informatyka+

Algorytmika i programowanie

Bazy danych

Multimedia, grafika i technologie internetowe

Sieci komputerowe

Tendencje w rozwoju informatyki i jej zastosowań

Człowiek – najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

informatyka+

Kuźnia Talentów Informatycznych: Przygotowanie do matury z matematyki (z elementami informatyki)

Iwona i Ireneusz Bujnowscy

Człowiek – najlepsza inwestycja

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Przygotowanie do matury z matematyki (z elementami informatyki)

i+

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rodzaj zajęć: Kuźnia Talentów Informatycznych
Tytuł: Kurs przygotowujący do matury z matematyki (z elementami informatyki)
Autorzy: Iwona i Ireneusz Bujnowscy

Redaktor merytoryczny: prof. dr hab. Maciej M Sysło

Zeszyt dydaktyczny opracowany w ramach projektu edukacyjnego
Informatyka+ — ponadregionalny program rozwijania kompetencji
uczniów szkół ponadgimnazjalnych w zakresie technologii
informacyjno-komunikacyjnych (ICT).
www.informatykaplus.edu.pl
kontakt@informatykaplus.edu.pl

Wydawca: Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
ul. Lewartowskiego 17, 00-169 Warszawa
www.wwsi.edu.pl
rektorat@wwsi.edu.pl

Projekt graficzny: FRYCZ I WICHA

Warszawa 2011

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przygotowanie do matury z matematyki (z elementami informatyki)

Iwona i Ireneusz Bujnowscy

I Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza
w Białymstoku
e-mail: ibujnowski@gmail.com

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Streszczenie

Od maja 2010 roku matematykę jako, przedmiot obowiązkowy zdają wszyscy abiturienci przystępujący do matury. Zgodnie z obowiązującymi przepisami, matematyka może być zdawana na poziomie podstawowym lub rozszerzonym. Jednak osoba, która wybierze matematykę na poziomie rozszerzonym musi zdawać również matematykę na poziomie podstawowym.

W części I materiałów podany jest przegląd standardów egzaminacyjnych z matematyki dla poziomu podstawowego i rozszerzonego, podana jest również struktura i forma egzaminu maturalnego.

W części II zamieszczane są szczegółowe standardy wymagań egzaminacyjnych oraz zadania do każdego standardu

Ten kurs ma na celu, w formie zajęć warsztatowych, udzielenie pomocy uczniom przygotowującym się do tego egzaminu.

Spis treści

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Podstawowe dokumenty związane z egzaminem maturalnym są publikowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną (CKE) na stronie http://www.cke.edu.pl.

Najważniejsze kwestie formalne, związane z przeprowadzeniem i przebiegiem egzaminu maturalnego z matematyki są przytoczone w dokumencie Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku z matematyki. Zawiera on m.in.:

- opis struktury i formy egzaminu maturalnego z matematyki, w tym:
  - opis arkusza dla poziomu podstawowego
  - zasady oceniania arkuszy egzaminacyjnych
- wymagania egzaminacyjne
- szczegółowy opis standardów wymagań egzaminacyjnych – poziom podstawowy i rozszerzony
- przykładowe arkusze i schematy oceniania

Informator jest ważnym dokumentem zarówno dla nauczyciela, jak i dla uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego, gdyż zawiera podstawowe informacje i materiały, które mogą pomóc uczniom bliżej zapoznać się z przebiegiem egzaminu oraz z postacią zadań maturalnych i sposobami ich oceniania.

PRZEGLĄD STANDARDÓW EGZAMINACYJNYCH

Zdający powinien posiadać umiejętności:

1. wykorzystania i tworzenia informacji:

POZIOM PODSTAWOWY

interpretuje tekst matematyczny i formułuje uzyskane wyniki

Zdający potrafi:

- odczytać informację bezpośrednio wynikającą z treści zadania
- zastosować podany wzór lub podany przepis postępowania (algorytm)
- wykonać rutynową procedurę dla typowych danych
- przejrzyście zapisać przebieg i wynik obliczeń oraz uzyskaną odpowiedź

POZIOM ROZSZERZONY

używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników

Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym oraz:

- wykonać rutynową procedurę na niekoniecznie typowych danych
- odczytać informację z wykorzystaniem więcej niż jednej postaci danych
- precyzyjnie przedstawić przebieg swojego rozumowania

2. wykorzystania i interpretowania reprezentacji:

POZIOM PODSTAWOWY

używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych

- poprawnie wykonywać działania na liczbach i przedziałach liczbowych, przekształcać wyrażenia algebraiczne, rozwiązywać niezbyt złożone równania, ich układy oraz nierówności, odczytywać z wykresu własności funkcji, sporządzać wykresy niektórych funkcji, znajdować stosunki miarowe w figurach płaskich i przestrzennych (także z wykorzystaniem układu współrzędnych lub trygonometrii),zliczać obiekty i wyznaczać prawdopodobieństwo w prostych sytuacjach kombinatorycznych
- zastosować dobrze znaną definicję lub twierdzenie w typowym kontekście

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

POZIOM ROZSZERZONY
rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi
Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także:
- w odniesieniu do bardziej złożonych obiektów matematycznych, a ponadto potrafi podać przykład obiektu matematycznego spełniającego zadane warunki

3. modelowania matematycznego:

POZIOM PODSTAWOWY
dobiera model matematyczny do prostej sytuacji
Zdający potrafi, także w sytuacjach praktycznych:
- podać wyrażenie algebraiczne, funkcję, równanie, nierówność
- interpretację geometryczną, przestrzeń zdarzeń elementarnych opisujące przedstawioną sytuację
- przetworzyć informacje wyrażone w jednej postaci w postać ułatwiającą rozwiązanie problemu
- ocenić przydatność otrzymanych wyników z perspektywy sytuacji, dla której zbudowano model

POZIOM ROZSZERZONY
buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia
Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także:
- buduje model matematyczny danej sytuacji, także praktycznej, również wymagający uwzględnienia niezbędnych ograniczeń i zastrzeżeń

4. użycia i tworzenia strategii:

POZIOM PODSTAWOWY
stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania
Zdający potrafi:
- dobrać odpowiedni algorytm do wskazanej sytuacji problemowej
- ustalić zależności między podanymi informacjami
- zaplanować kolejność wykonywania czynności, wprost wynikających z treści zadania, lecz nie mieszczących się w ramach rutynowego algorytmu
- krytycznie ocenić otrzymane wyniki

POZIOM ROZSZERZONY
tworzy strategię rozwiązywania problemu
Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także:
- zaplanować i wykonać ciąg czynności prowadzący do rozwiązania problemu, nie wynikający wprost z treści

5. rozumowania i argumentacji:

POZIOM PODSTAWOWY
prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.
Zdający potrafi:
- wyprowadzić wniosek z prostego układu przesłanek i go uzasadnić
- zastosować twierdzenie, które nie występuje w treści zadania

POZIOM ROZSZERZONY
5. rozumowania i argumentacji:
tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność
Zdający potrafi wszystko to, co na poziomie podstawowym, także:
- wyprowadzić wniosek ze złożonego układu przesłanek i go uzasadnić
- analizować i interpretować otrzymane wyniki
- przeprowadzić dowód

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UWAGI O ORGANIZACJI EGZAMINU

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem pisemnym sprawdzającym wiadomości i umiejętności określone w standardach wymagań egzaminacyjnych i polega na rozwiązaniu zadań zawartych w arkuszach egzaminacyjnych.

1. Egzamin maturalny z matematyki zdawanej jako **przedmiot obowiązkowy** jest zdawany na **poziomie podstawowym. Egzamin trwa 170 minut** i polega na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych sprawdzających rozumienie pojęć i umiejętność ich zastosowania w życiu codziennym oraz zadań o charakterze problemowym.

   W roku 2010 50% (czyli 25 na 50) do zdobycia punktów można było zdobyć rozwiązując zadania zamknięte. W roku 2011 46% punktów (23 na 50) było do zdobycia w zadaniach zamkniętych. Można więc założyć, że w roku 2012 będzie można zdobyć 40-50% punktów z zadań zamkniętych.

2. Egzamin maturalny z matematyki zdawanej jako **przedmiot dodatkowy** jest zdawany na **poziomie rozszerzonym. Egzamin trwa 180 minu**t i polega na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych wymagających rozwiązywania problemów matematycznych. Zadania egzaminacyjne obejmują zakres wymagań dla poziomu rozszerzonego. Konstrukcja arkusza nie zmienia się w stosunku do lat ubiegłych i są tam tylko zadania otwarte.

   Egzamin z matematyki na poziomie rozszerzonym zdawany był tego samego dnia co egzamin z matematyki na poziomie podstawowym, dzieliła je tylko półtoragodzinna przerwa. Było to dość duże obciążenie dla uczniów, którzy tego samego dnia zdawali dwa trudne egzaminy. Od roku 2012 planowana jest zmiana, egzaminy z matematyki rozłożone zostaną na dwa dni. Pierwszego dnia poziom podstawowy, drugiego poziom rozszerzony.

OPIS ARKUSZA DLA POZIOMU PODSTAWOWEGO

Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań:

1. grupa – zawiera od 20 do 30 zadań zamkniętych. Do każdego z tych zadań są podane cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0 - 1. Zdający udziela odpowiedzi, zaznaczając je na karcie odpowiedzi.

2. grupa – zawiera od 5 do 10 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi punktowanych w skali 0-2.

3. grupa – zawiera od 3 do 5 zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi punktowanych w skali 0-4, albo 0-5, albo 0-6.

Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający może uzyskać maksymalnie 50 punktów.

ZASADY OCENIANIA ARKUSZY EGZAMINACYJNYCH

1. Zadania otwarte w arkuszach egzaminacyjnych sprawdzają i oceniają egzaminatorzy powołani przez dyrektora okręgowej komisji egzaminacyjnej.
2. Rozwiązania poszczególnych zadań oceniane są na podstawie szczegółowych kryteriów oceniania, jednolitych w całym kraju.
3. Egzaminatorzy w szczególności zwracają uwagę na:
   - poprawność merytoryczną rozwiązań
   - kompletność prezentacji rozwiązań zadań – wykonanie cząstkowych obliczeń i przedstawienie sposobu rozumowania
4. Ocenianiu podlegają tylko te fragmenty pracy zdającego, które dotyczą polecenia. Komentarze, nawet poprawne, nie mające związku z poleceniem nie podlegają ocenianiu.
5. Gdy do jednego polecenia zdający podaje kilka rozwiązań (jedno prawidłowe, inne błędne), to egzaminator nie przyzna punktów.
6. Za całkowicie poprawne rozwiązania zadań, uwzględniające inny tok rozumowania niż podany w schemacie punktowania, przyznaje się maksymalną liczbę punktów.
7. Zapisy w brudnopisie nie są oceniane.
8. Zdający zdał egzamin maturalny z matematyki, jeżeli otrzymał co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań z arkusza dla poziomu podstawowego.
9. Wynik egzaminu maturalnego z matematyki ustalony przez komisję okręgową jest ostateczny.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Rozwiązanie zadania egzaminatorzy oceniają według tego, jak daleko dotarł rozwiązujący na drodze do całkowitego rozwiązania zadania. Rozwiązanie zadania przydzielane jest do jednej z następujących kategorii:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu;
2. został dokonany istotny krok w kierunku rozwiązania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania;
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy, usterki;
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, rozwiązanie zadania nie zostało dokończone lub w dalszej części rozwiązania wystąpiły poważne błędy merytoryczne;
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, jednak dalsza część rozwiązania zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.);
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie.

PODSTAWOWE STRATEGIE ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ ZAMKNIETYCH

Rozwiązując zadania zamknięte można stosować kilka strategii

Strategia sprawdzania warunków

Uczeń sprawdza warunki zadania dla kolejnych zaproponowanych odpowiedzi.

Strategia eliminacji i preferencji

Uczeń kolejno odrzuca te odpowiedzi, które nie spełniają warunków zadania, począwszy od tych najbardziej odbiegających od warunków zadania do tych najbardziej zbliżonych.

Strategia otwierania

Uczeń rozwiązuje zadanie jak otwarte, a otrzymany wynik odszukuje wśród zaproponowanych odpowiedzi.

Łączenie strategii

Uczeń łączy kilka strategii np. eliminacji i sprawdzania warunków

W tym opracowaniu zwracana jest szczególna uwaga na standardy i zadania do tych standardów. Treści zadań są w ramkach a uszczegółowione standardy na szarym tle.

Z uwagi na szeroki zakres wiedzy i problemów zawartych arkuszach egzaminacyjnych z matematyki zdawanej na poziomie podstawowym i rozszerzonym, opracowanie to zawiera głównie zadania zamknięte. Na początku zawarta jest analiza, podana jest strategia rozwiązań takich zadań, jak również pojawiają się krótkie szkice rozwiązań. Oczywiście zadania mogą być rozwiązywane dowolną metodą, a czytelnikom pozostawia się możliwość wyboru strategii rozwiązań zadań.

