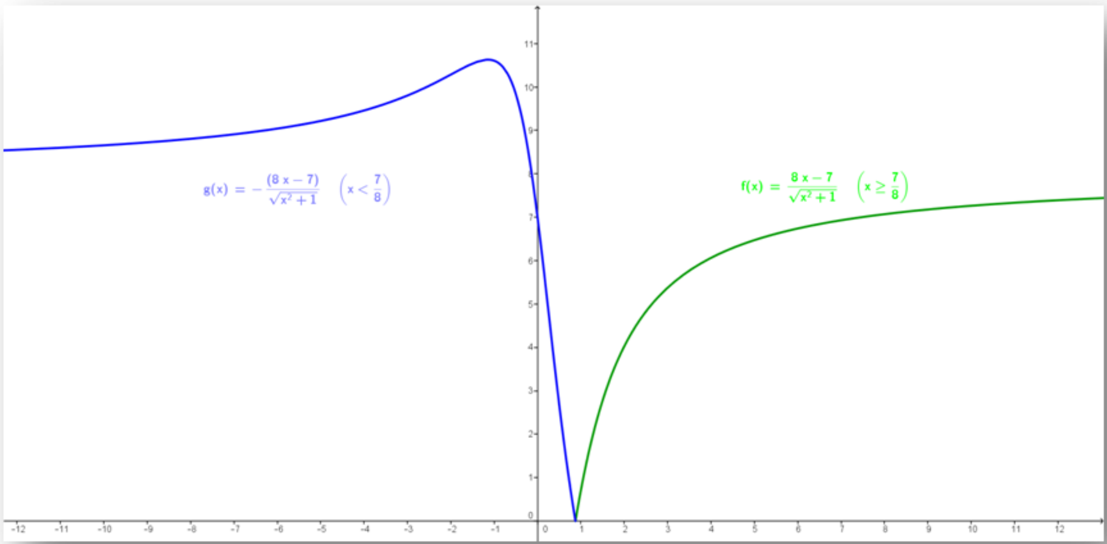
Ponieważ

$$|8m - 7| = \begin{cases} 8m - 7 \quad \text{dla} \quad m \geq \frac{7}{8} \\ -(8m - 7) \text{ dla } m < \frac{7}{8}, \end{cases}$$

więc

$$d(m) = \begin{cases} \frac{8m - 7}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad \text{dla} \quad m \geq \frac{7}{8} \\ -\frac{8m - 7}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad \text{dla} \quad m < \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Posługując się np. GeoGebrą, możemy wykonać wykres funkcji *d*. Jest on następujący:



Zbadajmy funkcję *d* używając rachunku różniczkowego.

Ponieważ

$$d'(m) = \begin{cases} \dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}} & \text{dla} \quad m > \dfrac{7}{8} \\ -\dfrac{7m+8}{\sqrt{(m^2+1)^3}} & \text{dla} \quad m < \dfrac{7}{8}, \end{cases}$$

więc

- jeśli $m > \frac{7}{8}$, to $d' > 0$ – funkcja jest rosnąca;
- jeśli $-\frac{8}{7} < m < \frac{7}{8}$, to $d' < 0$ – funkcja jest malejąca;
- jeśli $m < -\frac{8}{7}$, to $d' > 0$ – funkcja jest rosnąca;
- jeśli $m = -\frac{8}{7}$, to funkcja osiąga maksimum.

Dla $m = -\frac{8}{7}$ równanie prostej r jest następujące:

$$y + 8 = m(x+6) = y + 8 = -\frac{8}{7}(x+6) = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}.$$

Odpowiedź.

Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}$.

Rozwiązanie zadania 29

Wykorzystajmy pozycyjny zapis dziesiątkowy. Postawmy cyfry 1, 2, 3, i 4 odpowiednio na miejscach odpowiadających potęgom 10^6, 10^5, 10^4 i 10^3, tj.
$1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + x \cdot 10 + x \cdot 10^0 =$

1	2	3	4	x	x	x

Cyfry 5, 6, i 7 umieścimy w rzędzie setek, dziesiątek i jedności. Możemy to zrobić na 3! = 6 sposobów. Możliwe permutacje są następujące: 567, 576, 657, 675, 756, 765. Najmniejszą z nich jest 567, a największą 765, zatem szóstą liczbą jest

1	2	3	4	7	6	5

Kolejna liczba na miejscu czwartym winna więc mieć cyfrę 5, czyli jest to liczba postaci

1	2	3	5	x	x	x

Końcowe trzy pozycje będą więc obsadzone cyframi 4, 6, 7, których permutacjami są: 467, 476, 647, 674, 746, 764.

Najmniejszą z nich jest 467, zatem siódmą liczbą jest

1	2	3	5	4	6	7

Aby wyznaczyć liczbę stojącą na miejscu 721 postąpimy w następujący sposób: wybieramy najmniejszą cyfrę, tzn. 1 i obsadzamy ją na miejscu 10^6, czyli

1	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*

Pozostałe miejsca zajmą permutacje cyfr 2, 3, 4, 5, 5 i 7, których jest 6! = 720. Siedemset dwudziestą liczbą jest zatem liczba

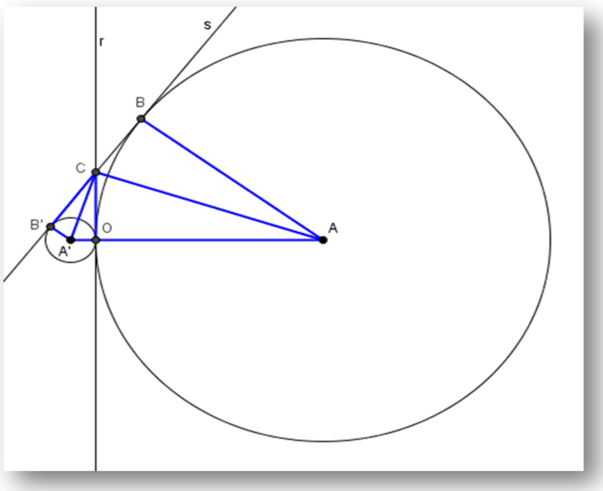
1	2	3	4	5	6	7

Kolejna liczbą, stojącą na miejscu 721, jest więc liczba, którą uzyskujemy po przestawieniu cyfr 1 i 2:

2	1	3	4	5	6	7

Odpowiedź.
W uporządkowanym rosnąco ciągu liczb utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 na miejscu z numerem 7 znajduje się liczba 1 235 467, zaś na miejscu z numerem 721 znajduje się liczba 2 134 567.

Rozwiązanie zadania 30
Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Z konstrukcji mamy:
$|\sphericalangle B'CA'| = |\sphericalangle A'CO|$ i $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle OCA|$,
skąd
$|\sphericalangle B'CA'| + |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle A'CO| + |\sphericalangle OCA|$.
Ponieważ
$|\sphericalangle B'CA'| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle A'CO| + |\sphericalangle OCA| = \pi$,
więc
$|\sphericalangle A'CA| = |\sphericalangle A'CO| + |\sphericalangle OCA| = \frac{\pi}{2}$,
co oznacza, że trójkąt *A'CA* jest prostokątny.
W celu obliczenia pola czworokąta *ABCO* zauważmy, że jest ono sumą pól trójkątów *ABC* i *AOC*, które z konstrukcji są przystające. Zatem *pole* (*ABCO*) = 2*pole*(*ACO*) = $|AO| \cdot |OC|$. Analogicznie: *pole*(*A'OCB'*) = 2*pole*(*A'OC*) = $|OA'| \cdot |OC|$. Ponieważ $|OC|^2 = |AO| \cdot |A'O| = 9$, więc |*OC*| = 3.
Zatem

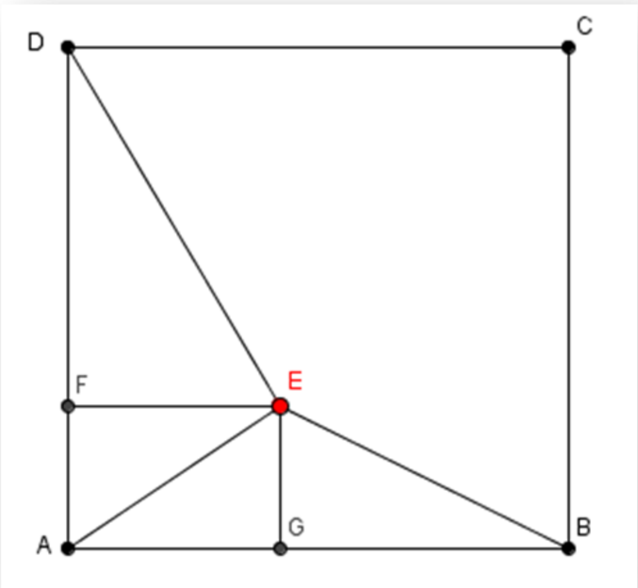
$$pole(ABCO) = 9 \cdot 3 = 27,$$
$$pole(A'OCB') = 1 \cdot 3 = 3.$$

Odpowiedź.
Pole czworokąta *ABCO* wynosi 9, zaś pole czworokąta *A'OCB'* wynosi 3.

Rozwiązanie zadania 31

Rozwiązanie

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



I sposób.

Poprowadźmy prostopadłe odcinki *EF* i *EG* odpowiednio do boków *AD* i *AB* kwadratu. Niech $|EF| = x$, $|EG| = y$ i $|AB| = z$. Wówczas

$$\begin{aligned} &(1) \quad x^2 + y^2 = 8, \\ &(2) \quad (z-x)^2 + y^2 = 9, \\ &(3) \quad x^2 + (z-y)^2 = 25. \end{aligned}$$

Z równania (1) i (2) otrzymujemy $x = \frac{z^2-1}{2z}$, zaś zrównania (1) i (3) otrzymujemy $y = \frac{z^2-17}{2z}$. Podstawiając do równania (1) otrzymujemy równanie:

$(z^2-5)(z^2-29) = 0,$

z którego

$z^2 = 5$ lub $z^2 = 29$.

