

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Sortowanie pozycyjne i algorytmy zachłanne

zajęcia 3.

Marcin Andrychowicz, Tomasz Kulczyński,
Błażej Osiński

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Metoda pozwalająca sortować w **czasie liniowym**
- Ciąg liczb z zakresu $0, 1, \dots, M$

Dane

5, 1, 4, 5, 1, 0, 4, 5, 1, 3, 5

- Zliczamy wystąpienia 0, 1, itd. aż do M .

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Metoda pozwalająca sortować w **czasie liniowym**
- Ciąg liczb z zakresu $0, 1, \dots, M$

Dane

5, 1, 4, 5, 1, 0, 4, 5, 1, 3, 5

- Zliczamy wystąpienia 0, 1, itd. aż do M .

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Metoda pozwalająca sortować w **czasie liniowym**
- Ciąg liczb z zakresu $0, 1, \dots, M$

Dane

5, 1, 4, 5, 1, 0, 4, 5, 1, 3, 5

- Zliczamy wystąpienia 0, 1, itd. aż do M .

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Pomocnicza tablica c

i	0	1	2	3	4	5
$c[i]$	1	3	0	1	2	4

- Wstawiamy $c[0]$ zer, $c[1]$ jedynek, itd.

Wynik

0, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Dodatkowe wymaganie

- Tablica o M -elementach.
- Nie zawsze można pozwolić sobie na zużycie takiej ilości pamięci!

Złożoność czasowa

- Zależy od:
 - n - długości ciągu
 - M - zakresu liczb
- $O(n + M)$ - złożoność liniowa.

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Dodatkowe wymaganie

- Tablica o M -elementach.
- Nie zawsze można pozwolić sobie na zużycie takiej ilości pamięci!

Złożoność czasowa

- Zależy od:
 - n - długości ciągu
 - M - zakresu liczb
- $O(n + M)$ - złożoność liniowa.

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Dodatkowe wymaganie

- Tablica o M -elementach.
- Nie zawsze można pozwolić sobie na zużycie takiej ilości pamięci!

Złożoność czasowa

- Zależy od:
 - n - długości ciągu
 - M - zakresu liczb
- $O(n + M)$ - złożoność liniowa.

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Dodatkowe wymaganie

- Tablica o M -elementach.
- Nie zawsze można pozwolić sobie na zużycie takiej ilości pamięci!

Złożoność czasowa

- Zależy od:
 - n - długości ciągu
 - M - zakresu liczb
- $O(n + M)$ - złożoność liniowa.

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Dodatkowe wymaganie

- Tablica o M -elementach.
- Nie zawsze można pozwolić sobie na zużycie takiej ilości pamięci!

Złożoność czasowa

- Zależy od:
 - n - długości ciągu
 - M - zakresu liczb
- $O(n + M)$ - złożoność liniowa.

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Dodatkowe wymaganie

- Tablica o M -elementach.
- Nie zawsze można pozwolić sobie na zużycie takiej ilości pamięci!

Złożoność czasowa

- Zależy od:
 - n - długości ciągu
 - M - zakresu liczb
- $O(n + M)$ - złożoność liniowa.

Przydatne pojęcia

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Definicja 1.

Sortowanie nazywamy **stabilnym** gdy dwa równe elementy z ciągu, pozostawia w tym samym porządku co przed wykonaniem algorytmu.

- sortowanie przez zliczanie można uczynić stabilnym

Definicja 2.

Sufiksem słowa nazywamy pewną jego końcową część
np. *racja* jest sufiksem słowa *demokracja*

Przydatne pojęcia

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Definicja 1.

Sortowanie nazywamy **stabilnym** gdy dwa równe elementy z ciągu, pozostawia w tym samym porządku co przed wykonaniem algorytmu.

- sortowanie przez zliczanie można uczynić stabilnym

Definicja 2.

Sufiksem słowa nazywamy pewną jego końcową część
np. *racja* jest sufiksem słowa *demokracja*

Sortowanie leksykograficzne

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Dane n słów k -literowych.

Należy posortować je w kolejności leksykograficznej.

Pomysł

Sortujemy stabilnie względem liter na kolejnych pozycjach poczynając od ostatniej, a kończąc na pierwszej.

Łącznie k sortowań przez zliczanie.

Sortowanie leksykograficzne

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Dane n słów k -literowych.

Należy posortować je w kolejności leksykograficznej.

Pomysł

Sortujemy stabilnie względem liter na kolejnych pozycjach poczynając od ostatniej, a kończąc na pierwszej.