1) LICZBY RZECZYWISTE

Poziom PP

a) zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki, w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych,

■ 1. Przedstawiając wyrażenie $-\sqrt{8}\bullet\sqrt[3]{-8}$ w prostszej postaci otrzymasz:

a) -4 b) 8 c) -4$\sqrt{2}$ d) 4$\sqrt{2}$

w tym zadaniu można zastosować strategię eliminacji

Mnożenie dwóch liczb ujemnych da wynik dodatni, więc odpowiedzi a) oraz c) można odrzucić. Odpowiedź b) również jest niepoprawna, wyniku 8 nie uzyskamy z mnożenia $\sqrt{8}\bullet\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{5}{6}}$, zostaje więc tylko odpowiedź d) jako poprawna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

■ 2. Wartość wyrażenie $\frac{1\frac{1}{2} \div 3 + 2^{-1}}{0,5}$ wynosi
a) 2 b) 1 c) 3 d) 0,5
w tym zadaniu strategia otwierania przyniesie najlepsze rezultaty,
prawidłowa jest odpowiedź a)

b) zdający bada, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną,

■ 3.Obliczając $(\sqrt{6}-2)^2$ otrzymasz
a) liczbę naturalną b) liczbę całkowitą
c) liczbę wymierną d) liczbę niewymierną
w tym zadaniu można zastosować strategie eliminacji:
gdyby odpowiedź a) była prawdziwa, to również odpowiedzi b) oraz c) byłyby prawdziwe.
W zadaniach zamkniętych tylko jedna odpowiedź jest poprawna, więc możemy wyeliminować odpowiedź a).
To samo rozumowanie można przeprowadzić dla odpowiedzi b).
Stosując wzór skróconego mnożenia otrzymamy sumę kwadratów, która będzie liczbą wymierną, ale podwojony iloczyn - liczbą niewymierną. Nie ma możliwości uzyskania liczby wymiernej. Odpowiedź d) jest prawidłowa.

■ 4.Obliczajac $\left((\sqrt{\sqrt{5}-1})+(\sqrt{\sqrt{5}-1})\right)^2$ otrzymasz
a) liczbę naturalną b) liczbę całkowitą
c) liczbę wymierną d) liczbę niewymierną
Zadanie podobne do poprzedniego - zadania nr ■ 3.
Stosując wzór skróconego mnożenia, suma kwadratów będzie liczbą niewymierną natomiast podwojony iloczyn – liczbą wymierną, całość będzie więc liczbą niewymierną, a więc odpowiedź d) jest prawidłowa.

c) zdający wyznacza rozwinięcia dziesiętne; znajduje przybliżenia liczb; wykorzystuje pojęcie błędu przybliżenia,

■ 5. Okres rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{37}{330}$:
a) 11 b) 12 c) 121 d) 112
Rozwiązując to zadanie dzielimy pisemnie licznik przez mianownik. (strategia otwarcia). Zadanie to można rozwiązać również przy pomocy kalkulatora, wystarczy podzielić 37/330 i odczytać odpowiednie cyfry które się powtarzają – będzie to okres rozwinięcia.
prawidłowa jest odpowiedź b)

■ 6. Jeśli zapis $\lfloor x \rfloor$– *„podłoga” z z liczby x* oznacza zaokrąglenie do całości zawsze w „dół”,
(np. $\lfloor 3{,}8 \rfloor = 3$) natomiast $\lceil x \rceil$ „sufit” *liczby x* oznacza zaokrąglenie do całości zawsze w „górę”
(np. $\lceil 3{,}4 \rceil = 4$) to wyrażenie $\lfloor 3{,}1 \rfloor + 2 \cdot \lceil 3{,}1 \rceil$ ma wartość:
a) 9 b) 10 c) 11 d) 12
prawidłowa jest odpowiedź c)

d) zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach,

■ 7. Akcje pewnej firmy w lutym wzrosły o 25% , a następnie w marcu spadły o 20% w stosunku do miesiąca poprzedniego. O ile wzrosły lub spadły te akcje po dwóch miesiącach?
a) wzrost o 5% b) spadek o 5 %
c) cena się nie zmieniła d) nie da się tego obliczyć
W tym zadaniu można zastosować strategię mieszaną.
Odpowiedź d) można od razu wyeliminować, a dalej wystarczy obliczyć (1+25%)*(1-20%)=1,25*0,8 =1
prawidłowa jest odpowiedź c)

■ 8. Bank podniósł stopę procentową kredytu oprocentowanego 20% o 1 punkt procentowy. O ile procent wzrosło oprocentowanie kredytu przyjmując za bazę wartość przed jego podniesieniem?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

a) o 5%   b) o 1 %   c) o 10%   d) o 20%

W tym zadaniu wystarczy obliczyć, jakim procentem dwudziestu jest jeden. prawidłowa jest odpowiedź a)

■ 9.Zmieszano 6 litrów roztworu solnego (solanki) 40% z 12 litrami roztworu solnego 10%. Ile roztworu solnego otrzymano i jaka w niej była zawartość procentowa soli?

a) 20 lirów solanki 30%   b) 18 lirów solanki 25%

c) 18 lirów solanki $26\frac{2}{3}\%$ d) 24 litry solanki 30%

W tym zadaniu można zastosować strategię mieszaną.

Od razu narzuca się wyeliminowanie odpowiedzi a) i d) ponieważ możemy otrzymać tylko 18 litrów nowej solanki. A dalej wystarczy ułożyć równanie na zawartość czystej soli w roztworze w tym przypadku: $6\cdot 40\%+12\cdot 20\%=(12+6)\cdot x\%$

prawidłowa jest odpowiedź c)

e) zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej,

■ 10.Cześć wspólna zbioru będącego przedziałem liczbowym $A=\langle 3;8)$ ze zbiorem N liczb naturalnych to?

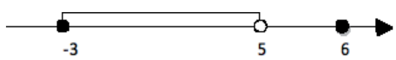
a) $\langle 3;7\rangle$ b) $\{3,4,5,6,7,8\}$ c) $\{3,4,5,6,7\}$ d) $(3;8)$

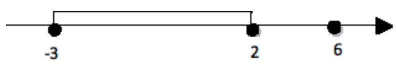
Zadanie to można rozwiązać strategią eliminacji. Odpowiedź a) oraz d) można od razu odrzucić, ponieważ część wspólna tych dwóch zbiorów nie może zawierać liczb innych niż naturalne. Odpowiedź b) również jest nieprawidłowa, bo liczba 8 nie należy do zbioru A, a tym bardziej do iloczynu $A\cap N$

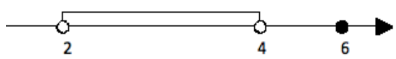
prawidłowa jest odpowiedź c)

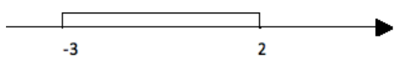
■ 11. Dany jest zbiór $A=\langle -3;4)\cup\{6\}$oraz zbiór $B=(2;5\rangle$ Różnica zbiorów A-B przedstawiona jest osi liczbowej:

■

a) 

b) 

c) 

d) 

Znając definicję różnicy zbiorów A-B: do różnicy należą wszystkie elementy należące do A a nie należące do B, Oś liczbowa przedstawiona na rysunku b) jest poprawna.

prawidłowa jest odpowiedź b)

f) zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x-a| =b$, $|x - a| > b$, $| x-a| < b$,

■ 12. Pierwiastkiem równanie $|x-3| =5$ jest:

a) -1   b) -2   c) 7   d) 4

Najlepiej sprawdzi się w tym przypadku strategia sprawdzania warunków. Podstawiając kolejne odpowiedzi sprawdzamy czy równanie jest prawdziwe.

$|-2-3|=5$

prawidłowa jest odpowiedź b)

■ 13. Który z przedziałów zawiera się w rozwiązaniu nierówności $|x-3| <10$?

a) $(-4;12\rangle$ b) $(-2;15)$ c) $(-7;14)$ d) $\langle -8;11\rangle$

Zadanie to można rozwiązać strategią otwierania: $-10 < x - 3 < 10$.
Wynikiem jest przedział (-7;13). Następnie sprawdzamy, który przedział z odpowiedzi zawiera się w naszym rozwiązaniu.
W tym przypadku można zastosować również strategię sprawdzania warunków- podstawiając liczby z końców przedziałów proponowanych odpowiedzi do nierówności.
prawidłowa jest odpowiedź a)

■ g) zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych,

■ 14. Wartość wyrażenie $\left(\frac{\sqrt[4]{32} - 2^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} \right)^0 + 4^{0,5}$ wynosi

a) 0 b) 1 c) 3 d) $4\sqrt{2}+2$

W tym zadaniu wystarczy zauważyć ,że pierwszy składnik tego wyrażenia ma wykładnik równy 0, podstawa potęgi jest różna od zera. Wartość pierwszego składnika wynosi 1, drugi składnik jest równa 2.
prawidłowa jest odpowiedź to c)

■ h) zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym,

■ 15. Wartość $(\log_4 24 + \log_4 \frac{2}{3})$ wynosi:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

Najlepiej sprawdzi się w tym przypadku strategia otwierania. Znając wzór na sumę logarytmów
$(\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ $a,b,c>0; a \neq 1$)otrzymamy $\log_4 16$.
prawidłowa jest odpowiedź b)

POZIOM PR

a) stosuje twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze;
wyznacza największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność pary liczb naturalnych,

■ 16. Rozkładając na czynniki pierwsze liczbę 30! podaj liczbę trójek (3) występujących w rozkładzie
a) 10 b) 13 c) 12 d) 14

W tym zadaniu strategia otwierania da najlepsze rezultaty. Mając prosty kalkulator nie uda nam się jednak wyliczyć 30!. Natomiast rozpisując co trzeci czynnik 30!, który jest podzielny przez 3, zauważymy że jest ich 10 ale niektóre z tych czynników mają więcej niż jedną trójkę w swoich rozkładach na czynniki pierwsze. Sumując je wszystkie odpowiedź d) jest prawidłowa.
Można to zadanie bardzo łatwo zamienić na zadanie otwarte.
Równie dobre było by to zadanie na maturę z informatyki a mianowicie:
Napisać program podający rozwiązanie powyższego problemu dla danego n!
$(1<n<10^6)$ dla dowolnej liczby pierwszej k $(k <= n)$.

■ 17. NWD(72, 120) wynosi:
a) 24 b) 6 c) 18 d) 12

W zadaniu tym najlepsze rezultaty przyniesie strategia eliminacji preferencji. Prostym kalkulatorem można sprawdzić czy 72 oraz 120 dzieli się bez reszty przez 24,6,18,12. Z wszystkich tych liczb które spełniają wa-

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

runki wybieramy liczbę największą.
prawidłowa jest odpowiedź a)
Gdyby to zadanie było zadaniem otwartym, można by go rozwiązać algorytmem Euklidesa - zamieniając w każdym kroku większą z liczb, z różnicą między danymi liczbami.

<72,120> *(120-72=48)*
<72,48> itd
<24,48>
<24,24>
<24>

- 18. NWW(72, 120) wynosi:
  a) 240 b) 360 c) 180 d) 120

W zadaniu tym najlepsze rezultaty przyniesie strategia sprawdzania. Należy sprawdzić, przez którą z odpowiedzi dzieli się 72 i 120 bez reszty zaczynając od liczby najmniejszej.
Rozwiązując to zadanie jako otwarte, to obliczając NWD(72,120) możemy NWW tych liczb obliczyć ze wzoru: NWD(a,b)* NWW(a,b)= a*b
prawidłowa jest odpowiedź b)

- 19. NWD(a, 125)=25 oraz NWW(a,125)=500 to a wynosi:
  a)200 b)100 c)500 d)250

Strategia sprawdzania warunków.
prawidłowa jest odpowiedź b)

b) stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu,

- 20. Wartość ($\log_6 8 \cdot \log_8 36$) wynosi:

  a) 2 b) 3 c) 6 d) 8

Najlepiej sprawdzi się w tym przypadku strategia otwierania. Wystarczy zastosować wzór na zmianę podstawy logarytmu ($\log_a b \log_b c = \log_a c \quad a,b,c > 0\ a,b \neq 1$) otrzymamy $\log_6 36 = 2$.
Rozwiązując to zadanie jako otwarte można maksymalnie przydzielić tylko 2pkt
prawidłowa jest odpowiedź a)

- 21. Jeżeli $\log_2 3=a$ to wartość wyrażenia $\log_3 8$ można wyrazić wzorem

  a) 2a b) 3a c) $\frac{2}{a}$ d) $\frac{3}{a}$

W tym przypadku również dobre rezultaty przyniesie strategia otwierania.