Ponieważ *E* jest punktem wewnętrznym kwadratu *ABCD*, więc pole kwadratu wynosi 29.

Odpowiedź.
Pole kwadratu *ABCD* wynosi 29.

II sposób.

Stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie *DAE* otrzymujemy:
$|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |AD| \cdot \cos|\measuredangle DAE|,$

$8 + z^2 - 25 = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos|\measuredangle DAE|,$

$\cos|\measuredangle DAE| = \dfrac{z^2-17}{4\sqrt{2}z},$

zaś po zastosowaniu tego twierdzenia w trójkącie *BAE* otrzymujemy:

$\cos|\measuredangle BAE| = \dfrac{z^2-1}{4\sqrt{2}z}.$

Ponieważ $|\measuredangle DAE| + |\measuredangle BAE| = 90^0$, więc suma kwadratów miar tych kątów wynosi 1, a stąd

$$\frac{z^4-32z^2+289}{32z^2} + \frac{z^4-2z^2+1}{32z^2} = 1.$$

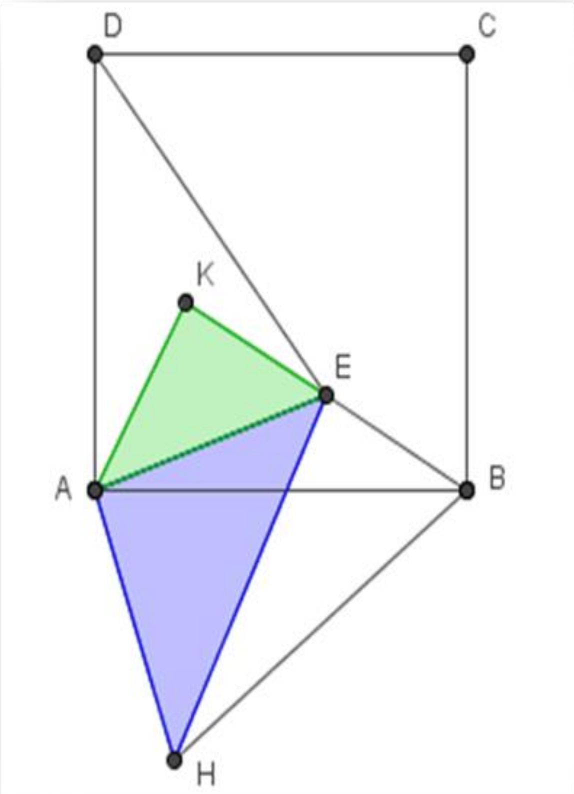
Po przekształceniach otrzymujemy równanie:
$z^4 - 34z^2 + 145 = 0,$

$(z^2-5)(z^2-29) = 0,$

skąd
$z^2 = 29.$

Odpowiedź.
Pole kwadratu *ABCD* wynosi 29.

III sposób.
Skonstruujemy odpowiedni rysunek.



Obracając trójkąt *ADE* wokół punktu *A* o kat 90^0 zgodnie z ruchem wskazówek zegara otrzymujemy trójkąt *ABH*, w którym $|BH| = 5$, zaś $|AH| = 2\sqrt{2}$ i $|\measuredangle HAE| = 90^0$. Trójkąt *HAE* jest więc prostokątnym trójkątem równoramiennym, w którym $|HE| = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$. Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że trójkąt *BEH* jest trójkątem prostokątnym z kątem prostym przy wierzchołku *E*. Przedłużmy *BE* do punktu *K*, tak, by odcinek *AK* był prostopadły do odcinka *BK*. Otrzymany trójkąt *AKE* jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, w którym $|AK| = |EK| = 2$, $|CK| = 5$ i

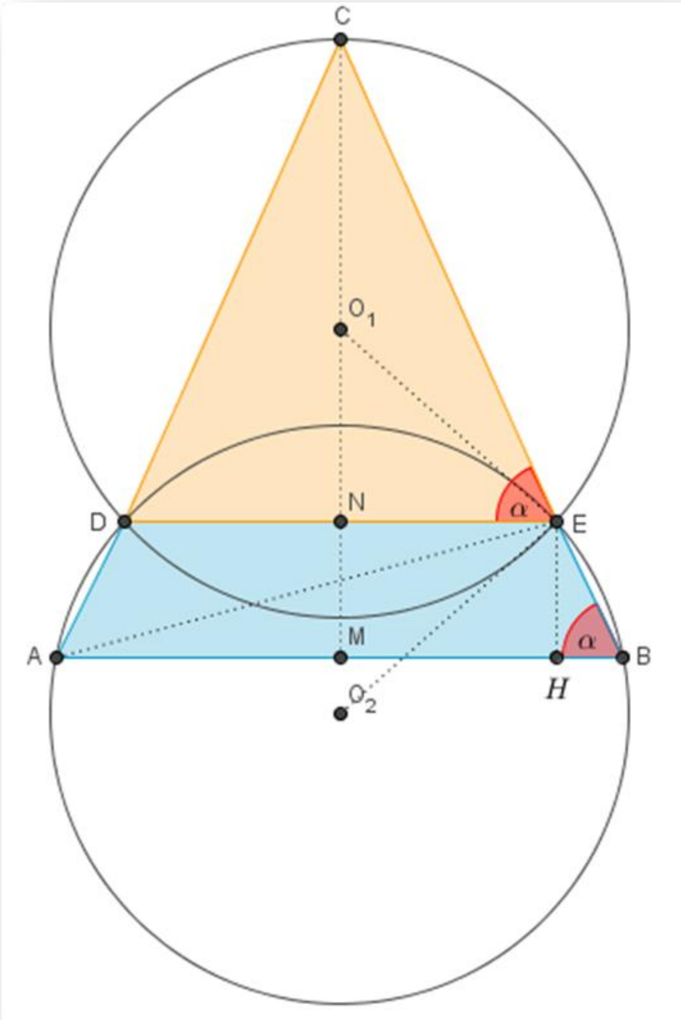
$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK|^2 = 29.$$

Odpowiedź.

Pole kwadratu *ABCD* wynosi 29.

Rozwiązanie zadania 32

Przekrój osiowy stożka spełniającego warunki zadania jest następujący:



Zgodnie z warunkami zadania mamy: $|CN| = 3\sqrt{5}$ i $|NM| = \sqrt{5}$. Niech $x = |MB|$. Korzystając z podobieństwa trójkątów i twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$|NE| = \frac{3x}{4}$, $|DC| = |CE| = \frac{\sqrt{80 + x^2}}{4}$, $|AH| = \frac{7x}{4}$, $|AE| = \frac{\sqrt{80 + 49x^2}}{4}$.

Niech teraz $r = |O_1E| = |O_2E|$. Korzystając z trójkąta *CNE* mamy:

$$\sin\alpha = \frac{|CN|}{|CE|} = \frac{3\sqrt{5}}{\frac{3\sqrt{80 + x^2}}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{80 + x^2}}.$$

Stosując twierdzenie sinusów, mamy:

$$\frac{|DC|}{\sin\alpha} = 2r \Rightarrow r = \frac{3(80 + x^2)}{32\sqrt{5}}.$$

Stosując twierdzenie sinusów w trójkącie *ABE*, mamy:

$$\frac{|AE|}{\sin\alpha} = 2r \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{(80+x^2)(80+49x^2)}}{32\sqrt{5}}.$$

Porównując, otrzymujemy:

$$\frac{3(80+x^2)}{32\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(80+x^2)(80+49x^2)}}{32\sqrt{5}},$$

czyli

$9(80+x^2)^2 = (80+x^2)(80+49x^2),$

$720 + 9x^2 = 80 + 49x^2,$

$x^2 - 16 = 0,$

a stąd

$x = 4.$

Ponieważ tworząca danego stożka ma długość $4\sqrt{6}$, więc jego pole powierzchni bocznej wynosi:

$P_b = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} = 16\sqrt{6}\pi,$

zaś objętość stożka odciętego wynosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}\pi.$$

Odpowiedź.

Pole powierzchni bocznej danego stożka wynosi $16\sqrt{6}\pi$, zaś objętość stożka odciętego jest równa $9\sqrt{5}\pi$.

TESTY

TEST 1

Temat testu: Zdania

Uwagi:

Najpierw pytanie 1, potem w kolejności losowej pytania 2 – 4, potem w kolejności losowej pytania 5 – 16.

Test

1. Która z poniższych wypowiedzi jest zdaniem:

W1: „Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 2"

W2: „Sprawdź, czy liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 2"

W3: „Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od liczby naturalnej *x*"

W4: „Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od każdej liczby naturalnej"

I. Tylko wypowiedź W1

II. Wszystkie wypowiedzi

III. Wypowiedzi W1, W3 i W4

IV. Wypowiedzi W1 i W4

2. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $(2<3)\wedge(2>3)$

Z2: $(2<3)\vee(2>3)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

3. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $(2>3)\Rightarrow(2<3)$

Z2: $(2<3)\Rightarrow(2>3)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

4. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $(2=3)\Leftrightarrow(2>3)$

Z2: $(2=3)\Rightarrow(2>3)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

5. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest prawdziwe zaś zdanie *q* jest fałszywe:

F1: $\sim p\vee\sim q$

F2: $p\wedge\sim q$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

6. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest prawdziwe zaś zdanie *q* jest fałszywe:

F1: $\sim p\Rightarrow\sim q$

F2: $\sim(p \Leftrightarrow q)$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

7. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest prawdziwe zaś zdanie *q* jest fałszywe:

F1: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

F2: $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

8. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest prawdziwe zaś zdanie *q* jest fałszywe:

F1: $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim q$

F2: $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

9. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest fałszywe zaś zdanie *q* jest prawdziwe:

F1: $\sim p \vee \sim q$

F2: $p \wedge \sim q$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

10. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest fałszywe zaś zdanie *q* jest prawdziwe:

F1: $\sim p \Rightarrow \sim q$

F2: $\sim (p \Leftrightarrow q)$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

11. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest fałszywe zaś zdanie *q* jest prawdziwe:

F1: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

F2: $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

12. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy zdanie *p* jest fałszywe zaś zdanie *q* jest prawdziwe:

F1: $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim q$

F2: $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

13. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy oba zdania *p* oraz *q* są fałszywe:

F1: $\sim p \vee \sim q$

F2: $p \wedge \sim q$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

14. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy oba zdania *p* oraz *q* są fałszywe:

F1: $\sim p \Rightarrow \sim q$

F2: $\sim (p \Leftrightarrow q)$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

15. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy oba zdania *p* oraz *q* są fałszywe:

F1: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

F2: $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

16. Oceń wartości logiczne poniższych formuł gdy oba zdania p oraz q są fałszywe:

F1: $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim q$

F2: $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$

I. F1 i F2 są prawdziwe.

II. F1 jest prawdą, zaś F2 jest fałszem.

III. F2 jest prawdą, zaś F1 jest fałszem.

IV. F1 i F2 są fałszywe.

TEST 2

Temat testu: Kwantyfikatory

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 5, potem w kolejności losowej pytania 6 – 9, potem w kolejności losowej pytania 10 – 11, potem w kolejności losowej pytania 12 – 13, potem w kolejności losowej pytania 14 – 16.