Łącznie k sortowań przez zliczanie.

Kolejność sortowania

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- *Teza:* Po wykonaniu k sortowań słowa są uporządkowane względem swoich k -literowych sufiksów.
- Dowód indukcyjny:
- Baza indukcji: sortowanie 1-literowych sufiksów.
- Krok indukcyjny: dwa przypadki:

Różne litery

*aab*abca
*aab*ebca

Te same litery

*aab*abaa
*aab*abab

Kolejność sortowania

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- *Teza:* Po wykonaniu k sortowań słowa są uporządkowane względem swoich k -literowych sufiksów.
- **Dowód indukcyjny:**
 - Baza indukcji: sortowanie 1-literowych sufiksów.
 - Krok indukcyjny: dwa przypadki:

Różne litery

*aab*abca
*aab*ebca

Te same litery

*aab*abaa
*aab*abab

Kolejność sortowania

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- *Teza:* Po wykonaniu k sortowań słowa są uporządkowane względem swoich k -literowych sufiksów.
- Dowód indukcyjny:
- Baza indukcji: sortowanie 1-literowych sufiksów.
- Krok indukcyjny: dwa przypadki:

Różne litery

*aab*abca
*aab*ebca

Te same litery

*aab*abaa
*aab*abab

Kolejność sortowania

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- *Teza:* Po wykonaniu k sortowań słowa są uporządkowane względem swoich k -literowych sufiksów.
- Dowód indukcyjny:
- Baza indukcji: sortowanie 1-literowych sufiksów.
- Krok indukcyjny: dwa przypadki:

Różne litery

*aab***a***bca*
*aab***e***bca*

Te same litery

*aab***a***baa*
*aab***a***bab*

Kolejność sortowania

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- *Teza*: Po wykonaniu k sortowań słowa są uporządkowane względem swoich k -literowych sufiksów.
- Dowód indukcyjny:
- Baza indukcji: sortowanie 1-literowych sufiksów.
- Krok indukcyjny: dwa przypadki:

Różne litery

*aab***a***bc**a*
*aab***e***bc**a*

Te same litery

*aab***a***baa*
*aab***a***bab*

- OK, dzięki
stabilności.

Złożoność czasowa

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- **k -krotne uruchomienie sortowania przez zliczanie**
- Złożoność: $O(k \cdot (n + \Sigma))$
 - Σ - wielkość alfabetu.
- ...proporcjonalna do wielkości danych, czyli liniowa.

Złożoność czasowa

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- k -krotne uruchomienie sortowania przez zliczanie
- Złożoność: $O(k \cdot (n + \Sigma))$
 - Σ - wielkość alfabetu.
- ...proporcjonalna do wielkości danych, czyli liniowa.

Złożoność czasowa

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- k -krotne uruchomienie sortowania przez zliczanie
- Złożoność: $O(k \cdot (n + \Sigma))$
 - Σ - wielkość alfabetu.
- ...proporcjonalna do wielkości danych, czyli **liniowa**.

Metoda zachłanna

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Idea

Wybieramy **chwilowo** (lokalnie) najlepsze możliwości,
które utworzą optymalne rozwiązanie.

Problem kinomana

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana

Wydawanie reszty

Minimalizacja kar

Podsumowanie

Problem

Kinoman ma do dyspozycji repertuar kina, z godzinami rozpoczęcia i zakończenia seansów.

Jak powinien wybierać filmy by zobaczyć ich jak najwięcej?

Rozwiązanie zachłanne

Należy zawsze wybierać film kończący się najwcześniej.

Dowód indukcyjny

Oczywisty.

Problem kinomana

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana

Wydawanie reszty

Minimalizacja kar

Podsumowanie

Problem

Kinoman ma do dyspozycji repertuar kina, z godzinami rozpoczęcia i zakończenia seansów.

Jak powinien wybierać filmy by zobaczyć ich jak najwięcej?

Rozwiązanie zachłanne

Należy zawsze wybierać film kończący się najwcześniej.

Dowód indukcyjny

Oczywisty.

Problem kinomana

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana

Wydawanie reszty

Minimalizacja kar

Podsumowanie

Problem

Kinomana ma do dyspozycji repertuar kina, z godzinami rozpoczęcia i zakończenia seansów.

Jak powinien wybierać filmy by zobaczyć ich jak najwięcej?

Rozwiązanie zachłanne

Należy zawsze wybierać film kończący się najwcześniej.

Dowód indukcyjny

Oczywisty.