Stosując wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zmianę podstaw logarytmu otrzymamy $3\log_3 2=\frac{3}{\log_2 3}=\frac{3}{a}$.
prawidłowa jest odpowiedź d)

2) WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE:
Poziom PP

a) posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$,

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

■ 22. Które z wyrażeń podanych w odpowiedzi jest równe wyrażeniu $\frac{(x^2-4)(x^2+2x+4)}{(x^3-8),}$ przy koniecznych założeniach x ≠2 ;

a) 1 b) $\frac{1}{(x-2)}$ c) (x+2) d) (x-2)

Stosujemy strategię otwierania. Można też od razu wyeliminować odpowiedzi a) oraz b), ponieważ w mianowniku jest wielomian stopnia czwartego, a w mianowniku wielomian stopnia trzeciego wynikiem powinien być wielomian stopnia pierwszego.
prawidłowa jest odpowiedź c)

b) zdający rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias,

■ 23. Rozkładając na czynniki wielomian $x^4+3x^3-8x-24$ otrzymamy
a) $(x+2)(x^2-2x+4)(x+3)$ b) $(x+2)(x^2+2x+4)(x-3)$
c) $(x-2)(x^2-2x+4)(x-3)$ d) $(x-2)(x^2+2x+4)(x+3)$

Strategia otwierania. Grupując odpowiednio wyrazy i stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów otrzymamy iloczyn
$x^3(x+3)-8(x+3)$
$(x^3-8)(x+3)$
$(x-2)(x^2+2x+4)(x+3)$
Można również zastosować tutaj strategię eliminacji, sprawdzając pierwiastki z postaci iloczynowej.
prawidłowa jest odpowiedź d)

c) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany,

■ 24. Dany jest wielomian P(x)= (x-1), Q(x)=$(2x^2-3)$ oraz W(x)= $x^3-2x-3x-3$ Wykonując działania P(x)·Q(x)-W(x) otrzymamy:
a)x^3+6 b) x^3-4x^2-6x c) x^3-4x^2+6x+6 d) x^3-6

Wykonując podane działania i redukując wyrazy podobne otrzymamy wyrażenie równe x^3+6.
Można również przyjrzeć się wyrazom wolnym w podanych wielomianach i stwierdzić, że po wykonaniu działań powinniśmy otrzymać, 6 czyli odpowiedź b) oraz d) można wyeliminować.
prawidłowa jest odpowiedź a)

d) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych za pomocą przekształceń opisanych w punkcie b),

■ 25. Dziedziną funkcji wymiernej określonej wzorem $F(x)=\frac{x}{x^3-2x^2+x}$:

a)R\{-1,0} b) R\{0,1} c) R\{-1,0,1} d) R\{-1,1}

Stosujemy strategię eliminacji preferencji. Wystarczy sprawdzić, kiedy mianownik jest równy zero odpowiednio dla wszystkich liczb występujących w odpowiedziach czyli dla x=0; x=-1; x=1.
prawidłowa jest odpowiedź b)

e) oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej,

■ 26. Wartość funkcji wymiernej $F(x)=\frac{x^2+4x+3}{x^3-5x+6}$ dla x=(-3) wynosi:

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

a) 0 b) -2 c) 2 d) nie da się obliczyć

To zadanie należy rozwiązać strategią otwierania. Wystarczy sprawdzić dziedzinę tej funkcji, aby stwierdzić że (-3) nie należy do dziedziny.
prawidłowa jest odpowiedź d)

f) zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; skraca i rozszerza wyrażenia wymierne,

- 27. Przedstaw wyrażenie w jak najprostszej postaci $\frac{x^2+4x+3}{x^2+5x+6}$

a) $\frac{x+3}{x-3}$ b) $\frac{x-5}{x+2}$ c) $\frac{x-2}{x+1}$ d) $\frac{x+1}{x+2}$

To zadanie należy rozwiązać strategią otwierania. Po obliczeniu pierwiastków odpowiednio dla trójmianu kwadratowego z licznika oraz mianownika i przedstawieniu tych trójmianów w postaci iloczynowej otrzymamy
$\frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+2)}$
prawidłowa jest odpowiedź d)

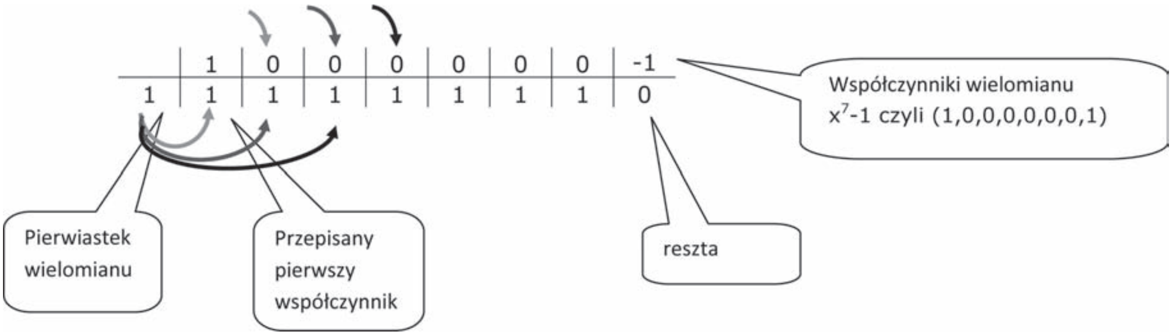
Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz:

a) zdający posługuje się wzorem $(a-1)(1+a+\ldots+a^{n-1}) = a^n-1$

- 28. Przedstaw za pomocą iloczynu dwóch wielomianów, wielomian x^7-1:

a) $(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+1)$ b) $(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1)$
c) $(x-1)(x^6-x^5-x^4+x^3-x^2+1)$ d) $(x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+1)$

W tym wypadku znając wzór $a^n-1=(a-1)(1+a+\ldots+a^{n-1})$ odpowiedź sprowadza się prześledzenia, która jest właściwa. Nie znając wzoru należałoby dzielić wielomian x^7-1 przez x-1.(można by było zastosować przy dzieleniu schemat Hornera)
Schemat Hornera (algorytm postępowania):



Kolejne współczynniki uzyskujemy mnożąc pierwiastek (1) przez poprzednio wyliczony współczynnik w wierszu drugim i dodając współczynnik z wiersza pierwszego bezpośrednio stojący nad wyliczanym współczynnikiem. Otrzymamy współczynniki wielomianu w naszym przypadku 6 stopnia.
prawidłowa jest odpowiedź b)

b) zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian x–a; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian x–a,

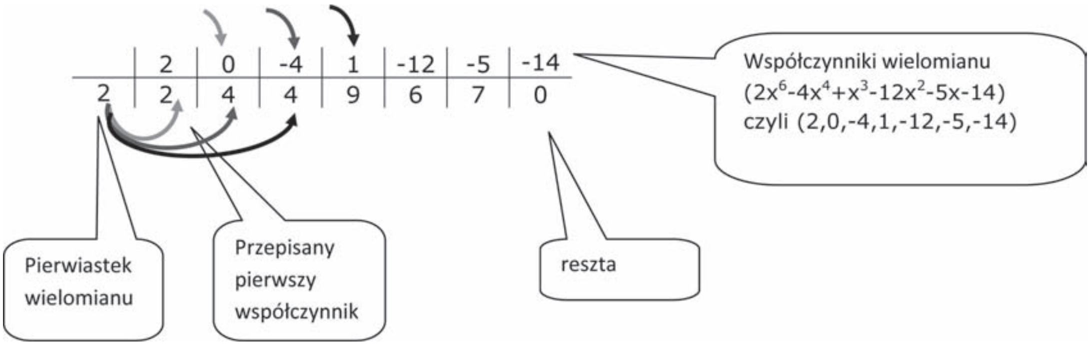
Dzieląc wielomian W(x) przez dwumian(x-a) otrzymamy wielomian $Q_1(x)$ i ewentualnie resztę R (R wielomian stopnia zerowego)
Między wielomianami zachodzi związek $W(x)=Q_1(x)(x-a)+R$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wartość wyrażenia W(a)=R (wynika to bezpośrednio ze wzoru z wiersza wyżej)

■ 29. Podaj wielomian jaki uzyskamy przy dzieleniu wielomianu
$W(x)= (2x^6-4x^4+x^3-12x^2-5x-14)$ przez wielomian $Q(x)=(x-2)$:
a) $(2x^5+4x^4-4x^3+9x^2+6x+7)$ b)$(2x^5+2x^4-12x^3+5x^2+7x+6)$
c) $(2x^5-4x^4+4x^3-6x^2+9)$ d) $(x^5+4x^4+4x^3-9x^2+6x+1)$

stosując schemat Hornera otrzymamy:



Kolejne współczynniki uzyskujemy mnożąc pierwiastek (2) przez poprzednio wyliczony współczynnik w wierszu drugim i dodając współczynnik z wiersza pierwszego bezpośrednio stojący nad wyliczanym współczynnikiem. Otrzymamy współczynniki wielomianu w tym przypadku 5 stopnia.
Kolejne działania to:
2*2+0=4
2*4+(-4)=4
2*4+1=9
2*9+(-12)=6
2*6+(-5)=7
2*7+(-14)=0 ← reszta

wielomian $W(x)= (2x^6-4x^4+x^3-12x^2-5x-14)$ dzieli się przez (x-2) bez reszty i otrzymaliśmy iloraz $2x^5+4x^4+4x^3+9x^2+6x+7$

prawidłowa jest odpowiedź a)

■ 30. Reszta z dzielenia wielomianu W(x) (stopień wielomianu W(x) > 2)
przez (x-2) to 4, natomiast reszta z dzielenia tego samego wielomianu przez (x+1) to 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W(x) przez iloczyn (x-2)(x+1).
a) R(x)=2x+1 b) R(x)=x+2 c) R(x)=2x-1 d) R(x)=x-2

Okazuje się, że nie znając wielomianu W(x) można obliczyć resztę mając dane wynikające z warunków zadania.
Dzieląc wielomian W(x) przez trójmian (x-2)(x+1) reszta jest co najwyżej stopnia pierwszego czyli R(x)=ax+b.
$W(x)=Q_1(x)(x-2)+4 \rightarrow W(2)=4$
$W(x)=Q_2(x)(x+1)+1 \rightarrow W(-1)=1$
$W(x)=Q_3(x)(x-2)(x+1)+ax+b \rightarrow W(2)=2a+b=4$
$\rightarrow W(-1)=-1a+b=1$

Po rozwiązaniu ostatniego układu równań otrzymamy a=1; b=2
Czyli R(x)=x+2

prawidłowa jest odpowiedź b)

c) zdający stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych,

■ 31. W którym zbiorze mogą być wszystkie ewentualne pierwiastki wymierne wielomianu $W(x)=x^3+x^2+2x-4$ o współczynnikach całkowitych
a) {-3,-2,2,3} b) {-4,-3,-2,2,3,4} c) {-4,-2,-1,1,2,4} d) {-2,-4,4,2}

Znając twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych, które mówi, że, jeśli istnieją pierwiastki wymierne (w postaci ułamka zwykłego) wielomianu, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego, natomiast mianownik jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze wielomianu. Strategia eliminacji wyklucza odpowiedzi a), b), d).
Prawidłowa odpowiedź to c).

■ 32. Pierwiastki wielomianu $W(x)= 2x^3-3x^2-11x+6$ to:

a) $x=\frac{1}{2}$; x=-2; x=-3 b) $x=-\frac{1}{2}$; x=-2; x=3

c) $x=\frac{1}{2}$; x=2; x=-3 d) $x=\frac{1}{2}$; x=-2; x=3

W tym wypadku można by podstawiać kolejne ewentualne pierwiastki za x i sprawdzać czy wartość wielomianu jest równa zero.
Prawidłowa odpowiedź to d).

3) RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI:
Poziom PP

a) zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów,

■ 33. Pierwiastki równania kwadratowego $x^2-4x+3=0$ to:
a) x=1; x=3 b) x=-1; x=3 c) x=1; x=-3 d) x=-1; x=-3

Podstawiając ewentualne pierwiastki do równania kwadratowego możemy stwierdzić, czy otrzymamy prawdę, lub wyliczyć deltę $\Delta=b^2-4ac$, i jeżeli nie jest ujemna obliczać pierwiastki ze wzorów.
Poprawna odpowiedź a)

b) zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych,

■ 34. Długość boku a prostokąta jest o 2 cm większa od długości drugiego boku b. Pole tego prostokąta wynosi 1,2 dm^2. Oblicz długości boków tego prostokąta
a) a=1dm; b=3cm b) a=10cm; b=8 cm
c) a=12cm; b=1dm d) a=12cm; b=14cm

Z warunków zadania można ułożyć równanie (b+2)b=120. Po rozwiązaniu równania kwadratowego otrzymamy pierwiastki $b_1=10$ $b_2=-12$. Warunki zadania spełnia tylko pierwiastek b_1 -rozwiązanie powyższe to strategia otwierania.
Można też mając możliwe odpowiedzi sprawdzać po kolei, czy spełniają warunki zadania –byłaby to strategia sprawdzania warunków.
Poprawna odpowiedź c)

c) zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych,

■ 35. Różnica między długościami dwóch przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym wynosi 7cm, przeciwprostokątna ma długość 17cm – jakie są długości przyprostokątnych
a) 7cm, 15cm b) 15cm, 8 cm c) 12cm, 19cm d) 7cm, 14cm

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z warunków zadania można ułożyć układ równań $y^2+x^2=17^2$ oraz $x+7=y$. Po rozwiązaniu odpowiedź prawidłowa to b)

d) zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki,

■ 36. Znajdź pierwiastki równania $x^3+4x^2-2x-8=0$
a) -4, -2, 2 b) -2, 2, 4 c) $4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ d) $-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

Rozkładając na czynniki otrzymamy $x^2(x+4)-2(x+4)=0$ dalej $(x^2-2)(x+4)=0$, a następnie $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+4)=0$. Można by było rozwiązać to zadanie zamknięte podstawiając propozycje rozwiązań do równania i sprawdzać czy otrzymamy zdanie prawdziwe.
Odpowiedź prawidłowa to d).

e) zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych,

■ 37. Znajdź pierwiastki równania $\frac{-1}{x} = x+2$
a) -1 b) 0; 1 c) 2; 1 d) -1; 1

Odpowiedź prawidłowa to a).

f) zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do prostych równań wymiernych,

■ 38. Basen ma dwa krany, które napełniają go jednocześnie przez 2 godziny. W jakim czasie napełni basen pierwszy kran, jeżeli będzie napełniał go samodzielnie, jeżeli drugi kran napełnia basen samodzielnie przez 6 godzin.
a)2,5 godziny b) 2 godziny c) 3 godziny d) 4 godziny

Rozwiązanie zadania prowadzi do równania $\frac{1}{6}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,gdzie $\frac{1}{6}$, to „wydajność” drugiego kranu, czyli jaką część basenu napełni kran przez 1 godzinę, $\frac{1}{x}$ „wydajność” pierwszego kranu, a $\frac{1}{2}$ to „wydajność” kranu „połączonego” (pierwszego i drugiego)
odpowiedź prawidłowa to c)

Poziom PR

a) uczeń stosuje wzory Viete’a,

■ 39. Podaj wartość wyrażenia sumy kwadratów pierwiastków równania
$2x^2-3x-8=0$

a) $\sqrt{73}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$ d) 10,25

przed zastosowaniem wzorów Viete’a należy sprawdzić czy delta jest nieujemna. Następnie należy zastosować wzór

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}$$

gdzie a=2, b=-3, c=-8
odpowiedź prawidłowa to d)

b) uczeń rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski,

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- 40. Przeprowadź dyskusję ilości rozwiązań równania kwadratowego
  $x^2+mx+(m-1)=0$ w zależności od parametru m
  a)2 rozwiązania dla $m\in R$-{2}; 1 rozwiązanie dla m=2;
  b)1 rozwiązanie m=2; 0 rozwiązań dla $m\in R$-{2);
  c)1 rozwiązanie m=-2; 0 rozwiązań dla $m\in R$-{-2);
  d)2 rozwiązania dla $m\in R$-{-2,2}; 1 rozwiązanie m=2;0 rozwiązań dla m=-2;

Wyznaczając $\Delta=m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2$ możemy od razu stwierdzić, że prawidłowa odpowiedź to a).

c) zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe,

- 41. Podaj rozwiązanie nierówności $(1-x^2)(x-4)^4(x-1)(x+2)^2\leq 0$
  a) $x\in$<-1;4>∪{-2,4}   b) $x\in$(-∞ 2>∪<-1;1>∪<4;+∞)
  c) $x\in$(-∞;-1>∪{1;4}   d) $x\in$<-1;+∞)∪{-2}

Prawidłowo grupując otrzymamy $-1(x-1)^2(x+1)(x-4)^4(x+2)^2\leq 0$
Rysując przybliżony wykres (zaczynając rysowanie od prawej strony do lewej), odczytamy rozwiązanie.
Współczynnik przy najwyższej potędze jest mniejszy od zera czyli rysowanie zaczynamy od dołu i „odbijamy" się od pierwiastków które krotność mają parzystą.