Test

1. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $\bigwedge_{x \in R} |x| > 0$

Z2: $\bigvee_{x \in R} |x| \leq 0$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

2. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $\bigwedge_{x \in N}$ $2x+1$ jest liczbą nieparzystą

Z2: $\bigwedge_{x \in N}$ $3x+1$ jest liczbą nieparzystą

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

3. Oceń wartości logiczne zdań (C oznacza zbiór liczb całkowitych) :

Z1: $\bigvee_{x \in C} \frac{x}{2} \notin C$

Z2: $\bigvee_{x \in C} \frac{x}{2} \in C$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

4. Oceń wartości logiczne zdań (C oznacza zbiór liczb całkowitych) :

Z1: $\bigwedge_{x>0} 2x > x$

Z2: $\bigwedge_{x \in C} 2x \geq x$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

5. Oceń wartości logiczne zdań (N_+ oznacza zbiór liczb naturalnych dodatnich) :

Z1: $\bigwedge_{x \in R} x^2 \geq x$

Z2: $\bigvee_{x \in N} \pi \cdot x \in N_+$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

6. Oceń wartości logiczne zdań :

Z1: $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y^2 = 0$

Z2: $\bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y^2 = 0$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

7. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 + y = 0$

Z2: $\bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} x^2 + y = 0$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

8. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $\bigwedge_{x\in R} \bigvee_{y\in R} x \cdot y = 0$

Z2: $\bigvee_{y\in R} \bigwedge_{x\in R} x \cdot y = 0$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

9. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: $\bigwedge_{x\in N} \bigvee_{y\in N} x = 2y$

Z2: $\bigvee_{x\in N} \bigwedge_{y\in N} x = 2y$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

10. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigwedge_{x} |x| = \sqrt{x^2}$$

(zakresem zmienności *x* jest zbiór R)?

I. $\bigwedge_{x} |x| \geq \sqrt{x^2}$

II. $\bigwedge_{x} |x| \neq \sqrt{x^2}$

III. $\bigvee_{x} |x| \neq \sqrt{x^2}$

IV. $\bigvee_{x} |x| = \sqrt{x^2}$

11. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigvee_{x} x \geq 3$$

(zakresem zmienności *x* jest zbiór R)?

I. $\bigvee_{x} x < 3$

II. $\bigvee_{x} x \neq 3$

III. $\bigwedge_{x} x \geq 3$

IV. $\bigwedge_{x} x < 3$

12. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigvee_{x} (x > 3 \wedge x < 5)$$

(zakresem zmienności *x* jest zbiór R)?

I. $\bigwedge_{x} (x \leq 3 \vee x \geq 5)$

II. $\bigwedge_{x} (x \leq 3 \wedge x \geq 5)$

III. $\bigvee_{x} (x \leq 3 \wedge x \geq 5)$

IV. $\bigvee_{x} (x \leq 3 \vee x \geq 5)$

13. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigwedge_{x} (x > 3 \vee x < 5)$$

(zakresem zmienności x jest zbiór R)?

I. $\bigwedge_{x} (x \leq 3 \wedge x \geq 5)$

II. $\bigwedge_{x} (x \leq 3 \vee x \geq 5)$

III. $\bigvee_{x} (x \leq 3 \wedge x \geq 5)$

IV. $\bigvee_{x} (x \leq 3 \vee x \geq 5)$

14. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigwedge_{x} \bigwedge_{y} x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

(zakresem zmienności x i y jest zbiór R)?

I. $\bigwedge_{x} \bigwedge_{y} x^2 - y^2 \neq (x - y)(x + y)$

II. $\bigvee_{x} \bigvee_{y} x^2 - y^2 \neq (x - y)(x + y)$

III. $\bigwedge_{x} \bigvee_{y} x^2 - y^2 \neq (x - y)(x + y)$

IV. $\bigvee_{x} \bigwedge_{y} x^2 - y^2 \neq (x - y)(x + y)$

15. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigvee_{x} \bigvee_{y} x + y \neq xy$$

(zakresem zmienności x i y jest zbiór R)?

I. $\bigvee_x \bigvee_y x + y = xy$

II. $\bigvee_x \bigwedge_y x + y = xy$

III. $\bigwedge_x \bigvee_y x + y = xy$

IV. $\bigwedge_x \bigwedge_y x + y = xy$

16. Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania

$$\bigwedge_x \bigvee_y xy \leq x + y$$

(zakresem zmienności x i y jest zbiór R)?

I. $\bigwedge_x \bigwedge_y xy > x + y$

II. $\bigwedge_x \bigvee_y xy > x + y$

III. $\bigvee_x \bigwedge_y xy > x + y$

IV. $\bigvee_x \bigvee_y xy > x + y$

TEST 3

Temat testu: Zbiory

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 4, potem w kolejności losowej pytania 5 – 13, potem w kolejności losowej pytania 14 – 16.

Test

1. Utwórz liczbę dwucyfrową, której pierwsza cyfra to liczba elementów zbioru A, zaś druga cyfra to liczba elementów zbioru B:

A – zbiór liczb całkowitych, których kwadrat jest mniejszy niż 7,

B – zbiór liczb pierwszych jednocyfrowych

Ta liczba to

I. 55 II. 54 III. 45 IV. 44

2. Utwórz liczbę dwucyfrową, której pierwsza cyfra to liczba elementów zbioru A, zaś druga cyfra to liczba elementów zbioru B:

A – zbiór liter występujących w słowie KATARAKTA,

$B = \{\{a\}, a\}$

Ta liczba to

I. 92 II. 91 III. 42 IV. 41

3. Utwórz liczbę dwucyfrową, której pierwsza cyfra to liczba elementów zbioru A, zaś druga cyfra to liczba elementów zbioru B:

$A = \{\emptyset, \emptyset\}$,

$B = \{\emptyset\}$

Ta liczba to

I. 11 II. 21 III. 10 IV. 20

4. Utwórz liczbę dwucyfrową, której pierwsza cyfra to liczba elementów zbioru A, zaś druga cyfra to liczba elementów zbioru B:

$A = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$,

$B = \emptyset$

Ta liczba to

I. 11 II. 21 III. 10 IV. 20

5. Ile podzbiorów ma zbiór $\{a, b, c\}$?

I. 3 II. 6 III. 8 IV. 16

6. Dane są zbiory: $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{d,e,f,g,h,i,j\}$. Wówczas:

I. $A \cap B = \{d,e\}$, $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$

II. $A \cap B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$, $A \cup B = \{d,e\}$

III. $A \cap B = \{a,b,c\}$, $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$

IV. $A \cap B = \{d,e\}$, $A \cup B = \{f,g,h,i,j\}$

7. Dane są zbiory: $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{d,e,f,g,h,i,j\}$. Wówczas:

I. $A \setminus B = \{a,b,c\}$, $B \setminus A = \{d,e\}$

II. $A \setminus B = \{d,e\}$, $B \setminus A = \{d,e\}$

III. $A \setminus B = \{a,b,c\}$, $B \setminus A = \{f,g,h,i,j\}$

IV. $A \setminus B = \{a,b,c,f,g,h,i,j\}$, $B \setminus A = \{a,b,c,f,g,h,i,j\}$

8. Dane są przedziały: $A = <2;5>$, $B = (1;4)$. Wówczas:

I. $A \cap B = \{2,3\}$, $A \cup B = \{2,3,4,5\}$

II. $A \cap B = \{2,3,4,5\}$, $A \cup B = \{2,3\}$

III. $A \cap B = (1;5>$, $A \cup B = <2;4)$

IV. $A \cap B = <2;4)$, $A \cup B = (1;5>$

9. Dane są przedziały: $A = <2;5>$, $B = (1;4)$. Wówczas:

I. $A \setminus B = (4;5>$, $B \setminus A = (1;2>$

II. $A \setminus B = <4;5>$, $B \setminus A = (1;2)$

III. $A \setminus B = <4;5>$, $B \setminus A = (1;2>$

IV. $A \setminus B = (4;5>$, $B \setminus A = (1;2)$

10. Dane są przedziały: $A = <1;6>$, $B = (1;6)$. Wówczas:

I. $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \emptyset$

II. $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{6\}$

III. $A \setminus B = \{1, 6\}$, $B \setminus A = \emptyset$

IV. $A \setminus B = \{1, 6\}$, $B \setminus A = \{1, 6\}$

11. Dane są przedziały: $A = <4;\infty)$, $B = (-\infty;4>$. Wówczas:

I. $A \setminus B = \{4\}$, $A \cap B = \{4\}$

II. $A \setminus B = \{4\}$, $A \cap B = \emptyset$

III. $A \setminus B = (4;\infty)$, $A \cap B = \{4\}$

IV. $A \setminus B = (4;\infty)$ $A \cap B = \emptyset$

12. Dany jest przedział $A = (-2;3)$. C jest zbiorem liczb całkowitych. Wówczas:

I. $A \cap C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

II. $A \cap C = \{0, 1, 2, 3\}$

III. $A \cap C = \{1, 2, 3\}$

IV. $A \cap C = \{-1, 0, 1, 2\}$

13. Dany jest przedział $A = <-1;1>$. C jest zbiorem liczb całkowitych. Wówczas:

I. $A \setminus C = (-1;0) \cup (0;1)$

II. $A \setminus C = (-1; 1)$

III. $A \setminus C = \{-1, 1\}$

IV. $A \setminus C = \{-1, 0, 1\}$

14. Dane są zdania:

Z1 - Dla dowolnych zbiorów A i B: $(A \subset B) \Rightarrow (A \setminus B = \emptyset)$

Z2 - Dla dowolnych zbiorów A i B: $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$

Wówczas:

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

15. Dane są zdania:

Z1 - Dla dowolnych zbiorów A i B: $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B = B \setminus A)$

Z2 - Dla dowolnych zbiorów A i B: $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B = A)$

Wówczas:

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

16. Dane są zdania:

Z1 - Dla dowolnych zbiorów A i B: $(A \cup B = B) \Rightarrow (A \setminus B = \emptyset)$

Z2 - Dla dowolnych zbiorów A i B: $(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A)$

Wówczas:

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

TEST 4
Temat testu: Wielomiany

Uwagi

Pytania 1 - 5 mają charakter wstępny i mają na celu sprawdzenie wiadomości dotyczących określenia wielomianu.