Wydawanie reszty

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Mamy do dyspozycji pewne nominały monet, chcielibyśmy wydać określoną kwotę.

Jak to zrobić za pomocą minimalnej liczby monet?

Rozwiązanie zachłanne

Wybieramy zawsze monetę o największym nominale, która mieści się w wydawanej kwocie.

Poprawność

- Kwota 12, dostępne nominały: 1, 4, 8, 10
- Wynik algorytmu zachłannego: 10, 1, 1
- Rozwiązanie optymalne: 8, 4
- Strategia zachłanna jest niepoprawna!

Wydawanie reszty

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Mamy do dyspozycji pewne nominały monet, chcielibyśmy wydać określoną kwotę.

Jak to zrobić za pomocą minimalnej liczby monet?

Rozwiązanie zachłanne

Wybieramy zawsze monetę o największym nominale, która mieści się w wydawanej kwocie.

Poprawność

- Kwota 12, dostępne nominały: 1, 4, 8, 10
- Wynik algorytmu zachłannego: 10, 1, 1
- Rozwiązanie optymalne: 8, 4
- Strategia zachłanna jest niepoprawna!

Wydawanie reszty

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Mamy do dyspozycji pewne nominały monet, chcielibyśmy wydać określoną kwotę.

Jak to zrobić za pomocą minimalnej liczby monet?

Rozwiązanie zachłanne

Wybieramy zawsze monetę o największym nominale, która mieści się w wydawanej kwocie.

Poprawność

- Kwota 12, dostępne nominały: 1, 4, 8, 10
- Wynik algorytmu zachłannego: 10, 1, 1
- Rozwiązanie optymalne: 8, 4
- Strategia zachłanna jest niepoprawna!

Wydawanie reszty

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Mamy do dyspozycji pewne nominały monet, chcielibyśmy wydać określoną kwotę.

Jak to zrobić za pomocą minimalnej liczby monet?

Rozwiązanie zachłanne

Wybieramy zawsze monetę o największym nominale, która mieści się w wydawanej kwocie.

Poprawność

- Kwota 12, dostępne nominały: 1, 4, 8, 10
- Wynik algorytmu zachłannego: 10, 1, 1
- Rozwiązanie optymalne: 8, 4
- Strategia zachłanna jest niepoprawna!

Wydawanie reszty

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Mamy do dyspozycji pewne nominały monet, chcielibyśmy wydać określoną kwotę.

Jak to zrobić za pomocą minimalnej liczby monet?

Rozwiązanie zachłanne

Wybieramy zawsze monetę o największym nominale, która mieści się w wydawanej kwocie.

Poprawność

- Kwota 12, dostępne nominały: 1, 4, 8, 10
- Wynik algorytmu zachłannego: 10, 1, 1
- Rozwiązanie optymalne: 8, 4
- Strategia zachłanna jest niepoprawna!

Wydawanie reszty

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Mamy do dyspozycji pewne nominały monet, chcielibyśmy wydać określoną kwotę.

Jak to zrobić za pomocą minimalnej liczby monet?

Rozwiązanie zachłanne

Wybieramy zawsze monetę o największym nominale, która mieści się w wydawanej kwocie.

Poprawność

- Kwota 12, dostępne nominały: 1, 4, 8, 10
- Wynik algorytmu zachłannego: 10, 1, 1
- Rozwiązanie optymalne: 8, 4
- **Strategia zachłanna jest niepoprawna!**

Minimalizacja kar

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne
Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Firma zwleka z wykonaniem n -zadań. Wykonanie i -tego zadania zajmuje d_i dni, a za każdy dzień opóźnienia trzeba zapłacić z_i złotych kary.

W jakiej kolejności należy wykonywać zadania, by zapłacić jak najniższą karę?

Nieoczywiste rozwiązanie zachłanne

Należy wybierać zadania względem malejącego współczynnika $\frac{z_i}{d_i}$

Minimalizacja kar

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne
Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

Problem

Firma zwleka z wykonaniem n -zadań. Wykonanie i -tego zadania zajmuje d_i dni, a za każdy dzień opóźnienia trzeba zapłacić z_i złotych kary.

W jakiej kolejności należy wykonywać zadania, by zapłacić jak najniższą karę?

Nieoczywiste rozwiązanie zachłanne

Należy wybierać zadania względem malejącego współczynnika $\frac{z_i}{d_i}$

Dowód, przez sprzeczność

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Optymalna kolejność wykonywania $1, 2, \dots, n$,
ale dla pewnego k :

$$\frac{z_k}{d_k} < \frac{z_{k+1}}{d_{k+1}}$$

- Obecne kary:

$$d_k \cdot z_k + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_{k+1} = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_k \cdot z_{k+1}$$

- Po zamianie miejscami k i $k + 1$:

$$d_{k+1} \cdot z_{k+1} + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_k = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_{k+1} \cdot z_k$$

- Po odjęciu stronami:

$$d_k \cdot z_{k+1} - d_{k+1} \cdot z_k > 0$$

- bo:

$$d_{k+1} \cdot z_k < d_k \cdot z_{k+1}$$

- Sprzeczność!

Dowód, przez sprzeczność

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Optymalna kolejność wykonywania $1, 2, \dots, n$, ale dla pewnego k :

$$\frac{z_k}{d_k} < \frac{z_{k+1}}{d_{k+1}}$$

- Obecne kary:

$$d_k \cdot z_k + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_{k+1} = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_k \cdot z_{k+1}$$

- Po zamianie miejscami k i $k + 1$:

$$d_{k+1} \cdot z_{k+1} + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_k = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_{k+1} \cdot z_k$$

- Po odjęciu stronami:

$$d_k \cdot z_{k+1} - d_{k+1} \cdot z_k > 0$$

- bo:

$$d_{k+1} \cdot z_k < d_k \cdot z_{k+1}$$

- Sprzeczność!

Dowód, przez sprzeczność

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Optymalna kolejność wykonywania $1, 2, \dots, n$,
ale dla pewnego k :

$$\frac{z_k}{d_k} < \frac{z_{k+1}}{d_{k+1}}$$

- Obecne kary:

$$d_k \cdot z_k + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_{k+1} = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_k \cdot z_{k+1}$$

- Po zamianie miejscami k i $k + 1$:

$$d_{k+1} \cdot z_{k+1} + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_k = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_{k+1} \cdot z_k$$

- Po odjęciu stronami:

$$d_k \cdot z_{k+1} - d_{k+1} \cdot z_k > 0$$

- bo:

$$d_{k+1} \cdot z_k < d_k \cdot z_{k+1}$$

- Sprzeczność!

Dowód, przez sprzeczność

- Optymalna kolejność wykonywania $1, 2, \dots, n$, ale dla pewnego k :

$$\frac{z_k}{d_k} < \frac{z_{k+1}}{d_{k+1}}$$

- Obecne kary:

$$d_k \cdot z_k + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_{k+1} = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_k \cdot z_{k+1}$$

- Po zamianie miejscami k i $k + 1$:

$$d_{k+1} \cdot z_{k+1} + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_k = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_{k+1} \cdot z_k$$

- Po odjęciu stronami:

$$d_k \cdot z_{k+1} - d_{k+1} \cdot z_k > 0$$

- bo:

$$d_{k+1} \cdot z_k < d_k \cdot z_{k+1}$$

- Sprzeczność!

Dowód, przez sprzeczność

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem kinomana
Wydawanie reszty
Minimalizacja kar
Podsumowanie

- Optymalna kolejność wykonywania $1, 2, \dots, n$, ale dla pewnego k :

$$\frac{z_k}{d_k} < \frac{z_{k+1}}{d_{k+1}}$$

- Obecne kary:

$$d_k \cdot z_k + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_{k+1} = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_k \cdot z_{k+1}$$

- Po zamianie miejscami k i $k + 1$:

$$d_{k+1} \cdot z_{k+1} + (d_k + d_{k+1}) \cdot z_k = d_k \cdot z_k + d_{k+1} \cdot z_{k+1} + d_{k+1} \cdot z_k$$

- Po odjęciu stronami:

$$d_k \cdot z_{k+1} - d_{k+1} \cdot z_k > 0$$

- bo:

$$d_{k+1} \cdot z_k < d_k \cdot z_{k+1}$$

- **Sprzeczność!**

Podsumowanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana

Wydawanie reszty

Minimalizacja kar

Podsumowanie

Metody zachłanne

- Są intuicyjne, dają wydajne algorytmy.
- Jednak często są tylko pozornie poprawne!

Podsumowanie

Sortowanie
pozycyjne i
algorytmy
zachłanne

Sortowanie
pozycyjne
przez zliczanie
leksykograficzne

Algorytmy
zachłanne

Problem knomana

Wydawanie reszty

Minimalizacja kar

Podsumowanie

Metody zachłanne

- Są intuicyjne, dają wydajne algorytmy.
- **Jednak często są tylko pozornie poprawne!**