Prawidłowa odpowiedź d)

d) zdający rozwiązuje proste równania i nierówności wymierne,

- 42. Podaj rozwiązanie nierówności $\frac{-1}{x+1}\geq 1$

  a) $x\in$<-2;-1)   b) $x\in$(–∞;–2>∪<-1;+∞)
  c) $x\in$<-2;-1>   d) $x\in$ (–∞;–2)∪(-1;+∞)

W równaniach i nierównościach wymiernych najpierw ustalić należy dziedzinę, która w tym równaniu jest równa R-{-1}. W tym momencie możemy wykluczyć odpowiedź c) oraz b). Mnożąc obie strony nierówności przez $(x+1)^2$ (aby być pewnym że mnożymy przez liczbę dodatnią i tym samym nie zmieniamy kierunku nierówności) otrzymamy rozwiązanie.
Prawidłowa odpowiedź a)

e) zdający rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną,

- 43. Podaj rozwiązanie nierówności $||x-1|+2|<3$

  a) $x\in$<0;3)   b) $x\in$(–∞;0>∪(2; +∞)
  c) $x\in$(0;2)   d) $x\in$(–∞;2)∪(3;+∞)

Rozwiązując tą nierówność można skorzystać z własności wartości bezwzględnej, czyli

$|x-1|+2<3$ i $|x-1|+2>-3$
$|x-1|<1$ i $|x-1|>-5$
$x-1<1$ i $x-1>-1$
$x<2$ i $x>0$
Prawidłowa odpowiedź c)

Nierówność zawsze prawdziwa

■ 44. Podaj rozwiązanie nierówności |x+1|+|x-2|>4

a) x∈(-1,5;2,5) b) x∈(–∞;-1,5)

c) x∈(2,5;+∞) d) x∈ (–∞;1,5) ∪ (2,5;+∞)

Rozwiązując tę nierówność skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej.
Dla x∈(–∞;-1) „wnętrze” obu modułów jest ujemne, czyli „opuszczając” moduł zmieniamy znaki na przeciwne (zgodnie z definicją modułu) itd.
dla x∈(-∞; -1) –x-1+ (-x) +2 > 4 → -2x > 3 → x < -1,5
dla x∈ < -1 ;2) x+1+ (-x) +2 > 4 → 3 > 4 fałsz
dla x∈ < 2;+∞) x+1+ x -2 > 4 → 2x > 5 → x > 2,5

Prawidłowa odpowiedź d)

4) FUNKCJE:
Poziom PP

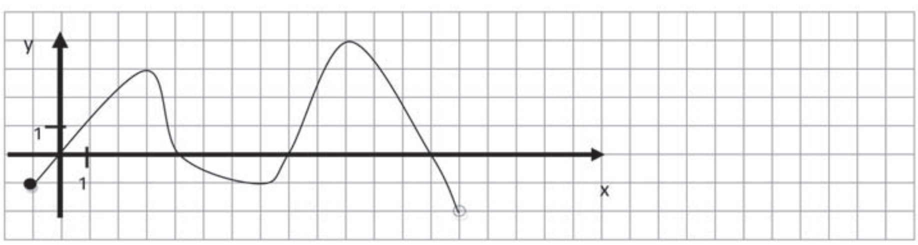
a) określa funkcję za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego,

x	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-1	1	3	5	7

Z- zbiór liczb całkowitych

■ 45. Funkcja dana jest w postaci tabeli
Który opis przedstawia powyższą funkcję daną w postaci tabeli
a) dla każdego x∈N przyporządkowana jest liczba dwa razy większa pomniejszona o 1
b) dla każdego x∈N przyporządkowana jest liczba dwa razy większa powiększona o 1
c) dla każdego x∈Z i x∈ < -1;5) przyporządkowana jest liczba dwa razy większa powiększona o 1
d) dla każdego x∈Z i x∈ < -1;5) przyporządkowana jest liczba dwa razy większa pomniejszona o 1
prawidłowa odpowiedź d)

b) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak,



■ 46. Oczytaj z wykresu:
- dziedzina…………………………………………………..
- zbiór wartości……………………………………………
- miejsca zerowe…………………………………………..
- maksymalny przedział w których funkcja rośnie………………………………………………
- maksymalny przedział w których funkcja maleje………………………………………………

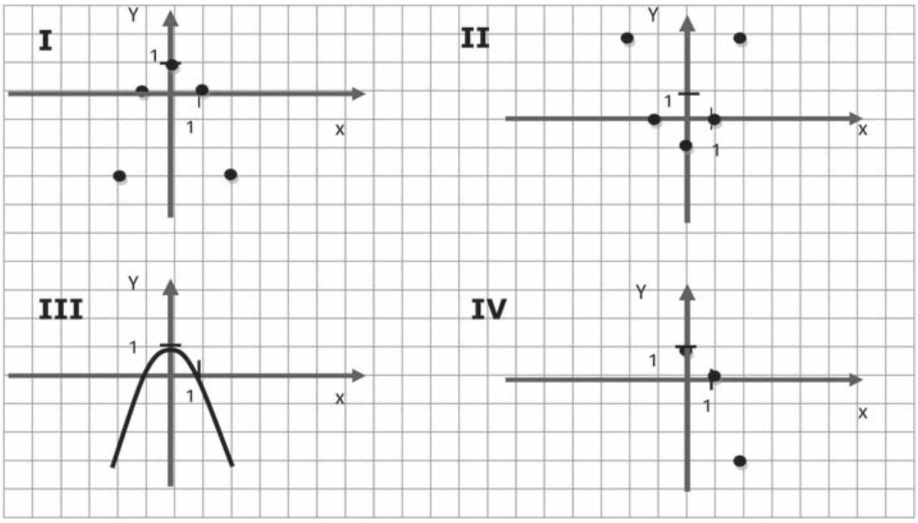
Odpowiedzi:
- dziedzina : <-1;14)
- zbiór wartości: (-2;4>
- miejsca zerowe x=0; x=4; x=8; x=13
- maksymalne przedziały w których funkcja rośnie: <-1;3>; <7;10>
- maksymalne przedziały w których funkcja maleje: <3;7>;<10;14)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

c) sporządza wykres funkcji spełniającej podane warunki,

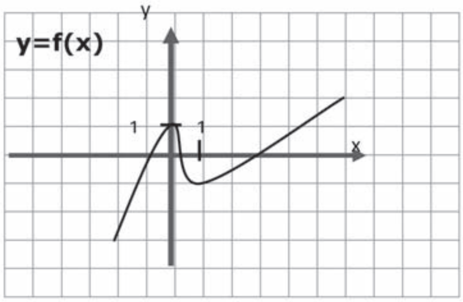
47. Który wykres przedstawia funkcję daną worem $y=-x^2+1$ $x \in <-2;2> \cap N$

a) I b) II c) III d) IV

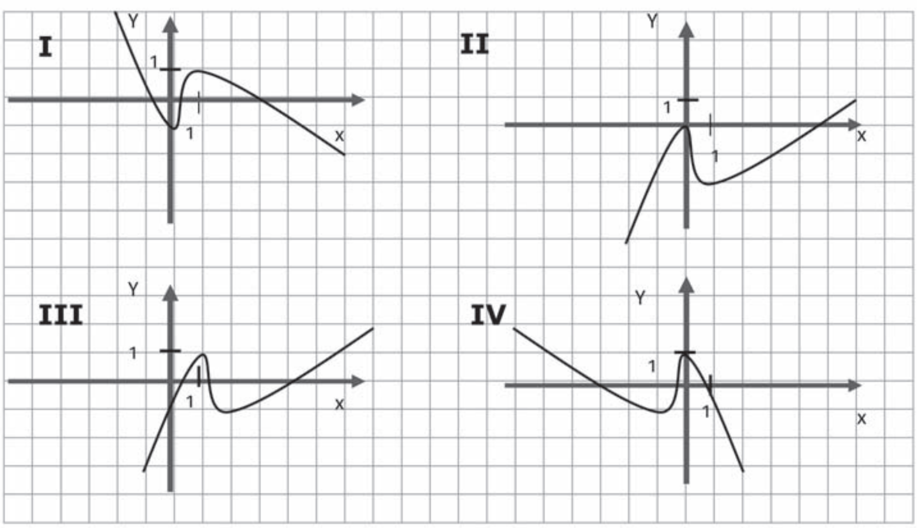


Odpowiedź: d)

d) uczeń potrafi na podstawie wykresu funkcji y = f (x) naszkicować wykresy funkcji
y = f (x + a) , y = f (x) + a, y = –f (x) , y = f (–x) ,



48. Dany jest wykres funkcji y=f(x) /rys. powyżej/
Przyporządkuj wykresy funkcji do odpowiednich wzorów
a) y = f (x + a) , b) y = f (x) + a, c) y = –f (x) , d) y = f (–x)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odpowiedzi:
a) y = f (x -1) – III wykres
b) y = f (x) -1 – II wykres
c) y = –f (x) – I wykres
d) y = f (–x) – IV wykres

e) sporządza wykresy funkcji liniowych,

- 49. Jak będzie wyglądała rodzina prostych y=ax+1 $a \in R$
  a) proste równoległe nachylone pod katem 135° do osi OX,
  b) proste równoległe nachylone pod katem 45° do osi OX,
  c) dwie proste prostopadłe przechodzące przez początek układu współrzędnych,
  d) pęk prostych przechodzących przez punkt (0;1)

Odpowiedź d)

f) wyznacza wzór funkcji liniowej,

- 50. Jaki jest wzór funkcji liniowej nachylonej do osi OX pod kątem 45° i przechodzącej przez punkt P(1;2)
  a) y = x +2 b) y = -x+1 c) y = x+1 d) y = -x+2

W funkcji liniowej y=ax+b , a=tgα, gdzie α jest kątem nachylenia prostej do osi OX.
Jeżeli nasza funkcja liniowa jest nachylona do osi OX pod kątem 45° to współczynnik kierunkowy a=tg45°=1 czyli nasza prosta ma wzór y=x+b. Podstawiając punkt P(1;2) do wzoru otrzymamy b=1
Prawidłowa odpowiedź: c)

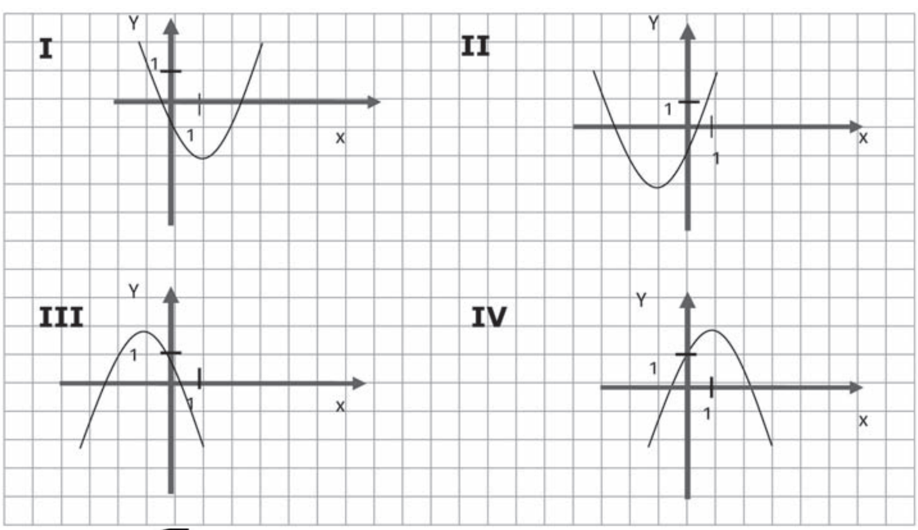
g) wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej,

- 51. Dla jakiego $m \in R$ funkcja liniowa y=(m-4)x+3 jest rosnąca
  a) m > 0 , b) m < 4, c) m > 4 , d) m < 0

Z własności funkcji liniowej wiadomo, że jest rosnąca gdy współczynnik a > 0.
Odpowiedź: c)

h) sporządza wykresy funkcji kwadratowych,

- 52. Który wykres przedstawia funkcje kwadratową $y=-(x-1)^2+2$
  a) I , b) II, c) III , d) IV