Test

1. Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (x+1)^5 - (x-1)^5$ jest równy:

a) 0

b) 1

c) -2

d) 2

2. Współczynnik przy x3 w wielomianie $W(x) = (x^2 - 4x + 2)(x-1)^2$ jest równy:

a) 0

b) 1

c) -4

d) -2

3. Wielomian $W(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$ ma w postaci standardowej postać:

a) $W(x) = 2$

b) $W(x) = 6x^2 + 6$

c) $W(x) = 6x^2 + 2$

d) $W(x) = x^3 + 2$

4. Wielomian $W(x) = (2-x)(x-1)(x+1)$ jest równy wielomianowi:

a) $(x-2)(1-x)(x+1)$

b) $-(x-2)(1+x)(1-x)$

c) $(2-x)(1+x)(1-x)$

d) $(1+x)(x-2)(x-1)$

5. Stopień wielomianu $W(x) = [(-2x^5 + x^2 - 3x + 1)(2x^5 - x^2 + 3x + 1)]^2$ jest równy:

a) 0

b) 10

c) 20

d) 40

6. Wartość wielomianu $W(x) = ax^4 - 5$ dla $x = \sqrt{5}$ wynosi 0. Wtedy współczynnik *a* jest równy:

a) 1

b) 0,2

c) 5

d) 0,5

7. Wartość wielomianu $W(x) = ax^3 - b$ dla $x = \sqrt{2}$ wynosi 0 a dla $x = -\sqrt{2}$ wynosi $-2\sqrt{2}$. Wtedy współczynniki *a, b* są równe:

a) $a = \dfrac{1}{2}$ $\quad b = \sqrt{2}$

b) $a = -\frac{1}{2}$ $\quad b = \sqrt{2}$

c) $a = \sqrt{2}$ $\quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $a = -\sqrt{2}$ $\quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Wielomian $W(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ jest podzielny bez reszty przez dwumian:

a) $x - 1$

b) $x + 1$

c) $x - 3$

d) $x + 3$

9. Wielomian $W(x) = x^8 + x^6 - x^2 - 1$ nie jest podzielny bez reszty przez:

a) $x^2 - 1$

b) $x^4 - 1$

c) $x^2 + 1$

d) $x^4 + 1$

10. Niech $W(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 1)$, $P(x) = (-x^2 + x - 1)(x^2 - 1)$. Liczba punktów wspólnych wykresów tych wielomianów wynosi:

a) 0

b) 1

c) 4

d) nieskończenie wiele

11. Niech $W(x) = (x-1)^3$. Wielomian W(x+1) - W(x) ma współczynnik przy najwyższej potędze równy:

a) 3

b) -3

c) 1

d) -1

12. Niech $W(x) = x^2 + 1$, $P(x) = x^2 - 1$. Wielomian $W(P(x))$ jest równy:

a) $x^4 - x^2$

b) x^4

c) $x^4 - 2x^2 + 2$

d) $2x^2$

13. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = -2x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$ przez jednomian $x + 1$ jest równa:

a) 0

b) -6

c) 2

d) -10

14. Rozkład wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ na czynniki liniowe ma postać:

a) $(x+2)^2(x-2)$

b) $(x-2)^2(x+2)$

c) $(x+2)(x^2-2)$

d) $(x-4)(x+2)^2$

TEST 5
Temat testu: Wyrażenia wymierne

Uwagi.

Pytania 1 - 4 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Wyrażenie $\frac{x^{-2}y^{-1}+x^{-1}y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}$ dla x = 2,5; y = -4,5 ma wartość:

a) 1/7

b) -1/7

c) -7

d) 7

2. Wartość funkcji $f(x)=\frac{3}{\sqrt{7-x}}-\frac{1}{\sqrt{5-x}}$ dla x = 2 jest równa:

a) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$

b) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

c) $\sqrt{7}-2$

d) $\sqrt{5}-2$

3. Skracając wyrażenie $\frac{2x^3-x^4}{8-x^3}$, $x \neq 2$ otrzymamy:

a) $\frac{x^3}{x^2+4x+4}$

b) $\frac{x^3}{4}-x$

c) $\frac{x^3}{4}+x$

d) $\frac{x^3}{x^2+2x+4}$

4. Funkcja homograficzna, która ma asymptoty x = 2, y = 1 i jest kawałkami rosnąca ma postać:

a) $f(x)=\frac{3-x}{2-x}$

b) $f(x)=\frac{1-x}{2-x}$

c) $f(x)=\frac{3-x}{x-2}$

d) $f(x)=\frac{1-x}{x-2}$

5. Która z poniższych funkcji jest parzysta:

a) $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$

b) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x^2$

d) $f(x)=\frac{(1-x)^3(1+x)^3}{x^2+2}$

6. Która z poniższych funkcji jest nieparzysta:

a) $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$

b) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x^2$

d) $f(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2+1}$

7. Jeśli $x-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$ to $x^2+\frac{1}{x^2}$ jest równe:

a) $\frac{25}{36}$

b) $\frac{61}{36}$

c) $\frac{97}{36}$

d) $\frac{79}{36}$

8. Funkcją odwrotną do $f(x)=\frac{x}{1+x}$ jest:

a) $g(x)=\frac{1}{x}$

b) $g(x)=\frac{1+x}{x}$

c) $g(x)=\frac{x}{1-x}$

d) $g(x)=-\frac{1}{x}$

9. Zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$ jest równy:

a) (0, 6]

b) [0, 3]

c) (0, 2]

d) [0, 6]

10. Jeśli zachodzi równość $\frac{35x-29}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$ to iloczyn AB jest równy:

a) -246

b) -210

c) 246

d) 210

Uwaga.

Pytania 1 - 4 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

TEST 6

Temat testu: Równania i nierówności wymierne

Uwagi.

Pytania 1 - 4 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Liczba rozwiązań równania $\frac{x^3+x}{x^2+1}=0$ wynosi:

a) 0

b) 1

c) 2

d) nieskończenie wiele

2. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^{-1}<3$ jest:

a) $(-\infty,0)$

b) $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

c) $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

d) $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

3. Pierwiastkami równania $\frac{(3-x)(2x-4)(x+1)(4-x)}{x^2+1}=0$ są liczby:

a) 1, 2, 3, 4

b) -1, -4, 3, 4

c) -1, 2, 3, 4

d) 1, -2, -3, 4

4. Jeśli a > 0, to nierówność $\frac{2}{x}>\frac{1}{a}$ jest równoważna nierówności:

a) $0<x<2a$

b) $x>a$

c) $x<2a$

d) $x>2a$

5. Największa liczba całkowita spełniająca nierówność $\frac{7}{|2x+4|}>1$:

a) -1

b) 1

c) -3

d) 3

6. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{x+2}>\frac{2}{x-5}$ jest:

a) $(-\infty,-9)$

b) $(9,\infty)$

c) $(5,\infty)$

d) $(-\infty,-9)\cup(-2,5)$

7. Liczba rozwiązań równania $\frac{3}{x^2+2x}-\frac{2}{2x-x^2}=\frac{-3}{4-x^2}$ wynosi:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

8. Dla jakiego a < 0, najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{2}{x}<\frac{1}{a}$ jest liczba -9:

a) -10

b) -9

c) -6

d) -5

9. Suma rozwiązań równania $\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{5}{2}$ wynosi:

a) -1

b) 3

c) 4

d) -4

10. Równanie $\frac{|x+2|}{x+2} = (x+a)^2$ ma dwa rozwiązania dla wszystkich a należących do zbioru:

a) $(1,3]$

b) $(-\infty,1)$

c) $[3,\infty)$

d) $(-1,\infty)$

TEST 7
Temat testu: Własności ciągów

Uwagi.

