Zintegrowany program nauczania matematyki, fizyki oraz informatyki - nowe wyzwanie w edukacji

materiały metodyczne

matematyka, fizyka, informatyka

poziom rozszerzony

IV etap edukacyjny

Projekt „Zintegrowany program nauczania matematyki, fizyki oraz informatyki – nowe wyzwanie w edukacji"
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „…nowe wyzwanie w edukacji"
tel. 52 567-07-80, www.nwe.byd.pl, nwe@byd.pl
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
Człowiek – najlepsza inwestycja!

Spis treści

I.	Wstęp	3
II.	Sugestie ogólne – pozwólmy uczniom pytać!	5
III.	Matematyka	11
III.1	Szczegółowy rozkład materiału	11
III.2	Materiały uzupełniające	20
III.3	Praca w grupie	57
III.4	Łamigłówki i ćwiczenia umysłowe	60
III.5	Polecane teksty popularnonaukowe	70
IV.	Fizyka	74
IV.1	Szczegółowy rozkład materiału	74
IV.2	Materiały uzupełniające	80
IV.3	Wykorzystanie wideopomiarów	84
IV.4	Polecane teksty popularnonaukowe	89
V.	Informatyka	92
V.1	Szczegółowy rozkład materiału	92
V.2	Materiały uzupełniające	99
V.3	Kod kreskowy – scenariusz lekcji	101
V.4	Polecane teksty popularnonaukowe	102
VI.	Nauczanie komplementarne	104
VI.1	Podstawowe funkcjonalności platformy Moodle	104
VI.2	Wybrane metody aktywizacji uczniów w nauczaniu zdalnym	114
VII.	Nauczanie metodą projektów	117
VII.1	Przykładowy projekt badawczy	120
VII.2	Przykładowe tematy projektów	121
VII.3	Arkusz samooceny ucznia	122
VII.4	Przykładowa karta projektu, zadania i ewaluacji	123

Wstęp

Większość nauczycieli traci czas na zadawanie pytań,
które mają ujawnić to, czego uczeń nie umie,
podczas gdy nauczyciel z prawdziwego zdarzenia stara się
za pomocą pytań ujawnić to, co uczeń umie lub czego jest zdolny się nauczyć.

Albert Einstein

Prezentowane w niniejszym opracowaniu materiały metodyczne mają różnoraki charakter i formę. Mają wesprzeć nauczyciela w codziennej pracy, a przede wszystkim pomóc mu zaktywizować uczniów na lekcjach matematyki, fizyki i informatyki. Stąd też w opracowaniu nauczyciel znajdzie poza bazą zadań typu konkursowego, pomysły na pracę w grupie oraz gotowe materiały do przeprowadzenia minikonkursów w postaci łamigłówek logicznych i matematycznych. Proponowane zadania są dobrym narzędziem do indywidualizacji procesu nauczania, stanowią świetną propozycję do samodzielnej pracy dla uczniów szczególnie uzdolnionych, którzy szybciej opanowali materiał na lekcji. Indywidualna praca ucznia z dodatkowym materiałem ma za zadanie zaciekawić ucznia osiągnięciami nauki w zakresie nauk ścisłych poprzez samodzielne odkrywanie. To dobry pomysł na pogłębienie wiadomości. Wiele zadań jest w typie łamigłówek – uczniowie mogą eksperymentować, sprawdzać różne możliwości, przeprowadzać rozumowania, wyciągać wnioski korzystając z poznanych wiadomości i przy okazji dobrze się bawić. Wybór zadań na zajęcia oraz ich liczba zależy od uznania nauczyciela. Podobnie sposób i metody pracy. Najlepiej jednak, aby zaczynać od zadań łatwiejszych i dopuszczać pracę wspólną. Można np. podzielić uczniów na zespoły, posadzić przy oddzielnych stolikach i na każdym z nich położyć treści wybranych kilku (kilkunastu zadań). Kilkanaście ostatnich minut trzeba wówczas przeznaczyć na wspólne omówienie pracy każdego z zespołów. Niezwykle ważne jest, aby uczniowie przeprowadzali rozumowania. Trzeba stale zwracać uwagę, jak uczniowie rozumują, a czasami prosić ich aby zapisywali tok swojego myślenia. Warto pamiętać, że odpowiedź nie powinna być jedynie wynikiem obliczeń, ale przeprowadzonego rozumowania. Innymi słowy, stale trzeba pytać „dlaczego” i domagać się wyjaśnień. Jest to jedno z ważniejszych zadań nauczyciela w trakcie zajęć. Proponowanych zadań jest dość dużo i z pewnością nie wszystkie uczniowie zdążą rozwiązać na zajęciach. Znaczna część zadań jest opatrzona rozwiązaniami lub odpowiedziami. Jeśli w trakcie pracy uczniowie zetkną się np. z twierdzeniem o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, to dobrze jest uświadomić im, że jest to reguła, zilustrować ją i uzasadnić na kilku przykładach. Nie należy jednak podawać twierdzenia do nauczenia się i zapamiętania. Uczeń musi zrozumieć, a nie tylko nauczyć się.

Pierwszy tekst w niniejszym opracowaniu poświęcony jest zasygnalizowanym już zasadom dobrej pracy z uczniem, potrzebnie stawiania pytań, rozumowania i refleksji.

Kolejny rozdział zawiera wskazówki dotyczące pracy on-line z wykorzystaniem platformy zdalnego nauczania opartej o środowisko Moodle. Znalazły się tam zarówno kwestie techniczne i porady pedagogiczne, służące aktywizacji uczniów.

Kolejna część tekstu zawiera szczegółowy rozkład materiału korespondujący ze zintegrowanym programem nauczania matematyki, fizyki i informatyki. W osobnych podrozdziałach dotyczących każdego z przedmiotów znalazły się także pomysły na urozmaicenie zajęć.

Na końcu opracowania opisana została praca metodą projektów oraz przedstawiono przykładowy projekt do zrealizowania przez uczniów. Jego szczególną cechą jest interdyscyplinarność – w realizacji trzeba wykorzystać aparat matematyczny, wiedzę fizyczną i narzędzia informatyczne.

Życzymy wielu udanych zajęć!

Autorzy

Sugestie ogólne – pozwólmy uczniom pytać!

Wykształcenie w uczniach zdolności myślenia w sposób matematyczny można określić jako swoisty cel nadrzędny całej edukacji matematycznej na wszystkich kolejnych etapach, niezależnie od późniejszego wyboru przez nich zawodu czy też kierunku studiów. Czym jest myślenie matematyczne? Autorzy badania PISA (*Programme for International Student Assessment*) prowadzonego pod auspicjami OECD definiują je jako indywidualną zdolność do:

- rozpoznania i zrozumienia roli matematyki we współczesnym świecie,
- formułowania osądów opartych na logicznym, matematycznym rozumowaniu,
- wykorzystywania umiejętności matematycznych, jeżeli wymaga tego sytuacja życia codziennego.

Znacznie szerszą i bogatszą definicję podaje Morgen Niss, który w tekście „Quantitative Literacy and Mathematical Competencies" wymienia myślenie matematyczne jako jedną z ośmiu umiejętności wchodzących w skład tzw. kompetencji matematycznych. Jego zdaniem (Niss, 2003, tłumaczenie M. Legutko i S. Turnau) na myślenie matematyczne składają się takie umiejętności jak:

- stawianie charakterystycznych dla matematyki pytań oraz wiedza, jakiego rodzaju odpowiedzi można oczekiwać,
- rozszerzanie zakresu pojęcia poprzez uabstrakcyjnianie niektórych jego własności i uogólnianie wyników dla szerszych klas przedmiotów,
- odróżnianie różnych rodzajów zdań matematycznych (włącznie z wypowiedziami implikacyjnymi (jeśli-to), zdaniami z kwantyfikatorami, założeniami, definicjami, twierdzeniami, przypuszczeniami (hipotezami i szczególnymi przypadkami),
- operowanie danym pojęciem przy rozumieniu jego zakresu i jego ograniczeń.

Bazując na powyższej definicji należy zatem zauważyć, że myślenie matematyczne jest nie tylko wykorzystywane, ale i „kreowane", na lekcjach innych niż matematyka (na fizyce i informatyce w szczególności!).

Można teraz zapytać – czy polscy uczniowie posiadają zdolność myślenia matematycznego? Z pewnością nie jesteśmy w tym względzie najgorsi, ale też do najlepszych sporo nam brakuje, co potwierdzają tworzone cyklicznie raporty edukacyjne, w tym wspominane badania PISA.

Chociaż w ogólnym rozrachunku wynik Polski jest przeciętny, to obawy może budzić statystyka mówiąca o uczniach, którzy z myśleniem matematycznym nie radzą sobie w ogóle (najniższe poziomy myślenia matematycznego odnotowane w badaniu). Dotykamy tutaj zjawiska znanego w literaturze jako analfabetyzm matematyczny. John Allen Paulos w książce „Innumeracy – Matematyczna ignorancja i jej konsekwencje w dobie współczesnej technologii" (CeDeWu, 2012) definiuje je jako „niezdolność do swobodnego operowania zagadnieniami związanymi z liczbami i prawdopodobieństwem". Zaznacza przy tym, że często „dotyka ono ludzi skądinąd całkiem dobrze wykształcanych", którzy „bez zmrużenia oka przyjmują największe niedorzeczności, jeżeli dotyczą liczb". Nietrudno znaleźć przykłady z polskiej rzeczywistości potwierdzające występowanie tego zjawiska. W książce „Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej" (WSiP, 2005) Dorota Klus-Stańska i Marzenna Nowicka opisują badania przeprowadzone wśród studentów kierunku humanistycznego. W zadaniu sprowadzającym się do obliczenia pola prostokąta przy danych długościach obu boków, jedna z badanych osób stwierdziła, że „nie pamięta wzoru". Autorki stawiają pytanie: „co zrobiono tej studentce przez kilkanaście lat kształcenia matematycznego, że mogło jej przyjść do głowy, iż trzeba znać i pamiętać wzór na obwód prostokąta"?

Należy zatem zadać pytanie: co jeszcze my, nauczyciele, możemy zrobić, aby nasi uczniowie potrafili lepiej radzić sobie z myśleniem matematycznymi? Wiadomo, że nie od nas wszystko zależy. Funkcjonujemy w określonych realiach i musimy się podporządkować pewnym zasadom, mając na uwadze chociażby wyniki uczniów podczas egzaminu maturalnego. Jako autorzy niniejszego zintegrowanego programu nauczania chcemy zwrócić uwagę na istotną kwestię, która jest oczekiwaną wartością dodaną wykorzystania naszej pracy: więcej czasu i większe możliwości. Po pierwsze, w programie zintegrowanym nie trzeba się obawiać o brak korelacji treści („czy na innym przedmiocie już to było czy też będzie trzeba wprowadzić?") i można skupić się na swoich działaniach. Ponadto, dzięki aplikacjom multimedialnym do minimum można ograniczyć chociażby sporządzanie skomplikowanych rysunków na tablicy, ponieważ dzięki użyciu tabletów będzie to znacznie szybsze i prostsze. W końcu, zalecane zadania projektowe, łączące materiał z matematyki, fizyki i informatyki, opisywane w dalszej części niniejszych materiałów, pozwolą uczniom spojrzeć na wiedzę całościowo, bez barier wynikających z nazewnictwa poszczególnych przedmiotów.

Co więc warto wiedzieć o rozwoju myślenia matematycznego uczniów? John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey w książce „Matematyczne myślenie" (WSiP, 2005) sformułowali założenia dotyczące myślenia matematycznego. Najważniejsze z nich, odnoszące się do edukacyjnej praktyki, brzmią:

I. Matematyczne myślenie można usprawnić dzięki praktyce połączonej z refleksją.
II. Matematyczne myślenie prowokują sprzeczności, napięcia i niespodzianki.
III. Matematycznemu myśleniu sprzyja atmosfera swobodnego zadania pytań, rzucania wyzwań i refleksji.

Opierając się na powyższych założeniach można wypunktować słowa klucze, którymi będą: pytania i refleksja. Sądzimy, że właśnie na sztukę zadawania poprawnych pytań oraz refleksję „w działaniu" i „nad działaniem" warto poświęcić więcej zaoszczędzonego czasu podczas pracy z naszym zintegrowanym programem nauczania.

Poprawna analiza treści zadań matematycznych oraz jej znaczenie dla efektów nauczania i uczenia się matematyki jest w literaturze dobrze opisana. Ciężko oczekiwać, aby niezrozumienie treści zadania, struktury rozwiązywanego problemu i wykonanie go „mechanicznie" zaowocowało rozwojem myślenia matematycznego. Znakomity matematyk i dydaktyk matematyki George Polya stwierdził w swojej legendarnej książce „Jak to rozwiązać?" (PWN, 2009), że „niemądrze jest odpowiadać na pytanie, którego nie zrozumieliśmy". Co za tym idzie – aby w pełni przeanalizować problem, z którym się mierzymy należy potrafić zadać właściwe pytania.

Z naszego, nauczycielskiego punktu widzenia pytania uczniów pełnią ważną funkcję diagnostyczną, pozwalają nam poznać tok myślenia uczniów i zorientować się, na co ewentualnie musimy położyć większy nacisk w nauczaniu.

Z kolei z punktu widzenia ucznia w nauczaniu i uczeniu się matematyki pytania mogą być równie ważne, co odpowiedzi. Pomijanie tego etapu może zaowocować poważnymi problemami z analizą zadań i w konsekwencji może prowadzić do nieporadności uczniów w radzeniu sobie z problemami wymagającymi analitycznego myślenia oraz do rozwiązywania zadań w sposób mechaniczny, bezrefleksyjnie (można sądzić, że właśnie to było przyczyną matematycznych kłopotów studentki, która nie pamiętała wzoru na obwód prostokąta!).

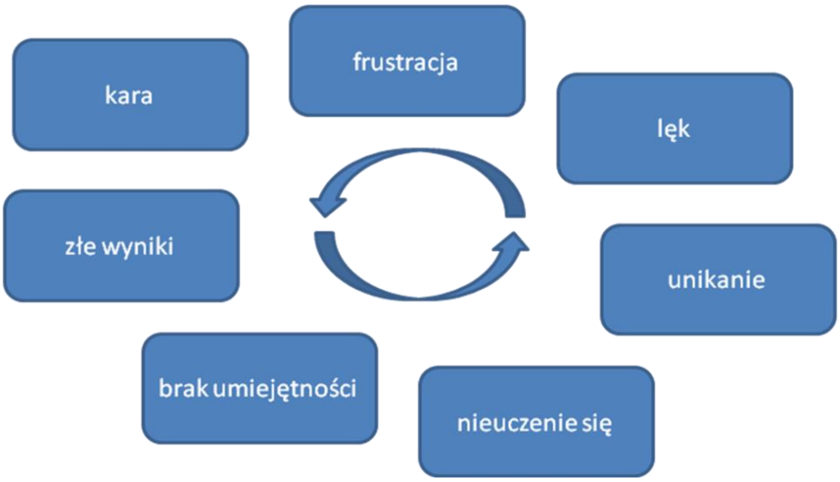
Kolejnym słowem kluczem na mapie prowadzącej do wykształcenia myślenia matematycznego jest refleksja „w działaniu" i „nad działaniem". Jak stwierdzają wspomniani już J. Mason, K. Stacey i L. Burton: „wbrew utartemu powiedzeniu wcale nie uczymy się na podstawie doświadczenia – warunkiem koniecznym jest refleksja nad tym, co zrobiliśmy". W celu rozwinięcia myślenia matematycznego wspomniani autorzy postulują stosowanie metody, którą zawierają w słowach „praktyka połączona z refleksją".

Tym samym warto podkreślić za Manfredem Spitzerem, autorem książki „Jak się uczy mózg?" (PWN, 2008), że to „właśnie na lekcjach matematyki jest szczególnie ważne, by odejść od *przerabiania materiału* i wciąż na nowo mierzyć się z wyzwaniem, aby pokazać uczniom na czym polega matematyczne podejście do problemu". W podobnym tonie, w książce „Kultura edukacji" (Universitas, 2006) pisze Jerome Bruner: „efektem spotkań edukacyjnych powinno być przede wszystkim rozumienie, a nie samo wykonanie".

Gdy element refleksji zostanie zminimalizowany kosztem nieustannej praktyki, uzyskujemy niebezpieczną proporcję. Jerzy Nowik, autor książki „Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej" (NOWIK, 2011), stwierdza, że „badania wskazują, że wielokrotne powtarzanie czynności prowadzi do jej automatycznego wykonywania, co utrudnia jej myślowe ujęcie. Im wcześniej jakaś czynność jest zautomatyzowana tym mniejszy udział świadomości". Warto systematycznie zastanawiać się, czy uczniowie dostrzegają sens podejmowanych takich, a nie innych działań? Czy znają inne sposoby poradzenia sobie z problemem, o ile takie istnieją? Jeżeli tak, to czy wiedzą, jakie kryteria zadecydowały o wyborze metody działania? Jaki jest szerszy kontekst wykonywanych obliczeń? Przemyślenie odpowiedzi na te pytania jest warunkiem koniecznym, aby poznane metody można było zaaplikować w sytuacji nowej, nieszablonowej, często pozornie oderwanej od matematyki. Refleksja „w” i „nad” matematycznym działaniem jest niezbędna dla rozwoju myślenia matematycznego. Posługując się słowami Ewy Filipiak, zawartymi w książce „Rozwijanie zdolności uczenia się” (GWP, 2012) – „refleksja jest poczuciem sensu wykonywanych działań”.

Konsekwencje tego poczucia „braku sensu” i niechęci do nauki przedmiotów ścisłych, wynikającej często z uczniowskiej niemocy i bezradności, doskonale znamy. Warto jednak pamiętać, że samo napotykanie trudności nie jest zjawiskiem negatywnym.

Jest ono przecież niejako wpisane w nauczanie przedmiotów ścisłych i stanowi jeden z jego najbardziej wychowawczych elementów. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska w tekście „Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?” (IWZZ, 1989) stwierdza słusznie, że „pokonywanie trudności jest wpisane w proces uczenia się matematyki. Problem jednak w tym, że dostrzeżenie trudności zawartej w zadaniu wywołuje zawsze wzrost napięcia i emocji ujemnych” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989).



Schemat 2: Błędne koło w nauczaniu matematyki

Źródło: Butterworth B. (1999), What Counts: How Every Brain is Hardwired for Math, Nowy Jork: Free Press

Właśnie na tym etapie niezwykle ważna jest wspierająca rola nauczyciela, który może uchronić ucznia przed zrobieniem pierwszego kroku w tzw. błędne koło uczenia się.

Na zakończenie warto przytoczyć słowa mistrza psychologii. Pisząc o trudnościach w matematyce, wspomniany już Jerome Bruner w książce „ O poznawaniu" (PIW, 1971) przyrównywał zadania matematyczne do łamigłówek. „Łamigłówka raz zrozumiana okazuje się prosta w sposób tak oczywisty, że, jak to kiedyś z desperacją powiedział Bertrand Russell, jest rzeczą zdumiewającą, iż ktokolwiek może mieć w ogóle jakiekolwiek trudności z matematyką". Należy jednak pamiętać, że warunkiem, aby matematyczne łamigłówki stały się proste jest jednak refleksja, której fundamentem są stawiane pytania. W kontekście tej wypowiedzi jeszcze więcej przekonywującej wyrazistości zyskuje cytowane uprzednio stwierdzenie autorów „Myślenia matematycznego", że warunkiem koniecznym efektywnego uczenia się matematyki jest refleksja nad tym, co czynimy. Ten rodzaj refleksji jest gwarantem inspirującego poczucia sensu wykonywanych działań.

Literatura

Bruner J.S. (2006), Kultura Edukacji, Wydawnictwo Universitas, Kraków

Bruner J.S. (1971), O poznawaniu, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa

Butterworth B. (1999), What Counts: How Every Brain is Hardwired for Math, Nowy Jork: Free Press

Filipiak E. (2012), Rozwijanie zdolności uczenia się – z Wygotskim i Brunerem w tle, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Bydgoszcz 2012

Gruszczyk-Kolczyńska E. (1989), Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?, Wydawnictwo IWZZ, Warszawa

Haman J. i in. (2009), Wyniki badania PISA 2009 w Polsce, Ministerstwo Edukacji Narodowej, Warszawa

Klus-Stańska D, Nowicka M. (2005), Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa

Mason J., Burton L., Stacey K., (2005) Matematyczne myślenie, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa

Niss M. (2003), Quantitative Literacy and Mathematical Competencies, NCED, Princeton

Nowik J. (2011), Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej, Wydawnictwo Nowik, Opole

Paulos J.A. (2012), Innumeracy – matematyczna ignorancja i jej konsekwencje w dobie współczesnej technologii", Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa

Polya G. (2009), Jak to rozwiązać?, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa

Spitzer M. (2008), Jak się uczy mózg?, Wydawnictwo PWN, Warszawa

Matematyka

Szczegółowy rozkład materiału

KLASA I 4 godziny tygodniowo - 140 godzin (realnie 35 tygodni po 4 godziny = 140 godzin)				
Lp.	**Tytuł modułu**	**Temat lekcji**	**Liczba lekcji**	**Korelacje**
Liczby rzeczywiste (33godz.)				
1.	Liczby rzeczywiste	1. Wprowadzenie do działu.	1	
		2. Różne sposoby przedstawiania liczb rzeczywistych.	1	MAT→INF
		3.Prawa działań na liczbach.	1	
		4-5. Obliczanie wartości wyrażeń algebraicznych.	2	MAT→FIZ
2.	Pierwiastki	6. Pierwiastek dowolnego stopnia.	1	INF→MAT
		7. Prawa działań na pierwiastkach.	1	
		8. Obliczenia na pierwiastkach.	1	
3.	Potęgi	9. Potęga o wykładniku całkowitym.	1	
		10. Potęga o wykładniku wymiernym.	1	
		11. Prawa działań na potęgach.	1	
		12-13. Obliczenia na potęgach.	2	
		14. Notacja wykładnicza.	1	MAT→FIZ, MAT→INF
		15. Wykorzystanie własności potęg w innych dziedzinach wiedzy.	1	MAT→FIZ, MAT→INF
4.	Przybliżenia	16. Dokładność przybliżenia.	1	MAT→FIZ
		17. Błąd względny i błąd bezwzględny przybliżenia.	1	MAT→FIZ
		18. Zastosowanie przybliżeń.	1	MAT→FIZ
5.	Przedziały liczbowe	19. Pojęcie przedziału liczbowego.	1	
		20. Zaznaczanie przedziałów na osi liczbowej.	1	
6.	Procenty	21-22. Obliczenia procentowe.	2	
		23. Podatki i procenty.	1	INF→MAT
7.	Logarytmy	24. Pojęcie logarytmu.	1	MAT→FIZ
		25. Podstawowe własności logarytmów: logarytm iloczynu, ilorazu, logarytm potęgi.	1	
		26-27. Działania na logarytmach.	2	MAT→FIZ
8.	Podsumowanie	28-29. Zadania na zastosowania.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		30-31. Powtórzenie wiadomości.	2	
		32. Praca klasowa.	1	
		33. Omówienie pracy klasowej.	1	
Funkcja i jej własności (15 godz.)				
1.	Określenie funkcji	1. Wprowadzenie do działu.	1	
		2. Pojęcie funkcji.	1	
		3. Różne sposoby opisywania.	1	
		4. Przykłady różnych funkcji.	1	
		5. Rysowanie wykresów funkcji.	1	INF→MAT

2.	Własności funkcji	6. Obliczanie wartości funkcji dla danego argumentu i obliczanie argumentu dla danej wartości.	1	
		7. Wartości funkcji, miejsca zerowe i monotoniczność funkcji	1	
		8. Największa i najmniejsza wartość funkcji.	1	
		9-10. Odczytywanie własności funkcji z wykresu	2	
3.	Podsumowanie	11-12. Zadania na zastosowania.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		13. Powtórzenie wiadomości.	1	
		14. Praca klasowa.	1	
		15. Omówienie pracy klasowej.	1	
Funkcja liniowa (26 godz.)				
1.	Wzór funkcji liniowej	1. Proporcjonalność prosta	1	
		2-3. Funkcja liniowa i jej własności.	2	
		4-5. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej.	2	
2.	Wykresy funkcji liniowej	6. Równoległość i prostopadłość prostych.	1	
		7. Funkcja przedziałami liniowa.	1	INF→MAT
		8. Zastosowania funkcji liniowej.	1	MAT→FIZ
3.	Równania liniowe	9-10. Równania liniowe	2	
		11. Równania liniowe z wartością bezwzględną	1	
4.	Nierówności liniowe	12-13. Nierówności liniowe	2	
		14-15. Nierówności liniowe z wartością bezwzględną	2	
5.	Układy równań i nierówności	16. Różne sposoby rozwiązywania układów równań liniowych.	1	
		17-18. Rozwiązywanie układów równań i układów nierówności liniowych.	2	
		19-20. Zadania tekstowe prowadzące do układów równań liniowych.	2	
6.	Podsumowanie	21-22. Zadania na zastosowania.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		23-24. Powtórzenie wiadomości.	2	
		25. Praca klasowa.	1	
		26. Omówienie pracy klasowej.	1	
Wektory. Przekształcenia wykresów funkcji. (13 godz.)				
1.	Wektory	1. Wektory w układzie współrzędnych.	1	
		2-3. Działania na wektorach w układzie współrzędnych.	2	MAT→FIZ
		4. Wektory na płaszczyźnie	1	
		5-6. Działania na wektorach na płaszczyźnie	2	MAT→FIZ
2.	Przekształcenia wykresów funkcji	7. Wykres funkcji $y = f(x-p) + q$	2	INF→MAT
		8. Wykres funkcji $y = f(k \cdot x), y = k \cdot f(x)$	2	INF→MAT
		9. Wykres funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$	1	INF→MAT
		10-11. Przekształcanie wykresów funkcji.	2	INF→MAT
3.	Podsumowanie	11. Powtórzenie wiadomości.	1	
		12. Praca klasowa.	1	
		13. Omówienie pracy klasowej.	1	
Funkcja kwadratowa (32 godz.)				
1.	Wprowadzenie do funkcji kwadratowej	1. Funkcja kwadratowa i jej wykres.	1	INF→MAT
		2. Własności funkcji kwadratowej.	1	MAT→FIZ
		3. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.	1	

		4. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej.	1	
		5. Rysowanie wykresów funkcji kwadratowej.	1	INF→MAT
		6-7. Wykresy funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną	2	
2.	Badanie funkcji kwadratowej	8-9. Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej.	2	
		10. Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej.	1	
		11-12. Zadania optymalizacyjne.	2	MAT→FIZ
3.	Zastosowanie funkcji kwadratowej	13-14. Interpretacja zjawisk fizycznych.	2	
		15. Interpretacja zagadnień geometrycznych.	1	
4.	Równania i nierówności kwadratowe	16. Rozwiązania równania kwadratowego.	1	
		17-18. Wzory Viete'a.	2	
		19. Rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą.	1	
		20-21. Rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą.	2	
		22-23. Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		24. Układy równań prowadzące do równań kwadratowych.	1	
5.	Równania i nierówności kwadratowe z parametrem	25-26. Równania kwadratowe z parametrem.	2	
		27. Nierówności kwadratowe z parametrem	1	
6.	Podsumowanie	28-29. Zadania na zastosowania.	2	
		30. Powtórzenie wiadomości.	1	
		31. Praca klasowa.	1	
		32. Omówienie pracy klasowej.	1	
Trygonometria cz. 1. (15 godz.)				
1.	Określenie funkcji trygonometrycznych	1. Związki trygonometryczne w trójkącie prostokątnym.	1	
		2. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30^{o}, 45^{o} i 60^{o}.	1	
		3-4. Funkcje trygonometryczne dla kątów od 0^{o} do 180^{o}.	2	
2	Wartości funkcji trygonometrycznych	5. Odczytywanie przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych.	1	
		6. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych.	1	
3.	Tożsamości trygonometryczne	7-8. Podstawowe tożsamości trygonometryczne.	2	
		9-10. Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość jednej z nich.	2	
		11-12. Zadania na zastosowanie trygonometrii.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
3.	Podsumowanie	13. Powtórzenie wiadomości.	1	
		14. Praca klasowa.	1	
		15. Omówienie pracy klasowej.	1	
Godziny do dyspozycji nauczyciela			**4**	

KLASA II
6 godzin tygodniowo – 210 godzin
(realnie 35 tygodni po 6 godzin = 210 godzin)

Lp.	Tytuł modułu	Temat lekcji	Liczba lekcji	Korelacje
Planimetria (26 godz.)				
1.	Przypomnienie i utrwalenie wiadomości z gimnazjum	1. Wprowadzenie do działu.	1	
		2. Nierówność trójkąta	1	
		3. Kąty i ich rodzaje.	1	
		4-5. Zadania różne.	2	
2.	Proste i okręgi	6-7. Kąt wpisany i kąt środkowy.	2	INF→MAT
		8-9. Wzajemne położenie prostej i okręgu.	2	INF→MAT
		10-11. Wzajemne położenie dwóch okręgów.	2	INF→MAT
3.	Planimetria w gimnazjum	12. Okrąg opisany na trójkącie.	1	INF→MAT
		13. Okrąg wpisany w trójkąt.	1	INF→MAT
		14. Twierdzenie Pitagorasa.	1	
4.	Twierdzenie Talesa	15. Twierdzenie Talesa.	1	
		16. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.	1	
		17. Twierdzenie Talesa w zadaniach.	1	
5.	Trójkąty	18-19. Trójkąty przystające	2	
		20-21. Trójkąty podobne.	2	
6.	Podsumowanie	22-23. Zadania na zastosowania.	2	
		24. Powtórzenie wiadomości.	1	
		25. Praca klasowa.	1	
		26. Omówienie pracy klasowej.	1	
Wielomiany (25 godz.)				
1.	Wzory skróconego mnożenia	1. Wzory na sześcian sumy i sześcian różnicy.	1	
		2. Wzory na różnicę sześcianów i sumę sześcianów	1	
2.	Podstawowe działania na wielomianach	3. Dodawania, odejmowanie i mnożenie wielomianów.	1	
		4. Równania wielomianowe typu $x^3=-27$	1	
		5. Grupowanie wyrazów, rozkład wielomianu na czynniki.	1	
		6-7. Rozkład wielomianu na czynniki.	2	
3.	Dzielenie wielomianów	8. Dzielenie wielomianu przez dwumian.	1	
		9. Schemat Hornera dzielenia wielomianu przez dwumian.	1	
		10. Pierwiastek wielomianu.	1	
		11-12. Reszta z dzielenia wielomianu przez dwumian. Twierdzenie Bezouta.	2	
		13-14. Całkowite i wymierne pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych.	2	
4.	Równania i nierówności wielomianowe	15-16. Rozwiązywanie równań wielomianowych.	2	
		17-18. Rozwiązywanie nierówności wielomianowych.	2	
		20-21. Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
5.	Podsumowanie	22-23. Powtórzenie wiadomości.	2	
		24. Praca klasowa.	1	
		25. Omówienie pracy klasowej.	1	

Wyrażenia wymierne (19 godz.)				
1.	Działania na wyrażeniach wymiernych	1-2. Dziedzina wyrażenia wymiernego.	2	
		3-4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych.	2	
		5-6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych.	2	
2.	Równania i nierówności wymierne	7-8. Rozwiązywanie równań wymiernych.	2	
		9-10. Rozwiązywanie nierówności wymiernych.	2	
3.	Homografia	11. Wielkości odwrotnie proporcjonalne.	1	MAT→FIZ
		12. Wykres funkcji f(x)=a/x.	1	INF→MAT
		13-14. Przekształcenia wykresów funkcji f(x)=a/x.	2	INF→MAT
6.	Podsumowanie	15-16. Zadania na zastosowania.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		17. Powtórzenie wiadomości.	1	
		18. Praca klasowa.	1	
		19. Omówienie pracy klasowej.	1	
Trygonometria cz. 2 (22 godz.)				
1.	Własności funkcji trygonometrycznych	1. Miara łukowa kąta.	1	
		2-3. Wzory redukcyjne.	2	
		4. Okresowość funkcji trygonometrycznych.	1	
		5-6. Wykresy funkcji trygonometrycznych.	2	MAT→FIZ
		7-8. Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych.	2	INF→MAT
2.	Zależności trygonometryczne	9. Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.	1	
		10. Suma i różnica sinusów i kosinusów kątów.	1	
		11-12. Tożsamości trygonometryczne.	2	
3.	Równania i nierówności trygonometryczne	13-14. Równania trygonometryczne.	2	
		15-16. Nierówności trygonometryczne.	2	
		17-18. Równania i nierówności trygonometryczne.	2	
5.	Podsumowanie	19-20. Powtórzenie wiadomości.	2	
		21. Praca klasowa.	1	
		22. Omówienie pracy klasowej.	1	
Ciągi (28 godz.)				
1.	Ciągi - wprowadzenie	1. Pojęcie ciągu.	1	
		2. Wzór ogólny ciągu.	1	
		3. Wzór rekurencyjny ciągu.	1	MAT→INF
		4. Monotoniczność ciągów.	1	
2.	Ciąg arytmetyczny	5. Definicja ciągu arytmetycznego.	1	
		6. Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.	1	
		7. Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	1	
		8-9. Ciąg arytmetyczny – zadania.	2	
3.	Ciąg geometryczny	10. Definicja ciągu geometrycznego.	1	
		11. Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego.	1	
		12. Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	1	
		13. Procent składany.	1	INF→MAT
		14-15. Ciąg geometryczny – zadania.	2	
4.	Ciągi w zadaniach	16-17. Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach.	2	
5.	Granica ciągu	18. Definicja granicy ciągu.	1	