Odpowiedź: d)

i) wyznacza wzór funkcji kwadratowej,

- 53. Która funkcja kwadratowej ma wierzchołek w punkcie M(-3,-1) oraz jest rosnąca w przedziale $(-\infty;-3)$
  a) $y=-(x+3)^2-1$ b) $y=-(x-3)^2+1$ c) $y=(x+3)^2-1$ d) $y=(x-3)^2+1$

Odpowiedź: a)

j) wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej,

- 54. Miejsca zerowe funkcji y=(2x-1)(x+4) to:

  a) $x=\frac{1}{2}$;x=4   b) $x=-\frac{1}{2}$;x=4   c) $x=\frac{-1}{2}$;x=-4   d) $x=\frac{1}{2}$;x=-4

W funkcji kwadratowej danej w postaci iloczynowej od razu można wypisać miejsca zerowe przyrównując każdy z czynników do zera. Wielu uczniów jednak wymnaża te czynniki doprowadzając do postaci ogólnej a dalej licząc deltę i wzory na pierwiastki. Ta druga droga jest oczywiście poprawna ale czasochłonna.
Odpowiedź: d)

k) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym,

- 55. Wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji $y=x^2-3x+2$ w przedziale $x\in<0;4>$
  a) $y_{min}=-0{,}25$ $y_{max}=6$ b) $y_{min}=1$ $y_{max}=1{,}5$
  c) $y_{min}=0{,}25$ $y_{max}=2$ d) $y_{min}=1$ $y_{max}=6$

Stosując wzory $y_{min}=\min\{y_w;y(x_p);y(x_k)\}$ i $y_{max}=\max\{y_w;y(x_p);y(x_p)\}$ gdzie y_w to y wierzchołka o ile x_w należy do wskazanego przedziału, $y(x_p);y(x_k)$ – to wartości funkcji kwadratowej na końcach wskazanego przedziału.
Odpowiedź: a)

l) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do badania funkcji kwadratowej,

- 56. Funkcja kwadratowa $y=2x^2+bx$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy $x\in(0;6)$. Wyznacz współczynnik b
  a) b=12   b) b=6   c) b=-12   d) b=6

Przedstawiając tą funkcję w postaci iloczynowej otrzymamy y=x(2x+b) czyli miejsca zerowe to x=0; $x=\frac{-b}{2}$.
Jeżeli funkcja kwadratowa $y=2x^2+bx$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy gdy $x\in(0;6)$ to miejsca zerowe tej funkcji to x=0; x=6.
Odpowiedź: c)

m) sporządza wykres, odczytuje własności i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym związane z proporcjonalnością odwrotną,

- 57. Trzech malarzy potrzebuje 12 godzin na wymalowanie klubu szkolnego. Ile godzin będzie pracować 4 malarzy aby wymalować cały klub.
  a) 10 godzin   b) 9 godzin   c) 12 godzin   d) 36 godzin

1 malarz pracowałby nad wykonaniem zadania 3*12=36godzin. To 4 malarzy pracuje 36:4=9
Odpowiedź: b)

n) sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym,

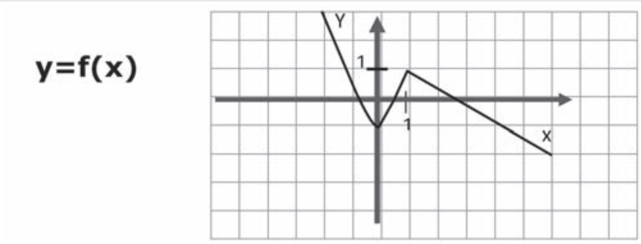
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

■ 58. Mama wyjeżdżając na 2 tygodnie do sanatorium, obawiając się o kwiaty zawarła umowę z synkiem. Począwszy od 1 dnia ma podlewać codziennie kwiaty. Pierwszego dnia mama zapłaci 1grosz, a każdego następnego dnia dwa razy więcej niż dnia poprzedniego. Ile pieniędzy powinien otrzymać syn po 2 tygodniach codziennego podlewania.
a) 1,96 zł b) 163,84 zł c) 0,14 zł d) 81,92 zł

I dzień – 1gr= 2^0
II dzień – 2gr= 2^1
III dzień – 4gr= 2^2
IV dzień – 8gr= 2^3
:
XIV dzień – 2^{13}=8192 grosze
Odpowiedź: d)

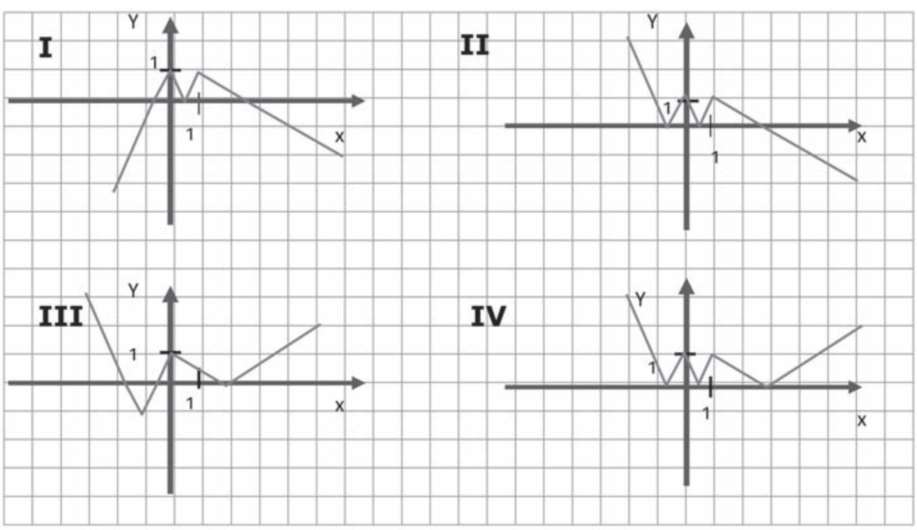
Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz:
mając dany wykres funkcji y = f (x) potrafi naszkicować:

a) wykres funkcji y = |f (x)|,



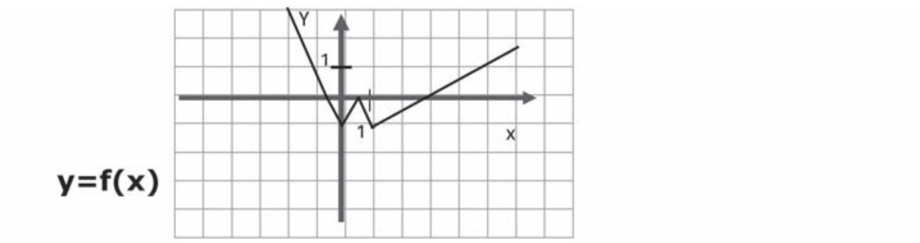
■ 59. Dany jest wykres funkcji y=f(x) /rys. powyżej/
Który rysunek przedstawia wykres funkcji y = |f (x)|,
a) I , b) II c) III, d) IV

Jeżeli moduł jest na „całej” funkcji czyli funkcja nie przyjmuje żadnych wartości ujemnych. Tą własność ma tylko rysunek IV prawidłowa odpowiedź d)



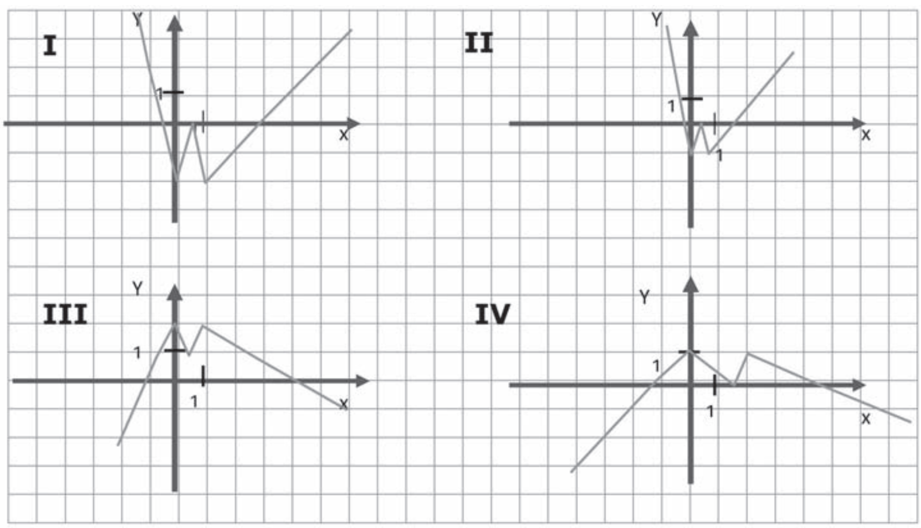
b) uczeń potrafi naszkicować wykresy funkcji y = c · f (x) , y = f (c · x) ,

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



60. Dany jest wykres funkcji y=f(x) /rys. powyżej/
Który rysunek przedstawia wykresy funkcji y = 2·f(x) y=f(2·x),
a) I i III , b)I i II , c) III i IV, d) II i IV,

Pierwsza funkcja y=2f(x) –dla tych samych argumentów, wartości funkcji są dwa razy większe (miejsca zerowe nie zmieniają się),-funkcja „rozciąga się" na y.
Natomiast druga funkcja y=f(2x)- funkcja ma te same wartości ale dla argumentów dwa razy mniejszych(miejsce przecięcia się wykresu z osią OY nie zmienia się w stosunku do funkcji y=f(x) – funkcja „ściska się" na x



prawidłowa odpowiedź b)

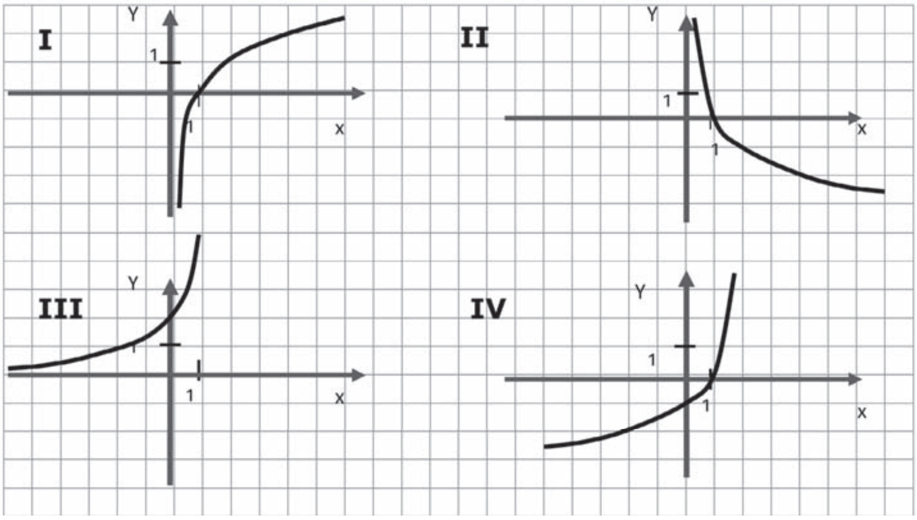
c) wykres będący efektem wykonania kilku operacji,

61. Które z przekształceń są prawidłowe aby przekształcić funkcję y=f(x) w funkcję y = |f (x + 2) – 3|
I-Translacja o wektor [-2;-3] a następnie symetria względem osi OX tylko wartości ujemnych
II- Translacja o wektor [2;-3] a następnie symetria względem osi OX tylko wartości ujemnych
III- Translacja o wektor [-2;3] a następnie symetria względem osi OX tylko wartości dodatnich
IV- Translacja o wektor [2;-3] a następnie symetria względem osi OX tylko wartości dodatnich
a) I, b)II, c) III, d) IV,
prawidłowa odpowiedź a)

d) zdający rysuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw,

62. Który wykres jest wykresem funkcji logarytmicznej $y=\log_2 x$
a) I , b) II , c) III , d) IV,

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



prawidłowa odpowiedź a)

e) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym) z wykorzystaniem takich funkcji,

63. Kasia pomyślała liczbę z przedziału <1,128>. Tomek chcesz odgadnąć tę liczbę i zadaje pytania czy pomyślana liczba jest większa od połowy ilości elementów z przedziału (w naszym przypadku 64). Kasia udziela odpowiedzi tylko tak lub nie. Przeszukiwany przedział zmniejsza się o połowę a w zależności od odpowiedzi jest to przedział <1;64> albo <64;128>. Ile maksymalnie możesz zadać pytań Tomek aby odgadnąć w najgorszym przypadku pomyślaną liczbę (w algorytmice opisane wyżej działanie to przeszukiwanie binarne)

a) 5, b)6 , c) 7 , d) 8,

W rozwiązaniu tego zadania należy wyliczyć $\log_2 128=7$
prawidłowa odpowiedź c)

5) CIĄGI LICZBOWE:
Poziom PP

a) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym,

■ 64. Wyznacz 10 wyraz ciągu, jeżeli wyraz n-ty dany jest wzorem $a_n=2n-5$

a)12 , b)10 , c) 15, d) 30,
prawidłowa odpowiedź c)

b) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny,

■ 65. Który z ciągów jest ciągiem arytmetycznym

I- $a_n=2(n-5)$; II- $a_n=5n+1$ III- $a_n=1-3n$ IV- $a_n=\frac{3}{n}$

a)tylko II , b)I,II,III c)I i IV d) II i IV,
prawidłowa odpowiedź b)

66. Który z ciągów jest ciągiem geometrycznym
I- $a_n=2^{n-5}$ II- $a_n=1$ III- $a_n=3*5^n$ IV- $a_n=5/n$
a)tylko I , b) I,II,III c) tylko I i III d) II i IV,
prawidłowa odpowiedź b)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

c) stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym,

- 67. Jaka jest suma wszystkich liczb naturalnych parzystych trzycyfrowych.
  a)247050 , b)27450 c)10980 d) 45000