Pytania 1 - 5 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Pewien wyraz ciągu $a_n = 5n-2$ jest równy 133, jest to wyraz o numerze:

a) 25

b) 26

c) 27

d) 28

2. Piąty wyraz ciągu $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 3$ jest równy:

a) 17

b) 14

c) 12

d) 8

3. Suma ósmego i dziewiątego wyrazu ciągu $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} - 0{,}5n}$ wynosi:

a) $-\frac{14+3\sqrt{2}}{12}$

b) $-\frac{7+\sqrt{2}}{6}$

c) $\frac{14-3\sqrt{2}}{12}$

d) $\frac{7-\sqrt{2}}{6}$

4. Wyrazy ciągu $a_n = \frac{n^2-5n-6}{n^2+n+1}$ równe zero to:

a) $a_1, \quad a_2$

b) $a_2, \quad a_3$

c) $a_1, \quad a_3$

d) tylko a_1

5. Który z poniższych ciągów nie jest rosnący:

a) $a_n = \frac{5n+6}{2}$

b) $b_n = n^2 + 1$

c) $c_n = 2^n - 1$

d) $d_n = \frac{2}{n}$

6. Wyraz ciągu $a_n = 20 + 18n - 2n^2$, który ma największą wartość to:

a) 30

b) 40

c) 50

d) 60

7. Wyraz ciągu $a_n = 10 - 32n + 3n^2$, który ma najmniejszą wartość to:

a) -73

b) -74

c) -75

d) -76

8. Jeśli suma *n* początkowych wyrazów ciągu jest równa $2n^2 - n$, to wyraz piąty jest równy:

a) 45

b) 17

c) 59

d) 32

9. Ciąg $a_n = \frac{kn+1}{n+2}$ jest rosnący gdy:

a) $k > 0$

b) $k < 0$

c) $k < 0{,}5$

d) $k > 0{,}5$

10. Wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{9}{3n+1}$, których wartość należy do przedziału (2/3; 7/4) to wyrazy o numerach:

a) 2, 3, 4

b) 3, 4, 5

c) 4, 5, 6

d) 3, 4, 5, 6

TEST 8
Temat testu: Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

Uwagi:

Pytania 1 - 5 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Jeśli pierwszy i dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego są równe odpowiednio 76 i 19, to różnica tego ciągu wynosi:

a) -3

b) -2

c) 2

d) 3

2. Który z poniższych ciągów jest ciągiem arytmetycznym:

a) $a_n = \frac{5n+6}{2}$

b) $b_n = n^2 + 1$

c) $c_n = 2^n - 1$

d) $d_n = \frac{2}{n}$

3. Który z poniższych ciągów jest ciągiem geometrycznym:

a) $a_n = \frac{5n+6}{2}$

b) $b_n = n^2 + 1$

c) $c_n = 2^n$

d) $d_n = \frac{2}{n}$

4. Ciąg geometryczny ma pierwszy wyraz 128 i iloraz 0,5. Suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

a) 254

b) 248

c) 252

d) 240

5. Ciąg geometryczny ma siódmy wyraz 6,4 i iloraz 2. Drugi wyraz tego ciągu jest równy:

a) 0,1

b) 0,2

c) 0,3

d) 0,5

6. Drugi, dziewiąty i trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Iloraz tego ciągu jest równy:

a) -7/4

b) 7/4

c) -4/7

d) 4/7

7. W ciągu arytmetycznym $a_1 = \sin 30^o$, $a_2 = \cos 120^o$. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy:

a) -9,5

b) -8,5

c) -0,5

d) 0,5

8. Suma kolejnych liczb parzystych od 30 do 80 włącznie jest równa:

a) 1430

b) 1375

c) 1485

d) 1320

9. W ciągu geometrycznym $a_4 = 12, \quad a_7 = 1{,}5$. Pierwszy wyraz tego ciągu i jego iloraz są odpowiednio równe:

a) -96; 0,5

b) -48; 1,5

c) 48; 1,5

d) 96; 0,5

10. Suma czwartego i siedemnastego wyrazu ciągu arytmetycznego jest równa 21. Suma jego dwudziestu początkowych wyrazów jest równa:

a) 420

b) 315

c) 210

d) 280

11. Ciąg (9, x + 1, –3) jest arytmetyczny. Wówczas:

a) x = 6

b) x = 2

c) x = 5

d) x = 3

12. Ciąg $(4x – 3, x + 3, x – 3)$ jest monotonicznym ciągiem geometrycznym. Wówczas:

a) $x = 0$

b) $x = 3$

c) $x = 5$

d) $x = 7$

TEST 9
Temat testu: Szereg geometryczny

Uwagi.

Pytania 1 - 4 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Jeśli pierwszy wyraz szeregu geometrycznego jest równy -1/2 a jego iloraz -3/4, to suma tego szeregu wynosi:

a) -3

b) -2

c) 0

d) 3

2. Jeśli pierwszy wyraz szeregu geometrycznego jest równy 1/2 a jego suma 2, to iloraz tego szeregu wynosi:

a) -3/4

b) -1/2

c) 1/2

d) 3/4

3. Jeśli suma szeregu geometrycznego jest równa 4 a jego iloraz -1/4, to pierwszy wyraz tego szeregu wynosi:

a) 3

b) 2

c) 5

d) 1

4. Szereg geometryczny ma pierwszy wyraz 2 i sumę 4. Czwarty wyraz tego szeregu wynosi:

a) 1/2

b) 1/4

c) 1

d) 1/8

5. Suma 0,3115+0,000015+0,00000015+.... jest równa:

a) 257/825

b) 257/755

c) 257/1500

d) 514/1665

6. Dla jakich x szereg geometryczny

$$1 + (3-2x) + (3-2x)^2 + (3-2x)^3 + \ldots$$

jest zbieżny ?

a) $1 \leq x < 2$

b) $x > 1$

c) $1 < x < 2$

d) $x \geq 2$

7. Który z poniższych szeregów geometrycznych jest zbieżny?

a) $1+\log_5 4+(\log_5 4)^2+(\log_5 4)^3+.....$

b) $1+\text{tg}1+(\text{tg}1)^2+(\text{tg}1)^3+.....$

c) $1-1+1-1+1-1+...$

d) $1+\sin(\pi/2)+\sin^2(\pi/2)+\sin^3(\pi/2)+.....$

8. Rozpatrujemy ciąg trójkątów równoramiennych o podstawach długości 4 każdy. Długości ich wysokości tworzą szereg geometryczny, który ma drugi wyraz równy 9 a czwarty wyraz równy 1. Suma pól tych trójkątów wynosi:

a) 9

b) 81

c) 162

d) 36

9. Rozpatrujemy ciąg trójkątów (T_n). Jako pierwszy bierzemy trójkąt równoboczny o boku długości 1. Wierzchołki trójkąta T_{n+1} to środki boków trójkąta T_n, n = 1, 2, 3, ... Suma pól tych trójkątów wynosi:

a) 1,5

b) 6

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Rozpatrujemy ciąg kwadratów (K_n). Jako pierwszy bierzemy kwadrat o boku długości 1. Wierzchołki kwadratu K_{n+1} to środki boków kwadratu K_n, n = 1, 2, 3, 4, ... Suma pól tych kwadratów wynosi:

a) 2

b) $2+\sqrt{2}$

c) 4

d) $4+4\sqrt{2}$

TEST 10

Temat testu: Własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej

Uwagi.

Pytania 1 - 4 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Dla funkcji $f(x)=5^x$ prawdziwe jest zdanie:

a) Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb dodatnich.

b) Jest to funkcja rosnąca.

c) Jest to funkcja nieparzysta.

d) Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt (5; 1).

2. Dla funkcji $f(x)=\log_5 x$ prawdziwe jest zdanie:

a) Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

b) Jest to funkcja ograniczona.

c) Jest to funkcja nieparzysta.

d) Wykres tej funkcji przechodzi przez punkt (1; 0).

3. Wartość wyrażenia $\log_5 8-\log_5 2+\log_5\left(\frac{25}{4}\right)$ wynosi:

a) 100

b) 25

c) 12,25

d) 2

4. Wartość wyrażenia $\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}} + 81^{-\frac{1}{4}}$ wynosi:

a) 4/9

b) 1/12

c) 2/3

d) 12

5. Funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = \log_2(x-1)$ jest funkcja:

a) $g(x) = 2^x + 1$

b) $g(x) = 2^{x+1}$

c) $g(x) = 2^{x-1}$

d) $g(x) = \dfrac{1}{\log_2(1-x)}$

6. Dziedziną funkcji $f(x) = \log_{4-x}(x^2 - 2x)$ jest zbiór:

a) $(0;\ 2)$

b) $(-\infty;0) \cup (2;4)$

c) $(-\infty;0) \cup (2;3) \cup (3;4)$

d) $(-\infty;0) \cup (4;\infty)$

7. Która z poniższych funkcji jest parzysta:

a) $f(x) = \lg\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$

b) $f(x)=2^{x}-2^{-x}$

c) $f(x)=3^{x}+3^{-x}$

d) $f(x)=\lg\frac{|x|}{x}$

8. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=\log_2(x^2-2x+3)$ jest:

a) $[1;\ \infty)$

b) $[-1;\ 1]$

c) $(-\infty;\ 1]$

d) $[-1;\ \infty)$

9. Jeśli $\lg 2=a;\ \lg 3=b$, to $\lg 45$ jest równy:

a) a - b + 1

b) 2b - a + 1

c) a - 2b + 1

d) 2a - b + 1

10. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=0{,}2^{-x^2+4x-6}$ jest:

a) $[25;\ \infty)$

b) $(0;\ 25]$

c) $(0;\ 125]$

d) $[125;\ \infty)$

TEST 11

Temat testu: Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

Uwagi:

Pytania 1 - 3 mają charakter wstępny i należy je wykonać w pierwszej kolejności.

Test

1. Pierwiastkiem funkcji wykładniczej $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-8}-4$ jest:

a) x = 0.

b) x = 1.

c) x = 2.

d) x = 3.

2. Zbiór rozwiązań nierówności $2^{x+2}\le 4^{x-2}$ jest równy:

a) $[6;\infty)$.

b) $(-\infty; 6]$.

c) $\varnothing$.

d) $\{0\}$.

3. Zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{2}} x>0$ jest równy:

a) $(1, \infty)$

b) $(0, 1)$

c) $(0, \infty)$

d) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

4. Rozwiązaniem równania $2^{x+5}3^{x}-6^{x}=1116$ jest:

a) x = 0.

b) x = 1.

c) x = 2.

d) x = 3.

5. Największą liczbą rzeczywistą spełniającą nierówność $2^{\log_{0,5}(-x)} \leq 3$ jest:

a) -3

b) -1/3

c) 0

d) 3

6. Rozwiązaniem równania $36^{\sqrt{x-2}} = \frac{4}{9}(0,(3))^{-4}$ jest:

a) x = 6.

b) x = 4.

c) x = 3.

d) x = 2.