		19-20. Obliczanie granic ciągów. Granica niewłaściwa.	2	
		21. Suma szeregu geometrycznego zbieżnego.	1	
		22-23. Szeregi geometryczne – zadania.	2	
6.	Podsumowanie	14-25. Zadania na zastosowania.	2	
		26. Powtórzenie wiadomości.	1	
		27. Praca klasowa.	1	
		28. Omówienie pracy klasowej.	1	
Funkcja wykładnicza i logarytmiczna (24 godz.)				
1.	Funkcja wykładnicza	1-2. Potęga o wykładniku rzeczywistym.	2	
		3-4. Funkcja wykładnicza i jej własności.	2	MAT→FIZ
		5-6. Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych.	2	
2.	Funkcja logarytmiczna	7-8. Własności logarytmów.	2	
		9-10. Funkcja logarytmiczna i jej własności.	2	MAT→FIZ
		11-12. Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznych.	2	INF→MAT
		13. Funkcja logarytmiczna w życiu człowieka.		MAT→FIZ, FIZ→MAT
3.	Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne	14-15. Równania i nierówności wykładnicze.	2	
		16-17. Równania i nierówności logarytmiczne.	2	
6.	Podsumowanie	18-19. Zadania na zastosowanie funkcji wykładniczej.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		20-21. Zadania na zastosowanie funkcji logarytmicznej.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		22. Powtórzenie wiadomości.	1	
		23. Praca klasowa.	1	
		24. Omówienie pracy klasowej.	1	
Planimetria cz. 2 (23 godz.)				
1.	Jednokładność i podobieństwo	1. Jednokładność.	1	INF→MAT
		2. Obrazy figur geometrycznych w jednokładności.	1	INF→MAT
		3. Podobieństwo.	1	INF→MAT
		4-5. Jednokładność i podobieństwo w zadaniach.	2	
2.	Czworokąty	6. Czworokąt wpisany w okrąg.	1	
		7. Czworokąt opisany na okręgu.	1	
		8-9. Czworokąty – zdania.	2	
3.	Trygonometria w planimetrii	10. Wykorzystanie zależności trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.	1	
		11. Wzór na pole trójkąta o danych dwóch bokach i kącie między nimi.	1	
		12-13. Trygonometria w planimetrii – zadania.	2	
4.	Twierdzenie sinusów i cosinusów	14-15. Twierdzenie sinusów.	2	
		16-17. Twierdzenie cosinusów.	2	
		18-19. Twierdzenie sinusów i cosinusów w zadaniach.	2	
5.	Podsumowanie	20-21. Powtórzenie wiadomości.	2	
		22. Praca klasowa.	1	
		23. Omówienie pracy klasowej.	1	
Geometria analityczna (23 godz.)				
1.	Proste w układzie	1. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.	1	

	współrzędnych	2. Równoległość i prostopadłość prostych na podstawie równań kierunkowych.	1	
		3. Równoległość i prostopadłość prostych w zadaniach.	1	
		4. Punkt przecięcia prostych	1	
		5. Odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych	1	
2.	Postać ogólna równania prostej	6. Współrzędne wektora.	1	
		7. Działania na wektorach,	1	
		8. Równoległość i prostopadłość prostych zadanych wzorem ogólnym.	1	
		9. Równoległość i prostopadłość prostych w zadaniach.	1	
3.	Odległość punktu od prostej	10. Odległość punktu od prostej.	1	
		11. Równanie okręgu w układzie współrzędnych.	2	INF→MAT
		12. Prosta i okrąg w układzie współrzędnych.	1	
		13-14. Prosta i okrąg w układzie współrzędnych – zadania.	2	
4.	Symetrie w układzie współrzędnych	15. Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych.	1	INF→MAT
		16. Symetria względem początku układu współrzędnych.	1	INF→MAT
5	Zadania	18-20. Zadania z zastosowaniem układu współrzędnych.	3	
6.	Podsumowanie	21. Powtórzenie wiadomości.	2	
		22. Praca klasowa.	1	
		23. Omówienie pracy klasowej.	1	
Godziny do dyspozycji nauczyciela			**20**	

KLASA III
6 godzin tygodniowo - 162 godziny
(realnie 27 tygodni po 6 godzin = 162 godziny)

Lp.	Tytuł modułu	Temat lekcji	Liczba lekcji	Korelacje
		Granica i pochodna funkcji (34 godz.)		
1.	Granica funkcji	1-2. Granica funkcji w punkcie – definicja, zadania.	2	
		3. Granica niewłaściwa.	1	
		4. Granice w nieskończoności.	1	
		5. Granice jednostronne.	1	
2.	Ciągłość funkcji	6-7. Asymptoty wykresu funkcji.	2	
		8-9. Ciągłość funkcji w punkcie.	2	
		10. Ciągłość funkcji na przedziale	1	
3.	Pochodna funkcji	11. Pochodna funkcji w punkcie.	1	
		12. Własności pochodnej funkcji.	1	
		13. Pochodna funkcji wielomianowej.	1	
		14-15. Pochodna funkcji wymiernej.	2	
		16-17. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej funkcji.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
1.	Monotoniczność funkcji	18. Monotoniczność funkcji a jej pochodna	1	INF→MAT
		19-20. Wyznaczanie przedziałów monotoniczności funkcji.	2	
4.	Ekstrema funkcji	21. Ekstremum funkcji.	1	

		21-22. Wyznaczanie ekstremów funkcji wielomianowych.	2	
		23. Wyznaczanie ekstremów funkcji wymiernych.	1	
		24-25. Najmniejsza i największa wartość funkcji na przedziale liczbowym.	2	
		27-29. Zastosowanie pochodnych do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.	3	
5.	Podsumowanie	30-31. Zadania na zastosowania.	2	
		32. Powtórzenie wiadomości.	1	
		33. Praca klasowa.	1	
		34. Omówienie pracy klasowej.	1	
Stereometria (30 godz.)				
1.	Kąty w przestrzeni	1-2. Proste i płaszczyzny w przestrzeni.	2	
		3-4. Kąty w przestrzeni	2	
2.	Graniastosłupy	5. Rodzaje graniastosłupów.	1	
		6-7. Kąty w graniastosłupach.	2	
		8-9. Pole powierzchni i objętość graniastosłupa.	2	
3.	Ostrosłupy	5. Charakterystyka ostrosłupów.	1	
		6-7. Pole powierzchni i objętość ostrosłupa.	2	
		8-9. Kąty w ostrosłupach – kąt dwuścienny.	2	
4.	Wielościany	10-11. Wielościany foremne.	2	
5.	Bryły obrotowe.	12-13. Pole powierzchni i objętość walca.	2	
		14-15. Pole powierzchni i objętość stożka.	2	
		16-17. Pole powierzchni i objętość kuli.	2	
6.	Zadania różne	18-19. Podobieństwo w przestrzeni.	2	
		20-21. Przekroje graniastosłupów i ostrosłupów.	2	
		22-23. Przekroje brył obrotowych.	2	
		24-25. Bryły wpisane i opisane.	2	
5.	Podsumowanie	26-27. Zadania na zastosowania.	2	
		28. Powtórzenie wiadomości.	1	
		29. Praca klasowa.	1	
		30. Omówienie pracy klasowej.	1	
Elementy statystyki opisowej. Prawdopodobieństwo i kombinatoryka (30 godz.)				
1.	Statystyka	1-2. Dane statystyczne i sposoby ich przedstawiania.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		3. Podstawowe parametry statystyczne.	1	
		4. Średnia ważona.	1	MAT→FIZ
		5. Odchylenie standardowe.	1	
		6-7. Interpretacja danych statystycznych.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
2.	Kombinatoryka	8. Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych.	1	
		9-10. Reguła mnożenia i reguła dodawania.	2	
		11. Permutacje.	1	
		12. Wariacje bez powtórzeń.	1	
		13. Wariacje z powtórzeniami.	1	
		14. Kombinacje.	1	
		15. Zadania z kombinatoryki	1	
3.	Prawdopodobieństwo	16-17. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa i jego własności.	2	

		18-19. Prawdopodobieństwo klasyczne - zadania	2	
		20-21. Prawdopodobieństwo warunkowe.	2	
		22-23. Prawdopodobieństwo całkowite.	2	
		24-25. Własności prawdopodobieństwa – zadania.	2	
5.	Podsumowanie	26-27. Zadania na zastosowania.	2	MAT→FIZ, FIZ→MAT
		28. Powtórzenie wiadomości.	1	
		29. Praca klasowa.	1	
		30. Omówienie pracy klasowej.	1	
Przygotowanie do egzaminu maturalnego (60 godz.)				
Godziny do dyspozycji nauczyciela			**8**	

Materiały uzupełniające

Zagadnienia związane ze zbiorem liczb naturalnych realizujemy zazwyczaj na początku klasy pierwszej. Warto zatem poświęcić przy okazji kilka godzin na zainteresowanie uczniów naszym przedmiotem. Poniżej kilka pomysłów na pracę z uczniami w tym czasie.

CECHY PODZIELNOŚCI

1. Podaj, które z podanych liczb są podzielne przez 3, a które przez 4: 54, 1316, 354, 276.
2. Jaką cyfrę należy wstawić w miejsce *, aby otrzymana liczba była podzielna przez 36: 12345678*.
3. W liczbie 32@3571* wstaw w miejsca @ i * takie cyfry, aby otrzymane liczby były podzielne:

   a) przez 15, b) przez 24, c) przez 36.
4. Czy można kwadrat o wymiarach 100×100 rozciąć na same prostokąty o wymiarach 2×3?
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne siedmiocyfrowe podzielne przez 3 i przez 4, w zapisie których występują tylko cyfry 2 i 3, przy czym dwójek jest więcej niż trójek.
6. Jaką resztę daje przy dzieleniu przez 5 liczba 987654321^{2006}?
7. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $2^{2006}+3^{2006}$ przez 5.
8. Wyznaczyć wszystkie liczby pięciocyfrowe $\overline{abcde}$, podzielne przez 36 i dla których a<b<c<d<e.
9. Jaki warunek musi spełniać liczba $\overline{abcdef}$, aby liczba $\overline{abcdef}+10^6$ była podzielna przez 9?

Rozwiązania, wskazówki, odpowiedzi

1. przez 3: 54, 354, 276; przez 4: 1316, 276.

2. 0. Liczba jest podzielna przez 36, gdy jest jednocześnie podzielna przez 4 i 9 (ponieważ NWD(4,9)=1!!!). Stąd dwie jej ostatnie cyfry muszą tworzyć liczbę podzielną przez 4 i suma jej cyfr musi być podzielna przez 9.

3. a) 1) *=0 i @=3 lub @=6 lub @=9, 2) *=5 i @=1 lub @=4 lub @=7. Podobnie jak zadanie I.2., $15 = 3 \cdot 5$.

b) *=2 i @=1 lub @=4 lub @=7; Podobnie jak zadanie I.2., $24 = 3 \cdot 8$.

c) 1) *=2 i @=4 lub 2) *=6 i @=4 lub @=9. Podobnie jak zadanie I.2. Podobnie jak zadanie I.2., $36 = 4 \cdot 9$.

4. Nie. Pole kwadratu – 100x100=10000 nie jest wielokrotnością pola prostokącika – 2x3=6.

5. 2222232. Liczba musi być podzielna przez 4, a więc kończy się na 32 (23, 22 i 33 nie spełniają warunków zadania). Ponadto dwójek jest co najmniej 4 oraz suma cyfr musi być podzielna przez 3.

6. 1. Zauważmy, że aby odpowiedzieć na to pytanie wystarczy „śledzić” ostatnią cyfrę, która zawsze jest 1.

7. 0. Zauważmy, że cyfra jedności zarówno potęg dwójki jak i trójki powtarza się cyklicznie: 2^1=**2**, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=3**2**,..., 2^9=51**2**,..., 2^{13}=__**2**, itd., tzn. 2^{4k}=__**2**. Stąd 2^{2006}=2^{2004+2}=__**8**. Podobnie 3^{2006}=3^{2004+2}=__**7**. Stąd 2^{2006}+3^{2006}=__5.

8. 12456, 12348. Zauważyć, na początek, że aby liczba była podzielna przez 36, musi być jednocześnie podzielna przez 4 i 9 (ponieważ NWD(4,9)=1!!!). Ponadto *d* jest większe od 3 i *e* jest większe od 4. Tym samym, z podzielności przez 4 mamy: $\overline{de} = 56$ lub $\overline{de} = 48$, lub $\overline{de} = 68$. Podzielność przez 9 daje ostateczne wyniki.

9. *a+b+c+d+e+f=9k-1.* Zauważmy, że: $\overline{abcdef} + 10^6 = \overline{1abcdef}$.

LICZBY PIERWSZE

1. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce $\Diamond$, aby prawdziwa była równość: $16 \cdot 16 \cdot 16 = 8 \cdot \Diamond \cdot 8$?
2. Liczbę naturalną nazwiemy dobrą, jeśli zapisana jest za pomocą niepowtarzających się cyfr i iloczyn tych cyfr jest równy pewnej zadanej liczbie *a*. Znajdź kilka liczb dobrych dla *a*=360. Znajdź największą taką dobrą liczbę. Powtórz to zadanie dla *a*=240.

3. Zapisz dzisiejszą datę i potraktuj ją jak liczbę (np. 21.03.2006 → 21032006). Jeśli od tej liczby odejmiesz sumę jej cyfr, to otrzymasz liczbę podzielną przez 9. Czy tak jest zawsze?
4. Wykaż, że liczby 5050505 nie można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.
5. Wyznacz liczbę dzielników liczby: a) 96, b) 260, c) $2^3 \cdot 5^2$, d) $2^5 + 2^4 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 3^2$.
6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe mające największą liczbę dzielników. Uzasadnij swoją odpowiedź.
7. Pewna liczba ma trzy dzielniki pierwsze. Ile dzielników pierwszych ma kwadrat tej liczby?

Rozwiązania, wskazówki, odpowiedzi

1. 48.

2. **a)** np. 895, 46315, największa – 95421. Zauważmy, że $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

b) np. 64521, 856, największa – 85321. Zauważmy, że $240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

3. Tak jest zawsze. Fakt: *Reszta z dzielenia liczby przez 9 równa jest reszcie z dzielenia przez 9 sumy cyfr tej liczby.*

4. Ponieważ liczba 5050505 jest nieparzysta, więc musi być sumą liczby parzystej i nieparzystej. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, ale 5050505-2=5050503 dzieli się przez 9, tzn. nie jest liczbą pierwszą.

5. **a)** 12, **b)** 12, **c)** 12, **d)** 12. Należy rozłożyć liczby na czynniki pierwsze, a następnie zastosować własność: *Liczba naturalnych dzielników liczby* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$*, gdzie* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *są liczbami pierwszymi, wyraża się wzorem:* $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$.

6. 96, 90, 60, 84 (12 dzielników). Zastosuj własność użytą w rozwiązaniu zadania II.5.

7. **3.** Skoro liczba ma trzy dzielniki pierwsze, więc jest postaci: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$. Wówczas $a^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot p_3^{2\alpha_3}$. Tym samym kwadrat takiej liczby posiada również jedynie trzy dzielniki pierwsze.

PARZYSTOŚĆ

1. Konik polny skacze w tył lub w przód, wzdłuż zadanej linii prostej, kolejno 1cm, 2 cm, 3 cm,... Czy po 25 skokach może być w punkcie wyjścia?
2. Czy można żeton 25 złotowy rozmienić na 10 żetonów 1, 3 i 5 złotowych?

3. Jaś kupił 96-kartkowy zeszyt i ponumerował strony od 1 do 192. Potem wyrwał z nich 25 kartek i dodał wszystkie numery stron z wyrwanych kartek. Czy mógł on otrzymać liczbę 2006?
4. Uczeń ma na początku pięć kartek papieru. Następnie jedną z kartek dzieli na pięć części, i powtarza tę czynność wybierając kolejno karteczki do podziału w dowolny sposób. Czy postępując w taki sposób, uczeń mógł uzyskać 2006 karteczek, a 2005?
5. Uzasadnij, że w zapisie równości $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+99\cdot 100=20062005$ popełniono pomyłkę.

Rozwiązania, wskazówki, odpowiedzi

1. Nie. Zauważmy, po pierwsze, że gdyby konik wykonał wszystkie skoki w jedną stronę, to oddaliłby się od początkowego punktu o 1+2+3+...+25=325 cm (nieparzysta liczba centymetrów). Ponadto skok wykonany w przeciwną stronę zmniejsza tę sumę o dwukrotną długość skoku (!!!), tzn. o liczbę parzystą. Zatem odległość konika polnego od punktu wyjścia wyraża się zawsze nieparzysta liczbą centymetrów, tym samym nigdy nie będzie równa zero.

2. Nie. Parzysta liczba (10) monet o nominałach nieparzystych daje liczbę parzystą – różną od 25.

3. Nie. Zauważmy, że na każdej kartce jest numer parzysty i nieparzysty, tym samym suma jest nieparzysta. Ponadto Jaś wyrwał 25, tj. nieparzystą liczbę, kratek. Suma nieparzystej liczby nieparzystych składników jest nieparzysta – zatem musi być różna od 2006.

4. 2006 – nie, 2005 – tak. Zauważmy, że po podzieleniu wybranej kartki na 5 części przybywają nam 4 karteczki (!!!). Wówczas wystarczy zauważyć, że $2006\neq 5+4k$, dla każdego naturalnego *k* (lub zbadać parzystość), $2005=5+4\cdot 500$.

5. Zauważmy, że każdy składnik tej sumy jest parzysty, więc ich suma również powinna być parzysta.

NWD, NWW

1. Czy wśród liczb od 1 do 2006 włącznie więcej jest liczb podzielnych przez 3, czy też liczb, które dzielą się przez 4 lub przez 5?

2. Trzej długodystansowcy mają kroki długości 90 cm, 92 cm i 95 cm. Jaką odległość pokonają od momentu startu zanim znowu równocześnie dotkną stopą ziemi? Ile kroków wykona każdy z nich?
3. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 9, przy dzieleniu przez 15 - resztę 14, a przy dzieleniu przez 21 – resztę 20.
4. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną *n*, która przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1, przez 3 – resztę 2, przez 4 – resztę 3, przez 5 – resztę 4, przez 6 – resztę 5 i jest ponadto podzielna przez 7.
5. Dzieląc pewną liczbę naturalną przez 3, 4, 5, 6, 7 otrzymujemy tę samą resztę równą 2.
   a) Wyznacz najmniejszą liczbę o podanej własności większą niż 10.
   b) Wyznacz najmniejszą liczbę o podanej własności, która jest ponadto podzielna przez 11.
6. Ile liczb naturalnych mniejszych od 2006 niepodzielnych ani przez 5 ani przez 11?

Rozwiązania, wskazówki, odpowiedzi

1. Liczb podzielnych przez 3 jest tyle, ile trójek mieści się w 2006, tzn. 668. Aby wyznaczyć, ile jest liczb podzielnych przez 4 lub przez 5 należy dodać liczbę podzielnych przez 4 do liczby podzielnych przez 5 i odjąć od tej sumy liczbę, podzielnych przez 4 i 5 jednocześnie tj. podzielne przez NWW(4, 5)=20. Stąd jest ich 501+401-100=802.

2. 78660, 874, 855, 828. Należy wyznaczyć NWW(90,92,95), a następnie kolejno podzielić wynik przez długość kroku każdego z długodystansowców.

3. 209. Zauważmy, że gdyby liczba ta była o jeden większa, to byłaby podzielna przez 10, 15 i 21. Zatem szukana liczba, to $\mathrm{a} = \mathrm{NWW}(10,15,21) - 1 = 210 - 1 = 209$.

4. 119. Podobnie jak w zadaniu IV.3. Szukana liczba jest postaci $k \cdot (NWW(2,3,4,5,6)) - 1 = k \cdot 60 - 1$, gdzie *k* jest tak dobrane, aby otrzymana liczba była podzielna przez 7.

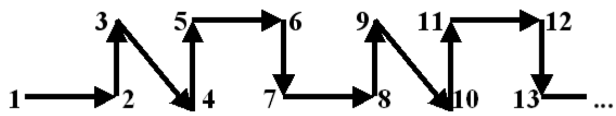
5. a) 422, **b)** 4202. Podobnie jak zadania IV.3. i IV.4. Tym razem liczba o 2 mniejsza jest podzielna przez 3, 4, 5, 6, 7.

6. 1459. Podobnie jak zadanie IV.1. Mamy $2006-401-182+36=1459$.

Ciekawe liczby naturalne: liczby bliźniacze, liczby trójkątne, kwadratowe, piramidalne, liczby doskonałe, liczby palindromiczne, liczba 153 (?).

WOKÓŁ LICZBY 2006...

1. Piotr miał 5 kartek papieru, wziął jedną z nich rozciął na pięć części, następnie ponownie wziął jedną z karteczek (początkową lub jedną z otrzymanych w wyniku wcześniejszego podziału) i podzielił ją na pięć części i tak dalej. Czy postępując w ten sposób można uzyskać 2006 karteczek?, a 2007?, a 2005?
2. W urnie znajduje się 2006 kul: 667 białych 669 niebieskich i 670 czerwonych. Jaką najmniejszą liczbę kul należy wyciągnąć, aby bez oglądania ich być pewnym, że wyciągnęliśmy przynajmniej po 10 kul każdego koloru?
3. Wypisujemy kolejno, jedna za drugą, liczby: 123456789101112.... Jaka cyfra stoi na 2006 miejscu?
4. Wyznaczyć sumę cyfr użytych do zapisu wszystkich liczb od 1 do 2006 włącznie.
5. W 2006 roku wiek pewnego chłopca był równy sumie cyfr roku jego urodzenia. W którym roku urodził się ów chłopiec jeśli wiadomo, że ma on:
   a) więcej niż 10 lat? b) mniej niż 10 lat?
6. Zegarek elektroniczny wskazuje godzinę 18:20:06. Po ilu sekundach po raz pierwszy zmienią się wszystkie cyfry, wskazujące czas?
7. Liczby całkowite od 0 do 2006 połączone są według schematu jak na rysunku. Jaki układ strzałek łączy liczbę 2000 z liczbą 2006?



8. Czy liczba $2^{2006}+5^{4012}$ jest liczbą pierwszą?
9. Znajdź 62 różne liczby naturalne, tak aby ich suma równa była 2006 i aby różnica między kolejnymi liczbami nie była większa niż 2. Czy istnieje tylko jeden taki układ liczb?

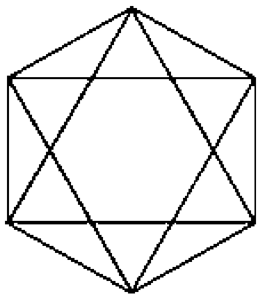
10. Wyznacz sumę $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2005\cdot 2006}=$

11. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 2006, z których żadna nie jest podzielna przez 3 ani przez 17?

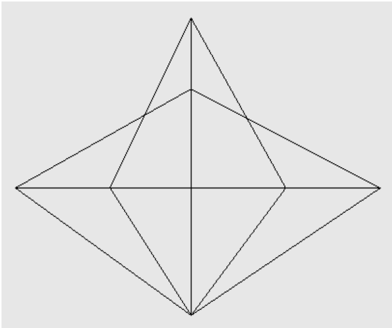
12. Czy liczba 66...6, w której cyfra 6 powtarza się razy 2006 jest kwadratem liczby naturalnej?

13. Ile trójkątów widzisz na rysunku?

a)



b)



14. W skrzyni są 32 kamienie. Każdy kamień ma inną wagę. Za pomocą 35 ważeń na wadze szalkowej wykryć najcięższy kamień oraz drugi z kolei pod względem wagi.

Odpowiedzi, wskazówki, rozwiązania

1. 2006 – nie, 2007 – nie , 2005 – tak. Zauważmy, że pocięcie jednej kartki na 5 części powoduje wzrost liczby kartek o 4. Tym samym otrzymujemy w kolejnych krokach 5, 9, 13, 17, 21,... karteczek, tzn. 5+4*k*, dla naturalnych wartości *k.* 2005=5+4x500.

2. 1349. Najbardziej pesymistyczny wariant, to wyciągnięcie wszystkich kul czerwonych, wszystkich kul niebieskich i 10 białych. Stąd 670+669+10=1349.

3. 0. Liczby jednocyfrowe dają 9x1=9 cyfr, dwucyfrowe 90x2=180, co łącznie daje 189 cyfr. Jesteśmy już przy setce i pozostaje jeszcze 1817 cyfr. Zauważmy, że 1817:3=605,(6), tzn. poszukiwana cyfra jest drugą cyfrą 606 liczby trzycyfrowej, tj. liczby 705.

4. 47720.

1+2+3+...+9=45.

(1+0)+(1+1)+(1+2)+(1+3)+...+(9+9)=10x(1+2+3+...+9)+10x(1+2+3+...+9)=450+450=900.

Stąd suma cyfr liczb od 1 do 99 wynosi 945. Zatem dalej mamy

(1+0+0)+(1+0+1)+(1+0+2)+...+(9+9+9)= 100(1+2+3+...+9)+ 10x945=4500+9450=13950, Stąd suma cyfr liczb od 1 do 999 wynosi 945+13950=14895. Dalej mamy

(1+0+0+0)+(1+0+0+1)+(1+0+0+2)+...+(1+9+9+9)+(2+0+0+0)+(2+0+0+1) +...+(2+9+9+9)=

1000x(1+2)+2x14895=32790.

Ostatecznie mamy

1+2+3+4+...+(2+0+0+6)=14895+32790+7x2+1+2+3+4+5+6=47720.

5. a) 1984, b) 2002.

6. 5994 sekund. Zauważmy, że ostatnia cyfra zmieni się gdy zegar wskaże 20:00:00, tzn. muszą upłynąć 54 sekundy, 39 minut i 1 godzina, tj. 54+39x60+1x3600=5994 sekund.

7. Zauważmy, że układ strzałek powtarza się cyklicznie co 6.

8. Nie.

$$2^{2006}+5^{4012}=\left(2^{1003}\right)^2+\left(5^{2006}\right)^2=\left(2^{1003}+5^{2006}\right)^2-2\cdot 2^{1003}\cdot 5^{2006}=\left(2^{1003}+5^{2006}\right)^2-2^{1004}\cdot 5^{2006}=$$
$$=\left(2^{1003}+5^{2006}\right)^2-\left(2^{502}\cdot 5^{1003}\right)^2=\left(\left(2^{1003}+5^{2006}\right)-2^{502}\cdot 5^{1003}\right)\left(\left(2^{1003}+5^{2006}\right)+2^{502}\cdot 5^{1003}\right)$$

9. Przykładowy układ liczb: 1,2,3,4,5,6,7,8,<u>9,11</u>,12,13,..,60,61,62,63. Istnieje więcej takich układów, np.: 1,2,3,4,...,<u>40,42</u>,43,<u>44,46</u>,47,...,51,<u>52,54</u>,55,...,64,65.

2006:62=32,35. Zatem weźmy wstępnie liczby: 32, 31, 33, 30, 34, 29, 35,..., 2, 62, 1, tzn. 1,2,3,4,5,...,62, ale 1+2+3+4+...+62=1953. Brakuje nam jeszcze 2006-1953=53, więc możemy np. zwiększyć o jeden 53 końcowe liczby.

10.
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2005\cdot 2006}=$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)+\left(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}\right)=1-\frac{1}{2006}=\frac{2005}{2006}.$$

11. 1259. [x] oznacza część całkowitą z liczby x, np. [2,34]=2, [7,1]=7,

2005-[2005:3]-[2005:17]+[2005:51]=2005-668-117+39=1259.

12. Nie. Zauważmy, że liczba 666...6 jest podzielna przez 2 i nie jest podzielna przez kwadrat dwójki, tj. przez 4.

14. Należy ważyć kamienie w „systemie pucharowym”

OKROJONA SZACHOWNICA. Jako rekwizyty posłużą nam szachownica i 32 kostki domina. Przypuśćmy, że każda kostka jest tej wielkości, że pokrywa dokładnie dwa sąsiednie kwadraty szachownicy. Oczywiście 32 kostki mogą pokryć całą szachownicę. Załóżmy teraz, że odcięliśmy dwa rogi szachownicy, leżące na przekątnej i wyrzuciliśmy jedną kostkę domina. Czy można teraz ułożyć pozostałe 31 kostek tak, aby wszystkie 62 kwadraty szachownicy były przykryte? Jeśli tak, to pokaż, jak to zrobić, Jeśli nie, to udowodnij, że tego zrobić się nie da.

M. Gardner, *Moje najlepsze zagadki matematyczne i logiczne*, str. 2, Quadrivium

ROZCINANIE SZEŚCIANU. Pewien stolarz chce pociąć drewniany sześcian o wymiarach $30cm \times 30cm \times 30cm$, na 27 małych sześcianów o wymiarach $10cm \times 10cm \times 10cm$. Może to łatwo zrobić za pomocą sześciu cięć, utrzymując cały czas już rozcięte kawałki w pierwotnym kształcie sześcianu. Czy może zmniejszyć liczbę cięć, zmieniając położenie części po wykonaniu każdego cięcia?

M. Gardner, *Moje najlepsze zagadki matematyczne i logiczne*, str. 3, Quadrivium

SPRAWIEDLIWY PODZIAŁ. Istnieje prosty sposób podziału ciastka pomiędzy dwie osoby tak, aby każda z nich była przekonana, że otrzymuje co najmniej połowę porcji: jedna osoba dzieli, a druga wybiera. Wymyśl ogólny sposób podziału ciastka między *n* osób tak, aby każda z nich była przekonana, że otrzymała co najmniej 1/*n* część całości.

M. Gardner, *Moje najlepsze zagadki matematyczne i logiczne*, str. 14, Quadrivium

KAPELUSZE. W ciemnym pokoju leży na stole pięć kapeluszy: dwa białe i trzy czarne. do pokoju wchodzi trzech panów i każdy z nich zakłada na głowę jeden kapelusz (nie widzi jaki ma kolor). Następnie panowie wychodzą z pokoju jeden za drugim tak, że pierwszy nie widzi żadnego kapelusza, drugi widzi tylko kapelusz pierwszego, a trzeci - widzi kapelusz pierwszego i drugiego pana. Pierwszy pan pyta trzeciego, czy wie jakiego koloru kapelusz ma na głowie. Ten odpowiada, że nie wie. Następnie to samo pytanie pierwszy pan zadaje drugiemu i uzyskuje taką samą odpowiedź: nie wiem. Jakiego koloru kapelusz ma na głowie pierwszy z panów.

DWA PLEMIONA. Podróżnik wybrał się na poszukiwanie dwóch zaginionych miast, Miasta A i Miasta B. Mieszkańcy Miasta A zawsze mówią prawdę, natomiast mieszkańcy Miasta B zawsze kłamią. Mieszkańcy obydwu miast często się odwiedzają, tak więc w każdym z miast przebywają zarówno mieszkańcy Miasta A jak i Miasta B. Podróżnik trafił do jednego z miast, lecz nie wie do którego. Jakie pytanie (jedno) powinien zadać napotkanemu osobnikowi, aby po wysłuchaniu odpowiedzi wiedział do jakiego miasta trafił?

H. Pawłowski, *Podręcznik do kl. I,* Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON

PRAWDA CZY FAŁSZ. Na liście wypisanych jest, jedno po drugim, *n* zdań. Zdanie *k* mówi: *Na tej liście dokładnie k zdań jest fałszywych.* Ile zdań mówiących prawdę jest na tej liście i które to?

H. Pawłowski, *Podręcznik do kl. I,* Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON

SMAŻYMY KOTLETY. Mamy dwie patelnie. Na każdej z nich mieści się tylko jeden kotlet. Jedna strona kotleta smaży się jedną minutę. W jakim najkrótszym czasie usmażyć na tych patelniach trzy kotlety?