  Po zastosowaniu wzoru na sumę częściową ciągu arytmetycznego gdzie a_1=100, a_n=998 n=450 otrzymamy wynik.
  prawidłowa odpowiedź a)

- 68. Czarodziejskie drzewko w ciągu każdej nocy wypuszcza z każdej gałązki dwie nowe gałązki. Ile gałązek ma 11 dnia (po 10 nocach), zakładając że pierwszego dnia drzewko ma 1 gałązkę.

  a)1024 , b)4094 c)1025 d) 2047

po 1 nocy –nowe 2 gałązki,
po 2 nocy – nowe 4 gałązki,
po 3 nocy – nowych 8 gałązek=2^3
:
Po 10 nocach – nowych 2^{10}=1024 gałązek,
Wszystkich gałązek będzie 1+2+4+8+...+1024=2047
prawidłowa odpowiedź d)

Poziom PR

jak na poziomie podstawowym oraz wyznacza wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie,

- 69. Jaki wzór ma na n-ty wyraz ciągu w zależności od n, jeżeli dany jest wzór rekurencyjny: a_1=1 i $a_n=a_{n-1}+2$
  a) a_n=2n+1, b) a_n=n+2 c) a_n= 3n-1 d) a_n=2n-1

Mając propozycje odpowiedzi możemy porównać gdzie są identyczne wartości we wzorze rekurencyjnym i we wzorze ogólnym.
Rozwiązując to zadanie należy wypisać kilka pierwszych wyrazów ciągu, aby zauważać, że w tym przypadku jest to ciąg liczb nieparzystych.
prawidłowa odpowiedź d)

6) TRYGONOMETRIA:
Poziom PP

a) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych,

- 70. W trójkącie prostokątnym dane są dwie przyprostokątne a=12 b=5 podaj wartość sinusa kąta ostrego leżącego naprzeciw dłuższej przyprostokątnej.

  a) $\frac{12}{13}$, b) $\frac{5}{13}$, c) $\frac{5}{17}$, d) $\frac{12}{17}$,

  prawidłowa odpowiedź a)

b) rozwiązuje równania typu sinx=a, cosx=a, tgx = a , dla $0^o < x < 90^o$,

- 71. Rozwiązanie równania tg(x)=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ dla $0^o < x < 90^o$ to:
  a) x=$\frac{\pi}{3}$, b) x=$\frac{\pi}{6}$, c) x=$\frac{\pi}{4}$, d) x=$\frac{\pi}{2}$,

  prawidłowa odpowiedź b)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

c) stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego,

■ 72. Jaką wartość ma tgα jeżeli ctgα=$\frac{2}{3}$ (α jest kątem ostrym)

a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{3}{2}$,

Przy rozwiązaniu należy zastosować wzór tgαctgα =1
prawidłowa odpowiedź d)

d) znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego,

■ 73. Jaką wartość ma sinα jeżeli cosα=$\frac{1}{3}$ (α jest kątem ostrym)

a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

Przy rozwiązaniu należy zastosować jedynkę trygonometryczną
prawidłowa odpowiedź b)

Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz:

a) stosuje miarę łukową i miarę stopniową kąta,

■ 74. Miara łukowa 18° wynosi:

a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{12}$, c) $\frac{\pi}{5}$, d) $\frac{\pi}{10}$,

Przy rozwiązaniu najlepiej wykorzystać proporcję
360° - 2π
18° - x
prawidłowa odpowiedź d)

b) wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego,

■ 75. Wartość funkcji trygonometrycznej cos(-630°)wynosi:

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$,

cos(-630°)=cos630°=cos(360°+270°)=cos270°=0
prawidłowa odpowiedź c)

■ 76. Wartość funkcji trygonometrycznej tg(510°)wynosi:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$,

stosując wzory redukcyjne otrzymamy

tg510°=tg(3*180°-30°)=-tg30°=$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
prawidłowa odpowiedź b)

c) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych przy rozwiązywaniu nierówności typu sin x < a, cos x > a , tg x > a ,

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- 77. Rozwiązanie nierówności sin(x+ $\frac{\pi}{4}$) $\geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ gdzie x∈<0;2π> to:

a) $x \in < \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} >$ b) $x \in < 0; \frac{7\pi}{6} >$ c) $x \in < 0; \frac{13\pi}{12} > \cup < \frac{17\pi}{12}; 2\pi >$ d) $x \in < \frac{11\pi}{3}; 0 >$

prawidłowa odpowiedź c)

d) stosuje związki: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz tgx=$\frac{\sin x}{\cos x}$ oraz wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów w dowodach tożsamości trygonometrycznych,

- 78. Stosując wzór na cosinus różnicy kątów podaj wartość cos15°

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$

cos15°=cos(45°-30°)=cos45°cos30°+sin45°sin30°=$\frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

prawidłowa odpowiedź a)

e) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne,

- 79. Rozwiązanie równania $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dla 0° < x < 90° to

a) $x = \frac{\pi}{3}$, b) $x = \frac{5\pi}{6}$, c) $x = \frac{5\pi}{12}$, d) $x = \frac{\pi}{2}$,

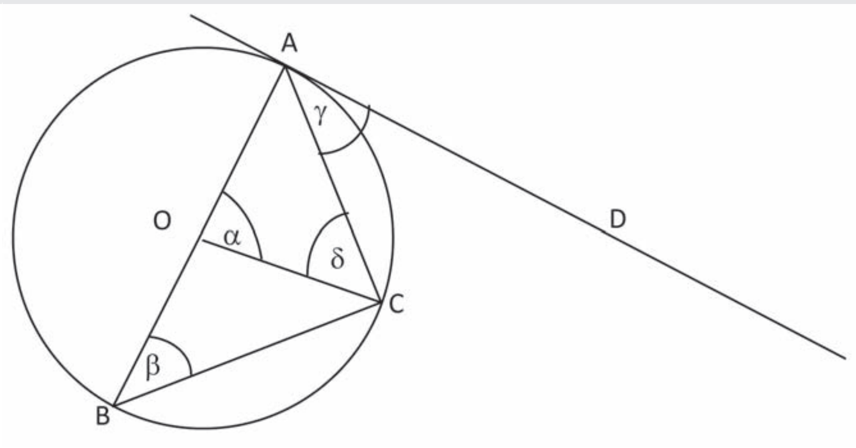
Rozwiązując powyższe równanie otrzymamy:

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ czyli $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

prawidłowa odpowiedź c)

7) PLANIMETRIA:
Poziom PP

a) korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu,



O –środek okręgu

- 80. Jaką miarę mają kąty β, γ, δ /zaznaczone na rysunku / jeżeli $\alpha=80°$:
  a) $\beta=40°$;$\delta=50°$; $\gamma=40°$ b) $\beta=40°$;$\delta=60°$; $\gamma=40°$
  c) $\beta=30°$;$\delta=50°$; $\gamma=40°$ d) $\beta=30°$;$\delta=40°$; $\gamma=30°$

  Wykorzystując twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku, kąt α -kąt środkowy, β - kąt wpisany opartym na tym samym łuku AC, można obliczyć miarę kąta $\beta=1/2*80°$. Natomiast miarę kąta δ możemy obliczyć z Δ AOC, który jest trójkątem równoramienny a suma kątów wewnętrznych wynosi 180° czyli $\delta= (180°-80°)/2= 50°$. Miara kąta OAC jest równa mierze kąta δ, z kolei miarę kąta γ możemy odliczyć $90°-\delta=40°$ ponieważ kąt OAD jest katem prostym.
  prawidłowa odpowiedź a)

b) wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym,

- 81. Technolog w fabryce zabawek musi obliczyć ile razy więcej zużyje farby na pomalowanie klocków, jeżeli każdy wymiar klocka zwiększy się 1,5 raza.
  a)2,5 b)1,5 c) 3 d)2,25

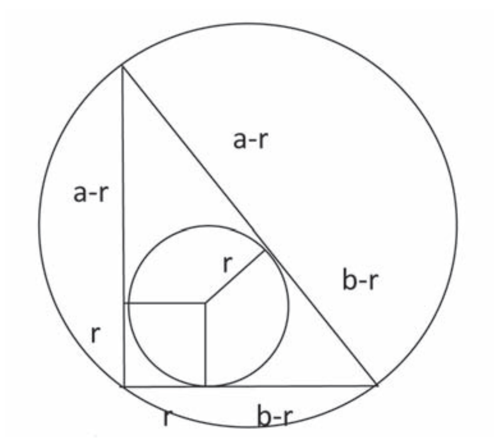
  Twierdzenie o stosunku pól figur podobnych mówi, że stosunek pól dwóch figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa tych figur.
  W naszym przypadku skala=1,5

  prawidłowa odpowiedź d)

- 82. Technolog w fabryce zabawek musi obliczyć ile razy więcej zużyje drewna na wytworzenie klocków, jeżeli każdy wymiar klocka zwiększy się 2 razy.
  a)2 b)3,375 c) 8 d)4

  W tym przypadku stosunek objętości dwóch brył podobnych równa się sześcianowi skali podobieństwa
  prawidłowa odpowiedź c)

- 83.Suma promieni okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6cm i 4 cm wynosi .
  a) 10cm b) 5cm c) 8cm d) 6cm
  Aby szybko rozwiązać to zadanie można posłużyć się rysunkiem



a,b- przyprostokątne
Długość przeciwprostokątnej czyli 2R=a-r+b-r
czyli R+r=(a+b)/2
prawidłowa odpowiedź b)

c) znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym,

■ 84. Pole trójkąta równoramiennego ma 360 cm^2. Wysokość padająca na podstawę ma długość 9cm. Podaj długości boków tego trójkąta.

a) podstawa=80cm, ramię 41 cm
b) podstawa=80cm, ramię 80 cm
c) podstawa=40cm, ramię 41 cm
d) podstawa=40cm, ramię 81 cm

prawidłowa odpowiedź a)

d) określa wzajemne położenie prostej i okręgu,

■ 85. Okrąg $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ ma z prostą $-3x+4y-1=0$

a)1 punkt wspólny
b) 2 punkty wspólne
c) 0 punktów wspólnych
d) nie da się określić

Obliczamy odległość środka okręgu od prostej, i w zależności czy obliczona odległośd jest większa, równa czy mniejsza od promienia r, prosta z okręgiem nie ma punktu wspólnego, jest styczna, lub ma 2 punkty wspólne.
prawidłowa odpowiedź b)

Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz:

a) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu,

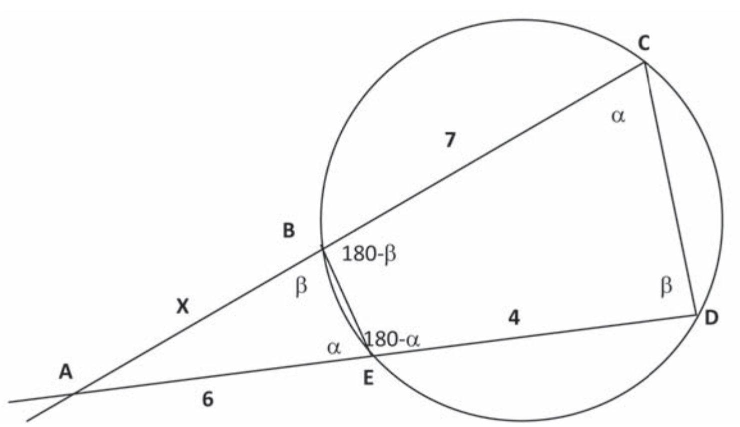
■ 86. Jakie miary mają dwa pozostałe kąty czworokąta wpisanego w okrąg, jeżeli dwa kąty ostre mają: 30° i 40°

a) 170° i 120° b) 70° i 50° c) 130° i 160° d)150° i 140°

W tym zadaniu wykorzystujemy własność ,że w dowolnym czworokącie wpisanym w okrąg suma miar przeciwległych katów wynosi 180°
prawidłowa odpowiedź d)

b) stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych,

■ 87. Na rysunku poniżej dwie sieczne przecinają okrąg
dane są odcinki|AE|=6cm; |ED|=4cm; |BC|=7cm;
Długość odcinka |AB| wynosi
a) 5cm b) 12 cm c) 10,5cm d)10 cm

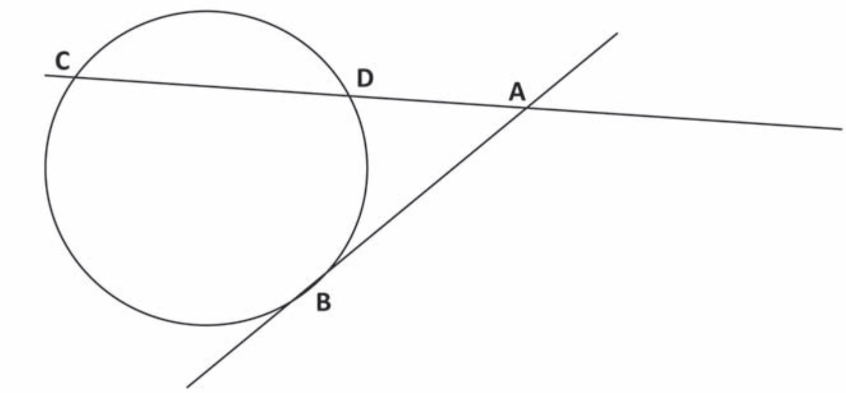


Rozwiązując to zadanie można skorzystać z odpowiedniego twierdzenie o siecznych lub zauważyć, że czworokąt EDCB jest wpisany w okrąg, więc suma katów leżących naprzeciwko równa jest 180°, Oznaczając miarę kąta CDE jako β, więc kąt CBE ma miarę (180°-β), a kąt do niego przyległy kąt ABE ma miarę β, analogicznie można przeprowadzić identyczne rozumowanie dla kąta α
Wniosek:
$\Delta ADC \sim \Delta AEB$ (KK)
Mając oznaczenia:
|AE|=6; |ED|=4; |BC|=7; |AB|=x