7. Suma rozwiązań równania $\frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ wynosi:

a) -1

b) 1

c) 2

d) 3

8. Zbiór rozwiązań nierówności $\log_{0,75}\log_{27} x > -1$ jest równy:

a) (1/9, 1/3)

b) (1/9, 81)

c) (1, 81)

d) (0, 81)

9. Nierówność $2^{-x} < \frac{x}{2}$ jest równoważna nierówności:

a) $x > 1$

b) $x < 1$

c) $x > 2$

d) $x < 2$

10. Liczba rozwiązań równania $\left|\lg|x|\right| = x + 2$ wynosi:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

TEST 12

Temat testu: Określenie pochodnej

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 5, potem w kolejności losowej pytania 6 – 10.

Test

1. Które z poniższych wyrażeń jest ilorazem różnicowym funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie x_0 ($x_0 > 0$)?

I. $\dfrac{\sqrt{x_0} - \sqrt{h}}{h}$ II. $\dfrac{\sqrt{x_0} + \sqrt{h}}{h}$

III. $\dfrac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$ IV. $\dfrac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{h}}{h}$

2. Które z poniższych wyrażeń jest ilorazem różnicowym funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x}$ w punkcie x_0 ($x_0 \neq 0$)?

I. $\dfrac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{h}}{h}$ II. $\dfrac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}$

III. $\dfrac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{x_0}$ IV. $\dfrac{\frac{1}{x_0+h}+\frac{1}{h}}{h}$

3. Ile wynosi iloraz różnicowy funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie $x_0=1$ gdy przyrost argumentu $h=0{,}2$?

I. 2,2 II. 5 III. 0,44 IV. 1,44

4. Ile wynosi iloraz różnicowy funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ w punkcie $x_0=4$ gdy przyrost argumentu $h=0{,}41$?

I. $\sqrt{2{,}41}$ II. 4,41 III. $\dfrac{40}{41}$ IV. $\dfrac{10}{41}$

5. Ile wynosi iloraz różnicowy funkcji $f(x)=\dfrac{1}{x}$ w punkcie $x_0=2$ gdy przyrost argumentu $h=0{,}5$?

I. $-0{,}2$ II. $-0{,}4$ III. 0,2 IV. 0,4

6. Która z poniższych granic jest równa pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0?

I. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ II. $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$

III. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ IV. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$

7. Która z poniższych granic jest równa pochodnej funkcji $f(x)=2x$ w punkcie x_0?

I. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x_0+h)-2x_0}{h}$ II. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2x_0+h-2x_0}{h}$

III. $\lim_{h\to 0}\frac{x_0+2h-2x_0}{h}$

IV. $\lim_{h\to 0}\frac{2(x_0+h)-x_0}{h}$

8. Która z poniższych granic jest równa pochodnej funkcji $f(x)=x^3$ w punkcie x_0?

I. $\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3-h^3}{h}$

II. $\lim_{h\to 0}\frac{x_0{}^3-h^3}{h}$

III. $\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3+x_0{}^3}{h}$

IV. $\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3-x_0{}^3}{h}$

9. Która z poniższych granic jest równa pochodnej funkcji $f(x)=2^x$ w punkcie x_0?

I. $\lim_{h\to 0}\frac{2^{x_0+h}-2^{x_0}}{x_0}$

II. $\lim_{h\to 0}\frac{2^{x_0}-2^{h}}{x_0}$

III. $\lim_{h\to 0}\frac{2^{x_0+h}-2^{x_0}}{h}$

IV. $\lim_{h\to 0}\frac{2^{x_0}-2^{h}}{h}$

10. Która z poniższych granic jest równa pochodnej funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2}$ w punkcie x_0 ($x_0\neq 0$)?

I. $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0{}^2+h^2}-\frac{1}{x_0{}^2}}{h}$

II. $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x_0+h)^2}-\frac{1}{x_0{}^2}}{h}$

III. $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0{}^2+h}-\frac{1}{x_0}}{h}$

IV. $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x_0+h)^2}-\frac{1}{x_0}}{h}$

TEST 13

Temat testu: Obliczanie pochodnych

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 5, potem w kolejności losowej pytania 6 – 10, potem w kolejności losowej pytania 11 – 15.

Test

1. Jeżeli $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ to:

I. $f\,'(x)=\dfrac{2\sqrt[3]{x^5}}{3}$ II. $f\,'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

III. $f\,'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ IV. $f\,'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$

2. Jeżeli $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ to:

I. $f\,'(x)=\dfrac{-5}{x^6}$ II. $f\,'(x)=\dfrac{-5}{x^4}$

III. $f\,'(x)=\dfrac{1}{5x^4}$ IV. $f\,'(x)=\dfrac{5}{x^4}$

3. Jeżeli $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ to:

I. $f\,'(x)=\dfrac{5}{3\sqrt[5]{x^2}}$ II. $f\,'(x)=\dfrac{5\sqrt[5]{x^2}}{3}$

III. $f\,'(x)=\dfrac{-3}{5\sqrt[5]{x^8}}$ IV. $f\,'(x)=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$

4. Jeżeli $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$ to:

I. $f'(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ II. $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

III. $f'(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ IV. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. Jeżeli $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ to:

I. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ II. $f'(x)=\frac{9\sqrt[6]{x^7}}{2}$

III. $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}$ IV. $f'(x)=\frac{7\sqrt[6]{x}}{6}$

6. Jeżeli $f(x)=\frac{2x+1}{3x-2}$ to:

I. $f'(x)=\frac{-7}{(3x-2)^2}$ II. $f'(x)=\frac{-1}{(3x-2)^2}$

III. $f'(x)=\frac{2}{3}$ IV. $f'(x)=\frac{-7}{3x-2}$

7. Jeżeli $f(x)=\frac{x^2}{3+x^2}$ to:

I. $f'(x)=\frac{4x^3+6x}{(3+x^2)^2}$ II. $f'(x)=\frac{6x-3x^2}{(3+x^2)^2}$

III. $f'(x)=\frac{6x}{(3+x^2)^2}$ IV. $f'(x)=1$

8. Jeżeli $f(x)=\sqrt{3x+2}$ to:

I. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x+2}}$ II. $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

III. $f\,'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

IV. $f\,'(x)=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{3x+2}}$

9. Jeżeli $f(x)=(4x+3)^5$ to:

I. $f\,'(x)=5(4x+3)^5$

II. $f\,'(x)=4^5$

III. $f\,'(x)=20(4x+3)^4$

IV. $f\,'(x)=5(4x+3)^4$

10. Jeżeli $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$ to:

I. $f\,'(x)=\dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$

II. $f\,'(x)=\dfrac{x^2-x}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$

III. $f\,'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2-x}}$

IV. $f\,'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt[3]{x^2-x}}$

11. Dla jakich wartości *x* pochodna funkcji $f(x)=x^3-3x^2$ ma wartość zero?

I. Nie ma takich *x*

II. Tylko dla $x=0$

III. Tylko dla $x=2$

IV. Dla $x=0$ oraz dla $x=2$

12. Dla jakich wartości *x* pochodna funkcji $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$ ma wartość zero?

I. Nie ma takich *x*

II. Tylko dla $x=1$

III. Tylko dla $x=-1$

IV. Dla $x=1$ oraz dla $x=-1$

13. Dla jakich wartości x pochodna funkcji $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ ma wartość zero?

I. Nie ma takich x

II. Dla $x=0$

III. Dla $x=1$

IV. Dla $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Dla jakich wartości x pochodna funkcji $f(x)=3x^4-2x^3$ przyjmuje wartości ujemne?

I. Dla $x\in(-\infty;\ 0{,}5)$

II. Dla $x\in(-\infty;0)\cup(0;0{,}5)$

III. Dla $x\in(0;0{,}5)$

IV. Dla $x\in(0{,}5;\ \infty)$

15. Dla jakich wartości x pochodna funkcji $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ przyjmuje wartości dodatnie?

I. Dla $x\in(-\infty;\ 0)$

II. Dla $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\ 0)$

III. Dla $x\in(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$

IV. Dla $x\in(0;\ \infty)$

TEST 14

Temat testu: Interpretacja geometryczna pochodnej

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 5, potem w kolejności losowej pytania 6 – 10.

Test

1. Wskaż równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ w punkcie o odciętej równej 1.

I. $y = 0{,}5x$

II. $y = 0{,}5x + 0{,}5$

III. $y = x$

IV. $y = 2x - 1$

2. Wskaż równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 3x$ w punkcie o odciętej równej 2.

I. $y = x$

II. $y = x - 4$

III. $y = 5x$

IV. $y = 5x - 12$

3. Wskaż równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ w punkcie o odciętej równej 0,5.

I. $y = -16x + 12$

II. $y = -16x$

III. $y = 4x$

IV. $y = -8x + 8$

4. Oblicz tangens kąta jaki z osią Ox tworzy styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - x^2 + x$ w punkcie o odciętej równej 2.

I. 10 II. 9 III. 8 IV. 7

5. Oblicz tangens kąta jaki z osią Ox tworzy styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie o odciętej równej $-\frac{1}{2}$.

I. 4 II. 2 III. -4 IV. -2

6. Wyznacz odciętą punktu na wykresie funkcji $f(x) = x^2 - x + 2$ tak, by styczna do wykresu funkcji w tym punkcie miała współczynnik kierunkowy równy 3.

I. 0 II. 1 III. 2 IV. 3

7. Wyznacz odciętą punktu na wykresie funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ tak, by styczna do wykresu funkcji w tym punkcie tworzyła z osią Ox kąt 45^0.

I. $\sqrt{2}$ II. 0,25 III. $2\sqrt{2}$ IV. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Wyznacz odciętą punktu na wykresie funkcji $f(x) = x^3$ tak, by styczna do wykresu funkcji w tym punkcie tworzyła z osią Ox kąt, którego cotangens jest równy 3.

I. są dwa takie punkty, ich odcięte to $x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = \frac{1}{3}$

II. jest jeden taki punkt, jego odcięta to $x = -\frac{1}{3}$

III. jest jeden taki punkt, jego odcięta to $x = \frac{1}{3}$

IV. nie ma takiego punktu

9. Wyznacz odciętą punktu na wykresie funkcji $f(x) = x\sqrt{3} - 4\sqrt{x}$ tak, by styczna do wykresu funkcji w tym punkcie tworzyła z osią Ox kąt, którego cosinus jest równy $-\frac{1}{2}$.