H. Pawłowski, *Podręcznik do kl. I,* Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON

KRASNOLANDIA. W Krasnolandii każdy obywatel jest piękny lub bogaty. Bogaci stanowią 50% ludności. Pięknych Krasnolandian jest 50 tys. (z czego 70% to niebogaci). Ilu mieszkańców ma Krasnolandia?

Matematyka z plusem, *podręcznik do kl. I*

WOKÓŁ TWIERDZENIA PITAGORASA RAZ JESZCZE

Wiele już pisano zarówno o twierdzeniu Pitagorasa jak i o samym Pitagorasie. Moim celem nie jest powielanie tego co zostało już powiedziane. Zamierzam natomiast przedstawić kilka zagadnień, z którymi nie zetknąłem się dotychczas w literaturze poświęconej twierdzeniu Pitagorasa, a które można poruszyć mówiąc o nim. Ponadto przedstawię tu kilka dowodów tego twierdzenia oraz kilka niestandardowych zadań związanych z tym twierdzeniem.

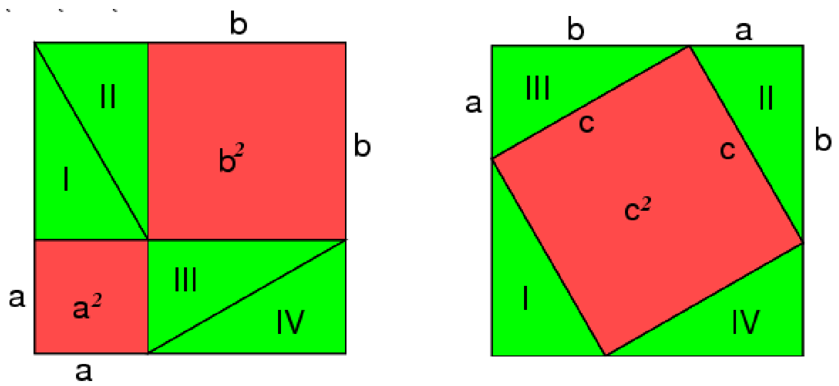
Pitagoras urodzi się ok. 580 r. p. n. e. na wyspie Samos. Wiele czasu przebywał w Krotonie w Wielkiej Grecji, gdzie założył Związek Pitagorejski. Trójkąt o wymiarach 3, 4, 5, znany dziś jako *trójkąt pitagorejski* Pitagoras poznał zapewne podczas swego pobytu w Egipcie (stąd często trójkąt ten nazywany jest *trójkątem egipskim*). Trójkąt ten służył w dawnym Egipcie do wyznaczania kątów prostych. Umiejętność ta przydawała się m. in. do podziału gruntów po corocznych wylewach Nilu, którego żyzny muł zacierał granice pól. Ów magiczny trójkąt miał niewątpliwie wpływ na odkrycie słynnego twierdzenia.

Twierdzenie 1. (Twierdzenie Pitagorasa). *Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równa jest polu kwadratu zbudowanego na jego przeciwprostokątnej.*

Nie jest jasne czy twierdzenie to udowodnił jako pierwszy sam Pitagoras. Mógł to uczynić jeden z uczniów szkoły pitagorejskiej. Niemniej jednak twierdzenie to przypisujemy Pitagorasowi z Samos.

Na początek przytoczę dwa dowody, które przypuszczalnie mogą pochodzi od samego Pitagorasa.

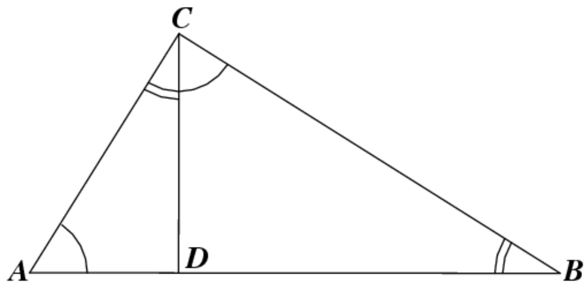
D o w ó d 1. Patrząc na poniższe rysunki oraz oznaczenia wszelki komentarz wydaje się być rzeczą zbędną.



Zatem mamy:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

D o w ó d 2. Niech dany będzie trójkąt prostokątny *A, B, C* z kątem prostym przy wierzchołku *C* oraz wysokością *CD.*



Wówczas z podobieństwa trójkątów *ACD* i *ABC* oraz *CBD* i *ABC* otrzymujemy odpowiednio:

$$\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|DB|}{|CB|}=\frac{|CB|}{|AB|},$$

$$|AC|^2=|AD|\cdot|AB|, \qquad |CB|^2=|DB|\cdot|AB|.$$

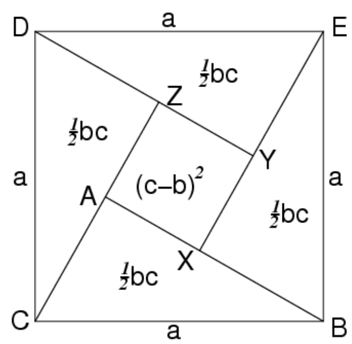
Sumując stronami otrzymane równości otrzymujemy:

$$|AC|^2+|CB|^2=|AB|(|AD|+|DB|),$$

$$|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2.$$

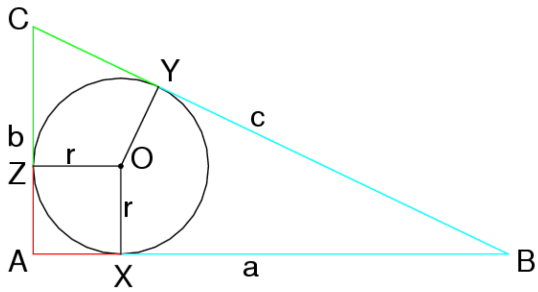
Zauważmy, że jest to dowodów algebraiczny i wymaga znajomości wielu faktów przypisywanych obecnie Euklidesowi. Przedstawię tu jeszcze dwa dowody tego twierdzenia.

D o w ó d 3. (Bhâskara – autor *Lilavati*, XII w.).



Hinduski matematyk dopisał przy rysunku jedyny wyraz: Patrz!

D o w ó d 4. (Möllmann). Na początek wykażemy pewną zależność między promieniem okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, a długościami jego boków. Niech dany będzie trójkąt prostokątny *ABC* z kątem prostym przy wierzchołku *A*.



Wówczas, przyjmując oznaczenia jak na rysunku otrzymujemy:

$$|XB| = |YB|, \quad |CZ| = |CY|, \quad |AZ| = |AX| = r.$$

Stąd:

$$a + b - 2r = c,$$

a zatem:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Przechodząc do głównej części dowodu posłużymy się dwoma wzorami na pole trójkąta, mianowicie:

$$P_\Delta = \frac{1}{2}ah, \qquad P_\Delta = pr,$$

gdzie *h* oznacza wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę *a*, *p* – połowę obwodu trójkąta, *r* zaś promień okręgu wpisanego w dany trójkąt.

Porównując prawe strony tych wzorów oraz uwzględniając wcześniejsze oznaczenia otrzymujemy równość:

$$\frac{1}{2}ab = pr,$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2},$$

która po przekształceniu daje:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Zauważmy, że do dowodów 2 i 4 bardziej pasowałoby następujące sformułowanie naszego twierdzenia:

Twierdzenie 2. (Twierdzenie Pitagorasa). *Suma kwadratów długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym równa jest kwadratowi długości jego przeciwprostokątnej.*

Oczywiście obydwa twierdzenia mówią o tym samym, jednakże innymi językami. Twierdzenie 2 to próba przeniesienia Twierdzenia 1 z czystej geometrii na płaszczyznę algebry. Drugie sformułowanie to już nie tylko „zabawa na polach”, ale problem z trójką liczb spełniających równanie:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Takimi właśnie trójkami będziemy zajmowali się w dalszej części. Jednakże zanim to nastąpi podam jeszcze twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz jego dowód.

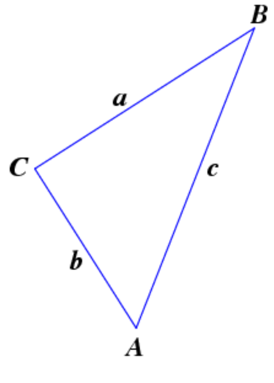
Twierdzenie 3. (Odwrotne do twierdzenia Pitagorasa). Jeżeli długości boków trójkąta spełniają zależność:

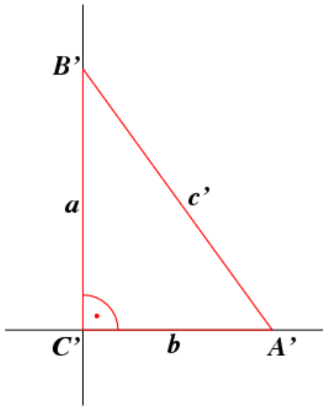
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

to trójkąt ten jest prostokątny, przy czym *c* jest długością przeciwprostokątnej tego trójkąta.

D o w ó d. Rozważmy trójkąt *ABC* (Rys. a), którego długości boków $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ związane są następującą równością:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$





Rys a. Rys. b

Następnie skonstruujmy kolejny trójkąt *A'B'C'*, tym razem prostokątny o przyprostokątnych długości *a* i *b* (Rys. b). Wówczas z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *A'B'C'* otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 = c'^2,$$

co w połączeniu z wcześniejszym warunkiem daje nam:

$$c = c'.$$

Tym samym na mocy przystawania trójkątów (cecha: bok bok bok) trójkąty *ABC* oraz *A'B'C'* są przystające, tzn. trójkąt *ABC* jest prostokątny. Przy czym bok o długości *c* jako najdłuższy leży naprzeciw kąta o największej mierze, którym tu jest oczywiście kąt prosty.

Przejdziemy teraz do rozwiązywania zadań związanych, w mniejszym lub większym stopniu, z twierdzeniem Pitagorasa. Znaczna część z tych zadań wiąże się ze wspomnianymi wcześniej trójkami spełniającymi odpowiednią zależność.

Określenie. *Trójkę liczb* $a, b, c \in N$ *spełniających równość* $a^2 + b^2 = c^2$ *nazywamy trojką pitagorejską i oznaczamy (a,b,c).*

Definicja. *Liczby* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *nazywamy względnie pierwszymi, co oznaczamy* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = 1$ *jeżeli ich największym wspólnym dzielnikiem jest 1.*

ZADANIA

Zadanie 1. *Wyznaczyć wzory opisujące wszystkie względnie pierwsze trójki pitagorejskie.*

R o z w i ą z a n i e. Na początek ustalmy jakie trójki względnie pierwszych liczb, pod względem parzystości, mogą spełniać równanie $a^2 + b^2 = c^2$. Niech *P* oznacza liczbę parzystą, *N* - nieparzystą. Wszystkie możliwe kombinacje pod względem parzystości przedstawia poniższa tabela.

Liczby pitagorejskie	Możliwe przypadki					
	I	II	III	IV	V	VI

a	**I. P**	*P*	*P*	*N*	*N*	*P*
b	*P*	*P*	*N*	*N*	*N*	*N*
c	*P*	*N*	*P*	*N*	*P*	*N*

Rozważmy kolejno wszystkie te przypadki, pamiętając o fakcie, iż kwadrat dowolnej liczby parzystej jest liczbą parzystą, natomiast kwadrat dowolnej liczby nieparzystej – liczbą nieparzystą.

I. Niemożliwe, gdyż wówczas liczby te nie byłyby względnie pierwsze, a zatem nie spełniałyby warunków zadania.

II. Niemożliwe. Suma dwóch liczb parzystych nie może być liczbą nieparzystą.

III. Niemożliwe. Podobnie jak II.

IV. Niemożliwe. Podobnie jak II i III.

V. Niemożliwe. Niech $a=2t+1$, $b=2k+1$. Zauważmy, że prawa strona równania $a^2+b^2=c^2$, jako kwadrat liczby parzystej jest podzielna przez 4, natomiast lewa nie, tzn.: $a^2+b^2=(2t+1)^2+(2k+1)^2=4(t^2+t+k^2+k)+2$.

VI. Możliwe. Zatem jedyny możliwy przypadek to taki, gdy dokładnie jedna z liczb *a* lub *b* jest liczbą parzystą.

Oczywiście parzystość liczb *a* i *b* możemy bez straty ogólności zamieniać między sobą. W dalszych rozważaniach zakładamy, że *a* jest liczbą parzystą, natomiast *b* i *c* są nieparzyste. Mamy zatem:

$$a^2=c^2-b^2=\underbrace{(c-b)}_{parzysta}\underbrace{(c+b)}_{parzysta}.$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$a=2k, \qquad c-b=2m, \qquad c+b=2n,$$

otrzymujemy:

$$4k^2=2m\cdot 2n,$$

$$k^2=mn. \quad (*)$$

Ponadto liczby *m* i *n* są względnie pierwsze. Rzeczywiście, gdyby *m* i *n* nie były względnie pierwsze, tzn. $(m,n)=d>1$, to wówczas *d* byłoby dzielnikiem liczb:

$$n+m=c \qquad \text{i} \qquad n-m=b \qquad \text{oraz} \qquad a=2k\,.$$

Oczywiście byłoby to sprzeczne z założeniem, $(a,b,c)=1$. Zatem liczby *m* i *n* są względnie pierwsze, co w związku z równością (*) daje nam:

$$m=p^2 \qquad \text{i} \qquad n=q^2\,,$$

gdzie *p* i *q* są pewnymi liczbami naturalnymi. Stąd otrzymujemy $k=pq$. Mamy zatem:

$$\left.\begin{array}{l} a=2k=2pq \\ b=n-m=q^2-p^2 \\ c=n+m=q^2+p^2 \end{array}\right\} p,q\in N, \quad q>p\,.$$

Powyższy układ opisuje wszystkie względnie pierwsze trójki pitagorejskie, jest to zatem rozwiązanie naszego zadania.

Zadanie 2. *Wyznaczyć wszystkie takie trójki pitagorejskie* (a,b,c)*, aby liczby a, b, c tworzyły ciąg arytmetyczny.*

R o z w i ą z a n i e. Aby ciąg liczb *a, b, c* był arytmetyczny, muszą być spełnione warunki: $a=b-r$ oraz $c=b+r$ dla pewnej liczby *r*. Ponieważ szukane liczby mają tworzyć trójkę pitagorejską, muszą zatem spełniać dodatkowy warunek, mianowicie:

$$a^2+b^2=c^2\,.$$

Stąd po odpowiednim podstawieniu otrzymujemy:

$$(b-r)^2+b^2=(b+r)^2\,,$$

co daje:

$$b=4r\,.$$

Szukane trójki są zatem postaci: $(3r,4r,5r)$.

Zadanie 3. *Pokazać, że jeżeli* (a,b,c) *jest trójką pitagorejską, to* $(2a+b+2c,\ a+2b+2c,\ 2a+2b+3c)$ *też jest trójką pitagorejską.*

R o z w i ą z a n i e. Trójka liczb $(2a+b+2c,\ a+2b+2c,\ 2a+2b+3c)$ jest trójką pitagorejską, jeśli spełnia warunek:

$$(2a+b+2c)^2+(a+2b+2c)^2=(2a+2b+3c)^2.$$

Równość powyższa po uproszczeniu sprowadza się do następującej postaci:

$$a^2+b^2=c^2,$$

co w związku z faktem, iż trójka (a,b,c) jest trójką pitagorejską kończy rozwiązanie.

Zadanie 4. *Uzasadnić, że jeżeli (a,b,c) jest trójką pitagorejską, to iloczyn abc jest podzielny przez 15.*

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ $15=3\cdot 5$ i $(3,5)=1$, zatem wystarczy pokazać, że iloczyn *abc* jest podzielny przez 3 i przez 5. Oczywiście iloczyn ten będzie podzielny przez 3 i przez 5, jeśli któraś ze składowych tego iloczynu będzie podzielna przez 3, a któraś (być może ta sama) przez 5. Wykażemy, na początek, podzielność przez 3.

Zauważmy, że każda liczba naturalna daje się zapisać w jednej z postaci:

$$3k, \qquad 3k+1, \qquad 3k+2,$$

gdzie, *k* jest pewną liczbą naturalną. Tym samym kwadrat dowolnej liczby naturalnej przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 lub 0:

$(3k)^2=3\cdot(3k^2)$,

$(3k+1)^2=3\cdot(3k^2+2k)+1$,

$(3k+2)^2=3\cdot(3k^2+4k+1)+1.$

Stąd łatwo zauważyć, że wśród liczb spełniających warunek:

$$a^2+b^2=c^2,$$

przynajmniej jedna (lub wszystkie trzy) musi być podzielna przez 3 (tzn. dawać przy dzieleniu przez 3 zerową resztę).

Aby pokazać, że iloczyn ten jest podzielny przez 5 należy zauważyć, że każdą liczbę naturalną można przedstawić w jednej z następujących postaci:

$$5t, \qquad 5t+1, \qquad 5t+2, \qquad 5t+3, \qquad 5t+4,$$

gdzie *t* jest pewną liczbą naturalną. Wówczas widać, że kwadrat dowolnej liczby naturalnej przy dzieleniu przez 5 może dawać następujące reszty: 1, 4 lub 0. Podobna analiza jak poprzednio pokazuje, że przynajmniej jedna (lub wszystkie trzy) z liczb *a, b, c* musi być podzielna przez 5.

Zadanie 5 *Uzasadnić, że jeżeli* (a,b,c) *jest trójką pitagorejską, to iloczyn abc jest podzielny przez 60.*

R o z w i ą z a n i e. Podobnie jak w zadaniu 4 zauważmy, że $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ oraz $(3,4,5) = 1$. Zatem wystarczy pokazać, że iloczyn *abc* jest podzielny przez 3, 4 i 5. Podzielność przez 3 i przez 5 pokazaliśmy w zadaniu 4. Wykażemy teraz podzielność przez 4. W rozwiązaniu zadania 1 otrzymaliśmy następujące wzory opisujące wszystkie względnie pierwsze trójki pitagorejskie:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2pq \\ b = q^2 - p^2 \\ c = q^2 + p^2 \end{array}\right\} p,q \in N, \quad q > p$$

Wiemy ponadto, że tylko *a* jest liczbą parzystą. Tym samym, aby liczby *b* i *c* były nieparzyste, dokładnie jedna z liczb *p* lub *q* musi być parzysta. Stąd iloczyn *pq* jest podzielny przez 2, zatem $a = 2pq$ jest podzielna przez 4. Oznacza to, że iloczyn *abc* jest podzielny przez 4, co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 6. *Uzasadnić, że jeżeli* (a,b,c) *jest trójką pitagorejską, to wyrażenie* $ab(a^2 - b^2)$ *jest podzielne przez 7.*

W s k a z ó w k a. Każdą liczbę naturalną można przedstawić w jednej z postaci: $7t$, $7t+1$, $7t+2$, $7t+3$, $7t+4$, $7t+5$, $7t+6$, gdzie *t* jest pewną liczbą naturalną oraz zadanie 4.

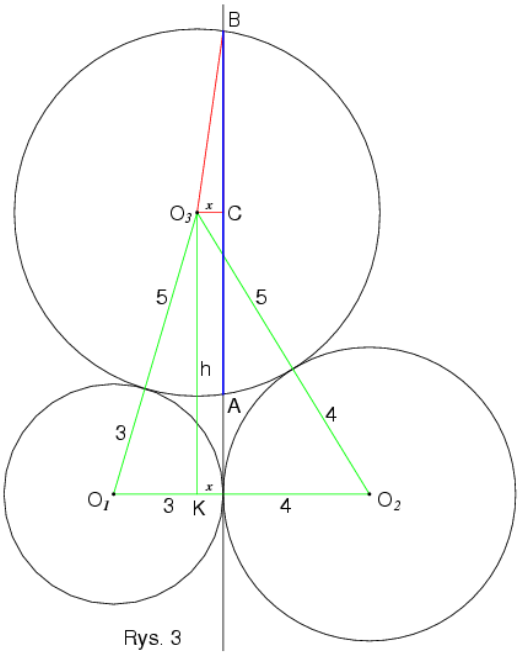
Zadanie 7. *Pokazać, że długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego długości boków wyrażają się liczbami naturalnymi, wyraża się liczbą naturalną.*

R o z w i ą z a n i e. W dowodzie 4 twierdzenia 1 pokazaliśmy, że $r = \frac{a+b-c}{2}$, gdzie *a, b* – długości przyprostokątnych, *c* – długość przeciwprostokątnej, *r* – długość promienia okręgu wpisanego w dany trójkąt prostokątny. Ponadto w rozwiązaniu zadania 1 pokazaliśmy, że dokładnie jedna z liczb *a* lub *b* jest parzysta i *c* jest nieparzysta lub wszystkie trzy
Liczby *a, b, c* są parzyste. W obydwu przypadkach wyrażenie $a+b-c$ jest liczbą parzystą, zatem promień $r = \frac{a+b-c}{2}$ wyraża się liczbą naturalną.

Dalsze prezentowane tutaj zadania są niestandardowymi zadaniami na zastosowanie twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 8. *Okręgi o promieniach 3, 4, 5 są parami styczne zewnętrznie. Przez punkt styczności okręgów o promieniach 3 i 4 poprowadzono wspólną styczną do tych okręgów. Oblicz długość odcinka tej stycznej zawartego w okręgu o promieniu 5.*

R o z w i ą z a n i e. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Rys. 3

Odcinek, którego długości szukamy oznaczony jest jako $\overline{AB}$. Jego długość jest 2 razy większa od odcinka $\overline{BC}$, którego długość moglibyśmy łatwo policzyć znając $x = |O_3C|$. Zatem wyliczmy *x*. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów O_1KO_3 oraz KO_2O_3 otrzymujemy:

$$h^2 = |O_1O_3|^2 - |O_1K|^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = |O_2O_3|^2 - |KO_2|^2.$$

Porównując prawe strony tych równości i podstawiając odpowiednie wartości mamy:

$$8^2 - (3-x)^2 = 9^2 - (4+x)^2,$$

skąd otrzymujemy:

$$x = \frac{5}{7}.$$

Znając *x* możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta O_3CB:

$$|CB|^2 = |O_3B|^2 - |O_3C|^2,$$

$$|CB|^2 = 5^2 - \left(\tfrac{5}{7}\right)^2,$$

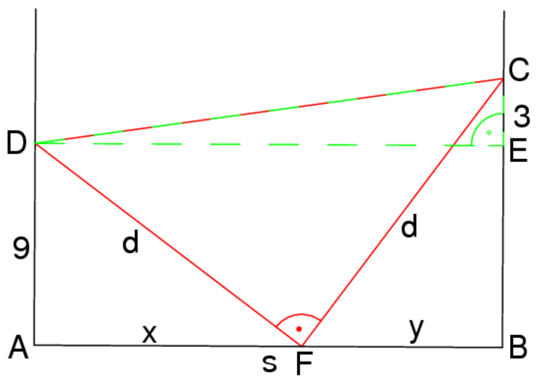
$$|CB| = \tfrac{20}{7}\sqrt{3}.$$

Ponieważ, jak już wspominaliśmy $|AB| = 2|CB|$, mamy zatem:

$$|CB| = \frac{40}{7}\sqrt{3}.$$

Zadanie 9. *Drabina jest tak umieszczona między domami, że jeśli, ją pochylić do jednego domu, to sięga okna na wysokości 12 m, a jeśli do drugiego, to sięga zaledwie 9 m od poziomu ulicy. Oba położenia drabiny są do siebie wzajemnie prostopadłe. Jaka jest długość drabiny i szerokość ulicy?*

R o z w i ą z a n i e. Schemat sytuacji z zadania przedstawiony jest na rysunku poniżej, gdzie *d* oznacza długość drabiny, $s = x + y$ – szerokość ulicy.



Stosując twierdzenie Pitagorasa kolejno dla trójkątów *AFD*, *BCF* oraz *ECD* otrzymujemy odpowiednio:

$$|DF|^2 = |AD|^2 + |AF|^2, \quad |CF|^2 = |BC|^2 + |BF|^2 \quad \text{oraz} \quad |DC|^2 = |ED|^2 + |EC|^2.$$

Ponadto zauważmy, że $|DC| = d\sqrt{2}$ jako przekątna kwadratu o boku *d*, oraz $|DE| = s$. Zgodnie z oznaczeniami jak na rysunku, powyższe równości możemy zapisać następująco:

$$d^2 = 9^2 + x^2, \quad d^2 = 12^2 + y^2 \quad \text{oraz} \quad \left(d\sqrt{2}\right)^2 = s^2 + 3^2,$$

skąd mamy:

$$\begin{cases} d^2 = 81 + x^2 \\ d^2 = 144 + y^2 \\ 2d^2 = (x+y)^2 + 9 \end{cases}.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań daje następujące rozwiązania:

$$\begin{cases} x = -12 \\ y = -9 \\ d = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -12 \\ y = -9 \\ d = -15 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \\ d = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \\ d = -15 \end{cases}.$$

Oczywiście w przypadku naszego zadania jedynym prawidłowym rozwiązaniem jest trójka:

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \\ d = 15 \end{cases},$$

co ostatecznie daje:

$$s = 21\,\text{m}, \qquad d = 15\,\text{m}.$$

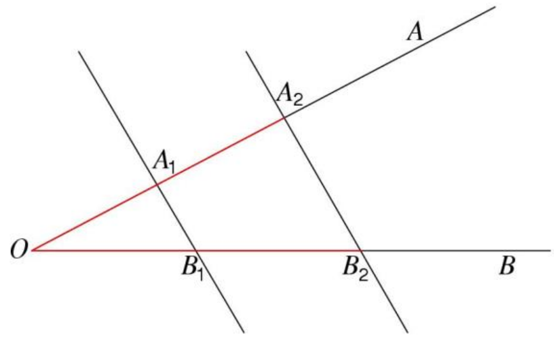
TWIERDZENIE TALESA JAKO KALKULATOR „ARYTMETYKI" GEOMETRYCZNEJ

Niewątpliwie powinienem zacząć od wyjaśnienia tytułu tego artykułu, co też pospiesznie czynię. Zacznę od końca. Przez arytmetykę geometryczną rozumiem wykonywanie działań arytmetycznych przy pomocy odpowiednich konstrukcji geometrycznych. Wówczas reprezentantem danej liczby jest oczywiście odcinek odpowiedniej długości (choć, jak się okaże, nie zawsze).

Każdy z nas potrafiłby zapewne w myśl powyższych ustaleń dodać lub odjąć geometrycznie dwie liczby. Problemem dla wielu mogłoby się okazać zadanie polegające na geometrycznym wyznaczeniu iloczynu czy ilorazu dwóch liczb lub wyciągnięciu pierwiastka z danej liczby bądź podniesieniu danej liczby do pewnej potęgi. W dalszej części przedstawię geometryczne metody wykonywania powyższych działań. Ponadto zobrazuję jak geometrycznie wyznaczyć sumy częściowe ciągów geometrycznych oraz sumy szeregów geometrycznych itp. Okazuje się, że wszystkie te konstrukcje kryją w swoim uzasadnieniu treść twierdzenia Talesa, skąd tytuł. W związku z powyższym nie wypada zacząć inaczej jak od paru zdań o tym filozofie oraz przedstawić owo wielkie twierdzenie.

Tales z Miletu (ok. 630-543 p.n.e.) uważany jest za jednego z siedmiu najwybitniejszych mędrców starożytności. Poza filozofią zajmował się również matematyką i astronomią. Jednym Z największych jego odkryć matematycznych jest to, że kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest kątem prostym. Ponadto wielkim odkryciem było twierdzenie, które zostało przedstawione poniżej. Dzięki prawidłowości, którą w sobie kryje, Tales wyznaczył wysokość piramid za pomocą ich cienia.

Twierdzenie 1. (Twierdzenie Talesa). *Jeżeli ramiona kąta AOB przetniemy dwiema prostymi równoległymi A_1B_1 oraz A_2B_2, to stosunek wyznaczonych przez te proste odcinków na ramieniu OA tego kąta równy jest stosunkowi wyznaczonych przez te półproste odcinków na ramieniu OB.*



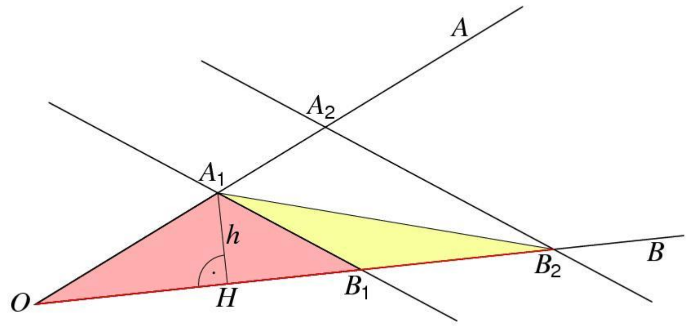
rys. 1

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku mamy:

Jeżeli $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, *to*

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}.$$

D o w ó d. Niech dany będzie kąt *AOB* oraz dwie proste równoległe przecinające ramiona tego kąta odpowiednio w punktach A_1, B_1 i A_2, B_2 (rys. 2a, 2b, 2c). Rozważmy na początek trójkąty OB_1A_1 oraz $B_1B_2A_1$ (rys. 2a). Zauważmy że, wysokość trójkąta OB_1A_1 opuszczona na bok OB_1 pokrywa się z wysokością trójkąta $B_1B_2A_1$ opuszczoną na bok B_1B_2.