Jeżeli trójkąty są podobne to odpowiednie boki są do siebie proporcjonalne

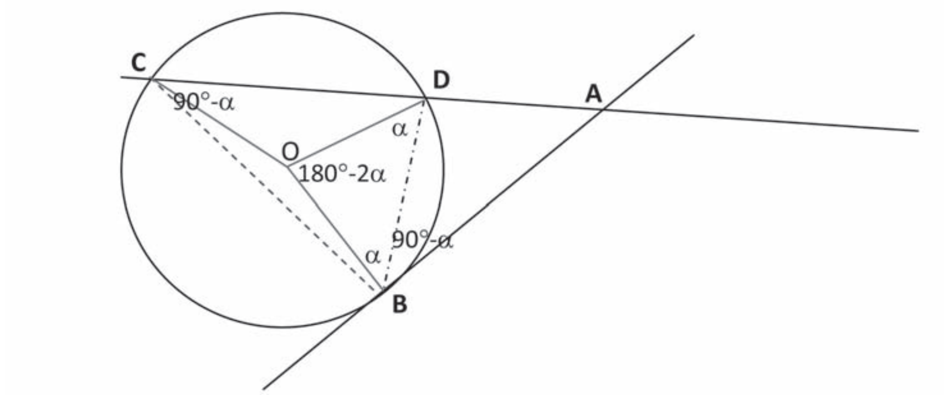
$$\frac{6+4}{x} = \frac{x+7}{6}$$

$x^2+7x=60$
$x^2+7x-60=0$
Obliczając pierwiastki $x_1=-12$ $x_2=5$
Tylko x=5 spełnia warunki zadania bo odległość nie może być ujemna
prawidłowa odpowiedź a)



88. Na rysunku powyżej mamy sieczną i styczną do okręgu. Dane są długości odcinków |CD|=16cm;|DA|=2cm. Długość |AB| wynosi
a)5,5 cm b) 6cm c)8cm d)6,5cm

Do rozwiązania potrzebne nam będą dodatkowe oznaczenia.



Przy rozwiązaniu można skorzystać z twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu czyli kąt DBA= kąt BCA (wynika to bezpośrednio z oznaczeń na rysunku powyżej)
– punkt O jest środkiem okręgu,
– wykorzystane jest tu twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku
– wykorzystana jest własność równoramiennego Δ ODB
– wykorzystana jest również własność, że kąt miedzy promieniem poprowadzonym do punktu styczności a styczną do okręgu jest prosty (kąt OBA)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek:
$\Delta ABD \sim \Delta ABC$ (z cechy kk)
odpowiednie boki są proporcjonalne
czyli

$$\frac{16+2}{|AB|} = \frac{|AB|}{2}$$

prawidłowa odpowiedź b)

c) stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym,

■ 89.Jaki wzór będzie miał okrąg $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ w jednokładności o środku P(3,2) i skali $k=-\frac{1}{2}$
a) $(x)^2+(y-2)^2=4$ b) $(x+1)^2+(y+6)^2=8$
c) $(x)^2+(y-2)^2=8$ d) $(x-4)^2+(y-4)^2=4$
Wystarczy w tym zadaniu przekształcić środek okręgu (1,-2) względem punktu P i skali k,
nowy promień =|k|* stary promień.
prawidłowa odpowiedź d)

d) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,

■ 90.Oblicz długość krótszej przekątnej równoległoboku jeżeli długości boków wynoszą 5cm i 4cm , a kat ostry między bokami=60°
a) $\sqrt{31}$ cm b) $\sqrt{61}$ cm c) 5 cm d)7 cm
prawidłowa odpowiedź a)

8) GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ (GEOMETRIA ANALITYCZNA):
Poziom PP

a) wykorzystuje pojęcie układu współrzędnych na płaszczyźnie,

■ 91. W której ćwiartce układu kartezjańskiego znajdują się punkty, które pierwszą współrzędną mają dodatnią a drugą ujemną
a) I b) II c) III d) IV
prawidłowa odpowiedź d)

b) podaje równanie prostej w postaci Ax + By + C = 0 lub y = ax + b , mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym,

■ 92. Wzór prostej danej w postaci ogólnej przechodzącej przez dwa punkty:
(1,-3); (-2,1) to:
a) 4x+3y+5=0 b) -4x+5y+3=0 c) x+2y +5=0 d) 3x+4y+5=0

Najprościej podstawić współrzędne punktów do równań i sprawdzić czy otrzymamy zdania prawdziwe
prawidłowa odpowiedź a)

c) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych,

■ 93. Które proste dane w postaci kierunkowej są parami prostopadłe

I- y=x+3 ; II- y=-x-4; III- y=2x-3; IV- $y=\frac{1}{2}x+3$;

V- $y=-\frac{1}{2}x+3$; VI- y=-2x-1

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

a)tylko (I i II) b)(III i IV) oraz (V i VI)
c)(I i II) oraz (III i V); (IV i VI) d)(III i V) oraz (II i VI)

Wiedząc, że aby proste były prostopadłe ich współczynniki kierunkowe muszą spełnić warunek $a_1a_2=-1$. Sprawdzamy Które pary spełniają ten warunek.
prawidłowa odpowiedź c)

d) interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi,

- 94.Który układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi da w interpretacji geometrycznej dwie proste równoległe nie pokrywające się.

I. y=2x+4 i 2y-4x-2=0
II. y=2x-3 i y=-2x+5
III y=-2x +5 i y+x=6
IV 2y+x-6=0 i y+2x-8=0
a) I b) II c) III d) IV

Rozwiązując algebraicznie taki układ powinniśmy otrzymać fałsz.
prawidłowa odpowiedź a)

e) oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej,

- 95. Odległość |AB|, jeżeli A=(-2;-1), B=(4;2) wynosi:

a)5 b) $3\sqrt{5}$ c) 3 d)45

Przy rozwiązaniu warto zastosować wzór $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
prawidłowa odpowiedź b)

f) wyznacza współrzędne środka odcinka,

- 96. Jeden z końców odcinka ma współrzędne (-3;2). Środek odcinka ma współrzędne (2;-1). Drugi koniec odcinka to:

a) (2,5;0,5) b) (7,-4) c) (-4,7) d)(0,5;2,5)

Mając końce odcinka łatwo sprawdzić gdzie średnia arytmetyczna odpowiednich współrzędnych da współrzędne środka odcinka.

$$x_s = \frac{x_p + x_k}{2}; y_s = \frac{y_p + y_k}{2}$$

(x_s,y_s) – współrzędne środka, (x_p,y_p) (x_k,y_k)- współrzędne końców odcinka
prawidłowa odpowiedź b)

g) posługuje się równaniem okręgu

- 97. Zbiór punktów równo oddalonych od punktu S=(-1,2) o odległość równą 3 dany jest wzorem:

a) $(x+1)^2+(y-2)^2=3$ b) $(x+1)^2+(y-2)^2=9$
c) $(x-1)^2+(y+2)^2=3$ d) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$
prawidłowa odpowiedź b)

Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz:

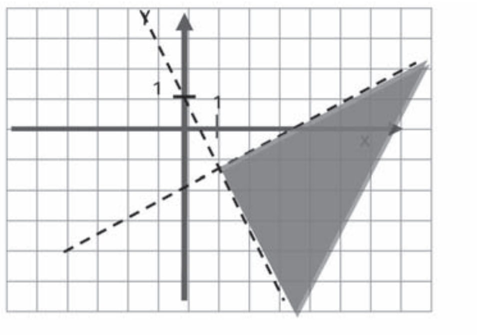
a) interpretuje geometrycznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi i układy takich nierówności,

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WARSZAWSKA WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

■ 98. Który układ prawidłowo opisuje punkty na płaszczyźnie zaznaczone niebieskim kolorem /rys niżej/ spełniające podane układy nierówności liniowych

a) y>2x-2 i y<0,5x+1 b) y>2x-2 i y>0,5x+1

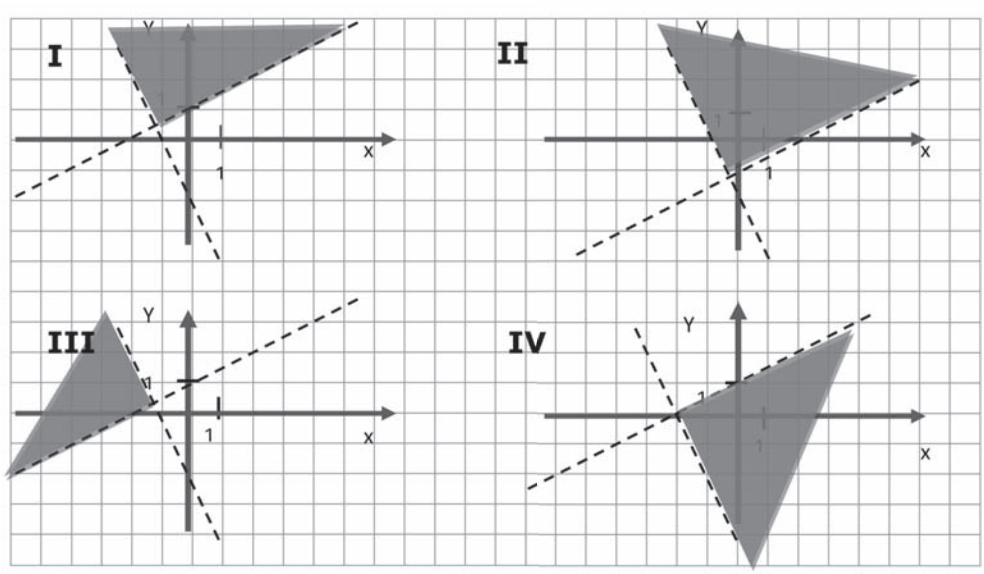
c) y>-2x+1 i y<0,5x-2 d) y<-2x-2 i y<0,5x-2



prawidłowa odpowiedź c)

■ 99. Na którym wykresie prawidłowo zilustrowano rozwiązanie układu nierówności z dwiema niewiadomymi: 2y>x+2 i y<-2x-2

a) I b) II c) III d) IV



Można w tym wypadku podstawić dowolne współrzędne punktu zacieniowanego obszaru do układu nierówności i sprawdzić czy otrzymamy nierówności prawdziwe.
prawidłowa odpowiedź c)

b) rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej,

■ 100. Mając wzory dwóch okręgów $(x+2)^2+(y-3)^2=16$ i $(x-4)^2+(y+2)^2=9$
Określ wzajemne położenie
a) mają 2 punkty wspólne - przecinają się
b) brak punktów wspólnych, okręgi leżą zewnętrznie
c) brak punktów wspólnych, okręgi są współśrodkowe
d) są styczne zewnętrznie
prawidłowa odpowiedź b)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

c) oblicza odległość punktu od prostej,

■ 101. W jakiej odległości jest punkt P(0;4) od prostej danej w postaci ogólnej 3x-4y+6=0

a)2 b) $\sqrt{2}$ c)1 d) 0

przy rozwiązaniu zadania użyjemy wzoru na odległość punktu $P(x_p;y_p)$ od prostej

Ax+By+C=0 $d=\frac{|Ax_p+By_p+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

prawidłowa odpowiedź a)

d) opisuje koła za pomocą nierówności,

■ 102. Która nierówność opisuje koło o środku (5,-3) i promieniu 2

a) $(x+5)^2+(x-3)^2 \le 2$ b) $(x-5)^2+(x+3)^2 \le 4$
c) $(x-5)^2+(x+3)^2 \le 2$ d) $(x-5)^2+(x+3)^2 \ge 4$
prawidłowa odpowiedź b)

e) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę,

■ 103. Dane są wektory $\vec{v}=[2x+1;5]$ i $\vec{w}=[3;y-1]$ oraz $\vec{u}=[3;y+1]$
Oblicz wartość x,y, jeżeli spełniony jest warunek $\vec{v}+2\vec{w}=\vec{u}$
a) x=2 y=1 b) x=-1 y=2 c) x=-2 y=-1 d) x=-2, y=-2
prawidłowa odpowiedź d)

f) interpretuje geometrycznie działania na wektorach,

■ 104. W równoległoboku ABCD dane są wektory $\overrightarrow{AB}$=[5;1] oraz $\overrightarrow{AD}$=[2;3]
Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$
a) $\overrightarrow{AC}$=[3;8] $\overrightarrow{BD}$=[-3;2] b) $\overrightarrow{AC}$=[4;7] $\overrightarrow{BD}$=[3,2]
c) $\overrightarrow{AC}$=[7;4] $\overrightarrow{BD}$=[-3;2] d) $\overrightarrow{AC}$=[8;3] $\overrightarrow{BD}$=[3;2]
prawidłowa odpowiedź c)

g) stosuje wektory do rozwiązywania zadań, a także do dowodzenia własności figur,

■ 105. Mając dane punkty A (3;1) , B(5,2), C(2,4). Znajdź współrzędne punktu D tak aby powstał równoległobok ABCD.
a) D(0;3) b)D(-1,3) c)D(0,2) d)D(1,3)

Można to zadanie rozwiązać graficznie na układzie współrzędnych, oznaczając odpowiednie punkty i z własności równoległoboku wyznaczając punkt D.
Algebraicznie rozwiązując korzystajmy również z własności równoległoboku czyli równości odpowiednich wektorów np.: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AB}$=[5-3;2-1]; $\overrightarrow{DC}$=[$2-x_D$;$4-y_D$]
czyli $2=2-x_D$; $1=4-y_D$
prawidłowa odpowiedź a)

h) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji,

■ 106.Wykres funkcji wykładniczej $y=2^{2x}$ po przesunięciu go o wektor [-1,2] ma wzór:
a) $y=2^{2x-1}-2$ b) $y=2^{2x-1}+2$ c) $y=2^{2x-2}+2$ d) $y=2^{2x-2}-1$
prawidłowa odpowiedź c)