I. są dwa takie punkty, ich odcięte to $x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = \frac{1}{3}$

II. jest jeden taki punkt, jego odcięta to $x = -\frac{1}{3}$

III. jest jeden taki punkt, jego odcięta to $x = \frac{1}{3}$

IV. nie ma takiego punktu

10. Wyznacz odciętą punktu na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ tak, by styczna do wykresu funkcji w tym punkcie była prostopadła do prostej $y = 3x - 1$.

I. $-\frac{1}{6}$ II. $\frac{1}{6}$ III. $\sqrt{3}$ IV. $-\sqrt{3}$

TEST 15

Temat testu: Kombinatoryka. Zliczanie

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 3, potem w kolejności losowej pytania 5 – 6, potem w kolejności losowej pytania 7 – 16.

Test

1. Ile jest 4-elementowych podzbiorów zbioru 7-elementowego?

I. 35 II. 28 III. 4^7 IV. 7^4

2. Ile ciągów 5-wyrazowych można utworzyć z elementów zbioru 8-elementowego?

I. $\binom{8}{5}$ II. $\frac{8!}{3!}$ III. $\frac{8!}{5!}$ IV. 8^5

3. Ile ciągów 4-wyrazowych o różnych wyrazach można utworzyć z elementów zbioru 9-elementowego?

I. $\binom{9}{4}$ II. $\frac{9!}{5!}$ III. $\frac{9!}{4!}$ IV. 9^4

4. Zbiór *n*-elementowy ma 21 podzbiorów 2-elementowych. Ile wynosi *n*?

I. 6 II. 7 III. 8 IV. 9

5. Z elementów zbioru *n*-elementowego można utworzyć 512 ciągów trójwyrazowych. Ile wynosi *n*?

I. 6 II. 7 III. 8 IV. 9

6. Z elementów zbioru *n*-elementowego można utworzyć 72 ciągi dwuwyrazowe o różnych wyrazach. Ile wynosi *n*?

I.	6	II.	7	III.	8	IV.	9

7. Z grupy 6 mężczyzn i 7 kobiet wybieramy delegację pięcioosobową, w skład której wchodzi 2 mężczyzn i 3 kobiety. Na ile sposobów można to uczynić?

I.	525	II.	50	III.	379	IV.	6300

8. Na ile sposobów można 7 osób ustawić w kolejce?

I.	28	II.	49	III.	2520	IV.	5040

9. Wśród 7 osób jest trzech mężczyzn i cztery kobiety. Na ile sposobów można te osoby ustawić w kolejce tak, aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

I.	144	II.	288	III.	2520	IV.	5040

10. Wśród 8 osób jest czterech mężczyzn i cztery kobiety. Na ile sposobów można te osoby ustawić w kolejce tak, by żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

I.	512	II.	1152	III.	2304	IV.	5040

11. W turnieju szachowym każdy zawodnik rozgrywa z każdym innym zawodnikiem jedną partię. Łącznie rozegrano 45 partii. Ilu było zawodników?

I.	8	II.	9	III.	10	IV.	12

12. Ośmiu sportowców ma utworzyć 4 pary do kolejnych ćwiczeń. Na ile sposobów mogą to uczynić?

I.	256	II.	512	III.	2520	IV.	5040

13. Mamy do dyspozycji 4 litery A, 3 litery B oraz 2 litery C. Ile 9-literowych napisów możemy utworzyć?

I.	24	II.	144	III.	512	IV.	1260

14. Mamy do dyspozycji 4 litery A, 3 litery B oraz 2 litery C. Ile możemy utworzyć 9-literowych napisów, które zaczynają i kończą się na tę samą literę?

I. 210 II. 350 III. 420 IV. 700

15. Mamy do dyspozycji 4 litery A, 3 litery B oraz 2 litery C. Ile możemy utworzyć 9-literowych napisów, w których pierwsza litera jest taka sama jak druga, a ostatnia litera jest taka sama jak przedostatnia?

I. 60 II. 80 III. 100 IV. 200

16. Mamy do dyspozycji 4 litery A, 3 litery B oraz 2 litery C. Ile możemy utworzyć 9-literowych napisów, w których litery C występują obok siebie?

I. 100 II. 140 III. 200 IV. 280

TEST 16

Temat testu: Zdarzenia. Pojęcie prawdopodobieństwa

Uwagi:

Najpierw w kolejności losowej pytania 1 – 5, potem w kolejności losowej pytania 6 – 10, potem w kolejności losowej pytania 11 – 16.

Test

1. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, $\overline{\overline{A}} = 25$, $\overline{\overline{B}} = 35$, $\overline{\overline{A \cup B}} = 45$ (symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów zbioru *X* czyli moc zbioru *X*). Jaka jest moc zbioru $A \cap B$?

I. 5 II. 10 III. 15 IV. 20

2. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, $\overline{\overline{A}} = 45$, $\overline{\overline{B}} = 50$, $\overline{\overline{A \setminus B}} = 30$ (symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów zbioru *X* czyli moc zbioru *X*). Jaka jest moc zbioru $B \setminus A$?

I. 5 II. 10 III. 20 IV. 35

3. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu,
$\overline{\overline{A \cap B}} = 10$, $\overline{\overline{A \cup B}} = 55$, $\overline{\overline{A \setminus B}} = 15$ (symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów zbioru X czyli moc zbioru X). Jaka jest moc zbioru $B \setminus A$?

I. 5 II. 30 III. 40 IV. 45

4. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, w którym jest 80 zdarzeń elementarnych, $\overline{\overline{A' \cup B'}} = 65$, $\overline{\overline{A}} = 60$ (symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów zbioru X czyli moc zbioru X). Jaka jest moc zbioru $A \setminus B$?

I. 5 II. 15 III. 20 IV. 45

5. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, w którym jest 90 zdarzeń elementarnych, $\overline{\overline{A' \cap B'}} = 60$, $\overline{\overline{A}} = 15$, $\overline{\overline{B}} = 25$ (symbol $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów zbioru X czyli moc zbioru X). Jaka jest moc zbioru $A \cap B$?

I. 5 II. 10 III. 15 IV. 20

6. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu,
$P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$, $P(A \cup B) = 0{,}9$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$?

I. 0,5 II. 0,4 III. 0,3 IV. 0,2

7. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, $P(A \setminus B) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$, zaś suma prawdopodobieństw zdarzeń A, B jest równa 1. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia $B \setminus A$?

I. 0,4 II. 0,3 III. 0,2 IV. 0,1

8. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu,
$P(A') = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}9$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia B?

I. 0,5 II. 0,6 III. 0,7 IV. 0,8

9. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, przy czym z zajścia zdarzenia A wynika zajście zdarzenia B, $P(A)=0{,}2$, $P(B')=0{,}3$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia $B\setminus A$?

I. 0,8 II. 0,7 III. 0,6 IV. 0,5

10. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu, przy czym są to zdarzenia rozłączne, $P(A')=0{,}8$, $P(A\cup B)=0{,}6$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia B?

I. 0,6 II. 0,5 III. 0,4 IV. 0,2

11. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: Jeżeli $A\subset B$, to $P(A')\geq P(B')$

Z2: Jeżeli $A\subset B$, to $P(A\setminus B)=P(A)-P(B)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

12. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: Jeżeli $A\cap B=\emptyset$, to $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Z2: Jeżeli $A\cap B=\emptyset$, to $P(A'\cap B')=1-P(A)-P(B)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

13. A i B są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: Jeżeli $A\subset B$, to $P(A\cup B)=P(B)$

Z2: Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A' \cup B') = 1$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

14. *A* i *B* są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: Jeżeli $A \cup B = \Omega$, to $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$

Z2: Jeżeli $A \cup B = \Omega$, to $P(A) + P(B) = 1 + P(A \cap B)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

15. *A* i *B* są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: Jeżeli $A \subset B$, to $P(A \cap B) = P(A)$

Z2: Jeżeli $A \subset B$, to $P(B \setminus A) \geq P(A)$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

16. *A* i *B* są zdarzeniami losowymi w pewnym doświadczeniu. Oceń wartości logiczne zdań:

Z1: Jeżeli $P(A) + P(B) > 1$, to $A \cup B = \Omega$

Z2: Jeżeli $A \cup B = \Omega$, to $P(A) + P(B) = 1$

I. Oba zdania są prawdziwe.

II. Zdanie Z1 jest prawdziwe, zaś zdanie Z2 jest fałszywe.

III. Zdanie Z2 jest prawdziwe, zaś zdanie Z1 jest fałszywe.

IV. Oba zdania są fałszywe.

TEST 17

Temat testu: Zastosowanie kombinatoryki do obliczania prawdopodobieństw

Uwagi:

Kolejność pytań - losowa.

Test

1. Rzucamy 5 razy kostką. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie 2 razy?

I. $\dfrac{\binom{5}{2}}{6^5}$ II. $\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 3}{6^5}$ III. $\dfrac{10 \cdot 5^3}{6^5}$ IV. $\dfrac{5^3}{6^5}$

2. Rzucamy 3 razy kostką. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie uzyskamy inny wynik?

I. $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$ II. $\dfrac{3^3}{6^3}$ III. $\dfrac{\binom{6}{3} \cdot 3!}{6^3}$ IV. $\dfrac{\binom{6}{3}}{6^3}$

3. Z talii 24 kart (asy, króle, damy, walety, dziesiątki i dziewiątki – każda wartość w czterech kolorach) pobieramy losowo 5 kart. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wszystkie karty będą tego samego koloru?

I. $\dfrac{\binom{6}{5}}{\binom{24}{5}}$ II. $\dfrac{4 \cdot \binom{6}{5}}{\binom{24}{5}}$ III. $\dfrac{5!}{\binom{24}{5}}$ IV. $\dfrac{4}{\binom{24}{5}}$

4. Z talii 24 kart (asy, króle, damy, walety, dziesiątki i dziewiątki – każda wartość w czterech kolorach) pobieramy losowo 5 kart. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wylosujemy trójkę z parą (np. 3 króle i 2 damy)?

I. $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{24}{5}}$ II. $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4^2}{\binom{24}{5}}$

III. $\dfrac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{24}{5}}$ IV. $\dfrac{\binom{4}{2} \cdot 4^2}{\binom{24}{5}}$

5. Z talii 24 kart (asy, króle, damy, walety, dziesiątki i dziewiątki – każda wartość w czterech kolorach) pobieramy losowo 5 kart. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wylosujemy dwie pary (np. 2 króle, 2 damy i asa)?

I. $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{24}{5}}$ II. $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 16}{\binom{24}{5}}$

III. $\dfrac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{24}{5}}$ IV. $\dfrac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 16}{\binom{24}{5}}$

6. Z talii 24 kart (asy, króle, damy, walety, dziesiątki i dziewiątki – każda wartość w czterech kolorach) pobieramy losowo 5 kart. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart będą cztery karty jednakowej wartości (np.4 króle)?

I. $\dfrac{6 \cdot 20}{\binom{24}{5}}$ II. $\dfrac{6 \cdot 4 \cdot 20}{\binom{24}{5}}$ III. $\dfrac{6 \cdot 4}{\binom{24}{5}}$ IV. $\dfrac{6}{\binom{24}{5}}$

7. W urnie jest 5 kul białych, 3 czarne i 4 zielone. Pobieramy losowo 5 kul. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul będą 2 białe, 1 czarna i 2 zielone?

I. $\dfrac{5\cdot 3\cdot 4}{\binom{12}{5}}$ II. $\dfrac{5^2\cdot 3^1\cdot 4^2}{\binom{12}{5}}$

III. $\dfrac{\binom{5}{2}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}}{\binom{12}{5}}$ IV. $\dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{12}{5}}$

8. W urnie jest 5 kul białych, 3 czarne i 4 zielone. Pobieramy losowo 3 kule. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kule będą tego samego koloru?

I. $\dfrac{5\cdot 3\cdot 4}{\binom{12}{3}}$ II. $\dfrac{5^3+3^3+4^3}{\binom{12}{3}}$

III. $\dfrac{\binom{5}{3}+\binom{3}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$ IV. $\dfrac{\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$

9. Tworzymy losowo listę 10 osób, wśród których są osoby X i Y. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że osoby X i Y znajdą się na liście obok siebie?

I. $\dfrac{9\cdot 8!}{10!}$ II. $\dfrac{2+9!}{10!}$ III. $\dfrac{2\cdot 8!}{10!}$ IV. $\dfrac{2\cdot 9\cdot 8!}{10!}$

10. 12 osób, wśród których są osoby X i Y, dzielimy losowo na dwie grupy sześcioosobowe. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że osoby X i Y znajdą się w tej samej grupie?

I. $\dfrac{2\cdot\binom{10}{4}}{\binom{12}{6}}$ II. $\dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{4}\cdot 2}{\binom{12}{6}}$

III. $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{4}}{\binom{12}{6}}$ IV. $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{12}{6}}$

11. W urnie jest 5 kul białych, 3 czarne i 4 zielone. Pobieramy losowo 3 kule. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych nie będzie kuli białej?

I. $1-\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}$ II. $\frac{7^3}{12^3}$ III. $\frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}$ IV. $\frac{7}{\binom{12}{3}}$

12. Rzucamy 6 razy monetą. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wypadną co najwyżej 2 orły?

I. $\frac{3}{7}$ II. $\frac{1+6+15}{2^6}$ III. $\frac{15}{2^6}$ IV. $\frac{2^0+2^2+2^2}{2^6}$

TEST 18

Temat testu: Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Uwagi:

Wszystkie pytania w kolejności losowej.

Test

1. Rzucamy 2 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek jest większa niż 9 jeżeli wiadomo, że w obu rzutach wypadła parzysta liczba oczek?

I. $\frac{1}{6}$ II. $\frac{1}{3}$ III. $\frac{1}{4}$ IV. $\frac{1}{12}$

2. Rzucamy 2 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadła przynajmniej jedna szóstka jeżeli wiadomo, że suma oczek jest parzysta?

I. $\frac{1}{2}$ II. $\frac{11}{36}$ III. $\frac{5}{36}$ IV. $\frac{5}{18}$

3. Z talii 24 kart (asy, króle, damy, walety, dziesiątki i dziewiątki – każda wartość w czterech kolorach) pobieramy losowo 3 karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie karty są tego samego koloru jeżeli wiadomo, że wśród wylosowanych kart nie ma żadnego asa?

I. $\dfrac{4\cdot\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}$ II. $\dfrac{4\cdot\binom{6}{3}}{\binom{20}{3}}$ III. $\dfrac{4\cdot\binom{5}{3}}{\binom{24}{3}}$ IV. $\dfrac{4\cdot\binom{6}{3}}{\binom{24}{3}}$

4. W urnie jest 5 kul białych, 4 czarne i 3 zielone. Pobieramy losowo 3 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul są dokładnie dwie kule białe, jeżeli wiadomo, że wśród wylosowanych kul nie ma kuli zielonej?

I. $\dfrac{\binom{5}{2}+\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}$ II. $\dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}$

III. $\dfrac{\binom{5}{2}+\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}$ IV. $\dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}$

5. Rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, to rzucamy jeden raz kostką, a jeżeli wypadnie reszka, to rzucamy dwa razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz na kostce pojawi się 6 oczek?

I. $\frac{17}{36}$ II. $\frac{7}{36}$ III. $\frac{7}{72}$ IV. $\frac{17}{72}$

6. Rzucamy kostką a następnie rzucamy monetą tyle razy ile oczek wypadło na kostce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że we wszystkich rzutach monetą wypadł ten sam wynik?

I. $\frac{21}{64}$ II. $\frac{1}{64}$ III. $\frac{15}{64}$ IV. $\frac{3}{32}$

7. W urnie I są 3 kule białe i 4 czarne, zaś w urnie II jest 5 kul białych i 2 czarne. Rzucamy kostką. Jeżeli wypadnie 6 oczek, to losujemy jedną kulę z urny I, a w innym przypadku losujemy jedną kulę z urny II. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

I. $\frac{5}{7}$ II. $\frac{4}{7}$ III. $\frac{2}{3}$ IV. $\frac{1}{3}$

8. W urnie I są 3 kule białe i 4 czarne, zaś w urnie II jest 5 kul białych i 2 czarne. Z urny I do urny II przekładamy losowo jedną kulę po czym z urny II losujemy 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów z urny II?

I. $\frac{30}{49}$ II. $\frac{18}{49}$ III. $\frac{24}{49}$ IV. $\frac{22}{49}$

9. W urnie I są 3 kule białe i 4 czarne, zaś w urnie II jest 5 kul białych i 2 czarne. Z urny I do urny II przekładamy losowo dwie kulę po czym z urny II losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z urny II?

I. $\frac{22}{63}$ II. $\frac{11}{63}$ III. $\frac{3}{21}$ IV. $\frac{3}{7}$

10. W urnie są 3 losy za które przysługuje nagroda, 5 losów pustych i 2 losy uprawniające do kolejnego bezpłatnego losowania. Kupujemy jeden los. Jakie jest prawdopodobieństwo że wygramy nagrodę?

I. $\frac{1}{3}$ II. $\frac{1}{4}$ III. $\frac{5}{16}$ IV. $\frac{3}{8}$

ODPOWIEDZI :

TEST 1 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	IV	III	II	I	I	I	I	I

Pytanie	9	10	11	12	13	14	15	16
Poprawna odpowiedź	II	III	III	III	II	II	III	III

TEST 2 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	III	II	I	II	IV	III	II	I

Pytanie	9	10	11	12	13	14	15	16
Poprawna odpowiedź	IV	III	IV	I	III	II	IV	III

TEST 3 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	II	III	I	IV	III	I	III	IV

Pytanie	9	10	11	12	13	14	15	16
Poprawna odpowiedź	II	III	III	IV	I	I	III	I

TEST 4 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	d
2	d
3	c
4	a
5	c
6	b
7	a
8	b
9	d
10	b
11	a
12	c
13	c
14	a

TEST 5 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	b
2	b
3	d
4	a
5	d
6	a
7	c
8	c
9	c
10	a

TEST 6 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	b
2	c
3	c
4	a
5	b
6	d
7	a
8	d
9	c
10	b

TEST 7 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	c
2	b
3	a
4	b
5	d
6	d
7	c
8	b
9	d
10	a

TEST 8 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	a
2	a
3	c
4	c
5	b
6	d
7	b
8	a
9	d
10	c
11	b
12	d

TEST 9 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	b
2	d
3	c
4	b
5	a
6	c
7	a
8	b
9	d
10	a

TEST 10 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	b
2	d
3	d
4	c
5	a
6	c
7	c
8	a
9	b
10	a

TEST 11 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	Poprawna odpowiedź
1	b
2	d
3	b
4	c
5	b
6	c
7	d
8	c
9	a
10	c

TEST 12 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poprawna odpowiedź	III	II	I	IV	I	III	I	IV	III	II

TEST 13 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	II	I	III	II	IV	I	III	II

Pytanie	9	10	11	12	13	14	15
Poprawna odpowiedź	III	I	IV	IV	I	II	III

TEST 14 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poprawna odpowiedź	II	II	I	II	III	III	II	I	III	I

TEST 15 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	I	IV	II	II	III	IV	I	IV

Pytanie	9	10	11	12	13	14	15	16
Poprawna odpowiedź	I	II	III	III	IV	II	III	IV

TEST 16 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	III	IV	II	IV	II	I	I	II

Pytanie	9	10	11	12	13	14	15	16
Poprawna odpowiedź	IV	III	II	III	I	III	II	IV

TEST 17 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Poprawna odpowiedź	III	I	II	I	IV	I	IV	III

Pytanie	9	10	11	12
Poprawna odpowiedź	IV	I	III	II

TEST 18 Poprawne odpowiedzi:

Pytanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poprawna odpowiedź	II	IV	I	IV	IV	I	III	III	I	IV