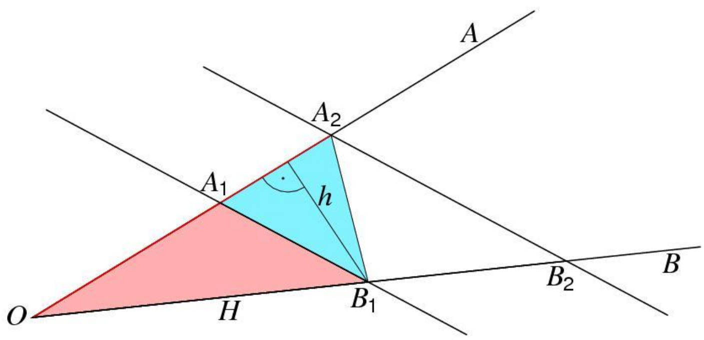
rys. 2a

Stąd

$$\frac{P_{OB_1A_1}}{P_{B_1B_2A_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|OB_1|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|B_1B_2|\cdot h} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|},$$

$$(1) \qquad \frac{P_{OB_1A_1}}{P_{B_1B_2A_1}} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}$$

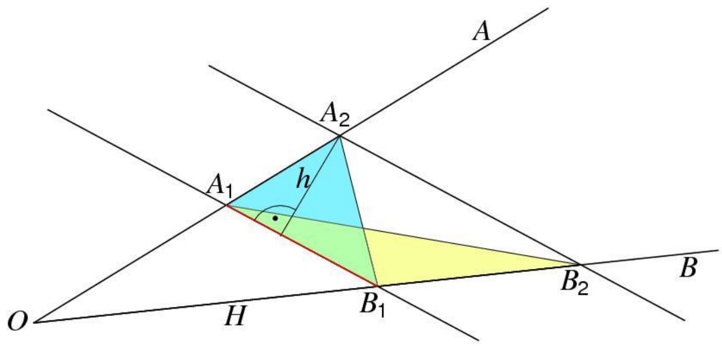
W analogiczny sposób rozpatrując trójkąty OB_1A_1 oraz $A_1B_1A_2$ (rys. 2b) otrzymujemy



rys. 2b

$$(2) \qquad \frac{P_{OB_1A_1}}{P_{A_1B_1A_2}} = \frac{|OA_1|}{|A_1A_2|}$$

Ponadto zauważmy, że trójkąty $B_1B_2A_1$ oraz $A_1B_1A_2$ mają wspólną wysokość opuszczoną na wspólną podstawę A_1B_1 (rys. 2c).



rys. 2c

Zatem

$$P_{B_1B_2A_1} = P_{A_1B_1A_2}.$$

Co w zestawieniu z równościami (1) oraz (2) daje:

$$\frac{P_{OB_1A_1}}{P_{B_1B_2A_1}} = \frac{P_{OB_1A_1}}{P_{A_1B_1A_2}},$$

$$\frac{|OB_1|}{|B_1B_2|} = \frac{|OA_1|}{|A_1A_2|}.$$

W oparciu o powyższe twierdzenie, przyjmując oznacznia jak na rysunku, nietrudno jest wykazać prawdziwość następujących równości:

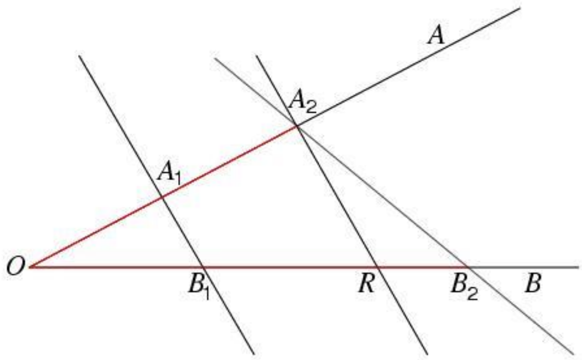
$$\frac{|OA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_2|}{|B_1B_2|}, \qquad \frac{|OA_2|}{|OA_1|} = \frac{|OB_2|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}.$$

Prawdziwe jest również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. (Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa). *Jeżeli dwie proste wyznaczają na ramionach kąta takie odcinki, że stosunek odcinków wyznaczonych na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu to te proste są równoległe.*

D o w ó d. Niech dany będzie kąt *AOB* oraz dwie proste przecinające ramiona tego kąta w sposób zgodny z treścią twierdzenia, tzn. oznaczając punkty przecięcia tych prostych z ramionami kąta odpowiednio przez A_1, B_1 i A_2, B_2 (rys. 3), mamy:

$$(3) \qquad \frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}.$$



rys. 3

Pokażemy, że te proste są równoległe. Poprowadźmy prostą równoległą do prostej A_1B_1 i przechodzącą przez punkt A_2. Oznaczmy punkt przecięcia tej prostej z drugim ramieniem kąta przez *R.* Wówczas na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy:

$$(4) \qquad \frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1R|}.$$

Z równości (3) oraz (4) otrzymujemy:

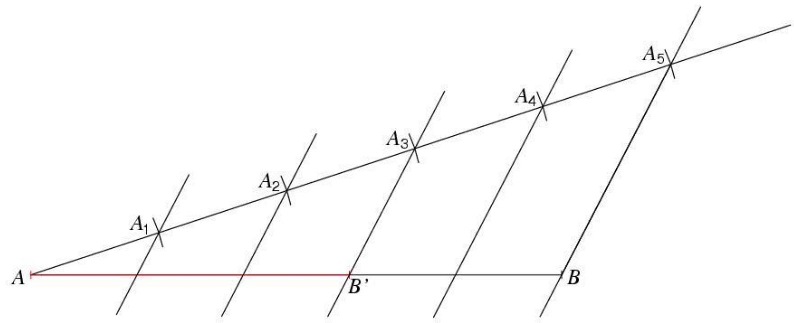
$$\frac{|OB_1|}{|B_1B_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1R|},$$

$$(5) \qquad |B_1B_2| = |B_1R|.$$

Równość (5) w połączeniu z faktem, że punkty B_2 i *R* leżą na tej samej prostej co punkt B_1 i po tej samej stronie tego punktu oznacza, że B_2 i *R* to ten sam punkt na ramieniu *OB*, tzn. proste A_2B_2 oraz A_2R pokrywają się. Zatem

$$A_2B_2 \parallel A_1B_1.$$

Zajmiemy się teraz wcześniej wspomnianymi działaniami. Przyjmują, że mamy do dyspozycji jedynie odcinek jednostkowej długości oraz linijkę i cyrkiel. Działania nasze musimy ograniczyć do zbioru liczb konstruowalnych (algebraicznych)[1]. Nie jest to jednak powód do zmarwień, gdyż jak się okazuje konstruowalne są między innymi wszystkie liczby wymierne. Dla przykładu pokażę konstrukcję liczby $\frac{3}{5}$ (rys. 4).



rys. 4

Opis konstrukcji:

1. Rysujemy odcinek jednostkowy $\overline{AB}$.
2. Rysujemy półprostą o początku w punkcie *A*.
3. Na tak wyznaczonej półprostej odkładamy cyrklem 5 odcinków jednakowej długości.
4. Prowadzimy prostą łączącą koniec ostatniego odcinka A_5 z końcem odcinka dzielonego *B*.
5. Kolejno przez punkty A_4, A_3, A_2, A_1, prowadzimy proste równoległe do prostej A_5B.
6. 3 z 5 wyznaczonych części odcinka *AB* stanowią $\frac{3}{5}$, tzn. $\overline{AB'} = \frac{3}{5}$.

Elementarne zastosowanie twierdzenia Talesa pokazuje prawdziwość wykonanej konstrukcji.

Zauważmy, że długość odcinka dzielonego, w naszym przypadku jest to odcinek jednostkowy, *AB*, nie ma znaczenia. Podział dowolnego odcinka na daną liczbę części

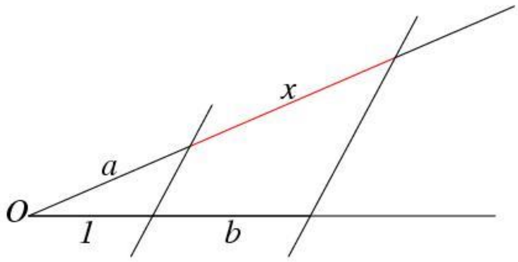
[1] Szerzej o liczbach algebraicznych oraz konstruowalności liczb można przeczytać w książce Macieja Bryńskiego *Elementy teorii Galois.*

przebiega analogicznie. Tym samym mając odcinek *AB* potrafimy wyznaczyć odcinek długości $\frac{m}{n}\cdot|AB|$, gdzie $m,n\in N_+$.

Poniżej pokażę jak znaleźć iloczyn oraz iloraz dwóch liczb. Okazuje się, że uzasadnienie również i tych konstrukcji wynika wprost z twierdzenia Talesa. Oto one:

Opis konstrukcji iloczynu liczb *a* i *b* (rys. 5).

1. Rysujemy dowolny kąt.
2. Na jednym z ramion, począwszy od wierzchołka kąta, odkładamy odcinek długości *a*.
3. Na drugim ramieniu, począwszy od wierzchołka kąta, odkładamy kolejno odcinek jednostkowy oraz odcinek długości *b*.
4. Prowadzimy prostą przez koniec odcinka długości *a* i koniec odcinka jednostkowego.
5. Prowadzimy prostą równoległą do danej prostej przechodzącą przez koniec odcinka długości *b*.
6. Odcinek wyznaczony przez te proste na drugim ramieniu kąta jest szukanym iloczynem.



rys. 5

Uzasadnienie konstrukcji.

Wprost z twierdzenia Tales:

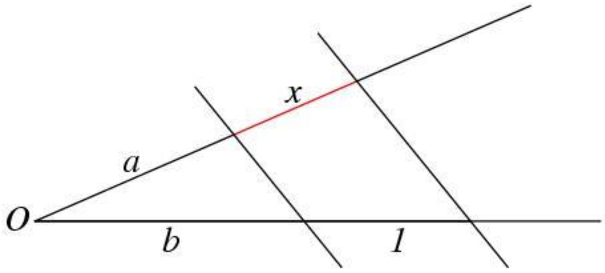
$$\frac{a}{x}=\frac{1}{b},$$

$$x=ab.$$

Opis konstrukcji ilorazu liczb *a* i *b* (rys. 6).

1. Rysujemy dowolny kąt.

2. Na jednym z ramion, począwszy od wierzchołka kąta, odkładamy odcinek długości *a*.
3. Na drugim ramieniu, począwszy od wierzchołka kąta, odkładamy kolejno odcinek długości *b* oraz odcinek jednostkowy.
4. Prowadzimy prostą przez koniec odcinka długości *a* i koniec odcinka długości *b*.
5. Prowadzimy prostą równoległą do danej prostej przechodzącą przez koniec odcinka jednostkowego.
6. Odcinek wyznaczony przez te proste na drugim ramieniu kyąta jest szukanym ilorazem.



rys. 6

Uzasadnienie konstrukcji.

Wprost z twierdzenia Tales:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{1},$$

$$x = \frac{a}{b}.$$

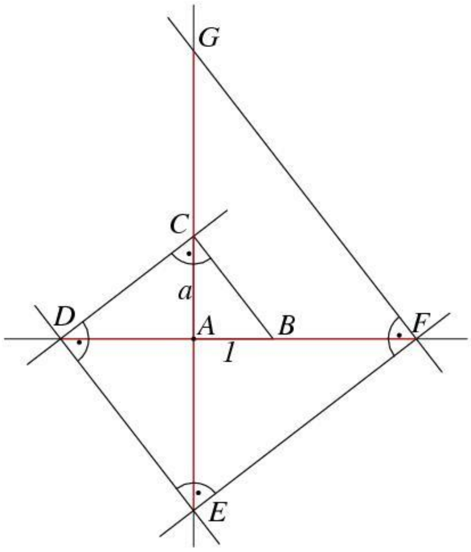
Przedstawię teraz sposób na podnoszenie liczby do potęgi oraz na wyznaczanie pierwiastka stopnia drugiego z danej liczby. Zacznę od potęgowania.

Opis konstrukcji potęgowania liczby *a* (rys. 7).

1. Budujemy trójkąt prostokątny *ABC* o przyprostokątnych długości 1 oraz *a*.
2. Rysujemy proste prostopadłe zawierające przyprostokątne trójkąta *ABC*.
3. Rysujemy prostą *CD* prostopadłą do przeciwprostokątnej tego trójkąta.
4. Długość odcinka *AD* bwynosi a^2.

5. Postępując analogicznie otrzymujemy

$$|AE| = a^3, \quad |AF| = a^4, \quad |AG| = a^5, \text{ itd.}$$



rys. 7

Uzasadnienie konstrukcji.

Nie skorzystamy tu wprost z twierdzenia Talesa, aczkolwiek twierdzenie to również ma tu swój wkład. Zauważmy mianowicie podobieństwo trójkątów *ABC, ACD, ADE, AEF, ...*

Zatem z podobieństwa trójkątów *ABC* oraz *ACD* otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AD|},$$

$$|AB| \cdot |AD| = |AC|^2,$$

$$|AD| = a^2.$$

Alogicznie z podobieństwa trójkątów *ACD* i *ADE* mamy:

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AE|},$$

$$|AC| \cdot |AE| = |AD|^2,$$

$$a \cdot |AE| = \left(a^2\right)^2,$$

$$|AE| = a^3,$$

oraz z podobieństwa trójkątów *ADE* i *AEF* otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|AF|},$$

$$|AD| \cdot |AF| = |AE|^2,$$

$$a^2 \cdot |AF| = \left(a^3\right)^2,$$

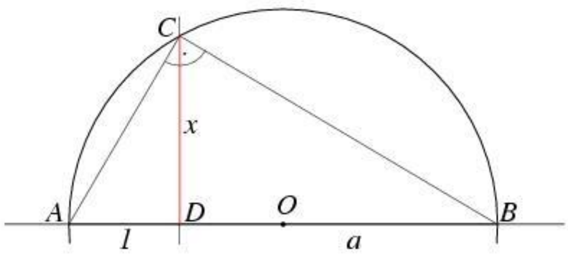
$$|AF| = a^4,$$

itd.

Oto sposób na wyciąganie pierwiastka stopnia drugiego z danej liczby *a*.

Opis konstrukcji (rys. 8).

1. Rysujemy prostą, na której odkładamy kolejno odcinek jednostkowy *AD* oraz odcinek *DB* długości *a*.
2. Budujemy okrąg na odcinku *AB* jako na średnicy.
3. Przez punkt *D* prowadzimy prostą prostopadłą do średnicy *AB* i otrzymujemy punkt *C*.
4. Odcinek *DC* jest szukanym odcinkiem, tzn. jego długość wynosi $\sqrt{a}$.



rys. 8

Uzasadnienie konstrukcji.

Podobnie jak poprzednio, kluczem do uzasadnienia tej konstrukcji jest podobieństwo odpowiednich trójkątów. Zauważmy mianowicie, że podobne są trójkąty *DBC* i *DCA*. Zatem:

$$\frac{|DB|}{|CD|}=\frac{|DC|}{|AD|},$$

$$|CD|^2=|DB|\cdot|AD|,$$

$$x=\sqrt{a}\ .$$

Powyższe konstrukcje pokazują, że poza liczbami wymiernymi istnieje całe mnóstwo konstruowalnych liczb niewymiernych, np.:

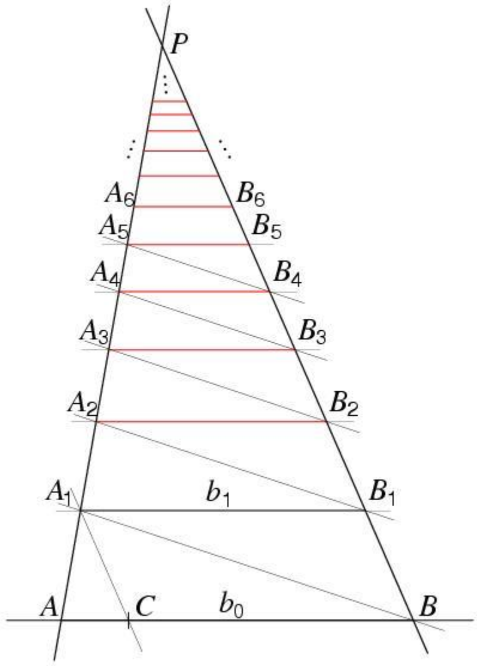
$\sqrt{2},\quad \sqrt{1+3\sqrt{5}},\quad 3\sqrt{2\sqrt{2}+5\sqrt{3}},\quad \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{5}}},\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}},\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$, itp.

Przechodzimy teraz do rozważań na temat ciągów geometrycznych. Zastanówmy się jak mając dane dwa kolejne wyrazy ciągu geometrycznego o ilorazie $q<1$, wyznaczyć pozostałe wyrazy tego ciągu. Przyjmijmy dla ułatwienia, że są to dwa początkowe wyrazy b_0 i b_1, co jak się okaże, nie wpływa znacząco na sposób konstrukcji.

Opis konstrukcji (rys. 9).

1. Na prostej odznaczamy odcinek *AB* długości b_0.
2. Z końców odcinka *AB* wystawiamy dwie proste przecinające się w punkcie *P*.
3. W odległości b_1 na prostej *AB* od punktu *B*, przez punkt *C* prowadzimy prostą równoległą do prostej *BP* i otrzymujemy punkt A_1.
4. Przez punkt A_1 prowadzimy prostą równoległą do prostej *AB* i otrzymujemy punkt B_1, $\left(|A_1B_1|=b_1\right)$.
5. Prowadząc przez punkt B_1 prostą równoległą do prostej A_1B otrzymujemy punkt A_2.
6. Prosta równoległa do prostej *AB* przechodząca przez punkt A_2 wyznacza nam punkt B_2, taki, że $|A_2B_2|=b_2$.
7. Postępując analogicznie jak w punktach 5 i 6 iuzyskujemy kolejno punkty A_3, B_3, A_4, B_4,... takie, że $|A_3B_3|=b_3,\quad |A_4B_4|=b_4,\ldots$

Projekt „Zintegrowany program nauczania matematyki, fizyki oraz informatyki – nowe wyzwanie w edukacji”
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „…nowe wyzwanie w edukacji”
tel. 52 567-07-80, www.nwe.byd.pl, nwe@byd.pl
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
Człowiek – najlepsza inwestycja!



rys. 9

Uzasadnienie.

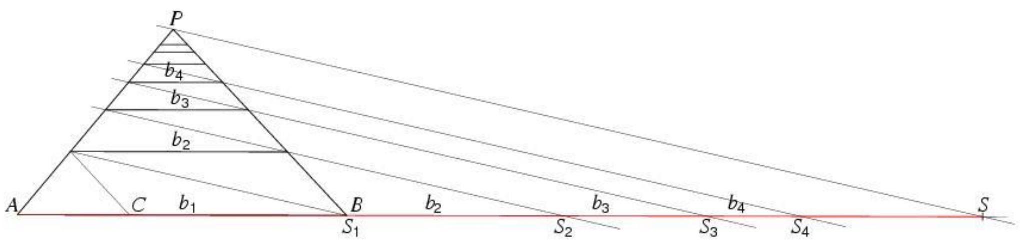
Z wniosków do twierdzenia Talesa otrzymujemy:

$$q=\frac{b_1}{b_0}=\frac{|A_1B_1|}{\underline{\underline{|AB|}}}=\frac{|PB_1|}{|PB|}=\frac{|PA_2|}{|PA_1|}=\frac{|A_2B_2|}{\underline{\underline{|A_1B_1|}}}=\frac{|PB_2|}{|PB_1|}=\frac{|PA_3|}{|PA_2|}=\frac{|A_3B_3|}{\underline{\underline{|A_2B_2|}}}=\ldots.$$

Oznacza to, że:

$$|A_2B_2|=b_2,\quad |A_3B_3|=b_3,\quad |A_4B_4|=b_4,\ldots.$$

Poniższy rysunek (rys. 10) obrazuje jak w prosty sposób wyznaczyć sumy częściowe ciągu geometrycznego $(S_n=|AS_n|)$ oraz sumę szeregu geometrycznego $(S=|AS|)$.



rys. 10.

RÓWNOWAŻNOŚĆ WIELOKĄTÓW PRZEZ ROZKŁAD

Wykażemy poniżej, że dowolne dwa wielokąty posiadające równe pola są równoważne przez rozkład, tzn. że dowolne dwa wielokąty o równych polach można pociąć na równą liczbę (skończoną!) jednakowych wielokątów. Można to ująć jeszcze inaczej, mianowicie, że jeżeli dwa wielokąty mają równe pola, to jeden z nich można pociąć na skończoną liczbę takich wielokątów, z których można ułożyć drugi.

Formalnie można zapisać to tak:

Określenie. *Powiemy, że wielokąt A jest równoważny przez rozkład z wielokątem B, co zapisujemy A~B, jeśli można je podzielić na wielokąty* $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n$ *oraz* $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k$ *odpowiednio takie, że spełnione są warunki:*

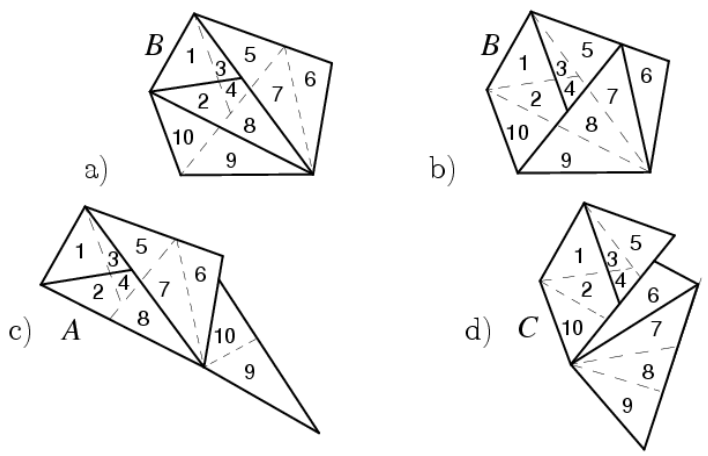
i) $n = k$*;*

ii) $\exists_{\sigma \in S_n} \quad \forall_{1 \le i \le n} \quad W_i = V_{\sigma(i)}$.

Uwaga. *Oczywiste jest, że wielokąty równoważne przez rozkład mają równe pola.*

Lemat 1. *Jeżeli wielokąt A jest równoważny przez rozkład z wielokątem B i wielokąt B jest równoważny przez rozkład z wielokątem C, to wówczas wielokąt A jest równoważny przez rozkład z wielokątem C.*

D o w ó d. Niech dane będą wielokąty *A*, *B* i *C* takie, że *A~B i B~C.*

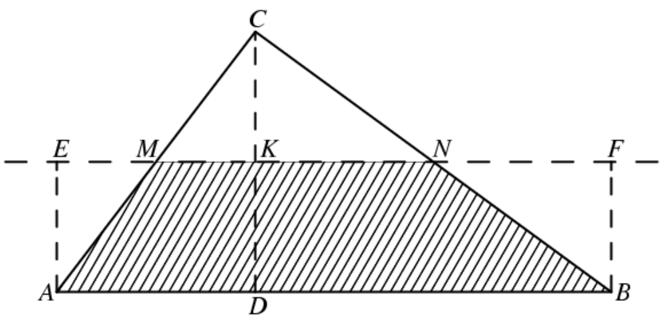


rys. 1

Oznacza to, że wielokąt *B* można podzielić na takie części, z których daje się złożyć wielokąt *A* (linie ciągłe na rys. 1a)) oraz na takie części, z których daje się złożyć wielokąt *C* (linie ciągłe na rys. 1b)). Linie z obydwu podziałów dzielą wielokąt *B* na wiele mniejszych części. Jasne jest, że z tak uzyskanych kawałków można złożyć zarówno wielokąt *A* jak i *C* (rys. 1c), 1d)). Oznacza to, że wielokąty *A* i *C* są równoważne przez rozkład (tzn. *A~C*).

Lemat 2. *Dowolny trójkąt jest równoważny przez rozkład z pewnym prostokątem.*

D o w ó d. Oznaczmy przez *AB* najdłuższy z boków trójkącie *ABC*, a przez *D* spodek wysokości opuszczonej na ten bok z wierzchołka *C* (rys. 2). W takim przypadku oczywiste jest, że punkt *D* leży między punktami *A* i *B*. Oznaczmy środek wysokości *CD* przez *K* i poprowadźmy przez ten punkt prostą równoległą do prostej AB. Prosta ta przecina boki *AC* i *BC* w punktach *M* i *N* odpowiednio. Następnie zrzutujmy rzutem prostokątnym wierzchołki *A* i *B* na tą prostą. Tak otrzymane punkty oznaczmy przez *E* i *F* odpowiednio. Otrzymujemy w ten sposób prostokąt *ABFE*. Pokażemy, że jest on równoważny przez rozkład z trójkątem *ABC*.



rys. 2

Rzeczywiście. łatwo zauważyć, że:

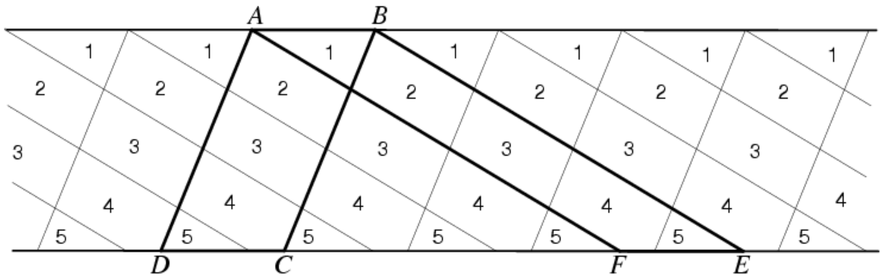
$$\Delta KMC \equiv \Delta EMA \qquad \text{i} \qquad \Delta KNC \equiv \Delta FNB.$$

Ponadto trapez *ABNM* należy zarówno do trójkąta *ABC* jak i do prostokąta *ABFE*. Pokazaliśmy zatem, że wielokąty *ABC* i *ABFE* zbudowane są z takich samych elementów, co oznacza że są one równoważne przez rozkład.

Lemat 3. *Dwa równoległoboki o równym polu mające jeden bok wspólny są równoważne przez rozkład.*

D o w ó d. Niech *ABCD* i *ABEF* oznaczają dwa równoległoboki o wspólnym boku *AB* i równych polach. Oznacza to, że wysokości tych równoległoboków są równe. Zatem odcinki

DC i *EF* leżą na jednej prostej. Odłóżmy na prostej *AB* rząd odcinków równych długości wspólnego boku *AB*. Przez każdy punkt dzielenia tej prostej poprowadźmy proste równoległe do prostych zawierających boki *AD* i *AF*. W ten sposób pas między prostymi *AB* i *DE* dzieli się na szereg równoległoboków (rys.3).

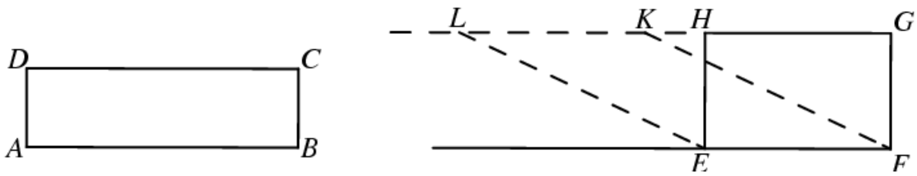


rys. 3

Oznaczmy jednakowymi cyframi odpowiadające sobie (przystające) wielokąty powstałe w wyniku podziału. Pozostaje zauważyć, że każdy z równoległoboków *ABCD* i *ABEF* posiada dokładnie po jednej części oznaczonej numerem 1, po jednej części oznaczonej numerem 2, z numerem 3, itd. Oznacza to, że równoległoboki te są równoważne przez rozkład.

Lemat 4. *Dwa prostokąty o równych polach są równoważne przez rozkład.*

D o w ó d. Niech *ABCD* i *EFGH* oznaczają dwa prostokąty o równych polach. Z czterech odcinków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, wybierzmy najdłuższy. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to odcinek *AB*. Poprowadźmy następnie półprostą *GH* o początku w punkcie *G* i na tak otrzymanej półprostej odznaczmy punkt *L* odległy od punktu *E* o $|AB|$ (rys.4).

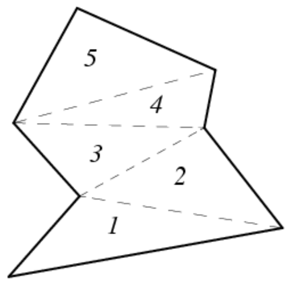


rys. 4

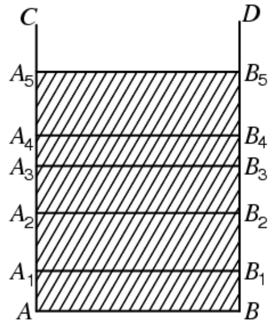
Odkładając na naszej półprostej odcinek *LK* taki, że $|LK|=|EF|$ otrzymujemy równoległobok *EFKL*. Zauważmy, że pole otrzymanego równoległoboku *EFKL* równe jest polu prostokąta *EFGH* oraz czworokąty te mają wspólny bok, zatem na mocy lematu 3 prostokąt *EFGH* i równoległobok *EFKL* są równoważne przez rozkład. W analogiczny sposób wnioskujemy, że równoległobok *EFKL* i prostokąt *ABCD* są równoważne przez rozkład. Zatem na mocy lematu 1 otrzymujemy, że prostokąt *EFGH* jest równoważny przez rozkład z prostokątem *ABCD*.

Lemat 5. *Dowolny wielokąt jest równoważny przez rozkład z pewnym prostokątem.*

D o w ó d. Niech dany będzie dowolny wielokąt (nie koniecznie wypukły). Dokonajmy triangulacji tego wielokąta (każdy wielokąt można podzielić na skończoną liczbę trójkątów). Otrzymane w ten sposób trójkąty oznaczmy liczbami 1, 2, 3, ...,*n* (rys.5a). Weźmy następnie dowolny odcinek *AB* i wystawmy w jego końcach półproste *AC* i *BD* prostopadłe do tego odcinka (rys.5b).



rys. 5a



rys. 5b

Poprowadźmy odcinek A_1B_1, o końcach w półprostych *AC* i *BD*, równoległy do odcinka *AB* w taki sposób, aby pole prostokąta ABA_1B_1 równało się polu trójkąta oznaczonego numerem 1. Wówczas zgodnie z lematami 1, 2 i 4 otrzymujemy, że trójkąt oznaczony numerem 1 jest równoważny przez rozkład z prostokątem ABB_1A_1. W analogiczny sposób prowadzimy odcinek A_2B_2 równoległy do odcinka *AB* tak, żeby trójkąt oznaczony numerem 2 był równoważny przez rozkład z prostokątem $A_1B_1B_2A_2$. Postępując tak dla pozostałych trójkątów otrzymujemy szereg prostokątów, które w sumie dają jeden prostokąt. Otrzymany prostokąt w myśl konstrukcji jest równoważny przez rozkład z wyjściowym wielokątem.

Twierdzenie (Bolaya – Gerwina). *Dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez rozkład.*

D o w ó d. Niech dane będą dwa wielokąty o równych polach. Zgodnie z lematem 5, każdy z tych wielokątów jest równoważny przez rozkład z pewnym prostokątem. Prostokąty te mają oczywiście równe pola, zatem na mocy lematu 4 są równoważne przez rozkład. W połączeniu z lematem 1 oznacza to, że wyjściowe wielokąty są równoważne przez rozkład.

Praca w grupie

Warto wcześniej przygotować karteczki z kolejnymi informacjami i rozdzielić uczniom w grupach, aby się wzajemnie komunikowali przekazując sobie posiadane informacje.

POLOWANIE NA GLĄTWY

W Glątwaldzie, w starym, drewnianym domku myśliwskim zakończyły się właśnie gorączkowe przygotowania związane z przyjazdem gości na polowanie. Wkrótce rozpoczną się wieczorne opowieści trzech zapalonych myśliwych - panów: Abackiego, Babackiego i Cabackiego. O świcie trzej przyjaciele wyruszą na łowy - polowanie na glątwy.

Na podstawie otrzymanych informacji ustal: ile i jakie glątwy upolował każdy myśliwy?

- Panowie Abacki, Babacki, Cabacki upolowali dwie glątwy pięciokilogramowe.
- W trakcie polowania trzej przyjaciele upolowali jedną rekordzistkę - pięćdziesięciokilogramową glątwę.
- Podczas pierwszego dnia myśliwi spostrzegli w oddali 2 dziesięciokilogramowe glątwy.
- Polowanie na glątwy trwało dwa dni.
- Upolowanych dwudziestopięciokilogramowych glątw było dokładnie tyle samo, co dwukilogramowych.
- Podczas polowania łupem panów: Abackiego, Babackiego i Cabackiego stały się trzy dziesięciokilogramowe glątwy.
- Panowie Abacki, Babacki i Cabacki upolowali między innymi trzy glątwy jednokilogramowe.
- Dwie największe glątwy upolowane przez Babackiego ważyły tyle, ile jedna glątwa Abackiego.
- Panowie: Abacki, Babacki i Cabacki byli zapalonymi myśliwymi.
- Pieczona glątwa jest smakołykiem myśliwych.
- Polowanie rozpoczęło się o świcie.

- Upragnionym łupem panów: Abackiego, Babackiego i Cabackiego były dwudziesto kilogramowe glątwy.
- Po polowaniu skrupulatny pan Cabacki policzył upolowane glątwy.
- Wśród listowia zauważono 7 niewielkich glątw.
- Wszystkie upolowane sztuki zostały odnotowane przez pana Cabackiego w 17-tym dzienniku polowań.
- Panowie Abacki, Babacki 1 Cabacki polowali na glątwy.
- Po zakończonym polowaniu panowie zważyli swoje glątwy.
- W polowaniu wzięli udział panowie: Abacki, Babacki i Cabacki.
- W domku myśliwskim, należącym do stryja pana Babackiego, zważono skrupulatnie wszystkie glątwy.
- Każdy z trzech panów upolował po sześć glątw
- Po zważeniu okazało się, że łup każdego z myśliwych ważył tyle samo.
- Marzeniem każdego myśliwego jest udane polowanie.
- Przyjaciele upolowali także glątwy dwudziestopięciokilogramowe, dwudziestokilogramowe i dwukilogramowe, lecz nikt nie pamiętał po ile sztuk.

FLAGA BOLUNGWY

Na podstawie otrzymanych informacji ustal: jak wygląda flaga?

1. Bolungowie wiedzą, że ich wyspa powstała i rozwinęła się dzięki ważnym bogom.
2. Przy opracowywaniu flagi koniecznie trzeba uwzględnić wszystkie warunki, tak aby żaden z bogów nie zapałał gniewem przeciwko Bolungom.
3. Prezydent Bloungwy zatwierdził ten projekt flagi, w którym dolny pas był innego koloru niż w pozostałych projektach.
4. Jeśli na fladze nie będzie koloru czarnego, muszą na niej sąsiadować symbole Boga Ognia i Boga Wszystkiego co Żyje.
5. Prezydentowi Bolungwy przedstawiono cztery różne projekty flagi.
6. Symbole bogów będących w konflikcie nie mogą występować razem w żadnym układzie.
7. Symbolem Boga Wiatru jest kolor biały.
8. Jeżeli na fladze nie będzie koloru czerwonego, najniższy pas musi symbolizować Boga

Słońca.

9. Wszystkie przedstawione prezydentowi flagi zgodne są z wolą bogów (zgodne z wszystkimi znanymi warunkami).
10. Kolory pasów mają symbolizować życzliwych bogów Bolungwy.
11. Kraj Bolungwy uzyskał ostatnio niepodległość.
12. Mieszkańcy Bolungwy podjęli uchwałe, iż flaga ma sie skladać z czterech równoległych poziomych pasów.
13. Symbol Boga Słońca może być obecny na fladze tylko wtedy, jeśli pierwszy górny pas będzie symbolizował Boga Wiatru.
14. Opiekuńczych bogów Bolungwy jest pięciu.
15. Symbolem Boga Wszystkiego co Żyje jest kolor zielony.
16. Symbolem Boga Ognia jest kolor czerwony.
17. Jeżeli na fladze nie będzie symbolu Boga Ziemi, pas czerwony musi występować natychmiast po zielonym, patrząc od góry.
18. Jak wygląda flaga Bolungwy?
19. Bolungowie są bardzo zgodnym narodem.
20. W odlgłym rejonie Pacyfiku znajduje się mało znana wyspa znana Bolungwy (oczywiście taka nie istnieje).
21. Bóg Ziemi jest w stałym konflikcie z Bogiem Ognia.
22. Symbolem Boga Ziemi jest kolor czarny.
23. W trzech przedstawionych Prezydentowi projektach flagi, ostatni pas był tego samego koloru.
24. Symbolem Boga Słońca jest kolor żółty.

Łamigłówki i ćwiczenia umysłowe

Ćwiczenie 1.

Wybierz kilka liter, a następnie napisz takie zdanie o matematyce albo o szkole, w którym kolejne wyrazy zaczynają się tymi literami.

np. M J O R P L → Matematyka Jest Ogromnie Rozpaczliwą Próbą Liczenia.

Ćwiczenie 2. (w parach)

W pudełku (kopercie) znajdują się karteczki z różnymi wyrazami. Osoba_1 wyciąga losowo trzy karteczki, a Osoba_2 układa zdanie z użyciem trzech wylosowanych wyrazów (w dowolnej formie). Następnie Osoba_2 losuje jedną karteczkę, a Osoba_1 rozbudowuje otrzymane zdanie wstawiając gdzieś kolejny wyraz, itd. do 6 karteczek.

KOZA	**PŁOT**	**STODOŁA**	**SZKOLA**	**CYGARO**	**BUTY**	**PŁYN**
DROGA	**ŚCIANA**	**KOMPUTER**	**DŹWIG**	**ŻELAZKO**	**PAPIER**	**WYWIADÓWKA**
STÓŁ	**KAPSEL**	**CHOROBA**	**TELEWIZJA**	**PADACZKA**	**PROSZEK**	**SŁUCHAWKI**
DOM	**LITERA**	**TRAWA**	**HUŚTAWKA**	**KASA**	**CEGŁA**	**PROFESOR**
RURA	**KRAN**	**KIEROWNICA**	**OŚĆ**	**GRYZOŃ**	**SŁOMA**	**NIEBO**

Ćwiczenie 3.

Podajemy dwa „skrajnie niczym nie związane" rzeczowniki, a następnie tworzymy <u>możliwie najkrótszy</u> łańcuch powiązań. Przykład:

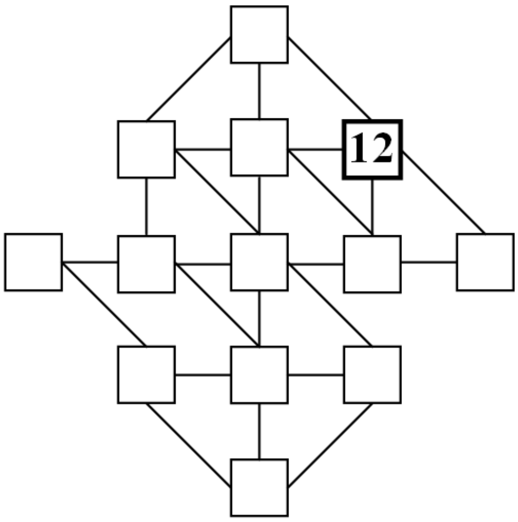
lodówka i słoń: lodówka → mięso → słoń;

kran i dziecko: kran → kąpiel → zabawa → dziecko.

Łamigłówki

Łamigłówka 1.

Uzupełnij puste kwadraty liczbami od 1 do 13 tak, by liczby w połączonych liniami, sąsiednich, kwadratach nie różniły się o więcej niż trzy.



Łamigłówka 2 (*Sudoku*).

Uzupełnij wszystkie puste miejsca liczbami tak, aby w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdym z dziewięciu małych kwadratów występowały wszystkie z liczb od 1 do 9, każda dokładnie raz.

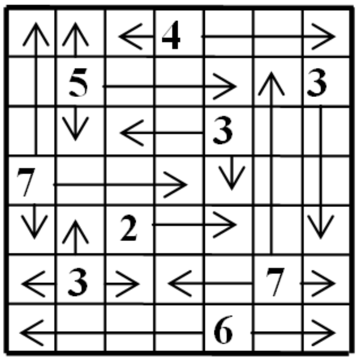
		2	9				3	
		6		4		7	1	9
9	1							
	6			5				4
		8				5		
4				2			7	
6							5	8
5	8	9		6		2		
	3					6		

Łamigłówka 3.

Dorysuj linie przechodzące przez puste kwadraty tak, by spełnione były następujące warunki:

- ✓ każda linia miała początek w kwadracie z liczbą,
- ✓ z każdego kwadratu może wychodzić kilka linii,
- ✓ wszystkie kwadraty muszą być wykorzystane,
- ✓ suma przekreślonych kwadratów liniami wychodzącymi z danego kwadratu musi być równa liczbie widniejącej w tym kwadracie,
- ✓ linie nie mogą się krzyżować.

Przykład

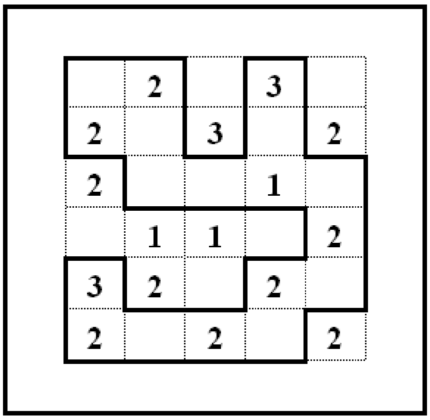


		7					10				
					6				2		
						3					
	7										
				3							
9								13			
		3	10								
	6						4		8		
		2								8	
					4						8
						8				3	

Łamigłówka 4.

Narysuj łamaną zamkniętą, która się nie krzyżuje i nie przecina. Liczba w każdym z kwadratów oznacza ilość odcinków łamanej sąsiadujących z danym kwadratem. Z pustym kwadratem może sąsiadować dowolna liczba odcinków.

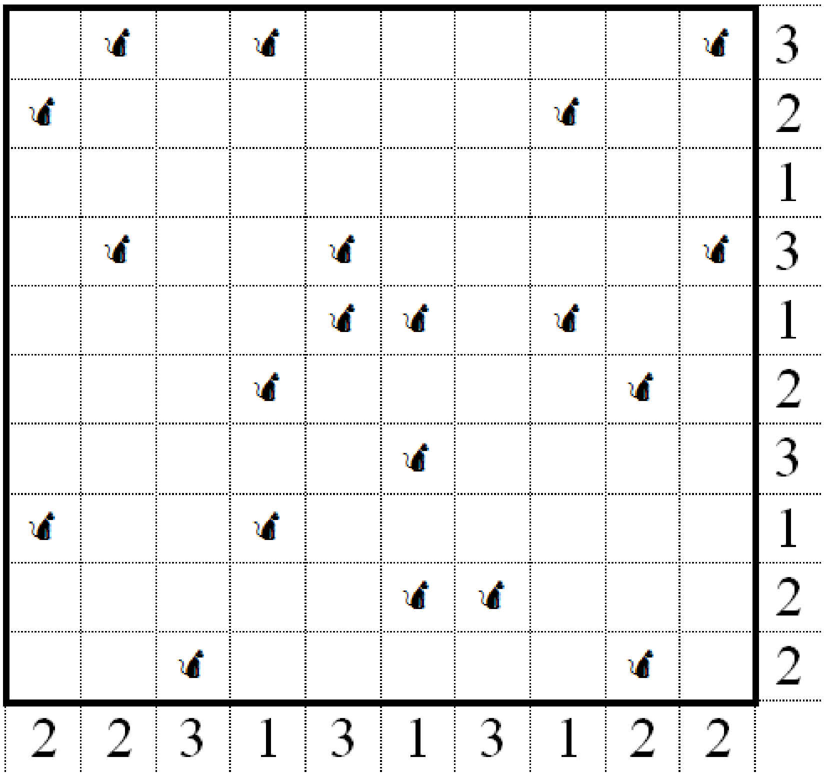
Przykład



	3		1			3		1	
3		3		2	1		0		2
2		1					1		0
				3	1				
			3			1			
1	1			1	3			3	2
		3					3		
3	3			3	3			1	1
			2			2			
2	0			3	2			3	1
		0					0		
1	3			1	3			2	1
			3			3			
				2	3				
3		2					3		2
2		3		3	3		2		3
	3		2			3		1	

Łamigłówka 5.

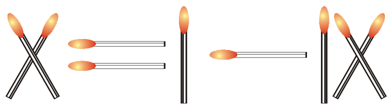
Dla każdego z kotów, w sąsiadującej z nim (poziomo lub pionowo) kratce, jest jedna miska mleka. Żadne dwie miski nie znajdują się w sąsiednich kratkach, nawet po przekątnej. Liczby informują ile misek jest w poszczególnych rzędach i kolumnach. Umieść miski we właściwych kratkach.



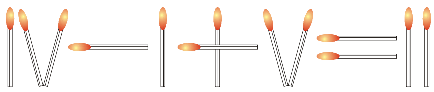
Monety. Dziesięć jednakowych monet ułożono w trójkąt równoboczny skierowany „w dół". Przełóż trzy monety tak, aby powstał trójkąt skierowany „w górę"!

Zapałki. Przekładając tylko jedną zapałkę popraw każdy z poniższych zapisów tak, aby stał się prawdziwy:

a)



b)



ALICJA W KRAINIE CZARÓW

Podczas wizyty w Krainie Czarów Alicja odwiedziła Las Zapomnienia. W tym lesie żyją Lew i Jednorożec. Są to dziwne stworzenia. Lew kłamie w poniedziałki, wtorki i środy, a w pozostałe dni tygodnia mówi prawdę. Jednorożec natomiast kłamie w czwartki, piątki i soboty, lecz w pozostałe dni tygodnia mówi prawdę.

Zadanie 1. Pewnego dnia Alicja spotkała Lwa i Jednorożca odpoczywających pod drzewem. Wygłosili oni następujące zdania:

Lew: Wczoraj był jeden z dni, w które kłamię.

Jednorożec: Wczoraj był jeden z dni, w które ja również kłamię.

Z tych dwóch zdań Alicja potrafiła wydedukować, jaki był dzień tygodnia. Jaki to był dzień?

Zadanie 2. Kiedy indziej Alicja spotkała samego Lwa. Wygłosił on dwa następujące zdania:

Wczoraj kłamałem.

Będę znów kłamał w dwa dni po jutrzejszym dniu.

Jaki to był dzień tygodnia?

Zadanie 3. W jakie dni tygodnia Lew może wygłosić oba następujące zdania:

Wczoraj kłamałem. Jutro znów będę kłamał.

Zadanie 4. W jakie dni tygodnia Lew może wygłosić następujące zdanie: „Wczoraj kłamałem i jutro znów będę kłamał".

Alicja w Krainie Czarów poznała również braci Tweedleduma i Tweedledeego. Jeden z nich jest taki jak Lew i kłamie w poniedziałki, wtorki i środy, a w pozostałe dni tygodnia mówi prawdę. Drugi jest taki jak Jednorożec: kłamie w czwartki, piątki i soboty, lecz w pozostałe dni tygodnia mówi prawdę. Alicja nie wiedziała, który z nich jest podobny do Lwa, a który do Jednorożca. Aby sprawę jeszcze pogorszyć dodajmy, że bracia wyglądali bardzo podobnie do siebie, toteż Alicja nie mogła ich nawet odróżnić. Sytuacja była więc bardzo kłopotliwa...

Zadanie 5. Pewnego dnia Alicja spotkała obu braci, którzy wygłosili następujące zdania:
Pierwszy: Jestem Tweedledum.
Drugi: Jestem Tweedledee.
Który z nich był naprawdę Tweedledumem, a który Tweedledeem?

Zadanie 6. Kiedy indziej Alicja spotkała obu braci i spytała jednego z nich: „Czy kłamiesz w niedziele"? Ten odpowiedział twierdząco. Z kolei zadała to samo pytanie drugiemu. Jak odpowiedział?

Zadanie 7. Przy innej okazji bracia wygłosili następujące zdania:
Pierwszy: (1) Kłamię w soboty.
(2) Kłamię w niedziele.
Drugi: Będę kłamał jutro.
Jaki to był dzień tygodnia?

Mistrz Rachunków. Uczestnicy rozwiązują na czas zestaw elementarnych zadań rachunkowych. Osoba, która oddaje pracę jako n-ta uzyskuje n punktów. Następnie za każdy błędnie rozwiązany przykład, lub brak rozwiązania otrzymuje dodatkowy punkt. Ostatecznie zwycięża osoba, która zdobyła najmniej punktów.

1. $7+12+4+11=$
2. $17+15+19+3=$
3. $15-27-3-4=$
4. $83-37-27-76=$
5. $-2+13-(-3)+2=$
6. $5+7+(-3)+(-2)-2=$
7. $1111+111+11+1=$
8. $1111+123=$
9. $13\cdot 3+5\cdot 2-7=$
10. $17\cdot 5+25-17\cdot 2=$
11. $38:19-2+1=$
12. $54:9-54:18+2=$
13. $((12:3):2)\cdot 6=$
14. $((22\cdot 33):(11\cdot 11))=$
15. $123123:1001-1=$
16. $[(16:8):4]:2=$
17. $[16:(8:4)]:2=$
18. $16:[(8:4):2]=$
19. $16:[8:(4:2)]=$
20. $(16:8):(4:2)=$
21. $0:12+12=$
22. $15\cdot 2\cdot 20=$
23. $(45\cdot 2-160:2):(-10)=$
24. $(-3)\cdot(-2+(-2)):(-6)=$
25. $[7+((-2)\cdot 3)-101]\cdot(8-2\cdot 4)=$
26. $4^2-3^2+1=$

27. $3^3+4-17=$

28. $-2+(-2)^3+(-2)^2=$

29. $5^2-5^3=$

30. $(-3^2)\cdot(-1)^2=$

31. $[-5-(-2)^3-3]^{10}=$

32. $(1357-986+2)^0=$

33. $\sqrt{81}+\sqrt{9}=$

34. $\sqrt{36}+\sqrt{64}=$

35. $\sqrt{5+\sqrt{16}}=$

36. $4\sqrt{25}-5\sqrt{16}=$

37. $2^3+\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=$

38. $2{,}3-4+1{,}7=$

39. $12{,}543\cdot 10^3=$

40. $4000:10000=$

41. $0{,}1+0{,}01+0{,}001=$

42. $124:\left(24\cdot\frac{1}{24}\right)=$

43. $\frac{3}{4}+(-0{,}75)=$

44. $\sqrt{1\frac{9}{16}}+\frac{3}{4}=$

45. $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=$

46. $(888:111)\cdot\frac{1}{2}=$

47. $\frac{(-2)^2+2}{2^3-2}=$

48. 25% liczby $200=$

49. $3\frac{1}{2}:\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=$

50. $\frac{3}{2\cdot 7}\cdot\frac{14}{3^2}=$

Literatura

Konkurs „Liga Zadaniowa" w województwie kujawsko-pomorskim.

Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, Liga Zadaniowa. Zbiór zadań dla uczniów zaintersowanych matematyką, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Z. Bobiński, P. Jarek, A. Świątek, M. Uscki, Miniatury matematryczne, cz. 3, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

Praca zbiorowa, Miniatury matematryczne, cz. 4, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń.

R. Müller-Fonfara, Mathematic für Denksportler,

Materiały warsztatowe GWO

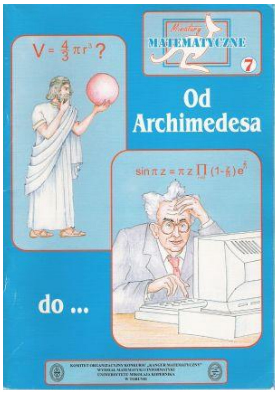
Miniatury Matematyczne, Wydawnictwo AKSJOMAT Toruń:

- cz. 9 – Uczymy się myśleć nieszablonowo, 2003;
- cz. 10 – Kalendarz Matematyczny Ucznia Gimnazjum, 2003;
- cz. 12 – Uczymy się myśleć przez rozrywkę, 2004;
- cz. 13 - Kalendarz Matematyczny Ucznia Gimnazjum, 2004;
- cz. 15, Wesoła i kolorowa matematyka, 2005.

Matematyka z wesołym kangurem, Wydawnictwo AKSJOMAT Toruń.

Konkurs matematyczny, Liga Zadaniowa.

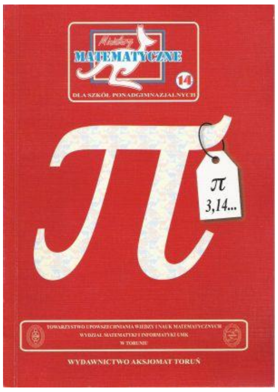
Polecane teksty popularnonaukowe



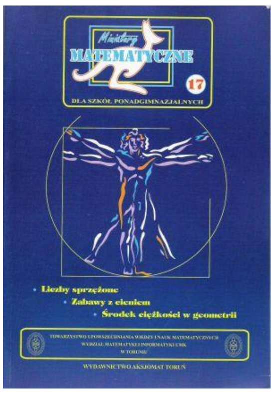
Miniatury matematyczne 7, *Od Archimedesa do ...Wielkie postacie świata matematyki,* Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

Miniatura przedstawia bohaterów - wielkie postaci świata matematyki. Krótkie notki biograficzne wskazują jedynie te dokonania tych twórców, które mogą być zrozumiałe uczniowi. Znaleźć tu można również sylwetki nieżyjących już matematyków toruńskich, w szczególności barwną sylwetkę znakomitego popularyzatora matematyki Leona Jeśmanowicza. Podróż przez bogatą historią matematyki rozpoczyna się od przedstawienia greckich matematyków do czasów współczesnych. Przybliżone zostały sylwetki Archimedesa, Newtona, Eulera i Gaussa. Dodatkowo znaleźć można ciekawostki matematyczne, które powinny zainteresować młodego czytelnika.

Miniatury matematyczne 14*,* Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

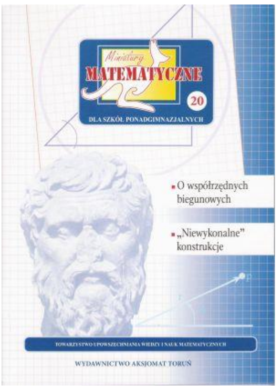


Generalnie matematyka zajmuje się liczbami, funkcjami i figurami. Wśród funkcji omawianych w szkole, szczególne miejsce zajmuje funkcja kwadratowa. Wiele typowych własności tej funkcji omawiają podręczniki szkolne. Celem pierwszego artykułu jest pokazanie pewnych zagadnień dotyczących tej funkcji. W matematyce istnieje kilka słynnych liczb: O, 1, e, pi. Jednej z nich, a mianowicie liczbie TT - być może najsłynniejszej z wyżej wymienionych jest poświęcony drugi artykuł. Programy nauczania matematyki w szkole pokazują, że istnieją różne działy matematyki: arytmetyka, geometria, algebra, itp. Stwarzając niekiedy wrażenie, że są to niezależne działy. W trzecim artykule znajdujemy wzajemne ich powiązanie.



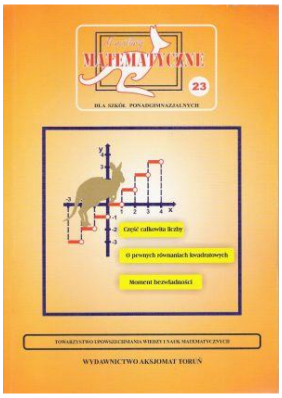
Miniatury matematyczne 17, *Liczby sprzężone, Zabawy z cieniem, Środek ciężkości*, Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

Pierwszy z artykułów omawia tzw.rzeczywiste liczby sprzężone. Pokazane zostały zastosowania tego pojęcia zarówno w zakresie znanym fragmentarycznie z programu szkoły średniej (usuwanie niewymierności z mianownika), jak i w bardziej zaawansowanym kontekście. Opisano również często zaskakujące powiązanie tego pojęcia z geometrią i liczbami Fibonacciego. Omawiane tam zagadnienia są pojęciowo łatwe i dostępne dla każdego ucznia liceum. Artykuł drugi jest zamierzeniem bardziej ambitnym i ma charakter monografii naukowej. Jego celem jest przystępne zapoznanie czytelnika z trudnymi lecz niezwykle ważnymi w geometrii oraz np. w architekturze pojęciami i twierdzeniami geometrii rzutowej. Te zagadnienia przedstawione są w sposób systematyczny i poglądowy. Sposób prezentacji tematu odwołuje się do wyobraźni... ale od czytelnika wymaga pewnego wysiłku i zaangażowania. Ogrom nowych pojęć wprowadzonych w tekście wymaga poświęcenia przedstawianym zagadnieniom wielu dni. Studiowanie tego artykułu ułatwiają liczne i sugestywne ilustracje. Trzeci i ostatni artykuł poświęcony jest zastosowaniom w geometrii elementarnej typowo fizycznego pojęcia, jakim jest środek ciężkości. Przedstawiamy w nim dowody znanych i popularnych twierdzeń geometrycznych oraz zastosowanie metody środka ciężkości w rozwiązywaniu zadań zarówno typowych, jak i niestandardowych. Zadania zostały podzielone na dwie grupy- zadania, które można rozwiązać poprzez proste zastosowanie zaprezentowanej metody, w drugiej zadania trudniejsze i nietypowe, wymagające pewnej inwencji i pomysłu.



Miniatury matematyczne 20, *O współrzędnych biegunowych, "Niewykonalne" konstrukcje,* Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

Pierwszy z artykułów ma na celu zapoznanie czytelnika z pewnym nieużywanym w szkołach układem współrzędnych - układem biegunowym. Artykuł zawiera przykłady krzywych, których równania zapisano w tym układzie. Jednocześnie zawarte tam informacje mają na celu ułatwić czytanie artykułu drugiego, poświęconego pewnym, w powszechnym przekonaniu niewykonalnym konstrukcjom geometrycznym. Autor drugiego artykułu w sposób barwny przedstawia genezę, wyjaśnia rolę i istnienie trzech sławnych problemów starożytności: kwadratury koła, trysekcji kąta i podwojenia sześcianu. Jednocześnie czytelnik prawdopodobnie ze zdziwieniem dowie się, że te "niewykonalne" konstrukcje może przeprowadzić sam ... o ile oczywiście dysponuje odpowiednimi ku temu narzędziami.

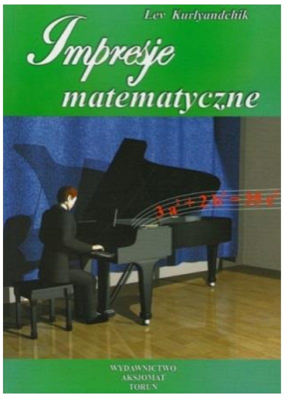


Miniatury matematyczne 23, *Część całkowita liczby, O pewnych równaniach kwadratowych, Moment bezwładności,* Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

Pierwszy z artykułów dotyczy części całkowitej liczby rzeczywistej, pojęcia silnie wykorzystywanego w informatyce, teorii informacji i technologiach komputerowych. Pojęcie drugie, moment bezwładności, ma pochodzenie stricte fizyczne. Wtórnie doczekało się ono ścisłej matematycznej definicji i zaczęło funkcjonować w matematyce czystej i stosowanej.

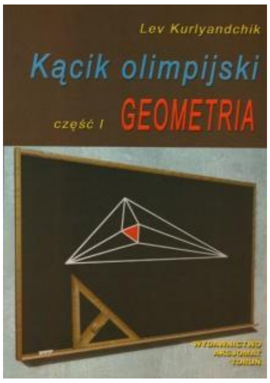
Miniatury matematyczne 29, *Fraktale w Cindirelli. Przystawanie trójkątów. Iluzje matematyczne... i nie tylko*, Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

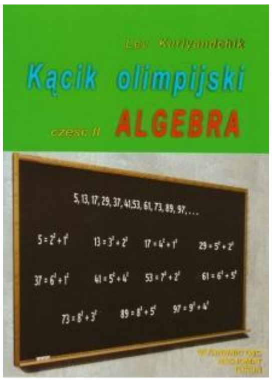
Pierwszy artykuł poświęcony jest fraktalom, a dokładniej, metodom konstrukcji tych tajemniczych obiektów w programie graficznym Cinderella.
Druga miniatura omawia wybrane zagadnienia dotyczące przystawania trójkątów.
Trzecia miniatura omawia pewne standardowe sytuacje w matematyce, które prowokują do popełniania błędów.

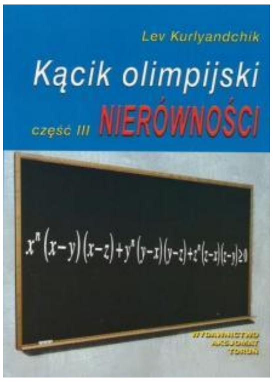


Impresje matematyczne t. I, t. II, Lev Kurlyandchik, Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

Składające się z dwóch tomów Impresje matematyczne powstały w wyniku edycji książki Etiudy matematyczne. Tom I Impresji matematycznych przeznaczony jest dla uczniów gimnazjów, natomiast tom II dla uczniów liceów. Niniejsza książka składa się z czterech rozłącznych części. Rozdział I jest poświęcony zagadnieniom związanym z trójmianem kwadratowym. Rozdział II - geometrycznemu przedstawieniu różnych średnich i ich porównaniu. Rozdział III związany jest z klasyfikacją równań na podstawie różnych metod stosowanych do ich rozwiązania. Rozdział IV obejmuje zagadnienia z teorii liczb. Podstawową myślą, która przyświecała autorowi tych książek, było napisanie kilku niedużych opowieści z różnych dziedzin matematyki. Każda opowieść składa się z dwóch części: teorii i zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania, przy czym teoria jest często wprowadzana małymi krokami poprzez rozwiązywanie kolejnych zadań. Każde z prezentowanych zadań uzupełnione jest pełnym rozwiązaniem.







Kącik olimpijski część I, Geometria; *Kącik olimpijski część II, Algebra; Kącik olimpijski część III, Nierówności;* Lev Kurlyandchik, Wydawnictwo Aksjomat Toruń.

Celem tej serii Kącik olimpijski jest zapoznanie ucznia z najważniejszymi pojęciami elementarnej matematyki i uczenie rozwiązywania niestandardowych zadań. Pierwsza książka poświęcona jest geometrii. Zadania w tym zbiorze zostały podzielone na trzy części. Poziom A zawiera zadania przeznaczone dla uczniów trzeciej klasy gimnazjum i pierwszej liceum, poziom B - dla uczniów pierwszej i drugiej klasy liceum, poziom C - dla uczniów klasy drugiej i trzeciej liceum.
Celem drugiej książki jest zapoznanie ucznia z najważniejszymi pojęciami elementarnej matematyki i uczenie rozwiązywania niestandardowych zadań.
Celem trzeciej książki jest zapoznanie ucznia z najważniejszymi pojęciami elementarnej matematyki i uczenie rozwiązywania niestandardowych zadań związanych z nierównościami. Na końcu książki znajduje się kilka miniaturek związanych z nierównościami.

FIZYKA

Szczegółowy rozkład materiału

KLASA I 2 godziny tygodniowo				
Lp	**Tytuł modułu**	**Temat lekcji**	**Liczba lekcji**	**Korelacje**
1	Kinematyka punktu materialnego	1. Położenia punktu materialnego	1	
		2 Prędkość chwilowa i średnia	1	
		3 Ruch jednostajny prostoliniowy	1	MAT → FIZ
		4 Przyspieszenie	1	
		5 Ruch jednostajnie przyspieszony	1	MAT → FIZ FIZ → INF
		6 Ruch jednostajnie opóźniony	1	MAT → FIZ FIZ → INF
		7 Pomiary w fizyce	1	
		8,9 Analiza niepewności pomiarowych	2	MAT → FIZ
		10,11 Wyznaczanie przyspieszenia w ruchu jednostajnie zmiennym	2	MAT → FIZ FIZ → INF
		12 Swobodny spadek i rzut pionowy	1	
		13 Ruch w dwóch wymiarach	1	
		14,15 Rzut poziomy	2	
		16 Ruch po okręgu	1	
		17 Przyspieszenie w ruchu po okręgu	1	MAT→ FIZ
		18 Względność ruchu	1	
		19 Rozwój poglądów na ruch i jego przyczyny	1	FIZ → INF
		20, 21 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		22 Sprawdzian	1	
2	Dynamika punktu materialnego	1 Oddziaływania	1	MAT → FIZ
		2,3 II zasada dynamiki Newtona	2	
		4,5 Doświadczalna weryfikacja II zasady dynamiki	2	
		6 Zasada zachowania pędu	1	
		7 Opory ruchu	1	
		8 Przyczyny ruchu jednostajnie prostoliniowego	1	
		9 Układy inercjalne	1	
		10 Siły w układach nieinercjalnych	1	
		11 Siły w ruchu krzywoliniowym	1	
		12 Wzajemność oddziaływań	1	
		13 Analiza tekstu	1	
		14,15 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		16 Sprawdzian	1	

KLASA II 4 godziny tygodniowo				
Lp	**Tytuł modułu**	**Temat lekcji**	**Liczba lekcji**	**Korelacje**
1	Energia mechaniczna	1 Pojęcia pracy mechanicznej	1	MAT → FIZ
		2 Moc	1	
		3 Energia kinetyczna	1	FIZ → INF
		4 Energia potencjalna	1	
		5,6 Zasada zachowania energii	2	
		7,8 Swobodny spadek, rzut pionowy, rzut poziomy i ukośny	2	MAT → FIZ FIZ → INF
		9,10 Zderzenia	2	
		11,12 Projekt: Kołowrót	2	
		13 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	1	
		14 Sprawdzian	1	
2	Mechanika bryły sztywnej	1 Bryła sztywna	1	
		2 Ruch postępowy i obrotowy	1	MAT → FIZ
		3 Moment siły	1	
		4 Równowaga bryły sztywnej	1	
		5 Moment bezwładności	1	
		6 II zasada dynamiki Newtona	1	
		7 Zasada zachowania momentu pędu	1	
		8 Energia kinetyczna	1	
		9 Zasada zachowania energii	1	
		10,11 Doświadczalne badanie zależności przyspieszenia kątowego od momentu siły i momentu bezwładności	2	
		12,13 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		14 Sprawdzian	1	
3	Grawitacja	1 Prawa Keplera	1	
		2,3 Prawo powszechnej grawitacji	2	MAT → FIZ FIZ → INF
		4 Ciężar ciała	1	
		5 Natężenie pola grawitacyjnego	1	
		6, 7 Praca i energia potencjalna polu grawitacyjnym	2	
		8, 9 Ruch ciał w jednorodnym polu grawitacyjnym.	2	
		10, 11 Wyznaczanie przyspieszenia grawitacyjnego	2	
		12, 13 Pole grawitacyjne układu ciał	2	MAT→ FIZ
		14, 15 Loty kosmiczne	2	FIZ→ INF
		16 Analiza tekstu	1	
		17, 18 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	

		19 Sprawdzian	1	
4	Termodynamika	1 Stany skupienia materii	1	
		2 Energia wewnętrzna	1	
		3,4 Przemiany fazowe	2	
		5 Bilans cieplny	1	
		6, 7 Wyznaczanie ciepła właściwego	2	
		8 Kinetyczna teoria gazu	1	MAT→ FIZ
		9 Definicja ciśnienia i temperatury	1	
		10 I zasada termodynamiki	1	
		11 Model gazu doskonałego	1	
		12, 13 Przemiany stanu gazu doskonałego	2	MAT→ FIZ FIZ→ INF
		14 Energia w przemianach gazowych	1	
		15, 16 Cykle przemian termodynamicznych	2	
		17 Statystyczne ujęcie termodynamiki	1	FIZ→ INF
		18 II zasada termodynamiki	1	
		19, 20 Silniki cieplne	2	
		21 Początki termometrii – „Historia fizyki" A.K. Wróblewski	1	
		22, 23 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		24 Sprawdzian	1	
5	Ruch harmoniczny i fale mechaniczne	1, 2 Kinematyka ruchu drgającego	2	MAT→ FIZ FIZ→ INF
		3 Dynamika ruchu drgającego	1	MAT→ FIZ
		4 Energia w ruchu drgającym	1	MAT→ FIZ
		5 Wahadło matematyczne	1	
		6, 7 Badanie własności wahadła matematycznego	2	
		8 Drgania własne i wymuszone	1	
		9 Rezonans drgań	1	FIZ →INF
		10 Ruch falowy w ośrodkach sprężystych	1	
		11 Matematyczny opis fali płaskiej	1	MAT→ FIZ
		12 Załamanie fali na granicy dwóch ośrodków	1	
		13 Zasada Huygensa. Ugięcie fali	1	
		14, 15 Interferencja fal	2	MAT→ FIZ
		16 Fale stojące	1	FIZ→ INF
		17, 18 Badanie własności fali stojącej	2	MAT→ FIZ FIZ→ INF
		19 Instrumenty muzyczne	1	FIZ→ INF
		20 Efekt Dopplera	1	FIZ→ INF
		21 Zdążyć przed wstrząsem, A. Hołdys Wiedza i życie 5/2011	1	
		22, 23 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	

		24 Sprawdzian	1	
6	Pole elektryczne	1, 2 Zasada zachowania ładunku elektrycznego, elektryzowanie ciał	2	
		3 Prawo Coulomba	1	MAT→ FIZ
		4 Natężenie pola elektrostatycznego	1	
		5, 6 Pole elektrostatyczne układu ładunków elektrycznych	2	
		7, 8 Badanie kształtu linii pola elektrostatycznego	2	
		9 Energia ładunku w polu elektrostatycznym	1	
		10 Potencjał pola elektrostatycznego	1	
		11 Praca w polu elektrostatycznym	1	
		12 Pojemność elektryczna	1	
		13 Kondensator płaski	1	
		14 Ruch cząstki naładowanej w polu elektrostatycznym	1	FIZ→ INF
		15, 16 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		17 Sprawdzian	1	
7	Prąd stały	1 Własności elektryczne materii	1	
		2 Opór przewodnika	1	
		3, 4 Badanie oporu przewodnika	2	
		5 Prawo Ohma	1	
		6 Wpływ czynników zewnętrznych na opór przewodnika	1	
		7 I prawo Kirchoffa	1	
		8, 9 Łączenie oporników	2	
		10, 11 Praca i moc prądu elektrycznego	2	
		12 Siła elektromotoryczna	1	
		13 Opór wewnętrzny	1	
		14, 15 II prawo Kirchoffa	2	
		16 Zasada działania akumulatora	1	
		17 Rodzaje przewodnictwa	1	
		18, 19 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		20 Sprawdzian	1	

KLASA III

3 godziny tygodniowo

Lp	Tytuł modułu	Temat lekcji	Liczba lekcji	Korelacje
1	Pole magnetyczne	1, 2 Badanie właściwości pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem	2	
		3 Prawo Ampere'a	1	
		4 Indukcja pola magnetycznego	1	
		5, 6 Ruch cząstki naelektryzowanej w polu magnetycznym	2	MAT→ FIZ FIZ→ INF
		7 Siła elektrodynamiczna	1	

		8, 9 Oddziaływanie przewodników z prądem	2	
		10 Budowa i zasada działania silnika elektrycznego	1	FIZ→ INF
		11 Właściwości magnetyczne materii	1	
		12, 13 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		14 Sprawdzian	1	
2	Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny	1 Strumień indukcji pola magnetycznego	1	
		2, 3 Zjawisko indukcji elektromagnetycznej	2	
		4 Ruch przewodnika w polu magnetycznym	1	
		5 Budowa i zasada działania prądnicy prądu przemiennego	1	
		6, 7 Prąd przemienny	2	
		8 Półprzewodniki	1	
		9, 10 Badanie charakterystyki diody półprzewodnikowej	2	
		11 Indukcja własna i wzajemna	1	
		12 Budowa i zasada działania transformatora	1	
		13, 14 Obwody RLC	2	
		15, 16 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		17 Sprawdzian	1	
3	Fale elektromagnetyczne i optyka	1 Prawa Maxwella	1	
		2 Fala elektromagnetyczna i jej własności	1	
		3 Widmo fal elektromagnetycznych	1	
		4 Wyznaczanie prędkości światła	1	
		5, 6 Interferencja światła, doświadczenie Younga	2	
		7 Dyfrakcja światła	1	
		8, 9 Badanie zjawiska dyfrakcji	2	
		10 Polaryzacja światła	1	
		11 Prawa optyki geometrycznej	1	
		12 Zjawisko załamania	1	
		13 Całkowite wewnętrzne odbicie	1	
		14, 15 Wyznaczanie współczynnika załamania światła przy pomocy pomiaru kąta granicznego	2	
		16 Własności optyczne soczewek	1	
		17 Konstrukcja obrazów w soczewkach	1	
		18, 19 Badanie własności soczewek	2	
		20 Równanie soczewki	1	FIZ→ INF
		21 Układy soczewek	1	
		22 Wady soczewek	1	
		23, 24 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		25 Sprawdzian	1	
4	Elementy fizyki współczesnej	1 Korpuskularna natura światła	1	
		2, 3 Efekt fotoelektryczny	2	
		4 Promieniowanie ciała doskonale	1	

		czarnego		
		5 Widmo emisyjne i absorbcyjne	1	
		6 Promieniowanie rentgenowskie	1	FIZ→ INF
		7, 8 Powtórzenie materiału i ćwiczenia rachunkowe	2	
		9 Sprawdzian	1	

Materiały uzupełniające

Analiza niepewności pomiarowych

Podstawowym sposobem odkrywania praw fizycznych jest doświadczenie. Możliwość wielokrotnego powtórzenia pomiarów w jednakowych warunkach ułatwia odkryci zależności między mierzonymi wielkościami fizycznymi. Wiedząc o znaczeniu doświadczenia w poznawaniu praw opisujących przyrodę zakładamy możliwość samodzielnego przeprowadzania przez uczniów na lekcjach doświadczeń.

W trakcie eksperymentów uczniowie będą wykonywali pomiary:

- Bezpośrednie – wartość mierzonej wielkości odczytuje się bezpośrednio z przyrządu
- Pośrednie – wartość wielkości otrzymuje się w wyniku podstawienia zmierzonych bezpośrednio wielkości do wzoru.

Pomiar fizyczny to porównanie mierzonej wielkości fizycznej z jej wzorcem. Każdy pomiar obdarzony jest niepewnością pomiarową. Przyczyn niepewności pomiarowych jest wiele najważniejszymi z nich są:

- Niedoskonałość przyrządów pomiarowych
- Zmienność warunków w jakich wykonywany jest pomiar
- Zmienność mierzonych obiektów
- Niedoskonałość zmysłów

Zgodnie z obowiązującymi prawami fizyki wykonywanie pomiaru powoduje zmianę w układzie, w którym odbywa się pomiar. Jednym z wielu przykładów takiej sytuacji jest pomiar natężenia prądu stałego.

Niepewności pomiarowe, które powstają w wyniku przypadkowych efektów nazywamy niepewnościami typu A. Jeśli w wyniku pomiarów wielkości fizycznej dysponujemy wieloma wartościami najlepszym przybliżeniem wartości rzeczywistej jest średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

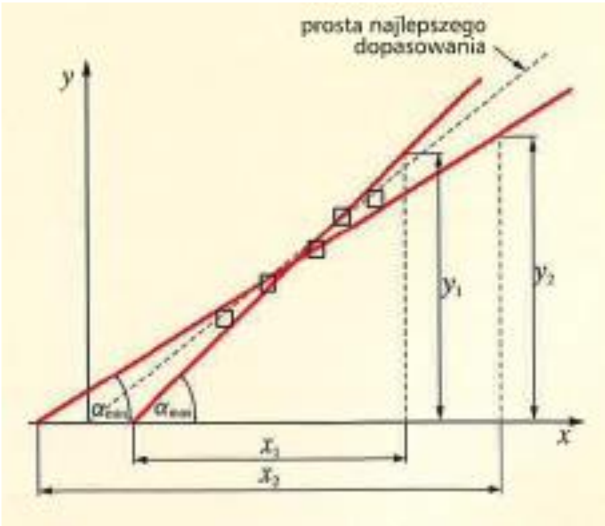
natomiast wartość niepewności pomiarowej typu A obliczamy z wzoru:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}$$

Gdzie n jest liczbą pomiarów.

W przypadku pomiarów pośrednich niepewność pomiarową można wyznaczyć badając zależność mierzonych wielkości fizycznych. W wyniku doświadczenia wyznaczamy wartość wielkości fizycznej z, która zależy od wielkości fizycznych x i y w następujący sposób:

$z = \frac{x}{y}$



oznacza to, że między wielkościami x i y można wyznaczyć zależność liniową

$$y = zx$$

wartości wielkości x i y wyznacza się w pomiarach bezpośrednich. Wyniki należy nanieść na wykres. Każdy punkt doświadczalny należy otoczyć prostokątem niepewności pomiarowych a następnie narysować dwie proste o maksymalnym i minimalnych nachyleniu do osi poziomej. Proste należy poprowadzić taka by przechodziły przez wszystkie prostokąty niepewności pomiarowych. W przypadku funkcji liniowej wartość wielkości fizycznej jest równą wartości tangensa konta nachylenia prostej. Obliczając tangensy kątów nachylenia narysowanych prostych można wyznaczyć wartość danej wielkości fizycznej i jej niepewność pomiarową.

$$tg\alpha_{max} = \frac{y_2}{x_2} \qquad tg\alpha_{min} = \frac{y_1}{x_1}$$

wartość danej wielkości liczymy z wzoru:

$$z = \frac{tg\alpha_{max} + tg\alpha_{min}}{2}$$

a niepewność pomiarową z wzoru:

$$\Delta z = \frac{tg\alpha_{max} - tg\alpha_{min}}{2}$$

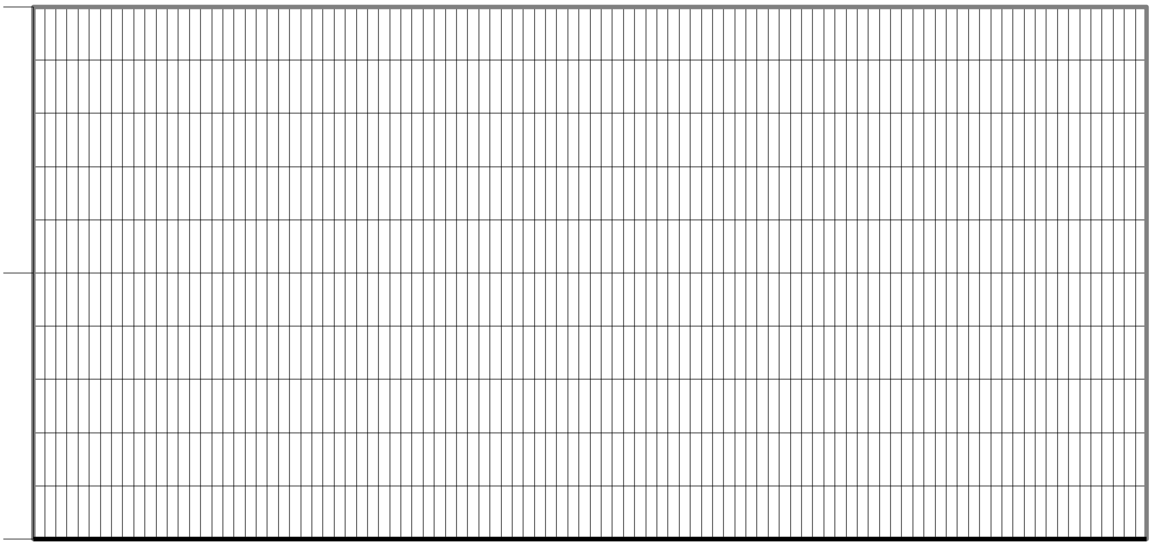
Przykładowe ćwiczenia

Ćwiczenie 1. Wyznaczanie oporu przewodnika

Wykonano doświadczenie, którego celem było wyznaczenie oporu przewodnika. Wyniki pomiarów napięcia i natężenia przedstawia tabela.

Natężenie [A]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Napięcie [V]	4,4	13	21,1	24,9	39	44,1	49,9	54,2	60,7	69,6

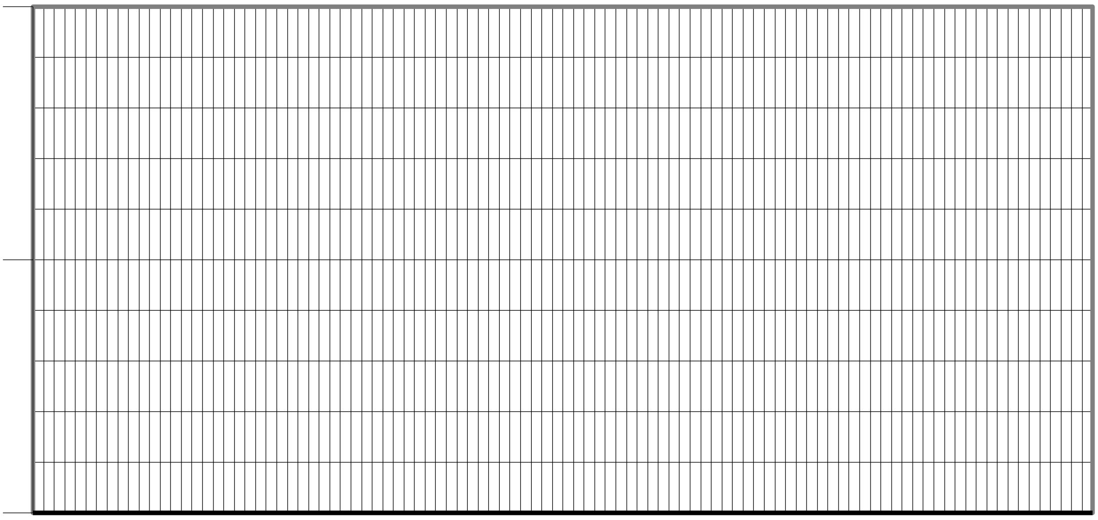
Wiedząc, że niepewności pomiarowe wynoszą $\Delta I=0{,}2A$ dla natężenia prądu i $\Delta U=0{,}2V$ dla napięcia oblicz wartość oporu przewodnika i niepewność pomiarową.

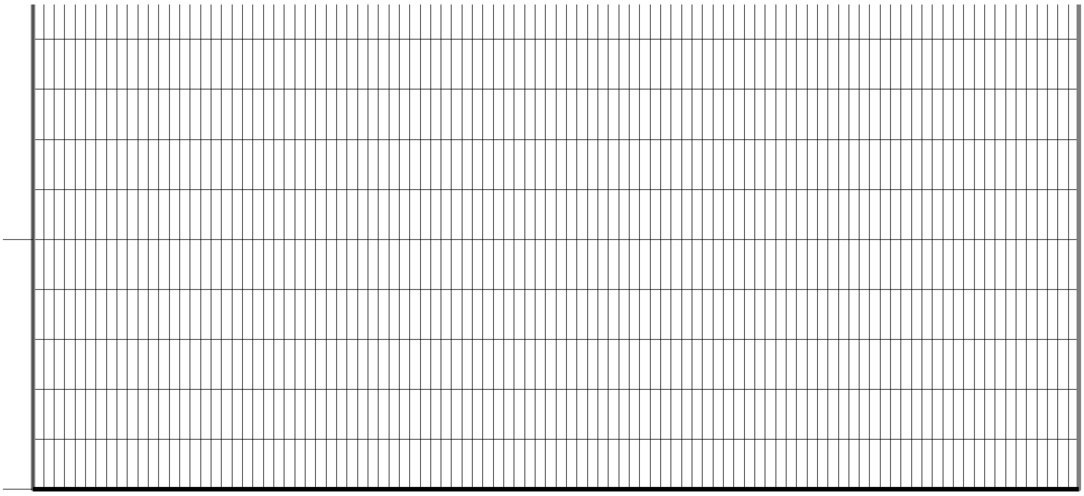


Ćwiczenie 2. Wyznaczanie współczynnika sprężystości

Celem doświadczenia było wyznaczenie wartości współczynnika sprężystości sprężyny. W tym celu skonstruowano wahadło sprężynowe. Wyniki pomiarów czasu zgromadzono w tabeli. Wiedząc, że niepewność pomiarowa czasu wynosi $\Delta t = 0{,}1s$ a masy $\Delta m=0{,}01kg$ wyznacz wartość współczynnika sprężystości.

Masa m [kg]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Ilość wahnięć n	20	20	20	10	10	10	10
Czas t[s]	5,7	7,6	9,6	5,5	6,3	6,9	7,3
Okres T[s]							
T^2 [s^2]							





Projekt „Zintegrowany program nauczania matematyki, fizyki oraz informatyki – nowe wyzwanie w edukacji"
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „…nowe wyzwanie w edukacji"
tel. 52 567-07-80, www.nwe.byd.pl, nwe@byd.pl
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
Człowiek – najlepsza inwestycja!

Wykorzystanie wideopomiarów na lekcjach fizyki

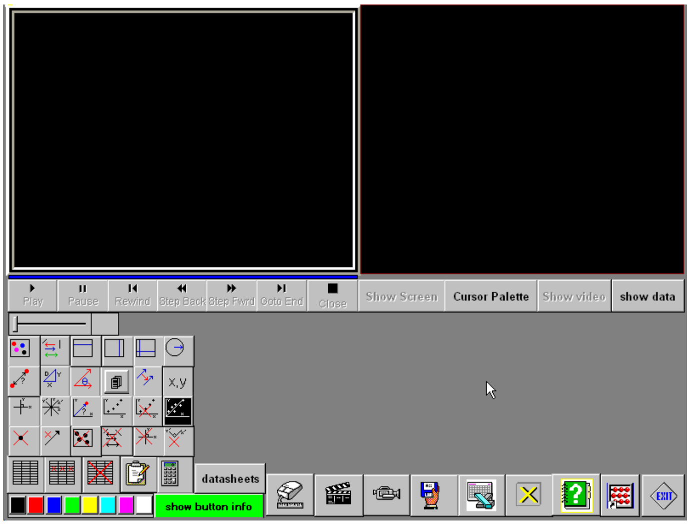
Wideopomiary to rodzaj ćwiczenia, w którym uczeń może połączyć swoją wiedzę i umiejętności z fizyki z zjawiskami zachodzącymi w otaczającym go świecie. Wystarczy, że ma do dyspozycji kamerę – może być kamera wbudowana w telefon komórkowy – oraz program, który pozwoli przeglądać zarejestrowany film “klatka po klatce”. Uczeń podczas ćwiczenia nie musi rejestrować eksperymentów przeprowadzanych w klasie, może utrwalić codzinne czynności np. rzut piłką, ruch pojazdu. Należy jednak pamiętać o spełnieniu kilku warunków:

- obraz musi być wyskalowany to znaczy, że podczas nagrania musi zostać zarejestrowany obiekt o znanych wymiarach geometrycznych, jest to konieczne do poprawnego wyznaczenia parametrów ruchu,
- należy znać częstotliwość z jaką rejestrowany.

Pomiar polega na wskazaniu położenia badanego obiektu na obrazie. Wyniki pomiarów można przedostawać w postaci tabel i wykresów, można również poddawać analizie w arkuszu kalkulacyjnym, porównywać z znanymi modelami teoretycznymi.

Wskazane jest wykorzystanie wideopomiarów szczególnie na lekcjach, których tematyka związana jest kinematyką i dynamiką. Uczeń w łatwy sposób może zgromadzić materiał do analizy a następnie wyliczyć wartości prędkości, przyspieszenia, pędu czy energii.

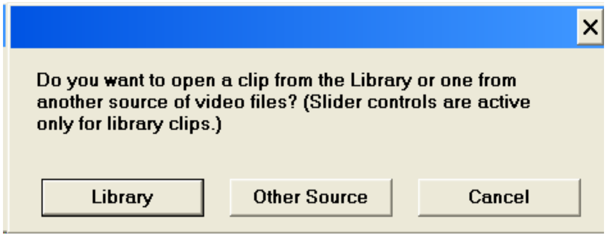
Przykładem bezpłatnego programu wspomagającego analizę zjawisk z wykorzystaniem wideopomiarów jest Vidshell. Po pobraniu z Internetu pakietu instalacyjnego. Instalacja przebiega intuicyjnie, w trakcie instalacji tworzona jest biblioteka filmów z przykładowymi zjawiskami.



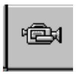
Poniżej przedstawiona przykład wykorzystania Vidsella do analizy rzutu ukośnego.

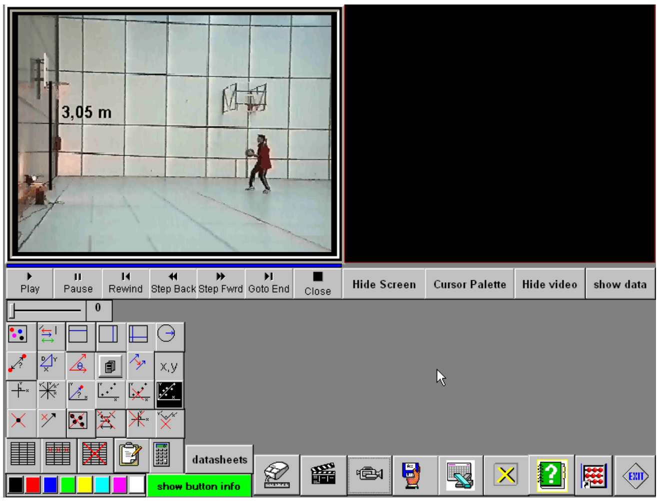
Uruchamianie programu

Główne okno program składa się z trzech części. Pierwsza to okno podglądu zarejestrowanego materiału, w drugiej program gromadzi dane z pomiarów, trzecia część to obszar z przyciskami sterującymi pracą programu. Wszystkie opcje niezbędne do efektywnej pracy są łatwo dostępne. Po wskazaniu przycisku kursorem myszy pojawia się opis funkcji za jaką jest on odpowiedzialny.



Otwieranie pliku wideo

Klikając na ikonę  otworzy się okno, w którym można wybrać miejsce w jakim zapisano plik, który ma być poddany analizie. Podczas instalacji Vidshell utworzył bibliotekę z filmami. Aby wybrać z niej film wybieramy opcje Library, jeśli wcześniej przygotowany został własny film należy wskazać jego lokalizację. Aby to wykonać należy wybrać opcję Other Source. Po wybraniu pliku, jego podgląd objawia się w oknie programu.



Kalibracja obrazu

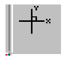
Ważną czynnością podczas wideopomiarów jest użycie odpowiedniej skali. W tym celu na planie rejestrowanego filmu musi się znaleźć przedmiot znanych wymiarach. Po wczytaniu pliku wideo do programu korzystając z przycisku  zaznacza się odcinek o znanej długości oraz podaje się jednostki długości.

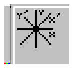
Definiowanie osi współrzędnych

Film wideo jest ciągiem klatek, na których zarejestrowane zostały poszczególne fazy ruchu.

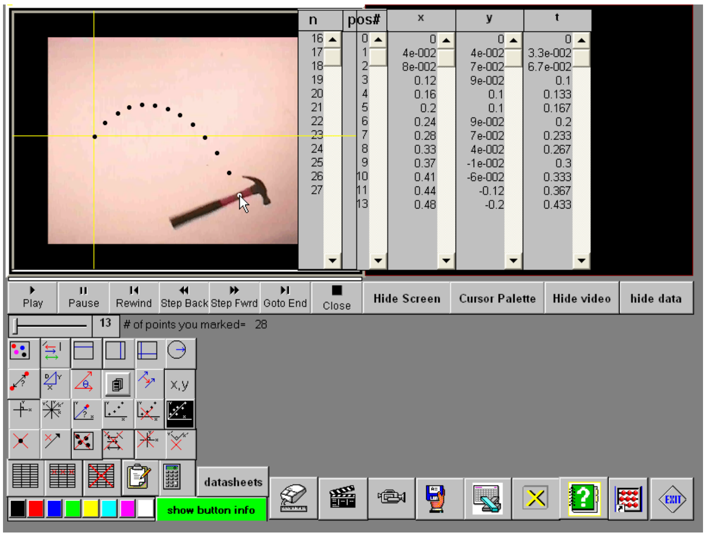
Aby rozpocząć analizę przesuwa się klatki materiału przy pomocy przycisków 

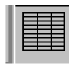
znajdujących się bezpośrednio pod oknem podglądu filmu.

Aby zdefiniować prostokątny układ odniesienia należy wybrać narzędzie  a następnie wskazać kursorem myszy miejsce będące początkiem układu odniesienia. Względem tego punktu mierzone będą zamiany położenia ciała.

Jeśli koniecznym jest użycie innego układu współrzędnych należy skorzystać z narzędzia . Następnie pojawi się okno pozwalające wybrać orientację układu współrzędnych. Aby wyznaczyć kierunek osi x. aby to zrobić należy wskazać początek układu współrzędnych, a następnie przesunąć kursor myszy wzdłuż wybranego kierunku.

Gromadzenie danych

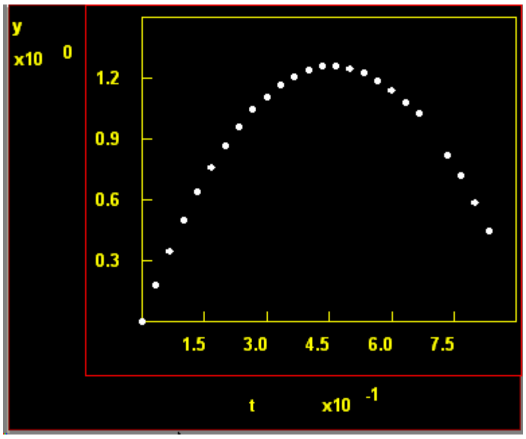


Aby rozpocząć gromadzenie danych należy wybrać opcję  po uruchomieniu narzędzia należy podać czas między nagranymi klatkami. Czas ten zależny będzie od wykorzystanej kamery. Następnie należy wskazać jakie wielkości będą gromadzone (x, y, t).

Aby wprowadzić dane, należy kursorem myszy wskazać położenie badanego punktu i zatwierdzić jego położenie lewym przyciskiem myszy. Dane zostaną dzięki temu zapisane w tabeli.

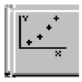
Aby wprowadzić informacje o położeniu w kolejnej chwili ruchu należy przesunąć film o jedną klatkę do przodu i powtórzyć czynność.

Powyższe czynności należy powtarzać tak długo aż zakończy się fragment filmu, który jest analizowany.



Tworzenie wykresu

Przed rozpoczęciem tworzenia wykresu należy wskazać jakie zmienne będą użyte do jego stworzenia. Aby to zrobić wystarczy wskazać nagłówek kolumny w tabeli z danymi. Program zapyta, na której osi ma być umieszczona zmienna. Po zatwierdzeniu wyboru operację należy powtórzyć dla drugiej osi układu współrzędnych.

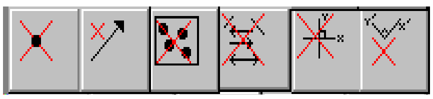
Następnym krokiem jest wskazanie narzędzia rysowania wykresów  i wykres pojawi się w oknie programu.

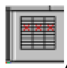
Dodatkowe wskazówki

Niezależnie od rodzaju nagranego materiału gromadzenie danych niezbędnych do analizy będzie odywało sie zawsze w tej samej kolejności.

W panelu zarządzającym znajduje się wiele narzędzi pozwalających analizować obraz, znajdują się w nim narzędzia pozwalające rysować punkty, linie, wektory i koła. Dostępne są również narzędzia pozwalające mierzyć odległości i kąty.

Wszystkie narysowane na obrazie obiekty można usunąć wykorzystując narzędzie do usuwania.



Punkty pomiarowe można również usuwać z wykresu wskazując je w tabeli danych , punkt usuwany jest z wykreu nie z tabeli.

Przykładowe ćwiczenia

1. **Wyznaczanie przyspieszenia rowerzysty.** Analizując ruch rowerzysty odpowiedz na następujące pytania:

- Ile czasu poruszał się rowerzysta?

- Jakie było jego położenie początkowe?
- Jakie było jego położenie końcowe?
- Jaka była wartość prędkości końcowej i początkowej?
- Jaka była średnia prędkość rowerzysty?
- Jaką wartość miało przyspieszenie?

  Rozważ dwa przypadki, gdy rowerzysta ruszał z miejsca oraz gdy hamował.

2. **Zderzenie**. Zawodnik kopnął piłkę o znanej masie. Analizując jej ruch:

- Określ prędkość końcową i początkową
- Wyznacz wartość zmiany pędu piłki
- Czy możliwe jest wyznaczenie siły z jaką zawodnik działał na piłkę? Jaka była jej wartość?

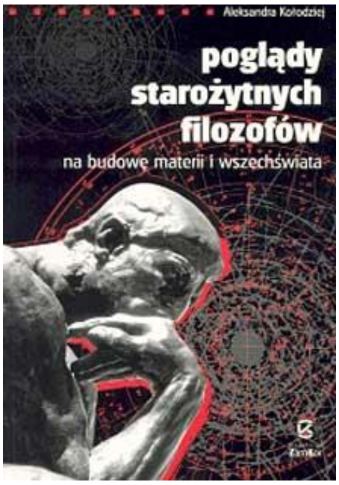
3. **Rzut**. Zawodnik rzuca piłkę do kosza. Ruch piłki jest złożeniem dwóch ruchów. W kierunku poziomym jednostajnego prostoliniowego i jednostajnie zmiennego w kierunku pionowym. Analizując ruch piłki wyznacz:

- Prędkość początkową w kierunku poziomym i w kierunku pionowym
- Przyspieszenie z jakim porusza się piłka
- Jak zmienia się zasięg rzutu od prędkości początkowej.

Polecane teksty popularnonaukowe

Opowieści z historii fizyki, Andrzej Drzewiński, Jacek Wojtkiewicz, PWN

Nie jest to książka będąca zwartym kursem fizyki. Autorzy wprowadzają czytelnika w świat fizyki wykorzystując historię fizyki do wyjaśnienia wielu zjawisk i pojęć, z jakimi uczniowie spotykają sie na lekcjach. Frgmenty książki warto wykorzystać na lekcji jako element pobudzający wyobrźnię uczniów, jako metodę pozwalającą zapamieać wprowadzone pojęcia.

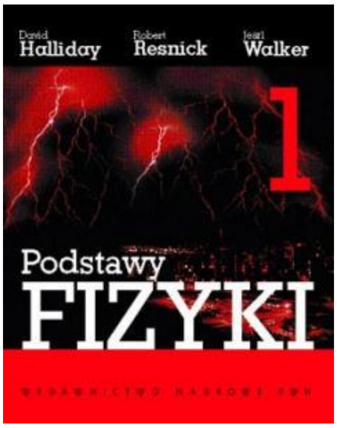


Poglądy starożytnych filozofów na budowę materii i wszechświata, Aleksandra Kołodziej, Zamkor

Książka, zawierająca teksty filozoficzne dzięki, którym czytelnik poznaje w jaki sposób ewaluowała wiedza człowieka o otaczającym go świecie, dowiaduje się również jak wyjasniają flozofowie dobrze znane fizkom prawa

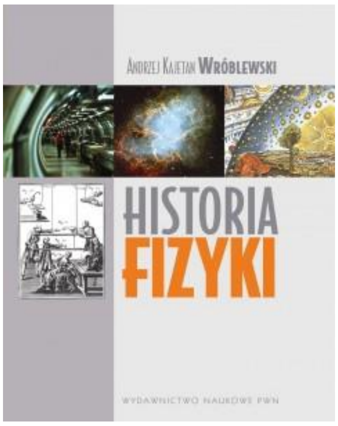
Odkryj smak fizyki, Jerzy Przystawa, PWN

Książka jednej strony przybliża czytelnikowi aktualny stan badań nad prawami rządzącymi pzyrodą, z drugiej zaś strony odkrywa tajemniczy świat naukowców, który jak sie okazuje nie różni się niczym od naszej codzieności. Są emocje, wątpliwości, jest fizyka. Lektura fragmenów tej książki z pewnościa przybliży uczniom świat odkryć fizycznych.



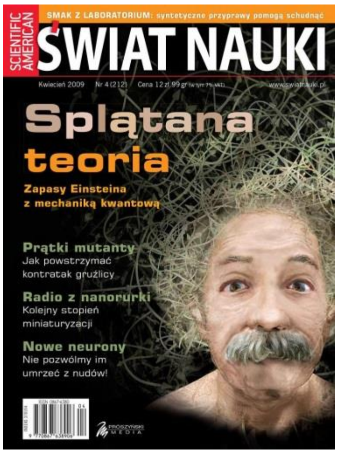
Podstawy fizyki, David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, PWN

Chyba najlepszy podręcznik do fizyki. Można w nim znaleźć wiele ciekawych opisów zjawisk i praw, zadań. Fragmenty książki można wykorzystywać przygotowując uczniów do rywalizacji naukowej.



Historia fizyki, Andrzej Kajetan Wróblewski

W książce omówiono hisotrię fizyki od cywilizacji starożytnych, aż po osiągnięcia fizyki współczesnej. Profesor Wróblewski prezentuje rozwój idei naukowych z zakresu fizyki na tle historii nauki. Książka napisana jest w sposób przystępny i bardzo interesujący. Szczeglnie ciekawym elementem książki są ilustracje przyrządów fizycznych z różnych epok, schematy ważnych historycznych doświadczeń, strony dzieł najważniejszych dla rozwoju fizyki. Warto ę książkę wykorzystac podczas lekcji przy omawianiu zagadnień związancyh z odkrywaniem praw.



„Świat Nauki” jest polską edycją „Scientific American”. Autorzy zamieszczanych artykułów w większości to ścisła światowa czołówka badaczy. Zrozumienie złożonych i trudnych niekiedy zagadnień ułatwiają bardzo czytelne ilustracje oraz zrozumiały język. W każdym numerza można znaleźć 7-8 obszernych, bogato ilustrowanych artykułów. Większość to tłumaczenia z "Scientific American" lub jego obcojęzycznych edycji. Obok dużych artykułów publikowane są felietony z pogranicza nauk przyrodniczych i ścisłych, filozofii oraz nauk politycznych, przeglądy nowinek naukowych, informacje ze środowiska akademickiego. Tematykę wilu artykułów można wykorzystac na lekcjach.

„**Wiedza i życie**“, miesięcznik, który prostym, przystępnym językiem pisze o tym, co dzieje się w nauce w Polsce i na świecie. W przystępny sposób przedstawiane są informacje o nowoczesnych technologiach i nowościach w poszczególnych dziedzinach nauki (matematyka, chemia, fizyka, astronomia, elektronika, informatyka). Autorami są dziennikarze popularnonaukowi, którzy w swoich artykułach informują o ciekawych wydarzeniach, związanych z nauką i edukacją, prezentuje ciekawostki i wyjątkowe zjawiska. Jest to miesięcznik, który w przystępny sposób opisuje trudne sprawy dzięki temu może być wykorzystany do rozwinięcia wśród uczniów zanersowania fizyką i wykorzystaniem jej osiągnięć w innych dziedzinach.

INFORMATYKA

Szczegółowy rozkład materiału

KLASA I – II semestr 2 godziny tygodniowo				
Lp	**Tytuł modułu**	**Temat lekcji**	**Liczba lekcji**	**Korelacje**
1.	Reprezentacja informacji w komputerze	1. System pozycyjny.	1	MAT→ INF
		2. Zamiana liczb w różnych systemach.	1	MAT→ INF
		3.Działania na liczbach w różnych systemach.	1	MAT→ INF
		4. Liczby stało i zmiennoprzecinkowe.	1	MAT→ INF
		5. Operacje arytmetyczna w systemie dwójkowym.	1	MAT→ INF
		6. Kodowanie za pomocą bitów – funkcje logiczne.	1	MAT→ INF
		7. Kodowanie informacji za pomocą bitów (np. kod kreskowy EAN-13).	1	
		8. Model komputera - maszyna RAM.	1	
		9. Reprezentacja znaków drukarskich (kodowanie).	1	
		10. Reprezentacja dźwięków i obrazów.	1	
2.	Systemy operacyjne	1. Systemy operacyjne.	1	
		2. System plików i katalogów, prawa dostępu.	1	
		3. Wymiana plików (danych) pomiędzy systemami.	1	
		4. Programy narzędziowe.	1	
		5. Urządzenia zewnętrzne, sterowniki, instalacja.	1	
		6. Czujniki i przetworniki jako urządzenia zewnętrzne.	1	INF →FIZ
3.	Sieci komputerowe	1.Podział sieci.	1	
		2.Warstwowy model budowy sieci, OSI, TCP.	1	

		3.Adresacja w sieci, klasy adresów, protokół, DNS.	1	
		4.Usługi sieciowe, udostępnianie zasobów.	3	INF→FIZ/MAT
		5.Konfigurowanie sieci, podłączanie, WiFi.	1	
		6.Bezpieczeństwo w sieci, ochrona danych.	1	
4.	Bezpieczeństwo danych	1.Rodzaje zagrożeń związanych z rozwojem informatyki i technologii.	1	
		2.Bezpieczeństwo i ochrona danych w komputerze i sieciach.	1	
		3.Ochrona antywirusowa, kopie bezpieczeństwa..	1	
		4.Zasady zachowania w sieciach, normy prawne.	1	
5.	Wykorzystanie informatyki w matematyce i fizyce	1.Wykorzystanie programów do zadań z matematyki.	1	INF →MAT
		2.Wykorzystanie programów do zadań z fizyki.	1	INF →FIZ
6.	Do dyspozycji nauczyciela	1.Obsłua tabletu i platformy Moodle.	2	INF→FIZ/MAT
		2.Testy, sprawdziany.	3	
		Suma godzin	30+5	
Sprawdziany, testy i omówienia będą realizowane w ramach godzin do dyspozycji nauczyciela (ok. 5 godzin).				

KLASA II 3 godziny tygodniowo				
Lp	**Tytuł modułu**	**Temat lekcji**	**Liczba lekcji**	**Korelacje**
1.	Algorytmika i programowanie - wstęp do algorytmiki.	1.Pojęcie algorytmu, przykłady, wyszczególnienie etapów algorytmu.	2	
		2.Specyfikacja problemu i poprawność algorytmu; cechy poprawnego algorytmu.	2	
		3.Zapis algorytmu za pomocą: pseudojęzyka, z wyszczególnieniem listy kroków, schematu blokowego.	2	

		4.Analiza schematów blokowych algorytmów, odczytywanie sposobu działania na podstawie schematu blokowego.	2	
		5.Analiza porównawcza algorytmów, wprowadzenie do zagadnienia złożoności obliczeniowej.	2	
2.	Algorytmika i programowanie - wstęp do programowania.	1.Języki programowania i ich zastosowanie.	2	
		2.Charakterystyka wybranego języka, omówienie środowiska programistycznego.	2	
		3.Typy zmiennych, operacje wejścia/wyjścia.	1	
		4.Instrukcje przypisania, podstawowe operatory matematyczne i logiczne.	1	
		5.Instrukcja warunkowa i wyboru, warunki proste i złożone.	1	
		6.Przykładowe programy, implementacja programu obliczającego rozwiązanie równania liniowego z jedną niewiadomą.	2	
		7.Przykładowe programy, implementacja programu obliczającego rozwiązanie równania kwadratowego.	1	MAT→ INF
		8.Instrukcje pętli i sposób ich zapisu.	2	
		9.Algorytmy sprawdzające właściwości liczb całkowitych (badanie podzielności liczb).	3	MAT→ INF
		10.Algorytmy sprawdzające właściwości liczb całkowitych, sprawdzanie czy liczba jest pierwsza.	2	MAT→ INF
		11.Algorytm Euklidesa (NWW, NWD).	2	
		12.Zapoznanie z pojęciem metody Monte Carlo.	1	
		13.Metoda Monte Carlo, znajdowanie przybliżonej wartości liczby π.	1	
		14.Przybliżanie wartości pierwiastka kwadratowego.	1	
		15.Wyznaczanie przybliżonej wartości miejsca zerowego funkcji.	1	MAT→ INF

3.	Algorytmika i programowanie	1.Funkcje w języku programowania, przekazywanie parametrów do funkcji.	2	
		2.Tablica jednowymiarowa.	2	
		3.Tablica dwuwymiarowa.	2	
		4.Przeszukiwanie tablicy, znajdowanie elementu maksymalnego (minimalnego) tablicy.	2	
		5.Przeszukiwanie tablicy w celu znalezienia wyróżnionego elementu – wersja z wartownikiem i bez wartownika.	2	
		6.Sito Eratostenesa – implementacja programu.	2	
		7.Sortowania tablicy jednowymiarowej metodą bąbelkową.	2	
		8.Sortowanie tablicy metodami przez wybór i selekcję.	2	
		9.Metoda „dziel i zwyciężaj” – przeszukiwanie binarne.	2	
		10.Operacje na macierzach, wyznacznik macierzy, rozwiązywanie układów równań.	2	
		11.Implementacja programów z zastosowaniem tablic jedno i dwuwymiarowych.	2	
		12,Rekurencja, przykłady rekurencji (silnia, potęga, kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego).	2	
		13.Schemat Hornera.	1	
		14.Algorytmy rekurencyjne.	2	
		15.Ćwiczenia w implementacji programów rekurencyjnych.	2	
		16.Sortowanie przez scalanie.	1	
		17.Sortowanie szybkie (quicksort).	1	
		18.Porównanie metod iteracyjnej i rekurencyjnej.	2	
		19.Struktury danych, prosta baza danych.	2	
		20.Lista jednokierunkowa i dwukierunkowa, drzewo, tablice dynamiczne.	2	

		21.Lista jednokierunkowa i dwukierunkowa, drzewo, tablice dynamiczne.	2	
		22.Odczyt z plików, zapis do plików.	2	
		23.Obsługa plików tekstowych i plików binarnych.	2	
		24.Algorytmy na tekstach, wyszukiwanie wzorca w tekście.	2	
		25.Omówienie i implementacja programu „Odwrotna notacja polska”.	2	
		26.Obliczanie wartości wyrażenia podanego w postaci „odwrotnej notacji polskiej”.	2	
		27.Algorytmy kompresji i szyfrowania, kody znaków o zmiennej długości.	2	
		28.Wykorzystanie algorytmów szyfrowania np. w podpisie elektronicznym.	1	
		29.Algorytmy badające własności geometryczne,, sprawdzanie warunku trójkąta.	2	
		30.Algorytm badania położenia punktów względem prostej.	2	
		31.Algorytm badania przynależności punktu do odcinka, przecinania się odcinków.	2	
		32.Projekt programistyczny.	3	
4	Wykorzystywanie informatyki, programów oraz gier edukacyjnych do poszerzania wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin, m. in. z matematyki i fizyki	1.Funkcje statystyczne arkusza kalkulacyjnego do wykorzystania w matematyce.	1	INF →MAT
		2.Funkcja „jeżeli” arkusza kalkulacyjnego do wykorzystania w fizyce.	1	INF →FIZ
		3.Projekty międzyprzedmiotowe (matematyka i fizyka) z wykorzystaniem poznanych metod i narzędzi informatyki.	8	INF→FIZ/MAT
5	Do dyspozycji nauczyciela		5	

		Suma godzin	105	
Sprawdziany, testy i omówienia będą realizowane w ramach godzin do dyspozycji nauczyciela (ok. 5 godzin).				

KLASA III
2 godziny tygodniowo

Lp	Tytuł modułu	Temat lekcji	Liczba lekcji	Korelacje
1.	Przetwarzanie informacji w relacyjnych bazach danych	1. Relacyjna baza danych – podstawowe pojęcia	1	
		2. Tworzenie tabeli – typy danych	1	
		3. Typy relacji – tworzenie relacji w bazie	1	
		4. Tworzenie kwerend	1	
		5. Tworzenie raportów	1	
		6. Podstawy języka SQL	1	
		7. Tworzenie baz danych wykorzystujących SQL	1	
		8. Wykorzystanie baz danych do gromadzenia informacji	1	
		9.Import i eksport baz danych	1	
		10. Mechanizmy ochrony baz danych	1	
2.	Grafika i multimedia	1.Dźwięk w komputerze: podstawowe formaty plików dźwiękowych.	1	
		2.Grafika bitmapowa (rastrowa), formaty plików, parametry obrazu rastrowego.	1	
		3.Pozyskiwanie grafiki (skaner, aparat, Internet, programy graficzne).	1	
		4.Grafika wektorowa a rastrowa, różnice, zalety i wady.	1	
		5.Przetwarzanie obrazów i filmów, zmiana rozdzielczości, rozmiarów, barw.	2	
		6.Figury wektorowe w projektach graficznych.	2	

		7.Tworzenie prezentacji multimedialnej.	1	
		8.Animacje komputerowe (Morphing).	1	
		9.Zasady tworzeni obrazu 3D.	1	
		10.Przypomnienie znaczników języka HTML.	2	
		11.Zastosowanie stylów.	1	
		12.Język PHP.	4	
3.	Rozwój nowoczesnych technologii i urządzeń	1.Perspektywy rozwoju informatyki.	1	
		2.Mobilny dostęp do Internetu.	1	
		3.Komórkowe systemy operacyjne, smart fony, tablety itp.	1	
		4.Sztuczna inteligencja.	1	
		5.Rozwój e-usług.	1	
		6.GPS i inne urządzenia.	1	
4.	Powtórzenie wiadomości	Ćwiczenia indywidualne i grupowe z przykładowymi arkuszami maturalnymi	15	
5.	Do dyspozycji nauczyciela		5	
		Suma godzin	54	
Sprawdziany, testy i omówienia będą realizowane w ramach godzin do dyspozycji nauczyciela (ok. 5 godzin).				

Materiały uzupełniające

Rys historyczny i kilka ciekawostek

Komputery zaczęły trafiać do szkół i w ręce uczniów dopiero od połowy lat osiemdziesiątych XX wieku, gdy stały się powszechnie dostępne jako komputery osobiste (PC). Wtedy też (w roku 1985) pojawił się pierwszy ogólnopolski program nauczania informatyki w liceach, opracowany przez Polskie Towarzystwo Informatyczne i zatwierdzony przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.

W 1985 roku pojawił się w Technikum Kolejowym w Bydgoszczy pierwszy mikrokomputer ZX Spectrum o pamięci RAM 64 KB. Przedmiot „Podstawy informatyki" wprowadzono w roku szkolnym 1986/87 i nauczano go w wymiarze 2 godzin tygodniowo. W pracowni uruchomiono 12 stanowisk z komputerami Amstrad CPC 464 o pamięci RAM 64 KB a rok później wymieniono komputery na CPC 6128 o pamięci RAM 128 KB ze stacją do zapisu i odczytu dyskietek 3''.

W 1992 roku uruchomiono stanowiska z komputerami PC AT 286 a w roku 1994 wyposażono pracownię w 14 komputerów IBM 386 z pamięcią RAM 4 MB i dyskami twardymi 40 MB.

W 1996 roku uruchomiono pierwszą sieć komputerową LAN na oprogramowaniu Novell 3.12.

W 1997 roku uruchomiono serwer internetowy z pierwszą stroną zarejestrowaną pod domeną www.zsk.bydgoszcz.pl. Był to przełom w rozwoju i nauczaniu informatyki w szkole, otworzyło się okno na świt i uczniowie uzyskali dostęp do najnowszych osiągnięć informatyki na świecie.

Ten krótki rys historyczny pozwala zaobserwować jak szybko rozwija się informatyka, zarówno pod względem sprzętu jak i oprogramowania a co za tym idzie coraz szerszego zastosowania w życiu codziennym. Jest to również wyzwanie dla nauczycieli pokolenia, które urodziło się już w świecie „cyfrowym".

Marc Prensky, który jest międzynarodowej sławy liderem myśli, pisarzem, konsultantem, i innowatorem w dziedzinie edukacji i nauki, wprowadził podział na cyfrowych tubylców (uczniowie, dzieci i młodzież) i cyfrowych imigrantów (nauczyciele, dorośli), w jednym z niedawnych swoich artykułów pisze, że podstawową alfabetyzacją XXI wieku powinna być umiejętność programowania, rozumiano oczywiście bardzo szeroko, nie tylko jako pisanie programów komputerowych, ale głównie jako umiejętność korzystania z szerokich możliwości, jakie przynosi technologia, do własnych celów.

W artykule „Co nasze dzieci naprawdę nienawidzą" opublikowanym w „Educational Technology, Jan-luty 2013" Marc Prensky pisze „Ostatnio słyszałem jak bibliotekarz szkolny opisuje podejście dzieci do zainteresowania się projektem. Daje im dwie alternatywy:

A) plan pierwszy umożliwia korzystanie ze wszelkich i wszystkich komputerów, telefonów i innych technologii do wykonania projektu,

B) plan drugi pozwala to zrobić po staremu, sięgnięcia po książki, encyklopedie, słowniki itp. z półek, kopiowania i zapisania stron.

Prawie wszystkie dzieci wybór planu B traktowały jako karę, często karę surową a kiedy wchodzą do naszych szkół to czują, że są wysyłane z powrotem do przeszłości."

Nasz projekt ma wprowadzić uczniów w XXI wiek, umożliwia korzystanie z tabletów, sieci, e-learningu, platformy Moodle. Nauczycielom informatyki nie muszę przedstawiać materiałów, wystarczy, że podam adresy ciekawych stron, z których mogą korzystać, a zapewne oni sami posiadają duże doświadczenie w korzystaniu z bazy informacji jaką jest Internet.

Przydatne strony

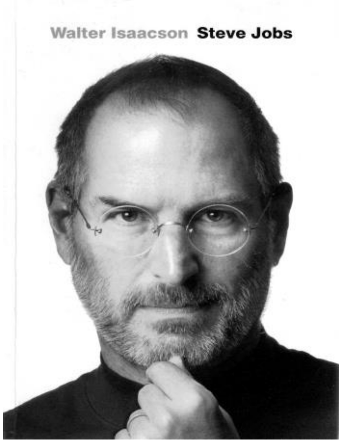
http://www.scholaris.pl/ - portal wiedzy dla nauczycieli
http://www.bobr.edu.pl/ - konkursy informatyczne
http://main.edu.pl/pl - Młodzieżowa Olimpiada informatyczna
http://pl.spoj.com/ - zbiór zadań programistycznych
http://mwpz.poznan.pl/ - Mistrzostwa Wielkopolski w Programowaniu Zespołowym
http://www.oi.edu.pl/ - olimpiada informatyczna
http://www.dialnetmasters.pl/ - Ogólnopolska Olimpiada Wiedzy o Internecie
http://oki.edu.pl/ - Ogólnopolski Konkurs Informatyczny
http://www.zsip1.bydgoszcz.pl/grafkom.html -Ogólnopolski Konkurs Grafiki Komputerowej
http://www.linuks.pl/ - system operacyjny Linuks
http://pixlr.com/ - edytor grafiki
http://wazniak.mimuw.edu.pl/ - studia informatyczne
http://www.ore.edu.pl – Ośrodek Rozwoju Edukacji
http://www.cyfrowaszkola.men.gov.pl/ -e-nauczyciel, e-uczeń, e-podręcznik
http://www.interklasa.pl/ - Polski Portal Edukacyjny

Kod kreskowy – scenariusz lekcji

Temat: Kodowanie informacji za pomocą bitów (np. kod kreskowy EAN-13).

1. Uczniowie wczytują z platformy pliki potrzebne do realizacji lekcji
   - prezentację „tajemnica kodu kreskowego",
   - „rysowanie kodu" w arkuszu kalkulacyjnym,
   - tablice kodowania.
2. Po zapoznaniu się z kodowaniem wybierają liczbę np. swój pesel. Ponieważ pesel ma 11 cyfr a w kodzie jest 13 to jako pierwszą mogą wybrać 7 (jak w prezentacji) a dla ambitniejszych np. 5 bo to pierwsza cyfra kodu Polski.
3. Mając 11 cyfr (pierwsza jest niejawna a ostatnia to kontrolna) uczniowie obliczają cyfrę kontrolną zgodnie z algorytmem (sposobem działania) przedstawionym w prezentacji.
4. Uczniowie zamieniają otrzymane 12 cyfr na siedmiobitowe (zero jedynkowe kody) a potem w przygotowanym arkuszu zaczerniają miejsca gdzie występują jedynki. Został w ten sposób stworzony kod kreskowy, można go zaznaczyć, wkleić do edytora, ustawić odpowiedni rozmiar.
5. Jeżeli dysponujemy czytnikiem kodu kreskowego (np. w bibliotece) to możemy w dowolnym edytorze odczytać ten kod i sprawdzić poprawność wykonanego zadania. Po wczytaniu powinna pojawić się sekwencja cyfr zaprogramowanej informacji (trzynastocyfrowa liczba).
6. Wydrukowany kod może być przydatny w bazach danych przy projektowaniu i wprowadzaniu a potem wyszukiwaniu np. elementów oznaczonych tym kodem np. kodowi odpowiada rekord związany z danymi ucznia w przykładowej bazie danych.
7. Jako zadanie uczniowie mogą zaprojektować inną dwunastocyfrową liczbę a omawiając bazy danych, mogą przypisać tej liczbie rekord np. tytuł książki itp.

Polecane teksty popularnonaukowe



Steve Jobs, autor Walter Isaacson.

Ekskluzywna biografia twórcy firmy apple – Steve'a Jobsa, jedyna napisana przy jego współpracy), pióra waltera isaacsona, autora bestsellerowych biografii, Benjamina Franklina i Alberta Einsteina.
Opierając się na ponad czterdziestu rozmowach z Jobsem, przeprowadzonych w ciągu dwóch lat, a także na wywiadach z ponad setką osób: członkami rodziny, przyjaciółmi, przeciwnikami, konkurentami i kolegami Jobsa, Walter Isaacson spisał wciągającą opowieść o pełnym wzlotów i upadków życiu oraz płomiennej osobowości twórczego przedsiębiorcy, którego wykraczająca poza wszelkie schematy pasja i perfekcjonizm zrewolucjonizowały sześć branż: komputery osobiste, filmy animowane, muzykę, telefony, tablety i publikacje cyfrowe.

PC WORLD*,* miesięcznik

Pismo opisuje produkty i wydarzenia na rynku komputerowym, w podziale na *Ważne & Ciekawe* (d. *Aktualności*), *Sprzęt & Osprzęt* (d. *Sprzęt*), *Systemy & Programy* (d. *Oprogramowanie*), *Internet & Bezpieczeństwo* (d. *Internet*), *Know how*. Jest pierwszym pismem komputerowym publikowanym w części nakładu z płytą DVD. Oprócz numerów regularnych wychodzą też serie *Special* i *Extra* skierowane do różnych segmentów rynku.

http://www.pcworld.pl

CCHIP, miesięcznik

Pismo zajmuje się tematyką informatyczną i nowymi technologiami.
Działy czasopisma: Aktualności, Temat numeru, Hardware, Software, Komunikacja, Porady, Magazyn, Różne, Tips & Tricks.

http://www.chip.pl

Serwis Ubuntu.pl jest inicjatywą polskich miłośników i użytkowników **Ubuntu Linux** mającą na celu propagowanie tej dystrybucji i jej przesłania w Polsce. Dotychczasowi i nowi użytkownicy mogą tu znaleźć podstawowe informacje o **Ubuntu**, podzielić się swoimi doświadczeniami, a także uzyskać pomoc.

http://www.ubuntu.pl
Można również skorzystać ze strony Linuksa:

Komputer Świat Czasopismo komputerowe a w nim link do Niezbędnika czasopisma z wieloma ciekawostkami, programami komputerowym.

http://www.komputerswiat.pl

Benchmark Serwis dotyczący komputerów, porady, najświeższe informacje, ciekawe strony w kraju.

http://www.benchmark.pl/

Nauczanie komplementarne

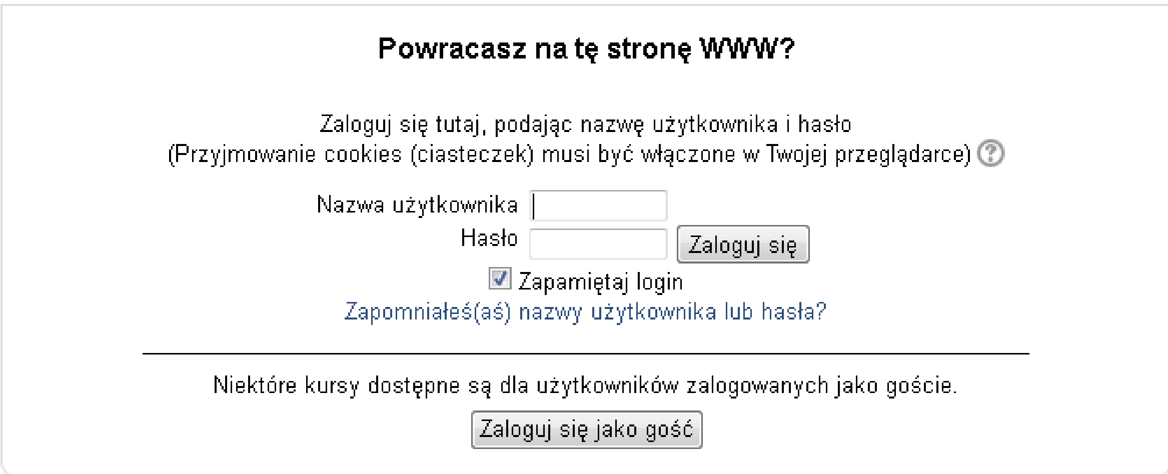
Nauczanie komplementarne nazywa się inaczej b-learningiem (skrót od blended learning). Jest to forma kształcenia, która łączy tradycyjne metody nauki (bezpośredni kontakt z prowadzącym, spotykanie się w tym samym czasie i miejscu) z aktywnościami prowadzonymi zdalnie przy pomocy komputera (nazywanymi ogólnie e-learningiem).

Spotykane są różne formy b-learningu, które różnią się proporcjami zajęć tradycyjnych w stosunku do zdalnych. W projekcie „Zintegrowany program nauczania matematyki, fizyki oraz informatyki - nowe wyzwanie w edukacji" proponujemy korzystać z formuły polegającej na okazjonalnym wspieraniu i poszerzaniu wiedzy uczniów poprzez aktywności na platformie zdalnego nauczania opartej o środowisko Moodle.

Podstawowe funkcjonalności platformy Moodle

Po wejściu na platformę opartą na Moodle'u, pierwszą stroną, która zazwyczaj widzimy jest panel logowania. W zależności od zainstalowanej skórki, może być umieszczony w dowolnej części ekranu, przyjęło się jednak, że trafia w jego prawy, górny róg.

Popularnym rozwiązaniem jest także osobna strona logowania, do której się przenosimy klikając przycisk *zaloguj*.



Rysunek 1: Przykładowy panel logowania Moodle'a

Do profilu użytkownika przenosimy się klikając na nasze imię i nazwisko podane przy rejestracji. Standardowo Moodle lokalizuje je w prawym, górnym rogu ekranu (w miejscu panelu logowania). Możemy tam zmienić nasze parametry logowania, fotografię, miejsce zamieszkania, adres e-mail, imię i nazwisko. Właśnie te informacje platforma traktuje jako obowiązkową zawartość profilu. Możemy umieścić tam także inne informacje, takie jak: nasza strona internetowa, zainteresowania, konto Skype i wiele innych. Możemy również prowadzić bloga (zakładka: *blog*).

Rysunek 2: Wygląd przykładowego profilu

Klikając na pole *wiadomość* przenosimy się do okna rozmowy indywidualnej. Warto pamiętać, że Moodle archiwizuje komunikaty prywatne podobnie jak Skype, możliwe jest więc zostawienie wiadomości osobie pozostającej aktualnie off-line.

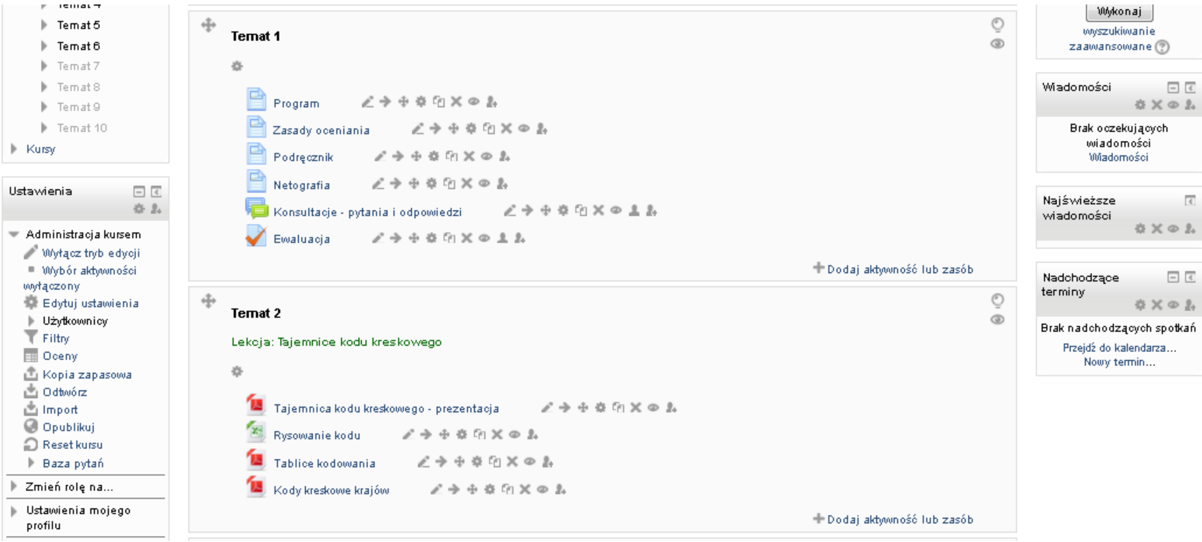
W konkretnym kursie (podobnie jak na całej platformie) poszczególni użytkownicy mogą mieć różne uprawnienia. Standardowo są to:

- Administrator – lokalny administrator,
- Twórca kursu – może edytować materiały, dodawać innych użytkowników do kursu, oceniać,
- Nauczyciel – może edytować materiały, oceniać,
- Nieedytujący nauczyciel – nauczyciel bez możliwości edycji materiałów kursu,
- Student – może brać udział w aktywnościach stworzonych przez administratorów i nauczycieli,
- Gość – może zobaczyć tylko listę dostępnych kursów.

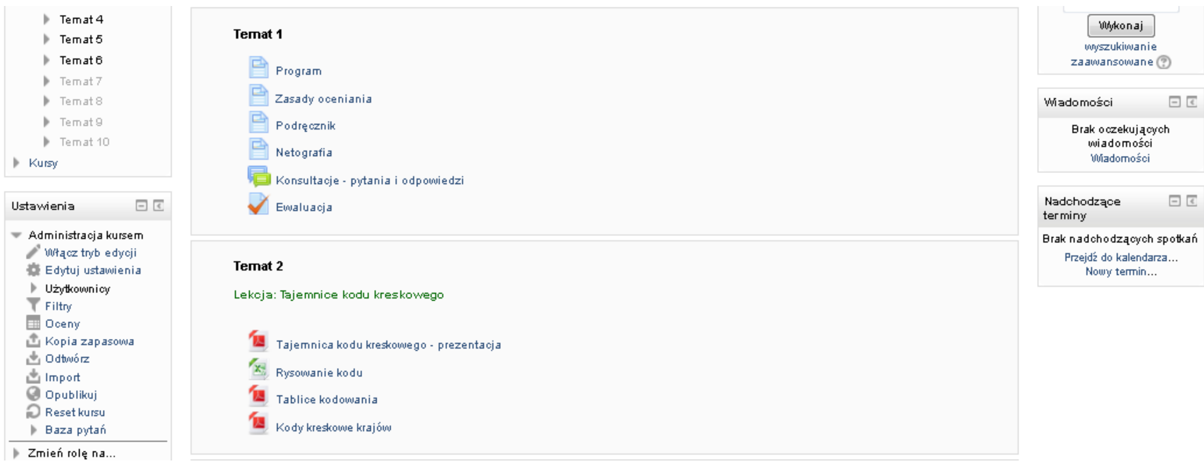
Dalszy opis dotyczy uprawnień pozwalających na edycję kursu.

Ekran kursu

Standardowy ekran kursu wygląda inaczej w zależności od posiadanych uprawnień. Elementy oznaczone jako szare dla administratora, nauczyciela lub kreatora kursu, są niewidoczne dla studentów. Warto o tym pamiętać, żeby uniknąć nieporozumień w kontaktach z uczniami. Możemy podejrzeć, jak widzą kurs użytkownicy o innych uprawnieniach wybierając opcję „zmień rolę na…” z rozwijanego menu widocznego nad kursem.



Rysunek 3: Standardowy ekran kursu z punktu widzenia administratora / kreatora



Rysunek 4: Standardowy widok kursu z punktu widzenia osoby o uprawnieniach „student”

Dla osoby posiadającej uprawnienia do edycji, kluczowe znaczenia ma przycisk znajdujący się w prawej, górnej stronie ekranu.

Rysunek 5: Przycisk "włącz tryk edycji" - widoczny tylko dla uprawnionych użytkowników

Po jego użyciu możemy zmieniać zawartość kursu.

Elementy znajdujące się w środkowej części ekranu nazywamy *modułami*. Po bokach znajdują się *bloki*, które możemy swobodnie dodawać, usuwać, przenosić.

1. Oznaczenia

Jak wcześniej zostało wspomniane, elementy oznaczone szarym kolorem są niewidoczne dla uczniów (przykład poniżej). Ponadto warto ponadto pamiętać o szczególnie ważnych oznaczeniach dostępnych w trybie edycji.

Rysunek 6: Ikony edycji zasobów (w zależności od wersji Moodle'a)

Ikonki przy składowych i zasobach oznaczają:

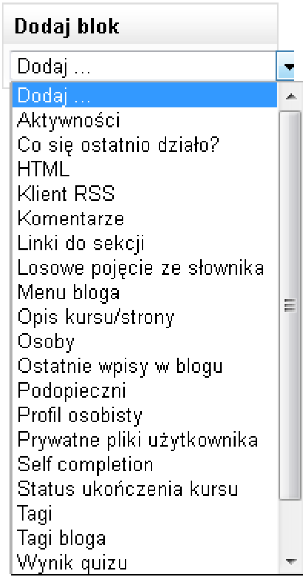
- strzałki – przenoszenie elementu,
- strzałka w prawo/lewo – wcięcia (jedno kliknięcie odpowiada jednemu tabulatorowi),
- dłoń z długopisem – edycja zasobu,
- X – usunięcie zasobu,
- oko zamknięte/otwarte (przekreślone) – widoczność dla uczniów.

Dodatkowo przy każdym module widoczna jest ikonka żarówki. Kliknięcie na nią spowoduje wyróżnienie aktualnie obowiązującego uczniów modułu.

2. Bloki

Dookoła głównej treści kursu mamy możliwość umieszczać bloki tematyczne. Możemy ograniczyć się do tych oferowanych przez Moodle'a, typu kalendarz, a także zdefiniować swój blok (w tym celu należy wybrać blok *HTML*). Można także zrezygnować z używania bloków i wtedy treść głównych modułów wypełni całą szerokość platformy.

Aby wstawić blok, będąc w trybie edycji, korzystamy z menu *Bloki*.



Rysunek 7: Rozwinięte menu Bloki

Wraz z kolejnymi wersjami Moodle'a, programiści umieszczają coraz więcej zdefiniowanych, gotowych do użycia bloków.

3. Panel administracji

Panel administracji funkcjonuje jako jedyny blok, którego nie można usunąć (co najwyżej można go ukryć korzystając z przycisku „włącz tryb edycji" i klikając ikonkę „oko"). W panelu znajduje się kilka bardzo ważnych ustawień odnoszących się do konkretnego kursu. Zostały one opisane poniżej.

a. Ustawienia

W tym miejscu decydujemy o wyglądzie kursu, dodajemy jego opis, ustalamy liczbę modułów, które możemy określić jako tematyczne lub tygodniowe, w zależności od zakładanej formy kursu. Możemy tutaj także zmienić nazwy domyślnych ról na bardziej nam odpowiadające.

Bardzo ważnym polem jest *dostępność*. Ustawiamy w nim takie opcje jak: widoczność dla uczniów całego kursu i klucz zabezpieczający. Warto pamiętać, że pominięcie tego pola sprawi, że każdy będzie mógł wejść do kursu.

W tym menu możemy zmienić także domyślny język na dowolny, który został wcześniej zainstalowany przez administratora Moodle'a.

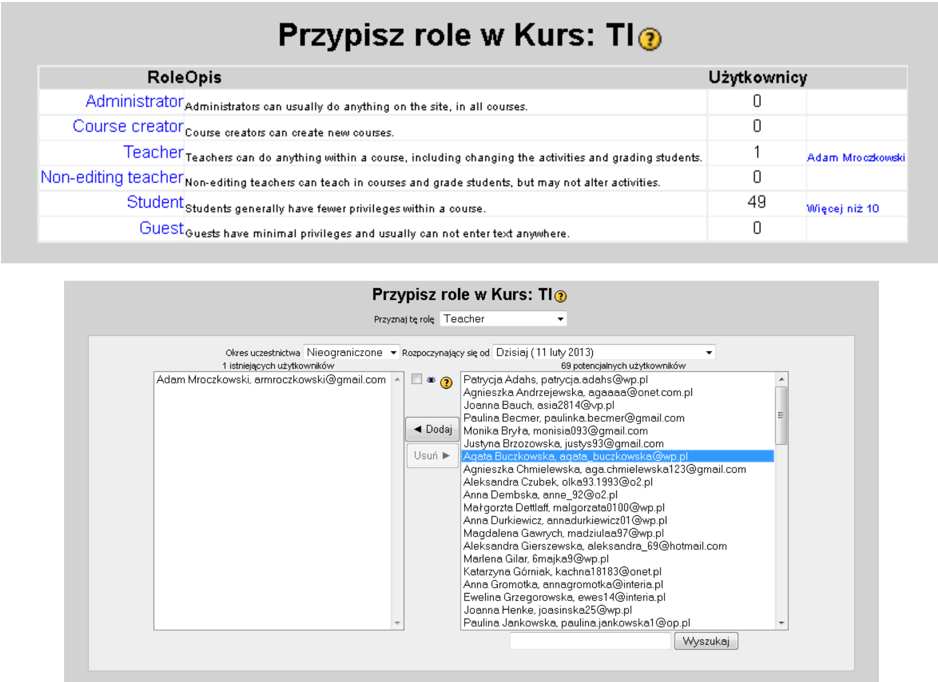
Dwa pola Moodle są obowiązkowe:

- Pełna nazwa kursu,
- Skrócona nazwa kursu.

Skrócona nazwa kursu ponadto musi być unikalna na danej platformie.

b. Przypisz role

W obrębie kursu możemy przydzielać użytkownikom role, które zostały wspomniane na początku niniejszego akapitu.



Rysunek 8: Przypisywanie ról w kursie

Aby przypisać rolę osobie, należy kliknąć w nazwę danej roli, a następnie przeciągnąć odpowiedniego użytkownika do lewego okienka.

c. Grupy

Zgodnie z nazwą, w tym miejscu możemy podzielić naszych kursantów na grupy. Jest to wygodne, gdy na przykład szkolimy osoby z różnych oddziałów lub klas.

d. Kopia zapasowa

Pozwala na stworzenie kopii zapasowej kursu i pobranie jej.

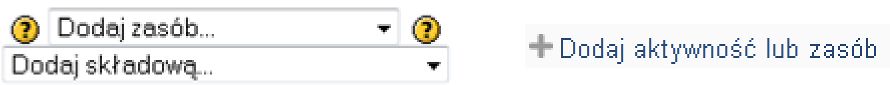
e. Oceny

Miejsce to zawiera ustawienia związane z wystawianiem ocen. Określa się sposób przeliczania punktacji w przypadku, w którym uczeń miał możliwość podchodzenia do testu wiele razy (n*ajwyższa ocena, średnia ocena, pierwsze podejście, ostatnie podejście*) oraz miejsca dziesiętne oceny.

Tryb kar przydatny jest w testach adaptacyjnych – wtedy kolejna odpowiedź na to samo pytanie (w ramach jednego podejścia do testu) powoduje zmniejszenie maksymalnej możliwej do uzyskania oceny (za to pytanie) o wpisaną liczbę.

4. Składowe i zasoby

Składowe zasoby umieszczane są w poszczególnych modułach i stanowią najważniejszą część kursu. To w nich udostępnia się uczniom materiały dydaktyczne, sprawdza wiedzę, zachęca do rozmowy i udziela informacji zwrotnej.



Rysunek 9: Dodawanie składowych i zasobów (w zależności od wersji Moodle'a)

Składowe i zasoby możemy dodawać w każdym module w trybie edycji.

a. Etykieta

Tekst, który pojawi się w samym module.

b. Strona HTML

Korzystając z poręcznego menu możemy przygotować ciekawą stronę HTML, np. w celu prezentacji treści wykładu.

c. Głosowanie

Prowadzący zadaje pytanie i oferuje szereg możliwych odpowiedzi do wyboru. Moduł ten może być przydatny, gdy prowadzący chce przeprowadzić szybką ankietę mającą na celu zachęcenie do zastanowienia się nad danym tematem, umożliwienie uczniom głosowania na temat dalszego kierunku kursu lub terminu spotkania na chacie.

d. Link do pliku lub strony

Zgodnie z nazwą – możemy zamieścić link do pliku lub dowolnego miejsca w sieci.

e. Katalog plików

Umożliwia zarządzanie plikami przesyłanymi przez prowadzących i kursantów.

f. Chat

Moduł *Czat* pozwala uczestnikom na przeprowadzanie na żywo dyskusji poprzez sieć. Jest to dobry sposób, aby uczestnicy kursu lepiej zrozumieli omawiany temat oraz siebie nawzajem – sposób używania czat-roomów zasadniczo różni się od dyskusji na forum pozwalających na zarządzanie i przeglądanie dyskusji.

g. Forum

Ten moduł bywa jednym z najważniejszych w kursie - właśnie na nim odbywa się większość dyskusji. Fora mogą mieć różną strukturę, umożliwiają ocenę każdej wypowiedzi. Posty z kolei mogą być przeglądane w różnych formatach, a także zawierać załączniki. Uczestnicy, którzy są subskrybentami forum, otrzymają pocztą elektroniczną kopię każdej nowej wiadomości. Prowadzący może domyślnie narzucić subskrypcję. Zalecane jest tworzenie forum przy każdym temacie/module.

h. Zadanie – prześlij plik

Zadania umożliwiają prowadzącemu określenie pracy, którą uczniowie mają wykonać w formie elektronicznej (w dowolnym formacie) i przesłać na serwer. Typowe zadania to wypracowania, projekty, raporty itp. Moduł ten zawiera funkcje umożliwiające wystawianie ocen, a także ograniczanie terminu, w którym przesłanie pracy będzie możliwe.

i. Quiz

Moduł ten umożliwia prowadzącemu tworzenie i udostępnianie uczniom testów składających się z pytań wielokrotnego wyboru, pytań typu prawda/fałsz oraz pytań wymagających udzielenia krótkich odpowiedzi. Pytania te, uporządkowane według kategorii, przechowywane są w bazie danych i mogą być ponownie wykorzystywane w ramach danego kursu lub nawet przenoszone do innego kursu. Quizy dopuszczają wielokrotne próby znalezienia rozwiązania. Każda próba jest automatycznie sprawdzana – prowadzący nauczyciel może decydować, czy przedstawi swój komentarz (informację zwrotną) czy udostępni poprawne odpowiedzi. Moduł ten oferuje narzędzia umożliwiające wystawianie ocen.

Testy sprawdzające na platformie Moodle tworzone są z pytań, które dodano do danego testu – nowy quiz (test) tworzy się dodając do niego wcześniej zdefiniowane pytania. Moodle umożliwia stosowanie następujących typów pytań, które mogą zawierać grafikę:

- Wielokrotny wybór

Odpowiadając na pytanie, uczeń wybiera z kilku proponowanych odpowiedzi. Są dwa typy pytań wielokrotnego wyboru – z jedną poprawną odpowiedzią i z wieloma poprawnymi odpowiedziami.

- Krótka odpowiedź

W odpowiedzi na pytanie, odpowiadający wpisuje słowo lub wyrażenie. Może istnieć kilka poprawnych odpowiedzi, każda z inną liczbą punktów. Jeżeli wybrana jest opcja „uwzględnianie wielkości liter”, punktacja za odpowiedź „Słowo” może być inna niż za odpowiedź „słowo”. Odpowiedzi są porównywane z dokładnością co do litery.

- Prawda/Fałsz

Odpowiadając na pytanie, respondent wybiera spośród dwóch opcji: Prawda lub Fałsz.

- Pytania wybierane losowo

Dodanie tego pytania do testu spowoduje wyświetlenie w jego miejscu losowo wybranego pytania z istniejących.

- Numeryczne

Z perspektywy ucznia pytanie numeryczne przedstawia się jak pytanie do krótkiej odpowiedzi. Różnica polega na tym, że pytania numeryczne mogą zakładać dozwolony błąd. Pozwala to na ustawienie ciągłego zakresu odpowiedzi. Na przykład, jeżeli odpowiedź wynosi 30 z dozwolonym błędem wynoszącym 5, wtedy każda wartość z przedziału 25–35 zostanie uznana za poprawną. Odpowiedzią na pytanie numeryczne może być też ciąg znaków nienumerycznych, w których wielkość znaku jest pomijana.

- Dopasuj odpowiedź

Po opcjonalnym wstępie uczeń otrzymuje kilka pod-pytań oraz kilka wymieszanych odpowiedzi. Istnieje jedna prawidłowa odpowiedź na każde z pod-pytań. Uczeń musi wybrać po jednej odpowiedzi do każdego z pod-pytań. Każde ma taką samą wagę .

- Opis

Formalnie rzecz ujmując nie jest to pytanie. Wyświetla on jedynie pewien tekst i nie wymaga odpowiedzi. Może być użyty w celu lepszego wyjaśnienia następującej po nim grupy pytań.

- Obliczeniowe

Pytania liczbowe oferują możliwość tworzenia indywidualnych pytań numerycznych poprzez użycie zmiennych literowych, które są równoznaczne z konkretnymi wartościami podczas quizu, np.:

Treść pytania: *ile jest {a}+{b}?*

Poprawna formuła odpowiedzi: *{a} + {b}*

Podczas rozwiązywania quizu w miejsce zmiennych literowych {a} i {b} zostaną wstawione konkretne wartości. Po zakończeniu quizu poprawna odpowiedź zostanie obliczona na podstawie formuły {a} + {b}. Możliwe wartości zmiennych literowych są ustawiane na następnej stronie edycji pytania.

Wybrane metody aktywizacji uczniów w nauczaniu zdalnym

Przekonanie, że edukacja zdalna, w jakiejkolwiek formie, nie wymaga kontaktu z innymi osobami jest często powtarzanym mitem. Wysoka efektywność zorganizowanego nauczania, niezależnie od przyjętej formy, jest często zdeterminowana przez umiejętność wykreowania odpowiedniej atmosfery współpracy. Poniżej opisano wybrane metody sprzyjające podnoszeniu aktywności uczestników kursu. Większość z nich odbywa się przy pomocy forum, chociaż możliwe jest także wykorzystanie chat-roomu.

Niezwykle ważne jest, aby uczniowie podczas całej swojej pracy wykorzystywali formy komunikacji na platformie. Dzięki temu nauczyciel uzyska stały podgląd aktywności zespołu, dzięki czemu będzie mógł na bieżąco sugerować rozwiązania, a także na bieżąco poprawiać, komentować i co najważniejsze udzielać informację zwrotną.

Metoda pierwsza – STUDIUM PRZYPADKU (*CASE STUDY*)

Metoda polega na dokładnym opisaniu i przeanalizowaniu przypadku nawiązującego do tematu zajęć. Celem zastosowania tej metody jest zrozumienie pewnych prawidłowości, uwypuklenie mechanizmów typowych dla określonej grupy zdarzeń. Uczestnik zajęć ma możliwość poszukiwania rozwiązań bazując na własnym doświadczeniu oraz odniesieniu się do treści kursu.

Przykład

W temacie inauguracyjnym zostaje umieszczony film/opis przedstawiający pewne zjawisko. Uczniowie (mogą być podzieleni na zespoły) mają za zadanie odpowiedzieć na pytanie: jakie czynniki doprowadziły do przebiegu zjawiska w taki, a nie inny sposób? Nauczyciel na bieżąco moderuje dociekania uczniów.

Metoda druga – DYSKUSJA

To uporządkowana wymiana myśli na dany temat oraz sztuka wyrażania swojego zdania, argumentacji i trening szacunku dla przekonań innych. Wymaga dobrego zaplanowania. Dyskusja, powinna być w przemyślany sposób nakierowana na cel, który chcemy osiągnąć. Jako metoda nauczania-uczenia się szczególnie należałoby ją polecić, gdy chcemy:

- zaznajomić uczniów z zagadnieniami nieposiadającymi jednoznacznego rozwiązania,
- zaznajomić uczniów z zagadnieniami szczególnie trudnymi i złożonymi, a które w dyskusji uzyskają rozmaite naświetlenie,
- zaznajomić ze szczególnie trudnymi przypadkami praktycznymi, wywołującymi kontrowersyjne sądy i opinie.

Przykład

Prowadzący kurs nauczyciel zakłada temat na forum i komunikuje uczniom, że od każdego z nich oczekuje co najmniej jednej odpowiedzi. Uczniowie mogą odpowiadać także sobie wzajemnie, a prowadzący na bieżąco może udzielać im informacji zwrotnej. Dyskusja może być oceniana całościowo (po dyskusji, w podsumowującym poście, prowadzący udziela ogólnej informacji zwrotnej) lub też indywidualnie.

Metoda trzecia – DEBATA

Analiza argumentów „za" i „przeciw". Debata to uporządkowany spór pomiędzy zwolennikami
i przeciwnikami jakiegoś poglądu. Zadaniem uczniów jest zaprezentowanie w przyjazny sposób argumentów „pro" i „contra" oraz przekonanie adwersarzy do swoich racji.

Przykład

Po zadaniu tematu debaty nauczyciel, już na początku, dzieli uczniów (imiennie) na dwa przeciwstawne obozy: zwolenników i przeciwników danego zagadnienia. Na koniec może sam podsumować wymianę argumentów z obu stron lub też wytypować w tym celu po jednej osobie z każdego zespołu.

Metoda czwarta – BURZA MÓZGÓW

Polega na zespołowym wytwarzaniu, w dość krótkim czasie, jak największej ilości różnorodnych pomysłów prowadzących do rozwiązania danego problemu. Proponowane myśli mogą być różne, zaskakujące, pozornie niezwiązane z tematem, gdyż w trakcie ich zgłaszania nie podlegają żadnej ocenie.

Przykład

Podczas spotkania w chat-roomie nauczyciel narzuca problem i oczekuje od uczniów natychmiastowych propozycji jego rozwiązania. Po zapisaniu wymiany myśli następuje jej sprawdzenie, wartościowanie, a następnie wybór najlepszych pomysłów. W tej metodzie nie używa się ocen indywidualnych, wskazana jest jedynie informacja zwrotna dla całej grupy.

Nauczanie metodą projektów

Jedną z często stosowanych metod aktywizujących uczniów jest metoda projektu. Stosowanie tej metody pozwala zainspirować uczniów do samodzielnego rozwiązywania problemów, praktycznego zastosowania zdobytej podczas lekcji wiedzy. Jej zaletą jest także to, że rozwija umiejętności społeczne.

W praktyce spotkać można dwa rodzaje projektów edukacyjnych:

- Projekty badawcze, których celem jest usystematyzowanie zdobytej wiedzy
- Projekty działania lokalnego, których celem jest podjęcie działań na rzecz środowiska lokalnego.

Specyfika przedmiotów ścisłych narzuca wykorzystanie na lekcjach projektu badawczego. Projekt badawczy może prowadzić do osiągnięcia różnych celów edukacyjnych. Ze względu na cele można wyróżnić trzy typy projektów badawczych:

- Projekt obserwacyjny
- Projekt doświadczalny
- Projekt teoretyczny

Możliwa jest również realizacja projektu łączącego wszystkie trzy typy projektów. Niezależnie od typu projektu jaki będą realizowali uczniowie aby osiągnąć zamierzony cel należy pamiętać, że projekt powinien być realizowany w kilku następujących po sobie fazach.

Faza I – inicjacja projektu – celem tego etapu jest zainteresowanie uczniów tematyką projektu. Ważne jest aby uczniowie nie tylko poznali podstawowe informacje o danym problemie, ale także aby zostali zainteresowani i zainspirowani do szukania własnych rozwiązań.

Faza II – określenie celu i harmonogramu realizacji – celem projektu jest rozwiązanie konkretnego problemu. Problem powinien być sformułowany w sposób, który nie będzie kojarzył się uczniom z tematem lekcji, a raczej będzie odwoływał się do spotykanych na co dzień sytuacji. Najlepiej gdyby problem, jaki maja rozwiązać uczniowie, postawiony był w formie pytania. Po określeniu celu, należy opracować harmonogram podejmowanych działań i przypisać uczestnikom projektu role.

Faza III – realizacja projektu – w tym etapie rola nauczyciela sprowadza się do roli konsultanta. Uczniowie samodzielnie realizują zadania wynikające z harmonogramu i spotykają się cyklicznie z nauczycielem w celu omówienia postępu prac oraz rozwiązania problemów jakie pojawiły się podczas realizacji zadań. Wszystkie zadania powinny być dokumentowane, dlatego uczniowie wspólnie z nauczycielem tworzą karty projektu i zadania.

Faza IV – Prezentacja wyników projektu – uczniowie prezentują publicznie wyniki swojej pracy. Forma prezentacji jest dowolna, może to być referat wygłoszony na forum klasy, sesja plakatowa czy szkolny festiwal nauki. Po zakończeniu prezentacji uczniowie powinni dokonać samooceny, w której określą swoje słabe i mocne strony związane z realizacją projektu, określą poziom zaangażowania w jego realizację.

Projekt powinien być realizowany zgodnie z zapisami karty projektu. Dodatkowo uczniowie powinni zostać poinformowani o zasadach współpracy z nauczycielem, kryteriach oceny projektu oraz sposobach ewaluacji projektu.
Celem ewaluacji projektu jest określenie:

- Czy, a jeśli tak to jakie, wystąpiły trudności przy realizacji?
- Które problemów jakie się pojawiły można było przewidzieć?
- Mocnych i słabych strony zajęć.
- Oczekiwań, które nie zostały spełnione.
- Co było trudne do zrozumienia?
- Które umiejętności można wykorzystać w dalszej pracy?

Stosowanie metody projektu pozwala na rozwijanie u uczniów wielu kompetencji społecznych. Najważniejszymi z nich są umiejętności:

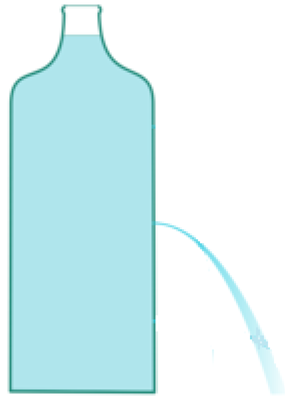
- współpracy w grupie,

- podejmowania decyzji,
- wyrażania własnych poglądów,
- słuchania opinii innych,
- dzielenia się w grupie rolami i zadaniami,
- planowania pracy,
- dokonywania oceny pracy.

Jeśli uczeń zaangażuje się w pracę metodą projektu, będzie mógł:

- sprawdzić się w roli odkrywcy,
- rozwinąć swoje umiejętności społeczne
- rozwinąć umiejętności planowania czasu i miejsca pracy,
- doskonalić umiejętności poszukiwania, selekcjonowania, gromadzenia i opracowania informacji, także wykorzystując narzędzia informatyczne
- rozwinąć umiejętność autoprezentacji,
- doświadczania, przeżywania, odkrywania i działania,
- odkryć relacje między zdobytą wiedzą teoretyczną, a rzeczywistością.

Przykładowy projekt badawczy



Do wykonania badania potrzebna będzie plastikowa butelka z małym otworem u dołu, woda, dwie linijki.

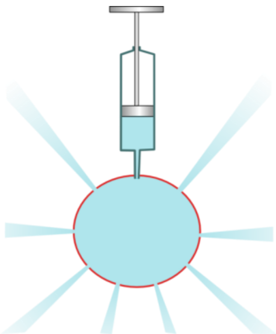
Po napełnieniu butelki wodą należy wykonać równolegle pomiary wysokości słupa wody w butelce oraz odległości od butelki do miejsca, w którym woda opada na podłoże.

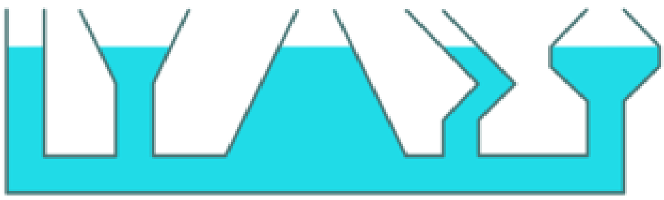
Należy wykonać możliwie wiele pomiarów i zapisać je w zależności takiej, jak opisuje tabela.

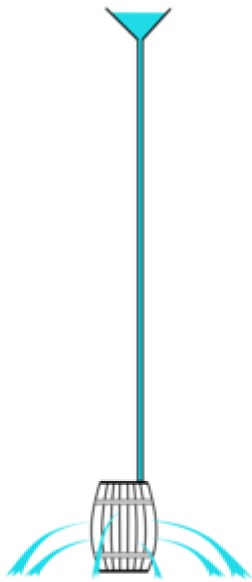
Wysokość słupa wody						…
Odległość od butelki do miejsca, w którym woda opada na podłoże						…

Następnie trzeba dokonać wszechstronnej analizy otrzymanych wyników pod kątem:

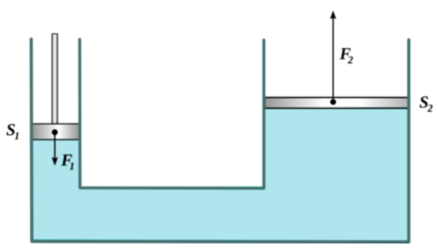
- matematycznym – nanieść otrzymane dane na układ współrzędnych i postarać się przybliżyć zarysowaną krzywą konkretną funkcją. Należy wykorzystać technologię informatyczną do zaprezentowania wyników.
- fizycznym – wyjaśnić zaobserwowane zjawisko. Przy omawianiu można wykorzystać pomysły zobrazowane poniżej.

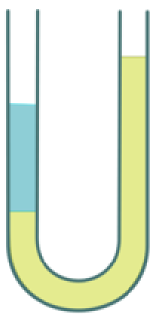






Można także z pomocą dostępnych programów skonstruować model prezentujący poniższe zjawiska.





Przykładowe tematy projektów

- Przyczyna ruchu i odkształcenia – projekt pozwalający odkryć uczniom zasady dynamiki Newtona i określić wpływ sił na ruch ciał.
- Maszyny proste – w tym projekcie uczniowie będą mogli określić związek miedzy zasadami zachowania a zasadami działania maszyn prostych.
- Jak poznajemy świat – wzrok i słuch – projekt, w którym uczeń odkrywa jak zjawiska falowe informują nas o otaczającej rzeczywistości.
- Przepływ energii cieplnej – projekt badawczy, w którym uczeń weryfikuje doświadczalnie prawa rządzące przepływem energii cieplnej.
- Tam i z powrotem – projekt, w którym uczeń bada własności ruchu harmonicznego
- Optyka wokół nas – projekt obserwacyjny, w którym uczeń odnajduje prawa optyki geometrycznej w otaczającym go środowisku.
- Dlaczego tak ciężko – projekt, w którym uczeń odkrywa siłę tarcia i jej właściwości
- Skąd się bierze prąd? – projekt pozwalający uczniowi zbadać różne rodzaje źródeł prądu elektrycznego i zweryfikować prawa dzięki, którym w obwodach płynie prąd.
- Co to jest audyt energetyczny? – projekt, w którym uczeń weryfikuje zasady termodynamiki.

Arkusz samooceny ucznia

.. Grupa...........
(imię i nazwisko)

Odpowiedz szczegółowo na poniższe pytania. Twoje odpowiedzi pozwolą mi skrupulatnie ocenić pracę nad projektem:

1.Jaki był temat projektu nad którym pracowałe(a)ś?

....

....

2.Jaka była twoja rola w grupie? Czym się zajmowałe(a)ś?

....

....

3.Jakie trudności pojawiły się w czasie pracy i w jaki sposób je rozwiązałe(a)ś?

....

....

4.Z czyjej pomocy korzystałe(a)ś (rówieśnicy, rodzice, nauczyciele, instytucje, inne)cicw jakim zakresie?

....

....

5.Czego się nauczyłe(a)ś pracując nad projektem?

....

....

6.Na ile punktów w skali 1 –10 oceniasz swój wkład w pracę grupy ...., zdobyte umiejętności i wiedzę ....?

7.Czy twoje oczekiwania związane z taką metodą pracy zostały spełnione, czy odpowiada ci taka forma zdobywania wiedzy i umiejętności? .... Uzasadnij swoją odpowiedź:

....

....

8.Jakie ewentualnie zmiany należałoby wprowadzić do organizacji pracy grup ?

....

....

Dziękuję za przemyślaną odpowiedź.

Przykładowa karta projektu, zadania i ewaluacji

Karta projektu

wzór opracowany przez Centrum Edukacji Obywatelskiej

I- Podstawowe informacje - zespół uczniowski i wybrane tematy projektu

Temat projektu		
Zespół uczniowski	*1. imię i nazwisko ucznia* *2. imię i nazwisko ucznia* *3. imię i nazwisko ucznia*	*podpisy uczniów* *(zobowiązanie do realizacji projektu)*
Nauczyciel opiekun	*imię i nazwisko nauczyciela*	*podpis nauczyciela*
Problem	*Problem, którego rozwiązaniem zajmuje się zespół uczniów np.: „Jak światło wpływa na rozwój roślin?" lub „Jak sprawić, aby nasza miejscowość była czystsza?"*	

II- Określenie celów projektu i zaplanowanie etapów realizacji

(tabele wypełniane na etapie planowania, z wyjątkiem informacji o wykonaniu, dopisywanej po zakończeniu zadania)

a) Główne cele

„Czego chcemy się dowiedzieć?" i/ lub „Co chcemy osiągnąć?"	

b) Planowanie etapów realizacji projektu

Główne zadania	Działania	Uczniowie odpowiedzialni	Terminy realizacji	Informacja o wykonaniu
Jeśli projekt jest bardziej rozbudowany, warto dodać kolumnę głównych zadań	*1. Działania pozwalające zrealizować projekt lub zadanie*	*Imiona i nazwiska uczniów*	*Termin rozpoczęcia i zakończenia*	*Informacje podsumowujące wykonanie działania i zadania*
	2. Działania pozwalające zrealizować projekt lub zadanie	*Imiona i nazwiska uczniów*	*Termin rozpoczęcia i zakończenia*	*Informacje podsumowujące wykonanie działania i zadania*
	3. Działania pozwalające zrealizować projekt lub zadanie	*Imiona i nazwiska uczniów*	*Termin rozpoczęcia i zakończenia*	*Informacje podsumowujące wykonanie działania i zadania*
Jw.				

III. Konsultacje z nauczycielem

(tabela wypełniana sukcesywnie w czasie realizacji projektu)

Terminy	Temat	Uczestnicy konsultacji	Podpis nauczyciela
Kiedy sie odbyła ?	*Czego dotyczyła konsultacja?*	*Imię i nazwisko nauczyciela udzielającego konsultacji oraz biorących w niej udział uczniów.*	*Podpis nauczyciela udzielającego konsultacji*
Jw.			

IV. Publiczne przedstawienie rezultatów projektu

(tabela wypełniana po prezentacji)

Termin prezentacji	*Kiedy odbyła się prezentacja?*
Miejsce prezentacji	*Np. szkoła, strona internetowa ogólnopolskiego programu, w którym uczniowie wzięli udział*
Forma prezentacji	*Np. prezentacja komputerowa, plakaty i krótkie ich ustne omówienie*
Udział członków zespołu	*Np. wskazanie, którzy uczniowie i w jaki sposób wzięli czynny udział w prezentacji*
Odbiorcy	*Np. uczniowie klasy, szkoły, rodzice, przedstawiciele samorządu, uczniowie innej szkoły*

Karta zadania (lub działania) i ewaluacji

wzór opracowany przez Centrum Edukacji Obywatelskiej

(Jeśli projekt jest rozbudowany to poza kartą projektu uczniowie mogą wypełniać także karty działań lub zadań)

Zadanie	*Jedno z zadań lub działań, jakie planuje wykonać zespół, aby rozwiązać problem i zrealizować projekt.*

a) Planowanie

(tabela wypełniana w trakcie wykonywania działania)

Działania	Uczniowie wykonujący działanie i ich role	Źródła informacji, materiały i zasoby	Sojusznicy	Termin wykonania
Zadanie rozpisane na szczegółowe działania.	*Imiona i nazwiska uczniów, ze wskazaniem, co kto robi.*	*Z czego uczniowie będą korzystać?*	*Kto może pomóc?*	*Przewidywany termin rozpoczęcia i zakończenia działania.*
Jw.				

b) Realizacja i samoocena

(tabela wypełniana po wykonaniu kolejnych zadań i działań)

Co i jak zrobiliśmy?	*Które z zadań i działań udało się zespołowi zrealizować? Kto był w to zaangażowany (wykonawcy)? Z jakich źródeł informacji, materiałów i zasobów korzystali uczniowie? Jak przebiegała realizacja przeprowadzonych działań lub zadań? Kto im pomagał? Jakie efekty (produkty) powstały w wyniku podjętych działań?*
Co stanowiło dla nas trudność i jak ją pokonaliśmy?	*Jakie trudności uczniowie napotkali i jak je rozwiązali? Których zadań i działań nie udało się zrealizować?*
Czego się nauczyliśmy?	*Uczniowie wskazują, czego się dowiedzieli lub nauczyli, jakie umiejętności zdobyli.*