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

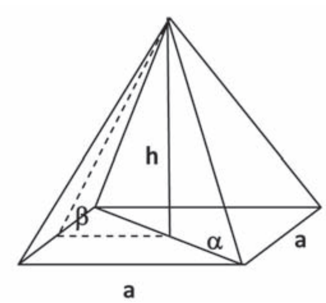
9) STEREOMETRIA:
Poziom PP

a) wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości,

- 107.Podaj wartość tgα oraz tgβ jeżeli α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, a kat β -kątem nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy (krawędź podstawy a=6cm, wysokość ostrosłupa h=4cm)

a) $\text{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ $\text{tg}\beta=\frac{4}{3}$ b) $\text{tg}\alpha=\frac{4}{3\sqrt{2}}$ $\text{tg}\beta=\frac{4}{3}$

c) $\text{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ $\text{tg}\beta=\frac{4}{3\sqrt{2}}$ d) $\text{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ $\text{tg}\beta=\frac{3}{4}$



a=6cm
h=4cm
Prawidłowa odpowiedź b)

- 108. Jaką objętość i pole powierzchni całkowitej ma ostrosłup prawidłowy czworokątny, jeżeli krawędź podstawy a=6cm, wysokość ostrosłupa h=4cm.

a) $P_{pc}=96cm^2$ $V=48cm^3$ b) $P_{pc}=96cm^2$ $V=228cm^3$
c) $P_{pc}=156cm^2$ $V=96cm^3$ d) $P_{pc}=156cm^2$ $V=228cm^3$
Prawidłowa odpowiedź a)

b) wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii,

- 109. Podaj objętość i pole powierzchni bocznej stożka, którego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{4}$ a długość obwodu podstawy ma 6π cm:

a) $P_{pc}=9(\pi+1)\ cm^2$ $V=3\pi\ cm^3$ b) $P_{pc}=9(\sqrt{2}+6)\ cm^2$ $V=6\pi\ cm^3$
c) $P_{pc}=6(\pi+1)\ cm^2$ $V=27\pi\ cm^3$ d) $P_{pc}=9\pi(\sqrt{2}+1)\ cm^2$ $V=9\pi\ cm^3$
Prawidłowa odpowiedź d)

Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz

a) wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną,

- 110. Pola przekrojów, zawierające wierzchołek sześcianu o boku 5 i przekątną przeciwległej podstawy to:

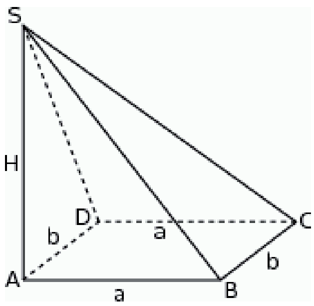
a) $P_1=12{,}5\sqrt{3}\ cm^2$ $P_2=25\sqrt{2}\ cm^2$ b) $P_1=25cm^2$ $P_2=\sqrt{6}\ cm^2$
c) $P_1=25\ cm^2$ $P_2=\sqrt{6}\ cm^2$ d) $P_1=12{,}5\ cm^2$ $P_2=2\sqrt{3}\ cm^2$
Prawidłowa odpowiedź a)

b) stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych,

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

■ 111. Ostrosłup ABCDS ma podstawie prostokąt o bokach a=4 cm, b=3 cm, krawędź boczna SA jest prostopadła do podstawy i ma długość 12 cm. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi.

a) $42+\sqrt{10}+\sqrt{17}\ cm^2$ b) $42+6(\sqrt{10}+\sqrt{17})cm^2$
c) $6(\sqrt{10}+\sqrt{17})cm^2$ d) $21+6(\sqrt{10}+\sqrt{17})cm^2$



Z warunków zadania wynika, że krawędź SA jest wysokością ostrosłupa.
Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa możemy przedstawić wzorem
$Ppb = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta ADS} + P_{\Delta DCS} + P_{\Delta BCS}$
Trójkąty: Δ ABS oraz ΔSDC są prostokątne – wynika to bezpośrednio z warunków zadania.

Czyli pole $P_{\Delta ABS}=\frac{1}{2}12\cdot4=24\ cm^2$, pole $P_{\Delta ADS}=\frac{1}{2}12\cdot3=18\ cm^2$

Z twierdzenie o trzech prostopadłych mamy:
Jeżeli prosta k(w naszym przypadku odcinek AB) jest rzutem prostokątnym prostej p (w naszym przypadku SB) na daną płaszczyznę (ABCD), to prosta m (odcinek BC) leżąca w tej płaszczyźnie jest prostopadła do prostej k (odcinek AB) wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do p(SB).
Czyli Δ BCS jest prostokątny, bo kąt SBC jest prosty, analogicznie DCS jest trójkątem prostokątnym.

Długość bok u $|BS| = \sqrt{12^2+4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ (z twierdzenia Pitagorasa).

Bok $|DS| = \sqrt{12^2+3^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$

pole $P_{\Delta BCS}=\frac{1}{2}4\sqrt{10}\cdot3 = 6\sqrt{10}\cdot cm^2$, pole $P_{\Delta DCS}=\frac{1}{2}3\sqrt{17}\cdot4 = 6\sqrt{17}\cdot cm^2$

$P_{pb}=24+18+6\sqrt{10}+6\sqrt{17} = 42+6(\sqrt{10}+\sqrt{17})cm^2$
Prawidłowa odpowiedź b)

10) ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ; TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA I KOMBINATORYKA:
Poziom PP

a) oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych,

klasa	ilość uczniów	średnia przeczytanych książek w miesiącu
1a	26	1,5
1b	24	1,5
1c	30	2,2
1d	20	3,4

■ 112. Jaka jest średnia arytmetyczna przeczytanych książek we wszystkich klasach pierwszych /tabela powyżej/

a)2,15 b)2 c)2,09 d)2,175

Dość powszechnym błędem przy obliczaniu średniej arytmetycznej jest obliczanie średniej ze średniej. Prawidłowe rozwiązanie to odliczenie przeczytanych książek przez poszczególne klasy:

1a 26*1,5=39
1b 24*1,5=36
1c 30*2,2=66
1d 20*3,4=68

W sumie przeczytanych książek w klasach I jest 209, a uczniów w sumie jest 100. Czyli średnia 2,09. prawidłowa odpowiedź c)

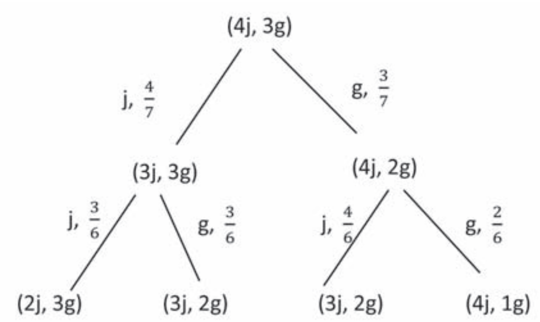
■ 113. Jasio w ciągu całego semestru z matematyki otrzymał następujące oceny:
Prace klasowe: 5,4,3,5
Kartkówki:4,3,5,5
Odpowiedzi ustne:3,5,5
Prace domowe: 5,5
Jeżeli waga pracy klasowej wynosi 1,2; kartkówki 1; odpowiedzi 1,1; prac domowych:0,7 - to średnia ważona wynosi: /średnią podaj zaokrągloną do 2 miejsc po przecinku/.
a)4,52 b)4,51 c)4,38 d)4,25
prawidłowa odpowiedź a)

■ 114. Ania w ciągu całego semestru z matematyki otrzymał następujące oceny:
3- dst; 2-db; 4-bdb; 1-cel;
Oblicz medianę i odchylenie standardowe tych ocen /wyniki podaj zaokrąglone do 2 miejsc po przecinku/.
a) mediana=5 ,00 odchylenie stand.=1,05
b) mediana=4,05 odchylenie stand.=1,10
c) mediana=4,50 odchylenie stand.=1,06
d) mediana=4,00 odchylenie stand.=1,10
mediana to środkowy element uporządkowanego zbioru jeżeli ma nieparzystą ilość elementów, lub przy parzystej ilości średnia arytmetyczna dwóch środkowych elementów. Do obliczenia odchylenia standardowego stosujemy wzór podany w tablicach matematycznych
prawidłowa odpowiedź c)

b) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia,

■ 115. W koszu znajdują się 4 jabłka i 3 gruszki. Wyciągamy losowo z koszyka 2 owoce. Oblicz prawdopodobieństwo, że będą to owoce tego samego rodzaju.
a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{8}{42}$ c) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{3}{7}$

Losując z koszyka dwa owoce to identyczna sytuacja z losowaniem dwa razy po jednym owocu Przy rozwiązaniu tego zadania bez użycia wzorów kombinatorycznych najlepiej narysować „drzewo”.



Na górze znajduje się stan początkowy koszyka, I piętro to I losowanie czyli 2 możliwości „gałęzie”(do wylosowania jest albo jabłko albo gruszka). Na gałęziach „wiszą” prawdopodobieństwa klasyczne

wystąpienia takiej sytuacji. Później piszemy stan koszyka po wylosowaniu określonego owocu i dalej sytuacja analogiczna do poprzedniej przy II losowaniu.
Jak mamy już gotowe „drzewo" posługujemy się dwiema regułami: reguła „mnożenia" wszystkich wiszących prawdopodobieństw na drodze, która pasuje do wyliczanego prawdopodobieństwa, oraz reguła dodawania poszczególnych pasujących dróg.
A- zdarzenie polegające na tym, że wylosowane owoce będą tego samego rodzaju.

P(A)=$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{12+6}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$

prawidłowa odpowiedź d)

c) wykorzystuje sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń,

■ 116. Dane są prawdopodobieństwa P(A)= $\frac{3}{7}$; P(A $\cup$ B)= $\frac{9}{14}$; P(A $\cap$ B)= $\frac{2}{7}$. Oblicz P(B).

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{14}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{3}{7}$

Przy rozwiązaniu tego zadania należy wykorzystać wzór
P(A $\cup$ B)= P(A)+P(B)-P(A $\cap$ B)
prawidłowa odpowiedź a)

d) zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.

■ 117. Przy jednoczesnym rzucie 2 sześciennymi kostkami oblicz prawdopodobieństwo że iloczyn wyrzuconych oczek jest parzysty .

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{1}{4}$

■ Zbiór Ω (czyli wszystkie możliwe zdarzenia elementarne w danym doświadczeniu losowym) można oczywiście wypisać Ω={(1,1);(1,2);(1,3);...(6,5);(6,6)}, będzie to oczywiście czasochłonne. Moc Ω|=36=6^2
A – zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wylosowanych liczb będzie liczbą parzystą
A' – zdarzenie przeciwne do A czyli iloczyn wylosowanych liczb będzie liczbą nieparzystą
Aby iloczyn dwóch liczb naturalnych był nieparzysty obie liczby muszą być nieparzyste
Wygodniej będzie wypisać elementy zbioru A' , a później wykorzystać wzór P(A)=1-P(A')
A'={(1,1);(1,3);(1,5);(3,1);(3,3);(3,5);(5,1);(5,3);(5,5)}

|A'|=9, P(A')= $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

P(A)=1 – $\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

prawidłowa odpowiedź b)

Poziom PR
jak na poziomie podstawowym oraz

wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.

■ 118. Na przystanku tramwajowym czeka 6 pasażerów. Wszyscy będą wsiadać do nadjeżdżającego tramwaju składającego się z trzech wagonów. Oblicz prawdopodobieństwo, że do każdego wagonu wejdzie tyle samo osób

a) $\frac{10}{81}$ b) $\frac{47}{216}$ c) $\frac{90}{216}$ d) $\frac{101}{729}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Moc $|\Omega|=3^6=729$ (6-elementowe ciągi-kolejność istotna, liczb ze zbioru 3-elementowego, elementy mogą się powtarzać n=3; k=6 ; wariacje z powtórzeniami n^k)
Pasażerów oznaczymy liczbami arabskimi, wagoniki liczbami rzymskimi

I	I	II	III	II	III
1	2	3	4	5	6

Przykładowe wejście do tramwaju z zachowaniem warunków zadania wygląda następująco:

Zawsze muszą być 2-I, 2-II, 2-III, możliwe są wszystkie przestawienia tych elementów.
A –zdarzenie polegające na tym, że wszyscy pasażerowie po równo wejdą do trzech wagonów tramwaju.
Można zastosować do obliczenia |A| permutacje z powtórzeniami gdzie
$n=6\ k_1=2, k_2=2,\ k_3=2$

$$|A|=\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{720}{8}=90$$

$$P(A)==\frac{90}{729}=\frac{10}{81}$$

prawidłowa odpowiedź a)

Etapy rozwiązywania zadań:
– analiza zadania → czytanie treści → interpretowanie zadania → wybór metody
– rozwiązanie zadania → wykonywanie rysunku, obliczeń → zapis rozwiązania
– sformułowanie odpowiedzi → sprawdzenie wyniku z warunkami zadania → podanie odpowiedzi.

„Wyobraźnia jest jeszcze ważniejsza niż posiadana wiedza."
Albert Einstein

Zadania z arkusza egzaminacyjnego z matematyki PP z roku 2011
http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/P/matematyka_pp.pdf

Zadania z arkusza egzaminacyjnego z matematyki PR z roku 2011
http://www.cke.edu.pl/images/stories/00002011_matura/R/pr_matematyka.pdf

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego